KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

k-SABİT EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gönül ÖZTÜRK

HAZİRAN 2019
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

k-SABİT EĞRİLER

Gönül ÖZTÜRK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 / 05 /2019
Tezin Savunma Tarihi : 20 / 06 /2019

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU

Trabzon 2019

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALINDA
Gönül ÖZTÜRK Tarafından Hazırlanan

k-SABİT EĞRİLER

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 28 / 05 / 2019 gün ve 1806 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Ömer PEKŞEN ....

Üye : Prof. Dr. Aydın GEZER ....

Üye : Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU ....

Prof. Dr. Asim KADIOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmada k-sabit eğrilerin tanımları verilerek, bu eğrilerin Frenet büyüklükleri incelenmiştir.

Öncelikle, tez konusunun belirlenmesi ve çalışmanın bu biçimi almasında payı büyük olan ve her an yardımını esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU' na teşekkür eder, saygı ve sevgilerimi sunarım.

Ayrıca bu süreçte hep yanımda olan, her zaman beni yüreklendiren, destek veren, bana moral ve motivasyon sağlayan ablam Hülya KÖSE' ye çok teşekkür ederim. Sevgi ve saygılarımı sunarım.

Gönül ÖZTÜRK

Trabzon 2019

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "k-Sabit Eğriler" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU'nun sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 20/06/2019.

Gönül ÖZTÜRK

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

k-SABİT EĞRİLER

Gönül ÖZTÜRK

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU
2019, 65 Sayfa

Bu tezde, k-sabit eğrilerin tanımları verilmiştir ve bu eğrilerin Frenet çatıları, eğrilik ve burulma fonksiyonları hesaplanmıştır.

Birinci bölümde, çalışmanın alt yapısını oluşturan 3-boyutlu Öklid Uzayı, 3-boyutlu Öklid Uzayında Eğriler, Eğrilerin Birim Hız Parametrelenişi, 3-boyutlu Öklid Uzayında Vektör Alanları, Birim Hızlı Eğrilerde ve Keyfi Hızlı Eğrilerde Frenet Formülleri verilmiştir.

İkinci bölümde, birim hızlı bir eğriden türetilen k-sabit teğet, k-sabit normal ve k-sabit binormal eğrilerinin tanımları verilmiştir. Bu eğrilerin Frenet çatıları, eğrilik ve burulma fonksiyonları, birim hızlı eğrinin Frenet büyüklükleri kullanılarak belirlenmiştir. Son olarak, bir birim hızlı eğrinin k-sabit eğrileri örnekleri verilmiş ve onların Frenet büyüklükleri hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Eğri, Frenet Çatısı, Eğrilik ve Burulma Fonksiyonları

Master Thesis

SUMMARY

k-CONSTANT CURVES

Gönül ÖZTÜRK

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Yasemin SAĞIROĞLU
2019, 65 Pages

In this thesis, definitions of k-constant curves are given and Frenet frame, curvature and torsion functions of these curves are calculated.

In Chapter 1, forming the infrastructure of the study, 3-dimensional Euclidean Space, Curves in the 3-dimensional Euclidean Space, Unit Speed Parametrization of Curves, Vector Fields in 3-dimensional Euclidean Space, Frenet Formulas in Unit Speed Curves and Arbitrary Speed Curves are given.

In Chapter 2, the definitions of k-constant tangent, k-constant normal and k-constant binormal curves derived from a unit speed curve are given. Frenet frames, curvature and torsion functions of these curves are determined by using Frenet apparatus of the unit speed curve. Finally, examples of k-constant curves of a unit-speed curve are given and their Frenet apparatus are calculated.

Key Words: Curve, Frenet Frame, Curvature and Torsion Functions

SEMBOLLER DİZİNİ

R^3	: Üç boyutlu Öklid uzayı
$T_p(R^3)$	: $p \in R^3$ noktasındaki teğet uzay
$\boldsymbol{v_p}$	: Teğet vektör
$\lVert \boldsymbol{v_p} \rVert$	: $\boldsymbol{v_p}$ teğet vektörünün normu
$\boldsymbol{v_p}.\boldsymbol{w_p}$	: $\boldsymbol{v_p}$ ile $\boldsymbol{w_p}$ teğet vektörlerinin nokta çarpımı
$\boldsymbol{v_p} \times \boldsymbol{w_p}$	: $\boldsymbol{v_p}$ ile $\boldsymbol{w_p}$ teğet vektörlerinin vektörel çarpımı
$\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$	: Çatı
V, W	: Vektör alanı
$\alpha(t)$	: R^3 de bir eğri
$\boldsymbol{\alpha}'(t)$	: $\alpha(t)$ eğrisinin hız vektörü
$\boldsymbol{\alpha}''(t)$	: $\alpha(t)$ eğrisinin ivme vektörü
$\boldsymbol{v_p}[f]$	: f fonksiyonunun $\boldsymbol{v_p}$ teğet vektörü doğrultusundaki türevi
$s(t)$	: Yay uzunluğu fonksiyonu
$\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$	: Bir eğrinin Frenet çatı alanı
κ	: Eğrilik fonksiyonu
τ	: Burulma fonksiyonu
$\boldsymbol{\alpha_t}(s)$	: Bir eğrinin k-sabit teğet eğrisi
$\boldsymbol{\alpha_n}(s)$	: Bir eğrinin k-sabit normal eğrisi
$\boldsymbol{\alpha_b}(s)$	: Bir eğrinin k-sabit binormal eğrisi
$\boldsymbol{t_t}(s)$	: $\boldsymbol{\alpha_t}(s)$ eğrisinin birim teğet vektörü
$\boldsymbol{n_t}(s)$	: $\boldsymbol{\alpha_t}(s)$ eğrisinin birim normal vektörü
$\boldsymbol{b_t}(s)$	: $\boldsymbol{\alpha_t}(s)$ eğrisinin binormal vektörü

$\kappa_t(s)$: $\boldsymbol{\alpha_t}(s)$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu

$\tau_t(s)$: $\boldsymbol{\alpha_t}(s)$ eğrisinin burulma fonksiyonu

$\boldsymbol{t_n}(s)$: $\boldsymbol{\alpha_n}(s)$ eğrisinin birim teğet vektörü

$\boldsymbol{n_n}(s)$: $\boldsymbol{\alpha_n}(s)$ eğrisinin birim normal vektörü

$\boldsymbol{b_n}(s)$: $\boldsymbol{\alpha_n}(s)$ eğrisinin binormal vektörü

$\kappa_n(s)$: $\boldsymbol{\alpha_n}(s)$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu

$\tau_n(s)$: $\boldsymbol{\alpha_n}(s)$ eğrisinin burulma fonksiyonu

$\boldsymbol{t_b}(s)$: $\boldsymbol{\alpha_b}(s)$ eğrisinin birim teğet vektörü

$\boldsymbol{n_b}(s)$: $\boldsymbol{\alpha_b}(s)$ eğrisinin birim normal vektörü

$\boldsymbol{b_b}(s)$: $\boldsymbol{\alpha_b}(s)$ eğrisinin binormal vektörü

$\kappa_b(s)$: $\boldsymbol{\alpha_b}(s)$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu

$\tau_b(s)$: $\boldsymbol{\alpha_b}(s)$ eğrisinin burulma fonksiyonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Eğrilerin diferansiyel geometrisi Öklid uzayında diferansiyel ve integral metodlar kullanılarak eğrilere ait tüm bilgileri inceleyen geometri dalıdır. Eğrilerin diferansiyel geometrisinde bu amaçla, çoğunlukla eğriler parametrik denklemleriyle ele alınırlar ve eğrilik, yay uzunluğu ve buna benzer diğer geometrik özellikler vektör hesaplamaları kullanılarak, türevle ve integralle ifade edilebilir.

Bir eğriyi analiz etmek için kullanılan en önemli araçlardan biri, eğrinin her noktasında, eğrinin verilen bir noktasında bir koordinat sistemi sağlayan ve hareketli bir çatı olan Frenet çatısıdır. Frenet çatısı kullanılarak, eğrinin üzerinde eğrilik ve burulma fonksiyonları tanımlanabilir. Farklı uzay eğrileri sadece eğrilik ve burulma fonksiyonları yardımı ile ayırt edilebilir. Bu eğrilik ve burulma fonksiyonlarına eğrinin diferansiyel invaryantları denilir. Diferansiyel geometrideki eğrilerin temel teoremi, bu invaryantların eğriyi tamamen belirlediğini ifade eder.

Diferansiyel geometride eğriler teorisi uzun yıllardan beridir çalışılmakta olup, bu çalışmalara günümüzde de devam edilmektedir. K. Arslan ve H.H. Hacısalihoğlu [2] çalışmasında bir Frenet eğrisinin harmonik eğriliklerini araştırmışlardır. R.L. Bishop [3] çalışmasında, Frenet çatısında farklı bir çatı oluşturup, eğrilerle ilgili incelemeyi bu çatıyı kullanarak incelemiştir. H. Gluck [8] de, Öklid uzayında eğrilerin yüksek mertebeden eğrilikleri ilgili hesaplamalar yapmıştır. Yine 1975 yılında H.H. Hacısalihoğlu ve A. Sabuncuoğlu [18] deki çalışmalarında bir eğrinin yüksek mertebeden eğriliklerini farklı bir metodla inşa etmişlerdir.

Eğrilerin çalışılma sürecinde birçok farklı eğri tanımlanıp, bu eğrilerin çatı yapılarının incelenmesi de mümkün olmuştur. A.A. Ergin [6] da genelleştirilmiş Darboux eğrilerini, F. Gezgin [7] de AW(k)-tipinden eğrileri, A. Görgülü ve E. Özdamar [9] da Bertrand eğrilerini, H. Liu ve F. Wang [13] te Manheimm Partner eğrilerini, E. Özdamar ve H.H. Hacısalihoğlu [16] ve [17] çalışmalarında sırasıyla Inclined ve küresel eğrileri ve

A. Srivastava, E. Klassen, H.J. Shantanu ve I.H. Jermyn [19] da elastik eğrileri Öklid uzayında çalışmışlardır.

Öklid uzayı dışındaki uzaylarda da eğrilerin incelemesi yapılmıştır. B. Bükcü, M.K. Karacan [4] de Minkowski 3-uzayında eğrileri incelemiştir. B. Divjak'ın [5] ve Y. Keleş'in [11] çalışmalarında Galile ve yarı-Galile uzaylarına eğriler incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında ise verilen birim hızlı bir eğriden türetilen k-sabit teğet eğrisi, k-sabit normal eğrisi ve k-sabit binormal eğrisi tanımları verilmiştir. Bu eğrilerin Frenet çatıları, eğrilik ve burulma fonksiyonları, verilen birim hızlı eğrinin eğrilik ve burulmasından yararlanılarak hesaplanmıştır. Son olarak, bilinen bazı birim hızlı eğriler alınarak, bunlardan türetilen k-sabit teğet eğrisi, k-sabit normal eğrisi ve k-sabit binormal eğrisi örnekleri verilerek, bu eğrilerin eğrilik ve burulmalarına bakılarak hangi cinsten eğri oldukları tespit edilmiştir.

Burada verilen tanım ve teoremlerin ilerideki çalışmalara ışık tutması amaçlanmaktadır.

1.2. Temel Kavramlar

Bu kısımda, yapılan çalışmaların alt yapısını oluşturan temel bilgiler ve teoremler verilmektedir. Bu temel bilgi ve teoremlerin oluşturulmasında [1], [10], [14] ve [15] kaynaklarından yararlanılmıştır.

1.2.1. Öklid Uzayı ($\boldsymbol{R^3}$)

Sıralı reel sayı üçlülerinden oluşan kümeye 3-boyutlu Öklid uzayı denir.

$$R^3 = \{(p_1, p_2, p_3) : p_i \in R \,, i = 1,2,3\}$$

R^3 bir R-vektör uzayıdır.

Tanım 1.1. R^3 te bir teğet vektör, R^3'ün bir p noktasını $v \in R^3$ olmak üzere $p + v$ noktasına taşıyan bir büyüklük olarak tanımlanır. p'ye teğet vektörün başlangıç noktası, v'ye de vektör kısmı denir. Böyle bir teğet vektör $\boldsymbol{v_p}$ ile gösterilir.

Başlangıç noktası $p \in R^3$ olan tüm teğet vektörlerin kümesi $T_p(R^3)$ ile gösterilir. $T_p(R^3)$ de vektörlerde bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir R-vektör uzayıdır.

Tanım 1.2. R^3'ün her bir p noktasına bir $V(p) = \boldsymbol{v_p}$ vektörünü karşılık getiren bir V fonksiyonuna R^3'te bir vektör alanı denir.

R^3'te U_1, U_2, U_3 vektör alanları $p \in R^3$ için sırasıyla

$\boldsymbol{U_1}(p) = (1,0,0)_p$, $\boldsymbol{U_2}(p) = (0,1,0)_p$, $\boldsymbol{U_3}(p) = (0,0,1)_p$

olarak tanımlansınlar. Bu vektör alanlarına R^3'ün doğal çatı alanı denir. V, R^3'te bir vektör alanı ise R^3'te tanımlı, reel değerli öyle üç tane v_1, v_2, v_3 fonksiyonları bulunabilir ki

$$V = \sum_{i=0}^{3} v_i U_i$$

biçiminde yazılabilir.

$\boldsymbol{v_p}$, $\boldsymbol{w_p} \in T_p(R^3)$ için $\boldsymbol{v_p} = (v_1, v_2 , v_3)_p$ ve$\boldsymbol{w_p} = (w_1, w_2 , w_3)_p$ olsun. Bu vektörlerin nokta çarpımları

$$\boldsymbol{v_p}.\, \boldsymbol{w_p} = v.\, w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

olarak tanımlanır. Bir $\boldsymbol{v_p} \in T_p(R^3)$ vektörünün normu ise

$$\|\boldsymbol{v_p}\| = \|v\| = (v.\, v)^{1/2}$$

olarak verilir. Ayrıca $\boldsymbol{v_p}$ ve $\boldsymbol{w_p}$ vektörleri arasındaki açı θ , $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere

$$\boldsymbol{v_p}.\, \boldsymbol{w_p} = \|\boldsymbol{v_p}\| \|\boldsymbol{w_p}\| cos\theta$$

dır. Buradan sıfırdan farklı iki vektör arasındaki açı

$$cos\theta = \frac{\boldsymbol{v_p}.\, \boldsymbol{w_p}}{\|\boldsymbol{v_p}\| \|\boldsymbol{w_p}\|}$$

olarak verilir. O halde

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v_p} \perp \boldsymbol{w_p}$$

elde edilir.

Tanım 1.3. $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3} \in T_p(R^3)$ teğet vektörleri için

$$\boldsymbol{e_i}.\boldsymbol{e_j} = \delta_{ij}\,, i, j = 1,2,3$$

ise bu vektörlere $p \in R^3$'te bir çatı denir.

Lemma 1.4. $\boldsymbol{v_p} \in T_p(R^3)$ ve $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$, $p \in R^3$'te bir çatı olsun. Bu durumda

$$\boldsymbol{v_p} = (\boldsymbol{v_p}.\boldsymbol{e_1})\boldsymbol{e_1} + (\boldsymbol{v_p}.\boldsymbol{e_2})\boldsymbol{e_2} + (\boldsymbol{v_p}.\boldsymbol{e_3})\boldsymbol{e_3}$$

olarak yazılabilir. Bu yazılıma $\boldsymbol{v_p}$ vektörünün $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ çatısına göre ortonormal açılımı denir.

Tanım 1.5. $\boldsymbol{v_p}, \boldsymbol{w_p}$ vektörler, $\boldsymbol{v_p} = (v_1, v_2, v_3)_p$ ve $\boldsymbol{w_p} = (w_1, w_2, w_3)_p$ olsun.

$$\boldsymbol{v_p} \times \boldsymbol{w_p} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{U_1}(p) & \boldsymbol{U_2}(p) & \boldsymbol{U_3}(p) \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

vektörüne $\boldsymbol{v_p}$ ve $\boldsymbol{w_p}$ vektörlerinin vektörel çarpımı denir.

$\boldsymbol{v_p} \times \boldsymbol{w_p}$ vektörü hem $\boldsymbol{v_p}$'ye hem de $\boldsymbol{w_p}$'ye dik bir vektördür. Ayrıca $\boldsymbol{v_p}$ ve $\boldsymbol{w_p}$ vektörleri arasındaki açı θ , $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere

$$\|\boldsymbol{v_p} \times \boldsymbol{w_p}\| = \|\boldsymbol{v_p}\| \|\boldsymbol{w_p}\| sin\theta$$

dır.

Tanım 1.6. $B \subseteq R^3$ açık bir alt küme olmak üzere B'nin bir p noktasında $f: B \to R$ fonksiyonunun k.basamaktan tüm kısmi türevleri var ve sürekli ise bu fonksiyona p noktasında k.basamaktan diferansiyellenebilir veya C^k-sınıfındandır denir.

Eğer f fonksiyonunun p noktasında her basamaktan kısmi türevleri var ve sürekli ise bu fonksiyona p noktasında diferansiyellenebilir veya C^∞-sınıfındandır denir.

Eğer f fonksiyonunun B kümesinin her noktasında her basamaktan kısmi türevleri var ve sürekli ise bu fonksiyona B kümesinde diferansiyellenebilir veya C^{∞}-sınıfındandır denir.

1.2.2. R^3 de Eğriler

Tanım 2.1. $I \subseteq R$ bir açık aralık olsun. I⊆R açık aralığından R^3'e giden diferansiyellenebilir bir α fonksiyonuna R^3'te bir eğri denir.

$$\alpha: I \to R^3$$

$$t \to \alpha(t) = \left(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\right)$$

α'nın diferansiyellenebilir olması için $\alpha_i: I \to R\,, i = 1,2,3$ fonksiyonları diferansiyellenebilir olmalıdır.

Örnek 2.2.

1) **Doğru:** $\alpha: I \to R^3 \quad , I = R$

$$t \to \alpha(t) = p + tv$$

$p = (p_1, p_2, p_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ alınırsa $\alpha(t) = (p_1 + tv_1\,, p_2 + tv_2\,, p_3 + tv_3\,)$ olarak yazılabilir.

2) **Çember:**

$$\alpha(t) = (acost\,, asint, 0) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \qquad (a > 0)$$

3) **Silindirik Helis:**

$$\alpha(t) = (acost\,, asint\,, bt)\,, t \in R\,,\ a > 0\,,\ b \neq 0.$$

Tanım 2.3. $\alpha: I \to R^3$ α(t)= $\left(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\right)$ bir eğri olsun.

$$\boldsymbol{\alpha}'(t) = (\alpha_1'(t)\,, \alpha_2'(t)\,, \alpha_3'(t)\,)_{\alpha(t)}$$

vektörüne α'nın $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir. Bu vektör, eğriye $\alpha(t)$ noktasında teğet olan bir vektördür.

$$v(t) = \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = \sqrt{{\alpha_1'}^2(t) + {\alpha_2'}^2(t) + {\alpha_3'}^2(t)}$$

şeklinde tanımlanan $v(t)$ fonksiyonuna da α'nın t'deki hızı denir. $\boldsymbol{\alpha}'(0)$'ye ise α'nın ilk hızı denir.

Tanım 2.4. α :I→ R^3 bir eğri ve J⊆ I bir açık aralık olsun. h:$J \to I$ diferansiyellenebilir fonksiyonu için $\beta(s) = \alpha(h(s))$:J→ R^3 eğrisine α'nın h ile yeniden parametrelenişi denir.

Örnek 2.5. $\alpha(t) = (\sqrt{t}$,t$\sqrt{t}$,1−$t)$, $I: 0 < t < 4$ ve $h(s) = s^2 = t$, $J: 0 < s < 2$ olarak alırsak α eğrisinin h ile yeniden parametrelenişi

$$\beta(s) = \alpha\big(h(s)\big) = \alpha(s^2) = (s,\ s^3, 1 - s)$$

biçiminde olur.

Lemma 2.6. β bir α eğrisinin h ile yeniden parametrelenişi ise

$$\boldsymbol{\beta}'(s) = \frac{dh(s)}{ds}\boldsymbol{\alpha}'\big(h(s)\big)$$

dir.

İspat : $\beta(s) = \alpha(h(s))$

$$\boldsymbol{\beta}'(s) = \boldsymbol{\alpha}'(h(s)) \cdot h'(s)$$

$$= \boldsymbol{\alpha}'(h(s)) \cdot (dh(s))/ds$$

Lemma 2.7. α , R^3' te bir eğri ve f , R^3 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$\boldsymbol{\alpha}'(t)[f] = \frac{df(\alpha(t))}{dt}$$

dir.

İspat : $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ =$(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t))_{\alpha(t)}$ olduğundan

$$\boldsymbol{\alpha}'(\mathrm{t})[f] = \sum \frac{df}{dx_i}(\alpha(t)) \cdot \alpha_i'(\mathrm{t}) \tag{1.1}$$

dir. Diğer taraftan $f(\alpha(t)) = f(\alpha_1(\mathrm{t}), \alpha_2(\mathrm{t}), \alpha_3(\mathrm{t}))$ olacağından

$$\frac{d}{dt} f(\alpha(t)) = \frac{df}{dx}(\alpha(t))\alpha_1'(t) + \frac{df}{dy}(\alpha(t))\alpha_2'(\mathrm{t}) + \frac{df}{dz}(\alpha(t))\alpha_3'(t) \tag{1.2}$$

elde edilir. (1.1) ve (1.2) den eşitlik görülür.

Not : $\alpha: \mathrm{I} \rightarrow R^3$ eğrisi için

1) $\alpha(t) = \alpha(t_1) \implies \mathrm{t} = t_1$ oluyorsa α birebirdir.

2) Bütün hız vektörleri sıfırdan farklı olan eğrilere regüler eğri denir. Yani $\forall t \in I$ için $\boldsymbol{\alpha}'(\mathrm{t}) \neq 0$ dır.

1.2.2. Bir Eğrinin Birim Hız Parametrelenişi

Tanım 3.1. Bir α eğrisinin $t = a$ dan $t = b$' ye kadar olan yayının uzunluğu

$$l = \int_a^b \|\boldsymbol{\alpha}'(\mathrm{t})\| dt$$

ile hesaplanır.

α eğrisinin $t = 0$ dan t'ye kadar olan yayının uzunluğu ise $s(t) = \int_0^t \| \boldsymbol{\alpha}'(u) \| du$ fonksiyonu ile verilir. Bu fonksiyona α' nın yay uzunluğu fonksiyonu denir.

Örnek 3.2. $\alpha : [0,2\pi] \rightarrow R^2$, $\alpha(t) = (2cost\,, 2sint)$ çemberinin t= $\frac{\pi}{2}$ noktasındaki hız vektörünü ve hızını bulunuz. Bu eğrinin $[0, \pi]$ kapalı aralığındaki yayın uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:

$\boldsymbol{\alpha}'(\mathrm{t}) = (-2sint\,, 2cost\,)$

$\boldsymbol{\alpha}'(\frac{\pi}{2}) = (\,-2sin\frac{\pi}{2}\,, 2cos\frac{\pi}{2}\,) = (-2\,, 0\,)$

$v(t) = \|\boldsymbol{\alpha}'(\mathrm{t})\| = \sqrt{(-2sint)^2 + (2cost)^2}$

$= \sqrt{4sin^2t + 4cos^2t}$

$=\sqrt{4}$

$= 2$

$l = \int_0^{\pi} \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|dt = \int_0^{\pi} 2dt = 2t \int_0^{\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$ br

$[0, \pi]$ aralığındaki yayın uzunluğudur.

Teorem 3.3. α , R^3' te regüler bir eğri ise α'nın bir β birim hız parametrenelişi vardır.

İspat: $s(t) = \int_0^{t} \|\boldsymbol{\alpha}'(u)\|du$ yay uzunluğu fonksiyonunu göz önüne alalım.

$\frac{ds}{dt} = \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| > 0$

$\frac{ds}{dt} > 0$ olduğundan s monoton artandır. Dolayısıyla birebirdir. Görüntüsüne örten olacağından tersi vardır. Bu ters fonksiyonu $t(s)$ ile gösterelim.

$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} > 0$

olur. $\alpha(t)$ eğrisini s ile parametreyelim.

$\beta(s) = \alpha\big(t(s)\big)$

Bu β eğrisinin birim hızlı olduğunu gösterelim.

$\boldsymbol{\beta}'(s) = \boldsymbol{\alpha}'(t(s))\frac{dt}{ds}$

$\|\boldsymbol{\beta}'(s)\| = \|\boldsymbol{\alpha}'\big(t(s)\big)\frac{dt}{ds}\|$

$= \|\boldsymbol{\alpha}'\big(t(s)\big)\|\frac{dt}{ds}$

$= \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$

$= 1$

olup β birim hızlı eğri çıkar.

Örnek 3.4. $\alpha\,(t) = (acost\,, asint\,, bt)$ helisinin birim hız parametrelenişini bulunuz.

Çözüm : $\boldsymbol{\alpha}'(t) = (-asint\,, acost\,, b\,)$ olduğundan

$$\|\boldsymbol{\alpha}\,'(t)\| = \sqrt{a^2 sin^2 t + a^2 cos^2 t + b^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}$$

olarak bulunur.

$$s = s(t) = \int_0^t \|\boldsymbol{\alpha}'(u)\| du$$

$$= \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2}\ \text{du}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\,t$$

$t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$ olacağından α' nın birim hız parametrelenişi

$$\beta(s) = \alpha\big(t(s)\big) = (a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\ , asin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\ , \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

olarak bulunur.

Not: Bir α eğrisinin $\alpha(h)$ parametrelenişine $h' \geq 0$ ise yönü koruyan, $h' \leq 0$ ise yönü değiştiren parametreleniş denir.

1.2.3. Bir Eğri Üzerinde Vektör Alanları

Tanım 4.1. $\alpha : \mathrm{I} \rightarrow R^3$ bir eğri olsun. α'nın her $\alpha(t)$ noktasına bir $\boldsymbol{Y}(t)$ vektörünü karşılık getiren Y fonksiyonuna α üzerinde bir vektör alanı denir.

Örneğin, $\boldsymbol{\alpha}'(\mathrm{t}) = (\alpha_1'\,(\mathrm{t})\,, \alpha_2'\,(\mathrm{t})\,, \alpha_3'(\mathrm{t}))$ eğri üzerinde bir vektör alanıdır.

$$\boldsymbol{Y}(t) = (y_1(t)\,, y_2(t)\,, y_3(t))_{\,\alpha\,(t)}$$

$$= \sum y_i(t)\, U_i\,(\alpha\,(t\,))$$

olarak yazılabilir.

Özel olarak $\boldsymbol{\alpha}''$ de bir vektör alanıdır .

$$\boldsymbol{\alpha}''(t) = (\alpha_1''(t), \alpha_2''(t), \alpha_3''(t))_{\alpha(t)}$$

Bu vektör alanına α'nın ivme vektör alanı denir.

Not: Y ve Z bir α eğrisi üzerinde iki vektör alanı, f α eğrisi üzerinde tanımlı, reel değerli, diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise $a, b \in R$ olmak üzere

1) $(aY + bZ)' = aY' + bZ'$
2) $(fY)' = f'Y + fY'$
3) $(Y.Z)' = Y'.Z + Y.Z'$
4) $(Y \times Z)' = Y' \times Z + Y \times Z'$

biçiminde verilir.

Eğer $Y.Z$ = sabit ise

$(Y.Z)' = 0$

olup, buradan

$Y'.Z + Z'.Y = 0$

elde edilir. O halde

$Y'.Z = -Z'.Y$

dir.

Not: Eğer Y sabit uzunlukta ise

$\|Y\| = c, \ c \in R$

dir. Buradan

$\Rightarrow Y.Y = c^2$

$\Rightarrow Y'.Y + Y'.Y = 0$

$$\Rightarrow 2\,Y'.Y = 0 \qquad \Rightarrow \quad Y'.Y = 0 \;\Rightarrow Y \perp Y'$$

α birim hızlı bir eğri ise;

$$\|\boldsymbol{\alpha}'\| = 1 \;\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}'.\boldsymbol{\alpha}' = 1$$

$$\Rightarrow \; \boldsymbol{\alpha}''.\boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{\alpha}''.\boldsymbol{\alpha}' = 0$$

$$\Rightarrow \; 2\,\boldsymbol{\alpha}''.\boldsymbol{\alpha}' = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}''.\,\boldsymbol{\alpha}' = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}'' \perp \boldsymbol{\alpha}'$$

elde edilir.

Tanım 4.2. Eğer bir α eğrisi üzerindeki bir Y vektör alanının vektör kısmı aynı (c_1, c_2, c_3) sabiti ise Y' ye paralel vektör alanı denir.

$$Y(t) = (c_1, c_2, c_3)_{\alpha(t)}$$

Lemma 4.3.

1) Bir α eğrisi doğrudur. $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha}'' = 0$ dır.

2) α eğrisi üzerindeki Y vektör alanı paraleldir. $\Leftrightarrow$ $Y' = 0$ dır.

İspat: 1) α bir doğru olsun. $\Leftrightarrow$ $\alpha(t) = p + t\,v$

$$\Leftrightarrow \; \boldsymbol{\alpha}'(t) = v$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}''(t) = 0.$$

2) Açıktır.

1.2.4. Birim Hızlı Eğrilerde Frenet Formülleri

$\beta : I \rightarrow R^3$, $s \in I$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda $\|\boldsymbol{\beta}\,'(s)\| = 1$' dir. $\boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{\beta}\,'(s)$' ye β'nın birim teğet vektör alanı denir. $\boldsymbol{t}'(s) = \boldsymbol{\beta}''(s)$'ye ise ivme vektör alanı denir.

$\boldsymbol{t}.\boldsymbol{t} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{t}'.\boldsymbol{t} + \boldsymbol{t}.\boldsymbol{t}' = 0 \Rightarrow \boldsymbol{t}.\boldsymbol{t}' = 0$

Yani ivme vektör alanı teğet vektör alanına diktir. $\forall s \in I$ için $\kappa(s) = \| \boldsymbol{t}'(s) \|$ reel değerli fonksiyonuna β'nın eğrilik fonksiyonu denir. κ eğrinin teğetinden ne kadar saptığını gösterir. $\kappa(s) > 0$ olması durumunda

$$\boldsymbol{n}(s) = \frac{\boldsymbol{t}'(s)}{\| \boldsymbol{t}'(s)\|} = \frac{\boldsymbol{t}'(s)}{\kappa(s)}$$

vektör alanına β'nın birim normal vektör alanı (asal normal vektör alanı) denir. $\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$ vektör alanına da β'nın binormal vektör alanı denir.

$\boldsymbol{t}$ ve $\boldsymbol{n}$ birim vektör alanları olduğundan $\boldsymbol{b}$ de birim vektör alanıdır. Çünkü;

$\|\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}\| = \|\boldsymbol{t}\|\|\boldsymbol{n}\| sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\Rightarrow \|\boldsymbol{b}\| = 1$

elde edilir.

Lemma 5.1. β , R^3'te $\kappa > 0$ olan birim hızlı bir eğri olsun. β üzerindeki $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ vektör alanları her noktada birbirine dik birim vektör alanlarıdır.

İspat: Tanımlarından açıktır.

Tanım 5.2. $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ ye β'nın Frenet çatısı denir.

Not: $\boldsymbol{t}'$, $\boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{b}'$ yü $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ cinsinden açıklayalım. $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\beta}'$ olduğundan;

$\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{\beta}\,'' = \kappa \boldsymbol{n}$

bulunur. Ayrıca

$$\boldsymbol{b}.\boldsymbol{t} = 0 \;\; \Rightarrow \boldsymbol{b}'.\boldsymbol{t} \; + \; \boldsymbol{b}.\boldsymbol{t}' = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{b}'.\boldsymbol{t} \; = -\boldsymbol{b}\,.\boldsymbol{t}'$$

$$= -\boldsymbol{b}.\,\kappa\boldsymbol{n}$$

$$= -\,\kappa\,\boldsymbol{b}.\boldsymbol{n} = 0 \qquad (\|\,\mathbf{t}'\,\| = \kappa)$$

elde edilir.

$$\boldsymbol{b}.\boldsymbol{b} \; = 1 \;\; \Rightarrow \boldsymbol{b}'\,.\boldsymbol{b} \; + \; \boldsymbol{b}'\,.\boldsymbol{b} \; = \; 0$$

$$\Rightarrow \; \boldsymbol{b}.\boldsymbol{b}' = \; 0$$

$\boldsymbol{b}'$ vektör alanının ortonormal açılımını yazarsak;

$$\boldsymbol{b}\,' \; = (\,\boldsymbol{b}'.\boldsymbol{t}\,)\,\boldsymbol{t} \; + \; (\boldsymbol{b}\,'.\boldsymbol{n}\,)\,\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{b}'\,.\boldsymbol{b}\,)\,\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{b}' \; = (\boldsymbol{b}'\,.\boldsymbol{n}\,)\,\boldsymbol{n}$$

elde edilir. $\boldsymbol{b}'.\boldsymbol{n} = -\tau$ olarak tanımlansın.

$$\Rightarrow \boldsymbol{b}' \; = -\,\tau\boldsymbol{n}$$

olur.

Tanım 5.3. $\tau = -\,\boldsymbol{b}'.\boldsymbol{n}$ fonksiyonuna β eğrisinin burulma (burkulma) fonksiyonu denir.

Teorem 5.4. $\beta : I \;\rightarrow\; R^3$ eğriliği $\kappa > 0$ ve burulması τ olan birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda

$$\boldsymbol{t}' \; = \; \kappa\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{n}' \; = -\,\kappa\boldsymbol{t} + \tau\,\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{b}' \; = -\tau\boldsymbol{n}$$

dir.

İspat: $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{t}'}{\|\,\boldsymbol{t}'\,\|} \; = \frac{\boldsymbol{t}'}{\kappa}$ olduğundan $\boldsymbol{t}' \; = \kappa\boldsymbol{n}$ elde edilir. $\boldsymbol{b}' = -\tau\boldsymbol{n}$ olduğunu daha önce göstermiştik. $\boldsymbol{n}'$ nin ortonormal açılımını yazalım.

$$\boldsymbol{n}' = (\boldsymbol{n}'.\boldsymbol{t})\boldsymbol{t} + (\boldsymbol{n}'.\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{n}'.\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{n}.\boldsymbol{t} = 0$ olduğundan $\boldsymbol{n}'.\boldsymbol{t} + \boldsymbol{n}.\boldsymbol{t}' = 0$ dır.

$$\Rightarrow \boldsymbol{n}'.\boldsymbol{t} = -\boldsymbol{n}.\boldsymbol{t}' = -\boldsymbol{n}.\kappa\boldsymbol{n}$$

$$= -\kappa\boldsymbol{n}.\boldsymbol{n}$$

$$= -\kappa$$

$$\boldsymbol{n}.\boldsymbol{n} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{n}'.\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}.\boldsymbol{n}' = 0$$

Buradan $2\boldsymbol{n}'.\boldsymbol{n} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{n}.\boldsymbol{n}' = 0$ bulunur.

$$\boldsymbol{n}.\boldsymbol{b} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{n}'.\boldsymbol{b} + \boldsymbol{n}.\boldsymbol{b}' = 0 \Rightarrow \boldsymbol{n}'.\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{n}.\boldsymbol{b}'$$

$$= -\boldsymbol{n}.(-\tau\boldsymbol{n})$$

$$= \tau\,\boldsymbol{n}.\boldsymbol{n} = \tau$$

elde edilir. O halde bunları $\boldsymbol{n}'$ nün ortonormal açılımında yerine yazarsak

$$\boldsymbol{n}' = -\kappa\,\boldsymbol{t} + \tau\,\boldsymbol{b}$$

elde edilir.

Örnek 5.5. $\beta(s) = \left(a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right)$, $c = \sqrt{a^2+b^2}, a > 0, b \neq 0$ birim hızlı helisinin eğrilik ve burulmasını hesaplayınız. Ayrıca Frenet çatısını belirleyiniz.

Çözüm:

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\beta}' = \left(\frac{-a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right)$$

$$\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{\beta}'' = \left(\frac{-a}{c^2}.\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$\kappa = \|\boldsymbol{t}'\| = \sqrt{\frac{a^2}{c^4}} = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{t'}}{\kappa}=(-cos\frac{s}{c},-\sin\frac{s}{c}\ ,0)$

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}\ =\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ \frac{-\mathrm{a}}{\mathrm{c}}\ \sin\frac{s}{c} & \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c} & \frac{b}{c} \\ -cos\frac{s}{c} & -\sin\frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix}=(\frac{b}{c}sin\frac{s}{c}\ ,-\frac{b}{c}\,cos\ \frac{s}{c}\ ,\frac{a}{c})$$

$\tau=-\boldsymbol{b}'.\boldsymbol{n}$

$=-(\frac{b}{c^2}\,cos\ \frac{s}{c}\ \ ,\ \frac{b}{c^2}sin\frac{s}{c}\ ,0)\,.\,(-cos\frac{s}{c},-\sin\frac{s}{c}\ ,0)$

$=\frac{b}{c^2}\ =\frac{b}{a^2+b^2}$

Sonuç 5.6. β $,R^3$' te $\kappa>0$ eğrilikli birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda β bir düzlemsel eğridir ⇔ $\tau=0$ dır.

İspat: “⟹” β bir düzlemsel eğri olsun. O halde bir $p\in R^3$ ve $\boldsymbol{q}\ \neq 0$ vektörü için

$(\beta(s)-p).\boldsymbol{q}\ =0$ dır. Yani β eğrisi p’den geçen $\boldsymbol{q}$ vektörüne dik düzlemdedir. Türev alırsak;

$\boldsymbol{\beta}'(s\,)\cdot\ \boldsymbol{q}\ +(\beta(s)-p\,).0=0$

$\Longrightarrow\boldsymbol{\beta}'(\mathrm{s}\,)\cdot\boldsymbol{q}=0$

$\Longrightarrow\boldsymbol{\beta}'\ =\boldsymbol{t}$ olduğundan $\boldsymbol{t}.\boldsymbol{q}\ =\ 0$

bulunur. Yani $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{t}$’ye diktir. ($\boldsymbol{\beta}'(s).\boldsymbol{q}=0$) Yine türev alırsak;

$\boldsymbol{\beta}''(\mathrm{s}).\boldsymbol{q}=0\Longrightarrow\boldsymbol{t}'.\boldsymbol{q}=0\Longrightarrow\kappa\boldsymbol{n}.\boldsymbol{q}\ =\ 0$

elde edilir. κ> 0 olduğundan $\boldsymbol{n}\,.\,\boldsymbol{q}=0$ bulunur. Dolayısıyla $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{n}$’ye diktir. $\boldsymbol{q}$ hem $\boldsymbol{t}$’ye hem de $\boldsymbol{n}$’ye dik olduğundan $\boldsymbol{b}$ ile aynı doğrultudadır. O halde $\boldsymbol{b}=\pm\frac{\boldsymbol{q}}{\|\boldsymbol{q}\|}$ olarak alabiliriz.

$\Longrightarrow\boldsymbol{b}'=0$

$\Longrightarrow\boldsymbol{b}'=\ -\tau\,\boldsymbol{n}=\ 0$

$\Longrightarrow \tau = 0$

bulunur.

"$\Leftarrow$" $\tau = 0$ olsun. Buradan $\boldsymbol{b}' = 0$ olup $\boldsymbol{b}$ sabittir. β'nın $\beta\ (0)$'dan geçen $\boldsymbol{b}$'ye dik düzlemde olduğunu göstermek istiyoruz.

gg: $(\beta\ (s) - \beta(0))\ .\ \boldsymbol{b} = 0$

$f(s) := (\beta(s) - \beta(0)).\boldsymbol{b}$ olarak tanımlansın. Buradan türev alırsak;

$f\ '\ (s\ ) = \boldsymbol{\beta}'(s\ ).\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t}.\boldsymbol{b} = 0$

elde edilir. $\forall s$ için $f'(s) = 0$ olduğundan $f(s)$ =sabit olur. $f = c$ olsun. $s = 0$ için

$f(0\ ) = (\ \beta\ (0\ ) - \beta(0)).\boldsymbol{b} = c$

$\Longrightarrow\ c = 0$

elde edilir. Yani;

$\Longrightarrow (\beta(s\ ) - \beta(0))\ .\ \boldsymbol{b} = 0\ (\forall s)$

olup β düzlemseldir.

Lemma 5.7. β , $\kappa > 0$ sabit eğrilikli ve $\tau = 0$ burulmalı birim hızlı eğri ise β ,$\frac{1}{\kappa}$ yarıçaplı bir çemberdir veya çemberin bir parçasıdır.

İspat:$\tau = 0$ olduğundan β bir düzlemsel eğridir. β'nın her bir noktasının sabit bir noktadan $\frac{1}{\kappa}$ uzaklığında bulunduğunu göstermek istiyoruz.

$\gamma(s) := \beta(s) + \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}(s)$

eğrisini tanımlayalım. Türevini alırsak;

$\boldsymbol{\gamma}' = \boldsymbol{\beta}' + \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}'$

$$= \boldsymbol{t} + \frac{1}{\kappa}(-\kappa\boldsymbol{t} + \tau\boldsymbol{b}) \qquad (\tau = 0)$$

$$= \boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}$$

$$= 0$$

olup γ sabittir. $\gamma = c$ olsun.

$$\beta + \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n} = c$$

$$\Rightarrow c - \beta = \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}$$

$$\Rightarrow \|c - \beta\| = \|\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}\| \quad (\kappa > 0)$$

$$\Rightarrow \|\beta - c\| = \frac{1}{\kappa}\|\boldsymbol{n}\| = \frac{1}{\kappa}$$

$$\Rightarrow \|\beta(s) - c\| = \frac{1}{\kappa} \ (\forall s)$$

O halde $\beta(s)$'nin noktalarının c'ye olan uzaklıkları daima $\frac{1}{\kappa}$'dır. Yani β bir çemberdir ya da bir çemberin parçasıdır.

1.2.5. Keyfi Hızlı Eğrilerde Frenet Formülleri

$\alpha : I \rightarrow R^3$ regüler bir eğri olsun. $\bar{\alpha}$, α'nın birim hız parametrelenişi olsun.

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha\left(t(s)\right)$$

$\bar{\alpha}\ (s)$ eğrisinin Frenet büyüklükleri, α'nın Frenet büyüklükleri cinsinden şu şekilde verilir:

$$\kappa = \bar{\kappa}(s)$$

$$\tau = \bar{\tau}(s)$$

$$\boldsymbol{t} = \bar{\boldsymbol{t}}(s)$$

$\boldsymbol{n} = \overline{\boldsymbol{n}}(s)$

$\boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{b}}(s)$

Lemma 6.1. α, R^3'te κ> 0 eğrilikli bir regüler eğri olsun. Bu durumda;

$$\boldsymbol{t}' = \kappa v \boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{n}' = -\kappa v \boldsymbol{t} + \tau v \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{b}' = -\tau v \boldsymbol{n}$$

biçimindedir. Burada $v = \|\boldsymbol{\alpha}'\|$, α'nın hız fonksiyonudur.

İspat : $\overline{\alpha}$, α'nın birim hızlı parametrelenişi olsun. O halde

$$\alpha = \overline{\alpha}\,(s)$$

dir. s, α'nın yay uzunluğu fonksiyonu olmak üzere tanımla $\boldsymbol{t} = \overline{\boldsymbol{t}}\,(s)$ dir. Zincir kuralı uygulanırsa;

$$\boldsymbol{t}' = \overline{\boldsymbol{t}}'(s)\frac{ds}{dt}$$

elde edilir. $\overline{\boldsymbol{t}}'(s) = \overline{\kappa}(s)\overline{\boldsymbol{n}}(s)$ olduğundan

$$\boldsymbol{t}' = \overline{\kappa}(s)\overline{\boldsymbol{n}}(s)\,\frac{ds}{dt}$$

$$=\kappa\boldsymbol{n}\frac{ds}{dt}$$

$$=\kappa v\boldsymbol{n}$$

bulunur. Diğerleri de benzer şekilde gösterilir.

Lemma 6.2. α, v hız fonksiyonlu bir regüler eğri ise α'nın hız ve ivme vektörleri şöyle verilir:

$$\boldsymbol{\alpha}' = v\boldsymbol{t}$$

$$\boldsymbol{\alpha}'' = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{t} + \kappa v^2 \boldsymbol{n}$$

İspat: $\bar{\alpha}$, α'nın birim hız parametrelenişi ise

$$\alpha = \bar{\alpha}(s)$$

olup,

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}' = \bar{\boldsymbol{\alpha}}'(s)\frac{ds}{dt} = \bar{\boldsymbol{t}}(s)\frac{ds}{dt} = v\,\bar{\boldsymbol{t}}(s) = v\boldsymbol{t}$$

elde edilir. Bir kez daha türev alınırsa,

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}'' = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{t} + v\boldsymbol{t}'$$

$$= \frac{dv}{dt}\boldsymbol{t} + \kappa v^2 \boldsymbol{n}$$

bulunur.

Teorem 6.3. α, R^3 de regüler bir eğri olsun. Bu durumda;

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{\alpha}'}{\|\boldsymbol{\alpha}'\|} \quad , \quad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{t} \quad , \quad \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''}{\|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\|}$$

$$\kappa = \frac{\|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'\|^3} \quad , \quad \tau = \frac{(\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}'').\boldsymbol{\alpha}'''}{\|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\|^2}$$

olarak hesaplanır.

İspat: $\boldsymbol{\alpha}' = v\boldsymbol{t}$ ve $v = \|\boldsymbol{\alpha}'\|$ olduğundan $\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{\alpha}'}{\|\boldsymbol{\alpha}'\|}$ elde edilir.

$$\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}'' = (v\boldsymbol{t}) \times (\frac{dv}{dt}\boldsymbol{t} + \kappa v^2 \boldsymbol{n})$$

$$= v\frac{dv}{dt}(\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}) + \kappa v^3 (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n})$$

$$= \kappa v^3 \boldsymbol{b} \tag{1.3}$$

$$\Rightarrow \|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\| = \|\kappa v^3 \boldsymbol{b}\| = \kappa v^3 \|\boldsymbol{b}\| = \kappa v^3 \tag{1.4}$$

(1.3) eşitliğinden $\boldsymbol{b}$'yi çekersek, binormal vektör alanı;

$$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''}{\kappa v^3} = \frac{\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''}{\|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\|}$$

olarak elde edilir. Ayrıca κ eğriliği (1.4)'ten

$$\kappa = \frac{\|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\|}{v^3} = \frac{\|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'\|^3}$$

olarak bulunur. α'nın ikinci türevi;

$$\boldsymbol{\alpha}'' = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{t} + \kappa v^2 \boldsymbol{n}$$

biçiminde idi. α'nın üçüncü türevini hesaplarsak;

$$\boldsymbol{\alpha}''' = \frac{d^2v}{dt^2}\boldsymbol{t} + \frac{dv}{dt}\boldsymbol{t}' + \kappa' v^2 \boldsymbol{n} + \kappa 2 v v' \boldsymbol{n} + \kappa v^2 \boldsymbol{n}'$$

$$= (\dots)\boldsymbol{t} + (\dots)\boldsymbol{n} + \kappa v^3 \tau \boldsymbol{b}$$

elde edilir. O halde

$$(\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}'').\boldsymbol{\alpha}''' = (\kappa v^3 \boldsymbol{b}).(\kappa v^3 \tau\, \boldsymbol{b}) + (\dots)\boldsymbol{n} + (\dots)\boldsymbol{t}$$

$$= \kappa^2 v^6 \tau$$

bulunur. Buradan τ burulma fonksiyonu çekilirse;

$$\tau = \frac{(\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}'').\boldsymbol{\alpha}'''}{\kappa^2 v^6} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}'').\boldsymbol{\alpha}'''}{\|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\|^2}$$

elde edilir.

Örnek 6.4. $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ eğrisinin Frenet büyüklüklerini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\boldsymbol{\alpha}'(t) = (3, -3t^2, 3 + 3t^2) = 3(1 - t^2, 2t, 1 + t^2)$$

$$\boldsymbol{\alpha}''(t) = (-6t, 6, 6t)$$

$$\boldsymbol{\alpha}'''(t) = (-\,6, 0, 6)$$

$$\|\boldsymbol{\alpha}'\| = 3\sqrt{(1-t^2)^2 + 4t^2 + (1+\ t^2\ )^2}$$

$$= 3\sqrt{1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2 + 1 + 2t^2 + t^4}$$

$$= 3\ \sqrt{2 + 4t^2 + 2\ t^4}$$

$$= 3\sqrt{2\ (1 + 2t^2 + t^4\ )}$$

$$= 3\sqrt{2}\ \sqrt{(1 + t^2\ )^2}$$

$$= 3\sqrt{2}\ (1 + t^2)$$

$$\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}'' = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ 3 - 3t^2 & 6t & 3 + 3t^2 \\ -6t & 6 & 6t \end{vmatrix}$$

$$= 18\ (t^2 - 1\ , -2t\ , 1 + t^2)$$

$$\|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\|\ = 18\sqrt{(t^2 - 1)^2 + (-2\ t)^2 + (1 + t^2)^2}$$

$$=\ 18\ \sqrt{2}\ (t^2 + 1)$$

$$(\boldsymbol{\alpha}' \times\ \boldsymbol{\alpha}'').\boldsymbol{\alpha}''' = 18.6\ (-t^2 + 1 + 1 + t^2)$$

$$= 18.6.2 = 216$$

$$\boldsymbol{t}\ =\ \frac{\boldsymbol{\alpha}'}{\|\boldsymbol{\alpha}'\|} = \frac{3(1 - t^2\ , 2t\ \ , 1 + t^2\ )}{3\sqrt{2}(t^2+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}(t^2+1)}(1 - t^2, 2t\ , 1 + t^2)$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''}{\|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\|}\ = \frac{18(t^2 - 1\ , -2\ t,\ \ 1 + t^2)}{18\sqrt{2}(t^2+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}(t^2+1\ )}(t^2 - 1, -2t, 1 + t^2)$$

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{t} = \frac{1}{2(t^2+1\ )^2}\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ t^2 - 1 & -2t & 1 + t^2 \\ 1 - t^2 & 2t & 1 + t^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{t^2+1}(-2t, 1-t^2, 0)$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{18\sqrt{2}\,(t^2+1)}{3^3 2\sqrt{2}(t^2+1)^3} = \frac{1}{3(t^2+1)^2}$$

$$\tau = \frac{(\alpha' \times \alpha'').\alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = \frac{216}{18^2 2(t^2+1)^2} = \frac{1}{3(t^2+1)^2}$$

Tanım 6.5. R^3 te regüler bir α eğrisinin teğet vektör alanı $\boldsymbol{t}$, eğrinin her noktasında sabit bir $\boldsymbol{u}$ birim vektörü ile sabit bir θ açısı yapıyorsa, α ya bir silindirik helis denir.

Bu durumda $\boldsymbol{t}$ ile $\boldsymbol{u}$ arasındaki açı eğri boyunca sabittir. Eğrinin $\boldsymbol{t}$ teğet vektör alanı ile $\boldsymbol{u}$ sabit birim vektörü arasındaki açı θ ise;

$$\boldsymbol{t}.\boldsymbol{u} = cos\theta$$

dır.

Teorem 6.6. $\kappa > 0$ eğrilikli bir regüler α eğrisi silindirik helistir ancak ve ancak $\frac{\tau}{\kappa}$ sabittir.

İspat: "⇒" α bir silindirik helis olsun. α yı birim hızlı olarak alalım. Buradan eğrinin $\boldsymbol{t}$ teğet vektör alanı ile bir $\boldsymbol{u}$ sabit birim vektörü sabit açı yapar. Bu açı θ ise $\boldsymbol{t}.\boldsymbol{u} = cos\theta$ dır. Türev alınırsa;

$$(\boldsymbol{t}.\boldsymbol{u})' = \boldsymbol{t}'.\boldsymbol{u} = \kappa\boldsymbol{n}.\boldsymbol{u} = 0$$

olduğundan $\boldsymbol{n}$ ile $\boldsymbol{u}$ vektörleri birbirine diktir. O halde $\boldsymbol{u}$ vektörü $\boldsymbol{t}$ ile $\boldsymbol{b}$ nin belirlediği düzlemdedir.

$$\boldsymbol{u} = cos\theta\boldsymbol{t} + sin\theta\boldsymbol{b}$$

dir. Türev alınırsa;

$$cos\theta\boldsymbol{t}' + sin\theta\boldsymbol{b}' = cos\theta\kappa\boldsymbol{n} - sin\theta\tau\boldsymbol{n} = 0$$

elde edilir. O halde $cos\theta\kappa - sin\theta\tau = 0$ olup

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{cos\theta}{sin\theta} = cot\theta = \text{sabit}$$

bulunur.

“⇐” $\frac{\tau}{\kappa} = cot\theta$ =sabit olsun. Buradan $\tau sin\theta = \kappa cos\theta$ olur.

$$\boldsymbol{u} = cos\theta \boldsymbol{t} + sin\theta \boldsymbol{b}$$

vektörünü göz önüne alalım. Türev alırsak;

$$\boldsymbol{u}' = cos\theta \boldsymbol{t}' + sin\theta \boldsymbol{b}' = cos\theta\kappa\boldsymbol{n} - sin\theta\tau\boldsymbol{n} = (cos\theta\kappa - sin\theta\tau)\boldsymbol{n} = 0$$

elde edilir. O halde $\boldsymbol{u}$ vektörü sabittir. Ayrıca $\boldsymbol{u}$ birim vektördür ve $\boldsymbol{t}.\boldsymbol{u} = cos\theta$ olduğundan, eğrinin birim teğet vektör alanı $\boldsymbol{t}$ ile sabit açı yapar. Dolayısıyla eğri bir silindirik helistir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. k-Sabit Eğriler

Bu bölümde k-sabit eğri tanımları verilerek, bu eğrilerin eğrilikleri, burulmaları, Frenet çatıları belirlenecektir. Çember, helis gibi eğrilerdeki özel durumlar da örneklendirilecektir..

Tanım 2.1. α, R^3 te birim hızlı bir eğri ve $\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)$ onun bir $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı olsun. k bir reel sayı sabitini göstermek üzere, α eğrisinin k-sabit teğet eğrisi

$$\boldsymbol{\alpha_t}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + k\boldsymbol{t}(s)$$

olarak tanımlansın. Benzer şekilde α eğrisinin k-sabit normal ve binormal eğrileri, sırasıyla

$$\boldsymbol{\alpha_n}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + k\boldsymbol{n}(s)$$

$$\boldsymbol{\alpha_b}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + k\boldsymbol{b}(s)$$

olarak tanımlansın.

2.2. k-Sabit Teğet Eğrisinin Frenet Çatısı, Eğrilik ve Burulma Fonksiyonları

α eğrisinin k-sabit teğet eğrisi olan $\alpha_t(s)$ eğrisini göz önüne alalım. Bu eğrinin yay uzunluğu fonksiyonu s_1 olsun. Bu durumda $\alpha_t(s)$ eğrisinin birim teğet vektörü

$$\boldsymbol{t_t}(s_1) = \frac{d\boldsymbol{\alpha_t}}{ds}(s_1).\frac{ds}{ds_1} = \big(\boldsymbol{t}(s) + k\boldsymbol{t}'(s)\big)\Big|_{s_1}\frac{ds}{ds_1} = (\boldsymbol{t}(s) + k\kappa(s)\boldsymbol{n}(s))\Big|_{s_1}\frac{ds}{ds_1}$$

olarak elde edilir. Her iki tarafın $\boldsymbol{t}$ ile nokta çarpımını alırsak;

$$\boldsymbol{t_t}.\boldsymbol{t} = \frac{ds}{ds_1} = cos\theta$$

elde edilir. Burada θ , $\boldsymbol{t_t}$ ve $\boldsymbol{t}$ vektörleri arasındaki açıdır. Aynı zamanda bu eşitliğin her iki tarafını $\boldsymbol{b}$ vektörü ile çarparsak,

$$\boldsymbol{t_t}.\boldsymbol{b} = 0$$

bulunur ki bu da bu vektörlerin dik olduğunu gösterir. Her iki tarafın $\boldsymbol{n}$ vektörü ile çarpılmasından ise

$$\boldsymbol{t_t}.\boldsymbol{n} = k\kappa(s)\frac{ds}{ds_1} = k\kappa(s)cos\theta$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının normu alınırsa

$$\|\boldsymbol{t_t}(s_1)\| = \left\|(\boldsymbol{t}(s) + k\kappa(s)\boldsymbol{n}(s))\frac{ds}{ds_1}\right\| = \|\boldsymbol{t}(s) + k\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)\|\frac{ds}{ds_1}$$

$$= \frac{ds}{ds_1}\left[\big(\boldsymbol{t}(s) + k\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)\big).\big(\boldsymbol{t}(s) + k\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)\big)\right]^{1/2}$$

$$= \frac{ds}{ds_1}[1 + k^2\kappa^2(s)]^{1/2}$$

bulunur. O halde $\|\boldsymbol{t_t}(s_1)\| = 1$ olacağından

$$\frac{ds_1}{ds} = \sqrt{1 + k^2\kappa^2(s)}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2\kappa^2(s)}}$$

bulunur.

Eğer $\boldsymbol{t_t} = \boldsymbol{n}(s)$ olarak alınırsa, $\boldsymbol{t_t}(s_1)$ vektörünün s_1 e göre türevinden, Frenet formüllerine göre

$$\kappa_t\boldsymbol{n_t} = (-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s)).\frac{ds}{ds_1}$$

bulunur. Burada $\frac{ds}{ds_1}$’in ifadesini yerine yazarsak,

$$\kappa_t \boldsymbol{n_t} = \frac{-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s)}{\sqrt{1 + k^2\kappa^2(s)}}$$

elde edilir. Bu vektörün kendisiyle nokta çarpımını alırsak,

$$\begin{aligned}\kappa_t \boldsymbol{n_t}.\kappa_t \boldsymbol{n_t} = {\kappa_t}^2 &= \frac{1}{1 + k^2\kappa^2(s)}\left(-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s)\right).\left(-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s)\right)\\ &= \frac{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}{1 + k^2\kappa^2(s)}\end{aligned}$$

bulunur. Aynı eşitlikten α eğrisinin k-sabit teğet eğrisinin asal normal vektörü

$$\boldsymbol{n_t} = \frac{-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s)}{\kappa_t\sqrt{1 + k^2\kappa^2(s)}}$$

ve binormal vektörü

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b_t} = \boldsymbol{t_t} \times \boldsymbol{n_t} &= \left(\frac{\boldsymbol{t}(s) + k\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)}{\sqrt{1 + k^2\kappa^2(s)}}\right) \times \left(\frac{-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s)}{\kappa_t\sqrt{1 + k^2\kappa^2(s)}}\right)\\ &= \frac{1}{\kappa_t\left(1 + k^2\kappa^2(s)\right)}\left(k\kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{t}(s) - \tau(s)\boldsymbol{n}(s) + k\kappa^2(s)\boldsymbol{b}(s)\right)\end{aligned}$$

ifadesiyle verilir.

Şimdi genel durumda bir $\boldsymbol{\alpha_t}(s)$ eğrisinin Frenet çatısını $\boldsymbol{\alpha}(s)$ nin Frenet çatısı cinsinden belirleyelim.

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha_t}(s)}{ds} = \frac{d\boldsymbol{\alpha}(s)}{ds} + k\frac{d\boldsymbol{t}(s)}{ds} = \boldsymbol{t}(s) + k\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$$

olduğunu biliyoruz. Bu ifadenin normunu alırsak;

$$\left\|\frac{d\boldsymbol{\alpha_t}(s)}{ds}\right\| = \sqrt{1 + k^2\kappa^2(s)} = C(s)$$

olur. Buradan k-sabit teğet eğrisi keyfi hızlı olduğundan, keyfi hızlı eğrilerdeki Frenet çatısı hesaplaması yapılabilir. O halde birim teğet vektör alanı;

$$\boldsymbol{t_t}(s) = \frac{\frac{d\boldsymbol{\alpha_t}(s)}{ds}}{\left\|\frac{d\boldsymbol{\alpha_t}(s)}{ds}\right\|} = \frac{\boldsymbol{t}(s) + k\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)}{\sqrt{1 + k^2\kappa^2(s)}}$$

olarak elde edilir. $\frac{d\boldsymbol{\alpha_t}(s)}{ds}$ nin bir kez daha türevini alırsak;

$$\frac{d^2\boldsymbol{\alpha_t}(s)}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{t}(s)}{ds} + k\frac{d\kappa(s)}{ds}\boldsymbol{n}(s) + k\kappa(s)\frac{d\boldsymbol{n}(s)}{ds}$$

$$= \kappa(s)\boldsymbol{n}(s) + k\kappa'(s)\boldsymbol{n}(s) + k\kappa(s)(-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s))$$

$$= -k\kappa^2(s)\boldsymbol{t}(s) + (\kappa(s) + k\kappa'(s))\boldsymbol{n}(s) + k\kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{b}(s)$$

olarak bulunur. Üçüncü türevi ise aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d^3\boldsymbol{\alpha_t}(s)}{ds^3} = -k2\kappa(s)\kappa'(s)\boldsymbol{t}(s) - k\kappa^2(s)\frac{d\boldsymbol{t}(s)}{ds} + (\kappa'(s) + k\kappa''(s))\boldsymbol{n}(s)$$
$$+ \big(\kappa(s) + k\kappa'(s)\big)\frac{d\boldsymbol{n}(s)}{ds} + k\kappa'(s)\tau(s)\boldsymbol{b}(s) + k\kappa(s)\tau'(s)\boldsymbol{b}(s)$$
$$+ k\kappa(s)\tau(s)\frac{d\boldsymbol{b}(s)}{ds}$$

$$= \big(-2k\kappa(s)\kappa'(s) - \kappa^2(s) - k\kappa(s)\kappa'(s)\big)\boldsymbol{t}(s)$$
$$+ \big(-k\kappa^3(s) + \kappa'(s) + k\kappa''(s) - k\kappa(s)\tau^2(s)\big)\boldsymbol{n}(s)$$
$$+ \big(\kappa(s)\tau(s) + k\kappa'(s)\tau(s) + k\kappa'(s)\tau(s) + k\kappa(s)\tau'(s)\big)\boldsymbol{b}(s)$$

$$= \big(-3k\kappa(s)\kappa'(s) - \kappa^2(s)\big)\boldsymbol{t}(s) + \big(-k\kappa^3(s) + \kappa'(s) + k\kappa''(s) - k\kappa(s)\tau^2(s)\big)\boldsymbol{n}(s)$$
$$+ \big(\kappa(s)\tau(s) + 2k\kappa'(s)\tau(s) + k\kappa(s)\tau'(s)\big)\boldsymbol{b}(s)$$

Diğer taraftan;

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha_t}(s)}{ds} \times \frac{d^2\boldsymbol{\alpha_t}(s)}{ds^2}$$
$$= \big(\boldsymbol{t}(s) + k\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)\big) \times (-k\kappa^2(s)\boldsymbol{t}(s) + \big(\kappa(s) + k\kappa'^{(s)}\big)\boldsymbol{n}(s)$$
$$+ k\kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{b}(s)$$

$$= \big(\kappa(s) + k\kappa'(s)\big)\boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}(s) + k\kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{b}(s) - k^2\kappa^3(s)\boldsymbol{n}(s) \times \boldsymbol{t}(s)$$
$$+ k^2\kappa^2(s)\tau(s)\boldsymbol{n}(s) \times \boldsymbol{b}(s)$$

$$= k^2\kappa^2(s)\tau(s)\boldsymbol{t}(s) - k\kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{n}(s) + \big(\kappa(s) + k\kappa'(s) + k^2\kappa^3(s)\big)\boldsymbol{b}(s)$$

ve

$$\left\|\frac{d\boldsymbol{\alpha_t}(s)}{ds} \times \frac{d^2\boldsymbol{\alpha_t}(s)}{ds^2}\right\| = \sqrt{k^4\kappa^4(s)\tau^2(s) + k^2\kappa^2(s)\tau^2(s) + \big(\kappa(s) + k\kappa'(s) + k^2\kappa^3(s)\big)^2}$$
$$= E(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\boldsymbol{\alpha_t}(s)}{ds} \times \frac{d^2\boldsymbol{\alpha_t}(s)}{ds^2}\right).\frac{d^3\boldsymbol{\alpha_t}(s)}{ds^3} &= k^2\kappa^2(s)\tau(s)\big(-3k\kappa(s)\kappa'(s) - \kappa^2(s)\big)\\ &\quad - k\kappa(s)\tau(s)\big(-k\kappa^3(s) + \kappa'(s) + k\kappa''(s) - k\kappa(s)\tau^2(s)\big)\\ &\quad + \big(\kappa(s) + k\kappa'(s) + k^2\kappa^3(s)\big)\big(\kappa(s)\tau(s) + 2k\kappa'(s)\tau(s) + k\kappa(s)\tau'(s)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -3k^3\kappa^3(s)\tau(s)\kappa'(s) - k^2\kappa^4(s)\tau(s) + k^2\kappa^4(s)\tau(s) - k\kappa(s)\tau(s)\kappa'(s)\\ &\quad - k^2\kappa(s)\tau(s)\kappa''(s) + k^2\kappa^2(s)\tau^3(s) + \kappa^2(s)\tau(s) + 2k\kappa(s)\kappa'(s)\tau(s)\\ &\quad + k\kappa^2(s)\tau'(s) + k\kappa'(s)\kappa(s)\tau(s) + 2k^2\big(\kappa'(s)\big)^2\tau(s) + k^2\kappa(s)\kappa'(s)\tau'(s)\\ &\quad + k^2\kappa^4(s)\tau(s) + 2k^3\kappa^3(s)\kappa'(s)\tau(s) + k^3\kappa^4(s)\tau'(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -k^3\kappa^3(s)\tau(s)\kappa'(s) + 2k\kappa(s)\kappa'(s)\tau(s) - k^2\kappa(s)\tau(s)\kappa''(s) + k^2\kappa^2(s)\tau^3(s)\\ &\quad + \kappa^2(s)\tau(s) + k\kappa^2(s)\tau'(s) + 2k^2\big(\kappa'(s)\big)^2\tau(s) + k^2\kappa(s)\kappa'(s)\tau'(s)\\ &\quad + k^3\kappa^4(s)\tau'(s) = D(s)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan eğrinin eğrilik ve burulması s parametresi cinsinden;

$$\kappa_t(s) = \frac{\|\boldsymbol{\alpha}_t'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_t''(s)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}_t'(s)\|^3}$$
$$= \frac{\sqrt{k^4\kappa^4(s)\tau^2(s) + k^2\kappa^2(s)\tau^2(s) + \big(\kappa(s) + k\kappa'(s) + k^2\kappa^3(s)\big)^2}}{(1 + k^2\kappa^2(s))^{3/2}}$$

$$\tau_t(s) = \frac{\boldsymbol{\alpha}_t'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_t''(s).\boldsymbol{\alpha}_t'''(s)}{\|\boldsymbol{\alpha}_t'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_t''(s)\|^2}$$

$$= \frac{D(s)}{k^4\kappa^4(s)\tau^2(s) + k^2\kappa^2(s)\tau^2(s) + \big(\kappa(s) + k\kappa'(s) + k^2\kappa^3(s)\big)^2}$$

olarak elde edilir.

$$\boldsymbol{t}_t(s) = \frac{\boldsymbol{t}(s) + k\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)}{\sqrt{1 + k^2\kappa^2(s)}}$$

olarak bulunmuştu. Şimdi $\boldsymbol{b}_t(s)$ ve $\boldsymbol{n}_t(s)$ vektörlerini hesaplayalım.

$$\boldsymbol{b}_t(s) = \frac{\boldsymbol{\alpha}_t'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_t''(s)}{\|\boldsymbol{\alpha}_t'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_t''(s)\|}$$

$$= \frac{k^2\kappa^2(s)\tau(s)\boldsymbol{t}(s) - k\kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{n}(s) + \big(\kappa(s) + k\kappa'(s) + k^2\kappa^3(s)\big)\boldsymbol{b}(s)}{\sqrt{k^4\kappa^4(s)\tau^2(s) + k^2\kappa^2(s)\tau^2(s) + \big(\kappa(s) + k\kappa'(s) + k^2\kappa^3(s)\big)^2}}$$

ve

$$\boldsymbol{n}_t(s) = \boldsymbol{b}_t(s) \times \boldsymbol{t}_t(s)$$

$$= \frac{1}{E(s)}\big(k^2\kappa^2(s)\tau(s)\boldsymbol{t}(s) - k\kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{n}(s)$$

$$+ \big(\kappa(s) + k\kappa'(s) + k^2\kappa^3(s)\big)\boldsymbol{b}(s)\big) \times \frac{1}{C(s)}(\boldsymbol{t}(s) + k\kappa(s)\boldsymbol{n}(s))$$

$$= \frac{1}{E(s)C(s)}\big[k^3\kappa^3(s)\tau(s)\boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}(s) - k\kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{n}(s) \times \boldsymbol{t}(s)$$

$$+ \big(\kappa(s) + k\kappa'(s) + k^2\kappa^3(s)\big)\boldsymbol{b}(s) \times \boldsymbol{t}(s)$$

$$+ k\kappa(s)\big(\kappa(s) + k\kappa'(s) + k^2\kappa^3(s)\big)\boldsymbol{b}(s) \times \boldsymbol{n}(s)\big]$$

ve buradan da

$$\boldsymbol{n}_t(s) = \frac{1}{E(s)C(s)}\big[\big(-k\kappa^2(s) - k^2\kappa(s)\kappa'(s) - k^3\kappa^4(s)\big)\boldsymbol{t}(s)$$

$$+ \big(\kappa(s) + k\kappa'(s) + k^2\kappa^3(s)\big)\boldsymbol{n}(s) + \big(k^3\kappa^3(s)\tau(s) + k\kappa(s)\tau(s)\big)\boldsymbol{b}(s)\big]$$

elde edilir.

O halde aşağıdaki teoremleri ifade edebiliriz:

Teorem 2.2. $\boldsymbol{\alpha_t}(s)$, k-sabit teğet eğrisinin Frenet çatısının $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin Frenet çatısı cinsinden ifadesi;

$$\boldsymbol{t_t}(s) = \frac{\boldsymbol{t}(s) + k\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)}{\sqrt{1 + k^2\kappa^2(s)}}$$

$$\boldsymbol{b_t}(s) = \frac{k^2\kappa^2(s)\tau(s)\boldsymbol{t}(s) - k\kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{n}(s) + \big(\kappa(s) + k\kappa'(s) + k^2\kappa^3(s)\big)\boldsymbol{b}(s)}{\sqrt{k^4\kappa^4(s)\tau^2(s) + k^2\kappa^2(s)\tau^2(s) + \big(\kappa(s) + k\kappa'(s) + k^2\kappa^3(s)\big)^2}}$$

$$\boldsymbol{n_t}(s) = \frac{1}{E(s)C(s)}\Big[\big(-k\kappa^2(s) - k^2\kappa(s)\kappa'(s) - k^3\kappa^4(s)\big)\boldsymbol{t}(s) + \big(\kappa(s) + k\kappa'(s) + k^2\kappa^3(s)\big)\boldsymbol{n}(s) + \big(k^3\kappa^3(s)\tau(s) + k\kappa(s)\tau(s)\big)\boldsymbol{b}(s)\Big]$$

biçimindedir.

Teorem 2.3. $\boldsymbol{\alpha_t}(s)$, k-sabit teğet eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonlarının, $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları cinsinden ifadesi;

$$\kappa_t(s) = \frac{\sqrt{k^4\kappa^4(s)\tau^2(s) + k^2\kappa^2(s)\tau^2(s) + \big(\kappa(s) + k\kappa'(s) + k^2\kappa^3(s)\big)^2}}{(1 + k^2\kappa^2(s))^{3/2}}$$

$$\tau_t(s) = \frac{D(s)}{k^4\kappa^4(s)\tau^2(s) + k^2\kappa^2(s)\tau^2(s) + \big(\kappa(s) + k\kappa'(s) + k^2\kappa^3(s)\big)^2}$$

biçimindedir.

2.3. k-Sabit Normal Eğrisinin Frenet Çatısı, Eğrilik ve Burulma Fonksiyonları

Şimdi α nın k-sabit normal eğrisi olan

$$\boldsymbol{\alpha_n}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + k\boldsymbol{n}(s)$$

eğrisini göz önüne alalım. Bu eğrinin yay uzunluğu fonksiyonu s_2 olsun. Bu durumda $\alpha_n(s)$ eğrisinin birim teğet vektörü

$$\boldsymbol{t_n}(s_2) = \frac{d\boldsymbol{\alpha_n}}{ds}(s_2).\frac{ds}{ds_2} = \left(\boldsymbol{t}(s) + k\boldsymbol{n}'(s)\right)\Big|_{s_2}\frac{ds}{ds_2}$$

$$= (\boldsymbol{t}(s) + k(-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(\boldsymbol{s}))\Big|_{s_2}\frac{ds}{ds_2}$$

$$=((1 - k\kappa(s))\boldsymbol{t}(s) + k\tau(s)\boldsymbol{b}(\boldsymbol{s}))\Big|_{s_2}\frac{ds}{ds_2}$$

elde edilir. Her iki tarafın $\boldsymbol{t}$ ile nokta çarpımını alırsak;

$$\boldsymbol{t_n}.\boldsymbol{t} = (1 - k\kappa(s))\frac{ds}{ds_2}$$

elde edilir. Aynı zamanda bu eşitliğin her iki tarafını $\boldsymbol{b}$ vektörü ile çarparsak,

$$\boldsymbol{t_n}.\boldsymbol{b} = k\tau(s)\frac{ds}{ds_2}$$

bulunur. Her iki tarafın $\boldsymbol{n}$ vektörü ile çarpılmasından ise

$$\boldsymbol{t_n}.\boldsymbol{n} = 0$$

eşitliği elde edilir ki buradan $\boldsymbol{t_n}$ ve $\boldsymbol{n}$ vektörlerinin dik olduğunu gösterir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının normu alınırsa

$$\|\boldsymbol{t_n}(s_2)\| = \left\|((1 - k\kappa(s))\boldsymbol{t}(s) + k\tau(s)\boldsymbol{b}(\boldsymbol{s}))\frac{ds}{ds_2}\right\| = \|(1 - k\kappa(s))\boldsymbol{t}(s) + k\tau(s)\boldsymbol{b}(\boldsymbol{s})\|\frac{ds}{ds_2}$$

$$= \frac{ds}{ds_2}[((1 - k\kappa(s))\boldsymbol{t}(s) + k\tau(s)\boldsymbol{b}(\boldsymbol{s})).((1 - k\kappa(s))\boldsymbol{t}(s) + k\tau(s)\boldsymbol{b}(\boldsymbol{s}))]^{1/2}$$

$$= \frac{ds}{ds_2}[(1 - k\kappa(s))^2 + k^2\tau^2(s)]^{1/2}$$

bulunur. O halde $\|\boldsymbol{t_n}(s_2)\| = 1$ olacağından

$$\frac{ds_2}{ds} = \sqrt{(1 - k\kappa(s))^2 + k^2\tau^2(s)}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\frac{ds}{ds_2}=\frac{1}{\sqrt{(1-k\kappa(s))^2+k^2\tau^2(s)}}$$

bulunur.

Eğer $\boldsymbol{t_n}=\boldsymbol{n}$ olarak alınırsa, $\boldsymbol{t_n}(s_2)$ vektörünün s_2 ye göre türevinden, Frenet formüllerine göre

$$\kappa_n\boldsymbol{n_n}=(-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s)+\tau(s)\boldsymbol{b}(s)).\frac{ds}{ds_2}$$

bulunur. Burada $\frac{ds}{ds_2}$'in ifadesini yerine yazarsak,

$$\kappa_n\boldsymbol{n_n}=\frac{-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s)+\tau(s)\boldsymbol{b}(s)}{\sqrt{(1-k\kappa(s))^2+k^2\tau^2(s)}}$$

elde edilir. Bu vektörün kendisiyle nokta çarpımını alırsak,

$$\begin{aligned}\kappa_n\boldsymbol{n_n}.\kappa_n\boldsymbol{n_n}&={\kappa_n}^2\\&=\frac{1}{(1-k\kappa(s))^2+k^2\tau^2(s)}(-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s)+\tau(s)\boldsymbol{b}(s)).(-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s)\\&+\tau(s)\boldsymbol{b}(s))=\frac{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}{(1-k\kappa(s))^2+k^2\tau^2(s)}\end{aligned}$$

bulunur. Aynı eşitlikten α eğrisinin k-sabit normal eğrisinin asal normal vektörü

$$\boldsymbol{n_n}=\frac{-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s)+\tau(s)\boldsymbol{b}(s)}{\kappa_n\sqrt{(1-k\kappa(s))^2+k^2\tau^2(s)}}$$

ve binormal vektörü

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b_n}=\boldsymbol{t_n}\times\boldsymbol{n_n}&=\left(\frac{\boldsymbol{t}(s)+k\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)}{\sqrt{(1-k\kappa(s))^2+k^2\tau^2(s)}}\right)\times\left(\frac{-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s)+\tau(s)\boldsymbol{b}(s)}{\kappa_n\sqrt{(1-k\kappa(s))^2+k^2\tau^2(s)}}\right)\\&=\frac{1}{\kappa_n\left(\left(1-k\kappa(s)\right)^2+k^2\tau^2(s)\right)}(k\kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{t}(s)-\tau(s)\boldsymbol{n}(s)\\&+k\kappa^2(s)\boldsymbol{b}(s))\end{aligned}$$

ifadesiyle verilir.

Şimdi genel durumda bir $\boldsymbol{\alpha_n}(s)$ eğrisinin Frenet çatısını $\boldsymbol{\alpha}(s)$ nin Frenet çatısı cinsinden belirleyelim.

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha_n}(s)}{ds}=\frac{d\boldsymbol{\alpha}(s)}{ds}+k\frac{d\boldsymbol{n}(s)}{ds}=\boldsymbol{t}(s)+k\big(-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s)+\tau(s)\boldsymbol{b}(s)\big)$$
$$=\big(1-k\kappa(s)\big)\boldsymbol{t}(s)+k\tau(s)\boldsymbol{b}(s)$$

olduğunu biliyoruz. Bu ifadenin normunu alırsak;

$$\left\|\frac{d\boldsymbol{\alpha_n}(s)}{ds}\right\|=\sqrt{\big(1-k\kappa(s)\big)^{\boldsymbol{2}}+k^2\tau^2(s)}=A(s)$$

elde edilir. Buradan $\boldsymbol{t_n}(s)$ birim teğet vektörü;

$$\boldsymbol{t_n}(s)=\frac{\frac{d\boldsymbol{\alpha_n}(s)}{ds}}{\left\|\frac{d\boldsymbol{\alpha_n}(s)}{ds}\right\|}=\frac{\big(1-k\kappa(s)\big)\boldsymbol{t}(s)+k\tau(s)\boldsymbol{b}(s)}{\sqrt{\big(1-k\kappa(s)\big)^{\boldsymbol{2}}+k^2\tau^2(s)}}$$

olarak bulunur.

$$\frac{d^2\boldsymbol{\alpha_n}(s)}{ds^2}=-k\kappa'(s)\boldsymbol{t}(s)+\big(1-k\kappa(s)\big)\frac{d\boldsymbol{t}(s)}{ds}+k\tau'(s)\boldsymbol{b}(s)+k\tau(s)\frac{d\boldsymbol{b}(s)}{ds}$$

$$=-k\kappa'(s)\boldsymbol{t}(s)+\big(\kappa(s)-k\kappa^2(s)-k\tau^2(s)\big)\boldsymbol{n}(s)+k\tau'(s)\boldsymbol{b}(s)$$

ve

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha_n}(s)}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{\alpha_n}(s)}{ds^2}$$

$$=\big[\big(1-k\kappa(s)\big)\boldsymbol{t}(s)+k\tau(s)\boldsymbol{b}(s)\big]$$
$$\times\big[-k\kappa'(s)\boldsymbol{t}(s)+\big(\kappa(s)-k\kappa^2(s)-k\tau^2(s)\big)\boldsymbol{n}(s)+k\tau'(s)\boldsymbol{b}(s)\big]$$

$$=\big(\kappa(s)-k\kappa^2(s)-k\tau^2(s)-k\kappa^2(s)+k^2\kappa^3(s)+k^2\kappa(s)\tau^2(s)\big)\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{n}(s)$$
$$+\big(k\tau'(s)-k^2\kappa(s)\tau'(s)\big)\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{b}(s)-k^2\kappa'(s)\tau(s)\boldsymbol{b}(s)\times\boldsymbol{t}(s)$$
$$+\big(k\tau(s)\kappa(s)-k^2\kappa^2(s)\tau(s)-k^2\tau^3(s)\big)\boldsymbol{b}(s)\times\boldsymbol{n}(s)$$

$$= \left(-k\tau(s)\kappa(s) + k^2\kappa^2(s)\tau(s) + k^2\tau^3(s)\right)\boldsymbol{t}(s)$$
$$+ \left(-k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau'(s) - k^2\kappa'(s)\tau(s)\right)\boldsymbol{n}(s)$$
$$+ \left(\kappa(s) - 2k\kappa^2(s) - k\tau^2(s) + k^2\kappa^3(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\right)\boldsymbol{b}(s)$$

olarak elde edilir. Bu ifadenin normunu alırsak;

$$\left\|\frac{d\boldsymbol{\alpha_n}(s)}{ds} \times \frac{d^2\boldsymbol{\alpha_n}(s)}{ds^2}\right\| = \sqrt{\begin{array}{c}\left(-k\tau(s)\kappa(s) + k^2\kappa^2(s)\tau(s) + k^2\tau^3(s)\right)^2 + \\ \left(-k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau'(s) - k^2\kappa'(s)\tau(s)\right)^2 + \\ \left(\kappa(s) - 2k\kappa^2(s) - k\tau^2(s) + k^2\kappa^3(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\right)^2\end{array}}$$

$$= F(s)$$

bulunur. Ayrıca

$$\frac{d^3\boldsymbol{\alpha_n}(s)}{ds^3} == -k\kappa''(s)\boldsymbol{t}(s) - k\kappa'(s)\boldsymbol{t}'(s) + \left(\kappa'(s) - 2k\kappa(s)\kappa'(s) - 2k\tau(s)\tau'(s)\right)\boldsymbol{n}(s)$$
$$+ \left(\kappa(s) - k\kappa^2(s) - k\tau^2(s)\right)\boldsymbol{n}'(s) + k\tau''(s)\boldsymbol{b}(s) + k\tau'(s)\boldsymbol{b}'(s)$$

$$= -k\kappa''(s)\boldsymbol{t}(s) - k\kappa(s)\kappa'(s)\boldsymbol{n}(s) + \left(\kappa'(s) - 2k\kappa(s)\kappa'(s) - 2k\tau(s)\tau'(s)\right)\boldsymbol{n}(s)$$
$$+ \left(-\kappa^2(s) + k\kappa^3(s) + k\kappa(s)\tau^2(s)\right)\boldsymbol{t}(s)$$
$$+ \left(\kappa(s)\tau(s) - k\kappa^2(s)\tau(s) - k\tau^3(s)\right)\boldsymbol{b}(s) + k\tau''(s)\boldsymbol{b}(s)$$
$$- k\tau(s)\tau'(s)\boldsymbol{n}(s)$$

$$= \left(-k\kappa''(s) - \kappa^2(s) + k\kappa^3(s) + k\kappa(s)\tau^2(s)\right)\boldsymbol{t}(s)$$
$$+ \left(-3k\kappa(s)\kappa'(s) + \kappa'(s) - 3k\tau(s)\tau'(s)\right)\boldsymbol{n}(s) + (\kappa(s)\tau(s) - k\kappa^2(s)\tau(s)$$
$$- k\tau^3(s) + k\tau''(s))\boldsymbol{b}(s)$$

elde edilir. Burulma hesabı için gerekli olan karma çarpıma kısaca

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\alpha_n}(s)}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{\alpha_n}(s)}{ds^2}\right).\frac{d^3\boldsymbol{\alpha_n}(s)}{ds^3}$$

$$\begin{aligned}&=\left(-k\tau(s)\kappa(s)+k^2\kappa^2(s)\tau(s)+k^2\tau^3(s)\right)\left(-k\kappa''(s)-\kappa^2(s)+k\kappa^3(s)\right.\\&\left.+k\kappa(s)\tau^2(s)\right)\\&+\left(-k\tau'(s)+k^2\kappa(s)\tau'(s)-k^2\kappa'(s)\tau(s)\right)\left(-3k\kappa(s)\kappa'(s)+\kappa'(s)\right.\\&\left.-3k\tau(s)\tau'(s)\right)\\&+\left(1-2k\kappa(s)-k\tau^2(s)+k^2\kappa^2(s)+k^2\kappa(s)\tau^2(s)\right)(\kappa(s)\tau(s)\\&-k\kappa^2(s)\tau(s)-k\tau^3(s)+k\tau''(s)=G(s)\end{aligned}$$

dersek, $\boldsymbol{\alpha_n}(s)$ eğrisinin eğrilik ve burulmasının $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin eğrilik ve burulması cinsinden yazılışı aşağıdaki gibi olur:

$$\kappa_n(s)=\frac{\|\boldsymbol{\alpha}'_{\boldsymbol{n}}(s)\times\boldsymbol{\alpha}''_{\boldsymbol{n}}(s)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'_{\boldsymbol{n}}(s)\|^3}$$

$$=\frac{\sqrt{\begin{array}{c}\left(k\tau(s)-k^2\kappa(s)\tau(s)-k^2\tau^3(s)\right)^2+\left(-k\tau'(s)+k^2\kappa(s)\tau'(s)-k^2\kappa'(s)\tau(s)\right)^2+\\\left(\kappa(s)-2k\kappa^2(s)-k\tau^2(s)+k^2\kappa^3(s)+k^2\kappa(s)\tau^2(s)\right)^2\end{array}}}{\left(\left(1-k\kappa(s)\right)^2+k^2\tau^2(s)\right)^{3/2}}$$

$$\tau_n(s)=\frac{(\boldsymbol{\alpha}'_{\boldsymbol{n}}(s)\times\boldsymbol{\alpha}''_{\boldsymbol{n}}(s)).\boldsymbol{\alpha}'''_{\boldsymbol{n}}(s)}{\|\boldsymbol{\alpha}'_{\boldsymbol{n}}(s)\times\boldsymbol{\alpha}''_{\boldsymbol{n}}(s)\|^2}=\frac{G(s)}{F^2(s)}$$

Bu eğrinin birim teğet vektörünü;

$$\boldsymbol{t_n}(s)=\frac{\frac{d\boldsymbol{\alpha_n}(s)}{ds}}{\left\|\frac{d\boldsymbol{\alpha_n}(s)}{ds}\right\|}=\frac{\left(1-k\kappa(s)\right)\boldsymbol{t}(s)+k\tau(s)\boldsymbol{b}(s)}{\sqrt{\left(1-k\kappa(s)\right)^2+k^2\tau^2(s)}}$$

olarak bulmuştuk. Şimdi $\boldsymbol{b_n}(s)$ ve $\boldsymbol{n_n}(s)$ vektörlerini hesaplayalım.

$$\boldsymbol{b_n}(s)=\frac{\boldsymbol{\alpha}'_{\boldsymbol{n}}(s)\times\boldsymbol{\alpha}''_{\boldsymbol{n}}(s)}{\|\boldsymbol{\alpha}'_{\boldsymbol{n}}(s)\times\boldsymbol{\alpha}''_{\boldsymbol{n}}(s)\|}$$

$$= \frac{\begin{array}{c}\big(k\tau(s) - k^2\kappa(s)\tau(s) - k^2\tau^3(s)\big)\boldsymbol{t}(s) + \big(-k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau'(s) - k^2\kappa'(s)\tau(s)\big)\boldsymbol{n}(s) \\ +\big(\kappa(s) - 2k\kappa^2(s) - k\tau^2(s) + k^2\kappa^3(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\big)\boldsymbol{b}(s)\end{array}}{F(s)}$$

ve

$$\boldsymbol{n_n}(s) = \boldsymbol{b_n}(s) \times \boldsymbol{t_n}(s)$$

$$= \frac{1}{F(s)}\begin{bmatrix} \big(k\tau(s) - k^2\kappa(s)\tau(s) - k^2\tau^3(s)\big)\boldsymbol{t}(s) + \\ \big(-k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau'(s) - k^2\kappa'(s)\tau(s)\big)\boldsymbol{n}(s) \\ +\big(\kappa(s) - 2k\kappa^2(s) - k\tau^2(s) + k^2\kappa^3(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\big)\boldsymbol{b}(s)\end{bmatrix}$$

$$\times \frac{1}{A(s)}\big[\big(1 - k\kappa(s)\big)\boldsymbol{t}(s) + k\tau(s)\boldsymbol{b}(s)\big]$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{F(s).A(s)}\Big\{&\big(k^2\tau^2(s) - k^3\kappa(s)\tau^2(s) - k^3\tau^4(s)\big)\boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{b}(s) \\ &+ \big(-k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau'(s) - k^2\kappa'(s)\tau(s) + k^2\kappa(s)\tau'(s) - k^3\kappa^2(s)\tau'(s) \\ &+ k^3\kappa(s)\kappa'(s)\tau(s)\big)\boldsymbol{n}(s) \times \boldsymbol{t}(s) \\ &+ \big(-k^2\tau(s)\tau'(s) + k^3\kappa(s)\tau(s)\tau'(s) - k^3\kappa'(s)\tau^2(s)\big)\boldsymbol{n}(s) \times \boldsymbol{b}(s) \\ &+ \big(\kappa(s) - 2k\kappa^2(s) - k\tau^2(s) + k^2\kappa^3(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s) - k\kappa^2(s) \\ &+ 2k^2\kappa^3(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s) - k^3\kappa^4(s) - k^3\kappa^2(s)\tau^2(s)\big)\boldsymbol{b}(s) \times \boldsymbol{t}(s)\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{F(s).A(s)}\Big\{&\big(-k^2\tau(s)\tau'(s) + k^3\kappa(s)\tau(s)\tau'(s) - k^3\kappa'(s)\tau^2(s)\big)\boldsymbol{t}(s) \\ &+ \big(-k^2\tau^2(s) + k^3\kappa(s)\tau^2(s) + k^3\tau^4(s) + \kappa(s) - 3k\kappa^2(s) - k\tau^2(s) \\ &+ 3k^2\kappa^3(s) + 2k^2\kappa(s)\tau^2(s) - k^3\kappa^4(s) - k^3\kappa^2(s)\tau^2(s)\big)\boldsymbol{n}(s) \\ &+ \big(k\tau'(s) - 2k^2\kappa(s)\tau'(s) + k^2\kappa'(s)\tau(s) + k^3\kappa^2(s)\tau'(s) \\ &- k^3\kappa(s)\kappa'(s)\tau(s)\big)\boldsymbol{b}(s)\Big\} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.4. $\boldsymbol{\alpha_n}(s)$, k-sabit normal eğrisinin Frenet çatısının $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin Frenet çatısı cinsinden ifadesi;

$$\boldsymbol{t_n}(s) = \frac{\big(1 - k\kappa(s)\big)\boldsymbol{t}(s) + k\tau(s)\boldsymbol{b}(s)}{\sqrt{\big(1 - k\kappa(s)\big)^{\mathbf{2}} + k^2\tau^2(s)}}$$

$$\boldsymbol{b_n}(s) = \frac{\begin{array}{c}\big(k\tau(s) - k^2\kappa(s)\tau(s) - k^2\tau^3(s)\big)\boldsymbol{t}(s) + \begin{pmatrix}-k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau'(s) \\ -k^2\kappa'(s)\tau(s)\end{pmatrix}\boldsymbol{n}(s) + \\ \big(\kappa(s) - 2k\kappa^2(s) - k\tau^2(s) + k^2\kappa^3(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\big)\boldsymbol{b}(s)\end{array}}{F(s)}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n_n}(s) = \frac{1}{F(s).A(s)}\{&\big(-k^2\tau(s)\tau'(s) + k^3\kappa(s)\tau(s)\tau'(s) - k^3\kappa'(s)\tau^2(s)\big)\boldsymbol{t}(s) \\ &+ \big(-k^2\tau^2(s) + k^3\kappa(s)\tau^2(s) + k^3\tau^4(s) + \kappa(s) - 3k\kappa^2(s) - k\tau^2(s) \\ &+ 3k^2\kappa^3(s) + 2k^2\kappa(s)\tau^2(s) - k^3\kappa^4(s) - k^3\kappa^2(s)\tau^2(s)\big)\boldsymbol{n}(s) \\ &+ \big(k\tau'(s) - 2k^2\kappa(s)\tau'(s) + k^2\kappa'(s)\tau(s) + k^3\kappa^2(s)\tau'(s) \\ &- k^3\kappa(s)\kappa'(s)\tau(s)\big)\boldsymbol{b}(s)\}\end{aligned}$$

biçimindedir.

Teorem 2.5. $\boldsymbol{\alpha_n}(s)$, k-sabit normal eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonlarının, $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları cinsinden ifadesi;

$$\kappa_n(s) = \frac{\sqrt{\begin{array}{c}\big(k\tau(s) - k^2\kappa(s)\tau(s) - k^2\tau^3(s)\big)^2 + \big(-k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau'(s) - k^2\kappa'(s)\tau(s)\big)^2 + \\ \big(\kappa(s) - 2k\kappa^2(s) - k\tau^2(s) + k^2\kappa^3(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\big)^2\end{array}}}{\Big(\big(1 - k\kappa(s)\big)^{\mathbf{2}} + k^2\tau^2(s)\Big)^{3/2}}$$

$$\tau_n(s) = \frac{G(s)}{F^2(s)}$$

biçimindedir.

2.4. k-Sabit Binormal Eğrisinin Frenet Çatısı, Eğrilik ve Burulma Fonksiyonları

Şimdi α nın k-sabit binormal eğrisi olan

$$\boldsymbol{\alpha_b}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + k\boldsymbol{b}(s)$$

eğrisini göz önüne alalım. Bu eğrinin yay uzunluğu fonksiyonu s_3 olsun. Bu durumda $\alpha_b(s)$ eğrisinin birim teğet vektörü

$$\boldsymbol{t_b}(s_3) = \frac{d\boldsymbol{\alpha_b}}{ds}(s_3).\frac{ds}{ds_3} = \left(\boldsymbol{t}(s) + k\boldsymbol{b}'(s)\right)\Big|_{s_3}\frac{ds}{ds_3} = (\boldsymbol{t}(s) - k\tau(s)\boldsymbol{n}(s))\Big|_{s_3}\frac{ds}{ds_3}$$

elde edilir. Her iki tarafın $\boldsymbol{t}$ ile nokta çarpımını alırsak;

$$\boldsymbol{t_b}.\boldsymbol{t} = \frac{ds}{ds_3} = cos\theta$$

elde edilir. Burada θ, $\boldsymbol{t_b}$ ile $\boldsymbol{t}$ vektörleri arasındaki açıdır. Aynı zamanda bu eşitliğin her iki tarafını $\boldsymbol{b}$ vektörü ile çarparsak,

$$\boldsymbol{t_b}.\boldsymbol{b} = 0$$

eşitliği elde edilir ki bu da $\boldsymbol{t_b}$ ve $\boldsymbol{b}$ vektörlerinin dik olduğunu gösterir. Her iki tarafın $\boldsymbol{n}$ vektörü ile çarpılmasından ise

$$\boldsymbol{t_b}.\boldsymbol{n} = -k\tau(s)\frac{ds}{ds_3}$$

bulunur. $\boldsymbol{t_b}(s_3)$ ifadesinin her iki tarafının normu alınırsa

$$\|\boldsymbol{t_b}(s_3)\| = \left\|(\boldsymbol{t}(s) - k\tau(s)\boldsymbol{n}(s))\frac{ds}{ds_3}\right\| = \|(\boldsymbol{t}(s) - k\tau(s)\boldsymbol{n}(s))\|\frac{ds}{ds_3}$$

$$= \frac{ds}{ds_3}[(\boldsymbol{t}(s) - k\tau(s)\boldsymbol{n}(s)).(\boldsymbol{t}(s) - k\tau(s)\boldsymbol{n}(s))]^{1/2}$$

$$= \frac{ds}{ds_3}[1 + k^2\tau^2(s)]^{1/2}$$

bulunur. O halde $\|\boldsymbol{t_b}(s_3)\| = 1$ olacağından

$$\frac{ds_3}{ds} = \sqrt{1 + k^2\tau^2(s)}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\frac{ds}{ds_3} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2\tau^2(s)}}$$

bulunur.

Eğer $\boldsymbol{t_b} = \boldsymbol{n}$ olarak alınırsa, $\boldsymbol{t_b}(s_3)$ vektörünün s_3 e göre türevinden, Frenet formüllerine göre

$$\kappa_b \boldsymbol{n_b} = (-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s)).\frac{ds}{ds_3}$$

bulunur. Burada $\frac{ds}{ds_3}$'in ifadesini yerine yazarsak,

$$\kappa_b \boldsymbol{n_b} = \frac{-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s)}{\sqrt{1 + k^2\tau^2(s)}}$$

elde edilir. Bu vektörün kendisiyle nokta çarpımını alırsak,

$$\kappa_b \boldsymbol{n_b}.\kappa_b \boldsymbol{n_b} = {\kappa_b}^2 = \frac{1}{1 + k^2\tau^2(s)}(-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s)).(-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s))$$
$$= \frac{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}{1 + k^2\tau^2(s)}$$

bulunur. Aynı eşitlikten α eğrisinin k-sabit binormal eğrisinin asal normal vektörü

$$\boldsymbol{n_b} = \frac{-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s)}{\kappa_b\sqrt{1 + k^2\tau^2(s)}}$$

ve binormal vektörü

$$\boldsymbol{b_b} = \boldsymbol{t_b} \times \boldsymbol{n_b} = \left(\frac{\boldsymbol{t}(s) - k\tau(s)\boldsymbol{n}(s)}{\sqrt{1 + k^2\tau^2(s)}}\right) \times \left(\frac{-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s)}{\kappa_b\sqrt{1 + k^2\tau^2(s)}}\right)$$
$$= \frac{1}{\kappa_b\left(1 + k^2\tau^2(s)\right)}(-k\tau^2(s)\boldsymbol{t}(s) - \tau(s)\boldsymbol{n}(s) - k\kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{b}(s))$$

ifadesiyle verilir.

Şimdi genel durumda bir $\boldsymbol{\alpha_b}(s)$ eğrisinin Frenet çatısını $\boldsymbol{\alpha}(s)$ nin Frenet çatısı cinsinden belirleyelim.

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha_b}(s)}{ds}=\frac{d\boldsymbol{\alpha}(s)}{ds}+k\frac{d\boldsymbol{b}(s)}{ds}=\boldsymbol{t}(s)+k\big(-\tau(s)\boldsymbol{n}(s)\big)=\boldsymbol{t}(s)-k\tau(s)\boldsymbol{n}(s)$$

olduğunu biliyoruz. Bu ifadenin normunu alırsak;

$$\left\|\frac{d\boldsymbol{\alpha_b}(s)}{ds}\right\|=\sqrt{1+k^2\tau^2(s)}=K(s)$$

elde edilir. Buradan $\boldsymbol{t_b}(s)$ birim teğet vektörü;

$$\boldsymbol{t_b}(s)=\frac{\frac{d\boldsymbol{\alpha_b}(s)}{ds}}{\left\|\frac{d\boldsymbol{\alpha_b}(s)}{ds}\right\|}=\frac{\boldsymbol{t}(s)-k\tau(s)\boldsymbol{n}(s)}{\sqrt{1+k^2\tau^2(s)}}$$

olarak bulunur. Ayrıca;

$$\begin{aligned}\frac{d^2\boldsymbol{\alpha_b}(s)}{ds^2}&=\frac{d\boldsymbol{t}(s)}{ds}-k\tau'(s)\boldsymbol{n}(s)-k\tau(s)\frac{d\boldsymbol{n}(s)}{ds}\\&=k\kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{t}(s)+\big(\kappa(s)-k\tau'(s)\big)\boldsymbol{n}(s)-k\tau^2(s)\boldsymbol{b}(s)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&\frac{d\boldsymbol{\alpha_b}(s)}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{\alpha_b}(s)}{ds^2}\\&\quad=[\boldsymbol{t}(s)-k\tau(s)\boldsymbol{n}(s)]\\&\quad\times\big[k\kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{t}(s)+\big(\kappa(s)-k\tau'(s)\big)\boldsymbol{n}(s)-k\tau^2(s)\boldsymbol{b}(s)\big]\\&\quad=\big(\kappa(s)-k\tau'(s)\big)\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{n}(s)-k\tau^2(s)\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{b}(s)-k^2\kappa(s)\tau^2(s)\boldsymbol{n}(s)\\&\quad\times\boldsymbol{t}(s)+k^2\tau^3(s)\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{b}(s)\\&\quad=k^2\tau^3(s)\boldsymbol{t}(s)+k\tau^2(s)\boldsymbol{n}(s)+\big(\kappa(s)-k\tau'(s)+k^2\kappa(s)\tau^2(s)\big)\boldsymbol{b}(s)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin normu ise

$$\begin{aligned}\left\|\frac{d\boldsymbol{\alpha_b}(s)}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{\alpha_b}(s)}{ds^2}\right\|&=\sqrt{k^4\tau^6(s)+k^2\tau^4(s)+\big(\kappa(s)-k\tau'(s)+k^2\kappa(s)\tau^2(s)\big)^2}\\&=L(s)\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\boldsymbol{\alpha_b}(s)$ eğrisinin s parametresine göre üçüncü türevi ise;

$$\frac{d^3\boldsymbol{\alpha_b}(s)}{ds^3} = k\kappa'(s)\tau(s)\boldsymbol{t}(s) + k\kappa(s)\tau'(s)\boldsymbol{t}(s) + k\kappa(s)\tau(s)\frac{d\boldsymbol{t}(s)}{ds}$$
$$+ \big(\kappa'(s) - k\tau''(s)\big)\boldsymbol{n}(s) + \big(\kappa(s) - k\tau'(s)\big)\frac{d\boldsymbol{n}(s)}{ds} - 2k\tau(s)\tau'(s)\boldsymbol{b}(s)$$
$$- k\tau^2(s)\frac{d\boldsymbol{b}(s)}{ds}$$

$$= \big(k\kappa'(s)\tau(s) + k\kappa(s)\tau'(s) - \kappa^2(s) + k\kappa(s)\tau'(s)\big)\boldsymbol{t}(s)$$
$$+ \big(k\kappa^2(s)\tau(s) + \kappa'(s) - k\tau''(s) + k\tau^3(s)\big)\boldsymbol{n}(s)$$
$$+ (\kappa(s)\tau(s) - k\tau(s)\tau'(s) - 2k\tau(s)\tau'(s))\boldsymbol{b}(s)$$

$$= \big(k\kappa'(s)\tau(s) - \kappa^2(s) + 2k\kappa(s)\tau'(s)\big)\boldsymbol{t}(s)$$
$$+ \big(k\kappa^2(s)\tau(s) + \kappa'(s) - k\tau''(s) + k\tau^3(s)\big)\boldsymbol{n}(s)$$
$$+ (\kappa(s)\tau(s) - 3k\tau(s)\tau'(s))\boldsymbol{b}(s)$$

biçimindedir.

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\alpha_b}(s)}{ds} \times \frac{d^2\boldsymbol{\alpha_b}(s)}{ds^2}\right) . \frac{d^3\boldsymbol{\alpha_b}(s)}{ds^3}$$
$$= k^2\tau^3(s).\big(k\kappa'(s)\tau(s) - \kappa^2(s) + 2k\kappa(s)\tau'(s)\big)$$
$$+ k\tau^2(s).\big(k\kappa^2(s)\tau(s) + \kappa'(s) - k\tau''(s) + k\tau^3(s)\big)$$
$$+ \big(\kappa(s) - k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\big).(\kappa(s)\tau(s) - 3k\tau(s)\tau'(s))$$

$$= k^3\kappa'(s)\tau^4(s) - k^2\kappa^2(s)\tau^3(s) + 2k^3\kappa(s)\tau'(s)\tau^3(s) + k^2\kappa^2(s)\tau^3(s) + k\kappa'(s)\tau^2(s)$$
$$- k^2\tau^2(s)\tau''(s) + k^2\tau^5(s) + \kappa^2(s)\tau(s) - 3k\kappa(s)\tau(s)\tau'(s)$$
$$- k\kappa(s)\tau(s)\tau'(s) + 3k^2\tau(s)\big(\tau'(s)\big)^2 + k^2\kappa^2(s)\tau^3(s)$$
$$- 3k^3\kappa(s)\tau^3(s)\tau'(s)$$

$$= k^3\kappa'(s)\tau^4(s) + k^2\kappa^2(s)\tau^3(s) - k^3\kappa(s)\tau'(s)\tau^3(s) + k\kappa'(s)\tau^2(s) - k^2\tau^2(s)\tau''(s)$$
$$+ k^2\tau^5(s) + \kappa^2(s)\tau(s) - 4k\kappa(s)\tau(s)\tau'(s) + 3k^2\tau(s)\big(\tau'(s)\big)^2$$

olarak elde edilir. Bu durumda $\boldsymbol{\alpha_b}(s)$ eğrisinin eğrilik ve burulmasının $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin eğrilik ve burulması cinsinden ifadeleri;

$$\kappa_b(s) = \frac{\|\boldsymbol{\alpha}_b'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_b''(s)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}_b'(s)\|^3} = \frac{\sqrt{k^4\tau^6(s) + k^2\tau^4(s) + \left(\kappa(s) - k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\right)^2}}{\left(1 + k^2\tau^2(s)\right)^{3/2}}$$

ve

$$\tau_b(s) = \frac{\left(\boldsymbol{\alpha}_b'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_b''(s)\right).\boldsymbol{\alpha}_b'''(s)}{\|\boldsymbol{\alpha}_b'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_b''(s)\|^2}$$

$$= \frac{\begin{array}{c} k^3\kappa'(s)\tau^4(s) + k^2\kappa^2(s)\tau^3(s) - k^3\kappa(s)\tau'(s)\tau^3(s) + k\kappa'(s)\tau^2(s) - k^2\tau^2(s)\tau''(s) \\ +k^2\tau^5(s) + \kappa^2(s)\tau(s) - 4k\kappa(s)\tau(s)\tau'(s) + 3k^2\tau(s)\left(\tau'(s)\right)^2 \end{array}}{k^4\tau^6(s) + k^2\tau^4(s) + \left(\kappa(s) - k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\right)^2}$$

olarak bulunur. Ayrıca $\boldsymbol{\alpha_b}(s)$ eğrisinin birim teğet vektörünü

$$\boldsymbol{t_b}(s) = \frac{\frac{d\boldsymbol{\alpha_b}(s)}{ds}}{\left\|\frac{d\boldsymbol{\alpha_b}(s)}{ds}\right\|} = \frac{\boldsymbol{t}(s) - k\tau(s)\boldsymbol{n}(s)}{\sqrt{1 + k^2\tau^2(s)}}$$

olarak elde etmiştik. Bu eğrinin diğer Frenet çatısı elemanları ise;

$$\boldsymbol{b_b}(s) = \frac{\boldsymbol{\alpha}_b'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_b''(s)}{\|\boldsymbol{\alpha}_b'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_b''(s)\|}$$

$$= \frac{k^2\tau^3(s)\boldsymbol{t}(s) + k\tau^2(s)\boldsymbol{n}(s) + \left(\kappa(s) - k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\right)\boldsymbol{b}(s)}{\sqrt{k^4\tau^6(s) + k^2\tau^4(s) + \left(\kappa(s) - k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\right)^2}}$$

ve

$$\boldsymbol{n_b}(s) = \boldsymbol{b_b}(s) \times \boldsymbol{t_b}(s)$$

$$= \frac{1}{K(s).L(s)}\left[k^2\tau^3(s)\boldsymbol{t}(s) + k\tau^2(s)\boldsymbol{n}(s) + \left(\kappa(s) - k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\right)\boldsymbol{b}(s)\right] \times \left[\boldsymbol{t}(s) - k\tau(s)\boldsymbol{n}(s)\right]$$

$$= \frac{1}{K(s).L(s)}\{-k^3\tau^4(s)\boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}(s) + k\tau^2(s)\boldsymbol{n}(s) \times \boldsymbol{t}(s)$$
$$+ \left(\kappa(s) - k\tau'(s) + k^2\kappa^2(s)\tau^2(s)\right)\boldsymbol{b}(s) \times \boldsymbol{t}(s)$$
$$+ \left(-k\kappa(s)\tau(s) + k^2\tau(s)\tau'(s) - k^3\kappa(s)\tau^3(s)\right)\boldsymbol{b}(s) \times \boldsymbol{n}(s)\}$$

$$= \frac{1}{K(s).L(s)}\Big\{\big(k\kappa(s)\tau(s) - k^2\tau(s)\tau'(s) + k^3\kappa(s)\tau^3(s)\big)\boldsymbol{t}(s)$$
$$+ \big(\kappa(s) - k\tau'(s) + k^2\kappa^2(s)\tau^2(s)\big)\boldsymbol{n}(s) + \big(-k^3\tau^4(s) - k\tau^2(s)\big)\boldsymbol{b}(s)\Big\}$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.6. $\boldsymbol{\alpha_b}(s)$, k-sabit binormal eğrisinin Frenet çatısının $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin Frenet çatısı cinsinden ifadesi;

$$\boldsymbol{t_b}(s) = \frac{\boldsymbol{t}(s) - k\tau(s)\boldsymbol{n}(s)}{\sqrt{1 + k^2\tau^2(s)}}$$

$$\boldsymbol{b_b}(s) = \frac{k^2\tau^3(s)\boldsymbol{t}(s) + k\tau^2(s)\boldsymbol{n}(s) + \big(\kappa(s) - k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\big)\boldsymbol{b}(s)}{\sqrt{k^4\tau^6(s) + k^2\tau^4(s) + \big(\kappa(s) - k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\big)^2}}$$

$$\boldsymbol{n_b}(s) = \frac{1}{K(s).L(s)}\Big\{\big(k\kappa(s)\tau(s) - k^2\tau(s)\tau'(s) + k^3\kappa(s)\tau^3(s)\big)\boldsymbol{t}(s)$$
$$+ \big(\kappa(s) - k\tau'(s) + k^2\kappa^2(s)\tau^2(s)\big)\boldsymbol{n}(s) + \big(-k^3\tau^4(s) - k\tau^2(s)\big)\boldsymbol{b}(s)\Big\}$$

biçimindedir.

Teorem 2.7. $\boldsymbol{\alpha_b}(s)$, k-sabit binormal eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonlarının, $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları cinsinden ifadesi;

$$\kappa_b(s) = \frac{\sqrt{k^4\tau^6(s) + k^2\tau^4(s) + \big(\kappa(s) - k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\big)^2}}{\big(1 + k^2\tau^2(s)\big)^{3/2}}$$

$$\tau_b(s) = \frac{\begin{gathered} k^3\kappa'(s)\tau^4(s) + k^2\kappa^2(s)\tau^3(s) - k^3\kappa(s)\tau'(s)\tau^3(s) + k\kappa'(s)\tau^2(s) - k^2\tau^2(s)\tau''(s) \\ +k^2\tau^5(s) + \kappa^2(s)\tau(s) - 4k\kappa(s)\tau(s)\tau'(s) + 3k^2\tau(s)\big(\tau'(s)\big)^2 \end{gathered}}{k^4\tau^6(s) + k^2\tau^4(s) + \big(\kappa(s) - k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\big)^2}$$

biçimindedir.

2.5. Örnekler

Örnek 2.8. $\boldsymbol{\alpha}(s) = (p_1 + sv_1, p_2 + sv_2, p_3 + sv_3)$ birim hızlı doğrusunu göz önüne alalım. Bu doğrunun k-sabit teğet eğrisini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha_t}(s) &= \boldsymbol{\alpha}(s) + k\boldsymbol{t}(s)\\ &= (p_1 + sv_1, p_2 + sv_2, p_3 + sv_3) + k(v_1, v_2, v_3)\\ &= (p_1 + (s+k)v_1, p_2 + (s+k)v_2, p_3 + (s+k)v_3)\end{aligned}$$

olup, $\boldsymbol{\alpha_t}(s)$ eğrisi de bir doğru olur. Hatta bu eğri, $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin başka bir parametrelenişidir.

Örnek 2.9. $\boldsymbol{\alpha}(s) = \left(acos\frac{s}{a}, asin\frac{s}{a}, 0\right)$, $a > 0$ eğrisinin;

- **a)** k-sabit teğet eğrisinin Frenet büyüklüklerini hesaplayınız.
- **b)** k-sabit normal eğrisinin Frenet büyüklüklerini hesaplayınız.
- **c)** k-sabit binormal eğrisinin Frenet büyüklüklerini hesaplayınız.

Çözüm: a) $\boldsymbol{\alpha_t}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + k\boldsymbol{t}(s)$ olarak tanımlanmıştı. $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin $\boldsymbol{t}(s)$ teğet vektörünü hesaplayalım. $\boldsymbol{\alpha}(s)$ birim hızlı bir eğri olduğundan

$$\boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{\alpha}'(s) = \left(-sin\frac{s}{a}, cos\frac{s}{a}, 0\right)$$

olarak hesaplanır. Buradan $\boldsymbol{\alpha_t}(s)$ eğrisinin denklemi,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha_t}(s) &= \left(acos\frac{s}{a}, asin\frac{s}{a}, 0\right) + k\left(-sin\frac{s}{a}, cos\frac{s}{a}, 0\right)\\ &= \left(acos\frac{s}{a} - ksin\frac{s}{a}, asin\frac{s}{a} + kcos\frac{s}{a}, 0\right)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan;

$$\boldsymbol{\alpha_t}'(s) = \left(-sin\frac{s}{a} - \frac{k}{a}cos\frac{s}{a}, cos\frac{s}{a} - \frac{k}{a}sin\frac{s}{a}, 0\right)$$

ve

$$\|\boldsymbol{\alpha_t}'(s)\| = \left(\left(-sin\frac{s}{a} - \frac{k}{a}cos\frac{s}{a}\right)^2 + \left(cos\frac{s}{a} - \frac{k}{a}sin\frac{s}{a}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{a^2+k^2}}{a}$$

bulunur. Dolayısıyla eğrimiz birim hızlı değildir. Keyfi hızlı eğrilerdeki gerekli hesaplamaları yaparsak;

$$\boldsymbol{\alpha_t}''(s) = \left(-\frac{1}{a}cos\frac{s}{a} + \frac{k}{a^2}sin\frac{s}{a}, -\frac{1}{a}sin\frac{s}{a} - \frac{k}{a^2}cos\frac{s}{a}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha_t}'''(s) = \left(\frac{1}{a^2}sin\frac{s}{a} + \frac{k}{a^3}cos\frac{s}{a}, -\frac{1}{a^2}cos\frac{s}{a} + \frac{k}{a^3}sin\frac{s}{a}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha_t}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_t}''(s) = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ -sin\frac{s}{a} - \frac{k}{a}cos\frac{s}{a} & cos\frac{s}{a} - \frac{k}{a}sin\frac{s}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a}cos\frac{s}{a} + \frac{k}{a^2}sin\frac{s}{a} & -\frac{1}{a}sin\frac{s}{a} - \frac{k}{a^2}cos\frac{s}{a} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(0,0,\frac{a^2+k^2}{a^3}\right)$$

ve

$$\|\boldsymbol{\alpha_t}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_t}''(s)\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + \left(\frac{a^2+k^2}{a^3}\right)^2} = \frac{a^2+k^2}{a^3}$$

$$\boldsymbol{\alpha_t}'(s) \text{x} \boldsymbol{\alpha_t}''(s) . \boldsymbol{\alpha_t}'''(s) = 0$$

olarak elde edilir. O halde Frenet çatısı;

$$\boldsymbol{t_t}(s) = \frac{\boldsymbol{\alpha_t}'(s)}{\|\boldsymbol{\alpha_t}'(s)\|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+k^2}}\left(-sin\frac{s}{a} - \frac{k}{a}cos\frac{s}{a}, cos\frac{s}{a} - \frac{k}{a}sin\frac{s}{a}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{b_t}(s) = \frac{\boldsymbol{\alpha_t}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_t}''(s)}{\|\boldsymbol{\alpha_t}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_t}''(s)\|} = \frac{a^3}{a^2+k^2}\left(0,0,\frac{a^2+k^2}{a^3}\right) = (0,0,1)$$

$$\boldsymbol{n_t}(s) = \boldsymbol{b_t}(s) \times \boldsymbol{t_t}(s) = \frac{a}{\sqrt{a^2+k^2}} \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -sin\frac{s}{a} - \frac{k}{a}cos\frac{s}{a} & cos\frac{s}{a} - \frac{k}{a}sin\frac{s}{a} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2+k^2}}\left(-cos\frac{s}{a} + \frac{k}{a}sin\frac{s}{a}, -sin\frac{s}{a} - \frac{k}{a}cos\frac{s}{a}, 0\right)$$

bulunur. Eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonları ise;

$$\kappa_t(s) = \frac{\|\boldsymbol{\alpha_t}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_t}''(s)\|}{\|\boldsymbol{\alpha_t}'(s)\|^3} = \frac{\frac{a^2+k^2}{a^3}}{\left(\frac{\sqrt{a^2+k^2}}{a}\right)^3} = \frac{1}{\sqrt{a^2+k^2}}$$

$$\tau_t(s) = \frac{\boldsymbol{\alpha}_t'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_t''(s).\boldsymbol{\alpha_t}'''(s)}{\|\boldsymbol{\alpha_t}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_t}''(s)\|^2} = \frac{0}{\left(\frac{a^2+k^2}{a^3}\right)^2} = 0$$

olarak elde edilir.

b) $\boldsymbol{\alpha_n}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + k\boldsymbol{n}(s)$ olarak tanımlanmıştı. $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin $\boldsymbol{n}(s)$ normal vektörünü hesaplayalım. $\boldsymbol{\alpha}(s)$ birim hızlı bir eğri olduğundan

$$\boldsymbol{t}'(s) = \boldsymbol{\alpha}''(s) = \left(-\frac{1}{a}cos\frac{s}{a}, -\frac{1}{a}sin\frac{s}{a}, 0\right)$$

ve

$$\|\boldsymbol{t}'(s)\| = \sqrt{\frac{1}{a^2}cos^2\frac{s}{a} + \frac{1}{a^2}sin^2\frac{s}{a}} = \frac{1}{a}$$

olduğundan

$$\boldsymbol{n}(s) = \left(-cos\frac{s}{a}, -sin\frac{s}{a}, 0\right)$$

olarak hesaplanır. Buradan $\boldsymbol{\alpha_n}(s)$ eğrisinin denklemi,

$$\boldsymbol{\alpha_n}(s) = \left(acos\frac{s}{a}, asin\frac{s}{a}, 0\right) + k\left(-cos\frac{s}{a}, -sin\frac{s}{a}, 0\right)$$
$$= (acos\frac{s}{a} - kcos\frac{s}{a}, asin\frac{s}{a} - ksin\frac{s}{a}, 0)$$

olarak elde edilir. Buradan;

$$\boldsymbol{\alpha_n}'(s) = \left(-sin\frac{s}{a} + \frac{k}{a}sin\frac{s}{a}, cos\frac{s}{a} - \frac{k}{a}cos\frac{s}{a}, 0\right)$$

ve

$$\|\boldsymbol{\alpha_n}'(s)\| = \left(\left(-sin\frac{s}{a} + \frac{k}{a}sin\frac{s}{a}\right)^2 + \left(cos\frac{s}{a} - \frac{k}{a}cos\frac{s}{a}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{2k}{a} + \frac{k^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - 2ak + k^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{(a-k)^2}{a^2}} = \frac{|a-k|}{a}$$

bulunur. Dolayısıyla eğrimiz birim hızlı değildir. Keyfi hızlı eğrilerdeki gerekli hesaplamaları yaparsak;

$$\boldsymbol{\alpha_n}''(s) = \left(-\frac{1}{a}cos\frac{s}{a} + \frac{k}{a^2}cos\frac{s}{a}, -\frac{1}{a}sin\frac{s}{a} + \frac{k}{a^2}sin\frac{s}{a}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha_n}'''(s) = \left(\frac{1}{a^2}sin\frac{s}{a} - \frac{k}{a^3}sin\frac{s}{a}, -\frac{1}{a^2}cos\frac{s}{a} + \frac{k}{a^3}cos\frac{s}{a}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha_n}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_n}''(s) = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ -sin\frac{s}{a} + \frac{k}{a}sin\frac{s}{a} & cos\frac{s}{a} - \frac{k}{a}cos\frac{s}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a}cos\frac{s}{a} + \frac{k}{a^2}cos\frac{s}{a} & -\frac{1}{a}sin\frac{s}{a} + \frac{k}{a^2}sin\frac{s}{a} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(0{,}0, \frac{a^2 - 2ak + k^2}{a^3}\right) = \left(0{,}0, \frac{(a-k)^2}{a^3}\right)$$

ve

$$\|\boldsymbol{\alpha_n}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_n}''(s)\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + \left(\frac{(a-k)^2}{a^3}\right)^2} = \frac{(a-k)^2}{a^3}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}''(s).\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}'''(s) = 0$$

olarak elde edilir. O halde Frenet çatısı;

$$\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}(s) = \frac{\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}'(s)}{\|\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}'(s)\|} = \frac{a}{|a-k|}\left(-sin\frac{s}{a} + \frac{k}{a}sin\frac{s}{a}, cos\frac{s}{a} - \frac{k}{a}cos\frac{s}{a}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}}(s) = \frac{\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}''(s)}{\|\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}''(s)\|} = \frac{a^3}{(a-k)^2}\left(0,0,\frac{(a-k)^2}{a^3}\right) = (0,0,1)$$

$$\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{n}}(s) = \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}}(s) \times \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}(s) = \frac{a}{|a-k|}\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -sin\frac{s}{a} + \frac{k}{a}sin\frac{s}{a} & cos\frac{s}{a} - \frac{k}{a}cos\frac{s}{a} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a}{|a-k|}\left(-cos\frac{s}{a} + \frac{k}{a}cos\frac{s}{a}, -sin\frac{s}{a} + \frac{k}{a}sin\frac{s}{a}, 0\right)$$

bulunur. Eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonları ise;

$$\kappa_n(s) = \frac{\|\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}''(s)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}'(s)\|^3} = \frac{\frac{(a-k)^2}{a^3}}{\left(\frac{|a-k|}{a}\right)^3} = \frac{1}{|a-k|}$$

$$\tau_n(s) = \frac{\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}''(s).\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}'''(s)}{\|\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}''(s)\|^2} = \frac{0}{\left(\frac{(a-k)^2}{a^3}\right)^2} = 0$$

olarak elde edilir.

c) $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{b}}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + k\boldsymbol{b}(s)$ olarak tanımlanmıştı. $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin $\boldsymbol{b}(s)$ binormal vektörünü hesaplayalım. $\boldsymbol{\alpha}(s)$ birim hızlı bir eğri olduğundan

$$\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}(s) = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ -sin\frac{s}{a} & cos\frac{s}{a} & 0 \\ -cos\frac{s}{a} & -sin\frac{s}{a} & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

olarak hesaplanır. Buradan $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{b}}(s)$ eğrisinin denklemi,

$$\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{b}}(s) = \left(acos\frac{s}{a}, asin\frac{s}{a}, 0\right) + k(0,0,1) = (acos\frac{s}{a}, asin\frac{s}{a}, k)$$

olarak elde edilir. Buradan;

$$\boldsymbol{\alpha_b}'(s) = \left(-sin\frac{s}{a}, cos\frac{s}{a}, 0\right)$$

ve

$$\|\boldsymbol{\alpha_b}'(s)\| = \left(\left(-sin\frac{s}{a}\right)^2 + \left(cos\frac{s}{a}\right)^2\right)^{1/2} = 1$$

bulunur. Dolayısıyla eğrimiz birim hızlı eğridir. Gerekli hesaplamaları yaparsak;

$$\boldsymbol{\alpha_b}''(s) = \left(-\frac{1}{a}cos\frac{s}{a}, -\frac{1}{a}sin\frac{s}{a}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha_b}'''(s) = \left(\frac{1}{a^2}sin\frac{s}{a}, -\frac{1}{a^2}cos\frac{s}{a}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha}'_{\boldsymbol{b}}(s) \times \boldsymbol{\alpha}''_{\boldsymbol{b}}(s) = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ -sin\frac{s}{a} & cos\frac{s}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a}cos\frac{s}{a} & -\frac{1}{a}sin\frac{s}{a} & 0 \end{vmatrix} = (0,0,\frac{1}{a})$$

ve

$$\|\boldsymbol{\alpha_b}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_b}''(s)\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}$$

$$\boldsymbol{\alpha}'_{\boldsymbol{b}}(s) \times \boldsymbol{\alpha}''_{\boldsymbol{b}}(s).\boldsymbol{\alpha_b}'''(s) = 0$$

olarak elde edilir. O halde Frenet çatısı;

$$\boldsymbol{t_b}(s) = \frac{\boldsymbol{\alpha_b}'(s)}{\|\boldsymbol{\alpha_b}'(s)\|} = \left(-sin\frac{s}{a}, cos\frac{s}{a}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{b_b}(s) = \frac{\boldsymbol{\alpha_b}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_b}''(s)}{\|\boldsymbol{\alpha_b}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_b}''(s)\|} = a\left(0,0,\frac{1}{a}\right) = (0,0,1)$$

$$\boldsymbol{n_b}(s) = \boldsymbol{b_b}(s) \times \boldsymbol{t_b}(s) = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -sin\frac{s}{a} & cos\frac{s}{a} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-cos\frac{s}{a}, -sin\frac{s}{a}, 0\right)$$

bulunur. Eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonları ise;

$$\kappa_b(s) = \frac{\|\boldsymbol{\alpha_b}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_b}''(s)\|}{\|\boldsymbol{\alpha_b}'(s)\|^3} = \frac{\frac{1}{a}}{1} = \frac{1}{a}$$

$$\tau_b(s) = \frac{\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{b}}'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{b}}''(s).\boldsymbol{\alpha_b}'''(s)}{\|\boldsymbol{\alpha_b}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_b}''(s)\|^2} = \frac{0}{\left(\frac{1}{a}\right)^2} = 0$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.10. $\boldsymbol{\alpha}(s) = \left(cos\frac{s}{\sqrt{2}}, sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ helis eğrisinin;

- **a)** k-sabit teğet eğrisinin Frenet büyüklüklerini hesaplayınız.
- **b)** k-sabit normal eğrisinin Frenet büyüklüklerini hesaplayınız.
- **c)** k-sabit binormal eğrisinin Frenet büyüklüklerini hesaplayınız.

Çözüm: a) $\boldsymbol{\alpha_t}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + k\boldsymbol{t}(s)$ olarak tanımlanmıştı. $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin $\boldsymbol{t}(s)$ teğet vektörünü hesaplayalım. $\boldsymbol{\alpha}(s)$ birim hızlı bir eğri olduğundan

$$\boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{\alpha}'(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

olarak hesaplanır. Buradan $\boldsymbol{\alpha_t}(s)$ eğrisinin denklemi,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha_t}(s) &= \left(cos\frac{s}{\sqrt{2}}, sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right) + k\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \left(cos\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{k}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}, sin\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{k}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{k}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan;

$$\boldsymbol{\alpha_t}'(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{k}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{k}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ve

$$\|\boldsymbol{\alpha_t}'(s)\| = \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{k}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{k}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(1 + \frac{k^2}{4}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{4+k^2}}{2}$$

bulunur. Dolayısıyla eğrimiz birim hızlı değildir. Keyfi hızlı eğrilerdeki gerekli hesaplamaları yaparsak;

$$\boldsymbol{\alpha_t}''(s) = \left(-\frac{1}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{k}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{k}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha_t}'''(s) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{k}{4}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{k}{4}sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha_t}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_t}''(s) = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{k}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{k}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{k}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{k}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{k}{4}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{k}{4}sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{2+k^2}{4\sqrt{2}}\right)$$

ve

$$\|\boldsymbol{\alpha_t}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_t}''(s)\|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{k}{4}cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{k}{4}sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2+k^2}{4\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{k^4 + 6k^2 + 8}{32}}$$

$$\boldsymbol{\alpha_t'}(s) \times \boldsymbol{\alpha_t''}(s).\boldsymbol{\alpha_t}'''(s) = \frac{2+k^2}{16}$$

olarak elde edilir. O halde Frenet çatısı;

$$\boldsymbol{t_t}(s)=\frac{\boldsymbol{\alpha_t}'(s)}{\|\boldsymbol{\alpha_t}'(s)\|}=\frac{2}{\sqrt{4+k^2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{k}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{k}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boldsymbol{b_t}(s)=\frac{\boldsymbol{\alpha_t}'(s)\times\boldsymbol{\alpha_t}''(s)}{\|\boldsymbol{\alpha_t}'(s)\times\boldsymbol{\alpha_t}''(s)\|}$$

$$=\sqrt{\frac{32}{k^4+6k^2+8}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{k}{4}cos\frac{s}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{k}{4}sin\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{2+k^2}{4\sqrt{2}}\right)$$

$$\boldsymbol{n_t}(s)=\boldsymbol{b_t}(s)\times\boldsymbol{t_t}(s)$$

$$=\sqrt{\frac{32}{k^4+6k^2+8}}.\frac{2}{\sqrt{4+k^2}}\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{k}{4}cos\frac{s}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{k}{4}sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{2+k^2}{4\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{k}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{k}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

$$=\sqrt{\frac{32}{k^4+6k^2+8}}.\frac{2}{\sqrt{4+k^2}}\left(-\frac{1}{4}cos\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{k}{4\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}-\left(\frac{2+k^2}{8}\right)cos\frac{s}{\sqrt{2}}+\left(\frac{2k+k^3}{8\sqrt{2}}\right)sin\frac{s}{\sqrt{2}},-\frac{2+k^2}{8}sin\frac{s}{\sqrt{2}}-\left(\frac{2k+k^3}{8\sqrt{2}}\right)cos\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}sin\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{k}{4\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}},0\right)$$

bulunur. Eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonları ise;

$$\kappa_t(s)=\frac{\|\boldsymbol{\alpha_t}'(s)\times\boldsymbol{\alpha_t}''(s)\|}{\|\boldsymbol{\alpha_t}'(s)\|^3}=\frac{\sqrt{\frac{k^4+6k^2+8}{32}}}{\left(\frac{\sqrt{4+k^2}}{2}\right)^3}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{k^2+2}}{4+k^2}$$

$$\tau_t(s)=\frac{\boldsymbol{\alpha}_t'(s)\times\boldsymbol{\alpha}_t''(s).\boldsymbol{\alpha_t}'''(s)}{\|\boldsymbol{\alpha_t}'(s)\times\boldsymbol{\alpha_t}''(s)\|^2}=\frac{\frac{2+k^2}{16}}{\frac{k^4+6k^2+8}{32}}=\frac{2}{4+k^2}$$

olarak elde edilir.

b) $\boldsymbol{\alpha_n}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + k\boldsymbol{n}(s)$ olarak tanımlanmıştı. $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin $\boldsymbol{n}(s)$ normal vektörünü hesaplayalım. $\boldsymbol{\alpha}(s)$ birim hızlı bir eğri olduğundan

$$\boldsymbol{t}'(s) = \boldsymbol{\alpha}''(s) = \left(-\frac{1}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

ve

$$\|\boldsymbol{t}'(s)\| = \sqrt{\frac{1}{4}cos^2\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}sin^2\frac{s}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}$$

olduğundan

$$\boldsymbol{n}(s) = \left(-cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

olarak hesaplanır. Buradan $\boldsymbol{\alpha_n}(s)$ eğrisinin denklemi,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha_n}(s) &= \left(cos\frac{s}{\sqrt{2}}, sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right) + k\left(-cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)\\ &= \left(cos\frac{s}{\sqrt{2}} - kcos\frac{s}{\sqrt{2}}, sin\frac{s}{\sqrt{2}} - ksin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \left((1-k)cos\frac{s}{\sqrt{2}}, (1-k)sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan;

$$\boldsymbol{\alpha_n}'(s) = \left(-\frac{(1-k)}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{(1-k)}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ve

$$\|\boldsymbol{\alpha_n}'(s)\| = \left(\left(-\frac{(1-k)}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{(1-k)}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{k^2 - 2k + 2}{2}}$$

bulunur. Dolayısıyla eğrimiz birim hızlı değildir. Keyfi hızlı eğrilerdeki gerekli hesaplamaları yaparsak;

$$\boldsymbol{\alpha_n}''(s) = \left(-\frac{(1-k)}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{(1-k)}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha_n}'''(s) = \left(\frac{(1-k)}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{(1-k)}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha_n}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_n}''(s) = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ -\frac{(1-k)}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{(1-k)}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{(1-k)}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}} & -\frac{(1-k)}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{(1-k)}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{(1-k)}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{(1-k)^2}{2\sqrt{2}}\right)$$

ve

$$\|\boldsymbol{\alpha_n}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_n}''(s)\| = \sqrt{\left(\frac{1-k}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{(1-k)^2}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{|1-k|\sqrt{2-2k+k^2}}{2\sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{\alpha}'_{\boldsymbol{n}}(s) \times \boldsymbol{\alpha}''_{\boldsymbol{n}}(s).\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}^{'''(s)} = \left(\frac{(1-k)}{2\sqrt{2}}\right)^2 sin^2\frac{s}{\sqrt{2}} + \left(\frac{(1-k)}{2\sqrt{2}}\right)^2 cos^2\frac{s}{\sqrt{2}} = \left(\frac{(1-k)}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

olarak elde edilir. O halde Frenet çatısı;

$$\boldsymbol{t_n}(s) = \frac{\boldsymbol{\alpha_n}'(s)}{\|\boldsymbol{\alpha_n}'(s)\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2-2k+2}}\left(-\frac{(1-k)}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{(1-k)}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boldsymbol{b_n}(s) = \frac{\boldsymbol{\alpha}'_{\boldsymbol{n}}(\mathrm{s}) \times \boldsymbol{\alpha}''_{\boldsymbol{n}}(s)}{\|\boldsymbol{\alpha}'_{\boldsymbol{n}}(s) \times \boldsymbol{\alpha}''_{\boldsymbol{n}}(s)\|}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{|1-k|\sqrt{2-2k+k^2}}\left(\frac{(1-k)}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{(1-k)}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{(1-k)^2}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2-2k+k^2}}\left(sin\frac{s}{\sqrt{2}}, -cos\frac{s}{\sqrt{2}}, 1-k\right)$$

$$\boldsymbol{n_n}(s)=\boldsymbol{b_n}(s)\times\boldsymbol{t_n}(s)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2-2k+k^2}\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ sin\frac{s}{\sqrt{2}} & -cos\frac{s}{\sqrt{2}} & 1-k \\ -\frac{(1-k)}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{(1-k)}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{2}}{2-2k+k^2}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{(1-k)^2}{\sqrt{2}}\right)cos\frac{s}{\sqrt{2}},\left(-\frac{(1-k)^2}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)sin\frac{s}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$=\pm\left(-cos\frac{s}{\sqrt{2}},-sin\frac{s}{\sqrt{2}},0\right)$$

bulunur. Eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonları ise;

$$\kappa_n(s)=\frac{\|\boldsymbol{\alpha_n}'(s)\times\boldsymbol{\alpha_n}''(s)\|}{\|\boldsymbol{\alpha_n}'(s)\|^3}=\frac{\frac{|1-k|\sqrt{2-2k+k^2}}{2\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{\frac{k^2-2k+2}{2}}\right)^3}=\frac{|1-k|}{2(k^2-2k+2)}$$

$$\tau_n(s)=\frac{\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}'(s)\times\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}''(s).\boldsymbol{\alpha_n}'''(s)}{\|\boldsymbol{\alpha_n}'(s)\times\boldsymbol{\alpha_n}''(s)\|^2}=\frac{\left(\frac{(1-k)}{2\sqrt{2}}\right)^2}{\left(\frac{|1-k|\sqrt{2-2k+k^2}}{2\sqrt{2}}\right)^2}=\pm\frac{1-k}{\sqrt{2-2k+k^2}}$$

olarak elde edilir.

c) $\boldsymbol{\alpha_b}(s)=\boldsymbol{\alpha}(s)+k\boldsymbol{b}(s)$ olarak tanımlanmıştı. $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin $\boldsymbol{b}(s)$ binormal vektörünü hesaplayalım. $\boldsymbol{\alpha}(s)$ birim hızlı bir eğri olduğundan

$$\boldsymbol{b}(s)=\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{n}(s)=\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -cos\frac{s}{\sqrt{2}} & -sin\frac{s}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

olarak hesaplanır. Buradan $\boldsymbol{\alpha_b}(s)$ eğrisinin denklemi,

$$\boldsymbol{\alpha_b}(s)=\left(cos\frac{s}{\sqrt{2}},sin\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{s}{\sqrt{2}}\right)+k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\left(cos\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{k}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}},sin\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{k}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$$

olarak elde edilir. Buradan;

$$\boldsymbol{\alpha_b}'(s)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{k}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{k}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ve

$$\|\boldsymbol{\alpha_b}'(s)\|=\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{k}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{k}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$=\left(1+\frac{k^2}{4}\right)^{1/2}=\frac{\sqrt{4+k^2}}{2}$$

bulunur. Dolayısıyla eğrimiz birim hızlı değildir. Keyfi hızlı eğrilerdeki gerekli hesaplamaları yaparsak;

$$\boldsymbol{\alpha_b}''(s)=\left(-\frac{1}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{k}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{k}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha_b}'''(s)=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{k}{4}cos\frac{s}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{k}{4}sin\frac{s}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha_b}'(s)\times\boldsymbol{\alpha_b}''(s)=\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{k}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{k}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{k}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{k}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{k}{4}cos\frac{s}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{k}{4}sin\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{2+k^2}{4\sqrt{2}}\right)$$

ve

$$\|\boldsymbol{\alpha_b}'(s)\times\boldsymbol{\alpha_b}''(s)\|$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{k}{4}cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{k}{4}sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{2+k^2}{4\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{k^4+6k^2+8}{32}}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_t'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_t''(s).\boldsymbol{\alpha}_t'''(s) = \frac{2+k^2}{16}$$

olarak elde edilir. O halde Frenet çatısı;

$$\boldsymbol{t_b}(s) = \frac{\boldsymbol{\alpha_b}'(s)}{\|\boldsymbol{\alpha_b}'(s)\|} = \frac{2}{\sqrt{4+k^2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{k}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{k}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boldsymbol{b_b}(s) = \frac{\boldsymbol{\alpha_b}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_b}''(s)}{\|\boldsymbol{\alpha_b}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_b}''(s)\|}$$

$$= \sqrt{\frac{32}{k^4+6k^2+8}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{k}{4}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right.$$

$$\left.-\frac{k}{4}sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{2+k^2}{4\sqrt{2}}\right)$$

$$\boldsymbol{n_b}(s) = \boldsymbol{b_b}(s) \times \boldsymbol{t_b}(s)$$

$$= \sqrt{\frac{32}{k^4+6k^2+8}}.\frac{2}{\sqrt{4+k^2}}\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{k}{4}cos\frac{s}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{k}{4}sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{2+k^2}{4\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{k}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{k}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{32}{k^4+6k^2+8}}.\frac{2}{\sqrt{4+k^2}}\left(-\frac{1}{4}cos\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{k}{4\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}} - \left(\frac{2+k^2}{8}\right)cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right.$$

$$-\left(\frac{2k+k^3}{8\sqrt{2}}\right)sin\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{2+k^2}{8}sin\frac{s}{\sqrt{2}} + \left(\frac{2k+k^3}{8\sqrt{2}}\right)cos\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}sin\frac{s}{\sqrt{2}}$$

$$\left.+\frac{k}{4\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

bulunur. Eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonları ise;

$$\kappa_b(s) = \frac{\|\boldsymbol{\alpha_b}'(s) \times \boldsymbol{\alpha_b}''(s)\|}{\|\boldsymbol{\alpha_b}'(s)\|^3} = \frac{\sqrt{\frac{k^4+6k^2+8}{32}}}{\left(\frac{\sqrt{4+k^2}}{2}\right)^3} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{k^2+2}}{4+k^2}$$

$$\tau_b(s) = \frac{\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{b}}'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{b}}''(s) . \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{b}}'''(s)}{\|\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{b}}'(s) \times \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{b}}''(s)\|^2} = \frac{\frac{2+k^2}{16}}{\frac{k^4+6k^2+8}{32}} = \frac{2}{4+k^2}$$

olarak elde edilir.

3. SONUÇLAR

1. $\boldsymbol{\alpha_t}(s)$ k-sabit teğet eğrisinin Frenet çatısı, $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin Frenet çatısı cinsinden aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\boldsymbol{t_t}(s)=\frac{\boldsymbol{t}(s)+k\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)}{\sqrt{1+k^2\kappa^2(s)}}$$

$$\boldsymbol{b_t}(s)=\frac{k^2\kappa^2(s)\tau(s)\boldsymbol{t}(s)-k\kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{n}(s)+\big(\kappa(s)+k\kappa'(s)+k^2\kappa^3(s)\big)\boldsymbol{b}(s)}{\sqrt{k^4\kappa^4(s)\tau^2(s)+k^2\kappa^2(s)\tau^2(s)+\big(\kappa(s)+k\kappa'(s)+k^2\kappa^3(s)\big)^2}}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n_t}(s)=\frac{1}{E(s)C(s)}\Big[&\big(-k\kappa^2(s)-k^2\kappa(s)\kappa'(s)-k^3\kappa^4(s)\big)\boldsymbol{t}(s)\\&+\big(\kappa(s)+k\kappa'(s)+k^2\kappa^3(s)\big)\boldsymbol{n}(s)+\big(k^3\kappa^3(s)\tau(s)+k\kappa(s)\tau(s)\big)\boldsymbol{b}(s)\Big]\end{aligned}$$

2. $\boldsymbol{\alpha_t}(s)$ k-sabit teğet eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları, $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları cinsinden aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\kappa_t(s)=\frac{\sqrt{k^4\kappa^4(s)\tau^2(s)+k^2\kappa^2(s)\tau^2(s)+\big(\kappa(s)+k\kappa'(s)+k^2\kappa^3(s)\big)^2}}{(1+k^2\kappa^2(s))^{3/2}}$$

$$\tau_t(s)=\frac{D(s)}{k^4\kappa^4(s)\tau^2(s)+k^2\kappa^2(s)\tau^2(s)+\big(\kappa(s)+k\kappa'(s)+k^2\kappa^3(s)\big)^2}$$

3. $\boldsymbol{\alpha_n}(s)$ k-sabit normal eğrisinin Frenet çatısı, $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin Frenet çatısı cinsinden aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\boldsymbol{t_n}(s)=\frac{\big(1-k\kappa(s)\big)\boldsymbol{t}(s)+k\tau(s)\boldsymbol{b}(s)}{\sqrt{\big(1-k\kappa(s)\big)^2+k^2\tau^2(s)}}$$

$$\boldsymbol{b_n}(s)=\frac{\begin{gathered}\big(k\tau(s)-k^2\kappa(s)\tau(s)-k^2\tau^3(s)\big)\boldsymbol{t}(s)+\begin{pmatrix}-k\tau'(s)+k^2\kappa(s)\tau'(s)\\-k^2\kappa'(s)\tau(s)\end{pmatrix}\boldsymbol{n}(s)+\\\big(\kappa(s)-2k\kappa^2(s)-k\tau^2(s)+k^2\kappa^3(s)+k^2\kappa(s)\tau^2(s)\big)\boldsymbol{b}(s)\end{gathered}}{F(s)}$$

$$\boldsymbol{n_n}(s) = \frac{1}{F(s).A(s)}\{\left(-k^2\tau(s)\tau'(s) + k^3\kappa(s)\tau(s)\tau'(s) - k^3\kappa'(s)\tau^2(s)\right)\boldsymbol{t}$$
$$+ \left(-k^2\tau^2(s) + k^3\kappa(s)\tau^2(s) + k^3\tau^4(s) + \kappa(s) - 3k\kappa^2(s) - k\tau^2(s)\right.$$
$$\left. + 3k^2\kappa^3(s) + 2k^2\kappa(s)\tau^2(s) - k^3\kappa^4(s) - k^3\kappa^2(s)\tau^2(s)\right)\boldsymbol{n}$$
$$+ \left(k\tau'(s) - 2k^2\kappa(s)\tau'(s) + k^2\kappa'(s)\tau(s) + k^3\kappa^2(s)\tau'(s)\right.$$
$$\left. - k^3\kappa(s)\kappa'(s)\tau(s)\right)\boldsymbol{b}\}$$

4. $\boldsymbol{\alpha_n}(s)$ k-sabit normal eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları, $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları cinsinden aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\kappa_n(s) = \frac{\sqrt{\begin{gathered}\left(k\tau(s) - k^2\kappa(s)\tau(s) - k^2\tau^3(s)\right)^2 + \left(-k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau'(s) - k^2\kappa'(s)\tau(s)\right)^2 + \\ \left(\kappa(s) - 2k\kappa^2(s) - k\tau^2(s) + k^2\kappa^3(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\right)^2\end{gathered}}}{\left(\left(1 - k\kappa(s)\right)^2 + k^2\tau^2(s)\right)^{3/2}}$$

$$\tau_n(s) = \frac{G(s)}{F^2(s)}$$

5. $\boldsymbol{\alpha_b}(s)$ k-sabit binormal eğrisinin Frenet çatısı, $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin Frenet çatısı cinsinden aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\boldsymbol{t_b}(s) = \frac{\boldsymbol{t}(s) - k\tau(s)\boldsymbol{n}(s)}{\sqrt{1 + k^2\tau^2(s)}}$$

$$\boldsymbol{b_b}(s) = \frac{k^2\tau^3(s)\boldsymbol{t}(s) + k\tau^2(s)\boldsymbol{n}(s) + \left(\kappa(s) - k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\right)\boldsymbol{b}(s)}{\sqrt{k^4\tau^6(s) + k^2\tau^4(s) + \left(\kappa(s) - k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\right)^2}}$$

$$\boldsymbol{n_b}(s) = \frac{1}{K(s).L(s)}\{\left(k\kappa(s)\tau(s) - k^2\tau(s)\tau'(s) + k^3\kappa(s)\tau^3(s)\right)\boldsymbol{t}(s)$$
$$+ \left(\kappa(s) - k\tau'(s) + k^2\kappa^2(s)\tau^2(s)\right)\boldsymbol{n}(s) + \left(-k^3\tau^4(s) - k\tau^2(s)\right)\boldsymbol{b}(s)\}$$

6. $\boldsymbol{\alpha_b}(s)$ k-sabit binormal eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları, $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları cinsinden aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\kappa_b(s) = \frac{\sqrt{k^4\tau^6(s) + k^2\tau^4(s) + \big(\kappa(s) - k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\big)^2}}{\big(1 + k^2\tau^2(s)\big)^{3/2}}$$

$$\tau_b(s) = \frac{\begin{array}{c} k^3\kappa'(s)\tau^4(s) + k^2\kappa^2(s)\tau^3(s) - k^3\kappa(s)\tau'(s)\tau^3(s) + k\kappa'(s)\tau^2(s) - k^2\tau^2(s)\tau''(s) \\ +k^2\tau^5(s) + \kappa^2(s)\tau(s) - 4k\kappa(s)\tau(s)\tau'(s) + 3k^2\tau(s)\big(\tau'(s)\big)^2 \end{array}}{k^4\tau^6(s) + k^2\tau^4(s) + \big(\kappa(s) - k\tau'(s) + k^2\kappa(s)\tau^2(s)\big)^2}$$

4. ÖNERİLER

1. Bu tez çalışmasında elde edilen bulgulardan yaralanarak, buradaki eğrilerin herhangi bir noktasında Oskülatör, Normal ve Rektifyan düzlem denklemleri araştırılabilir.

2. Bu tezde tanımlanan eğrilerin özel durumları incelenebilir. Özel durumlarda Frenet çatıları ve eğrilik, burulma fonksiyonları hesaplanabilir.

3. Bertrand, Mainheim, involüt-evolüt eğri çiftleriyle arasındaki ilişkiler incelenebilir.

4. Burada tanımlanan eğriler F. Klein geometrilerinin diğerlerinde incelenebilir.

5. 3-boyutlu Öklid uzayında yapılan bu araştırma, daha yüksek boyutlarda araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

1.Anton, H. and Rorres, C., Elementary Linear Algebra, Tenth Edition, Wiley, USA, 2010.

2.Arslan, K., Hacısalihoğlu, H.H., On Harmonic Curvatures of a Frenet Curve, Communications, De La Faculte des Sciences de L'Universite D'Ankara 49, (2000), 015-023.

3.Bishop, R.L., There is More than One Way to Frame a Curve, The American Mathematical Monthly 82, 3 (1975), 246-251.

4.Bükcü, B., Karacan, M.K., Bishop Frame of the Spacelike Curve with a Spacelike Principal Normal in Minkowski 3-Space, Communications, De La Faculte des Sciences de L'Universite D'Ankara 57, 1 (2008), 013-022.

5.Divjak, B., Special Curves on Ruled Surface in Galilean and Pseudo-Galilean Space, Acta Math. Hungar. 98, 3 (2003), 203-215.

6.Ergin, A.A., On the Generalized Darboux Curves, Communications, De La Faculte des Sciences de L'Universite D'Ankara 41 (1992) 073-077.

7.Gezgin, F., AW(k)-tipinden Eğriler, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir, 2005.

8.Gluck, H., Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space, The American Mathematical Monthly 73, 7 (1966), 699-704.

9.Görgülü, A., Özdamar, E., A Generalization of the Bertrand Curves as General Inclined Curves in E^n, Communications, De La Faculte des Sciences de L'Universite D'Ankara 35, 1-2 (1968), 061-065.

10.Hacısalihoğlu, H.H., Diferensiyel Geometri I, İnönü Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 1982.

11.Keleş, Y, Galile ve Yarı-Galile Uzaylarında Eğriler,Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2014.

12.Klein, F., Vergleichende Betrachtungen Über Neuere Geometrische Forschungen, Verlag, Erlangen, 1872.

13.Liu, H., Wang, F., Mannheim Partner Curves in 3-Space, Journal of Geometry 88, 1-2 (2008), 120-126.

14.Manfredo Do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Pretice Hall, New Jersey, 1976.

15.O'Neill, B., Elementary Differential Geometry, Revised Second Edition, Elsevier, USA, 2006.

16.Özdamar, E., Hacısalihoğlu, H.H., A Characterization of Inclined Curves in Euclidean n-Space, Communications, De La Faculte des Sciences de L'Universite D'Ankara 24,(1975), 15-23.

17.Özdamar, E., Hacısalihoğlu, H.H., Characterizations of Spherical Curves in Euclidean Space, Communications, De La Faculte des Sciences de L'Universite D'Ankara 23 A, (1974), 109-125.

18.Sabuncuoğlu, A., Hacısalihoğlu, H.H., On Higher Curvatures of a Curve, Communications, De La Faculte des Sciences de L'Universite D'Ankara 24, (1975), 33-46.

19.Srivastava, A., Klassen, E., Shantanu, H.J., Jermyn, I.H., Shape Analysis of Elastik Curves in Euclidean Spaces, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 33, 7 (2011), 1415-1428.

ÖZGEÇMİŞ

Gönül ÖZTÜRK, 1974 yılında Trabzon' un Beşikdüzü ilçesinde doğdu. İlkokulu Yeşilköy İlkokulu' nda, ortaokul ve lise öğrenimini Şalpazarı Lisesi' nde okudu. Lisans öğrenimini Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nde tamamladı. 1994 yılında Batman İmam Hatip Lisesi' nde öğretmenliğe başladı. Daha sonra Sürmene Ticaret Meslek Lisesi' nde çalıştı. Halen Trabzon Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi ' nde çalışmaktadır. Yabancı dili İngilizcedir.