T.C.
Marmara Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
İlköğretim Anabilim Dalı
İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı

# MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ İSPAT YAPMA SÜREÇLERİNDE DNR TABANLI ÖĞRETİME GÖRE ANLAMA VE DÜŞÜNME YOLLARININ İNCELENMESİ

**(Yüksek Lisans Tezi)**

Pınar GÜNER

İSTANBUL, 2012

**T.C.**
**Marmara Üniversitesi**
**Eğitim Bilimleri Enstitüsü**
**İlköğretim Anabilim Dalı**
**İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı**

# MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ İSPAT YAPMA SÜREÇLERİNDE DNR TABANLI ÖĞRETİME GÖRE ANLAMA VE DÜŞÜNME YOLLARININ İNCELENMESİ

**(Yüksek Lisans Tezi)**

**Danışman**
**Yrd. Doç. Dr. Sare ŞENGÜL**

**Pınar GÜNER**

**İSTANBUL, 2012**

T.C.
Marmara Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
İlköğretim Anabilim Dalı
İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı

# TEZ ONAY SAYFASI

PINAR GÜNER tarafından hazırlanan MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ İSPAT YAPMA SÜREÇLERİNDE DNR TABANLI ÖĞRETİME GÖRE ANLAMA VE DÜŞÜNME YOLLARININ İNCELENMESİ başlıklı bu çalışma 03.09.2012 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Sare ŞENGÜL : ..............................

Üye : Doç. Dr. Zeynep GÜREL : ..............................

Üye : Yrd. Doç. Dr. Alaattin PUSMAZ : ..............................

# ÖNSÖZ

"Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Süreçlerinde DNR Tabanlı Öğretime Göre Anlama ve Düşünme Yollarının İncelenmesi" konulu tezimde öğretmen adaylarının ispat yapma sürecinde nasıl düşündüğü, soruları nasıl anladığı, bu doğrultuda nasıl cevaplar verdiği araştırılmaya çalışılmış ve kullandığı ispat şemaları incelenmiştir. İspat yaparken öğretmen adaylarının başvurduğu düşünme ve anlama yollarını incelemek hem eğitim programlarının onlar üzerindeki geliştirici etkilerinin derecesini görmek hem de ileride ne tür yaklaşımlarla öğrencilerine eğitim vereceklerini tahmin etmek açısından yol gösterecektir.

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca benden yardımlarını, sabrını ve zamanını hiçbir zaman esirgemeyen, araştırma sürecinde bana yol gösteren değerli hocam ve tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Sare ŞENGÜL'e, şükranlarımı sunarım.

Tez çalışmam boyunca bana destek olan, rehberlik eden, görüş ve önerilerinden yararlandığım değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Mevlüde YAZICI DOĞAN'a, her türlü yardımlarıyla bana destek olan değerli meslektaşlarım ve sevgili arkadaşlarım Arş. Gör. EliF GÜVEN, Arş. Gör. Sevda GÖKTEPE, Arş. Gör. İbrahim KEPCEOĞLU ve Nihal ŞAHİN'e teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisansa başladığımdan itibaren bana inanıp güvenerek destek sağlayan TÜBİTAK-Bilim İnsanı Destekleme Daire Baskanlığı (BİDEB)'e teşekkürlerimi sunarım.

Çalısmama gönüllü olarak katılan ve uygulamalarımda bana yardımcı olan ilköğretim matematik öğretmeni ve orta öğretim matematik öğretmeni adaylarına teşekkürlerimi sunarım.

Bana her zaman güvenen, maddi ve manevi desteklerini hiç esirgemeyen, beni sevgileriyle güçlendiren canım anneme, babama ve ablama sonsuz şükranlarımı sunarım.

Pınar GÜNER

Eylül, 2012

## ÖZET

Bu araştırma DNR tabanlı öğretime göre matematik öğretmen adaylarının kullandıkları ispat şemalarını belirlemek, ispata yönelik görüşlerini araştırmak, anlama ve düşünme yollarını keşfetmek amacıyla yapılmıştır.

İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının genel matematik dersi kapsamında kullandıkları ispat şemaları, bu şemaların her bölüm bazında sınıf düzeyleri açısından farklılık gösterip göstermediği, ispat yaparken kullanılan mevcut düşünme şekilleri ve ispata yönelik görüşleri araştırılmıştır.

Araştırmanın çalışma grubunu 2011-2012 eğitim öğretim yılında Samsun ilindeki bir devlet üniversitesinin, ilköğretim matematik öğretmenliği ve ortaöğretim matematik öğretmenliği programlarının birinci ve son sınıf kademelerinde öğrenimlerine devam eden 98 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Bu çalışma grubundan seçilen 12 öğretmen adayı yarı yapılandırılmış görüşme grubunu oluşturmaktadır.

İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının genel matematik dersi kapsamında ne tür ispat şemaları kullandıklarını, ispata yönelik düşünme ve anlama yollarını ortaya koyabilmek için ispat şemalarını belirlemeye yönelik ölçme aracı uygulanmıştır. Matematik öğretmen adaylarının problemleri çözerken soruları nasıl anladıkları ve bu süreçte nasıl düşündükleri, ispata yönelik bakış açıları ve duygularının ne yönde olduğu hakkında bilgi sahibi olabilmek amacıyla yarı yapılandırılmış görüşme tekniği kullanılmıştır. Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerini öğrenmek amacıyla ispat yapmaya yönelik görüş ölçeği uygulanmıştır.

Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının görüşlerinin tam oluşmadığı ve kullandıkları ispat şemalarında farklılıklar olduğu tespit edilmiştir. Bunun yanı sıra ölçekte belirttikleri görüşlerle kullandıkları şemaların bazılarının paralellik gösterdiği bazılarının ise farklılaştığı sonucuna ulaşılmıştır.

**Anahtar Sözcükler:** DNR Tabanlı Öğretim, İspat, İspat Şemaları, Matematik Öğretmen Adayları

# ABSTRACT

This research conducted to determine the demonstration schemes that preservice math teachers use according to DNR based education, to search their opinion towards proof and to discover the comprehension and contemplation methods.

Proof schemes which freshman and senior students, who are being educated in primary and secondary math education departments, use, differences in the departments arise from class level, contemplation styles during proof and opinions are researched.

The sample of the study consists of 98 primary and secondary math education students in a public university in Samsun, in 2011-2012 academic years. 12 of the students among these 98 consist of the semi constructed interview group.

Measurement tool designed to determine proof schemes is implemented to explore the types of proof schemes that are used by primary and secondary preservice math teachers in general math course and to understand contemplation and comprehension methods towards proof. Semi constructed interview method is used to get information about how preservice math teachers understand the problems and to realize the way they think during the solution process. Opinion scale towards proof is implemented to understand the opinions of preservice math teachers about proof.

As a result of the study it is determined that the opinions of preservice math teachers are not clear and there are differences between the proof schemes that they use. Also it is concluded that there are similarities and differences between the schemes that they use in reality and opinions they reflected in the scale.


Key words: DNR based education, proof, proof schemes, preservice math teacher.

## İÇİNDEKİLER

## TABLOLAR DİZİNİ

## ŞEKİLLER DİZİNİ

# BÖLÜM I:GİRİŞ

Bu bölümde; “problem durumu”, “alt problemler”, “araştırmanın amacı”, “araştırmanın önemi”, “sayıltılar”, “sınırlılıklar” ve “tanımlar” alt başlıkları ele alınmıştır.

## 1.1 Problem Durumu

Değişen dünyaya ayak uydurabilmek için getirdiği yenilikleri takip etmek, kavramak, benimsemek ve yaşama aktarmak gerekmektedir. Teknolojik gelişmelerin de etkisiyle beraber günümüzdeki değişimi düşündüğümüzde bu hızı yakalayabilmek için bireylerdeki çeşitli özelliklerin gelişmesi önemlidir. Bu nedenle bilgi donanımına sahip, çevresindekileri sorgulayıp yorumlayabilen, ilişkileri analiz edebilen, değerlendirme yapıp karara varabilen ve üretim yapabilen bireylere ihtiyaç duyulmaktadır.

Bireylerin gelişiminde yeni gereksinimler ortaya çıktıkça eğitim sisteminde de yeni arayışların gerçekleşmesi kaçınılmazdır. Amaç; sürekli öğrenme alışkanlığı edinmiş, yaratıcı bilgi insanları yetiştirmektir (Öztuncay, 2005). Değişen dünyada matematiği anlayabilme ve kullanabilme insanların bu sürece uyum sağlamalarını ve gelecekte başarı elde etmelerini kolaylaştıracaktır. Matematiksel yetenek aydınlık ve üretken bir dünyanın kapılarını açarken bu yeteneğin eksikliği aynı dünyaya ulaşmayı zorlaştıracaktır (NCTM, 2000; Aladağ, 2009).

Değişimlerle birlikte eğitim sisteminde birçok alanda olduğu gibi matematik ve matematik eğitiminde de belirlenen ihtiyaçlar doğrultusunda bu ihtiyaçları karşılayacak, iyileşmeyi sağlayacak uygulamalar geliştirilmekte ve hedefler oluşturulmaktadır. İlköğretim matematik (6-8. Sınıflar) dersi öğretim programında, öğrencilerin somut deneyimlerinden, sezgilerinden matematiksel anlamları oluşturmalarına ve soyutlama yapabilmelerine yardımcı olmak amaçlanmaktadır. Bu yaklaşımla matematiksel kavramların yanı sıra problem çözme, iletişim kurma, akıl yürütme ve ilişkilendirme gibi bazı önemli becerilerin geliştirilmesi hedeflenmiştir (MEB, 2009). Ortaöğretim matematik (9,10,11 ve 12. Sınıflar) dersi öğretim programında da öğrencilerin araştırma yapabilecekleri, keşfedebilecekleri, problem çözebilecekleri, çözüm ve yaklaşımlarını paylaşıp tartışabilecekleri ortamların sağlanmasının önemi vurgulanmıştır. Öğrencilerin büyük çoğunluğu, geçmişte olduğu gibi günümüzde de belirli sayıdaki kuralları ezberleyerek bu kurallara dayalı semboller üzerinde anlamını bilmeden işlem yapma yolunu seçmektedir. Kontrol edilemeyen kuralları hatırlamanın, bütünleştirilmiş kavramsal yapılardan daha zor olduğu yapılan çalışmalar tarafından doğrulandığı için yeni yaklaşımla matematik öğrenme öğretme sürecinde; zihinsel üretkenlik ve becerilerin öne çıkması, günlük yaşamda matematiği kullanabilme ve anlayabilme gereksinimi önem kazanmaktadır (MEB, 2011).

Matematiği anlayabilme ve kullanabilme sürecinde ispat yapmanın önemli bir yeri vardır. İspat matematiği matematik yapan şeylerin en önemli bölümünü oluşturmaktadır (Padula, 2006). Matematikte bir teorem, önerme ya da ifade ile ilgili olarak yapılan ispatlar, bilginin ortaya çıkış noktasını görmede, adımlardaki ilişkileri kavramada ve sonucu anlamlandırmada etkili bir role sahiptir. Neden sonuç ilişkisini görerek kavramları temellere oturtmayı sağladığından ezberciliği azaltmada da önemli bir yöntemdir.

İspat matematik yapmak, matematiksel iletişim kurmak ve matematiği kaydetmektir (Schoenfeld, 1994). Matematiksel bilginin garantisini sağlayan ispat, matematik yapma ve anlamada temel bir aktivitedir (Almedia, 2000; Uğurel ve Moralı, 2010b). Matematikçiler tarafından kabul edilmiş bir anlayışa göre ispat, neden sorusuna cevap arama etkinliğinin ürünü olup matematikçinin temel uğraşı ve tek geçerleme aracıdır (Dedeoğlu, 2010). Genel anlamıyla ispat bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu ya da yanlışlığını yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır (Garnier, Taylor, 1997; Güler, Özdemir, Dikici, 2012). Bunun yanı sıra Harel ve Sowder (2007) ispatlamayı bir bireyin ya da bir topluluğun bir iddianın doğruluğu hakkındaki şüphelerini ortadan kaldırmak için kullanılan zihinsel eylem olarak tanımlamaktadır. Ayrıca ispatlama sezgilerin geliştirilmesi ve anlatılması için de güçlü bir yoldur (NCTM, 2000). İspatlama sırasında, bir önermeyi açıklama, neden doğru veya yanlış olduğunu söyleme ve değişik mantıksal düşünme yollarını (tümevarımsal ve tümdengelimsel düşünme) ve ispat çeşitlerini seçme ve kullanma gibi eylemler söz konusudur (Baki, 2008).

İspatı öğrenme birçok ülkede birçok nesil için matematik müfredatının temel amacı haline gelmiştir (Harel ve Sowder, 1998). NCTM (1989) ispatın tüm öğrencilere sadece geometride değil tüm matematik derslerinde öğretilmesini gerektiğini belirtmiş ve bu amacı yeniden vurgulamıştır.

İspatın matematik öğretimindeki yeri, önemi ve rolü çerçevesinde, matematik eğitimindeki reform hareketleri kapsamında okul matematiği içerisinde ispatın daha zengin bir içerikte ve öğretilme biçiminin çok daha geniş ve derinleşen bir yapıda ele alındığı görülmektedir. Bugün matematik eğitimi alanında uluslararası düzeyde sadece ispat ve ispatlamayı konu edinen bilimsel organizasyonların (örn. ICMI Study-19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education-2009) yapılmaya başlaması aynı zamanda araştırma alanı olarak da ispata verilen önemi ortaya koymaktadır (Moralı ve Uğurel, 2010).

Matematikte ispatın yeri ve öneminin artmasıyla birlikte, çeşitli yaş gruplarındaki öğrencilerin ispat yaparken düşünsel süreçleri ve gelişimleri matematik eğitimi alanında araştırma konusu olmuştur. Ancak ispat yapmanın, gerek ilk, orta öğretim, gerekse yüksek öğretim aşamasında olsun, yer aldığı eğitimin her aşamasında, öğrencilerin sıkıntı çektikleri, başarılı olamadıkları, başarılı olamayacaklarına inandıkları, korktukları, genellikle sevilmeyen bir süreç olarak yapılandığı, araştırmaların sonucunda ortaya çıkmıştır ( Özer ve Arıkan, 2002; Almedia, 2003; Jones, 2000; de Villiers, 1990; Raman, 2003 akt. Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006).

Öğrenciler ispatlama ve formal matematikle ilk defa üniversitede karşılaşmaktadırlar. Bu durum matematiksel dile alışmaları, daha soyut ve üst düzey düşünmeleri, formal matematiği anlamaları konusunda güçlüklere neden olmaktadır (Knapp, 2005; Altun, Aşkar ve Sarı, 2007). Yapılan çeşitli araştırmalarda üniversite düzeyindeki öğrencilerin ispat yapma sürecinde çeşitli sorunlar yaşadıkları ortaya konulmuştur ve öğretmenlerin öğrencilere ispatın ve ispat yapmanın doğasından oldukça yoksun etkinlikler sundukları görülmüştür (Jones, 2000 akt. Moralı ve ark., 2006).

Öğrencilerin öğrenmeleri beklenen matematiksel bilgilerin dayanaklarını anlamaları öğrenmeyi kalıcı hale getirmenin yanı sıra kendilerine verilen bir problem için geliştirdikleri çözüm yolunu matematiksel ifadelerle savunmalarına da katkıda bulunacaktır. Bu nedenle gerek ilköğretim gerekse ortaöğretim matematik öğretiminde matematiksel ispat yapma üzerinde durulması, öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin gelişmesi yönünden önemli olacaktır (Moralı ve ark., 2006).

Okul öncesi dönemde de yapılacak titiz çalışmalarla çocuklarda matematiksel muhakeme, neden sonuç ilişkisi ve bir anlamda ispat kavramı oluşturulabilir. Bu dönemde kastedilen informal anlamda ispatlardır ve çocuklara çeşitli etkinliklerle kazandırılabilirler. Bu yeteneği uygulayabilen çocukların neden sonuç ilişkisi zinciri daha mantıklı olarak gelişecektir. Eğer açıklayıcı ispatlarla matematik öğrenimi gerçekleştirilirse öğrencilerin daha iyi anlamaları ve zevk almaları sağlanabilir. Böylelikle konunun öğretimiyle ilgili süreçler doğru olarak uygulandığında ezberlemeyen, kavramları nedenleriyle öğrenen, yaratıcı düşünen ve problemlere farklı açılardan çözüm üretebilen bireyler yetiştirilebilir (Altıparmak ve Öziş, 2005).

Hart'a göre (1994) öğrencilerin ispatlama süreçlerini ve bu süreçte düştükleri hataların nedenlerini doğru bir şekilde ortaya koyabilmek için ispatlama ile ilgili, öğrencilerin düşünme süreçlerini incelemeye yönelik, bilişsel tabanlı çalışmalar yapılması gerekmektedir (Weber, 2001). Ayrıca, öğrencilerin çoğu nasıl kanıtlayacağını, kanıtlamaya nerden başlaması gerektiğini, kanıtlama sürecinde kullanması gereken kavramsal bilgileri, tanımları ve bunları nasıl kullanması gerektiğini bilmemektedir. Öğrencilerin kanıtlarken düştükleri hataların nedenini anlamak için öğrencilerin ispatlama süreçlerini incelemek gerekmektedir (Weber, 2001; Altun, Aşkar ve Sarı, 2007).

Harel (2008a) tarafından ispatlama süreçlerini ele alan matematikte zihinsel eylem, anlama ve düşünme yolları üzerinde duran bir teori geliştirilmiştir. DNR tabanlı öğretim (kısaca DNR) olarak adlandırılan bu teori sırasıyla ikilik (Duality), gereklilik (Necessity) ve tekrarlı düşünme (Repeated Reasoning) kavramlarını temsil etmektedir. DNR ye göre, herhangi bir matematik müfredatının nihai hedefleri anlama ve düşünme yollarının her ikisi açısından da kesin ve açık bir şekilde ifade edilmelidir. Öğretim ilkeleri, bu hedeflere ulaşmak için

(1) Bilginin bu iki kategorisi (anlama ve düşünme yolları) arasındaki gelişimsel bağlılığa

(2) Öğrencilerin zihinsel ihtiyaçlarına ve

(3) Bilginin içselleştirilmesini ve organizasyonunu kolaylaştıran faktörlere dayanmalıdır.

Bu üç unsur, sırasıyla ikilik, gereklilik ve tekrarlı düşünme eğitim ilkelerine karşılık gelmektedir

Harel'e (2008a) göre anlama yolları ve düşünme yolları matematiği oluşturan unsurlardır. Matematik disiplininin uygulayıcıları olan matematikçiler belirli özelliklerle (düşünme yolları) zihinsel eylemlerde bulunarak matematiği uygularlar ve belirli yapılar (anlama yolları) üretirler. Anlama yolları zihinsel bir eylemin ürünlerini ifade ederken düşünme yolları onların bilişsel özelliklerini ifade etmektedir. Buna göre, DNR, matematiği, şu iki kümeden oluşan bir disiplin olarak tanımlar, matematik bu iki kümenin birleşimidir. Birinci küme, belirli aksiyomlar, teoremler, tanımlar, ispatlar, problemler ve çözümlerden oluşan bir yapıdır. Bu alt küme tarih boyunca matematikte kurumsallaşmış tüm anlama yollarından meydana gelmektedir. İkinci küme, ürünleri birinci kümeyi oluşturan zihinsel eylemlerin özellikleri olan tüm düşünme yollarından oluşmaktadır.

Özellikle bu tanımdan anlaşılan öğretmenler için olan müfredat da dahil olmak üzere tüm sınıf seviyelerinde, matematik müfredatı matematiği oluşturan unsurlar, yani anlama yolları ve düşünme yolları açısından düşünülmelidir, sadece ilk unsur açısından düşünülmemelidir, şu anda büyük ölçüde anlama yolları açısından düşünülmektedir yani sonuç odaklıdır. Düşünme yollarını içeren eğitim hedefleri, problem çözme yaklaşımları, ispat şemaları ve matematik hakkındaki inançlar açısından formüle edilmelidir. Öğretmenler sürekli olarak, niteliğine bakmaksızın, öğrencilerin anlama ve düşünme yolları için modeller oluşturmalı ve istenilene ulaşmaları için öğrencilerin yavaş yavaş bu yolları geliştirmelerine ve değiştirmelerine yardım etmelidirler (Harel, 2008a).

Matematik eğitiminde önemli bir yere sahip olan ispat konusunda ispatlama aşamasındaki anlama ve düşünme süreçlerini etkili bir şekilde ortaya koyabilmek için bu teoriyi bilmenin ve bu yolları keşfetmenin eğitimin gelişimine katkısı olacağı düşünülmektedir.

Bu açıklamalardan yola çıkarak araştırmanın problem cümlesini "Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde DNR tabanlı öğretime göre anlama ve düşünme yolları nelerdir?" sorusu oluşturmaktadır.

## 1.2 Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı DNR tabanlı öğretime göre matematik öğretmen adaylarının kullandıkları ispat şemalarını belirlemek, ispata yönelik görüşlerini araştırmak, anlama ve düşünme yollarını keşfetmektir.

### 1.2.1 Alt Problemler

Bu amaç doğrultusunda araştırmada cevap aranan alt problemler aşağıdaki gibidir.

1. İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının genel genel matematik dersine yönelik hazırlanan ölçme aracına verdikleri cevaplarda DNR tabanlı öğretime göre kullandıkları ispat şemaları nelerdir?

2. İlköğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının genel matematik dersine yönelik hazırlanan ölçme aracına verdikleri cevaplarda DNR tabanlı öğretime göre kullandıkları ispat şemaları sınıf seviyelerine göre anlamlı bir farklılık göstermekte midir?

3. Ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının genel matematik dersine yönelik hazırlanan ölçme aracına verdikleri cevaplarda DNR tabanlı öğretime göre kullandıkları ispat şemaları sınıf seviyelerine göre anlamlı bir farklılık göstermekte midir?

4. İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşleri nelerdir?

5. İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşleri birinci ve son sınıf düzeylerinde nasıl farklılaşmaktadır?

6. İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının DNR tabanlı öğretime göre ispat yaparken mevcut anlama ve düşünme yolları profilleri nelerdir?

7. İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının DNR tabanlı öğretime göre ispat yaparken kullandıkları hatalı düşünme yolları nelerdir?

8. İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ile genel matematik dersine yönelik hazırlanan ölçme aracına verdikleri cevaplarda kullandıkları ispat şemaları arasında paralellik var mıdır?

## 1.3 Araştırmanın Önemi

Matematik temel bilimlerin ispat da matematiğin en temel birimi olması nedeniyle (Mingus ve Grassl, 1999; Tall, 1998) matematikte önemli bir yer tutmaktadır (Hanna, 2000). Çünkü matematikte birçok şey daha önceki yapılanlara veya temellere dayanmaktadır. Matematikçiler ise ispat yoluyla ve bu yapıları kullanarak kabul edilebilir yeni yapılar olusturmaktadırlar. Bu da matematiğin gelişmesi ve büyümesi için bir temel yaratmaktadır (Mingus ve Grassl, 1999). Fakat öğrenciler genellikle matematiksel ispatın gereğine inanmamaktadırlar. Oysa öğrencilerin matematik problemlerine ürettikleri çözümlerin doğruluğundan emin olmaları kadar bundan nasıl emin oldukları da önemlidir (İskenderoğlu, 2010).

İspat ve ispatlama hem matematiksel düşünmenin hem de matematik yapmada, matematiksel bilginin yapısını, doğasını, tarihsel gelişimini kavramada, matematiksel nesnelerin türlerini, geliştirilme yollarını, bireyler ve toplumlarca ne şekilde paylaşıldığını algılamada büyük bir öneme sahiptir. İspat matematik ve matematik eğitiminin merkezinde olan en önemli kavramlardan biri olarak görülmektedir (Ball ve ark., 2002; Knuth, 2002; Lee, 2002; Padraig ve McLoughlin, 2002 akt. Moralı ve Uğurel, 2010a).

Son yıllarda, matematik derslerinde akıl yürütme, ispat ve muhakeme gibi konular, matematik eğitimi araştırmalarında ön plana çıkmaktadır (Heinze&Reis, 2003). Yurtdışında, öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin ispat ile ilgili görüşlerini, kabullenmelerini ve ispatlama süreçlerini ortaya çıkarmaya yönelik olarak çok sayıda araştırma yapılmıştır (Jones, 1997; Harel&Sowder, 1998; Almeida, 2000; Jones, 2001; Recio&Godino, 2001; Raman, 2001; Weber, 2001; Knuth, 2002; Raman, 2002; Almeida, 2003; Raman, 2003; Solomon,2006; Stylianides, Stylianides&Philippou, 2007). Öğrencilerin ispatlamada karşılaştıkları güçlüklerin nedenlerini belirlemeye yönelik çalışmalar, lise ve üniversite düzeyinde, öğrencilerin sadece ispatlamada değil, ispatın ne olduğunu hatırlamada bile zorluk yaşadığını göstermektedir (Chazan, 1993, Moore, 1994; Raman, 2003). Ülkemizde ise bu alanda yapılmış çalışmaların sayısı sınırlıdır (Altun, Aktaş ve Sarı, 2007).

Uğurel ve Moralı (2010b) çalışmasında ülkemizde ispat ile ilgili çalışmaların sınırlı olduğunun yanı sıra bu çalışmalardan çok azının matematik öğretmen ve öğretmen adayları ile yapıldığını belirtmiştir. Ayrıca bu doğrultuda matematik öğretiminde ispatın daha iyi boyutlara taşınabilmesi için ispata önem verilerek bu becerilerin geliştirilmesi noktasında matematik öğretmen ve öğretmen adaylarına yönelik araştırmaların yapılmasının önemini vurgulamıştır.

Matematiğin kavranmasında, gelişmesinde ve anlamlı hale gelmesinde bu kadar önemli rolü olan ispatın ve ispat yapma süreçlerinin kapsamlı bir şekilde ele alınıp içerdiği basamakların incelenerek öğrencilerdeki anlama ve düşünme yollarının keşfedilmesi, bu süreçlerin geliştirilmesi ve eğitim kalitesinin artması açısından faydalı olacaktır. Bu nedenle bu çalışmada öğrencilerin ispat şemaları üzerinde durulmaktadır.

Bu çalışmanın, ispat yapma sürecinde öğrencilerin kullandıkları anlama ve düşünme yollarını keşfetme, öğrencilerin ispata karşı bakış açılarını tespit etme, matematikte ispat yapmanın önemini ortaya koyma açısından önemli olacağı düşünülmektedir. Ayrıca bu araştırma öğretmenlere ve diğer araştırmacılara kaynak oluşturması bakımından da önemlidir.

## 1.4 Sayıtlılar

Bu araştırmada;

- Yarı yapılandırılmış görüşmeye katılan ve ölçeği yanıtlayan öğretmen adaylarının sorulara içtenlikle cevap verdikleri varsayılmaktadır.
- Öğretmen adaylarına uygulanan soruların uygunluğu konusunda alınan uzman görüşlerinin yeterli olduğu varsayılmaktadır.

## 1.5 Sınırlılıklar

Bu araştırma;

- Bir devlet üniversitesindeki, ilköğretim matematik öğretmenliği ve orta öğretim matematik öğretmenliği programının birinci ve son sınıf kademelerinde öğrenimlerine devam eden öğrencilerle
- 2011 – 2012 öğretim yılı ile
- Genel matematik dersinde işlenen konuları içeren sorular ile sınırlıdır.

## 1.6 Tanımlar

**İspat:** Bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu ya da yanlışlığını yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır (Garnier, Taylor, 1997; Güler, Özdemir, Dikici, 2012).

**İspat Şemaları:** Bir insanın neyle ikna olduğunu ve diğerlerini ikna etmek için neyi tercih ettiğini ve öğrencilerin matematiksel durumlardaki düşünme tepkilerini gösteren şemalardır (Harel ve Sowder, 1998).

**DNR:** İspatlama süreçlerini ele alan matematikte zihinsel eylem, anlama ve düşünme yolları üzerinde duran bir teoridir.

# BÖLÜM II: LİTERATÜR

Evrensel bir dil olan matematik, hızına yetişmenin zor olduğu dünyada değişim ve gelişim sürecinde ön plana çıkmayı sağlayıcı önemli anahtarlardan birisidir. Hayatın her alanında karşımıza çıkan matematik sınırlarını genişlettikçe içinde bulunduğu toplumda da bununla doğru orantılı olarak gelişme meydana gelecektir. Teknolojiden endüstriye kadar pek çok toplum ilerleyişini matematiğe borçludur (Işık ve Bekdemir, 1998).

Matematik, insanlar tarafından yaşamın ve dünyanın anlaşılması, bunlar hakkında fikir üretebilmelerine yardımcı bir unsur olarak görülmüştür (Ernest, 1991). Matematiğin ne olduğuna dair bugüne kadar kesin bir tanım verilememiştir ve bu tanımlar matematiğin sadece bir yönünü yansıtmaktadır. Geçmişten günümüze yapılan tanımlar doğrultusunda matematik için "insan hayatının devamını sağlayan bir bilim dalı" ve "düşünme ve doğaya ulaşma aracı" şeklinde iki farklı görüş karşımıza çıkmaktadır (Hardy, 1997, s.107 akt. Karaoğlu, 2010).

Matematik, sıkça değinildiği gibi, her aşamasında daha önceki bilgilerin ve edinilmiş becerilerin kullanımını gerektiren, bilgilerin sadece üst üste yığıldığı değil aynı zamanda iç içe de geçtiği bir bilim dalıdır (Moralı, 2006, s. 150). Matematik, soyut düşüncelerin sistematik bir biçimde ifade edilmesini sağlayan evrensel bir dil ve evrensel kültürdür (Hacısalihoğlu, Mirasyedioğlu ve Akpınar, 2004).

Matematik sadece neyin doğru olduğunu veya neyin işlediğini anlamak değil aynı zamanda neden doğru olduğunu veya neden işlediğini de açıklamak ve diğerlerini ikna etmektir (Almedia, 1996). Matematik bilimin deseni ve matematiksel etkinliklerin konusu olduğu için matematikte yapıların farkına varma, bağlantıları görebilme sembolik desenlere etki edebilme, tahmin etme, ispatlama, uygulama ve genelleme ifadelerinin hepsi de değerlidir (Schoenfeld, 1994). Bu değerlerden ispatın matematikteki yeri ise daha farklıdır (İskenderoğlu, 2010, s. 15-16).

Matematik ispat yapma disiplinidir ve bu özelliği matematik ile diğer disiplinler arasındaki temel farkı açıklar. Aksiyomlar, tanımlar, varsayımlar, teoremler ve teoremin ispatları bilimsel bir disiplin olarak matematiğin yapı iskeletini oluşturur (Heinze ve Reiss, 2003;

Sarı, Altun ve Aşkar, 2007). İspat matematiği diğer bilim dallarından ayıran en önemli özelliklerinden birisidir (Hanna ve Jahnke, 1996, Güler, Özdemir ve Dikici, 2012).

## 2.1 İspat

Kabul edilebilir matematiksel bir ispatı neyin oluşturduğuna dair birçok farklı nokta vardır. Babylonian matematiği genel ifadeler, tümdengelim ve açıklamalarla ilgili olmadığından ve belirli problemler için belirli çözümler oluşturduğundan ispatsız matematik olarak düşünülmektedir (Bernal, 1987). Bu nedenle tümdengelim ispat kavramını oluşturan aksiyomatik yöntem ilk olarak Yunanlılar tarafından ifade edilmiştir. Oluşumu matematiksel (örn; daha önceki medeniyetlerden elde edilen çelişkili işlem sonuçlarını çözme), sosyal (örn; yunan demokrasinin tümdengelimi destekleyen tartışma becerilerini gerektirmesi), felsefik (örn; yunan felsefesinin ilkel varsayımları ve bunların mantıksal çıkarımları sorgulaması), ve pedagojik (örn; öğretme ihtiyacından dolayı Yunanlıların matematiği mantıksal bir sırada yapılandırması) olmak üzere farklı faktörlerden etkilenmiştir (Kleiner, 1991). Eski Yunan matematiğinde ispat bir sonucu doğrulamada, başkalarını ikna etmede ve sonuçları tümdengelim bir sistem içine yerleştirmede kullanılmıştır. İspatın kaynağını M.Ö. IV. yüzyılda yayınlanan, Euclid'in 'Elements'i oluşturmaktadır. İspat bugünkü anlamına 19 yy. da Abel, Bolzano, Cauchy, Lagrange, Wierstrasse gibi matematikçiler tarafından getirilmiştir (Almedia, 2003).

İspat bir durumun sadece doğru ya da yanlış olduğunu değil aynı zamanda neden doğru olduğunu da göstermektir (Hanna, 2000). İspatlama ise Garnier ve Taylor'a (1997) göre yaygın anlamıyla bir yargı ya da sonucun doğruluğunu ya da yanlışlığını yeterli ispatlarla kabul ettirme çabasıdır (Güler, Özdemir ve Dikici, 2012). İspatlamayla kastedilen bir gözlemin doğruluğuyla ilgili şüpheleri ortadan kaldırmak ya da oluşturmaktır. İspatlama iki alt süreci içermektedir. Bunlardan birincisi bireyin bir gözlemin doğruluğuyla ilgili kendi şüphelerini ortadan kaldırmak için doğrusunu anlama süreci, ikincisi bireyin bir gözlemin doğruluğuyla ilgili başkalarının şüphelerini ortadan kaldırmak için ikna etme sürecidir (Harel ve Sowder, 1998).

İspat ve ispatlama matematiksel düşünmenin geliştirilmesinde, matematik yapmada, matematiksel bilginin tarih içerisindeki gelişimini ve yapısını kavramada, matematiksel olguların bireylerce ve toplumlarca ne düzeyde ve nasıl kullanıldığını algılamada merkezi bir öneme sahiptir. İspat matematik ve matematik eğitiminin merkezinde olan en önemli kavramlardan biri olarak görülmektedir (Ball ve ark. 2002; Knuth, 2002; Lee, 2002; Padraig ve McLoughlin, 2002; Uğurel ve Moralı, 2010). İspat eski Yunan medeniyetinden insanoğluna kalan en olağanüstü miraslardan birisidir (Harel ve Sowder, 2007).

Knuth (2002) ispatın bir öğrenme aracı olduğunu ifade ederken Ross (1998) matematik öğretiminde ispatın bilimsel doğrularından, teorik yapısından çok eğitimsel değerleri üzerinde durulması gerektiğini savunmuştur. Bireylerin farklı mantıksal düşünme yollarını kazanması ve bunları kullanması ispatın gelişimini bilgilerin farklı açılarla inşa edilmesini sağlayacaktır. Eğer muhakeme becerisi öğrencilerde geliştirilemez ise matematik öğrenciler için basit olarak bir işlem dizisini takip etmek ve ne ifade ettiği düşünülmeden örnekleri taklit etmek anlamına gelecektir.  (Ross, 1998).

İspat Oxford Amerikan sözlüğünde bir şeyin doğruluğunun gösterimi olarak tanımlanır (Oxford American Dictionary, 1980). Bir ispat iki şekilde yapılabilir. Birincisi bir ifadenin doğruluğunun gösterimidir. İkincisi ise bir ifadenin neden doğru olduğunun açıklanmasıdır. Matematikçiler bir ifadenin doğru olup olmamasından çok doğru olma nedeni üzerinde durmaktadırlar. Diğer bir deyişle matematiksel ispat bir ifadenin doğruluğunun mantıksal bir gösterimidir (Öziş ve Altınparmak, 2005).

İspat yapma süreci evrensel olarak kabul gören yöntemlerden oluşur (Moralı ve ark., 2006). İspat süreci, ispat yapılacak şeyin araştırılması, ispatın düzenlenmesi (organizasyonu), diğer kişilere açıklanması (anlatılması, sunulması) olmak üzere üç farklı fakat birbiriyle ilişkili aşamalardan oluşmaktadır. Matematikçi önce eldeki problem ya da ifadeyi analiz eder, daha önce yapılmış ispatı da göz önünde bulundurarak ifadenin doğru olup olmadığını araştırır ve daha önceden ispatlanmış teoremlerden faydalanarak nasıl türetilebileceğini tasarlar. Bu süreç, ispatın yapılması ya da ifadenin yanlış olduğunun gösterilmesiyle biter. Fakat bir ispat ancak matematik dünyası tarafından kabul gördükten sonra ispat olur (Lee, 2002; akt. Moralı ve ark., 2006).

Matematiksel ispatın iki öğesi bulunmaktadır. Matematiksel ispatın öğelerinden birisi akıl yürütmedir (Müngus ve Grassl, 1999). Akıl yürütme ispatlama sürecinde kullanılan araçlardan biri (Almeida, 1996) olmasının yanı sıra öğrencilerin açıklama, keşfetme ve düzenleme süreçleriyle birleştiğinde genellemelere ulaşmayı kolaylaştıran bir kavramdır (Reid, 2002). Matematiksel ispatın bir diğer öğesi ise iletişimdir. Matematiksel ispat, bulguların ve akıl yürütmelerin paylaşımında, matematiksel kavramların oluşumunda, genellemelerin öğreniminde ve sunumunda kullanılan bir yoldur. Fakat öğrenciler buldukları sonuçları açıklamakta, çözüm sürecinde nasıl bir yol izlediklerini ifade etmekte zorlanmaktadırlar. Oysaki öğrencilerin yanıtlarına delil göstermelerinin veya ispatlamalarının matematiksel düşüncenin gelişmesinde ve değişmesinde önemli bir rolü bulunmaktadır (Flores, 2002). Çünkü Forman ve ark. (1998) göre öğrencilerin buldukları sonuçları açıklamaya ve savunmaya çalışmaları matematiksel ifadeleri daha anlamlı bir şekilde kullanmalarını sağlayacaktır. Bu nedenle ispat matematikte çok önemli bir yere sahiptir (Hanna, 2000).

### 2.1.1 Matematik Eğitimi ve İspat

Johnson ve Johnson'a göre "Matematik eğitiminin temel amacı bütün öğrencilerin uygun ve yeterli matematiksel temele sahip olmalarını karmaşık bilgi ve teknoloji toplumunda üretken birer birey haline gelmelerini sağlamaktır…" (Akt. Pusluoğlu, 2002). Benzer şekilde çocukların zihinsel gelişimlerini desteklemenin yanı sıra çözüm yolları üretebilmelerini ve anlamalarını sağlamak, kavramsal anlayışlarını desteklemek (Tanrıseven, 2000) ve bir olayı tanımlama, anlama, irdeleme, çözümünü tahmin etme, uygun genellemelere ulaşma, soyutlama, ispat, analiz, sentez ve değerlendirme yapma gibi davranışları içeren matematiksel düşünme becerisine sahip bireyler yetiştirmektir (Dobos, Ocsko ve Vasarhelyi, 2001). Bu bağlamda hedeflenen toplum yapısına ulaşmada gerekli olan bu özellikler matematiğin temelini oluşturan ispatın önemini ortaya koymaktadır. Bir başka deyişle ispatın öğrencilere kazandırdığı becerilerin matematik eğitiminde önemli bir yeri vardır (Terzi, Ünal ve Gürbüz, 2012 s.52).

Öğrenciler ispat yaparak becerilerini ve düşünme şekillerini geliştirdikçe, yeni kavramlar öğrendikçe, bu kavramları matematiksel alanlarda kullandıkça, sonuçları değerlendirdikçe matematiğin anlamlı olduğunu göreceklerdir. İspat sayesinde çocuklar küçük yaşlarda matematikte öğrendiklerinin doğruluğunu öğretmen veya kitap gibi bir otoriteye dayandırarak doğruluğunu kabul etmek yerine, sorgulama yaparak kendi yöntemlerini geliştirebilirler (Flores, 2002). Böylece öğrenciler matematiksel bağlantıları kurarak matematiğin gerçek güzelliğini de görebileceklerdir (Szombathelyi ve Szarvas, 1998). İspat öğrenciler için anlaşılması zor bir alan olduğundan dolayı muhakeme ve ispatlama öğrencilerin anaokulundan 12. sınıfa kadar öğrenecekleri matematiğin bir parçası olmalıdır (NCTM, 2000). Matematik öğretimindeki yeri, önemi ve rolü sebebiyle ispatın matematik eğitimindeki reform hareketleri kapsamında öğretilme biçiminin daha zengin bir içerikte, geniş ve derinleşen bir yapıda ele alındığı görülmektedir (Moralı ve Uğurel, 2010).

İspatın bireyde oluşması okul öncesi dönemde başlamaktadır. Sınıflama, eşleştirme, sıralama, karşılaştırma gibi kavramlar ispatın temelini oluşturmakta ve mantıksal düşünme sürecine geçişte ilk adımları oluşturmaktadır. Adımlar bu dönemde atılamazsa ileriki dönemlerde sorunların ortaya çıkması muhtemeldir. Okul öncesi dönemde yapılacak çalışmalarla çocuklarda matematiksel muhakeme, neden sonuç ilişkisi ve bir anlamda ispat kavramı oluşturulabilir. Bu dönemde formal anlamda ispat yerine informal anlamda ispatları çocuklara çeşitli etkinliklerle kazandırmaktan bahsetmek mümkündür. Bu dönemdeki becerilerin kazanılması çocukların neden sonuç ilişkisi zincirini daha mantıklı olarak gelişecektir (Öziş ve Altıparmak, 2005).

Matematiğin vazgeçilmez bir parçası olan matematiksel ispat, ilköğretim seviyesinden itibaren, matematik etkinliklerinin merkezinde yer almaktadır (Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007; Schoenfeld, 1994; Hanna, 2000). Bunun üç ana nedeni vardır. Birincisi; ispat matematiğin derinlemesine öğrenilmesi için gereklidir (Fawcett, 1938). İkincisi; öğrencilerin ispat yeterlilikleri geniş ölçüde matematik yeterliliğini ilerletebilmektedir "çünkü bir sonucu ispatlayabilmek için olası tüm düşünceleri ve durumları incelemek gereklidir" (Marrades ve Gutierrez, 2000). Üçüncüsü ise üniversite ve yüksek okul öğrencilerinin ispat yapma ile ilgili karşılaştıkları zorlukların çoğu, en azından bir kısmı, öğrencilerin yüksek okulda aniden ispatla karşılaşmalarından kaynaklanmaktadır (Harel ve Sowder, 1998; Çallıalp, 1999 akt. Güler, Özdemir ve Dikici, 2012)

İlköğretim çağındaki çocuklar Piaget'in tanımladığı somut işlem dönemindedirler. Bu dönemde 2. sınıfın sonunda öğrencilerden şekilleri tanımaları ve sınıflandırmaları, sayıları kullanarak muhakeme edebilmeleri ve fiziksel materyalleri kullanabilmeleri beklenir. Böylece öğrencilerin nesneleri karşılaştırma, benzer ya da farklı olanları belirleme ve bunlar hakkında genelleme yapmaları sağlanır. 3-5. sınıflar arasında öğrencilerden varsayımları formüle etmeleri, matematiksel iddialardaki özellikleri ve kavramları sentez yapmaları istenir. Bu seviyedeki öğrenciler varsayımların doğruluğunu göstermek için birkaç örneğin yeterli olmadığını, karşıt örnekleri varsayımları çürütebilmek için kullanabilmeyi öğrenmelidir. 6-8. sınıflar arasında öğrencilerden genellemeler hakkında varsayım oluşturmaları ve varsayımları değerlendirmeleri beklenir. Bu sınıflardaki öğrenciler matematiksel iddiaları formüle ederek tümdengelimli ve tümevarımsal muhakemeyi kullanabilmeli ve muhakeme becerilerini geliştirebilmelidir (Öziş ve Altıparmak, 2005).

Okullarda lise düzeyinde ispat ile ilgili, matematiği öğretim biçimine bağlı olarak öğrencilerin ispata ilişkin yaklaşımlarının, becerilerinin tümevarımsal teyit etme veya görsel ispat düzeyinde kaldığı ifade edilmiştir. Bu da ispat sürecinin yalnızca son ayağının dikkate alındığını veya bilindiğini göstermektedir (Moralı ve ark., 2006). Lise döneminde 9-12. sınıflar arasında öğrencilerden şekilleri gözlemlemeleri, bu şekiller için örnekler bulmaları, yöntemleri kullanmaları ve araştırma yapmaları istenir. Bu seviyedeki öğrencilerin birkaç örnek ile varsayımın doğrulanmadığını fakat karşıt bir örneğin varsayımın yanlışlığını gösterdiğini öğrenmeleri beklenir. Bu dönemde öğrenciler tümdengelimli ispatları kullanabilmeli ve biçimsel ispatları sunabilmelidir (Öziş ve Altıparmak, 2005).

İspatın öğrencilerin matematiksel bilgileri öğrenimleri üzerindeki işlevleri; *doğrulama* (bir durumun doğruluğunu sağlama), *açıklama* ( bir durumun neden doğru olduğunu anlama), *keşfetme* (yeni sonuçların icadı ya da buluşu), *sistemleştirme* (aksiyomların, kavramların ve temel teoremlerin birçok sonucunu tümdengelim sistemi içinde organize etme), *zihinsel* *meydan okuma* (iyi bilinen bir olguyu yeni bir çatıda birleştirme ve yeni bir perspektiften bakma), *iletişim* (bir tanım veya fikrin sonuçlarının anlamını araştırma) ve *deneysel bir teori oluşturma* şeklinde sınıflandırılmıştır (Hanna ve Jahnke, 1999 akt. İskenderoğlu, 2010). Bu nedenle gerek ilköğretim gerekse ortaöğretim matematik öğretiminde matematiksel ispat yapma üzerinde durulması, öğrencilerin matematiksel şekilde düşünme becerilerinin gelişmesi açısından önemli olacaktır (Moralı ve ark., 2006). NCTM (2000) hazırladığı raporda tüm öğretim seviyelerinde öğrencilerin matematiksel ispat yapma yeteneğinin ve muhakeme etme becerisinin geliştirilmesi gerektiğini vurgulamaktadır.

Matematikte ispatlamanın rolünün önemine rağmen öğrencilerin matematiksel ispatı anlama ve oluşturmadaki düşük performansları, matematik eğitiminde ispatın öğretimi ve öğrenimine yönelik ilgiyi haklı çıkarmaktadır (Recio ve Godino, 2001, s. 83 akt. Karaoğlu, 2010). Öğrencilerin ispat yapmayı öğrenmede veya gerekliliğini anlamada yaşadığı zorluklar, istisnasız ispatın öğretimi konusunda gerçekleştirilen bütün eğitim araştırmalarında çözümlenmeye çalışılan ana sorun olmuştur. "Neden bunu kanıtlamak zorundayız?" sorusu, öğrencilerce en sık sorulan sorudur (De Villiers, 1990). Almeida'a (2000) göre öğrenciler ispat yapmanın anlamlılığını, öğretmenin beklentisini yerine getirmek ve sınavları geçmenin ötesinde görememektedirler (Moralı ve ark., 2006).

Matematik derslerinde ispat yapmanın önemi ve rolü nedeniyle, özellikle yüksek matematik öğreniminde, üzerinde oldukça zaman harcanan bir konudur. İleri düzey matematik derslerinin öncelikli amacı, öğrencilere ispatlama becerisini kazandırmaktır ve öğrencilerin ispatlamadaki yeterlikleri, performanslarının bir değerlendirmesi olarak görülür (Weber, 2001). İspatlama matematikte önemli bir etkinlik olmasına rağmen ispatı vermekte lisans düzeyinde ciddi zorluklar yaşanmaktadır (Almeida, 2000). Bunun sonucunda üniversite öğrencileri ispatlamada sıkıntı çekmektedir. (Senk, 1983; Moore, 1994; Harel ve Sowder, 1998; Dreyfus, 1999; Almeida, 2000; Jones, 2000; Recio ve Godino, 2001; Weber, 2001; Weber, 2004; Knapp, 2005; Stylianides vd., 2005; Stylianides vd., 2007) ve ispat stratejileri genellikle yetersizdir (Weber, 2001). Ayrıca ispat sürecindeki deneyimleri genellikle öğrencilere anlamlı gelmemektedir (Galindo, 1998 akt. İskenderoğlu, 2010). Dolayısıyla öğrencilerin çoğu dersi geçebilmek için ispatı anlamadan ezberlemeyi tercih etmektedir

(Condradie ve Firth, 2000). Çünkü lisans dönemine kadar olan süreçte öğrenciler yeterli düzeyde ve ciddi anlamda ispatla karşılaşmadığından, ispatın içselleştirilmesine ve ispat becerilerinin geliştirilmesine yönelik uygun ortamlar sağlanmadığından, bu durum öğrencilerin ispatla ilgili bakış açısını ve ispat yapışını etkilemektedir.

Öğrencilerin öğrenmeleri beklenen matematiksel bilgilerin dayanaklarını anlamaları, kavramları neden niçin sorularına yanıt alarak öğrenmeleri, bir problem için kullandığı çözüm yolunu matematiksel ifadelerle savunması öğrenmeyi anlamlı ve kalıcı hale getirmelerinde yararlı olacaktır. Ayrıca birçok ispatın oluşumu önceki ispatların ve oluşumların hiyerarşik yapısını temel aldığından (Selden ve Selden, 2003) öğrencinin öğrendiği bilgiyi diğer ispatlara ve problemlere aktararak pekiştirmesi de öğrenmede kalıcılığı arttıracaktır. Bu sebepten dolayı ispata yönelik olumsuz algının değiştirilmesi, ispat yapma becerilerinin kazandırılması ve ispata yönelik uygun etkinliklerin sunulması matematik eğitimi açısından oldukça önemlidir.

### 2.1.2 Matematik Öğretmeni Yetiştirme ve İspat

Matematiksel ispat sadece bir kavramın tanımını ve mantıksal sürecini anlamayı içermemekte aynı zamanda kavramın tanımını ve mantıksal sürecinin nasıl işlediğini de kavramayı içermektedir (Tall, 1992). Fakat öğrenciler genellikle matematiksel ispatın gereğine inanmamaktadırlar. Oysa öğrencilerin matematik problemlerine ürettikleri çözümlerin doğruluğundan emin olmaları kadar bundan nasıl emin oldukları da önemlidir (İskenderoğlu, 2010). Çolak, Bulut ve Argün (2005) yaptıkları çalışmada öğrencilerin, kendilerinden beklenenin sadece sonuç olduğunu düşündüklerini ve çözüm süreci boyunca neyi neden yaptıklarını ifade edemediklerini ortaya koymuşlardır. Bu noktada öğretmenlerin ispata yönelik bilgileri ve bakış açıları oldukça önemlidir.

Almeida (2000) çalışmasında öğretmenlerin ispata ilişkin algıları, yetenekleri ve deneyimlerinin öğrencilerin ispat becerilerini kazanma süreçlerinde etkili olduğunu ortaya koymuştur. Matematik öğretmenlerinin derslerini etkili bir şekilde yapılandırabilmeleri için, kazandıracakları kavramın anlamını, nereden geldiğini, hangi matematiksel bilgi veya ilke üzerine kurulu olduğunu bilmeleri gerekmektedir. Bunun için de matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapma yönüyle donanımlı yetiştirilmeleri gerekmektedir (Güler ve Dikici, 2012).

Matematik öğretmeni yetiştirmede alan bilgisinin oluşmasını sağlayan birçok derste yer alan konuların temellerini, tarih boyunca değişmeyen tanım ve teoremler oluşturmaktadır. Dolayısıyla alan derslerinin hemen hepsinde ispat ile karşılaşmak kaçınılmazdır. Bu sebeple öğrencilerin derslerde herhangi bir ispatla karşılaştıklarında hangi yöntemin kullanıldığını ayırt etmelerini ya da hangi yöntemin kullanılabileceğini belirlemelerini sağlamak amacıyla lisans eğitiminin başlangıcından itibaren ispata yer verilmektedir (Moralı ve ark., 2006). Fakat yapılan çeşitli araştırmalar üniversite düzeyindeki bu öğrencilerin ispat yapma sürecinde çeşitli sorunlar yaşadığını ortaya koymuştur (Senk, 1983; Moore, 1994; Harel ve Sowder, 1998; Dreyfus, 1999; Almeida, 2000; Jones, 2000; Recio ve Godino, 2001; Weber, 2001; Weber, 2004; Knapp, 2005; Stylianides ve ark., 2005; Stylianides ve ark., 2007). Jones (2000) yaptığı bir çalışmada öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin becerilerinin yeterli düzeyde olmadığı sonucuna ulaşmış, yüksek seviyede olanları da dahil olmak üzere, etkili matematik öğretimi için gerekli matematiksel bilgi donanımına sahip olmadıklarını ve bu şekilde mezun olduklarını tespit etmiştir.

Bunun yanı sıra Moralı ve ark. (2006) matematik öğretmeni adaylarının mantık yürütme ve ispat yapmada sorun yaşadıklarını ortaya koymuştur. Bu sorunlardan birisi ispatı bir açıklama olarak gördüklerinden ispat kavramını anlamamaları (Dane, 2008) ve dolayısıyla ispata gerekli değeri vermemeleridir (Yıldız, 2006). Oysa ileride öğretmen olduklarında öğrenci yetiştirecek öğretmen adaylarının ispat yapma düzeyleri, ispatı yapış şekilleri ve ispata yönelik yaklaşımları öğrencilerine yansıyacak ve dersi işleyiş tarzlarını, sınıfta yapacakları uygulamaları etkileyecektir. Çünkü öğrenciler öğretmenin sunduklarını, açıklamalarını ve düşüncelerini alarak var olan yapılarıyla birleştirmektedirler (Galbraith, 1995).

Matematik öğretmen adayları lisans eğitimleri süresince aldıkları derslerin çoğunda ispatla iç içe olduğundan öğretmen adaylarının lisans eğitimlerini başarı ile tamamlamaları için ispat yapmada zorluk yaşamamaları ve ispat yapabilme performanslarının arttırılması gerekmektedir. Fakat çalışmalar gösteriyor ki öğretmen adayları ve üniversite öğrencileri lisans derslerinde karşılaştıkları ispatları yapmada ve anlamada zorluk çekmektedirler (Karaoğlu, 2010). Oysa ileride öğretmen olacak bireylerin ispatları anlaması ve kavraması önemlidir.

Almedia (2003) çalışmasında öğrencilerin gerek programdan gerekse öğretim biçiminden kaynaklanan ispat yapma yetersizliklerinin uygun eğitim ile giderilebileceğini ve becerilerinin geliştirilebileceğini belirterek öğrencilerin bu konuda bir potansiyellerinin olduğunu ortaya koymuştur. Bu konuda öğretmenlere büyük bir sorumluluk düşmektedir. Eğer öğretmen öğrencilerin ispat yaparken yaşadıkları zorlukları ve bu konudaki eksikliklerini ihmal ederse öğrencilerin ispatı öğrenme ve ispat yapma süreci konuyu anlamadan öğretmeni taklit etmenin ötesine geçmez. NCTM (2003) öğrencilerde kuralları fark etme, olası bir genellemeye ilişkin varsayımda bulunma, varsayımları değerlendirme ve matematiksel tartışmaları oluşturma ve değerlendirme gibi becerilerin geliştirilmesinin gereğini ortaya koymuştur. Ayrıca matematikte akla yakın tahminleri formüle etme, bunları test etme, bunu muhakeme ederek diğer varsayımları da değerlendirerek sunma gibi faaliyetlerin, okul içi etkinliklerde yer almasının gereği üzerinde durulmuştur (Moralı ve ark., 2006). Bu noktada öğretmenlere düşen görev de; bu tür öğrenme ortamları yaratıp, öğrencilerin muhakeme etme ve ispat becerilerini geliştirmek olacaktır. Eğer öğretmenler öğrencileri için geniş öğrenme ortamı sunar ve değişik ispat yöntemlerini verirlerse, öğrenciler de matematiği ve mantıksal düşünceyi daha iyi anlayıp yaratıcılıklarını artıracaklardır (Altıparmak ve Öziş, 2005). Fakat öğretmenlerin birçoğu ispatı öğrencilere nadiren amacına uygun olarak göstermektedirler (Knuth, 1999; Knuth, 2002b). Genelde öğretmenler bir ispatı modellemekte, ne yapıldığını anlatmakta, mantığını açıklamakta ve öğrencilerin izlemesini ummaktadırlar (Galbraith, 1995). Diğer bir ifadeyle öğretmenler öğrencilerin zihinsel yapılarını oluşturmaları için gerekli fırsatı tanımadan her şeyi hazır olarak sunmaktadırlar. Oysaki ispatın öğrencilere kazandırdığı becerilerin matematik eğitiminde önemli bir yeri vardır (İskenderoğlu, 2010). Bu doğrultuda Martino ve Maher (1999) öğretmenlerin bu ortam içinde öğrencilere keşfedebilmelerini sağlayacak gerekli zamanı tanımaları gerektiğini belirtmektedirler. Çünkü böylece öğrencilere yeni fikirler öğrenme, modeller inşa etme, diğer kaynaklara danışma ve bazen de kendi kavram yanılgılarını görme olanağı sağlanmış olacaktır (İskederoğlu, 2010). Bunun yanı sıra öğretmenin ispatları ağırlıklı olarak bilgi aktarımı yoluyla sunması, ispatın inşası esnasındaki bilişsel süreçlere öğrencileri yeterince dâhil etmemesi ve ispat yapmanın anlamı ve adımlarını gerektiği gibi aktarmaması niteliği düşüren hususlardır (Uğurel ve Moralı, 2010b). Eğer öğretmen sınıfta problemleri kendisi çözerse, öğrenciler problemin sadece bir tek çözüm yolu olduğuna ve problemi hızlı çözmenin kavramsal anlamadan daha önemli olduğuna inanabilirler (Forman ve ark., 1998). Ayrıca öğrenciler öğretmenlerinin söylediklerinin doğruluğuna inandıkları için soru sormayabilirler. Bunun sonucunda da birçok öğrenci, matematikte öğrendiklerinin doğruluğunu anlamak için kendi yollarını geliştiremeyebilirler. Bu nedenle NCTM (2000) öğretim programlarının matematiksel tartışmaları ve ispatları geliştirmeye ve değerlendirmeye yer vermesi gerektiğini ifade etmektedir. Dolayısıyla öğretmenlerin öğrencileri buldukları yanıtın doğruluğunu ispatlamak konusunda desteklemeleri ve öğrencilerin matematikte geliştirdikleri stratejilere göre derslerini planlamaları önerilmektedir. Çünkü böylece çocuklar küçük yaşlarda matematikte öğrendikleri her şeyin doğruluğunu öğretmen veya kitap gibi bir otoriteye bağlayarak doğruluğunu kabul etmek yerine soru sormaya ve sorgulamaya da başlayarak kendi yöntemlerini geliştirebilirler (Flores, 2002 akt. İskenderoğlu, 2010, s. 11). Bu noktada ispat ilköğretim programında çok sınırlı da olsa yer aldığından ve öğrencilerin doğrulama ve ispat ile deneyimlerinin ana kaynağı ilköğretim öğretmenleri olduğundan ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispata bakış açıları ve ispatlama düzeyleri önem kazanmaktadır (Martin ve Harel, 1989). Dolayısıyla iyi bir eğitim için geleceğin bireylerini yetiştirecek öğretmen ve öğretmen adaylarının gerekli donanıma sahip öğretmenler olarak yetiştirilmesi, üzerinde önemle durulması gereken bir konudur.

### 2.1.3 Öğrencilerin İspat Yaparken Karşılaştıkları Zorluklar

İspat matematikte önemli bir kavram olmasına rağmen yapılan araştırmalar öğrencilerin her düzeyde ispatı anlamakta, anlayıp sevmekte ve oluşturmada büyük zorluklar yaşadığını göstermektedir (Martin ve Harel, 1989; Moore, 1994; Harel ve Sowder, 1998; Jones, 2000; Güven ve ark., 2005). Öğrencilerin ispat yaparken karşılaştıkları zorlukları belirlemek amacıyla yapılan çalışmalar öğrencilerin sadece ispatlamada değil ispatın ne olduğunu hatırlamada da zorluk yaşadıklarını göstermektedir (Chazan, 1993; Moore, 1994 akt.

Raman, 2003). Öğrencilerin ispatın gerekliliğini anlamada ve ispat yapmayı kavramada yaşadıkları sorunlar ispatla ilgili yapılan eğitim araştırmalarında çözümlenmeye çalışılan temel konu olmuştur (Viller, 1990 akt. Moralı ve ark., 2006).

Weber (2001) öğrencilerin ispat yapma ile ilgili yaşadıkları zorlukları, yapılan çalışmalar doğrultusunda iki açıdan değerlendirmektedir . Bunlardan birincisi bir veya birkaç örnek için doğruluğu gösterme ispat için yeterlidir şeklinde, öğrencilerin ispatın nasıl olması gerektiğine dair yanlış düşüncelere sahip olması, ikincisi öğrencilerin bir kavramı ya da teoremi anlamada ve uygulamada yetersiz kalmasıdır (Öziş ve Altıparmak, 2005).

Baker (1996) çalışmasında lise ve üniversite öğrencilerinin tümevarımsal ispat tekniğini öğrenirken karşılaştıkları güçlükleri araştımış ve öğrencilerin hem kavramsal hemde işlemsel açıdan ispat tekniklerinde güçlük yaşadıklarını, tümevarım ispatının kavramsal yönünden daha çok işlemsel yönüne önem verdiklerini saptamıştır. Bu güçlüklere öğrencilerin matematik bilgi eksikliğinin neden olduğu düşünülmektedir (Tatar ve Dikici, 2008). Arslan ve Yıldız (2010) ise 11. sınıf öğrencileriyle yaptığı bir çalışmada öğrencilerin ispatlamada büyük sıkıntı yaşadıklarını ve ispatlama sürecinde matematiksel olarak yeterli olmayan yollar izlediklerini tespit etmiştir.

Weber (2001) soyut cebir dersinde herhangi bir teoremin ispatının nasıl oluşturulduğunun öğrenilmesi sürecinde öğrencilerin sahip olduğu güçlükleri belirlemek amacıyla yaptığı çalışmada üniversite öğrencilerinin çoğu zaman bir ifadeyi ispatlamak için gerekli olan bilginin farkında olduğunu fakat ispatı oluşturma sürecinde bunları kullanmakta sıkıntı yaşadıklarını ortaya koymuştur (Tatar, 2006).

İspat yaparken öğrenciler genel olarak ispatı anlama, takdir etme ve oluşturmada, akıl yürütme adımlarını takip etmede ve ispatlarını formalleştirmede sorunlar yaşamaktadır. Knapp (2005) ispatlama ve formal matematikle geçerli anlamda ilk defa üniversite düzeyinde karşılaşıldığı için öğrencilerin matematiksel dile alışıp bu dili kullanmada, üst düzey akıl yürütmede ve formal matematiği anlamada güçlükler yaşadığını belirtmektedir (Sarı ve ark., 2007). Öğrencilerin matematiğin formalist yapısına uzak oluşu ispat yapma becerilerini de etkilemektedir. Çünkü informal ispat öğrencilere kavramsal olarak formal ispata göre daha kolay gelmekte ve öğrenciler formal ispata güvenmediğinden deneysel örneklerle kontrol etme ihtiyacı duymaktatır. Bunların yanı sıra öğrenciler öğretmenin yönlendirmeleri ile ispat yapabilmekte (Almeida, 2001), yönlendirmeler olmadan ispat yapmakta güçlük çekmektedir (Moralı ve ark., 2006).

Harel ve Sowder (1998) öğrencilerin ispat yaparken zorlanma nedenlerini; matematiksel ispatı nelerin oluşturduğuna dair algılarının yeterli olmaması ve bazı öğrencilerin derslerde öğretilenlerden farklı bir şekilde yaptıklarında ispatlarının geçersiz olduğunu düşünmeleri şeklinde açıklamaktadır. Ayrıca araştırmalar öğrencilerin teoremi ya da kavramı eksik yapılandırmalarına bağlı olarak hatalı ispatlar yaptıklarını bunun da ispat yaparken zorluklara neden olduğunu ortaya koymaktadır (Moore, 1994; Hazan ve Leron, 1994; Harel, 1998 akt. Karaoğlu, 2010).

Weber (2001) öğrencilerin çoğunun ispatlamayı nasıl yapacağını, nereden ispata başlayacağını, ispat yaparken gerekli kavramsal bilgileri, tanımları ve bunları nasıl kullanacağını bilmediğini ortaya koymuştur (Sarı ve ark., 2007).

Moralı ve Uğurel (2010) öğrencilerin ispat yaparken kullanılması gereken tanım ve özelliklerin matematiksel gösterimlerini kullanmada, ispatın birbirini takip eden mantıksal bir dizi adımdan istenene ulaşma işlemi olduğunu anlamada ve bunları ispat yapma süreçlerine aktarmada önemli sıkıntılar yaşadıklarını belirtirken Moore (1994) üniversite öğrencileriyle yaptığı çalışma sonucunda öğrencilerin ispat yaparken karşılaştığı zorlukların; kavramı anlama, matematiksel dil ve notasyon, ispata başlama olmak üzere üç ana kaynağı olduğunu ortaya koymuştur (Tatar ve Dikici, 2008).

Öğrencilerin ispat yaparken karşılaştıkları zorlukları ve nedenlerini belirleyebilmek ve bu zorlukları ortadan kaldırabilmek için öğrencilerin ispatlama süreçlerini incelemenin ve bu konudaki görüşlerinin tespitinin faydalı olacağı düşünülmektedir.

### 2.1.4 Matematikte İspata İlişkin Yapılan Araştırmalar

Bu bölümde ispat konusuyla ilgili olarak yurtdışında ve yurtiçinde yapılan araştırmalar tarih sırası göz önünde bulundurularak incelenmiştir.

#### 2.1.4.1 Yurtdışında Yapılan Araştırmalar

Tall (1998) yaptığı çalışmada ispatın matematikte temel konu olduğu ve bunu öğretmenin zor oldu varsayımından yola çıkarak, bireyin bilişsel gelişim aşamalarına bağlı olarak farklı ispat biçimleri sunmayı amaçlamıştır. Küçük bir çocuk için ispat fiziksel ispatla yapılırken, belli bir zaman sonra Öklid geometrisi gibi daha karmaşık sözel ispatlar başarıyla kullanılabilir. Bu anlamda araştırmacı tarafından öğrencilerin kullanabileceği iki farklı strateji tanımlanmıştır. Bu stratejilerin kullanımından elde edilen gözlemler, formel ispatın sadece bazı öğrenciler için geçerli olabileceğini, bazı ispat biçimlerinin ise daha fazla öğrenciye hitap edebileceğini göstermektedir.

Mingus ve Grassl (1999) çalışmasında öğretmen adaylarının ispata yönelik inanç ve tutumlarını incelemiştir. Araştırma kapsamında 30 sınıf öğretmenine daha önceden kaydoldukları matematik içerikli bir kursla ilgili, 21 ortaokul matematik öğretmenine ise soyut cebir hakkında bir anket uygulanmıştır. Ayrıca 215 orta öğretim öğrencisine sorulardan bazıları yöneltilmiş ve onların sebep sonuç ilişkisi kurma örnekleri ve kullandıkları teknikler incelenmiştir. Araştırma bulgularına göre, her iki gruptaki öğretmen adayları da ispatın müfredatta daha önce yer alması gerektiğini, ispat yapmanın cesaretlendirilmesi, kabul edilmesi gerektiğini düşünmektedirler. İlk olarak uygun ispatı kanıtlamak, daha sonra her öğrencinin her türlü ispat yapma teşebbüsünü pekiştirmek gerektiği ayrıca öğrencileri uygun sonucun elde edildiğinden, doğru sebep sonuç ilişkisinin kurulduğundan emin olmaya güdülemek gerektiği düşünülmektedir. Ortaöğretim öğrencilerine yöneltilen sorular ve elde edilen cevaplar ise öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun ispat yapmaya yetenekli olduğunu göstermektedir. Öğretmen ve öğrenciler arasında geçen “niçin”, “ açıkla” gibi diyalogların ispat yapmayı destekleyici unsurlar olduğu tespit edilmiştir. Bu konuda farklı dil, yaklaşım ve sunum tekniklerinin (sözel, geometrik ve yazılı) geliştirilmesi gerektiği düşünülmektedir.

Jones (2000) yaptığı çalışmada öğrencilerin üniversite düzeyinde matematiksel ispat yapabilme deneyimlerini ortaya koymaya çalışmıştır. Araştırma bulguları, nitelikli öğrencilerin ispat üretme konusunda, teknik olarak daha rahat olduklarını, ancak etkili öğretim için gerekli olan bilgilere sahip olmadıklarını göstermektedir. Bu durum teknik rahatlığın zengin konu bilgisiyle eş tutulmaması gerektiğini göstermektedir. Bu yönde bir bulgu en nitelikli mezunların bile matematiksel ispat şemaları konusunda yetersiz olabileceklerini, ancak etkili öğretim için gerekli olan zengin bilgiye sahip olamayabileceklerini göstermektedir. Başka bir ifade ile en iyi niteliklere sahip olmanın kişiyi etkili matematik öğretmeni yapmaya yetmediği görülmektedir. Bunun yanı sıra yeni mezun öğrencilerin ispat şemalarını lisansüstü eğitimlerine yansıttıkları, lise düzeyinde matematik öğretirken kullandıkları tespit edilmiştir.

Weber (2001) tarafından yapılan çalışmada ispat yapabilmenin matematikçiler için çok önemli bir yeterlilik olduğunu ifade edilmektedir. Bu amaçla üniversite öğrencilerinin bir ifadeyi ispatlarken uyguladıkları ve ihtiyaç duydukları şeyler ve bu konuda içinde bulundukları durum ortaya konulmaya çalışılmıştır. Öğrencilerin ispat yapmakta başarısız oldukları çünkü sahip oldukları sentaktik bilgiyi kullanmadıkları tespit edilmiştir. Doktora ve lisans öğrencilerinin soyut cebir konusunda ispat yapabilme durumları karşılaştırıldığında çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Buna göre doktora öğrencileri ispat yaparken hangi bilgiyi ve teoremi kullanacaklarını bilirlerken, lisans öğrencileri bu konuda bilgi eksikliğine sahiptir. Doktora öğrencilerinin soyut cebirle ilgili etkili ispat teknikleri ve teoremleri bildikleri tespit edilmiştir.

Knuth (2002) yaptığı çalışmada, matematik öğretmeni gözünden, 17 ortaokul matematik öğretmeninin ispat şemalarını incelemiştir. Araştırma sonuçlarına göre, öğretmenler tüm öğrencilerle ispat yapmanın çok zor olacağını, bunun ancak az sayıda öğrenciyle yapılan matematik eğitimi için uygun olacağını düşünmektedirler. Ayrıca öğretmenler ispatı pedagojik açıdan sınırlı bulmakta ve matematiksel anlamda iletişim ya da çalışma aracı olarak değil daha ziyade çalışma konusu olarak görmektedirler.

Flores (2002) çalışmasında farklı sınıflardaki bir grup ilköğretim öğrencisiyle görüşmeler yapmıştır. Öğrencinin yaptığı çözümlerde yaptıklarını nasıl bildiklerini sorarak öğrencilerin Sowder ve Harel’in (1998) şemalarına benzer şemalar kullandıklarını tespit etmiştir. Öğrencilerin çoğunun düşüncelerini paylaşmada ve öğrendikleri şeylerin doğruluğunu göstermede sınırlı davrandığını tespit etmiştir.

Selden ve Selden ve (2003) üniversitede matematik öğrenimlerine devam eden 12 öğrenciyle yaptığı çalışmada öğrencilerin ispata yönelik geçerlilik kavramlarını ve basit bir teoremin ispatına nasıl bir anlam yüklediklerini ele almıştır. Öğrencilere bir dizi ispat vererek bunlardan geçerli ve geçersiz olanları belirlemesini istemiştir. Çalışma doğrultusunda öğrencilerin doğru ve yanlış ispatı ayırmakta zorluk yaşadığı ve ispat tanımlama yeteneklerinin zayıf olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Raman (2003) çalışmasında üniversite öğrencilerinin ve öğretmenlerinin ispata ilişkin görüşlerini incelemiş, ispatlama ve ispatın değerlendirilmesi aşamasında üç farklı düşünce biçimi tanımlamıştır. Bunları deneysel veriye dayanan veya şekillerle açıklanan, formal ispata götürmeyen buluşsal düşünce, informal anlamlarla bağlantı kurmaksızın, formal manipülasyonlara dayanan bir şeyin doğru olduğunu gösteren ama anlama hissi vermeyen prosedürel düşünce ve formal ispata götüren, anlama ve ikna hissi veren anahtar düşünce şeklinde ifade etmiştir.

Weber (2004) tarafından yapılan çalışmada üniversite öğrencilerinin ispat yaparken kullanmış oldukları işlem biçimlerini tanımlamak, bunları kategorize eden bir çerçeve sunmak amaçlanmıştır. 176 üniversite öğrencisi üzerinde yapılan gözlemler sonucunda, araştırmacı tarafından öğrencilerin ispat yaparken kullandıkları farklı yöntemler tespit edilmiştir.

Stylianides (2005) yaptığı çalışmada ispat kavramı ve ispat yapmaya ilköğretim düzeyinde yeterince odaklanılmadığı düşüncesinden yola çıkarak, ispat ve ispat yapmanın ilköğretimde matematik öğretimi bağlamında nasıl kavramsallaştırılabileceğini ve bunun ilköğretim öğretmenleri tarafından nasıl uygulanacağını araştırmayı amaçlamaktadır. Bu amaç doğrultusunda araştırma üç bölümden oluşmaktadır. İlk aşamada hangi argümanların ispat olarak nitelendirilebileceği ortaya çıkarılmıştır. İkincisinde ise bu argümanların ilköğretim matematik öğretiminde ifade ettiği anlamın çerçevesi çizilmiştir. Bunun yanı sıra bu çerçeve öğretmenlerin ispat ve ispat yapmada sahip oldukları rolü inceleyecek bir araç olarak kullanılmıştır. Başka bir ifade ile ikinci aşama ilköğretim düzeyinde ispat yapabilmeyi içeren bir çerçeve çizerken, üçüncü aşamada ilköğretim düzeyinde ispat için gerekli olan ispat bilgisi incelenmektedir. Araştırma sonuçları, ilköğretim öğrencilerine matematik öğrenirken ispatın anlamı, nasıl yapılacağı ve neyin ispat edileceği ile ilgili bir bakış açısı sunmaktadır.

Martin ve ark. (2005) çalışmasında öğrencilerin ispatına yönelik görüşlerini, formal ispat oluşturma yeteneklerini, öğretmen ve öğrenci davranışları arasındaki etkileşimi ve ispatı öğrenme becerilerini araştırmıştır. Dört aylık süreci kapsayan çalışmada ispat yapma öğretimi gerçekleşmiş ve süreç sonunda öğrencilerin formal ispatlar oluşturmaya ve analitik ispat şemalarını kullanmaya başladığı gözlemlenmiştir. Ayrıca bu çalışma doğrultusunda öğretmen ve öğrenci etkileşiminin önemi ortaya konulmuştur.

Stylianou, Chae ve Blanton (2006) tarafından yapılan çalışmanın özünde ispat oluşturma sürecinin matematik problemi çözme süreciyle benzer olduğu düşüncesi yer almaktadır. Farklı ispat şemalarına sahip olan öğrencilerle yapılan görüşmelerle, öğrencilerin şemaları oluşturma biçimleri ve bunu yaparken kullandıkları kurallar analiz edilmiştir. Böylece problem çözerken kullandıkları modellerle ispat şemaları arasındaki olası ilişki araştırılmıştır. Araştırma bulguları, her bir ispat şemasına sahip olan öğrencinin, yine benzer ispat oluşturma modelini takip ettiğini ve bu modellerin ispat performanslarını etkilediğini göstermektedir.

Tall ve Ramos (2006) tarafından yapılan çalışma, erken çocukluk döneminden formal matematik ve ispat yapısına kadar geçen matematiksel düşünme sürecinin gelişimini ortaya koyan uzun süreli bir kavramsal çerçeve çizmektedir. Bireyin daha önceden karşılaştığı bir durum bireyin şuan ki düşünme sürecini etkilemekte, dahası söz konusu gelişim bunun üzerine inşa edilmektedir. Çocuk ilk olarak,  algıyla eylem arasında ilişki kurarak, en az iki yolla düşünülebilir konsept oluşturmaya başlamaktadır. İlkinde nesnelere odaklanır, nesnelerin özelliklerini keşfeder, onları tanımlar, başkalarına açıklarken belli özelliklerin üzerinde durur, Öklid geometrisinde olduğu gibi. Diğerinde ise eylemlere odaklanır (sayma gibi) ve eylemleri birer prosedürmüş gibi kullanır, sayılar gibi daha karışık aşamalar düşünme sürecine aktarılır. Bu bilişsel gelişimle ilgili olarak birbirinden farklı ama aynı zamanda birbirini tamamlayan biçimi ortaya çıkarmaktadır. Bunlar; algı, eylem ve düşünceye dayanan kavramsal somutlaştırmadır. Araştırmanın asıl amacı ise bu kavramların özellikleri arasındaki ilişkiyi keşfetmekten, aksiyomlara ve ispata dayalı aksiyomatik düşünme biçimlerine geçişi araştırmaktır.

Hawro (2007) tarafından yapılan çalışmada, öğrencilerin ispat yaparken ve okurken karşılaştıkları zorlukları ortaya koymak amaçlanmıştır. Bunun yanı sıra, söz konusu zorlukların üstesinden gelmeyi sağlayacak bir takım öğretici etkinlik önerilerinde bulunulmuştur. Araştırma verileri, öğrencilerin belli ispat şemalarını kullanarak, matematiksel metinler oluşturma ve bunları analiz etme yeteneklerini geliştirmek amacıyla araştırmacı tarafından yürütülen Matematiğe Giriş dersleri sırasında elde edilmiştir. Araştırma sonuçları, öğrencilerin ispat şemalarının tanımı konusunda yetkinliklerinin arttığını göstermektedir.

### 2.1.4.2 Yurtiçinde Yapılan Araştırmalar

Özer ve Arıkan (2002) çalışmasında lise 2 öğrencilerinin matematik derslerinde ispat yapabilme becerilerini ve ispat düzeylerini incelemiş bunun yanı sıra materyal yardımıyla ispat yapıp yapamadıklarını gözlemlemiştir. Araştırmaya katılan toplam 110 öğrenciye açık uçlu sorular sorularak ve bu öğrencilerden üçü ile görüşme yapılarak veriler toplanmıştır. Araştırma bulguları lise 2 öğrencilerinin yaptığı ispatların istenilen düzeyde olmadığını ve materyal kullanarak ispat yapamadıklarını göstermektedir. Ayrıca öğrencilerin ispat yapma yöntem ve tekniklerini yeterli düzeyde kullanmadıkları tespit edilmiştir.

İskenderoğlu (2003) yüksek lisans tez çalışmasında ilköğretim 5,6,7,8, ve 9. sınıflarda öğrenim gören öğrencilerin matematik problemlerine buldukları sonuçların doğruluğundan nasıl emin olduklarını ortaya koymayı amaçlamıştır. Verileri toplama aşamasında 20 öğrenci ile klinik görüşme yapılarak bu süreçte öğrencilere 5 problem yöneltilmiştir. Elde edilen bulgulara göre öğrencilerin genellikle dışsal şemalardan otoriteyi, deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmayı tercih ettiği analitik şemayı ise diğerlerine göre daha az kullandığı tespit edilmiştir.

Öziş ve Altıparmak (2005) çalışmasında da ispat çeşitlerini inceleyerek matematiksel ispat ve muhakeme üzerinde durmuştur. NCTM standartları doğrultusunda okul öncesi, ilköğretim ve lise seviyesindeki ispatlar hakkında bilgi verilmiş, muhakeme ve ispat standartlarında her bir dönemde öğrencilerden hangi kazanımları gerçekleştirmelerinin beklendiği belirtilmiş ve çeşitli temel ispat örnekleri sunulmuştur. Bunun yanı sıra örneklerde verilen kavramların öğretiminin kolay olmadığı da ifade edilmiştir.

Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere (2006) çalışmasında matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerini incelemek amaçlamıştır. Araştırmanın örneklemini, Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi, ilk ve orta öğretim matematik öğretmenliği bölümlerinin birinci ve sonuncu sınıflarında okuyan 337 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Betimsel nitelikte olan bu çalışmada veriler matematik öğretmen adaylarının ispat ve ispat yapmayla ilgili düşüncelerini öğrenmeye yönelik olarak geliştirilen bir ölçek yardımıyla elde edilmiştir. Çalışmanın bulguları matematik öğretmen adaylarının büyük kısmının ispat yapmaya yönelik görüşlerinin tam olarak oluşmadığını göstermektedir. Öğretmen adaylarının görüşlerinin net olmadığı ya da yetersiz olduğu sonucuna ulaşılmış ayrıca matematik ve matematik öğretimi açısında ispatın önemini bilmedikleri tespit edilmiştir.

Yıldız (2006) yüksek lisans tezinde genel matematik dersi kapsamında yer alan teoremleri ve ispatları anlamayı kolaylaştıracak kavrama testleri hazırlamış ve bu testleri öğrencilere uygulayarak öğrencilerin ispat ve kavram testleriyle ilgili görüşlerini ortaya koymuştur. Çalışma Gazi Üniversitesi eğitim fakültesi ortaöğretim fen ve matematik eğitimi anabilim dalı matematik eğitimi bölümünde 1. Sınıfta öğrenim gören öğrenciler ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın verilerini öğrencilerin ispat yapabilme becerilerini incelemek ve kavrama testi hakkındaki görüşlerini öğrenmek amacıyla yöneltilen açık uçlu sorulara öğrencilerin verdiği cevaplar ve daha sonra katılımcılar arasından seçilen 6 öğrenci ile yapılan görüşmeler oluşturmaktadır. Çalışmadan elde edilen bulgular öğrencilerin üniversiteye giriş sınavında sorulmadığından dolayı ispat ve teoremlere gerekli değeri vermediklerini, üniversitedeki ispatlarda başlangıçta genel anlamda kavramlar arasındaki ilişkileri kurmakta ve ispatı anlasalar bile uygulamakta zorlandıklarını göstermektedir. Bunun yanı sıra öğrencilerin ispat yöntemlerini tam olarak öğrenemedikleri ve ispat yaparken matematiksel dili kullanamadıkları, sınıfta öğretmenin yapmış olduğu ispatları kullanabildikleri tespit edilmiştir.

Sarı, Altun ve Aşkar (2007) çalışması öğrencilerin kanıtla ilgili görüşlerini belirleme, kanıtlama süreçlerini ve bu süreçte yaptıklarını ayrıntılı bir şekilde ortaya koymak amacıyla hazırlanmıştır. Durum çalışması niteliğinde olan bu nitel araştırma ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinden ikisi kız biri erkek olmak üzere 3 kişiyle yürütülmüştür. Öğrencilerin seçiminde Analize Giriş II dersi kapsamında başarı seviyelerinin düşük, orta ve yüksek düzeyde olmasına dikkat edilmiştir. Veriler ders gözlemleri, öğrencilerle yapılan görüşmeler ve görüşmede sorulan ifadeyle ilgili öğrencilerin yaptıkları kanıtlardan elde edilmiştir. Çalışma sonuçları farklı başarı seviyesindeki öğrencilerin kanıtla ilgili düşünceleri, kanıt şemaları ve kanıt yapma yaklaşımları ile ilgili olarak açıklayıcı bilgiler ortaya koymaktadır.

Uğurel ve Moralı'nın (2010a) çalışması bir ortaöğretim sınıfının matematik dersinde uygulanan ispat yapma etkinliği esnasındaki iletişim durumlarını incelenmesi üzerinedir. Özel durum çalışması niteliğindeki bu nitel araştırmada tüm sınıf bazındaki tartışmalar ele alınarak öğrencilerin söylemleri çözümlenmiştir. Söylem çözümlemesi çerçevesinde yapılan bu çalışmanın örneklemini özel bir fen lisesinin on birinci sınıfında okuyan 11 öğrenci ile o sınıfın matematik öğretmeni olmak üzere toplam 12 kişi oluşturmaktadır. Araştırmanın verilerini, ortaöğretim öğrencilerinin matematik derslerindeki sınıf içi bireysel ve karşılıklı (öğrenci-öğrenci, öğretmen-öğrenci) sözel ve yazılı söylemleri ve araştırmacı gözlemleri oluşturmaktadır. Teşfik edilmiş söylem (TES) aracılığıyla öğrencilerin ispat ve ispatlamaya yönelik bilgileri ve anlamaları hakkında kayda değer bulgular elde edilmiştir. Bu çalışma sonucunda öğrenciler ispatı doğru olarak tamamlayamadığı ya da kabul edilebilir bir yaklaşım sunamadığı görülmüştür. Öğrencilerin verilen ifadenin ne anlama geldiğini farklı biçimlerde yorumlayabildiği, doğal olarak teorem ifadesine yüklenen anlamlardaki farklılıkların öğrencilerin ispat yapma yaklaşımlarını da etkilediği tespit edilmiştir. İspat yapma sürecinde öğrencilerin hangi yöntemin uygun olacağını düşünmeden deneme yanılma yoluyla pratik düşünce üretmeye çalıştıkları görülmüştür. Hem bireysel hem de sınıf bazında ispatlama yaklaşımlarının düzenli olmadığı ifadeyi örnekler üzerinden test etmeye dayandığı tespit edilmiştir. Bir ispatı sınıfta tartışarak ve yazılı olarak yapmayı içeren TES uygulamasının analizi çerçevesinde, öğrencilerin ispata yönelik kavramsal anlamalarında ve yaklaşımlarındaki sıkıntılı yanların sözlü ve yazılı söylemlerine yansıttığı tespit edilmiştir.

İskenderoğlu (2010) doktora tezinde ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıta ilişkin görüşlerini ve fonksiyonlar konusunda farklı sınıf düzeylerinde ne tür kanıt şemaları kullandıklarını belirlemeye çalışmıştır. Öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemalarını ortaya koymak için yazılı sınav ve klinik görüşmeler yapmış ayrıca öğretmen adaylarının kanıta yönelik görüşlerini tespit etmek içinse "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği" adı altında geliştirilmiş olan bir ölçekten yararlanmıştır. Çalışmada gelişimci araştırma yöntemi benimsenmiş olup ölçek farklı sınıf seviyelerinden 187, yazılı sınav 158 ve klinik görüşme 16 öğretmen adayına uygulanmıştır. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının ispata ilişkin görüşlerinin olumlu olduğu, sınıf seviyesi arttıkça ispat şemaları arasında en üst düzey olarak kabul edilen analitik şemaların daha çok kullanıldığı ve sınıflara göre kullanılan ispat şemalarında farlılık olduğu tespit edilmiştir.

Karaoğlu (2010) yüksek lisans tezinde matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performansları ile öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlere ilişkin görüşlerini ve teoremleri ispatlamada anahtar nokta ve fikir kullanımının etkililiğini incelemiştir. Durum çalışması ve gömülü teori tekniklerinin kullanıldığı bu araştırmaya Ankara'daki bir üniversitenin ortaöğretim fen ve matematik eğitimi bölümü matematik eğitimi bölümü matematik eğitimi anabilim dalında birinci, ikinci ve üçüncü sınıfta öğrenim gören birer öğretmen adayı katılmıştır. Verilerin elde edilmesinde araştırmacı tarafından hazırlanan anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş soruları içeren çalışma kağıtları, gözlemler ve görüşmelerden yararlanılmıştır. Araştırma sonucunda, matematik öğretmen adaylarının, anahtar nokta ve fikirlerden yararlandıklarında ispat yapma performanslarının arttığı gözlemlenmiştir. Bulgulara göre öğretmen adayları, anahtar nokta ve fikirleri kullandıklarında; teoremi ispatlamak için daha istekli davrandığı ayrıca başarısız olma kaygıları azaldığı sonuca daha kolay ulaştıkları ve özgüvenlerinin arttığı tespit edilmiştir. Bunun yanı sıra öğretmen adayları matematik derslerine ispatların anahtar nokta ve fikirler üzerine vurgu yapılarak öğretilmesinin, ispat yapma performanslarını arttıracağını düşünmektedirler.

Nasibov ve Zaimoğlu (2010) "Bilimde İspat, Onun Eğitimde Yeri ve Önemi Hakkında" adlı çalışmasında ispatın ne olduğu, niçin gerekli olduğu ve nasıl yapıldığı ile ilgili konuları ele alarak çeşitli ispat örneklerine yer vermiştir. Matematiksel muhakemenin matematik eğitimindeki yeri ve öneminden bahsetmiş, ispata ve muhakemeye dayalı matematik öğretiminde yapılan yanlışlar ile bu konuda yapılabileceklerle ilgili önerilerde bulunmuştur.

Dedeoğlu (2010) çalışmasında uluslar arası eğilimler paralelinde ilköğretim matematik öğretim programını eleştirel bir bakış açısıyla ele almayı ve matematiksel ispatın gelişim sürecini ortaya koymayı amaçlamıştır. Döküman incelemesi niteliğindeki bu araştırmada içerik analizi yöntemiyle ispat sürecine dair anahtar kelimeler (akıl yürütme, tümevarım, tümdengelim, çıkarım…) taranmıştır. İncelenen program giriş metinleri doğrultusunda matematik öğretiminin genel amaçlar bazında ilköğretim 1. ve 2. kademe arasında çarpıcı bir farkın olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. ispat çeşitlerinin açık bir şekilde 2. kademe geometri öğrenme alanında ifade edildiği gözlemlenmiştir. Programda sunulan geçerleme araçlarının ve yöntemlerinin sınırlı olması ayrıca ispatların cebirsel yaklaşımları ön plana çıkarıcı nitelikte olması dedüktif ispata hazırlık açısından yeterliliğin sağlanmadığını göstermektedir. Bu doğrultuda çalışmada matematik öğretiminde ilköğretim yıl sonu hedeflerinin açık bir şekilde ifade edilmesi ve öğrencilerin formal matematiğe hazırlanması vurgulanırken ülkemiz çalışmalarının uluslararası çizgiye ulaşabilmesi için ders kitabı etkinlikleri ile sınıf içi uygulamaların nitel bir şekilde incelenmesi önerilmektedir.

Güler, Özdemir ve Dikici'nin (2012) çalışmasında amaç ilköğretim matematik öğretmen adaylarının tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerilerini, matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini incelemek ve bunlar arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktır. Araştırmanın örneklemini, ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü üçüncü ve dördüncü sınıflarında öğrenim gören toplam 151 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmanın verileri ispat görüş anketi, Matematiksel Tümevarım Bilgi Testi (MTBT) ve yarı-yapılandırılmış mülakatlardan elde edilmiştir. Nitel ve nicel araştırma yöntemlerinin birlikte kullanıldığı bu çalışmada nicel kısmında Matematiksel Tümevarım Bilgi Testi ve ispat görüş anketi, nitel kısmında yarı yapılandırılmış mülakatlar uygulanmıştır. Araştırma bulgularına göre, öğretmen adaylarının tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerilerinin düşük olduğu, ispata yönelik görüşlerinin tam oluşmadığı ve ispat hakkındaki görüşleriyle tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerileri arasında istatistiksel olarak pozitif ve anlamlı bir ilişki olduğu saptanmıştır.

İmamoğlu ve Yontar-Toğrol (2012) çalışmada ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği ile matematik bölümünde okuyan öğrencilerin matematiksel ispata yönelik tutum ve inançlarını, ispat yapma sürecinde kullandıkları yöntem ve akıl yürütme şekillerini incelemeyi amaçlamıştır. 93 birinci ve 82 son sınıf öğrencisiyle yürütülen bu çalışmada kullanılmak üzere *Tutum ve İnanç Ölçeği* (TİÖ) ve İspat Sınavı (İS) adı verilen iki ölçek geliştirilmiştir. Verilerin elde edilmesinde birinci sınıf öğrencilerinin ölçeği lise matematik bilgi ve deneyimlerine dayanarak yanıtlamalarını sağlamak amacıyla ilk dönem bir matematik dersinin ilk haftasında ölçek uygulamasının yapılmasına dikkat edilmiştir. Araştırma sonuçları doğrultusunda birinci ve son sınıf öğrencilerinin ispata yönelik inanç, tutum ve becerilerinde farklılıklar olduğu tespit edilmiş, birinci sınıfların ispat yaparken tümevarımsal akıl yürütmeyi, son sınıfların ise tümdengelimsel yöntemleri tercih ettiği gözlemlenmiştir. Ayrıca ispat yapma konusunda matematik bölümündeki öğrenciler ile öğretmen adayları arasında matematik öğrencileri lehine bir farklılık saptanmıştır.

Köğce (2012) çalışmasında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmanın matematik öğretimine katkısıyla ilgili görüşlerini ve ispat düzeylerini belirlemeyi amaçlamıştır. Betimsel yöntemlerden özel durum çalışması niteliğinde olan bu çalışma Fatih Eğitim Fakültesinde ilköğretim matematik öğretmenliği programında okuyan toplam 90 birinci sınıf öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Verilerin toplanmasında iki açık uçlu ve bir senaryo tipi sorudan oluşan anket formu kullanılmıştır. Bu sorulardan ilki öğretmen adaylarının matematiksel ispatın gerekliliği ve öğrenmeye katkısıyla ilgili görüşlerini, son ikincisi ispat düzeylerini belirlemeye yönelik olarak hazırlanmıştır. Bu çalışmada öğrencilerin ispat düzeyleri Miyazaki'nin (2000) ispat sınıflamasına göre belirlenirken öğretmen adaylarının ispatın öğrenmeye katkısıyla ilgili görüşleri cevapların benzerlik ve farklılığına göre sınıflanmıştır. Çalışma bulguları öğrencilerin büyük kısmının Miyazaki sınıflamasına göre tümdengelimsel muhakemenin ağırlıklı olduğu ispatlamayı kullandığını ve tamamına yakınının ispatın matematik öğrenmeye katkı sağlayacağına inandığını göstermektedir.

Güler ve Dikici (2012) çalışmasında ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispata ilişkin görüşlerini ele almıştır. Araştırmaya Doğu Anadolu Bölgesi'nde bulunan bir üniversitenin ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümünde dördüncü sınıfta okuyan 12 matematik öğretmeni adayı katılmıştır. Veriler yarı yapılandırılmış "Matematiksel İspat Görüş Mülakat Formu" (MİGMF) ile toplanmıştır. Elde edilen bulgulara göre çalışmaya katılan öğretmen adaylarının çoğunluğunun ispata yönelik görüşlerinin olumlu olduğu ve matematik eğitiminde ispatın önemli olduğunu düşündükleri görülmüştür.

## 2.2 DNR'nin Teorik Çerçevesi

D, N ve R baş harfleri sırasıyla üç temel eğitim ilkesi: İkilik (Duality), Gereklilik (Necessity) ve Tekrarlı Düşünme (Repead Reasoning) anlamına gelmektedir. Bir müfredat içeriğinin matematiksel bütünlüğü, matematiksel uygulamanın yüzyıllardır geliştirdiği ve ilerlemeler için zemin olmaya devam eden anlama ve düşünme yolları tarafından belirlenmektedir. Bu nedenle bu anlama ve düşünce yollarını tanımlamak ve onların matematik tarihindeki, öğrencilerdeki gelişiminin ne kadar mümkün olduğunu anlamak, benzer şekilde eğitimsel çabanın merkezindeki öğrencilerin zihinsel gereksinimlerinde ve öğretilen içeriğin matematiksel bütünlüğünde onları geliştirmek ve matematik müfredatına uygulamak, matematik eğitiminin önemli bir amacıdır.

DNR ye göre, herhangi bir matematik müfredatının nihai hedefleri, anlama ve düşünme yollarının her ikisi açısından da kesin ve açık bir şekilde ifade edilmelidir. Öğretim ilkeleri bu hedeflere ulaşmak için

(1) Bilginin bu iki kategorisi arasındaki gelişimsel bağlılığa

(2) Öğrencilerin zihinsel ihtiyaçlarına ve

(3) Bilginin içselleştirilmesini ve organizasyonunu kolaylaştıran faktörlere dayanmalıdır.

Bu üç unsur, sırasıyla ikilik (Duality), gereksinim (Necessity), tekrarlı akıl yürütme (Repeated Reasoning) eğitim ilkelerine karşılık gelmektedir (Harel, 2008a).

DNR üç kategoriden oluşan bir sistem olarak düşünülebilir.

- Öncüller, DNR kavramlarının ve iddialarının altında yatan, temelini oluşturan net varsayımlardır.
- Kavramlar, bu öncüllere odaklanmış ve bunları tanımlayan yapılardır.
- İddialar, DNR öncüllerinin gerektirdiği DNR kavramları açısından formüle edilen ve deneysel çalışmalarla desteklenen ifadelerdir.

Eğitim ilkelerini kapsayan bu iddialar, öğrencilerin öğrenmesinde öğretme eylemlerinin olası etkisiyle ilgili iddialardır. Sistem üç temel ilkeyi şöyle ifade etmektedir: ikilik ilkesi, gereksinim ilkesi ve tekrarlı akıl yürütme ilkesi, böylece DNR kısaltması oluşmaktadır (Harel, 2008b).

### 2.2.1 DNR'nin Öncülleri

Harel (2008b) çalışmasında DNR yi oluşturan öncülleri ele almıştır. Bu çalışmaya göre öncüllerin tamamı, matematiğin DNR felsefesinin, matematik öğretimi ve öğreniminin temelini oluşturur. DNR sekiz öncülden oluşmaktadır. Bunlar dört kategori şeklinde düzenlenmiştir:

1. Matematik

- Matematik: Tarih boyunca kurumsallaşmış tüm anlama ve düşünme yollarından oluşan matematiğin bilgisidir.

2. Öğrenme

- Epistemofili (Bilgiden Haz Alma): Bütün insanlar problemleri çözmek için zihinsel eylemler gerçekleştirmeyi öğrenme kapasitesine sahiptir ve bu konuda isteklidir. Bu kapasitede bireysel farklılıklar mevcut olmasına rağmen, bu farklar yeterli deneyim yoluyla değiştirilemeyen, doğuştan gelen kapasiteleri yansıtmamaktadır.
- Bilmek: Uyumsama ve özümseme arasında bulunan sürekli bir gerilimden denge durumuna yönelmiş gelişimsel bir ilerleme sürecidir.

- Bilmek-Bilgi Bağlantısı: İnsanların bildiği herhangi bilgi parçası, problemli bir durumda yaptığı çözümlemelerden elde ettiği bir sonuçtur
- Çevre (durum) Bağlılığı: Öğrenme çevreye bağlıdır.

3. Öğretme

- Öğretme: Matematik öğrenme kendiliğinden gerçekleşmez. Kişinin bir uzman rehberliğinde ya da yetenekli akranlarıyla işbirliği içinde yapabileceği şeyler ile rehberlik olmadan yapabileceği şeyler arasında her zaman bir fark olacaktır.

4. Ontoloji

- Öznellik: İnsanların yapmış olduklarını iddia ettikleri gözlemler zihinsel yapılarının çevrelerine ne anlam yüklediğine bağlıdır.
- Bağlılık: İnsanların eylemleri, dünya görüşleri tarafından kontrol edilir ve başlatılır. Diğer taraftan dünya görüşleri eylemleri sonucu oluşmaktadır.

Bu öncüller bilinen teorilerden alınmış ya da bu teorilere dayanmaktadır. Özet olarak, epistemofili terimi Aristo 'dan gelir (Lawson-Tancred, 1998); uyum terimi Piaget'nin denge teorisinin çekirdeğini oluşturur (Piaget, 1985); öğrenme-bilme bağlantısı da Piaget'den alınmıştır ve bunun ile Brousseau'nın (1997) "Bilginin her parçası için ona uygun anlam kazandıran temel bir durum vardır" iddiası birbirini tutmaktadır. Durum bağlılığı bilgi ediniminin modern bilişsel teorileriyle uyumludur, öğretme terimi Vygotsky'nin (1978) yakınsak gelişim alanı (ZPD) düşüncesinden alınmıştır, öznellik terimi ve bağlılık terimlerinin her ikisi Piaget'nin yapılandırmacılık teorisine dayanmaktadır (von Glasersfeld, 1983).

Bu öncüllere neden ihtiyaç duyulur? sorusu DNR matematik öğretimi ve öğreniminin kavramsal çerçevesini oluşturmaktadır. Ayrıca matematikte öğretilmesi hedeflenen bilginin doğasıyla ve bu bilginin öğreniminin ve öğretiminin doğasıyla ilgili bir bakış açısına ihtiyaç duyulmaktadır.

Ontoloji Öncülü yani öznellik ve bağlılık terimleri bizim eylemlere yaptığımız yorumlara ve öğretmenlerin, öğrencilerin görüşlerine yöneliktir. Bu öncüllerle açıklanan ontolojik durumların matematik eğitimine etkileri yeni değildir. Von Glasersfeld, Leslie Steffe, Patrick Thompson, Paul Cobb, Jere Confrey, and Ed Dubinsky gibi araştırmacılar bu durumlardaki matematik müfredatlarını ve araştırmayı sunma ve uygulamada önemli öncülerdendir (Steffe, Cobb ve Glasersfeld, 1988; Steffe ve Thompson, 2000; Confrey, 1990; Dubinsky, 1991). Bu kişiler matematik müfredatı ve öğretimi ile ilgili önerilerde bulunmuşlardır. Bunlar şöyledir: Öğrencilerin gerçekleri, gözlemciler olarak bizim anlattıklarımız değil onların asıl eylemleridir. Gözlemlediğimiz öğrenci deneyimlerini tanımlarken bizler sadece neler gözlemlediğimize dair sahip olduğumuz kavramları tanımlayan bir model sunarız. Bu modellerin pedagojiksel olarak etkili olabilmesi için modellerin, bizlerin duymuş ve görmüş olduğu öğrenci eylemlerininin yanı sıra bunların olası nedenlerini de içermesi gerekmektedir. Bütün bu unsurlar DNR nin ayrılmaz parçalarıdır.

Matematik Öncülü, anlama ve düşünme yollarının matematik disiplinin öğeleri olduğunu vurgular ve matematiksel bilginin doğasını kapsar. Bu nedenle eğitim hedefleri bu iki öğe açısından formüle edilmelidir.

Öğrenme Öncülü yani epistemofili, bilme, bilme-bilgi bağlantısı ve durum bağlılığı terimlerinin her biri öğrenmenin farklı bir yönüyle ilgilenmektedir.

Epistemofili Öncülü, bilgi sevgisi, bildiden haz alma olarak tanımlanır ve insanların öğrenme eğilimleriyle alakalıdır. İnsanların sadece fiziksel ve zihinsel çevrelerini oluşturmak ve pekiştirmek için problem çözmeye istek duymalarını sağlamaz ayrıca onları düşündürmeyi de ister. Eğer insanlara düşünmeleri, problemler oluşturmaları ve çözmeleri için fırsat verilirse bütün insanların öğrenebileceğini iddia eder. Öğrenme eğiliminin kalıtsal olduğunu varsayarken, bireysel farklılıklar (sosyal, duygusal, psikolojik ve zihinsel gibi) uygun deneyimlerle değişmeyen temel kalıtsal kapasiteleri yansıtır, görüşünü reddeder.

Bilme Öncülü, bilme mekanizmasıyla ilgilidir. Şöyle ki: bilme mekanizması bir uyumsama ve özümseme sürecidir. Uyumsamada yaşanan bir başarısızlık, karşılık olarak, denge kazanmaya çalışan zihinsel sisteme yol açan bir dengesizlik meydana getirir. Bu, çevre ile zihin yapısı arasında bir dengeye ulaşmak içindir. Bu öncül problem çözmenin bir öğrenme yolu olduğunu söyleyen bazı araştırmacıların düşüncelerinin temelidir (Brownell, 1946; Davis, 1992; Hiebert, 1997; Thompson, 1985).

Durum Bağlılığı Öncülü, öğrenmenin kavramsallaşmasıyla alakalıdır. Bu öncül öğrenmenin tamamen duruma bağlı olduğunu iddia etmez. Bilginin, başka bir ortama transfer edilemeyen durum içinde elde edildiğini savunur (Lave, 1988). Durum içinde en iyi şekilde öğrenilen belirli bir alana ait düşünme yollarını kapsamaktadır. Örneğin somutlaştırmayı ele alalım. Somutlaştırma kişinin doğrudan sonuca ulaşabildiği zihinsel sistemde işlemleri tekrar kavramsallaştırdığı bir düşünme yoludur (Greeno, 1980). Somutlaştırma bir düşünme yoludur: çünkü soyutlama zihinsel eyleminin bilişsel bir özelliğidir. Piaget'nin dönemlerinde somutlaştırma yansıtıcı soyutlamanın bir çeşitidir (Dubinsky, 1991). Bebeklikten başlayıp yaşamları boyunca, insanlar kendi fiziksel ve sosyal çevreleriyle karşılıklı etkileşim sonucu kavramsal öğeler oluştururlar. İnsanlar zihinsel inşalarını sağlayan deneyimlerini tekrarlamaya ihtiyaç duymaksızın doku, renk, dostluk ve adalet gibi algısal ve sosyal kavramlar hakkında doğrudan sonuca varırlar.

Bireyler günlük yaşamlarında somutlaştırmadaki kolaylığa başvurmalarına rağmen bu diğer alanlarda özellikle matematikte başarılı uygulama olduğunu garantilemez. Matematikte kavramsal öğelerde işlemleri somutlaştırmak zordur. Örneğin, sayı sayma işlemini tekrar kavramsallaştırma küçük sınıf öğrencileri için sıradan bir şey değildir (Steffe, von Glasersfeld, Richards ve Cobb, 1983) ya da tek bir hesaplama içindeki çarpımsal ilişkiden kesir kavramını yeniden kavramsallaştırma ortaokul öğrencileri için zordur (Behr, Wachsmuth ve Post, 1984) ve vektör uzayı ya da grup elemanı gibi bir konuda bir işlem dönüşümünden fonksiyon kavramını tekrar kavramsallaştırma yüksekokul öğrencileri için kolay değildir (Dubinsky, 1991; sfard, 1991). Her matematiksel içerik alanı eşsiz bir düşünme ve anlama yolları kümesi tarafından tanımlandığı için Durum Bağlılığı, matematiğin alt disiplinlerinde de bulunmaktadır. Örneğin, düşünme yolları kümesi kombinatorik kavramını toplojiden farklı olarak tanımlar. Hatta aynı alan içinde düşünme yollarının öklid geometrisi de denilen düzlemsel geometri tanımı ile örneğin uzamsal (üç boyutlu) geometri tanımı aynı değildir.

Öğretme Öncülü, matematiksel bilginin öğrenimini kolaylaştırmada uzman yardımının gerekliliğini belirtmektedir. Bu öncüle, DNR gibi yapılandırmacı bakış açısı odaklı bir çerçevede ihtiyaç duyulmaktadır. Çünkü bireyler kendi öğrenmelerinden sorumludur ya da öğrenme doğal bir şekilde ve çok fazla müdahale olmadan devam edebilir (Lerman, 2008) gibi bir görüşten çıkarılan hatalı bir sonuç ile uzmanın rehberlik rolünü en aza indirilebilir. Öğretme öncülü bu iddiayı reddeder ve Vygotsky'den sonra bilimsel bilgi elde etmede uzman yardımının öğrenmeyi kolaylaştırmak için zorunlu olduğunu iddia eder. Öğretme öncülü doğal olarak, öğrenmeyi meydana getiren etkili öğretim uygulamalarının doğasını ve bir öğretmenin sahip olması gereken gerekli bilginin ne olduğu sorusunu da beraberinde getirir (Harel, 2008b).

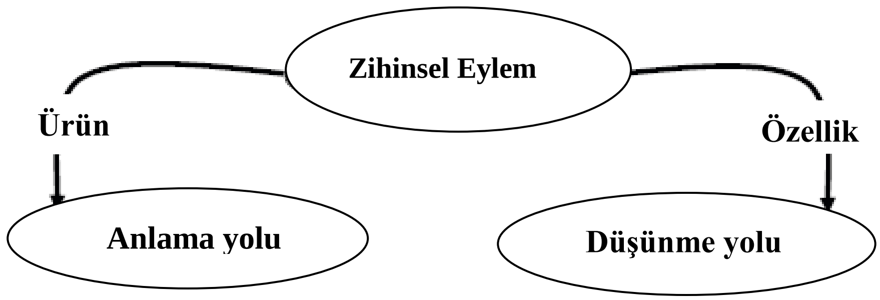
### 2.2.2 DNR'nin Temel İlkeleri

Metodolojik olarak, "zihinsel eylem, anlama yolları ve düşünme yolları" üçlüsü kavramsal analizler için işlevsel bir yapı sunmaktadır. Bu yapı üç temel faaliyeti içermektedir;

1. İlgi çeken zihinsel eylemler belirleme (örn. yorumlama, deney, genelleme vb)
2. Her bir zihinsel eylemin ifade ya da davranış şeklindeki ürünlerinin belirlenmesi; bu yapılan eylemle ilgili anlama yollarıdır.
3. Her bir eylemin ürünleri ile ortak bilişsel özelikleri arasında sonuca varmak; bu yapılan eylemle ilgili düşünme yollarıdır

Öğretme ve öğrenme sürecini anlayabilmek için bu süreci yorumlama, birleştirme, modelleme, genelleme, sembolleştirme gibi zihinsel eylemlerden ayrı düşünmemek gerekir. Bir kişinin ifadeleri ve davranışları kişi tarafından gerçekleştirilen zihinsel bir eylemin bilişsel ürünlerini gösterebilir. Böyle bir ürün kişinin zihinsel eylemle ilişkili anlama yoludur. Kişinin anlama yollarının tekrarlanan gözlemleri onların ortak bir bilişsel özelliği paylaştığını ortaya koyabilir. Böyle bir özellik zihinsel eylemle ilişkili bir düşünme yolu olarak adlandırılmaktadır (Harel, 2008a).

Şekil 2.1 zihinsel eylem, anlama yolu ve düşünme yolu üçlüsünün yapısını göstermektedir. Bu üçlü DNR nin düzenleyici yapılarının bir bölümüdür.




**Şekil 2.1. Zihinsel Eylem Anlama ve Düşünme Yolu Üçlüsünün Genellemesi**

Örneğin, kişinin y = -3x + 5 ifadesini anlama yolları:

(1) x ve y miktarlarında bir denklem

(2) x girdisi y = -3x + 5 çıktısına karşılık gelen, sayı değerli bir fonksiyon

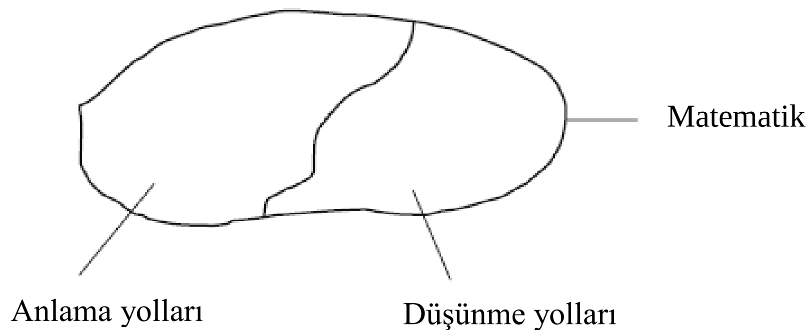
(3) (x,y) girdisi için gerçek değerli bir fonksiyon

(4) Sağında ve solunda değişiklikler yapılan bir şey

İlk üç anlama yolu, matematikte sembollerin temsil ettiği miktarları ve nicel ilişkileri kapsayan olgun bir düşünme yolunu belirtmektedir. Diğer taraftan, bir üniversite birinci sınıf öğrencisi tarafından sunulan dördüncü anlama yolu, matematiksel sembollerin tutarlı miktar ya da ilişkisel anlamdan bağımsız olduğu bir düşünme yolunu göstermektedir (Harel, 2008a).

Anlama yolları ve düşünme yolları matematiği oluşturan unsurlardır. Matematik disiplininin uygulayıcıları olan matematikçiler belirli özelliklerle (düşünme yolları) zihinsel eylemlerde bulunarak matematiği uygularlar ve belirli yapılar (anlama yolları) üretirler. Buna göre, DNR de, matematik, şu iki kümesinden oluşan bir disiplin olarak tanımlanır;

Birinci küme, belirli aksiyomlar, teoremler, tanımlar, ispatlar, problemler ve çözümlerden oluşan bir yapıdır. Bu alt küme tarih boyunca matematikte kurumsallaşmış tüm anlama yollarından meydana gelmektedir. İkinci küme, ürünleri birinci kümeyi oluşturan zihinsel eylemlerin özellikleri olan tüm düşünme yollarından oluşmaktadır. Herhangi bir zihinsel eylem için, kişinin ürettiği anlama yolları, onun oluşturduğu düşünme yollarının niteliğini etkiler. Bu ifadenin tersi de eşit derecede önemlidir: yani, herhangi bir zihinsel eylem için, kişinin oluşturduğu düşünme yolları, ürettiği anlama yollarının niteliğini etkiler. Matematik bu iki kümenin birleşimidir (Harel, 2008a).




**Şekil 2.2. İki Kümenin Birleşimi Olarak Matematiğin Gösterimi**

DNR'nin üç temel eğitim ilkesini: ikilik, gereklilik, tekrarlı akıl yürütme kavramları oluşturmaktadır. İkilik ilkesi anlama ve düşünme yoları arasındaki gelişimsel bağlılıkla, gereksinim ilkesi öğrencilerin ihtiyaçlarıyla ve tekrarlı akıl yürütme ilkesi bilginin akılda tutulması, düzenlenmesi ve içselleştirilmesiyle ilgilenmektedir. Bu üç ilke birbirine güçlü bir şekilde bağlıdır. Tek bir ilke, diğerlerinden bağımsız olarak ayrı düşünüldüğünde, bu ilkenin değeri diğer iki ilkeyle beraber oluşturacağı değerden daha düşük olacaktır (Harel, 2008b).

### 2.2.2.1 İkilik İlkesi

Öğrenciler anlama yolları sayesinde düşünme yolları geliştirmekte ve diğer taraftan, ürettikleri anlama yolları onlara ait düşünme yollarından etkilenmektedir (Harel, 2008b).

İkilik ilkesi, Bağlılık Öncülünden kapsamaktadır. Bir insanın düşünme yolları onun dünya görüşünün bir parçası ve anlama yolları onun eylemlerinin dışavurumudur. Dolayısıyla, ikilik ilkesi:

*Öğrencilerin düşünme yolları onların matematiksel kavramları anlama yollarını etkiler. Tersine öğrencilerin matematiksel içeriği nasıl algıladıkları onların düşünme yollarını etkiler* görüşünü savunmaktadır (Harel, 2001).

Bu ilkeye göre öğrencilerin mevcut düşünme yolları matematiksel problemlerin çözümünde, varsayımların ispatlanmasında ve matematiksel fikirlerin iletiminde gerçekleşen uygulamalarda büyük ölçüde oluşmaktadır. Bununla birlikte öğrencilerin düşünme yolları matematiksel davranışlarda ortaya konulan anlama yollarının oluşumunu da sağlamaktadır.

Ayrıca öğrencilerin düşünme yollarının gelecekteki gelişimi ciddi derecede şu anda meşgul oldukları belirli matematiksel etkinliklerin doğasına bağlıdır. Özellikle, öğrencilerin

(a) Matematiksel iletişimde

(b) Matematiksel problem çözmede

(c) Matematiksel varsayımları doğrulama ve ispatlamada kullanacağı sadece uygun anlama yollarıyla mevcut düşünme yollarını değiştirebilmesi, düzeltebilmesi ve geliştirebilmesi mümkün olacaktır.

Düşünme yolları doğrudan öğretilemeyen bir kavramdır. Örneğin, öğrencilere geometrideki ispatların ölçüme dayanmadığını ya da cebirin gelecekteki kariyerleri için önemli olduğunu anlatmanın kazancı ya çok az ya da yoktur. Düşünme yolları sadece anlamlı problem çözme aktivitelerinden öğrencilerin kendileri tarafından çıkartılabilir ya da soyutlanabilir.

İkilik ilkesinin dolaysız içeriğine göre, öğretmenlerin;

(a) düşünme yolları açısından öğretim hedeflerini oluşturması ve

(b) potansiyel olarak istenilen düşünme yollarını oluşturacak anlama yollarını inşa edebilen öğrenciler yetiştirebilmek için uygun öğretim etkinliklerini hazırlaması ve kullanması esastır (Harel, 2001).

#### 2.2.2.1.1 Anlama yolları

DNR tabanlı eğitim için temel olan düşünme yolları ve anlama yolları arasındaki ayrımdır (Harel, 1998). Harel'e (2001) göre anlama yolu ifadesi, matematik yaparkenki belirli matematiksel eylemleri ifade eder. Bu tür eylemler şu üç kategoriden biri olabilir:

1. Kişinin bir kavrama veya kavramlar, ifade ya da problem arasındaki ilişkiye verdiği belirli anlam.

2. Kişinin bir problem için bulduğu belirli çözüm.

3. Kişinin bir matematiksel varsayımı kanıtlamak ya da çürütmek için sunduğu belirli kanıt.

***Anlama Yolları Kategori 1: Belirli(Paticular) Anlam***

Kesir kavramını ele alalım. Bir öğrenci bu kavramı, birim kesir açısından (a / b, a 1/ b adet), parça bütün yönünden (a / b a, b nin bir birimidir) ya da parçayı bölme ile ilgili olarak (a / b a birimin b bölüme eşit olarak bölünmesiyle oluşan miktardır) yorumlayabilir. Bütün bunlar kesirleri anlama yolları olacaktır.

Benzer şekilde, skaler denklem kavramını örneğin, koşul, reel değerli bir fonksiyon ya da önermeli fonksiyon olarak yorumlayabilir. Kişi, y = $\sqrt{6x-5}$ şeklindeki bir dizi sembolü, x ve y değişkenlerinin bir koşulu olarak ( y miktarı 6x-5 miktarının kare köküne eşittir) ya da gerçek değerli fonksiyon olarak y(x) = $\sqrt{6x-5}$ (bir x girdisi için $\sqrt{6x-5}$ çıktısı karşılık gelmektedir) ya da tüm (x,y) sıralı ikililer kümesi veya reel sayılar üzerinde önermeli fonksiyon olarak anlayabilir:

$$E((x,y)) = \begin{cases} \text{Doğru ise} & y = \sqrt{6x-5} \\ \text{Yanlış ise} & y \neq \sqrt{6x-5} \end{cases}$$

Bazı öğrencilerin bir kavramı nasıl anladığı önemli derecede farklılık gösterebilmektedir. Örneğin, Behr, Erlwanger ve Nichols (1976) yeni başlayan cebir öğrencilerinin eşittir işaretini “bir şeyler yap sinyali” olarak algıladığını, eşitliğin bir tarafı yapılacak işlem için diğer tarafı sonucu için ayrılmıştır şeklinde düşündüklerini ortaya koymuştur. Bu anlama yoluyla öğrenciler 4 + 3 = 7 gibi bir ifadeyi kabul etmekteler ancak 4 + 3 = 6 + 1 or 3 = 3 gibi bir ifadeyi kabul etmekte isteksiz davranmaktadırlar. ilk denklemde eşittir işareti 4 + 3 işlemini sonucu 7 den ayırırken ikinci ve üçüncü denklemlerde eşittir işaretinin her iki tarafındaki ifadeler ( 4 + 3 ve 6 +1 ) işlemdir ya da her ikisi de (3) öğedir (Harel, 2001).

***Anlama Yolları Kategori 2: Belirli(Paticular) Çözüm***

Harel (2001) öğrencilerin anlama yollarına ilişkin örnekler elde etmek amacıyla aşağıda yer alan bir dokuzuncu sınıf problemini öğrencilere yöneltmiştir.

Bir havuza iki musluk bağlanır. Bir musluk havuzu 20 saatte diğeri 30 saatte doldurabilmektedir. İki musluk beraber bu havuzu ne kadar sürede doldurur?

Sınıftaki öğrenciler tarafından bulunan farklı çözümler arasından, her biri farklı bir anlama yolunu gösteren 4 çözüme yer verilmiştir.

***Çözüm 1:*** Havuzu 5 eşit bölüme ayıralım. İlk musluk birinci bölümü 4 saatte ve ikinci musluk 6 saatte dolduracaktır. Dolayısıyla 12 saatte ilk musluk havuzun 3/5 ünü ve ikinci musluk geriye kalan 2/5 sini dolduracaktır.

Bu çözümü bulan öğrenci aşağıdaki şemaya benzer bir şemayla çözümünü desteklemiştir.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 6 | 4 | 4 | 4 |

***Çözüm 2:*** İki musluk havuzu 50 saatte doldurur.

***Çözüm 3:*** İki musluk havuzu 10 saatte doldurur.

***Çözüm 4:*** Havuz x saatte dolsun. 1 saatte, ilk musluk havuzun $\frac{1}{20}$ sini ikinci musluk $\frac{1}{30}$ unu doldurur. 20 saatte ilk musluk havuzun $\frac{x}{20}$ sini ikinci musluk $\frac{x}{30}$ unu doldurur.

Dolayısıyla, $\frac{x}{20} + \frac{x}{30} = 1$ , $x=12$ olarak bulunur.

Harel (2008b) öğretmenlerin bilgi temelinin gelişimi için yaptığı DNR tabanlı eğitim uygulamasında öncelikle öğretmenlerden bu problemin çözümünü yapmalarını ve çözüm yaklaşımlarını tartışmalarını, daha sonra dokuzuncu sınıftan temin edilen bu dört çözüm için olası kavramsal temelleri analiz etmelerini istemiştir. Öğretmenler bu çözümleri tartıştıktan sonra öğrencilerin "anahtar bir kelime arama" düşüncelerinin çözümlerini etkilediği ve problemde geçen "beraber" kelimesinden dolayı çözüm 2 deki gibi yanıt verdikleri sonucuna varmıştır. Ayrıca çözüm 3 yanlış olmasına rağmen, çözüme yönelik olarak, bunu sunan öğrencilerin, havuzun dolması için iki musluk beraber doldurduğunda geçen sürenin, musluk tek başına doldurduğunda geçen süreden daha az olduğu konusundaki farkındalığının bir göstergesi olabileceği yorumunu yapmışlardır. Öğretmenler çözüm 1e ise daha çok ilgi göstermişlerdir. Çözüm 1 diyagram çizmeyi, tahmin ve kontrol etmeyi, verilen nitelikler arasında bir ilişki aramayı içermektedir. Öğretmenler bu çözümde düşünme yollarının bitişikliğinin mümkün olmasına odaklanmışlardır.

Bunun gibi aktiviteler yoluyla, öğretmenler, bir problemi çözmek için bir öğrencinin seçtiği yaklaşımın problem cümlesini nasıl resmettiğine ve yorumladığına bağlı olduğunu keşfetmişlerdir. “bir problemin birden fazla çözümü olabilir” ve “bir problemi farklı yollardan çözmek faydalı olabilir” şeklindeki düşünme yolları bizim eğitimsel müdahalelerimizle birçok kavrama genişletilebilir. Bu düşünme yolları, matematiğin oluşumunda ve öğreniminde temel olmasına rağmen, öğrencilerin düşünme dağarcığında ve öğretmenlerde çoğu zaman bulunmamaktadır. Bu nedenle DNR tabanlı öğretim, bu düşünme yollarını geliştirmek için, kavramların birden fazla anlama yolunu destekleyen aktivitelerde öğretmenlerle çalışılması gerektiğini savunmaktadır.

***Anlama Yolları Kategori 3: Belirli(Paticular) İspat***

Bu katagori aşağıdaki probleme geleceğin orta öğretim öğretmenleri tarafından verilen yanıtları içermekte, öğrencilerin anlama yollarına yönelik örnekleri ortaya koymaktadır:

Her n pozitif tamsayısı için $\log(a_1 .\, a_2 . \dots a_n) = \log a_1 + \log a_2 + \dots + \log a_n$ olduğunu ispatlayınız.

***İspat 1:***

$$\log(4.3.7) = \log 84 = 1.924$$

$$\log 4 + \log 3 + \log 7 = 1.924$$

$$\log 4.3.6 = \log 72 = 1.857$$

$$\log 4 + \log 3 + \log 6 = 1.857$$

Bundan dolayı, $\log(a_1 .\, a_2 . \dots a_n) = \log a_1 + \log a_2 + \dots + \log a_n$

***İspat 2:***

$\log(a_1 a_2) = \log a_1 + \log a_2$ tanımından

$\log a_1 a_2 a_3 = \log a_1 + \log a_2 a_3$ x= $a_2 a_3$ dir.

Dolayısıyla

$\log(a_1 .\, a_2 . \dots a_n) = \log a_1 + \log a_2 + \log a_3$

Buradan gösterebiliriz ki herhangi $\log(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n)$ tekrar tekrar $\log a_1 + \log a_2 +$ …..+ $\log a_n$ ya ayrılabilir.

Bizim kullanımımızda, anlama yolu ifadesi belirli bir matematiksel durumda kişinin başvurduğu muhakemeyi bildirmektedir. Öte yandan düşüme yolu ifadesi kişinin anlama yollarını etkileyen şeyleri ve dolayısıyla düşünmenin belirli bir duruma değil çok sayıda duruma özel olduğunu belirtmektedir (Harel, 2001).

#### 2.2.2.1.2 Düşünme Yolları

Düşünme yolları, öğrencilerin bizim onlara öğretmeyi hedeflediğimiz şeyleri süzmede ve yorumlamada öğrencilerin araçlarıdır. Öğrencilerin düşünme yolları onların matematiksel kavramları anlama yollarını etkilemekle beraber öğrencilerin matematiksel içeriği nasıl algıladıkları da düşünme yollarının kalitesini etkilemektedir. Düşünme yollarından vazgeçmek zor olmasına rağmen değiştirilemez değildir (Harel, 1998). Bir kişinin düşünme yolu bilginin birbiriyle ilişkili üç kategorisini içerir: matematik ile ilgili inançlar, problem çözme yaklaşımları ve ispat şemaları.

***Düşünme Yolları Kategori 1: Matematik ile İlgili İnançlar***

Matematik hakkındaki inançlar, bireyin matematikle ilgili görüşleridir. Özellikle (1) matematiğin ne olup ne olmadığı (2) nasıl oluşturulduğu ve (3) zihinsel ya da pratik yararları konusunda yaptığı yorumlardır. Matematikle ilgili inanç örnekleri sırasıyla şunlardır:

(1) “Formal matematiğin gerçek düşünce ya da problem çözmeyle ilgisi ya çok azdır ya da hiç yoktur” (Schoenfeld, 1985), “Cebirsel semboller içermeyen bir ispat ispat değildir” (Harel &Sowder, 1998)

(2) “Bir problemin çözümü 5 dakikadan uzun sürmemelidir” (Schoenfeld, 1985)

(3) “Bir matematik kavramının birden fazla yorumunun olması avatajlıdır” (Harel, 1998) gibi inançlar öğrenciler arasında yaygındır (Harel, 2008a).

Bu düşünme yollarının gelişimi, öğrenciler ileri matematik dersleri almaya başlayana kadar beklememeli, bunun yerine, öğrenciler erken yaşta kazanıma başlamalıdır(Harel, 2001).

***Düşünme Yolları Kategori 2: Problem Çözme Yaklaşımları***

Harel'e (2008a) göre Problem çözme yaklaşımları, problem çözme eylemiyle ilgili düşünme yollarıdır. Kişi bir probleme doğru ya da yanlış gerçek bir çözüm getirdiğinde bu bir anlama yoludur çünkü bu kişinin problem çözme eyleminin bilişsel bir ürünüdür. Problem çözme yaklaşımı ise bu eylemin bilişsel bir özelliğidir ve bu yüzden de bir düşünme yoludur. Örneğin, "daha basit bir problem aramak", "bir problemi çözmeye çalışırken alternatif olasılıkları göz önünde bulundurmak" ve "problem ifadesinde sadece anahtar kelimeler aramak" gibi ifadeler problem çözme yaklaşımlarını nitelemektedir, bu nedenle düşünme yolları örnekleridirler. Sezgi de bir problem çözme yaklaşımıdır dolayısıyla sezgisel yöntemler de düşünme yollarını oluşturmaktadır. Literatürde sezgisel terimi başarılı problem çözme yaklaşımları için kullanılır: "Sezgisel stratejiler başarılı problem çözme için pratik kurallardır, bireye problemi daha iyi anlaması için yardım eden ya da çözüme doğru ilerlemelerini sağlayan genel önerilerdir" (Schoenfeld, 1985, s. 23).

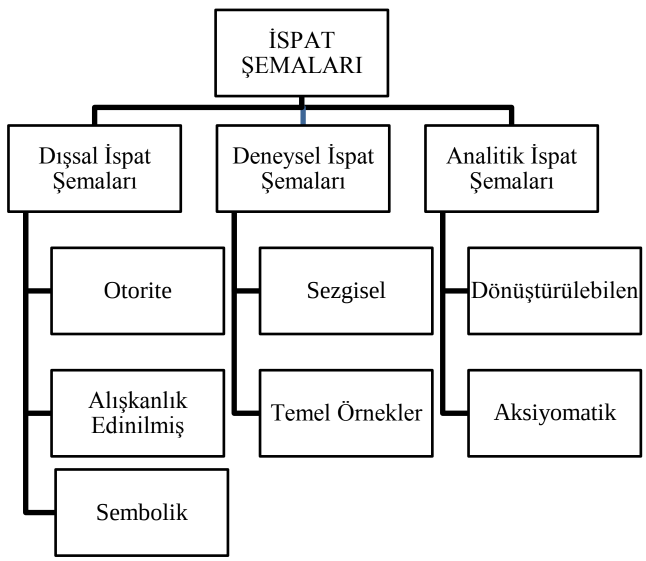
***Düşünme Yolları Kategori 3: İspat Şemaları***

Harel ve Sowder (2007), ispatlamayı bir iddianın doğruluğu hakkındaki şüpheleri ortadan kaldırmaya çalışan bir kişinin zihinsel eylemi olarak tanımlamıştır. İspatlama, tespit etme ve ikna etme eylemlerinden birisiyle ya da bunların kombinasyonlarıyla oluşmaktadır. İspat, ispatlama eyleminin bilişsel bir ürünüdür ve kişinin ispatları arasındaki ortak bir özellik gibi ispat şeması bu eylemin bilişsel bir özelliğidir. Bunun yanı sıra ispat şemaları öğrencilerin kullandığı düşünme yollarının bir sınıflamasıdır, kendisi için araştırma yaparken ve kendisini ikna etmeye çalışırken oluşmaktadır (Harel ve Sowder, 1998; Harel, 2001)

#### 2.2.2.1.2.1 İspat Şemaları

İspat şemaları bir insanın neyle ikna olduğunu ve diğerlerini ikna etmek için neyi tercih ettiğini göstermektedir ve öğrencilerin matematiksel durumlardaki düşünme tepkilerini görmek açısından önemlidir (Harel ve Sowder, 1998). İspat şemaları genellemeleri tahmin ettirmekte, önseziyi zenginleştirmekte, yeni olguları keşfetmeyi sağlamakta ve zihni yaşama geçirmektedir (Reid,2002). Bunun yanı sıra ispat şemaları ile öğrencilerin anlama düzeylerini ve öğrencilerin ikna oldukları ispat tekniklerini belirlemek mümkün olmaktadır (Knapp, 2006 akt. İskenderoğlu, 2010).

İspat şeması kategorilerinden her biri öğrencilerin matematiksel gelişimindeki bilişsel bir düzeyi, zihinsel bir yeteneği yansıtmaktadır ve hepsi öğrencilerin ispat süreçlerinde sergiledikleri davranışlara göre oluşturulmuştur (Harel ve Sowder, 1998). İspat şemalarındaki bu sınıflama, öğrencilerin ispat kavramının doğasını keşfetmekte ve öğretmenlerin eylemlerinin, öğrencilerin kavramlarına etkisini analiz etmekte kullanılmaktadır (Martin ve ark., 2005). Öğrencilerin çalışması ve tarihsel gelişim üzerinde duran Sowder ve Harel (1998) ispat şemalarının taksonomisini şu şekilde sunmuştur.




**Şekil 2.3. İspat Şemaları ve Alt Şemaları (Sowder ve Harel, 1998)**

Sowder ve Harel (1998) öğrencilerin kullandıkları şemaları dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç ana şemaya ve bazı alt şemalara ayırmıştır. İspat şemaları öğrencilerin matematiksel gelişimlerindeki zihinsel aşamaları sunmaktadır ve bir hiyerarşi göstermemektedir. Bu nedenle de bir birey aynı zamanda farklı içeriklerde farklı ispat şemaları kullanabilmektedir (Harel ve Sowder, 1998; Nardi ve Iannone, 2008).

#### 2.2.2.1.2.1.1 Dışşal İspat Şemaları

Öğrenciler problemleri çözmek için sadece formülleri kulladığında yaratıcılık ve keşiften çok ezberciliği öğrenmektedirler ve tek bilgi kaynağı öğretmen olduğunda matematikte yaratıcılık konusunda kendi yeteneklerine güven duymamaları muhtemeldir. Bu öğrenme alışkanlıklarının ispat şemalarından dışşal ispat şemasının oluşmadında etkili olduğu düşünülmektedir (Harel, 1998). Öğrenciler öğrendikleri bilgilerin doğruluğunu kitaplara veya aile, öğretmen gibi başka insanlara dayandırmaktadır (Flores, 2002; Flores, 2006). Yani dışşal ispat şemalarında öğrenciler matematiksel olarak doğruluğu göstermede dış otoriteye veya biçimlendirilmiş nedenlere güvenmektedir (Martin ve ark., 2005). Dışşal ispat şeması otorite, alışkanlık edinilmiş ve sembolik olmak üzere üç alt şemaya ayrılmaktadır.

(a) Otorite İspat Şeması: “Neden bu kadar öğrenci bir toeremin ya da formülün niçin doğru olduğunu sogulama konusunda meraktan yoksundur?” sorusunun cevabı günümüzdeki matematik müferadatının doğrunun nedenlerinden çok doğruya vurgu yapmasıdır. Bu durum çocukların aritmetik problemleri çözmek için matematiksel talimatları kullanmakla meşgul olduğu başlangıç seviyesindeki matematik ile başlar ve ilişkisel anlamadan çok işlemsel anlamanın yer aldığı orta ve üst seviyedeki matematikle devam etmektedir. Dolayısıyla öğrencilerde matematiğin doğrulama gerektirmeyen bir konu olduğu düşüncesi oluşmaktadır (Harel, 1995). Bunun yanı sıra Öğrenciler yaptıkları matematiğin doğru olması gerektiğini anlamalarına rağmen ispatın sorumluluğunu almamakta ve ikna edici ana kaynak olarak kitaptaki ifadeyi ya da öğretmenin söylediğini kabul etmektedir (Harel ve Sowder, 1998). Yani kişi öğretmenin, kitabın ya da bir başka otoritenin söyledikleri doğrultusunda ikna olmaktadır (Sarı ve ark., 2007). Bu şemadaki öğrencilerde ezberleme ve formülleri kullanma eğilimi bulunmakta ve buldukları sonucun doğruluğunu anlamını bilmeden kurallara dayandırmaktadırlar (Harel, 2001). Ayrıca öğrencilerde problemi kendileri çözmek için ciddi bir çaba göstermeden yardım isteme davranışı da oldukça yaygındır. Böyle durumlarda problemi kısaca tartıştıktan sonra öğrenciler kendileri çözebileceklerini fark edecek olmalarına rağmen çözümlerine ulaşmak için bir otoriterin doğrulamasına ihtiyaç duymaktadırlar.

Otorite ispat şeması hem yaygın olarak kullanılan hem de terk edilmesi zor bir şemadır. Çünkü öğrencilerin en çok sorduğu soru “niçin” yerine “nasıl” sorusudur. Bu süreçte öğrenciler öğretmeni cevap için tek kaynak olarak görmekte ve gereken bilgiyi öğrencilere söylemenin öğretmenin sorumluluğu olduğuna inanmaktadırlar. Bu şemada öğrenciler sorumluluk almaktan kaçındığı için kendi zihinsel yapılarını oluşturmakta zorlanmaktadırlar (Harel ve Sowder, 1998).

(b) Alışkanlık Edinilmiş İspat Şeması: “Bir tartışmada öğrencilerin ispatı, tartışmanın doğruluğundan çok ispatın alışıldık kurallarından mı (matematiksel bir ispatın biçimsel görünüşü) etkilenmektedir? sorusunu araştıran Harel ve Martin (1989) ispatın alışılmış kurallarının yani matematiksel ispat formundaki görüntüsünün, tartışmanın doğruluğundan daha çok öğrencilerin ispatını etkilediği sonucuna ulaşmıştır. Bu şemada öğrenciler tartışmanın doğruluğunu akıl yürüterek göstermekten daha çok doğruları göstermeye önem vermekte ve karşısındakini ikna etmek için önceden öğrendiği delilleri, sebepleri öne sürmektedir. Örneğin, üniversite öğrencileri geleneksel öğretim programında lisede iki sütunlu ispat formatını gördükleri için ispat olarak sadece bu formatı kabul etmektedirler (Sowder ve Harel, 1998 akt. İskenderoğlu, 2010). Burada ikna edicilik ispatın içeriğine değil biçimine dayanmaktadır (Martin ve Harel, 1989; Stylianou, 2006; Sarı ve ark., 2007).

(c) Sembolik İspat Şeması: sembolleri fonksiyonel ya da nicel referanslarına bakmaksızın kendine özgü bir alan olarak düşünme sembolik düşünme olarak adlandırılmaktadır. Sembolik düşünme yüzeysel ya da matematiksel olarak anlamsız da olabilir öte yandan matematik için çok güçlü bir teknik de olabilir. Sembolik akıl yürütme anlamını kavramadan, problem durumuna yönelik anlışır imgeler olmadan yapılan problem çözme yaklaşımıdır. Sembolik ispat şeması sembolik akıl yürütme yapılmış matematiksel ispatlara dayanmaktadır. Yapılan bir çalışmada öğrencilerin çoğunun problemi bir kez okuduğu ve problemi anlamaya çok az ya da hiç zaman ayırmadan, gelişi güzel bir şekilde problemdeki sembolik ifadeleri çözmeye başladığı yani terimlerden bazılarının anlamını bilmeksizin çözümler yaptığı gözlemlenmiştir (Harel ve Sowder, 1998). Sembolik ispat şemalarında öğrenciler ispatlama sürecinde anlamsız sembolleri kullanmaktadırlar. Örneğin, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ veya $2^5.2^3 = 4^{15}$ veya sin(x+y) =sinx +siny veya $\sqrt{a^2+b^2=a+b}$ gibi (Harel ve Sowder, 1998 akt. İskenderoğlu, 2010). Oysaki sembollerin böyle yanlış kullanımı sonucunda öğrenciler yanlış genellemeler yapabilmektedir. Fakat sembolik akıl yürütme öğrencilerin okul hayatları boyunca ilköğretimden liseye kadar kazandıkları zihinsel bir alışkanlıktır ve vazgeçilmesi oldukça zordur (Harel ve Sowder, 1998).

#### 2.2.2.1.2.1.2 Deneysel İspat Şemaları

Deneysel ispat şeması bir varsayımın doğruluğu ile ilgili şüpheleri ortadan kaldırmakla birlikte bu şemaya sahip olan bir kişi, miktarların doğrudan ölçümleriyle, cebir ifadelerinde sayıları değiştirerek ve benzeri örneklerden elde ettiği ispatlara (Temel Örnekler İspat Şeması) güvenerek ya da sürekli olarak görme, dokunma algısı gibi fizyolojik duyularından elde ettiği ispatlara (Sezgisel İspat Şeması) güvenerek ispatlama yapar. Yani, deneysel ispat şemaları öğrencilerin doğrulamada yararlandığı özel örnekleri ve sezgisel desenleri kapsamaktadır (Martin ve ark., 2005). Deneysel ispat şemasına tüm kademe öğrencileri arasında çok rastlanmaktadır ve kalıcı bir şemadır (Chazan, 1993;Goetting, 1995; Harel ve Sowder, 2008a). Bu sonuçlar doğrultusunda bu şemanın baskınlığının sebebi nedir? sorusu ortaya çıkmaktadır.

Öğrenciler okula boş bir levha gibi, önceki bildiklerinden bağımsız olarak bilgi almaya hazır bir şekilde gelmezler (Piaget, 1952, 1969, 1973, 1978). Daha doğrusu, şuanda bildikleri ileride bileceklerini etkilemektedir. Bu durum ispatlama eylemi de dahil herhangi bir zihinsel eylemle ilişkili olan bütün anlama ve düşünme yolları için doğrudur. Günlük hayatta ve bilimde, insanlara uygun doğrulama yolu büyük ölçüde deneysel ispatlarla sınırlıdır. Erken çocukluktan beri, belirli bir olayı açıklamaya ya da doğruluğunu göstermeye çalıştığımızda, yargımızın geçmişimizdeki benzer ve ilişkili olaylara dayanması muhtemeldir. (Anderson, 1980). Geçmişimizde bunun gibi olayların sayısı sınırlıdır ve yargılarımız genel anlamda deneyseldir. Erken çocuklukta başlayan deneyimlerin tekrarıyla, varsayımların değerlendirilmesi baskın olarak deneysel hale dönüşmeye başlamaktadır. Yani, bireyin kendisine doğruluğunu göstermek için ya da başkalarını ikna etmek için yaptığı ispatlar karakteristik olarak sezgisel ya da tümevarımsaldır (Harel, 2008b). Eğer erken kademe dönemleri boyunca, matematikte doğru yargısı deneysel düşünmeye dayanmaya devam ederse, ilerleyen kademelerde ve daha ileri dönemdeki seviyelerde, akıl yürütmede muhtemelen deneysel ispat şeması hakim olacaktır (Harel ve Sowder,2008). Deneysel ispat şemasının insanlar üzerindeki hakimiyet alanı kaçınılmazken, devamlı değildir. Çocukların yetişkinlerle sosyal etkileşiminde tartışma ve yargılamanın, bu etkileşimin ayrılmaz bir parçası haline geldiği ve anlamlandırmanın teşvik edildiği bir çevrede yetiştirilen çocukların böyle bir çevrede yetiştirilmeyen çocuklara göre analitik (tümdengelimsel) düşünmeye daha kolay geçmesi olasıdır.

Harel'e (2008b) göre öğrencilerin varsayımları ispatlamak ve günlük yaşam olaylarını açıklamak için oluşturduğu ispatlar onların oluşturduğu ispat şemalarının dayanıklılığını ve niteliğini (çeşitini) etkilemektedir. İspatlar, ispatlama zihinsel eylemiyle ilişkili anlama yollarıdır ve ispat şemaları, aynı eylemle ilişkili düşünme yollarıdır. Bu nedenle herhangi bir zihinsel eylem için, kişinin ürettiği anlama yolları, onun oluşturduğu düşünme yollarının niteliğini etkilemektedir. Bunun yanı sıra herhangi bir zihinsel eylem için, kişinin oluşturduğu düşünme yolları, ürettiği anlama yollarının niteliğini etkilemektedir. Deneysel ispat şemaları, öğrencilerin okula başlamalarıyla ortadan kaybolmaz ya da öğrenciler matematik dersleri aldığında çaba harcamadan unutulup gitmez. Yani öğrencilerin oluşturduğu ispatları etkilemeye devam etmektedir. Öğrencilerin matematikte, deneysel bulguların rolünü ve sınırlarını fark etmesi ve alternatif, tümdengelimsel ispat şemalarına dayalı, yapılandırmalar yapmaya başlaması büyük eğitimsel çabayı gerektirir. Matematiksel olarak yetenekli öğrenciler bile deneysel ispat şemasının etkisinden muaf değildir (Fischbein ve Kedem, 1982). Deneysel ispat şemaları sezgisel ve temel örnekler olmak üzere alt şemalardan oluşmaktadır.

(a) Sezgisel İspat Şeması: Sezgisel düşünceler sezgi ve sezgilerin koordinasyonuyla oluşan basit zihinsel görüntülere dayanmaktadır (Harel ve Sowder, 1998). Bu basit zihinsel görüntüler dönüşümden ya da dönüşümlerin sonuçlarını tahmin etmeden yoksundur, düşüncede oluşabilecek eylemlerin taklidini yapmaktadır. Buna karşın tam bir zihinsel görüntü henüz yapılmamış bir eylemin resimsel sezgisidir (Piaget ve İnhelder, 1967). Bu nedenle bireyin görsel algıları da bu şemaya dahildir (Harel, 2007). Bu ispat şemasına sahip öğrenci tümdengelimden sağlanmamış, yetersiz zihinsel görüntülere dayalı çıkarımlar yapmakta, bu çıkarımların kendisi ve diğerleri için ikna edici olduğunu düşünmektedir

(Sarı ve ark., 2007). Ayrıca öğrenciler hisleri ile bir durumun doğru olduğunu sezinlemekte fakat güçlü bir kanıt bulamamaktadır (Mejia-Ramos ve Tall, 2005).

(b) Temel Örnekler İspat Şeması: Bu ispat şeması örnekler üzerine kurulu olup öğrenciler ispatları oluştururken genellikle örneklere güvenmektedir (Harel ve Sowder, 1998). Öğrenciler de örnekleri genellikle öğrendikleri fikirleri anlamak ya da kontrol etmek için kullanmaktadır (Flores, 2002). Hanna ve de Villiers' e (2008) göre bu ispat şeması ispat yapmaya yeni başlayanlar için anlaşılır bir şemadır ve matematiksel olarak da geçerli (aksi örneklerle bir durumun kurulması veya yalanlanması) veya geçersiz (evrensel bir durumu destekleyen örnekler) olabilir (İskenderoğlu, 2010). Temel örnekler ispat şemasına sahip olan öğrenci, genel durumun doğruluğuna ikna edici delil olarak, bir veya daha çok örneği göz önünde bulundurur, argümanlar özel durumlara ve örneklere dayanmaktadır (Sarı ve ark., 2007). Bu şemada öğrenciler kendilerine ve diğerlerine inandırıcı sözler söyleyerek önceden öğrendikleri bir veya birkaç örneği kanıt olarak kullanmanın yanı sıra aksi örnekleri de kullanmaktadırlar. Oysa öğrencilerin matematiksel durumlar için gösterdikleri örnekler sayısal durumlar için doğru olurken her durum için doğru olmayabilmektedir (Harel ve Sowder, 1998; Flores, 2002 akt. İskenderoğlu, 2010).

Harel ve Sowder'e (1998) göre temel örneklere dayalı ispatlar konusunda öğrencilerin düşüncelerini (a) varsayımları olasılıklara göre değerlendirmeye psikolojik olarak doğuştan gelen eğilim, (b) otoritenin etkisi yani hem lise de hem de üniversitede matematik öğretmenlerinin tümevarımlı ispatları düzenli olarak kullanması, (c) çelişkiyle yapılan ispatı anlamada öğrencilerin yaşadığı zorluklar, (d) dışsal ve deneysel ispat şemalarından ziyade gelişmiş ispat şemalarından öğrencilerin yoksun olması gibi faktörler etkilemektedir. Bütün bu nedenler onların örneklerle matematiksel ifadeleri ispatlamayı tercih etmelerinde önemli rol oynamaktadır.

#### 2.2.2.1.2.1.3 Analitik İspat Şemaları

Analitik ispat şeması matematiksel gösterim yönteminden daha çok, ispat olarak kabul edilmeyen kavramlardan (örn. Aksiyomlar kümesi) belirli mantıksal kurallar ile yapılan çıkarımı içeren bir işlem tazıdır (Harel ve Sowder, 1998). Analitik ispat şeması mantıksal çıkarımlarla varsayımları doğrulayan bir şemadır ve bu şemada sunulan nedenler genel nedenlerden oluşmakta ayrıca akıl yürütmeyi içermektedir (Flores, 2002). Bu akıl yürütmeler ise örneklere dayanmaktan daha ziyade matematiksel ağırlıklıdır. Bu şemaya sahip öğrenciler sayma stratejileri kullanmakta, bunları geliştirmekte ve matematiksel ilişkilerden faydalanmaktadırlar (Flores, 2002; Flores, 2006). Sowder ve Harel'e (1998) göre matematik öğretmenleri analitik ispat şemalarını matematikte ispatlamada son nokta olarak görmektedirler (İskenderoğlu, 2010). Analitik ispat şemaları dönüştürülebilen ve aksiyomatik olmak üzere iki alt şemadan oluşmaktadır.

(a) Dönüştürülebilen İspat Şeması: Zihinsel işlemlerin uygulanma ve işlem sonuçlarının tahmin edilme sürecini kapsamaktadır. Bir değişim olduğunda kişi bunu anlamaya çalışır ve değişimi dengelemek için işlemler uygular. Bu noktada görüntülerin dönüşümü gerçekleştiği için bu durum dönüşümsel olarak adlandırılmaktadır (Harel ve Sowder, 1998). Bu şemada öğrenciler kanıtlarında bir durumun genel kabulünü ve tahminlerinde akıl yürütmeyi kullanmaktadırlar. Öğrenciler akıl yürütmenin yardımı ile özelden genelleme yoluna gitmektedirler (Sowder ve Harel, 1998 akt. İskenderoğlu, 2010). Dönüşümler matematiksel içeriklere, öğrencilerin gereksinimlerine ve savunmanın türüne göre sınırlanabileceğinden bu şema sınırlayıcı bir ispat şeması gibi görünmektedir (Martin ve ark., 2005 akt. İskenderoğlu, 2010). Bu ispatşemasında öğrenci kendini ve başkalarını çıkarımsal bir süreçle ikna eder. Bu süreçte öğrenci genellenebilir durumları göz önünde bulundurur; amaca yönelik zihinsel operasyonları uygular; tanımlar, teoremler ve şekiller arasında geçişler yapar (Sarı ve ark., 2007). Genelleme, işlemsel düşünme ve mantıksal çıkarım olmak üzere üç özelliği vardır (Harel ve Sowder, 2007).

Genelleme, amacın, izole edilen durumlar için değil, tüm argümanlar için ispat etmek olduğu ve hiçbir istisnanın kabul edilmediği bir anlayıştır.

İşlemsel düşünme, bir birey hedefler ve alt hedefler oluşturduğunda ve ispatlama sürecinde sonuçları tahmin etme girişiminde bulunduğunda kendini göstermektedir.

Son olarak, bir birey matematikte ispatlamanın en sonunda mantıksal çıkarım kurallarına dayanması gerektiğini anladığında bu özelliği kullanmaktadır (Harel, 2008a).

(b) Aksiyomatik İspat Şeması: Bu ispat şeması dönüştürülebilen ispat şemasının bütün özelliklerine sahiptir ve bunlara ek olarak bu şemaya sahip öğrenci matematiksel sistemlerin ispatsız olarak kabul edilen durumlara dayandığını fark eder (Housman ve Porter, 2003; Harel ve Sowder, 1998; Harel ve Sowder, 2007; Knapp, 2005; Sarı ve ark., 2007). Analitik ispat şeması öğrencilerin ispatlama sürecinin tanımlanmamış terimlerle ve aksiyomlarla başlaması gerektiğini ve bu aksiyomların kişinin matematiksel gerçekliği olduğunu savunmaktadır (Harel, 2008a). Kişinin tanımlanmamış terimlerden ve aksiyomlardan oluşan bir ispatı anlama sürecine (Harel ve Sowder, 1998) ayrıca yeni teoremlerin ispatlanma sürecinde sadece aksiyomlara ve önceden kanıtlanmış teoremlere odaklanmaktadır (Flores, 2006 akt. İskenderoğlu, 2006). Alternatif aksiyomların geliştirilmesine olanak sağladığından ispat şemaları arasında en üst düzeyde yer almaktadır (Harel ve Sowder, 1998).

Matematiksel akıl yürütmenin merkezinde analitik ispat şemaları yer aldığından dışsal ve deneysel ispat şemaları tercih edilmesi çok fazla istenilmeyen ispat şemalarıdır. Dışsal şemalardan otorite ispat şemaları ispatlama sürecinde tam anlamıyla zararlı olmamakla birlikte kullanımı kaçınılmaz olan bir şemalardır. Bireyler bilmedikleri bir alanda örnekleme yapmak için bu şemadan faydanabilirler. Otorite ispat şemalarından biraz daha üst düzeyde olan deneysel ispat şemalarında örnekler ve aksi örnekler düşünceleri genellemekte ve öğrencilerin bakış açılarını ortaya çıkarmakta kullanılabilir (İskenderoğlu, 2010).

**Tablo 2.1. İspat Şemalarının Özeti (Lee, 1999 akt. İskenderoğlu, 2010)**

| **İspat Şemaları** | **İspat Şemasının Karakteristiği** | **Gerçekleşme Metodları** |
|---|---|---|
| **Dışsal İspat Şemaları** | | |
| Otorite İspat Şeması | ➢ Bir ispatın neden doğru olduğu hakkında sebep geliştirmede yetersiz kalmak<br>➢ İspatın doğruluğunun birey tarafından belirlenememesi | ➢ Teoremleri ezberlemek<br>➢ Formülleri uygulamak |
| Alıskanlık Edinilmiş İspat Şeması | ➢ Yüzeysel deliller sunmak<br>➢ Bir ispatın delilleri arasında sınırlı bağlantı kurmak | ➢ Tanıdık ispat süreçlerini kullanmak<br>➢ Diğer ispat süreçlerine benzeyen süreçleri kullanmak |
| Sembolik İspat Şeması | ➢ Sembollerin anlamını anlamak<br>➢ Sembolleri anlamsız deliller olarak sunmak<br>➢ Bir ispatın sembollerin içinde olduğuna inanmak<br>➢ Matematiksel sembollerle ispatlamak | ➢ Matematiksel durumları sembolleri kullanarak yazmak<br>➢ İyi bilinen sembolik algoritmaları kullanmak<br>➢ Bir ispatın ilk ve takip eden adımlarında sembolik işlemler yapmak |
| **Deneysel İspat Şemalar** | | |
| Temel Örnekler İspat Şeması | ➢ Mantıksal delillerin bulunmaması<br>➢ Sonuçları hızlıca yapmak<br>➢ Bir ispatın doğruluğunu örneklerle belirtmek | ➢ Akranlarını çizimlerle ikna etmek<br>➢ Bir veya daha fazla çizime odaklanarak sonuçlar çıkarmak |
| Sezgisel İspat Şeması | ➢ Çizimler aracılığıyla ispat basamaklarıyla hipotezleri iliskilendirmek, bu süreçte mantıksal delilleri göz ardı etmek<br>➢ Bir ispatın doğruluğunu çizimlerle belirtmek | ➢ Örnekler göstererek diğerlerini ikna etmek<br>➢ Bir ispatı örnekler göstererek olusturmak |
| **Analitik İspat Şemaları** | | |
| Dönüştürülebilen İspat Şemaları | ➢ Tutarlı basamaklar olusturmak<br>➢ Bir ispatın önceki durumlarına mantıklı kurallar uygulamak | ➢ Temel konuyu belirlemek<br>➢ Akıl yürütmeyle diğerlerini ikna etmek |
| Aksiyomatik İspat Şemaları | ➢ Tanımsız terimlerle sınırlı bir küme kurmak<br>➢ Lineer metotları kullanarak ispatlamak | ➢ Aksiyomatik bir sistem gelistirmek<br>➢ Bir teoremi aksiyomatik sistemi kullanarak ispatlamak |

#### 2.2.2.1.2.2 Yaygın Hatalı Düşünme Yolları

Öğrencilerin soruları algılayış şekillerini, çözüm sırasında izledikleri yolları ve bu süreçte yaklaşımlarının doğru olup olmadığını incelemek için nasıl düşündüklerini bilmek gerekir. Bu durum hatalı düşünce tarzlarının tespiti ve bunların düzeltilmesi açısından faydalı olacaktır. Harel (1998) yaptığı çalışmalar sonucunda öğrencilerde bazı hatalı düşünme yollarının varlığını gözlemlemiştir.

##### 2.2.2.1.2.2.1 Sembolik Düşünme

Lineer cebirde öğrenciler, matris üzerindeki satır işlemlerine bağlı olarak bir matrisin satır uzayında olduğu gibi bir lineer sistemin çözüm kümesinin, genişletilmiş matris sistemlerindeki satır işlemlerine bağlı olarak değişmediğini öğrenmektedirler. Bu olguları bir matrisin sütun uzayı matris üzerindeki satır işlemlerine bağlı olarak değişmez sonucuna genişlettikleri gözlemlenmiştir. Bu durum öğrenciler öğretmenlerinden böyle bir ifade hiç duymamalarına ya da herhangi bir kitapta hiç okumamalarına rağmen bu kavram yanılgısına nasıl sahip oldular? sorusunu beraberinde getirmektedir. Bu öğrencilerin anlamını ya da doğruluğunu soruşturmadan sadece ilişkilendirmeye dayanarak sonuçlara ulaşma şeklinde bir düşünme yoluna, zihin alışkanlığına sahip olduğu düşünülmektedir (Cuoco, Goldenberg ve Mark, 1996).

Bazı durumlarda bu zihin alışkanlığı sadece yanlış bir ifadeye değil mantıksız akıl yürütmeye de yol açmaktadır (Harel ve Sowder, 1998). Neden homojen bir sistem AX = 0 tutarlıdır? sorusunun yanıtını, lineer cebir sınıfındaki bir öğrenci şöyle açıklamıştır:

> $x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots. \ xnAn = 0$ alalım (Ai ler A nın sütunları). $x_1$ i bulmak istiyoruz ve elimizde $x_2$….xn ve $A_1$, $A_2$…. An olmak üzere bazı değerler var. Bilinen değerleri eşitliğin karşı tarafına taşıyarak $x_1$ için çözüm bulabiliriz. Bu $x_2$….xn için de aynıdır. Dolayısıyla, bu homojen sistemin çözümü $x_1 = (x_2A_2 + x_3A_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots. \ xnAn) /A_1$ dir.

$A_1$ ile bölmenin anlamını sorulduğunda, kesir ifadesini göstererek sadece bu bölü bu, bir bölü x gibi bir şey şeklinde ifade etmiştir.

Harel bu düşünme yolunu sembolik düşünme olarak adlandırmaktadır. Bunu kullanarak, kişi sembolleri kendilerine özgü bir sisteme sahipmiş gibi düşünür ve anlamlarını hiçbir sorgulama yapmadan kullanır. Lineer cebirde sembolik düşünme, vektörlerin sayılar olarak algılandığı kavram yanılgısında kendisini açıkça göstermektedir. Öğrenciler vektörleri sayılarmış gibi düşünmektedir. Bununla ilgili bir problem şöyledir: M, N, K, R,V lineer bağımlıdır. M ve N çıkarılırsa K, R ve V bağımlı olur mu? Bir öğrenci bu soruya aşağıdaki şekilde yanıt vermiştir:

> M ve N çıkarılmasına rağmen kalan vektörler lineer bağımlıdır. Bu M ve N yi sıfırla çarpmakla aynıdır. Örneğin: K= aR + bV + 0M + 0N, a, b $\neq 0$ . Bu, lineer bağımlı ifadesi bir gruptaki herhangi bir eleman diğerlerinin lineer kombinasyonudur anlamına geldiğinden dolayı böyledir.

Öğrencinin bu görüşte anlaşılamayan cevabının arkasındaki akıl yürütmesi şöyledir:

Onun için "bağımlılık" bir küme özelliği değil tek bir vektörün özelliğidir. Yani ona göre eğer diğer vektörlerin bir lineer kombinasyonu ise "bir vektör bağımlıdır" ve kümedeki her bir vektör diğerlerinin lineer kombinasyonu ise "bir vektör kümesi bağımlıdır". Problem bilgisine dayanarak dolayısıyla K = xR + yV + zM + vN olduğunu varsaydı. M ve N yi çıkarmakla kastettiği ikinci eşitlikte sıfırlarla onların yerlerini değiştirmekti. Fakat yaparken kaybolan zM + vN miktarı için x ve y katsayılarını, bütün semboller sadece gerçek sayıları temsil ediyormuş gibi a ve b yeni katsayılar şekline yeniden düzenleyerek denkleştirmek zorunda olduğunu hissetti. Bu gözlemlerin anahtar noktası, öğrencilerin temel kavramları anlayışlarının onların düşünme yollarından etkilenmesidir. Sembolik akıl yürütme düşünme yolları arasında en çok karşılaşılanlardandır.

Bu doğrultuda sembolik düşünme, anlamlarını anlamadan sembolik kullanımlarla ve bazı durumlarda matematiksel kuralların ihlaliyle sonuçların elde edildiği bir yöntemdir (Harel, 1998).

#### 2.2.2.1.2.2.2 Otoriteden Dolayı İspat

Sembolik düşünme kadar zararlı olan bir diğer düşünme yolu, öğrencilerin sadece öğretmenlerinin söylediği ya da kitaplarında gördükleri bir ifadeye dayanarak tüm matematiksel ifadeleri kabulüdür. Basitçe söylemek gerekirse, öğrencilerin, belirtilen bir iddianın neden doğru olduğunu merak etme ile ilgili temel zihinsel ilgileri eksiktir. Şuandaki matematik müfredatı, olguların nedenleri yerine olguları vurguladığı için bu durum hiç şaşırtıcı değildir.

#### 2.2.2.1.2.2.3 Birden Fazla Düşünme Yolu Eksikliği

Bir kavram değişik şekillerde anlaşılabilir, farklı şekillerde anlaşılabilmelidir ve bir problemi çözmeye çalışırken bir kavramı anlama yollarını değiştirmek avantajdır, şeklindeki düşünme yolları öğrencilerin akıl yürütme yaklaşımlarında çoğunlukla bulunmamaktadır. Örneğin birey lineer denklem sistemleriyle ilgili problemlerin lineer dönüşümle ilgili matris problemleriyle eşdeğer olduğunu anlamalıdır. Bu düşünme yolları bakımından donanımlı olmayan öğrenciler zorluklarla karşılaşmaya mahkumdur. Basit bir örnek şöyledir, bir kez öğrenciler standart tanımı $(AB)_{i,j} = \sum_r (A_{(i)})_r \, (B^{(j)})_r$ öğrendiğinde farklı matris çarpım yollarını örneğin, $(AB)^{(k)} = \sum_j (B^{(k)})_j \, A^{(j)}$ , $(AB)_{(k)} = \sum_j (A_{(k)})_j \, B_{(j)}$ ya da $AB = \sum_j A^{(j)} \, B_{(j)}$ benimsemekte zorluk yaşamaktadır.

#### 2.2.2.1.2.2.4 Etkili Kavram Görüntülerinin Eksikliği

Bir kavramı anlama yolu kişinin 'kavram görüntüsünün' bir parçasıdır. Kavram görüntüsü bireyin kavram hakkında bildiklerinden (diğer kavramlarla benzerliği, örnekleri ve örnek olmayanları gibi) oluşan bir zihin ağıdır. Tall ve Vinner'e (1981) göre "kavram görüntüsü" anlayışı "kavram tanımından" ayrılmaktadır. Kavram görüntülerinin ya da bilim adamlarının söylediği gibi "ayrıntılı yapıların" hafıza üzerinde büyük etkileri bulunmaktadır ve kapsamlıdır (Anderson, 1980). Etkili kavram görüntüsüne sahip bir öğrenci, kendi kelimeleriyle uygun kavram tanımını yapabilen, onu genel hatlarıyla düşünebilen, diğer kavramlarla ilişkisini kurabilen ve sonuç olarak uzun bir zaman periyodunda anlamını hatırlayabilen kişidir (Harel, 1997).

Lineer cebir derslerinde öğrencilerin ne tür kavram görüntüleri inşa ettiklerine yönelik olarak yapılan çalışma sonuçları öğrencilerin etkili kavram görüntüleri oluşturmadıklarını, aksine, harfi harfine hatırlayarak tam kavram tanımına güvendiğini göstermektedir. Final dönemi bitene kadar kavramların tanımlarını akılda tutmanın üstesinden gelebilmekte, fakat ilerleyen zamanlarda onları unutmaktadırlar. Kavram tanımları bir kere unutulduğunda öğrenciler kendi başlarına onları bulup geri getirmeyi ya da yeniden inşa etmeyi becerememektedirler.

Buradaki gözlemler, öğrencilerin geçmiş bilgisi öğrenmelerini etkiler (Alexander ve Judy, 1988) ifadesini desteklemektedir. Bu durum geçmiş bilgi etkisi olarak adlandırılmaktadır (Kouba, Carpenter ve Swafford, 1989). Yani öğrencilerin bir kavrama ilişkin bilgisi mantıklı olarak buna bağlı başka bir kavramı öğrenmelerini etkilemektedir. Bunun yanı sıra öğrenciler önbilgilerini, kavramlar birbirinden bağımsız olsa bile yeni öğrenmelerinde kullanmaktadırlar. Örneğin, ikincisi mantıken ilkinden bağımsız olmasına rağmen öğrencilerin metrik uzaylar bilgisinin topoloji öğrenmelerini etkilemesini bekleriz çünkü matematiksel bir düşünceyi öğrenmek için öğrencilerin gerçek bilgiden daha fazlasına ihtiyaç duyduğunu biliriz (Harel, 2001).

#### 2.2.2.2 Gereklilik İlkesi

Genellikle zihinsel amacını açık bir şekilde sunmakta başarısız olduğumuzdan dolayı öğrenciler zihinsel olarak matematik derslerinin amaçsız olduğunu hissetmektedirler. Gereklilik ilkesi öğrencilerin bilgi gelişimine ortak olmalarını sağlayan, bu sayede kavramların amaçsız olarak gösterilmeyeceğini, kendilerinin anlayacağı ve takdir edeceği nedenlerle verileceğini öğrendiği pedagojik bir ilkedir (Harel, 1998).

Gereklilik ilkesi şunu savunur: Öğrenciler, kendilerine öğretilmesi amaçlanan şeyi ihtiyaç olarak gördüklerinde, onun gerekliliğine inandıklarında çoğunlukla öğrenmeleri muhtemeldir. Buradaki ‘ihtiyaç’ sosyal ve ekonomik ihtiyacın aksine zihinsel ihtiyaç anlamına gelmektedir (Harel, 1998; 2001).

Harel’e (2001) göre zihinsel ihtiyaç kavramı, kişiler anladıkları, kendileri için içsel olan bir problem ile karşılaştığında kendini gösteren bir davranışı ifade eder. Öğrenciler kendilerine uygun olmayan ya da mevcut bilgileriyle çözülemeyen bir problemle de karşılaşabilir. Böyle bir karşılaşma, öğrenenler için yeni bilgiler inşa edebilmeleri sayesinde onlarda bir çözümleme ya da bir çözüm bulma arzusu uyandırırır. Öğrencilerin aranan bilgiyi ya da herhangi bilgiyi inşasına dair bir garanti yoktur. Fakat inşa ettikleri her türlü bilgi, mevcut bilişsel şemaları içinde bütünleşmiş olduğundan dolayı onlar için anlamlıdır, çünkü bu kendi kişisel, zihinsel ihtiyacı tarafından yönlendirilen ve bunlardan kaynaklanan bir çabanın ürünüdür

"Zihinsel ihtiyaç" doğal bir insan davranışının ifadesidir: aykırı bir durumla karşılaştığımızda ya da mevcut bilgilerimizle çözülemeyen bir problem sunulduğunda bir netlik ya da bir çözüm ararız ve sonuç olarak yeni bilgi inşa ederiz. İnsan olgusu Gereklilik İlkesi olarak adlandırdığımız şey için temel teşkil etmektedir (Harel, 1998).

Gereklilik ilkesi üç adımda ifade edilir:

(a) Belirli bir öğrenci popülasyonu için öğrenilmesi gereken kavrama ilişkin zihinsel bir ihtiyacı neyin oluşturduğunun farkına varmak

(b) Öğrencilerin zihinsel ihtiyaçlarını karşılayan ve çözümlerinden genel kavramın oluşturulabileceği ve içselleştirilebileceği problemler geliştirmek

(c) Öğrencilerin problemin çözümünden kavramı elde ettiği bir öğretim ortamı yaratmak ve onlara bu süreçte yardım etmek

Bu üç adım matematik eğitiminin üç ayrılmaz yönü araştırma, müfredat geliştirme ve öğretiminin özünü oluşturmaktadır (Harel, 1998; 2001).

Bütün sınıf seviyelerindeki matematik müfredatında öğrencilerin zihinsel ihtiyaçlarına yönelik bir önem eksikliği vardır. Şu örneği düşünelim: ortaokul öğrencileri, çok terimli (polinom) çarpmayı nasıl yapacağını öğrendikten sonra, genellikle polinomları çarpanlara ayrıma tekniklerini öğrenmektedir. Bunun devamında, oransal ifadeleri sadeleştirmek için bu teknikleri nasıl kullanacağını öğrenirler. Öğrenciler açısından bu aktiviteler mantıksızdır. Öğrenciler matematiksel amacı anlamadan, bir ifade şeklinin başka bir ifade şekline göre daha avantajlı olduğu durumlardaki dönüşümler gibi, bir ifade şeklini başka bir ifade şekline dönüştürmeyi öğrenmektedir. Bunun tipik bir örneği ikinci derece denklem formülünün öğretimidir. Bazı cebir kitapları kare tamamlama metodundan önce, ikinci derece denklem formülünü vermektedir. Öğrenciler, ikinci dereceden denklemleri çözmeye ve onların çözümlerine ilişkin bir formül elde etmeye yönelik olan, birçok öğrenciye farklı gelen, kare tamamlama problemlerini yorumlama metodunda düşünsel amacı nadiren görmektedirler (Harel, 2008a). Bu ifadeler öğrencilere önemli bir problemi göstermeyi amaçlamaktadır. Problem, kendi modeli için zihinsel olarak gerçek iken, öğrenciler için yabancıdır. Çünkü öğrenciler, gösterilen problemin doğası, matematiksel önemi ve onun çözümünü belirlemede, öğretilen kavramların rolünü kavramada yetersiz kalabilirler. Bu örneğin gösterdiği şey şudur: DNR'nin öğrenme tanımındaki zihinsel ihtiyaç unsuru öğretimde büyük ölçüde göz ardı edilmektedir. Gereklilik ilkesi öğrenmede zihinsel ihtiyaçların zorunluluğuyla ilgilenmektedir (Harel, 2008b).

Harel (1998) çalışmasında zihinsel ihtiyacı neyin oluşturduğunu ele almıştır. Öğretmenler belirli bir öğrenci popülasyonu için zihinsel ihtiyacı neyin oluşturduğunu nasıl anlar? Bunun için öğrencilerin düşünme yollarını anlamaları gerekmektedir. Zihinsel ihtiyacı, hesaplama ihtiyacı, formülleştirme ihtiyacı ve estetik ihtiyacı olmak üzere üç şekilde inceleyebiliriz.

- *Hesaplama İhtiyacı:* Nesneleri hesaplamayı harekete geçiren problemler öğrenciler için somuttur ya da böyle nesnelerin özellilerini belirlemeyi içeren problemlerin hesaplama ihtiyacını giderdiği söylenebilir. Böyle problemlerin öğrencilerde uyandırdığı zihinsel ihtiyaç hesaplama ihtiyacı olarak adlandırılmaktadır. Bu, öğrencilerin problemlerle oldukça meşgul olmalarında, çözümlerinden elde ettikleri kavramaları anlamalarında ve takdir etmelerinde güdüsel olarak güçlü bir ihtiyaçtır.
- *Formülleştirme İhtiyacı:* Öğrenciler $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ olduğu konusunda sezgisel açıklamalarıyla tatmin olabilirler: böyledir çünkü n büyüdükçe $\frac{1}{n}$ sıfıra yaklaşır. Öğrencileri $\in - N$ limit tanımına hazırlayan bir öğretmen öğrencilerin bu tanımı üzerine f(n) = $\frac{1}{n}$ ve g(n) = -1 grafiği ile birlikte onu tahtaya yazarak devam edebilir. Sonra öğretmen onların ispatlarına dayanarak öğrencilerin kendi sözleriyle n büyüdükçe $\frac{1}{n}$ -1 e yaklaşır, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = -1$ olur, şeklinde bir kişinin öne sürebileceğine dikkat çekebilir. Limit kavramlarını değiştirmeye ihtiyaç duymaları sayesinde bu değişim öğrencilerde bir karışıklığa yol açar. Bu formülleştirme ihtiyacına bir örnektir. Hesaplama ihtiyacından daha az güçlü ve etkilidir çünkü öğrencilerde genellikle eksik olan yeterli bir matematiksel

olgunluk seviyesi gerektirir. Öğrencilerde ara değer teoremi ve uç değer teoremi gibi teoremleri, varsayımları güçlü görsel ya da kinesitetik yorumlarla ispatlama ihtiyacını takdir etme eksikliği bulunmaktadır. Uygulamalar için bu teoremlerin gücünü öğrencilere göstermek zor değilken onları ispatlamanın gerekliliğine öğrencileri ikna etmek her zaman kolay değildir.

Özet olarak, Harel (1998) öğrencilerde hesaplama ihtiyacının güçlü ve etkili bir şekilde olduğunu düşünmektedir. Ona göre formülleştirme ihtiyacı gelişimsel olarak daha zor ve hatta daha estetiklik gerektirir çünkü daha yüksek bir matematiksel olgunluk ister. Buna göre öğrencilerin zihinsel ihtiyacının aşamalı geliştirilmesi şu sıraya göre devam etmelidir: hesaplama ihtiyacından, formülleştirme ihtiyacına sonra estetik ihtiyacına.

Harel (2008b) çalışmasında ise öğretmen öğrencilerin zihinsel ihtiyacını nasıl belirler? sorusunu şöyle ele almıştır: DNR bu soruyu açıklamak için bir taslak sağlar fakat bu soruyla ilgili olarak detaylı metodolojilerle beraber uygun pedagojik stratejiler bulunmalıdır. Bu taslak birbiriyle ilişkili beş kategori içinde zihinsel ihtiyaçların bir sınıflandırmasından oluşmaktadır:

- Kesinlik İhtiyacı, şüpheleri ortadan kaldırmak için ispat yapma ihtiyacıdır. Kişi bir varsayımın doğruluğuna karar verdiğinde kesinliğe ulaşmış olur. Sadece doğruluk, bir bireyin tek ihtiyacı olmayabilir, varsayımın neden doğru olduğunu açıklamak da isteyebilir.
- Nedensellik İhtiyacı, bir olayı neyin oluşturduğunu anlamak için olayın nedenini belirlemeyi açıklama ihtiyacıdır.
- Hesaplama İhtiyacı, miktarları belirleme ve miktarların değerleri ile bunlar arasındaki ilişkileri hesaplama ihtiyacıdır. Ayrıca hesaplamaları en iyi şekilde kullanmayı da içerir.
- İletişim İhtiyacı, diğerlerini bir varsayımın doğru olduğuna ikna etme ihtiyacını kapsar.
- Yapı ve Birleştirme İhtiyacı, benzerlikleri ve analojileri (benzetimleri) tanımlamak için bir yapı içinde öğrenilen bilgiyi düzenlemeyi ve birleştirici ilkeleri belirlemeyi içerir.

Bilişsel bilim yazınında detaylı şekilde ele alınmış bir gözlem şöyledir, bir düşünme yolu bir kere davranış olarak oluşturulduğunda kuvvetli ve vazgeçmesi oldukça zor bir hale gelir (Anderson, 1980). Bu bulgunun çıkarımı şu şekildedir: iyi düşünme yolları kaynakları öğrencilerin erken matematiksel deneyimlerinde yani ilkokul ve ortaokul eğitiminde sağlanmalıdır. Öğrencilerin bu seviyelerdeki matematiksel eğitimi istenilmeyen (istenilen) düşünme yollarının varlığını (yokluğunu) açıklamaktadır. İlkokulun başlangıcında öğrenciler basamak değeri kavramını anlamaksızın çok basamaklı sayılarda toplama ve çıkarmayı öğrenirler (Burton, 1982) ve kesirlerde anlamsızca işlemler yaparlar (Kouba, Carpenter ve Swafford, 1989). Ortaokul yıllarında sembolik düşünmeye devam ederler ve sonuç olarak bir denklemi çözmek için onun ne anlama geldiği gibi basit, temel düşünceleri öğrenmekte başarısız olurlar (Wagner, 1981)

Gereklilik ilkesi çabayla düşünme yollarının değiştirilebileceğini göstermektedir. Bu ilkeyi başarılı bir şekilde uygulamak için öğretmenin öğrenciler açısından yüksek ama gerçekçi beklentiler oluşturması ve onların öğrenmek için sorumluluk almalarını sağlaması gerekmektedir. Gereklilik ilkesi yaklaşımına uygun olan öğretim şekli (Harel, 1997) küçük grup tartışması, grup projeleri, tüm sınıf tartışması, bireysel öğrenme, teknolojiyi kullanma ve konu anlatımıdır. Bu öğretim modelleri arasında her bir öğretmenin bireysel olarak geliştirmesi gereken bir denge olmalıdır. Tek bir yönteme dogmatik (kesin) bağlılık yerine öğretim yöntemlerinin birleşimi tercih edilmelidir. “Öğrenciler pasif bilgi alıcı olmamalı bilginin yapılandırılmasında aktif katılımcılar olmalı” ifadesini sık sık duymaktayız. Gereklilik İlkesi de bu düşüncenin önemli olduğunu savunmaktadır. Somut olarak öğrencilerin nasıl aktif öğreniciler yapılacağını, kitap ve öğretmenin tanımlarını ve teoremlerini öğrencilerin kendilerininkine nasıl transfer edeceğini göstermektedir (Harel, 2001).

Gereklilik ilkesi köklerini Piaget nin öğrenim teorisinden almaktadır ve Fransız eğitimciler tarafından ileri sürülen problematik teorisiyle birbirini tutmaktadır (Balacheff, 1990).

Problematik teorisine göre,

….. öğrencilerin öğrenmesi kendileri gibi olarak problemleri tanımalarına ve yeniden yapılandırmalarına bağlıdır… Bir problem bir öğrenci açısından yalnızca çözümün doğruluğu için sorumluluğu alırsa bir problemdir. Anlamın yapılandırılmasına olanak sağlamak için öğretmenden öğrencilere sorumluluğun transferi gerçekleşmelidir (Balacheff, 1990, s.259).

#### 2.2.2.3 Tekrarlı Akıl Yürütme İlkesi

Harel' e (2008b) göre anlama ve düşünme yolları, öğrenciler için zihinsel olarak gerekli olsa bile öğretmenler gene de öğrencilerinin bu bilgiyi içselleştirmesini, akılda tutmasını ve düzenlemesini sağlamalıdır. Birçok çalışmanın gösterdiği gibi tekrarlanan deneyim (yaşantı) ya da uygulama bu amacı başarmada önemli bir etkendir. Cooper (1991) bilgiyi arttırmada, düzenlemede ve soyutlamada uygulama yapmanın rolünü vurgulamıştır. DeGroot (1965) artan deneyimin, bilgiyi daha kolay ulaşılabilir hale getiren bir etkisinin olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Tekrarlı akıl yürütme İlkesi, Öğrencilerin, istenen anlama ve düşünme yollarını içselleştirmeleri ve benimsemeleri için düşünme alıştırması yapmaları gerektiğini savunur.

Harel (2001) çalışmasında iki önemli düşünme yolu: 'Matematiksel etkililik' ve 'Dönüşümsel düşünme' kavramını ele almıştır.

Bu çalışmada iki ilkokul öğrencisi S ve T ye kesirlerde bölme öğretildi. S ye (a / b) ÷ (c / d ) = (a / b)· (d / c) ile sunulan tipik bir yöntem öğretildi, kural anlamlı bir içerik içinde ve anlayacağı yeterli bir gerekçe ile sunuldu. Diğer bir taraftan t ye herhangi bir kural sunulmadı. Kesirlerde bölme işlemiyle karşılaştığında her defasında çözümünün gerekçesini ve anlamını açıkladı. S ve T ye kesirlerde bölme işlemi problemleri ödev olarak verildi. S bütün problemleri doğru olarak çözdü ve sonuç olarak bölme kuralında üstünlük elde etti. T için ödevini yapmak daha uzun zaman aldı. T, (4 / 5) ÷ (2 / 3) üzerinde çalışırken söylediği şey şöyledir: 4 / 5 in içinde kaç tane 2 / 3 vardır? Her ikisini neyin böldüğünü bulmam gerekiyor ( bunun anlamı: 4 / 5 ve 2 / 3 yi kalansız bölen bir birim kesirdir). 1/15 her ikisini de böler. 3 defa 1/5 i, 5 defa 1/3 ü böler; bu nedenle 12 defa 4/5 i, 10 defa 2/3 ü böler.

[ 4 / 5 =12 /15 ; 2 / 3 =10 /15; (4 / 5) ÷ (2 / 3) = (12 /15) ÷ (10 /15) yazar]. 10 /15 kaç kere 12 /15 i böler? 10 12 yi kaç kere böler? Bir kere ve 2 /10 defa yani 1 ve 1/ 5.

T, S nin yoksun olduğu muhakeme etme fırsatlarına sahipti. Bu süreçte T akıl yürüttü ve hesaplama yaptı; S ise sadece hesaplama yaptı. Ayrıca T sonunda bölme kuralını keşfetti ve matematiksel etkililik hakkında (S nin elde etmek için çok az şansa sahip olduğu düşünme yolunu) önemli şeyler öğrendi.

Tekrarlı akıl yürütme ilkesinin uygulanması;

(a) Öğrencilerin belirli bir anlama ya da düşünme yolunu soyutlamasını sağlayan problemleri sıralama

(b) Öğrencilerin yeni öğrendikleri anlama ve düşünme yollarını uygulamalarına ya da bunlara adapte olmalarına ayrıca bu anlama ve düşünme yollarının zorlukları ile sınırlarını fark etmelerine olanak sağlayan problemleri kapsama

(c) Öğrencilerin akıl yürütmelerini tekrarlamarını isteyen ve böylelikle anlama ve düşünme yolarını korumaya yönelik olan yeterli miktarda ödev verme olmak üzere üç adımdan oluşmaktadır (Lim, 2006).

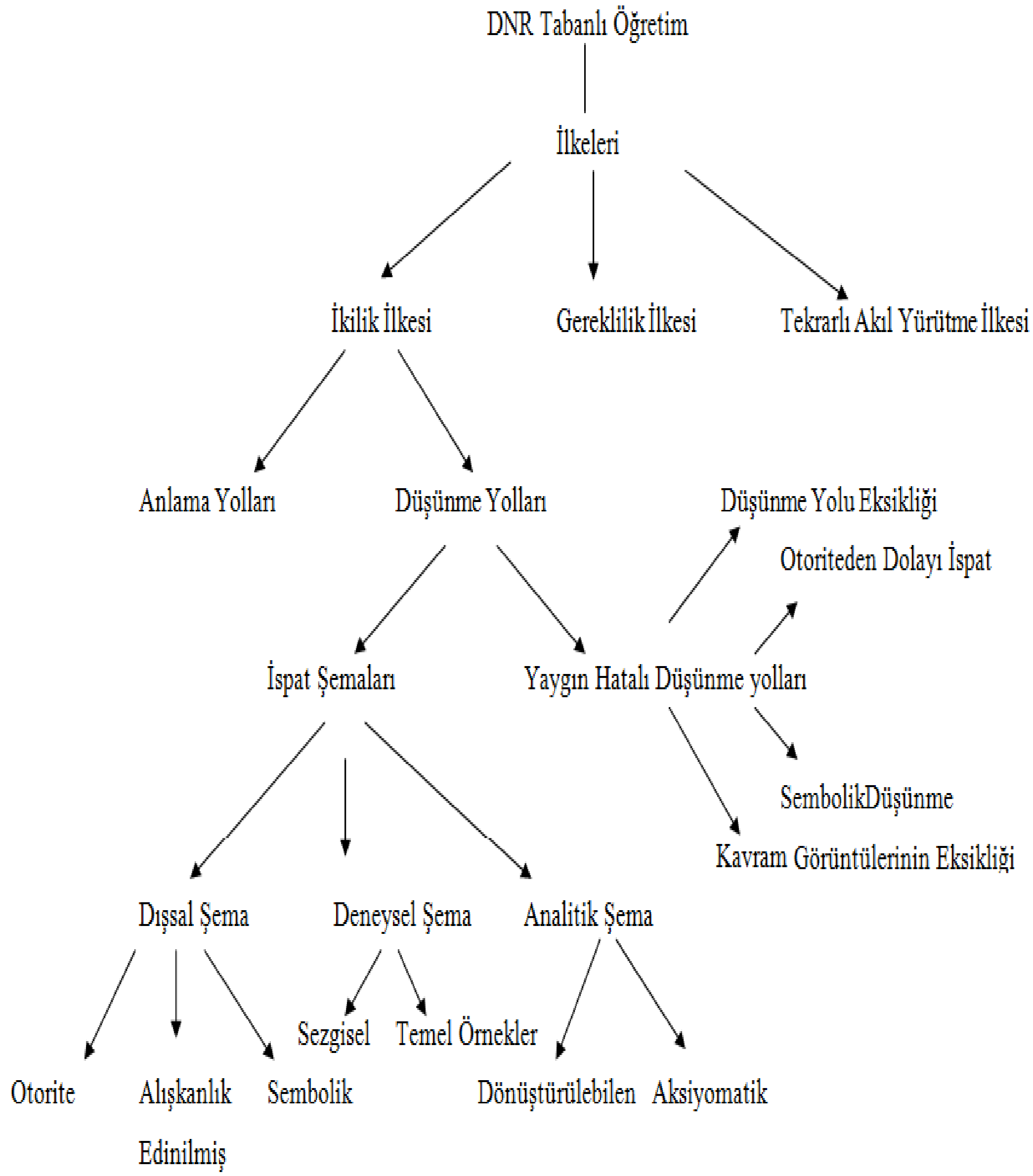
DNR tabanlı öğretimin vurguladığı, tekrarlı akıl yürütmenin istenen anlama ve düşünme yollarını pekiştirdiğidir. Tekrarlı akıl yürütme sadece rutin problemlerin uygulanması bunların alıştırmalarının yaptırılması değildir, kişinin kendiliğinden, anında bilgiye başvurabildiği zamanki içselleştirme süreci için bir temeldir. Öğrencilere verilen problemler dizisi sürekli olarak, durumlar ve çözümler aracılığıyla düşünmeyi gerektirmelidir ve problemler öğrencilerin değişen zihinsel ihtiyaçlarına yanıt vermelidir (Harel, 2001; 2008b). Önemli olan öğrencilerin gerçekleri ve temel kuralları hatırlamaya ihtiyaç duyup duymadıkları değil gerçekleri ve kuralları nasıl bilmeye başladıkları ve onları nasıl uygulamaları gerektiğidir. Bunlar tekrarlı akıl yürütme ilkesinin temelini oluşturur (Harel, 2001).

**Bir Sistem Olarak DNR**

İkilik, gereklilik ve tekrarlı düşünme ilkeleri, öğretme-öğrenme sürecinin üç temel yönünü birbiriyle bağlantılı olarak ele alması bakımından bir sistem oluşturmaktadır.

- ***Öğretim Amaçları,*** Matematik müfredatının uygulanmasında, geliştirilmesinde ve tasarlanmasında anlama ve düşünme yolları nihai bilişsel hedefler olmalıdır.
- ***Kavramların Oluşumu,*** Anlamlı kavramlar sadece öğrencilerin zihinsel ihtiyaçlarına karşılık gelen problemlerin çözümleri yoluyla elde edilir. Elde ettikleri yolların yanı sıra elde ettikleri kavramlar aynı zamanda öğrencilerin anlama ve düşünme yollarını etkiler ve oluşturur.
- ***Kavramları İçselleştirme-Pekiştirme.*** Anlama ve düşünme yolları öğrencilerin zevk aldığı ve anladığı problemlerin çözümlerini tekrarlamasıyla içselleşir.

Bu çalışmada literatürde verilen bilgiler doğrultusunda ilköğretim ve ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının genel matematik dersi kapsamında ispat yaparken kullandıkları ispat şemaları ve genel olarak ispata yönelik bakış açıları belirlenmiştir. Bunun yanı sıra öğrencilerin çözümlerindeki düşünme süreçleri ve hatalı düşünme yolları ele alınmıştır. Bu süreçte DNR tabanlı öğretimin düşünme yolları basamağında yer alan ispat şemaları ve yaygın hatalı düşünme yolları adımlarından faydalanılmıştır.




**Şekil 2.4. DNR Tabanlı Öğretimin Sistematik Şeması**

# BÖLÜM III: YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın modeli, çalışma grubu, veri toplama araçları, uygulama süreci ve verilerin analizi ile ilgili bilgiler bulunmaktadır.

## 3.1 Araştırmanın Modeli

Araştırmacılar için temel sorunlardan birisi, hangi yöntemin çalışması için daha uygun olduğuna karar vermektir. Bulmaya çalıştığımız cevaplar doğrultusunda kullanacağımız araştırma yöntemleri de değişecek, çalışmamızda kullanacağımız belirli araştırma yöntemleri ve desenleri çalışma hedeflerimize paralel olarak tercih edilecektir. Frankel ve Devers'e (2000) göre nitel araştırmalar psikolojik ölçümler ve sosyal olaylarla ilgili nicel araştırma yöntemlerine göre daha derinlemesine bilgi sağlamak ve geleneksel araştırma yöntemleriyle ifade edilmesi zor olan sorulara cevap bulmak için gereklidir. Nitel araştırmaların nicel araştırmalara göre daha bilimsel ya da daha iyi olduğu söylenememekle beraber her birinin kendi içinde avantajları ve dezavantajları, zayıf ve güçlü yönleri bulunmaktadır. Önemli olan doğru yöntemi seçmek ya da bu yöntemlerin her ikisini birden uygun şekilde kullanmaktır (Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Demirel ve Karadeniz, 2011).

İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının genel matematik dersi kapsamında kullandıkları ispat şemalarını, bu şemaların her bölüm bazında sınıf düzeyleri açısından farklılık gösterip göstermediğini, ispat yaparkenki mevcut düşünme şekillerini ve ispata yönelik görüşlerini incelemek amacıyla yapılan bu çalışmada nitel ve nicel araştırma yöntemleri birlikte kullanılmıştır.

Denzin ve Lincoln'e (1998) göre nitel araştırma, araştırmacıların araştırılacak konu ya da konuları doğal ortamda incelemeleri, araştırılan insanların getirmiş oldukları anlamlar açısından olguyu anlamlaştırma ve yorumlama çabası içerisinde olmalarıdır ve problemin miktarı, sayısı, sıklığı ve yoğunluğundan ziyade problemin süreci ve anlamıyla yakından ilgilenmektedir (Akt. Ekiz, 2003, s. 27). Nitel araştırmalarda amaç genelleme değil, bütüncül bir resim elde etmektir. Nitel araştırma çalışılan konuyu derinlemesine ve tüm olası ayrıntıları ile incelemeyi amaç edinmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2011, s. 107).

Nitel araştırmada çoğunlukla üç tür veri toplanır: ‘çevreyle ilgili veri’, ‘süreçle ilgili veri’ ve ‘algılara ilişkin veri’ (LeCompte ve Goetz, 1984). Çevreyle ilgili veriler, araştırmanın yer aldığı sosyal, psikolojik, kültürel, demografik ve fiziksel özelliklere ilişkindir. Süreçle ilgili veriler, araştırma süresince neler olup bittiği ve bu olanların araştırma grubunu nasıl etkilediğine ilişkindir. Algılara ilişkin veriler ise, araştırma grubuna dahil olan bireylerin süreç hakkında düşündüklerine ilişkindir. Bu üç veriyi toplamak için araştırmacının bazı nitel veri toplama yöntemlerini kullanması gerekir. Nitel araştırmada en yaygın olarak kullanılan üç tür veri toplama yöntemi vardır: görüşme, gözlem ve yazılı dokümanların incelenmesi. Nitel yöntemlerden en sık kullanılanı ise görüşmedir (Yıldırım ve Şimşek, 2011, s. 40). Bu doğrultuda çalışmamızda matematik öğretmen adaylarının ispat yaparken nasıl düşündüklerini, çözüm aşamalarının nedenlerini, akıl yürütme süreçlerini daha iyi ortaya koyabilmek için yarı yapılandırılmış görüşme yöntemi tercih edilmiştir.

Nicel araştırmalar ise genellenebilir, geçerli ve güvenilir bilgi elde etme amacını güderler. Nicel araştırmalar sürecin değil değişkenler arasındaki nedensel ilişkinin analizini ve ölçümünü vurgulamaktadırlar (Kuş, 2011, s. 105-106).

Bu araştırmada ispat şemalarını belirlemeye yönelik ölçme aracı ve ispata yönelik görüş ölçeği yardımıyla nicel veriler toplanırken nitel veriler yarı yapılandırılmış görüşme yapılarak elde edilmiştir. Nitel verilerin analizinde betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır.

## 3.2 Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubunu 2011-2012 eğitim-öğretim yılında bir devlet üniversitesinde ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği programlarının birinci ve son sınıflarında öğrenimlerine devam eden 98 öğretmen adayı oluşturmaktadır.

Nicel veriler iki yolla elde edilmiştir. Öğretmen adaylarının genel olarak ispata yönelik görüşlerini belirlemek üzere ispat görüş ölçeği ve hangi ispat şemalarını kullandıklarını belirlemeye yönelik ölçme aracı aşağıdaki çalışma grubuna uygulanmıştır.

**Tablo 3.1. Nicel Verilerin Elde Edildiği Çalışma Grubunun Dağılımı**

| Sınıflar | Öğrenci Sayısı |
|---|---|
| İlköğretim Birinci Sınıf | 30 |
| İlköğretim Son Sınıf | 30 |
| Ortaöğretim Birinci Sınıf | 19 |
| Ortaöğretim Son Sınıf | 19 |
| Toplam | 98 |

Tablo 3.1.'de görüldüğü gibi kullanılan ispat şemalarını belirlemeye yönelik ölçme aracı ve ispata yönelik görüş ölçeği 98 matematik öğretmen adayına uygulanmıştır. Uygulamalar 30 ilköğretim birinci sınıf, 30 ilköğretim son sınıf, 19 ortaöğretim birinci sınıf ve 19 ortaöğretim son sınıf matematik öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir.

**Tablo 3.2. Nitel Verilerin Elde Edildiği Çalışma Grubunun Dağılımı**

| Sınıflar | Öğrenci Sayısı |
|---|---|
| İlköğretim Birinci Sınıf | 3 |
| İlköğretim Son Sınıf | 3 |
| Ortaöğretim Birinci Sınıf | 3 |
| Ortaöğretim Son Sınıf | 3 |
| Toplam | 12 |

Nicel veriler doğrultusunda her sınıftan 3 öğrencinin seçilmesiyle oluşan 12 kişilik grup ise nitel veri çalışma grubunu oluşturmaktadır. Çalışmada eğitim fakültelerinin ders içeriklerinin öğrencilerin ispat şemalarına, anlama ve düşünme yollarına etkilerini daha net ortaya koyabilmek amacıyla özellikle birinci ve son sınıflar tercih edilmiştir. Görüşme yapılacak öğrencilerin belirlenmesinde hangi ispat şemalarını kullandıklarını belirlemek için uygulanan ölçme aracından elde edilen veriler göz önüne alınmış ve problem çözümlerinde farklı türde ispat şemalarını kullanılmış olmalarına yani cevap kağıdındaki şema çeşitliliğine dikkat edilmiştir. Seçilen öğrenciler ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır.

## 3.3 Veri Toplama Araçları

İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının genel matematik dersinde kullandıkları ispat şemalarının çeşitlerini ortaya koymak amacıyla bu ders kapsamında yer alan konularla ilgili seviyelerine uygun olarak ve temel bilgilere yönelik 9 problem hazırlanmıştır. Bu problemler hem yazılı olarak sorulmuş ve yazılı cevaplar alınmış hem de yarı yapılandırılmış görüşmelerde öğretmen adaylarına yöneltilmiştir. Ayrıca öğrencilerin problemlere yönelik çözüm süreçlerini ve bu süreçteki düşünme şekillerini ortaya koyabilmek için 9 görüşme sorusu oluşturulmuştur.

Matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşlerini belirlemek amacıyla Moralı ve arkadaşları (2006) tarafından geliştirilen ölçek kullanılmıştır. 5’li likert tipindeki bu ölçeğin yanıt seçeneği tamamen katılıyorum ile kesinlikle katılmıyorum arasında derecelenmektedir. Olumlu veya ispat açısından kabul gören maddelerden tamamen katılıyorum yanıtına 5, kesinlikle katılmıyorum yanıtına 1 puan verilerek puanlama yapılmaktadır. Bazı maddeler ters görüş içerdikleri için bu maddeler ters çevrilerek analiz edilmektedir.

### 3.3.1 İspat Şemalarını Belirlemeye Yönelik Ölçme Aracı

İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının genel matematik dersi kapsamında ne tür ispat şemaları kullandıklarını, ispata yönelik düşünme ve anlama yollarını ortaya koyabilmek için birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının seviyelerine uygun, bu ders kapsamında yer alan konulara yönelik problemler hazırlanmıştır. Soruların zorluk dereceleri zor, orta ve kolay olmak üzere eşit dağılımda olacak şekilde oluşturulmuş, yazılı sınavda ve yarı yapılandırılmış görüşmede bu sorular sorulmuştur. Problemler hazırlanırken soruların öğrencilerin seviyesine uygun olmasına, farklı ispat şemalarını kullanmaya yönelik olmasına, genel matematik dersinde yer alan konuları yansıtmasına ve ispat yapmaya uygun olmasına dikkat edilmiştir. Ayrıca şemaları belirlemeye yönelik bu ölçme aracının geçerliliğini ve güvenirliğini sağlamak adına, hazırlanan problemlerin genel matematik kapsamında derslerde uygulamaları yapılan ve kitaplarda örnekleri bulunan sorular olmasına önem verilmiştir.

Genel matematik dersi kapsamında hazırlanan ispat şemalarını belirlemeye yönelik ölçme aracı toplam 9 problemden oluşmaktadır. Tablolaştırılmış şekilde problemlerin her biri ve içerikleri aşağıda verilmektedir.

**Tablo 3.3. İspat Şemalarını Belirlemeye Yönelik Sorulan Problemler**

| **Problemler** | **İçerik** |
|---|---|
| **1)** $\sqrt{3}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz. | Bu problem irrasyonellik kavramına yönelik olarak hazırlanmış bir problemdir. Bu problemde öğrencilerden bir sayının irrasyonel olduğunu göstermeleri istenmektedir. Bunun için öğrencilerin öncelikle irrasyonellik kavramını bilmeleri ve bu tanımı verilen sayı için kullanabilmeleri beklenmektedir. |
| **2)** $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ olduğunu gösteriniz. | Bu problem küme konusunu içermektedir. Öğrencilerden kümelerle ilgili bir kuralın doğruluğunu göstermeleri beklenmektedir. Problemde yer alan kural öğretmen adaylarının ilköğretim yıllarından itibaren öğrendikleri bir özelliktir. |
| **3)** $\forall\, n \in N$ için $\sum_{t=1}^{2n} \frac{(-1)^t t.(t-1)}{2} = n^2$ olduğunu gösteriniz. | Bu problem toplam çarpım sembollerine yönelik olarak hazırlanmış bir problemdir. Bu problemde öğrencilerden verilmiş olan eşitliğin belirtilen şekilde olduğunu göstermeleri istenmiştir. Bunun için öğrencilerin eşitlikten bir örüntü oluşturarak ilişkiyi görmeleri ya da eşitliğe götürecek çıkarımları yapmaları beklenmektedir. |

| | |
|---|---|
| **4)** f: A→B ve g: B→C fonksiyonları verilsin. f ve g fonksiyonları 1-1 ve örten ise gof: A→C fonksiyonunun da 1-1 ve örten olduğunu gösteriniz. | Bu problem birebir örtenlik ve bileşke kavramlarını içermektedir. Öğrencilerin bu problemi çözebilmeleri için birebir ve örten tanımlarının yanı sıra bileşke kavramını bilmesi gerekir. Bununla birlikte öğrencilerden birebirlik ve örtenlik tanımını bileşke fonksiyona aktarabilmeleri beklenir. |
| **5)** $\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$ olduğunu gösteriniz. | Bu problem logaritmik fonksiyon konusuna yönelik bir problemdir. Bu problemde öğretmen adaylarından logaritma konusuyla ilgili bir kuralın doğruluğunu göstermeleri beklenmektedir. Bunun için öğrencilerin üslü ifade ve bu konuyla ilgili bazı özellikleri bilmeleri gerekmektedir. |
| **6)** $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ olduğunu gösteriniz. | Bu problem trigonometrik fonksiyon kavramını kapsamaktadır. Öğretmen adaylarından trigonometri konusuna ait bir kuralı doğrulaması beklenmektedir. Derslerde kural olarak verilen bu özelliği gösterebilmeleri için dik üçgen, birim çember gibi kavramları bilmeleri gerekmektedir. |
| **7)** $a_1>0$ , $a_2>0$ ve $\lambda_1<\lambda_2$ olduğuna göre $$\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}=0$$ denkleminin $\lambda_1$ ve $\lambda_2$ arasında bir reel kökünün bulunduğunu gösteriniz. | Bu problem denklem konusuna yönelik olarak seçilmiş bir problemdir. Rutin olmayan bir problemdir ve öğrencilerden denklemin belirtilen aralıkta bir reel kökünün olduğunu göstermeleri istenmektedir. Bu problemde öğrencilerin istenilene ulaşabilmesi için nasıl bir yol izlemesi gerektiğini belirleyip denklemi çözmesi ve kökün neden o aralıkta olduğunu açıklaması gerekmektedir. Bu nedenle mantıksal akıl yürütme becerisini kullanmayı gerektiren bir problemdir. |

| | |
|---|---|
| **8)** a, b, c birbirinden farklı sayılar olmak üzere, bir P(x) çok terimlisi x-a, x-b, x-c ile ayrı ayrı bölünerbilirse (x-a).(x-b).(x-c) çarpımı ile de bölünebilir ifadesinin doğruluğunu gösteriniz. | Bu problem polinom konusuna yönelik olarak hazırlanmıştır. Bu problemde öğrencilerden sözel olarak bildiği bir kuralın matematiksel olarak doğruluğunu göstermesi beklenmektedir. Bunun için öğrencilerin bölme bölünebilme kurallarını, çarpan kavramlarını bilmeleri ve bu bilgileri polinoma aktarabilmeleri gerekmektedir. |
| **9)** W= r.( cosθ + i.sinθ) ve n∈$N^+$ olmak üzere $Z^n$=W denkleminin köklerinin<br><br>Z= $\sqrt[n]{r}.[\cos\left(\frac{\theta+2k\Pi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{\theta+2k\Pi}{n}\right)]$<br>, k∈ $(0,1,2,\ldots.(n-1)$, olduğunu gösteriniz. | Bu problem karmaşık sayılar konusuyla ilgilidir. Bu problemde öğretmen adaylarından verilen karmaşık sayı ifadesinin köklerinin eşitlikteki gibi olduğunu göstermeleri beklenmektedir. Bu problem derslerde daha çok sayısal değerlerle uygulaması yapılan örneklerin genel şekliyle doğruluğunun göstermesine yönelik bir problemdir. Öğrencilerden karmaşık sayılara yönelik bu bilgilerini genellemeleri beklenmektedir. |

### 3.3.1.1 İspat Şemalarını Belirlemeye Yönelik Ölçme Aracında Kullanılan Problemlerin Geçerlik ve Güvenilirlik Çalışmaları

Bu aşamada lisans düzeyinde genel matematik dersi kapsamında yer alan konulara yönelik problemlerden oluşan bir havuz oluşturulmuştur. Problemlerin ispat etme becerilerini ölçme, ispat şemalarını kapsama, genel matematik dersini temsil etme ve sınıf seviyesine uygunluğu konusunda 5 uzman görüşü alınarak üzerinde tartışılmıştır. Bu doğrultuda problemlerden bazılarının çıkartılmasına karar verilmiştir. Belirlenen problemlerle, öğrencilerin soruların sınıf seviyesine uygunluğu, ifade ediliş biçiminin anlaşılır olup olmadığı hakkındaki görüşlerini öğrenmek, süreçle ilgili deneyim sahibi olmak ve soruların araştırmanın amacına uygun olup olmadığını tespit etmek amacıyla yazılı sınav ve yarı yapılandırılmış görüşmelere yönelik pilot çalışma yapılmıştır.

İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği programına devam eden 30 matematik öğretmen adayına yazılı sınav yapılmıştır. 4 öğretmen adayıyla da yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışmada kullanılan problemlerden bazıları ayırt ediciliği düşük olduğundan ispat şemalarını belirlemeye yönelik ölçme aracının problem sayısı 9 ile sınırlandırılmıştır.

Yazılı sınav ve yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen veriler ve gözlemler sonucunda ayrıca öğretmen adaylarından problemlerin anlaşılır olup olmadığına dair verdikleri geri dönütler doğrultusunda asıl çalışmada kullanılacak problemlere son şekli verilmiştir. Bu süreçte pilot çalışmadaki yazılı uygulama ve yarı yapılandırılmış görüşme verileri asıl çalışmanın uygulanmasında yol gösterici olmuştur. Pilot çalışma ile ispat şemalarını belirmeye yönelik ölçme aracının geçerliliği ve güvenilirliği sağlanmıştır.

Güvenilirlik bir ölçme aracının tutarlı sonuçlar vermesi yani verilerin sağlıklı ve doğru olduğunun benzer yöntem ve tekniklerle ölçülmesidir (Yumlu, 1990, s.141). Hem yazılı sınavda hem de yarı yapılandırılmış görüşmelerde kullanılacak olan ispata yönelik 9 problemin güvenilirliğini sağlamak için ayrıca araştırmacı ile bir ayrı uzman tarafından yazılı uygulamada öğrencilerin verdikleri cevapların tamamının Harel ve Sowder'in (1998) ortaya koydukları ispat şemalarına göre kodlamaları yapılmıştır. Yapılan kodlamaların tamamından benzer olmayanlar çıkartılıp toplam kodlama miktarına bölünerek iki araştırmacı arasında %92 uyum elde edilerek çalışmanın güvenilirliği sağlanmıştır.

Bunların yanı sıra pilot çalışmaya katılan matematik öğretmen adaylarından yazılı sınav ve görüşmeler sonunda temin edilen veriler incelenerek her bir probleme verilen yanıtların Harel ve Sowder'in (1998) ispat şemalarına göre hangi tür ispat şemalarını yansıttığı analiz edilmiş ve belirlenen bu şemalar alt ispat şemaları kategorilerine ayrılmıştır. Pilot çalışma sonucunda İskenderoğlu'nun (2010) ispatla ilgili yaptığı çalışmadan yararlanılarak her bir probleme yönelik belirlenen şemalarla ilgili tanımları ve bu şemaların özelliklerini gösteren bir değerlendirme ölçeği oluşturulmuştur. Bu ölçek asıl çalışma verilerinin analizi ve yorumlanması aşamasında kullanılmıştır. Genel matematik dersi kapsamında yer alan konularda matematik öğretmen adaylarının ispat şemalarını belirlemeye yönelik olarak hazırlanan her bir problemle ilgili ispat şemalarını ve özelliklerini içeren değerlendirme ölçeği Ek 1'de verilmiştir.

### 3.3.2 Yarı Yapılandırılmış Görüşmeler

Matematik öğretmen adaylarının hangi tür ispat şemalarını kullandıkları, problemleri çözerken soruları nasıl anladıkları ve bu süreçte nasıl düşündükleri, ispata yönelik bakış açıları ve duygularının ne yönde olduğu hakkında bilgi sahibi olabilmek için yarı yapılandırılmış görüşme tekniği kullanılmıştır.

Stewart ve Cash (1985) görüşmeyi , "önceden belirlenmiş ve ciddi bir amaç için yapılan, soru sorma ve yanıtlama tarzına dayalı karşılıklı ve etkileşimli bir iletişim süreci" olarak tanımlamıştır (Karasar, 2002, s. 165). Bu süreç görüşme yapılan kişinin tutumunu, zihinsel algısını, yorumunu, düşünme şeklini, anlama yolunu, bakış açısını ve tepkisini daha iyi anlamaya olanak tanımaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Briggs (1986) bilgi toplamada etkili bir yöntem olmasını sağlayan bu özelliklerinden dolayı görüşmenin sosyal bilimler alanında yapılan araştırmalarda kullanılan en yaygın veri toplama yöntemi olduğunu savunmaktadır (Akt. Yıldırım ve Şimşek, 2011).

Ekiz (2003) görüşmeyi insanların neyi ve neden düşündüklerini, davranışlarını etkileyen faktörlerin neler olduğunu ortaya çıkarmayı sağlayan bir araç olarak tanımlarken Patton (1987) görüşmenin bireyin iç dünyasına girmeyi ve onun bakış açısını anlamayı amaçladığını ifade etmiştir. Kişinin davranışlarının nedenleri ve herhangi bir konudaki görüşleri ya da duyguları öğrenilmek isteniyorsa en uygun yöntem yine kişiye giderek ondan bilgi almaktır. Kişinin açık uçlu sorulara vereceği özgür yanıtlar çerçevesinde onun düşüncelerini, duygularını ya da görüşlerini daha doğru bir biçimde öğrenmek olanaklıdır. Bu çerçevede, diğer yöntemlere göre farklı nitelikte ve derinlikte veri sağlayacak bir araştırma tekniği olarak "görüşme" önerilebilir (Türnüklü, 2000, s. 544).

Eğitim alanında yapılan çalışmalarda genelde görüşme tekniğinin üç türü kullanılmaktadır (Pattan, 1987: 109; Robson, 1993: 230; Wragg, 1994: 272; Gali, Borg ve Gali, 1996: 310;

Holstein ve Gubrium, 1997: 113). Bunlar; Yapılandırılmış, yarı yapılandırılmış ve yapılandırılmamış görüşmedir (Türnüklü, 2000, s. 546).

*Yapılandırılmış görüşme;* araştırmacının, araştırmaya katılan her bir kişiye aynı soruları aynı biçimde ve aynı sözcüklerle sorduğu bir görüşme türüdür. Kişinin vermiş olduğu yanıtlar kapalı uçludur, kişi kendisine sunulan olası seçeneklerden birisini seçerek yanıtını verir (Türnüklü, 2000, s. 546-547). Yapılandırılmış görüşmede amaç, görüşülen bireylerin verdikleri bilgiler arasındaki paralelliği ve farklılığı saptamak ve buna göre karşılaştırmalar yapmaktır (Brannigan, 1985; akt. Yıldırım ve Şimşek, 2011, s. 120).

*Yarı yapılandırılmış görüşme*; yapılandırılmış görüşme tekniğinden biraz daha esnektir. Bu teknikte, araştırmacı önceden sormayı planladığı soruları içeren görüşme protokolünü hazırlar. Buna karşın araştırmacı görüşmenin akışına bağlı olarak değişik yan ya da alt sorularla görüşmenin akışını etkileyebilir ve kişinin yanıtlarını açmasını ve ayrıntılandırmasını sağlayabilir. Eğer kişi görüşme esnasında belli soruların yanıtlarını başka soruların içerisinde yanıtlamış ise araştırmacı bu soruları sormayabilir. Yarı yapılandırılmış görüşme tekniği sahip olduğu belirli düzeyde standartlık ve aynı zamanda esneklik nedeniyle eğitim bilim araştırmalarına daha uygun bir teknik görünümü vermektedir (Türnüklü, 2000, s. 547). Bu tür görüşmede, araştırılan kişilerin araştırma üzerine kontrolleri söz konusudur (Ekiz, 2003, s. 62).

*Yapılandırılmamış görüşme;* diğer bir kişiyle yapılan sözel etkileşimin doğal akışı içerisinde herhangi bir görüşme protokolü olmaksızın spotane yapılan bir iletişim biçimidir (Gali, Borg ve Gali, 1996, s. 310). Araştırmacı, görüşme yapılan kişinin yanıtlarına bağlı olarak kendini sürekli yeniden yapılandırmak ve her verilen yanıta koşut yeni soruları o an hazırlamak ve sormak durumundadır (Türnüklü, 2000, s. 546). Bu tekniğin en önemli sınırlılığı araştırmanın amacıyla ilgili sistematik veri toplanması ve verilerin analizi için çok zaman ve enerji gerektirmesidir (Patton, 1990, s. 282).

Yazılı sınav sorularıyla öğrencilerin fikirleri ve problem çözme yöntemleri hakkında bilgi elde edilebilmesine rağmen bu uygulama öğrencilerin hangi düşünme süreçlerinden geçtikleri ve soruları nasıl anladıkları konusunda bilgi vermekte yeterli olmayabilmektedir. Bu nedenle bu çalışmada öğrencilerin ispat yaparken nasıl düşündüklerini, soruları algılayışlarını, kullandıkları ispat şemalarını ve ispata yönelik görüşlerini daha iyi yansıtabilmek için ispat şemalarını belirlemeye yönelik ölçme aracıyla yapılan yazılı sınava ek olarak yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir.

Yarı yapılandırılmış görüşme için görüşme formu 9 sorudan oluşmaktadır. Sorular araştırmada ulaşılmak istenilen bilgiler doğrultusunda hazırlanmıştır. Bu soruların geçerlik ve güvenilirliğini sağlamak amacıyla 4 öğrenci ile pilot çalışma yapılmış ve uzman görüşlerine başvurulmuştur. Öğrencilerle yapılan görüşmeler ve 2 uzman görüşü sonucunda görüşme sorularının genel anlamda amaca uygun olduğuna ve yarı yapılandırılmış olması doğrultusunda sorularda bir değişiklik yapılmamasına karar verilmiştir.

Görüşme soruları iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde öğrencilere, ispat şemalarını belirlemeye yönelik ölçme aracındaki problemlere verdikleri yanıtların çözüm süreçlerini ayrıntılı bir şekilde ortaya koymalarına yönelik 4 soru, ikinci bölümde ise ispata yönelik genel görüşlerini öğrenebilmek için 5 soru sorulmuştur.

**Tablo 3.4. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları**

| **Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları** |
|---|
| ***İspat Şemalarını Belirlemeye Yönelik Ölçme Aracındaki Problemlere İlişkin Sorular*** |
| Bu Soruyu çözerken nasıl bir yol izlediniz, çözümünüzü açıklar mısınız? |
| Bu yolu seçmeye nasıl karar verdiniz, neden bu yolu tercih ettiniz? |
| Bu sorunun başka bir çözüm yolu olabilir mi? |
| Bu ispatta eksik bıraktığınız noktalar olduğunu düşünüyor musunuz? Sizce yaptığınız ispat yeterli mi? |
| ***İspata Yönelik Genel Bakış Açılarını Öğrenmeye İlişkin Sorular*** |
| İspat yaparken zorlandığınız noktalar nelerdir? |

| |
|---|
| İspat yapmanın gerekli olduğunu düşünüyor musunuz? Sizce gerekliyse ya da değilse nedenini açıklar mısınız? |
| İspat yaparken nelere dikkat edersiniz? Genel olarak ispat yapış tarzınızı ve bu süreçteki düşünme yollarınızı açıklayabilir misiniz? |
| İspat yapmaya neden ihtiyaç duyarız? |
| Verilen bir soruyu ispatlayabildiğinizde ya da ispatlayamadığınız da neler hissedersiniz? |

İlköğretim ve ortaöğretim birinci ve son sınıfların her birinden 3 öğretmen adayı olacak şekilde toplam 12 öğrenci ile yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Görüşme yapılacak öğrencilerin belirlenmesinde yazılı sınavda yapılan problem çözümlerinde farklı türde ispat şemalarının kullanılmış olmasına dikkat edilmiştir.

### 3.3.3 İspat Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği

Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerini öğrenmek amacıyla Almedia' nın (2001) çalışmasında kullandığı Moralı ve arkadaşları (2006) tarafından geliştirilen ölçek kullanılmıştır. Ölçek 5 'li likert tipinde olup toplam 20 maddeden oluşmakta ve yanıt seçeneği tamamen katılıyorum ile kesinlikle katılmıyorum arasında derecelenmektedir. Olumlu veya ispat açısından kabul gören maddelerden tamamen katılıyorum yanıtına 5, kesinlikle katılmıyorum yanıtına 1 puan verilerek puanlama yapılmaktadır. Bazı maddeler ters görüş içerdikleri için bu maddeler ters çevrilerek analiz edilmektedir. Ölçek Ek 1' de verilmektedir.

Ölçeğin güvenilirliği 0.80 olarak belirlenmiştir. Ölçeğin yapı geçerliliğini belirlemek için yapılan faktör analizi sonucunda ölçek yedi faktörlü bulunmuştur. Yedi faktörün ölçeğe ilişkin açıkladığı toplam varyans %59'dur. Yapılan değerlendirme sonrasında birinci faktörün öğrencilerin kişisel ispat yeterliliklerini (ölçeğin 14, 18, 19 ve 20 nolu maddeleri), ikinci faktörün öğrencilerin ispat yapmanın önemine yönelik görüşlerini (6, 7, 8 ve 17 nolu maddeler), üçüncü faktörün öğrencilerin ispatın teoremi anlamaya etkisine yönelik görüşlerini (11, 12, 13 ve 16 nolu maddeler), dördüncü faktörün öğrencilerin ispat yapmaya yönelik benlik algılarını (9 ve 10 nolu maddeler), beşinci faktörün öğrencilerin ispat yapmaya yönelik genel görüşlerini (1, 2 ve 4 nolu maddeler), altıncı faktörün öğrencilerin örnek, teoreme bakış açılarını (3 ve 5 nolu maddeler), yedinci faktörün öğrencilerin problem çözme ve matematiksel ispat arasındaki ilişkiye yönelik görüşlerini (15 nolu madde) belirlediği ortaya konulmuştur. Bunun yanı sıra maddeler ele alındığında ölçeğin beş temel içerikte toplamasına karar verilmiştir. Bu içerikler şu şekildedir: İspat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklere yönelik görüşler (1, 2, 3, 5, 11, 12, 13 maddeler), ispat yapma benlik algısı (10 ve 14 nolu maddeler), ispat yapmanın önemine ilişkin görüşler (4, 6, 8 ve 17 nolu maddeler), ispat yapmaya ilişkin genel görüşler (7, 15, 16, 19 ve 20 nolu maddeler) ve ispat yapmayla ilgili duygular (9, 18 nolu maddeler) (Moralı ve ark., 2006).

Ölçek farklı bir çalışma grubuna uygulandığından dolayı yeniden güvenirlik çalışması yapılması uygun görülmüştür. Uygulama sonuçlarına göre güvenirlik katsayısı araştırmanın çalışma grubu için 0,84 olarak hesaplanmıştır. Bu sonuçlar doğrultusunda ölçeğin çalışma için uygun olduğuna karar verilmiştir.

## 3.4 Verilerin Toplanması

Bu bölümde nicel ve nitel verilerin ayrı ayrı toplanması sürecinde izlenen adımlar ayrıntılı bir şekilde anlatıldıktan sonra akış şeması ile özetlenmiştir.

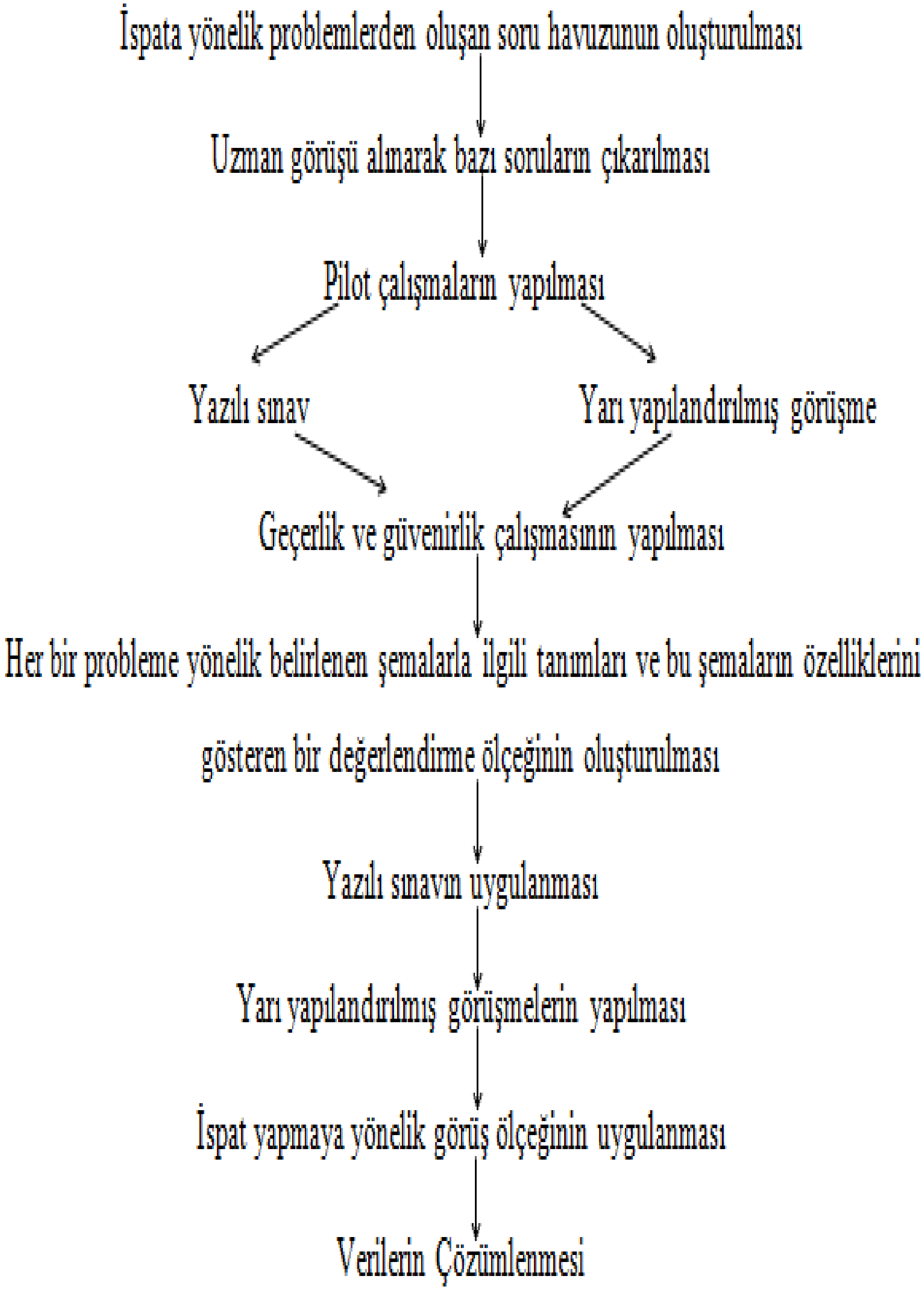
Öncelikle matematik öğretmen adaylarının ne tür ispat şemaları kullandığını, ilköğretim birinci ve son sınıf ile ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının kendi bölümleri bazında sınıf düzeylerine göre sahip oldukları ispat şemaları açısından bir farklılık olup olmadığını ortaya koyabilmek için yazılı olarak problemlerin sorulduğu ve cevapların alındığı bir ölçme aracı araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Bu ölçme aracındaki problemlere ve yarı yapılandırılmış görüme sorularına ilişkin pilot uygulama yapılarak ve uzman görüşleri alınarak geçerlik ve güvenilirlikleri sağlanmıştır.

Pilot uygulama gerçekleştirildikten sonra açık uçlu 9 problemden oluşan yazılı sınav ilk ve orta öğretim matematik öğretmenliği bölümü birinci ve son sınıf öğrencilerine bir öğretim üyesiyle beraber 90 dakikalık süre tanınarak uygulanmıştır. Uygulamaya başlamadan önce öğretmen adaylarına bu sınavın bilimsel bir araştırmada kullanılmak üzere yapıldığı, not olarak değerlendirilmeyeceği ve istedikleri şekilde çözebilecekleri vurgulanmıştır. Bu sınavlardan elde edilen veriler pilot uygulama sonucunda oluşturulan ispat şemalarının özelliklerini içeren ölçek yardımıyla değerlendirilmiştir. Yanıtlar ispat şemalarına ve bunların alt şemalarına göre sınıflandırılarak hangi tür ispat şemalarının kullanıldığı belirlenmiştir.

Öğretmen adaylarının tamamına uygulanan yazılı sınavdan ilköğretim ve ortaöğretim birinci ve son sınıfların her birinden 3 öğretmen adayı olmak üzere toplam 12 öğrenci ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Görüşmeler sohbet tarzında gerçekleştirilmiş ve verileri sadece araştırmacının değerlendireceği belirtilmiş, böylece öğretmen adaylarının daha rahat ve samimi olmaları sağlanmaya çalışılmıştır.

Görüşmeler her bir öğretmen adayıyla ayrı ayrı araştırmacının odasında gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarına yazılı sınavda sorulan problemler yöneltilmiş olup çözümlerini yapabilmeleri için kağıt, kalem temin edilmiştir. Süre kısıtlaması yapılmamış öğretmen adaylarının cevap verebildiği ölçüde görüşmelere devam edilmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşme sırasında öğrencilerin verdiği yanıtlar, yaptığı yorumlar öğretmen adaylarından izin alınarak ses kayıt cihazına kaydedilmiştir. Bu süreçte öğrencilerin nasıl düşündüklerini ortaya koyabilmek için neden, nasıl, ispat için yeterli mi gibi sorular yöneltilerek problemleri çözme aşamalarını açıklamaları istenmiştir. Ayrıca yarı yapılandırılmış görüşme sonrasında öğrencilerden ispatla ilgili görüşlerine yönelik yanıtlarını yazılı olarak da ifade etmeleri istenmiştir.

Son olarak öğretmen adaylarına gerekli açıklamalar yapıldıktan sonra 20 maddeden oluşan ispat yapmaya yönelik görüş ölçeği 15 dakikalık bir zaman diliminde öğrencilere uygulanmıştır. Bu ölçek yardımıyla öğrencilerin ispat ve ispat yapmaya yönelik düşünceleri tespit edilmeye çalışılmıştır.




**Şekil 3.1. Uygulama sürecini gösteren akış şeması**

## 3.5 Verilerin Analizi

İlk ve orta öğretim matematik öğretmen adaylarının genel matematik dersinde kullandığı ispat şemalarının çeşitlerini ortaya koymak amacıyla hazırlanan ispat şemalarını belirlemeye yönelik ölçme aracından ve matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik bakış açılarıyla ile ilgili ölçekten elde edilen veriler nicel olarak değerlendirilmiştir. Bunun yanı sıra yazılı sınavda yer alan sorular yarı yapılandırılmış görüşme sırasında öğrencilere yeniden çözdürülmüştür. Bu süreçte nasıl düşündüklerine yönelik olarak sorulan sorular ve ispatla ilgili genel görüşlerini tespit etmek için yöneltilen açık uçlu sorular doğrultusunda elde edilen veriler ise nitel olarak değerlendirilmiştir.

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının 'Matematiksel İspat Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği'nden elde edilen görüşleri ile ölçekte yer alan faktörler bazında ayrı ayrı sınıf düzeyleri bakımından aralarında anlamlı bir farklılık olup olmadığı bir istatistiksel analiz programıyla analiz edilmiş ve sonuçlar yorumlanmıştır.

Yazılı sınavdan elde edilen verilerin analizinde öğretmen adaylarının cevapları dışsal, deneysel, analitik ve boş olmak üzere dört kategoriye ayrılmıştır. Kullanılan ispat ve alt ispat şemalarına ilişkin yüzde frekans tablosu oluşturulmuş ve sütun grafiği çizilmiştir. Ayrıca sınıf düzeylerine ve cinsiyete göre kullanılan ispat şemalarında anlamlı bir farklılık olup olmadığı bir istatistiksel analiz programıyla analiz edilmiş ve sonuçlar yorumlanmıştır.

Yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen veriler de yazılı sınavda olduğu gibi kategorilere ayrılmıştır.

### 3.5.1 İspat Şemalarını Belirlemeye Yönelik Ölçme Aracının Analizi

İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının kullandıkları ispat şemalarını belirlemek ve bu şemaların bölümler bazında sınıf düzeylerine göre farklılaşıp farklılaşmadığını incelemek amacıyla öğrencilere genel matematik dersi kapsamında hazırlanan 9 problemden oluşan yazılı sınav uygulanmıştır. Yazılı sınav sonucunda elde edilen cevapların hangi şemaya dahil olduğu, şemaları belirlemeye yönelik olarak hazırlanan "Değerlendirme Ölçeği" (Bkz.Ek.1) yardımıyla belirlenmiştir.

Bu süreçte öncelikle öğretmen adaylarının cevapları değerlendirme ölçeği yardımıyla otorite, alışkanlık edinilmiş, sembolik, temel örnekler, sezgisel, dönüştürülebilen, aksiyomatik ve boş olmak üzere alt ispat şemalarına göre ayrı ayrı sınıflandırılmıştır. Bu sınıflamalar doğrultusunda tüm problemler için her sınıf düzeyi bazında alt ispat şemalarına yönelik yüzde ve frekans tablosu oluşturularak yüzdelerine göre sütun grafiği çizilmiştir. Ayrıca alt şemalar birleştirilerek cevaplar dışsal, deneysel, analitik ve boş olmak üzere dört kategoriye ayrılmıştır. Bu kategoriye göre tüm problemler ve ayrı ayrı her problem için frekans ve yüzde değerleri hesaplanarak sütun grafiği oluşturulmuştur.

İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının her bölüm kendi içinde kıyaslanacak şekilde sınıf düzeylerine göre yazılı sınavda kullandıkları ispat şemaları açısından aralarında anlamlı bir fark olup olmadığını belirlemeye yönelik olarak bir istatistiksel analiz programı kullanılmıştır. Bu süreçte her bir kategori boş 0, dışsal 1, deneysel 2 ve analitik 3 olacak şekilde puanlanmıştır. Her bir katılımcının hangi şemadan kaç tane kullandığı ve boş bıraktığı problem sayısı hesaplanarak ilköğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının sınıf düzeyi ve cinsiyet değişkenine göre kullandıkları şemalarda anlamlı bir farklılık olup olmadığı bağımsız t testi ile kontrol edilmiştir. Her iki gruptaki kişi sayısı 30 üzerinde olduğu için bu test tercih edilmiştir. Ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının sınıf düzeyi ve cinsiyet değişkeni açısından aralarındaki farkın anlamlı olup olmadığı ise iki grubun sayısı 30 altında olduğu için Mann-Whitney U testi kullanılarak incelenmiştir.

### 3.5.2 Yarı Yapılandırılmış Görüşme Analizi

Yarı yapılandırılmış görüşmelerde, görüşmenin başında öğretmen adaylarından yazılı sınavda uygulanan soruları tekrar çözmeleri istenmiş ve adaylara yarı yapılandırılmış görüşme soruları yöneltilmiştir. Bu görüşmelerde elde edilen verilerin analizinde öncelikle adaylardan izin alınarak ses kayıt cihazına kaydedilen görüşmeler çözümlenerek metin haline dönüştürülmüştür. Daha sonra görüşmelerden elde edilen öğrenci yanıtlarının yazılı sınavda kullanılan değerlendirme ölçeği yardımıyla hangi ispat şeması kategorisine girdiği betimsel analiz yapılarak belirlenmiştir.

Betimsel analizde elde edilen veriler, daha önceden belirlenen temalara göre özetlenir ve yorumlanır. Veriler, araştırma sorularının ortaya koyduğu temalara göre düzenlenebileceği gibi, görüşme ve gözlem süreçlerinde kullanılan sorular ya da boyutlar dikkate alınarak da sunulabilir. Betimsel analizde, görüşülen ya da gözlenen bireylerin görüşlerini çarpıcı bir şekilde yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara sık sık yer verilir. Bu tür analizde amaç, elde edilen bulguları düzenlenmiş ve yorumlanmış bir biçimde okuyucuya sunmaktır. Bu amaçla elde edilen veriler önce sistematik ve açık bir biçimde betimlenir. Daha sonra yapılan bu betimlemeler açıklanır, yorumlanır, neden sonuç ilişkileri irdelenir ve birtakım sonuçlara ulaşılır (Yıldırım ve Şimşek, 2011, s. 224). Bu araştırmada da matematik öğretmen adaylarının ispat yaparken nasıl düşündüklerini, anlama ve düşünme yollarını, çözüm aşamalarını ve ispatla ilgili görüşlerini ortaya koymak için katılımcıların soruları çözerken sergilemiş oldukları davranışlara ve araştırmacı ile adaylar arasında geçen dialoglardan doğrudan alıntılara yer verilmiştir. Bunun yanı sıra görüşme verileri Harel'in (1998) çalışmasında ortaya koyduğu yaygın hatalı düşünme yolları kategorilerine göre de betimsel analiz yöntemi kullanılarak analiz edilmiş ve öğrencilerin kullandığı hatalı düşünme şekilleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Ayrıca bu veriler doğrultusunda 12 öğretmen adayının tüm problemler ve ayrı ayrı her problem bazında kullandıkları ispat şemalarını gösteren tablolar oluşturulmuştur. Tablolar oluşturulurken öğretmen adaylarının isimleri kullanılmayarak bunun yerine isimlerini temsil edecek kodlamalar tercih edilmiştir.

### 3.5.3 İspat Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği Analizi

İspat yapmaya yönelik görüş ölçeği 5 li likert tipi ölçektir. Yanıt seçeneği 'tamamen katılıyorum', 'katılıyorum', 'kararsızım', 'katılmıyorum ve 'kesinlikle katılmıyorum' şeklinde derecelenmektedir. Bu yanıtlar sırasıyla 5, 4, 3, 2, 1 şeklinde puanlanmaktadır. Bazı maddeler ters görüş içerdikleri için bu maddeler ters çevrilerek analiz edilmiştir.

Moralı ve ark. (2006) tarafından ölçekte 70 puan alan kişilerin görüşleri istenilen yönde ve 60 ve altı puan alan kişilerin görüşleri istenilmeyen yöndedir. Ayrıca toplamda 70-61 puan alanlar kararsız kabul edilmiştir. Bu puan aralıkları doğrultusunda sınıf düzeylerine göre genel ortalama ve faktörde yer alan madde miktarına bağlı olarak elde edilecek faktör ortalamaları ile standart sapmalar hesaplanarak matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin ne yönde olduğu tespit edilmiştir.

Matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinde genel olarak ve ayrı ayrı faktörler bazında sınıf düzeylerine göre anlamlı bir farklılık olup olmadığı Tek Yönlü Varyans Analizi (ANOVA) kullanılarak analiz edilip yorumlanmıştır.

# BÖLÜM IV: BULGULAR

Bu bölümde öğretmen adaylarına uygulanan ölçekten ve yazılı sınavlardan elde edilen nicel veriler ile yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen nitel verilere yer verilmiştir.

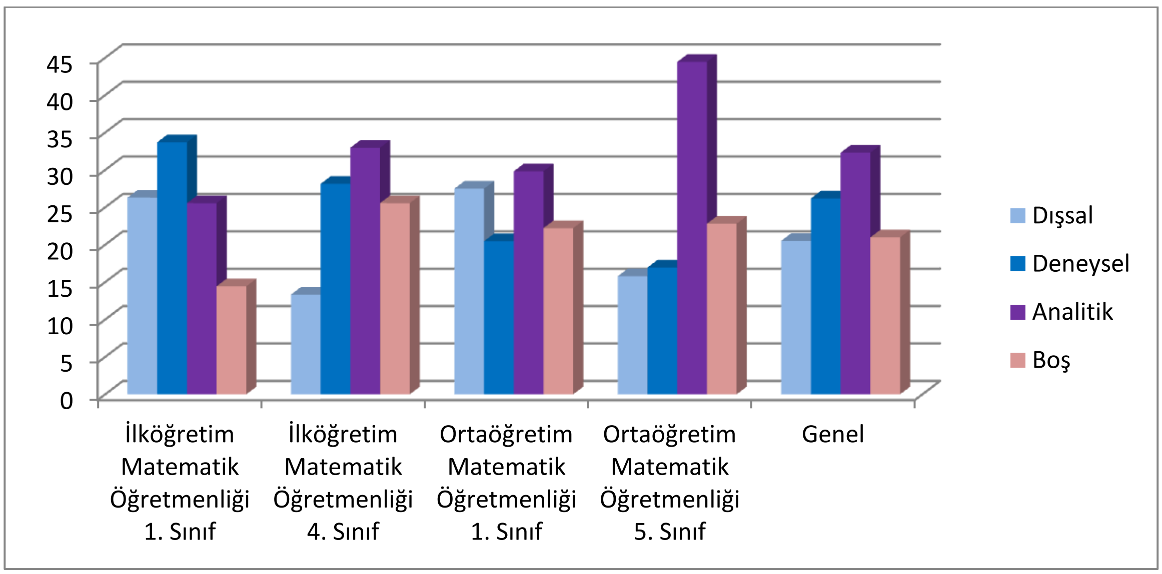
## 4.1 İspat Şemalarını Belirlemeye Yönelik Ölçme Aracından Elde Edilen Bulgular

Çalışmanın bu kısmında genel matematik dersi kapsamında hazırlanan problemlerde matematik öğretmen adaylarının kullandıkları ispat şemaları dışsal, deneysel, analitik ve boş olmak üzere dört farklı şekilde sınıflandırılmıştır. Öğretmen adaylarının sınıflara göre yazılı sınavda kullandıkları ispat şemalarını ve alt ispat şemalarını kapsayan yüzde ve frekans tabloları oluşturulmuştur. Bu veriler doğrultusunda ispat şemalarına ve alt ispat şemalarına ait yüzde sütun grafikleri elde edilmiş ve yorumlanmıştır. Daha sonra öğretmen adaylarının sınıf düzeylerine göre her bir problemde kullandıkları ispat şemalarına ilişkin yüzde ve frekans değerleri hesaplanmıştır. Bunun yanı sıra ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının her biri kendi branşı içinde olmak üzere birinci ve son sınıfların kullandıkları ispat şemaları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını tespit etmek için bir istatistik programı yardımıyla Bağımsız t testi ve Mann Whitney U testi kullanılarak analizler yapılmış ve yorumlanmıştır.

**Tablo 4.1 Matematik Öğretmen Adaylarının Yazılı Sınavda Kullandıkları İspat Şemalarına İlişkin Yüzde ve Frekans Tablosu**

| Sınıflar | İlköğretim Matematik Öğretmenliği 1.Sınıf | | İlköğretim Matematik Öğretmenliği 4.Sınıf | | Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 1.Sınıf | | Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 5.Sınıf | | Genel | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Şemalar | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % |
| Dışsal | 71 | 26,30 | 36 | 13,33 | 47 | 27,49 | 27 | 15,79 | 181 | 20,52 |
| Deneysel | 91 | 33,70 | 76 | 28,14 | 35 | 20,47 | 29 | 16,96 | 231 | 26,19 |
| Analitik | 69 | 25,56 | 89 | 32,97 | 51 | 29,82 | 76 | 44,44 | 285 | 32,31 |
| Boş | 39 | 14,44 | 69 | 25,56 | 38 | 22,22 | 39 | 22,81 | 185 | 20,98 |
| Toplam | 270 | 100 | 270 | 100 | 171 | 100 | 171 | 100 | 882 | 100 |

Tablo 4.1. ilköğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adayları ile ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adayları olmak üzere toplam 98 öğretmen adayının genel matematik dersi kapsamında hazırlanan yazılı sınavdaki toplam 882 probleme yönelik verdiği yanıtların ispat şemalarına göre sınıflanmış yüzde ve frekans değerlerini göstermektedir. Tablodaki bu değerlere bakıldığında matematik öğretmen adaylarının genel olarak %20,52'sinin dışsal şemayı, %26,19'unun deneysel şemayı, %32,31'inin analitik şemayı kullandığı ve %20,98'inin soruları boş bıraktığı görülmektedir. Bu veriler bizlere matematik öğretmen adaylarının kullandıkları ispat şemalarında farklılıklar olduğunu göstermektedir.




Şekil 4.1 Yazılı Sınavda Kullanılan İspat Şemalarına İlişkin Sütun Grafiği

Şekil 4.1'de 98 ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adayının sınıf düzeylerine göre yazılı sınavda kullandıkları ispatlarının yüzde değerlerine ilişkin sütun grafiği görülmektedir.

Yazılı sınav sonucunda elde edilen verilere göre ilköğretim birinci sınıflar problemlerde ağırlıklı olarak %33,70 (91 problem) oranında deneysel şemayı kullanmıştır. Ayrıca dışsal şemayı %26,30 (71 problem), analitik şemayı %25,56 (69 problem) oranında kullanırken soruların %14,44'ünü (39 problem) ise boş bırakmıştır. İlköğretim son sınıfların %32,97'si (89 problem) ağırlıklı olarak analitik şemayı %13,33'ü (36 problem) dışsal şemayı

%28,14’ü (76 problem) deneysel şemayı kullanırken soruların%25,56’sı (69 problem) öğretmen adayları tarafından boş bırakılmıştır. Ortaöğretim ilk sınıfların problemlerde ağırlıklı olarak %29,82 (51 problem) ile analitik şemayı kullandıkları görülmektedir. Dışsal şema %27,49 (47 problem) ve deneysel şemayı 20,47 (35 problem) oranında kullanılmıştır. Ayrıca soruların 22,22’si (38 problem) bu adaylar tarafından boş bırakılmıştır. Ortaöğretim son sınıflar ise problemlerin %44,44’ünde (76 problem) ağırlıklı olarak analitik şemayı, %15,79’unda (27 problem) dışsal şemayı, %16,96’sında (29 problem) deneysel şemayı kullanırken %22,81’ini (39 problem) boş bırakmıştır.

Tablo 4.1’deki değerler şemalar bazında ele alındığında son sınıfların dışsal şemaları kullanma yüzdelerinin birbirine yakın olduğu ve birinci sınıfların son sınıflara göre dışsal şemayı daha ağırlıklı olarak kullandıkları görülmektedir. Verilere göre dışsal şemaları en çok ortaöğretim birinci sınıflar kullanırken en az ilköğretim son sınıflar kullanmaktadır. Deneysel şemaların farklı oranlarda kullanıldığı ve ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ortaöğretim matematik öğretmen adaylarına göre deneysel şemaları daha fazla kullandığı görülmektedir. Deneysel şemaları en çok ilköğretim birinci sınıflar kullanırken en az ortaöğretim son sınıflar kullanmaktadır. Analitik şemaların kullanımı ele alındığında son sınıfların birinci sınıflara göre analitik şemaları daha çok kullandığı görülmektedir. Analitik şemaları en fazla ortaöğretim son sınıflar kullanırken en az ilköğretim birinci sınıflar kullanmaktadır. Soruların boş bırakılma yüzdelerine bakıldığında en fazla ilköğretim son sınıfların en az ilköğretim birinci sınıfların boş bıraktığı görülmektedir. Ortaöğretim birinci ve son sınıfların soruları boş bırakma yüzdeleri birbirine yakın bulunmuştur. Bu sonuçlara göre dışsal şemaları en çok ortaöğretim birinci sınıflar, deneysel şemaları ilköğretim birinci sınıflar, analitik şemaları ortaöğretim son sınıflar kullanırken soruları en çok ilköğretim son sınıflar boş bırakmıştır.

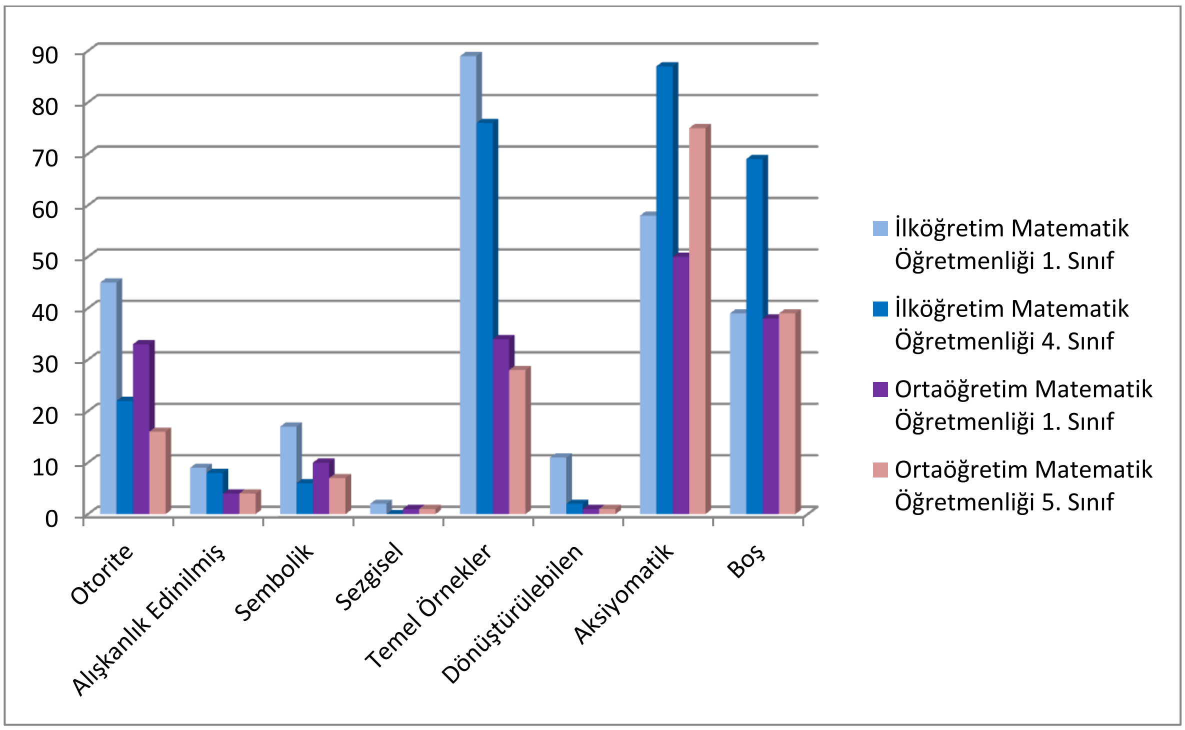
Genel olarak yazılı sınavda ağırlıklı kullanılan şemanın %32,31 (285 problem) ile analitik şema olduğu görülmektedir. Matematik öğretmen adayları problemlerde analitik şemadan sonra sırasıyla %26,19 (231 problem) oranında deneysel şemaları, %20,52 (181 problem) oranında dışsal şemaları kullanırken soruların %20,98’ini (185 problem) ise boş bırakmıştır. Buna göre yazılı sınavda matematik öğretmen adayları tarafından en çok kullanılan şema analitik en az kullanılan ise dışsal şemadır.

**Tablo 4.2 Matematik Öğretmen Adaylarının Yazılı Sınavda Kullandıkları Alt İspat Şemalarına İlişkin Yüzde ve Frekans Tablosu**

| Şemalar | | İlköğretim Matematik Öğretmenliği 1.Sınıf | | İlköğretim Matematik Öğretmenliği 4.Sınıf | | Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 1.Sınıf | | Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 5.Sınıf | | Toplam | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % |
| Dışsal | Otorite | 45 | 16,67 | 22 | 8,14 | 33 | 19,30 | 16 | 9,35 | 116 | 13,16 |
| | Alışkanlık Edinilmiş | 9 | 3,33 | 8 | 2,97 | 4 | 2,34 | 4 | 2,34 | 25 | 2,83 |
| | Sembolik | 17 | 6,30 | 6 | 2,22 | 10 | 5,85 | 7 | 4,09 | 40 | 4,54 |
| Deneysel | Sezgisel | 2 | 0,74 | - | 0 | 1 | 0,59 | 1 | 0,59 | 4 | 0,46 |
| | Temel Örnekler | 89 | 32,96 | 76 | 28,15 | 34 | 19,88 | 28 | 16,37 | 227 | 25,73 |
| Analitik | Dönüştürülebilen | 11 | 4,08 | 2 | 0,74 | 1 | 0,58 | 1 | 0,59 | 15 | 1,70 |
| | Aksiyomatik | 58 | 21,48 | 87 | 32,22 | 50 | 29,24 | 75 | 43,86 | 270 | 30,61 |
| | Boş | 39 | 14,44 | 69 | 25,56 | 38 | 22,22 | 39 | 22,81 | 185 | 20,97 |
| | Toplam | 270 | 100 | 270 | 100 | 171 | 100 | 171 | 100 | 882 | 100 |

Tablo 4.2 ilköğretim ilk ve son sınıf matematik öğretmen adayları ile ortaöğretim ilk ve son sınıf matematik öğretmen adayları olmak üzere toplam 98 öğretmen adayının genel matematik dersi kapsamında hazırlanan yazılı sınavdaki toplam 882 probleme yönelik verdiği yanıtların alt ispat şemalarına göre sınıflanmış yüzde ve frekans değerlerini göstermektedir. Tablodaki değerlere bakıldığında genel olarak matematik öğretmen adaylarının yazılı sınavda dışsal şema kategorisini oluşturan otorite, alışkanlık edinilmiş ve

sembolik alt ispat şemalarını farklı oranlarda kullandığı görülmektedir. Öğretmen adayları alt ispat şemalarından otorite şemasını %13,16 (116 problem), alışkanlık edinilmiş ispat şemasını %2,83 (25 problem) ve sembolik ispat şemasını %4,54 (40 problem) kullanmıştır. Deneysel şemayı oluşturan sezgisel ve temel örnekler şemalarından sezgisel şemayı kullanma oranı %0,46 (4 problem) iken temel örnekler şemasını kullanma oranı %25,73'dur (227 problem). Analitik şema kategorisinde yer alan dönüştürülebilen ve aksiyomatik alt ispat şemalarına baktığımız da ise öğretmen adaylarının dönüştürülebilen şemayı %1,70 (15 problem) ve aksiyomatik şemayı %30,61 (270 problem) kullandığı görülmektedir.




Şekil 4.2. Yazılı Sınavda Kullanılan Alt İspat Şemalarına İlişkin Sütun Grafiği

Şekil 4.2'de 98 ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adayının sınıf düzeylerine göre yazılı sınavda kullandıkları alt ispat şemalarının yüzde değerlerine ilişkin sütun grafiği görülmektedir.

Yazılı sınav sonucunda elde edilen verilere göre ilköğretim ilk sınıf matematik öğretmen adayları problemlerde dışsal alt şemalardan % 16,67 (45 problem) otorite şemasını kullanırken %3,33 (9 problem) alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ve %6,30 (17 problem) sembolik şemayı kullanmıştır. Deneysel alt şemalardan sezgisel şema ile temel örnekler şemasının kullanım yüzdesi bakımından aralarındaki farkın fazla olduğu görülmektedir. Sezgisel şema %0,74 (2 problem) oranında kullanılırken temel örnekler şeması %32,96 (89 problem) oranında kullanılmıştır. Analitik alt ispat şemalarını ele alacak olursak öğretmen adaylarının dönüştürülebilen ispat şemasını % 4,08 (11 problem) ve aksiyomatik şemasını %21,48 (58 problem) kullandığı görülmektedir. İlköğretim son sınıf matematik öğretmen adayları problemlerde dışsal alt şemalardan % 8,14 (22 problem) oranında otorite şemasını kullanırken %2,97 (8 problem) alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ve %2,22 (6 problem) sembolik şemayı kullanmıştır. Deneysel alt şemalardan sezgisel şema hiç kullanılmazken temel örnekler şeması %28,15 (76 problem) oranında kullanılmıştır. Analitik alt ispat şemalarına baktığımızda öğretmen adaylarının dönüştürülebilen ispat şemasını % 0,74 (2 problem) ve aksiyomatik şemayı %32,22 (87 problem) kullandığı görülmektedir.

Ortaöğretim ilk sınıf matematik öğretmen adayları problemlerde dışsal alt şemalardan % 19,30 (33 problem) oranında otorite şemasını kullanırken %2,34 (4 problem) alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ve %5,85 (10 problem) sembolik şemayı kullanmıştır. Deneysel alt şemalardan sezgisel şema %0,59 (1 problem) oranında kullanılırken temel örnekler şeması %19,88 (34 problem) oranında kullanılmıştır. Analitik alt ispat şemalarına baktığımızda öğretmen adaylarının dönüştürülebilen ispat şemasını % 0,58 (1 problem) ve aksiyomatik şemayı %29,24 (50 problem) kullandığı görülmektedir. Ortaöğretim son sınıf matematik öğretmen adayları problemlerde dışsal alt şemalardan otorite şemasını %9,35 (16 problem) oranında kullanırken %2,34 (4 problem) alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ve %4,09 (7 problem) sembolik şemayı kullanmıştır. Deneysel alt şemalardan sezgisel şema %0,59 (1 problem) oranında kullanılırken temel örnekler şeması %16,37 (28 problem) oranında kullanılmıştır. Analitik alt ispat şemalarına baktığımızda öğretmen adaylarının dönüştürülebilen ispat şemasını % 0,59 (1 problem) ve aksiyomatik şemayı %43,86 (75 problem) kullandığı görülmektedir.

Tablo 4.2'deki değerler ele alındığında bütün sınıflar bazında dışsal alt ispat şemalarından en fazla otorite şemasının, deneysel alt ispat şemalarından temel örnekler şemasının ve analitik alt ispat şemalarından aksiyomatik şemanın tercih edildiği görülmektedir. İlk sınıfların son sınıflara göre dışsal alt ispat şemalarından otorite şemasını kullanma yüzdeleri daha yüksek bulunmuştur. Alışkanlık edinilmiş ve sembolik ispat şeması kullanım oranı ise her sınıf için birbirine oldukça yakın değerdedir fakat sembolik şemanın az bir farkla da olsa alışkanlık edinilmiş ispat şemasına göre daha fazla tercih edildiği görülmektedir. Deneysel alt ispat şemalarından temel örnekler şemasını ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ortaöğretim matematik öğretmen adaylarına oranla daha çok kullandığı ve kullanım yüzdeleri arasındaki farklılığın fazla olduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarının sezgisel şemayı kullanma yüzdelerinin ise bütün sınıflar açısından birbirine yakın olduğu görülmektedir. Analitik alt ispat şemalarından aksiyomatik şemanın ilk sınıflara göre son sınıflarda kullanım oranı daha yüksek bulunmuştur. Dönüştürülebilen ispat şemasının tercih oranı bütün sınıflar için birbirine yakın olmakla beraber ilköğretim ilk sınıflarda diğer sınıflara göre daha fazla olduğu görülmektedir. Bu sonuçlar doğrultusunda alt ispat şemalarına göre ilköğretim ilk sınıflar en fazla temel örnekler ispat şemasını kullanırken ilköğretim son sınıflar, ortaöğretim ilk sınıflar ve ortaöğretim son sınıflar ise ağırlıklı olarak aksiyomatik ispat şemasını kullanmaktadırlar. Ayrıca alt ispat şemalarını ayrı ayrı ele aldığımızda otorite şemasını en çok ortaöğretim ilk sınıfların, alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ilköğretim ilk sınıfların, sembolik, sezgisel, temel örnekler ve dönüştürülebilen ispat şemalarını ilköğretim ilk sınıfların ve son olarak aksiyomatik ispat şemasını ortaöğretim son sınıfların kullandığı görülmektedir.

Genel olarak yazılı sınavda ağırlıklı kullanılan alt ispat şemasının %30,61 (270 problem) ile aksiyomatik ispat şeması olduğu görülmektedir. Matematik öğretmen adayları problemlerde aksiyomatik ispat şemasından sonra sırasıyla %25,73 (227 problem) temel örnekler şemasını, %13,16 (116 problem) otorite şemasını, %4,54 sembolik şemayı, %2,83 alışkanlık edinilmiş ispat şemasını, %1,70 dönüştürülebilen ispat şemasını ve %0,46 sezgisel ispat şemasını kullanmıştır. Buna göre yazılı sınavda matematik öğretmen adayları tarafından en çok kullanılan alt ispat şeması aksiyomatik en az kullanılan ise sezgisel şemadır.

İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının her bölüm kendi içinde karşılaştırılmak üzere genel matematik dersi kapsamında hazırlanan 9 problemde kullandıkları ispat şemaları arasında sınıf düzeylerine ve cinsiyete göre anlamlı bir farklılık olup olmadığını araştırmak için yapılan analiz sonuçları tablolar halinde aşağıda sunulmuştur.

**Tablo 4.3 İlköğretim Birinci ve Son Sınıf Matematik Öğretmen Adaylarının Yazılı Sınavda Kullandıkları İspat Şemalarına İlişkin t Testi Tablosu**

| Şemalar | Sınıflar | N | $\bar{X}$ | S | Sd | t | P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dışsal | İlköğretim Birinci Sınıf | 30 | 2,333 | 1,154 | 57,129 | 4,148 | ,000 |
| | İlköğretim Son Sınıf | 30 | 1,166 | 1,019 | | | |
| | Toplam | 60 | | | | | |
| Deneysel | İlköğretim Birinci Sınıf | 30 | 2,933 | 1,387 | 57,972 | 1,128 | ,264 |
| | İlköğretim Son Sınıf | 30 | 2,533 | 1,357 | | | |
| | Toplam | 60 | | | | | |
| Analitik | İlköğretim Birinci Sınıf | 30 | 2,300 | 1,178 | 57,218 | -2,058 | ,044 |
| | İlköğretim Son Sınıf | 30 | 2,966 | 1,325 | | | |
| | Toplam | 60 | | | | | |
| Boş | İlköğretim Birinci Sınıf | 30 | 1,433 | 1,006 | 51,286 | -2,767 | ,008 |
| | İlköğretim Son Sınıf | 30 | 2,333 | 1,470 | | | |
| | Toplam | 60 | | | | | |

Tablo 4.3 ilköğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının yazılı sınavda kullandıkları ispat şemaları arasındaki farklılığın anlamlı olup olmadığını belirlemeye yönelik olarak yapılan t testi sonuçlarını göstermektedir. Tablodaki değerlere göre dışsal ve analitik şemalar ile sınıf seviyeleri arasında $p < .05$ düzeyinde anlamlı bir farklılık bulunurken deneysel şema ile sınıf seviyeleri arasındaki farklılığın anlamlı olmadığı tespit edilmiştir. Tablodaki ortalamalar göz önünde bulundurulduğunda ilköğretim birinci sınıfların son sınıflara göre dışsal şemayı daha fazla kullandığı, analitik şemayı ise daha az kullandığı görülmektedir Ayrıca sınıf seviyeleri ile boş bırakılan sorular arasında da $p < .05$ düzeyinde anlamlı bir farklılığa rastlanmıştır. İlköğretim birinci sınıfların soruları boş

bırakma ortalaması son sınıflara göre daha düşük bulunmuştur. Ayrıca birinci sınıfların en fazla deneysel şemayı son sınıfların ise analitik şemayı kullandığı görülmektedir.

**Tablo 4.4. Ortaöğretim Birinci ve Son Sınıf Matematik Öğretmen Adaylarının Yazılı Sınavda Kullandıkları İspat Şemalarına İlişkin Mann-Whitney U Tablosu**

| Şemalar | Sınıflar | N | Sıralar Ortalaması | Sıralar Toplamı | Mann-Whitney U | Z | P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dışsal | Ortaöğretim Birinci Sınıf | 19 | 24,03 | 456,50 | 94,500 | -2,605 | ,009 |
| | Ortaöğretim Son Sınıf | 19 | 14,97 | 284,50 | | | |
| | Toplam | 38 | | | | | |
| Deneysel | Ortaöğretim Birinci Sınıf | 19 | 20,68 | 393,00 | 158,000 | -,690 | ,490 |
| | Ortaöğretim Son Sınıf | 19 | 18,32 | 348,00 | | | |
| | Toplam | 38 | | | | | |
| Analitik | Ortaöğretim Birinci Sınıf | 19 | 14,63 | 278,00 | 88,000 | -2,783 | ,005 |
| | Ortaöğretim Son Sınıf | 19 | 24,37 | 463,00 | | | |
| | Toplam | 38 | | | | | |
| Boş | Ortaöğretim Birinci Sınıf | 19 | 19,47 | 370,00 | 180,000 | -,015 | ,988 |
| | Ortaöğretim Son Sınıf | 19 | 19,53 | 371,00 | | | |
| | Toplam | 38 | | | | | |

Tablo 4.4 ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının yazılı sınavda kullandıkları ispat şemaları arasındaki farklılığın anlamlı olup olmadığını belirlemeye yönelik olarak yapılan Mann-Whitney U testi sonuçlarını göstermektedir. Analiz sonuçlarına göre sınıf seviyeleri ile öğretmen adaylarının kullandıkları dışsal ve analitik şemalar arasında $p < .05$ düzeyinde anlamlı bir fark bulunmaktadır. Sıralar ortalaması incelendiğinde ortaöğretim birinci sınıfların son sınıflara göre dışsal şemayı daha fazla analitik şemayı ise daha az kullandıkları görülmektedir. Bunun yanı sıra sınıf seviyelerine göre kullanılan deneysel şemalar ve boş bırakılan sorular açısından anlamlı bir farklılık bulunmamıştır. Ayrıca ilk sınıfların en fazla deneysel şemayı son sınıfların ise analitik şemayı kullandığı görülmektedir.

**Tablo 4.5. Matematik Öğretmenen Adaylarının Yazılı Sorulan 9 Problemde Kullandıkları İspat Şemalarına İlişkin Yüzde ve Frekans Tablosu**

| **Sınıflar** | | İlköğretim Matematik Öğretmenliği 1. sınıf | | | | İlköğretim Matematik Öğretmenliği 4. sınıf | | | | Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 1. sınıf | | | | Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 5. sınıf | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **İspat Şemaları** | | **Dışsal** | **Deneysel** | **Analitik** | **Boş** | **Dışsal** | **Deneysel** | **Analitik** | **Boş** | **Dışsal** | **Deneysel** | **Analitik** | **Boş** | **Dışsal** | **Deneysel** | **Analitik** | **Boş** |
| **1.Problem** | N | 12 | 10 | 3 | 5 | 5 | 19 | - | 6 | 10 | 1 | 3 | 5 | 4 | 3 | 6 | 6 |
| | % | 40 | 33,3 | 10 | 16,7 | 16,7 | 53,3 | 0 | 20 | 52,6 | 5,3 | 15,7 | 26,3 | 21 | 15,8 | 31,6 | 31,6 |
| **2.Problem** | N | 10 | 17 | 3 | - | 2 | 11 | 17 | - | 5 | 8 | 6 | - | - | 1 | 18 | - |
| | % | 33,3 | 56,7 | 10 | 0 | 6,6 | 36,7 | 56,7 | 0 | 26,3 | 42,1 | 31,6 | 0 | 0 | 5,3 | 94,7 | 0 |
| **3.Problem** | N | 4 | 8 | 12 | 6 | 1 | 7 | 16 | 6 | - | 3 | 12 | 4 | 3 | 5 | 6 | 5 |
| | % | 13,4 | 26,6 | 40 | 20 | 3,3 | 23,3 | 53,4 | 20 | 0 | 15,8 | 63,1 | 21,1 | 15,8 | 26,3 | 31,6 | 26,3 |
| **4.Problem** | N | 8 | 17 | - | 5 | 7 | 12 | 4 | 7 | 11 | 1 | 4 | 3 | 10 | 1 | 6 | 2 |
| | % | 26,6 | 56,7 | 0 | 16,7 | 23,3 | 40 | 13,4 | 23,3 | 57,9 | 5,3 | 21,1 | 15,7 | 52,6 | 5,3 | 31,6 | 10,5 |
| **5.Problem** | N | 5 | 3 | 22 | - | 3 | 1 | 22 | 4 | 2 | 2 | 11 | 4 | 1 | - | 17 | 1 |
| | % | 16,7 | 10 | 73,3 | 0 | 10 | 3,3 | 73,3 | 13,4 | 10,5 | 10,5 | 57,9 | 21,1 | 5,3 | 0 | 89,4 | 5,3 |
| **6.Problem** | N | 9 | 5 | 16 | - | 3 | 3 | 23 | 1 | 5 | 2 | 11 | 1 | 2 | - | 16 | 1 |
| | % | 30 | 16,7 | 53,3 | 0 | 10 | 10 | 76,7 | 3,3 | 26,3 | 10,5 | 57,9 | 5,3 | 10,5 | 0 | 84,2 | 5,3 |
| **7.Problem** | N | 15 | 5 | 5 | 5 | 10 | 1 | 2 | 17 | 10 | 1 | - | 8 | 5 | 3 | 1 | 10 |
| | % | 50 | 16,7 | 16,7 | 16,7 | 33,4 | 3,3 | 6,6 | 56,7 | 52,6 | 5,3 | 0 | 42,1 | 26,3 | 15,8 | 5,3 | 52,6 |
| **8.Problem** | N | 6 | 22 | 1 | 1 | 2 | 22 | - | 6 | 3 | 15 | - | 1 | 2 | 14 | 2 | 1 |
| | % | 20 | 73,4 | 3,3 | 3,3 | 6,7 | 73,3 | 0 | 20 | 15,8 | 78,9 | 0 | 5,3 | 10,5 | 73,7 | 10,5 | 5,3 |
| **9.Problem** | N | 2 | 4 | 7 | 17 | 3 | - | 5 | 22 | 1 | 2 | 4 | 12 | - | 2 | 4 | 13 |
| | % | 6,6 | 13,4 | 23,3 | 56,7 | 10 | 0 | 16,7 | 73,3 | 5,3 | 10,5 | 21,1 | 63,1 | 0 | 10,5 | 21,1 | 68,4 |
| **Toplam** | N | 71 | 91 | 69 | 39 | 36 | 76 | 89 | 69 | 47 | 35 | 51 | 38 | 27 | 29 | 76 | 39 |

Tablo 4.5 matematik öğretmen adaylarının yazılı sınavda sorulan her bir problemde kullandıkları ispat şemalarının yüzde ve frekans değerlerini göstermektedir. Tablodaki veriler doğrultusunda öğretmen adaylarının problemlerde kullandıkları ispat şemalarının bazen probleme göre bazen de sınıflar düzeyinde farklılık gösterdiği bazı soruların ise genelde boş bırakıldığı görülmektedir.

Bütün problemler ve sınıflar bazında veriler değerlendirildiğinde dışsal şemaların kullanım yüzdesinin %0 ile %57,9 arasında değiştiği görülmektedir. Dışsal ispat şemaları bütün sınıf seviyelerindeki kullanım yüzdeleri bakımından ele alındığında en fazla yedinci problemde en az dokuzuncu problemde kullanıldığı görülmektedir. Bunun yanı sıra bazı sınıflarda ikinci, üçüncü ve dokuzuncu problemlerde dışsal şema hiç kullanılmamıştır.

Deneysel ispat şemalarının bütün sınıf seviyeleri göz önünde bulundurulduğunda kullanımın oranının %0 ile %78,9 arasında olduğu görülmektedir. Bu sonuçlara göre bütün sınıf seviyelerinde en fazla sekizinci problemde en az beşinci problemde kullanılmıştır. Ayrıca bazı sınıflarda beşinci, altıncı ve dokuzuncu problemlerde deneysel şema hiç kullanılmamıştır.

Analitik şemaların bütün sınıf seviyelerinde kulanım yüzdesinin %0 ile 94,7 arasında değiştiği görülmektedir. Analitik ispat şemaları bütün sınıf seviyelerindeki kullanım yüzdeleri bakımından ele alındığında en fazla beşinci problemde kullanılırken en az sekizinci problemde kullanılmıştır. Bunun yanı sıra bazı sınıflarda birinci, dördüncü, yedinci ve sekizinci problemlerde analitik şema hiç kullanılmamıştır.

Matematik öğretmen adaylarının bütün sınıf seviyeleri göz önünde bulundurulduğunda problemleri boş bırakma oranının %0 ile %73,3 arasında olduğu görülmektedir. Bütün sınıf seviyelerinde en fazla dokuzuncu problem en az ikinci problem boş bırakılmıştır. Ayrıca bazı sınıflarda ikinci, beşinci ve altıncı problem hiç boş bırakılmamıştır.

## 4.2 Yarı Yapılandırılmış Görüşmelerden Elde Edilen Bulgular

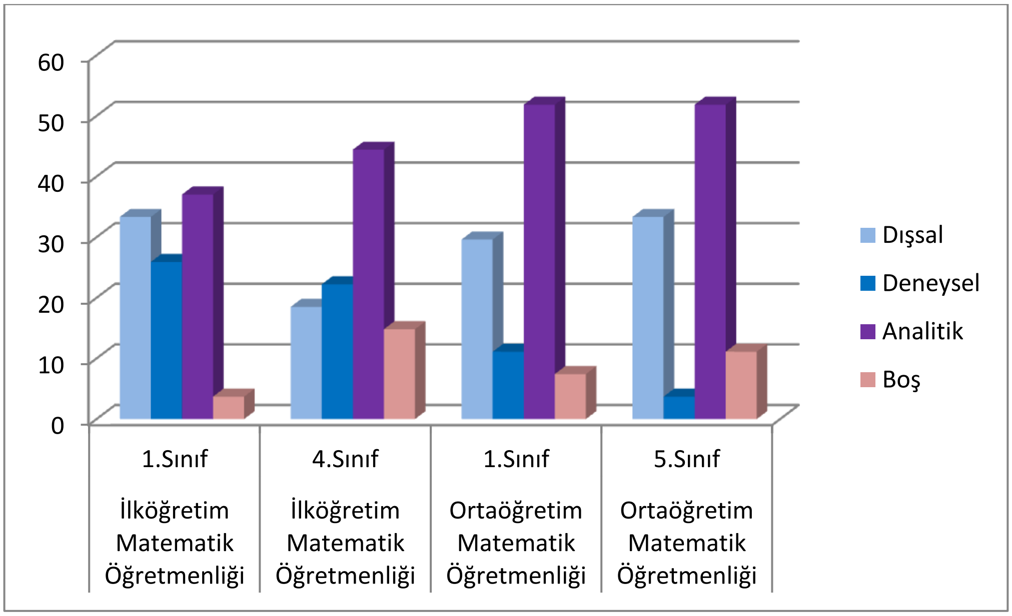
Çalışmanın bu kısmında yarı yapılandırılmış görüşmeler sonucunda genel matematik dersi kapsamında hazırlanan problemlerde matematik öğretmen adaylarının kullandıkları ispat şemaları dışsal, deneysel, analitik ve boş olmak üzere dört farklı şekilde sınıflandırılmıştır. Öğretmen adaylarının sınıflara göre yazılı sınavda kullandıkları ispat şemalarını kapsayan yüzde ve frekans tabloları oluşturulmuştur. Bu veriler doğrultusunda ispat şemalarına ait yüzde sütun grafikleri elde edilmiş ve yorumlanmıştır.

Görüşmelerin birinci kısmında ilköğretim ve ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının verilen problemlerin doğrulanması sürecinde nasıl düşündüklerini, soruları nasıl anladıklarını, getirdikleri çözüm stratejilerini ve adımlarının nedenlerini ayrıntılı bir şekilde ortaya koymak üzere oluşturan dört soru öğrencilere yöneltilmiştir. Bunun sonucunda görüşmelerde öğrencilerle gerçekleşen dialoglara ve öğrencilerin çözümlerinden bazı örneklere yer verilmiştir.

**Tablo 4.6 Matematik Öğretmen Adaylarının Yarı Yapılandırılmış Görüşmelerde Kullandıkları İspat Şemalarına İlişkin Yüzde ve Frekans Tablosu**

| Sınıflar / Şemalar | İlköğretim Matematik Öğretmenliği 1.Sınıf | | İlköğretim Matematik Öğretmenliği 4.Sınıf | | Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 1.Sınıf | | Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 5.Sınıf | | Genel | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % |
| Dışsal | 9 | 33.34 | 5 | 18.51 | 8 | 29.62 | 9 | 33.34 | 31 | 28.70 |
| Deneysel | 7 | 25.92 | 6 | 22.23 | 3 | 11.11 | 1 | 3.70 | 17 | 15.76 |
| Analitik | 10 | 37.04 | 12 | 44.44 | 14 | 51.85 | 14 | 51.85 | 50 | 46.29 |
| Boş | 1 | 3.70 | 4 | 14.82 | 2 | 7.42 | 3 | 11.11 | 10 | 9.55 |
| Toplam | 27 | 100 | 27 | 100 | 27 | 100 | 27 | 100 | 108 | 100 |

Tablo 4.6 çalışmaya katılan birinci ve son sınıf ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispat şemalarını belirlemeye yönelik ölçme aracında yer alan ve genel matematik dersini kapsayan, yarı yapılandırılmış görüşmedeki 108 problemde kullandıkları ispat şemalarının frekans ve yüzde değerlerini göstermektedir.




**Şekil 4.3 Yarı Yapılandırılmış Görüşmede Kullanılan İspat Şemalarına İlişkin Yüzde Grafiği**

Şekil 4.3 yarı yapılandırılmış görüşmelerde 12 matematik öğretmen adayı tarafından kullanılan ispat şemalarının yüzde değerlerini göstermektedir.

Yarı yapılandrılmış görüşmelerden elde edilen veriler değerlendirildeğinde ilköğretim birinci sınıf öğretmen adaylarının problemlerin %33.34’ünde (9 problem) dışsal %25.92’sinde (7 problem) deneysel, %37.04’ünde (10 problem) analitik şemayı kullandıkları ve %3.70’inde (1 problem) boş bıraktıkları görülmektedir. İlköğretim son sınıf öğretmen adayları problemlerin %18.51’ini (5 problem) dışsal şema, %22.23’ünü (6 problem) deneysel, %44.44’ini (12 problem) analitik şema kullanarak çözmüş ve %14.82’sini (4 problem) boş bırakmıştır. Ortaöğretim birinci sınıf öğretmen adayları problemlerde %29.62 (8 problem) dışsal şema, %11.11 (3 problem) deneysel şema, %51. 85 (14 problem) analitik şema kullanmış ve %7.42’sini (2 problem) boş bırakmıştır. Ortaöğretim son sınıf öğretmen adayları ise problemlerin %33.34’ünde dışsal şema (9 problem), %3.70’inde (1 problem) deneysel şema, %51.85’inde (14 problem) analitik şema kullanarak çözüm yapmış ve %11.11 (3 problem) oranında boş bırakmıştır.

Bu sonuçlar doğrultusunda yarı yapılandırılmış görüşmelerde dışsal şemaları en fazla ilköğretim birinci ve ortaöğretim son sınıfların en az ise ilköğretim son sınıfların kullandığı görülmektedir. Deneysel şemaları en fazla ilköğretim birinci sınıflar kullanırken en az ortaöğretim son sınıflar tercih etmektedir. Analitik şemayı kullanım oranı her sınıf bazında diğer şemalara göre daha yüksel olmakla beraber en fazla ortaöğretim birinci ve son sınıflar kullanırken en az ilköğretim birinci sınıflar kullanmaktadır. Bunun yanı sıra en fazla ilköğretim son sınıflar boş bırakırken en az ilköğretim birinci sınıflar boş bırakmıştır.

Yarı yapılandırılmış görüşmelere için genel durumu ele aldığımızda 108 problemlemin %28.70'inde (31 problem), %15.76'sında (17 problem), % 46.29'unda (50 problem) analitik şema kullanılmış ve problemlerin %9.55'i (10 problem) boş bırakılmıştır. Görüşmelerde en çok tercih edilen şema analtik iken en az tercih edilen deneysel şemadır.

**Tablo 4.7 12 Matematik Öğretmen Adayının Yazılı Sınavda ve Yarı Yapılandırılmış Görüşmelerde Kullandığı Şemalar**

| | Sınıf | İlköğretim Matematik Öğretmenliği 1.Sınıf | | | İlköğretim Matematik Öğretmenliği 4.Sınıf | | | Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 1.Sınıf | | | Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 5.Sınıf | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Problemler | Kod | İÖ1A | İÖ1B | İÖ1C | İÖ4A | İÖ4B | İÖ4C | OÖ1A | OÖ1B | OÖ1C | OÖ5A | OÖ5B | OÖ5C |
| 1.Problem | Y | Ş3 | **Ş3** | **Ş2** | Ş2 | Ş2 | Ş2 | **B** | Ş1 | Ş1 | **Ş2** | Ş1 | **Ş1** |
| | G | Ş3 | **Ş1** | **Ş1** | Ş2 | Ş2 | Ş2 | **Ş3** | Ş1 | Ş1 | **Ş1** | Ş1 | **Ş3** |
| 2.Problem | Y | **Ş2** | Ş2 | Ş2 | Ş3 | Ş2 | Ş3 | **Ş1** | **Ş2** | Ş3 | Ş3 | **Ş3** | Ş3 |
| | G | **Ş3** | Ş2 | Ş2 | Ş3 | Ş2 | Ş3 | **Ş3** | **Ş3** | Ş3 | Ş3 | **Ş1** | Ş3 |
| 3.Problem | Y | Ş1 | **Ş1** | Ş3 | Ş3 | **Ş3** | **B** | Ş3 | Ş3 | Ş3 | Ş3 | **B** | Ş3 |
| | G | Ş1 | **Ş3** | Ş3 | Ş3 | **B** | **Ş3** | Ş3 | Ş3 | Ş3 | Ş3 | **Ş1** | Ş3 |
| 4.Problem | Y | Ş2 | **Ş1** | **Ş2** | Ş1 | **Ş2** | **Ş2** | Ş3 | Ş1 | **Ş3** | **B** | **Ş3** | **Ş1** |
| | G | Ş2 | **Ş2** | **Ş1** | Ş1 | **Ş3** | **Ş1** | Ş3 | Ş1 | **Ş1** | **Ş3** | **Ş1** | **Ş3** |
| 5.Problem | Y | Ş3 | Ş2 | Ş3 | Ş3 | Ş3 | **Ş3** | Ş3 | Ş3 | Ş3 | Ş3 | Ş3 | **B** |
| | G | Ş3 | Ş2 | Ş3 | Ş3 | Ş3 | **Ş2** | Ş3 | Ş3 | Ş3 | Ş3 | Ş3 | **Ş3** |
| 6.Problem | Y | Ş3 | **Ş2** | **Ş2** | Ş3 | Ş3 | **Ş1** | Ş1 | Ş3 | Ş3 | Ş3 | Ş3 | **Ş3** |
| | G | Ş3 | **Ş3** | **Ş1** | Ş3 | Ş3 | **Ş3** | Ş1 | Ş3 | Ş3 | Ş3 | Ş3 | **Ş1** |
| 7.Problem | Y | Ş3 | Ş1 | **Ş2** | **Ş1** | **Ş1** | Ş2 | **B** | **B** | **Ş1** | **Ş1** | **Ş2** | **B** |
| | G | Ş3 | Ş1 | **Ş3** | **B** | **Ş2** | Ş2 | **Ş3** | **Ş1** | **Ş3** | **Ş3** | **Ş1** | **Ş3** |
| 8.Problem | Y | Ş1 | Ş2 | Ş2 | Ş2 | Ş1 | **B** | Ş2 | Ş2 | Ş2 | **Ş2** | Ş2 | **Ş2** |
| | G | Ş1 | Ş2 | Ş2 | Ş2 | Ş1 | **Ş3** | Ş2 | Ş2 | Ş2 | **Ş1** | Ş2 | **Ş1** |
| 9.Problem | Y | **Ş3** | **B** | **Ş2** | Boş | **B** | Boş | Ş1 | **Ş2** | Boş | Boş | Boş | Boş |
| | G | **Ş1** | **Ş1** | **B** | Boş | **Ş1** | Boş | Ş1 | **B** | Boş | Boş | Boş | Boş |

Tabloda Kullanılan Kısaltmalar: Y-Yazılı Sınav, G: Yarı Yapılandırılmış Görüş, Ş1-Dışsal Şema, Ş2-Deneysel Şema, Ş3-Analitik Şema, B-Boş

Tablo 4.7 matematik öğretmen adaylarının yazılı sınavda ve yarı yapılandırılmış görüşmelerede kullandıkları şemaları göstermektedir. Tabloda görüşmelere katılan öğretmen adaylarının isimleri İÖ1A, İÖ1B, İÖ1C, …. OÖ5A, OÖ5B, OÖ5C şeklinde kodlanarak sunulmuştur.

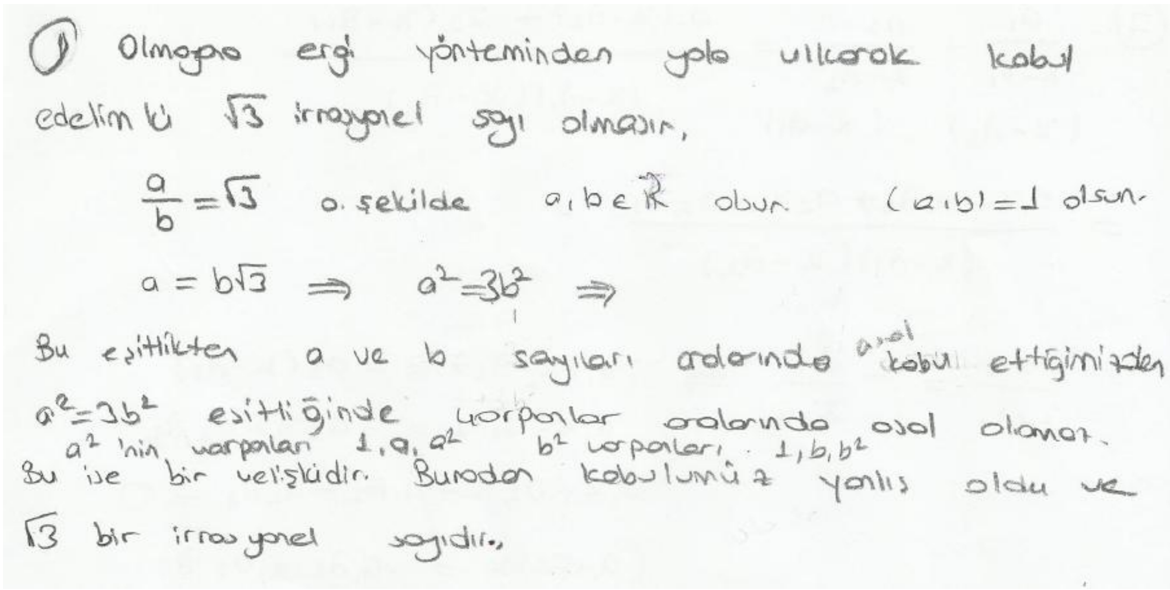
Öğretmen adaylarının yarı yapılandırılmış görüşmelerde ve yazılı sınavda kullandığı ispat şemaları ele alındığında bazı problemlerde görüşme ve yazılı sınavda aynı şemaları kullanmadığı, şemaların değişiklik gösterdiği görülmektedir. Matematik öğretmen adayları yarı yapılandırılmış görüşmedeki 108 problemin 10'unu boş bırakmıştır. Geriye kalan 98 problemin 29'unda yazılı sınavda ve görüşmelerde kullanılan şemalar farklılık gösterirken, 69'unda aynıdır. Görüşmelerde ve yazılı sınavda kullanılan şemalar arasında %70.5 uyum olduğu tespit edilmiştir. Öğrenciler problem çözümlerinde aynı soru bazında her zaman aynı şemayı tercih etmedikleri görülmektedir.

### 4.2.1 Matematik Öğretmen Adaylarının Yarı Yapılandırılmış Görüşmelerde Kullandıkları İspat Şemaları

Bu bölümde ilk ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının yarı yapılandırılmış görüşmelerde problemlere getirdiği çözüm örneklerine ve bu süreçte nasıl düşündüklerini ortaya koyabilmek için görüşme dialoglarına yer verilmiştir.

Yarı yapılandırılmış görüşmelerde birinci problemde öğrenciler dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç şemayı da kullanmıştır.

İlköğretim birinci sınıf matematik öğretmen adayı olan OÖ5A birinci problemin çözümünde yazılı sınavda ve görüşmede aynı çözüm yolunu tercih etmiştir. Yazılı sınavda çözümü aksiyomatik şema olarak değerlendirilirken yarı yapılandırılmış görüşmede çözümüne getirdiği açıklamalar doğrultusunda dışsal şemayı kullandığı tespit edilmiştir. Aşağıda Şekil 4.4'de görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.


① Olmayana ergi yönteminden yola ulkarak kabul edelim ki $\sqrt{3}$ irrasyonel sayı olmasın,

$\frac{a}{b}=\sqrt{3}$ o. şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ olsun $(a,b)=1$ olsun.

$a = b\sqrt{3} \Rightarrow a^2=3b^2 \Rightarrow$

Bu eşitlikten a ve b sayıları aralarında asal kabul ettiğimizden $a^2=3b^2$ eşitliğinde çarpanlar aralarında asal olamaz.

$a^2$'nin çarpanları $1, a, a^2$ $b^2$ çarpanları · $1, b, b^2$

Bu ise bir çelişkidir. Buradan kabulümüz yanlış oldu ve $\sqrt{3}$ bir irrasyonel sayıdır.

Şekil 4.4 OÖ5A'nin yarı yapılandırılmış görüşmedeki birinci probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede OÖ5A'nin çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P* : ***Bu soruda nasıl bir yol izledin, çözümünü biraz anlatır mısın?***

*OÖ5A* : *Ben orda olmayana ergi yöntemini kullandım. Tam tersini alıp aksini ispat edip kabulümüzün yanlış oldugunu gösterdim.*

*P* : *Nasıl yaptın bunu biraz açıklar mısın?*

*OÖ5A* : *Kök 3 sayısı irrasyonel olmasın dedim. a bölü b bunu reel a ve b'nin aralarında asal oldugunu kabul ettim. İşlemleri yaptıktan sonra a ve b'nin aslında aralarında asal yani 1 ve kendisinden başka çarpanlarının da olduğunu gördüğüm için aralarında asal olmadı. Dolayısıyla kabulüm yanlış oldu ve kök 3 sayısı irrasyonel sayı oldu.*

*P* : *Peki a ve b'nin neden aralarında asal olduğunu kabul ettin?*

*OÖ5A* : *Onu irrasyonel sayıları bulmada 1. sınıftan beri bu şekilde yapıyoruz aklımda kaldıgı için. a bölü b alıyorduk ve aralarında asal alıyorduk. p bölü q, x bölü y ne alırsak. onun sebebini bilmiyorum.. 1. sınıftan beri bu şekilde görüyorduk ama bu gidişatın mantığını bu şekilde aldıktan sonra gerisi geliyor. Aslında bizim bu soruyu sormamız gerekiyordu bunun bir sebebi vardır ama şu anda hatırlamıyorum.*

*P* : ***Bu şekilde çözüm yapmaya nasıl karar verdin? Neden bu yolu tercih ettin?***

*OÖ5A* : *Alışkanlık ve yönlendirme tarzı yani bana 1. sınıfta irrasyonel sayının bulma yöntemini başka türlü gösterselerdi ben o şekilde öğrenecektim. Ben bunu bir tümevarım yöntemiye gösteremem..*

*P* : ***Peki farklı bir şekilde gösterebilir miydik kök 3'ün irrasyonel olduğunu?***

*OÖ5A* : *Tabi gösterebiliriz ama bu benim bildiğim yöntem aklıma böyle oturduğu için bu şekilde gösterdim.*

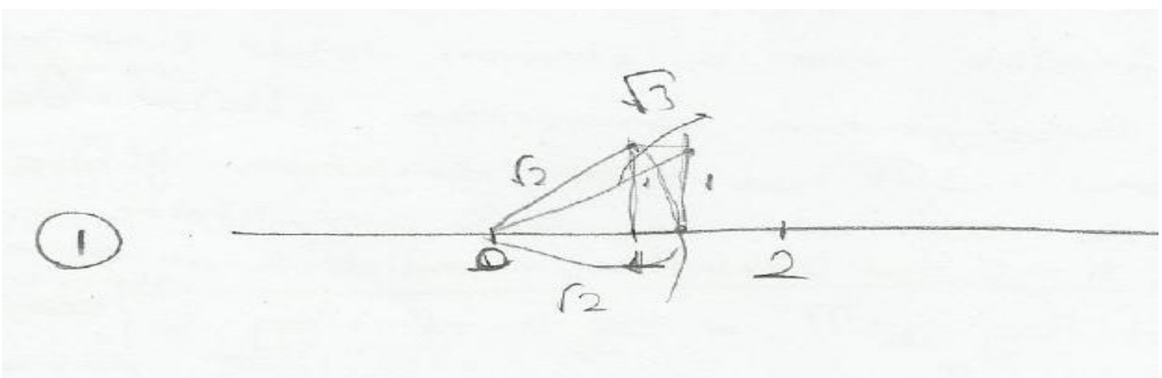
*P* : *Senin düşündüğün aklına gelen bir yol var mı?*

*OÖ5A* : *Şu an yok.*

*P* : ***İspatının yeterli olduğunu düşünüyor musun?***
*OÖ5A* : *Şu aşamada evet.*

Öğrenci birinci sınıftan itibaren bu yolu gördüklerini, alışkanlıktan dolayı bu çözümü tercih ettiğini belirtmiştir. Bu da öğrencinin dışsal şemalardan alışanlık edinilmiş ispat şemasını kullandığını göstermektedir. Ayrıca yaptuğı çözümde eksiklikler olmasına rağmen ispatını yeterli görmektedir.

İlköğretim dördüncü sınıf matematik öğretmen adayı olan İÖ4A birinci problemin çözümünde yazılı sınavda ve görüşmede aynı çözüm yolunu tercih etmiş ve her iki çözümde de deneysel şemayı kullanmıştır. Aşağıda Şekil 4.5'de görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.




Şekil 4.5 İÖ4A'nın yarı yapılandırılmış görüşmedeki birinci probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede İÖ4A'nın çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

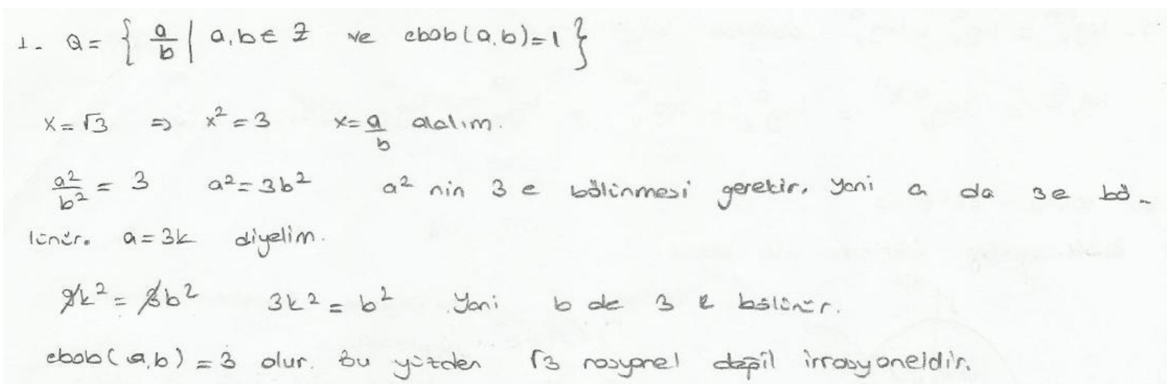
*P* : ***Kök 3 sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz demişiz. Burada yaptıklarını anlatabilirmisin? Yani bu soruyu çözerken nasıl bir yol izledin, nasıl düşündün?***
*İÖ4A* : *Kök 3 sayısı irrasyonel bir sayı. Sayı doğrusunda belirli bir yerde tam gösteremiyoruz.Ben bundan yola çıktım. Bire bir aldım. Kök 2 buldum burayı. Sonra tekrar kök 2 yi yay çizerek pergelle falan. Sayı doğrusunda kök 2 yi bulduk. Sonra tekrar 1 uzatıp kök3 ü bulduk. Kök 3'ü de hani yaparak aslında belirli bir tahmin yaptık strateji olarak. Tahmini olarak, yaklaşık sayı doğrusunda bu aralıkta olduğunu düşündüm. O yüzdende kök 3 irrasyoneldir.*
*P* : ***Daha farklı bir şekilde gösterebilir miydin bunu bize?***
*İÖ4A* : *Olabilirdi de işte aklıma bu geldi.*
*P* : ***Peki bu yolu tercih etmende herhangi bir sebep var mı?***
*İÖ4A* : *Daha önce gördük.*
*P* : *Hangi derste gördünüz?*
*İÖ4A* : *İlk dönem matematik tarihinde.*

P : ***Bu ispatın yeterli olduğunu düşünüyormusun? Eksik bıraktığın kısımlar var mı sence?***

*İÖ4A : Var çünkü burda aslında irrasyonel sayı olduğunu tam göstermiyoruz da tahminediyoruz.hangi aralıkta olduğunu o açıdan geçerli ama tam irrasyonel mi değil mi ona bence cevap vermez. Tam olarak yeterli değil aslında.*

Öğrenci bu çözümde tahmini olarak yaklaşık kök üçün sayı doğrusundaki yerini belirlemeye çalışmış, sezgisel olarak soruya yaklaşmıştır. Yani öğrenci deneysel şemalardan sezgisel şemayı kullanmıştır.

Ortaöğretim birinci sınıf matematik öğretmen adayı olan OÖ1A birinci problemi yazılı sınavda boş bırakırken görüşmede analitik şema kullanarak çözüm yapmıştır. Aşağıda Şekil 4.6'da görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.



1. $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a,b \in Z \text{ ve } ebob(a,b)=1 \right\}$

$x=\sqrt{3} \Rightarrow x^2=3$ $x=\frac{a}{b}$ alalım.

$\frac{a^2}{b^2}=3$ $a^2=3b^2$ $a^2$ nin 3 e bölünmesi gerekir. Yani a da 3 e bölünür. $a=3k$ diyelim.

$\cancel{9}k^2=\cancel{3}b^2$ $3k^2=b^2$ Yani b de 3 e bölünür.

$ebob(a,b)=3$ olur. bu yüzden $\sqrt{3}$ rasyonel değil irrasyoneldir.

Şekil 4.6 OÖ1A'nın yarı yapılandırılmış görüşmedeki birinci probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede İÖ1B'nin çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

P : ***Bu soruda nasıl bir çözüm yolu izledin anlatabilir misin?***

*OÖ1A : Soruda ne demişti. Kök 3'ün irrasyonel olduğunu gösterin demiş. Şimdi bende dedim ki bu rasyonel değilse irrasyoneldir diye düşündüm. Öncelikle rasyonel sayılar kümesini tanımladım. Daha sonra işte bir x belirledim. x dedim kök 3 olsun. x eşit kök 3 olur bu durumda dedim. X'i a bölü b aldım. Şimdi rasyonel sayıların kümesine bakacak olursak a bölü b de a veb nin ebobunun 1 olması lazım.*

*P : Neden öyle olması lazım?*

*OÖ1A : Rasyonel olma özelliğinden dolayı öyle olması gerekir dedim. Daha sonra işte a kare bölü b kare 3 oldu. Dedim ki a kare 3 b kareye eşittir. O zaman dedim ki a kare 3 ile bölünebilen bir şey olması lazım. a 3k olsun dedim. a 3k olursa dedim ki 9 k kare eşittir 3 b kare o zaman ne deniyor3 k kare eşit b kare, b de yine 3 e bölünebilen bir şey olur diye düşündüm ve ebobları bunların 3 olur.1 olması gerekiyordu 3 olduğu için rasyonel değildir dedim.*

P : ***Neden rasyonel sayı alarak baslamaya karar verdin.? Neden bu çözüm yolunu tercih ettin?***

OÖ1A : *Aslında bunu neden tercih ettim. Çünkü böylesi bir örnek derste çözmüştük, hocamız öyle göstermişti. Öğrettiği şeyden yola çıkarak çözdüm.*

P : ***Peki farklı bir çözüm yolu olabilir miydi? Kök 3'ün irrasyonel olduğunu başka bir şekilde gösterebilir miydik?***

OÖ1A : *Şu an aklıma başka bir şey gelmiyor açıkçası.*

P : ***İspatının yeterli olduğunu düşünüyor musun?***

OÖ1A : *Yeterlidir herhalde.*

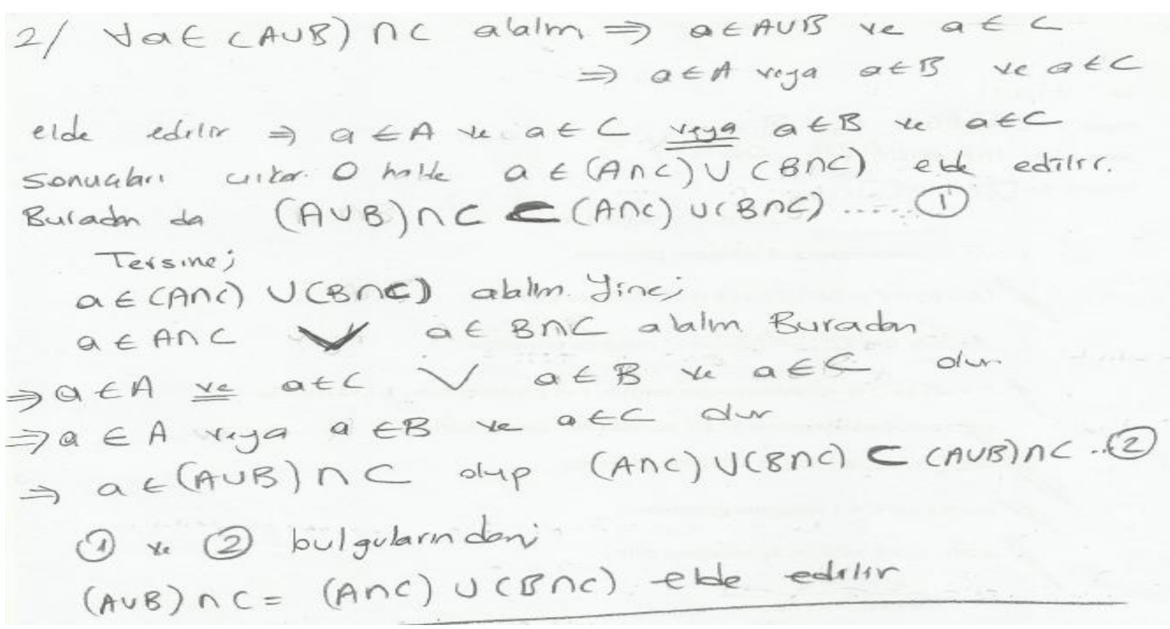
P : *Genel olarak baktığında bu ispat geçerlidir diyor musun?*

OÖ1A : *Geçerlidir.*

Öğrenci çözüm sürecinde matematiksel dili kullanarak doğrulama yapmış analitik şemadan aksiyomatik şemayı kullanmaktadır.

Yarı yapılandırılmış görüşmelerde ikinci problemde öğrenciler dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç şemayı da kullanmıştır.

Ortaöğretim beşinci sınıf matematik öğretmen adayı olan OÖ5B ikinci problemin çözümünde yazılı sınavda ve görüşmede aynı çözüm yolunu tercih etmiştir. Yazılı sınavda çözümü aksiyomatik şema olarak değerlendirilirken yarı yapılandırılmış görüşmede çözümüne getirdiği açıklamalar doğrultusunda dışsal şemayı kullandığı tespit edilmiştir. Aşağıda Şekil 4.7'de görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.



2/ $\forall a \in (A \cup B) \cap C$ alalım $\Rightarrow a \in A \cup B$ ve $a \in C$

$\Rightarrow a \in A$ veya $a \in B$ ve $a \in C$

elde edilir $\Rightarrow a \in A$ ve $a \in C$ veya $a \in B$ ve $a \in C$

sonuçları çıkar. O halde $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ elde edilir.

Buradan da $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ..... 1

Tersine;

$a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ alalım. Yine;

$a \in A \cap C$ $\vee$ $a \in B \cap C$ alalım Buradan

$\Rightarrow a \in A$ ve $a \in C$ $\vee$ $a \in B$ ve $a \in C$ dır.

$\Rightarrow a \in A$ veya $a \in B$ ve $a \in C$ dır

$\Rightarrow a \in (A \cup B) \cap C$ olup $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$ .. 2

1 ve 2 bulgularından

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ elde edilir

Şekil 4.7 OÖ5B'nin yarı yapılandırılmış görüşmedeki üçüncü probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede OÖ5B'nin çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P* : ***Bu soruda nasıl bir yol izledin, çözüm yolunu anlatabilir misin?***

*OÖ5B : Hocam şimdi şey bu küme bilgisi. İki kümenin birbirine eşit olduğunu göstermek için önce diyelim A ve B kümeleri olsun. A eşit B olduğunu göstermek için A'dan bir eleman alıyoruz bunu B'de gösteriyoruz. Diğeride Tersine B'den bir eleman alıyoruz bunuda A'da gösteriyoruz. Burda ben küme eşitliğinden faydalandım.*

*P : Nasıl yapıyoruz onu?*

*OÖ5B : Hocam şimdi her A eşit B ya hani A'dan bir eleman alıyoruz onun B'de olduğunu gösteriyoruz. Sonra hocam B'den eleman alıyoruz bununda A'da olduğunu gösteriyoruz. Burada B kapsar A oluyor. Sonra hocam B den bir eleman alıyoruz.bunun da A da olduğunu gösteriyoruz. Bu zaman da A kapsar B oluyor. Bu iki şartın sağlanması ancak ve ancak A eşit B olması durumunda geçerlidir diye düşündüm. Burada da hocam işte A birleşim B kesişim C den bir eleman aldım,çözümü yaptım gördüğünüz gibi. Bu ilk çözüm sonucunda dedim A birleşim B kesişim C, A kesişim C birleşim B kesişim C tarafından kapsanır dedim. Tersine aynı mantıktan diğer kümeden bir eleman aldım onuda gerekli işlemleri yaptım ve sonucunda A kesişim C birleşim B kesişim C, A birleşim B kesişim C tarafından kapsanır dedim. Bu 1 ve 2'nin sağlanması ancak ve ancak bu iki kümenin birbirine eşit olmasıyla mümkündür dedim.*

*P : Peki bunu nerden biliyoruz. İki taraflı kapsadığında ancak ve ancak eşittir?*

*OÖ5B : Hocam ben bunu lise bilgilerimden biliyorum fakat üniversiteye geçtiğimizde bunu gerek cebire giriş derslerimizde gerek soyut derslerimizde pekiştirdik.o yüzden*

*P* : ***Neden bu yolu tercih ettin?***

*OÖ5B : Hocam genelde sınavlarda bu yolu kullandığım için bende bir alışkanlık oldu diyeyim. Ondan bu yolu kullandım.*

*P* : ***Farklı bir şekilde bu eşitliğin doğruluğunu gösterebilir miydik?***

*OÖ5B : Farklı bir şekilde bu eşitliğin doğruluğunu… mesela venn şeması çizebilirdik. Farklı da bir şey şu anda aklıma gelmiyor ama diğer yol olmasa direk ben ven şeması çizerdim*

*P : Tamam. Peki venn şeması bu eşitliğin doğruluğunu göstermek için yeterli olur muydu sence?*

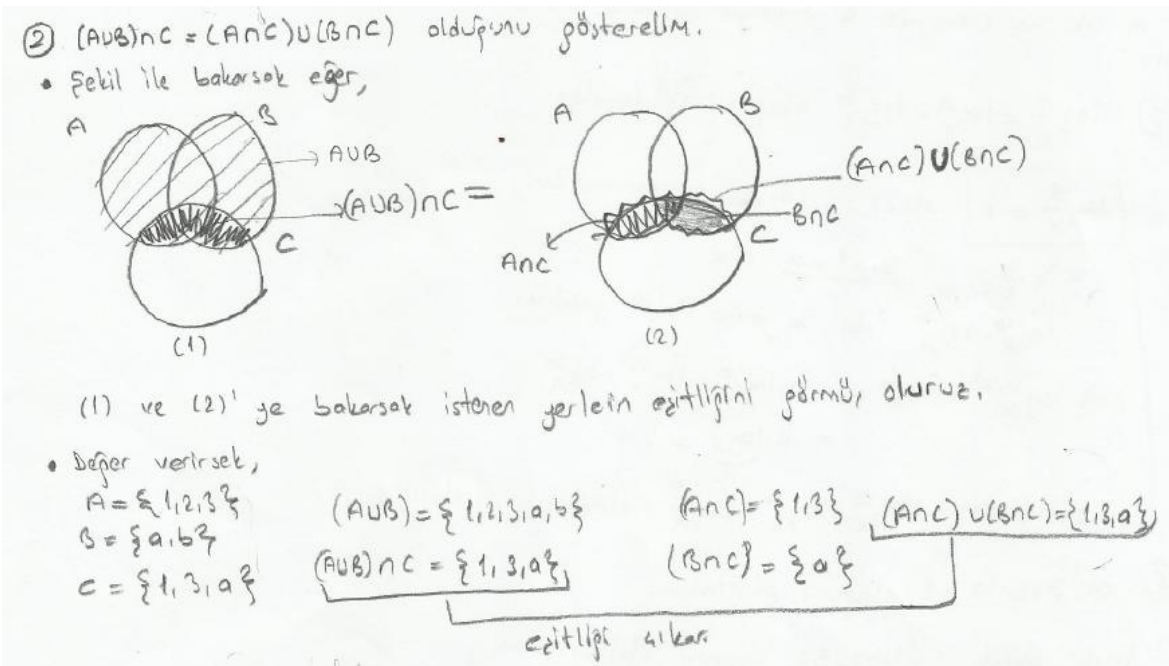
*OÖ5B : venn şeması bu eşitliğin doğruluğunu göstermek için yeterli… denemem lazım ama bana yeterli olurdu gibi geliyor*

*P* : ***Bu ispatta eksik bıraktığın yerler olduğunu düşünüyor musun yada ispatının yeterli olduğunu düşünüyor musun?***

*OÖ5B : Eksikleri vardır ama yeterli olduğunu düşünüyorum. Ben hoca olsam buna tam puan verirdim.*

Öğrenci süreç olarak analitik bir çözüm yapmış aksiyomatik şemayı kullanmıştır fakat açıklamalarına baktığımızda derste gördüklerini ve alışkanlıktan dolayı bu çözüm yolunu tercih ettiğini belirtmiştir. Yani dışsal şemalardan alışkanlık edinilmiş ispat şemasını kullandığı görülmektedir. Ayrıca öğrenci şema üzerinden örnekle göstermenin ispat için yeterli olduğunu düşünmektedir.

İlköğretim birinci sınıf matematik öğretmen adayı olan İÖ1B ikinci problemin çözümünde yazılı sınavda ve görüşmede aynı çözüm yolunu tercih etmiş, her iki çözümde de deneysel şemayı kullanmıştır. Aşağıda Şekil 4.8' de görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.




Şekil 4.8 İÖ1B'nin yarı yapılandırılmış görüşmedeki üçüncü probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede İÖ1B'nin çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P* : ***Bu soruyu çözerken nasıl bir çözüm yolu izledin?Çözümünü açılar mısın?***

*İÖ1B : Bu soruda iki tane çözüm yaptım. Birini şekille yaptım diğerini değer vererek yaptım. Şekil olarak çizdiğimizde iki tane şekil çizdim.eşitliğin diğer tarafı için ve öbür tarafı için ayrı ayrı şekiller çizdim ve birbirine eşit olduğunu taralı bölgelerle gösterdim daha sonra değer verdim.Örneğin dedim A boş kümeden farklı olsun 1, 2, 3, B' ye a,b dedim C de hepsinden birer ortak olan 1, 3, a dedim. Yine eşitliğin diğer tarafında olan işlemleri gerçekleştirdim. A bileşim B yi yazdım. 1,2,3,a,b sonra A bileşim B ile C'nin kesişimi 1, 3, a çıktı daha sonra eşitliğin diğer tarafını aldım.aynı değerlere bakarak A ile C nin kesişimi 1, 3, B ile C nin kesişimi a, bunların da birleşimi 1, 3, a çıktı. Sonuçta iki taraflı eşitliği yakaladım ve birbirine eşit olduğunu kanıtladım.*

*P* : ***Peki bu yolu seçmeye nasıl karar verdin? Neden bu yolu tercih ettin?***

*İÖ1B* : *İlk başta görerek yapmak istedim, gördüğümüz zaman daha net kavrayabiliriz diye. Değerleri tam oturtmak için de değerleri dediğim daha iyi görebilmek için değer vererek rakamlara dökerek işlem yaptım.*

*P* : *Değer vererek yapmak ispat için yeterli olur mu sence?*

*İÖ1B* : *Hayır mesela işte farklı değerler verilerek hani yanlışlığı falan ortaya çıkabilir. Bu nasıl söyleyeyim… tahmini bir şey oldu yani. Tam kesin ve net değil, aslında şekil buna göre daha net*

*P* : ***Anladım. Farklı bir şekilde bu eşitliğin doğruluğunu gösterebilir miydik?***

*İÖ1B* :*Gösterebilirdik.şu hani derste gördüğümüz gibi.. örneğin bir eleman alırdım. x eleman A birleşim B derdim. İşte sonra bundan işte alt küme birbirinin alt kümeleri şöyle böyle derken birbirine orantı kurabilirdim yani eşitleyebilirdim. Bu bunun alt kümesi o da onun alt kümesi böyleyse birbirine eşittir diye.*

*P* : *Neden o yolu tercih etmedin peki?*

*İÖ1B* : *Bu daha kısa ve daha kolay görebildiğim için.diyelim diğeri daha karmaşık daha zor geldiği için.*

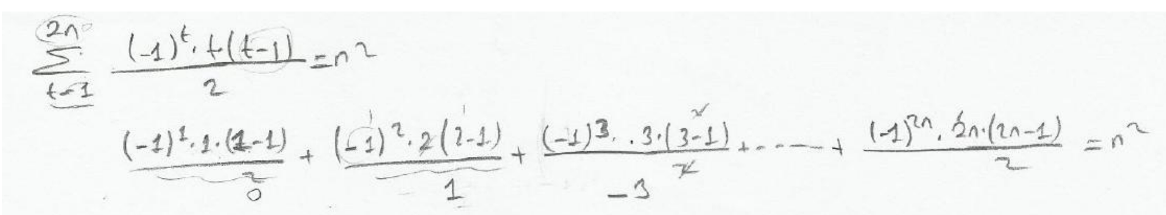
*P* : ***Anladım. Peki bu ispatının yeterli olduğunu düşünüyor musun?***

*İÖ1B* : *evet*

Öğrenci değer vererek örnek üzerinden ispatı yapmaya çalışmış deneysel şemalardan temel örnekler şemasını kullanmaktadır. Örneğin ispat için yeterli olmadığının farkında olmakla beraber doğruluğu daha net görebilmek adına faydalı olduğunu ve değer vererek tahmini, net olmayan doğrulamalar yaptığını düşünmektedir.

Yarı yapılandırılmış görüşmelerde üçüncü problemde öğrenciler dışsal ve analitik şemaları kullanarak çözüm yapmıştır.

İlköğretim birinci sınıf matematik öğretmen adayı olan İÖ1A üçüncü problemin çözümünde yazılı sınavda ve görüşmede dışsal şemayı kullanmış, çözümünü devam ettirememiştir. Aşağıda Şekil 4.9'da görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.



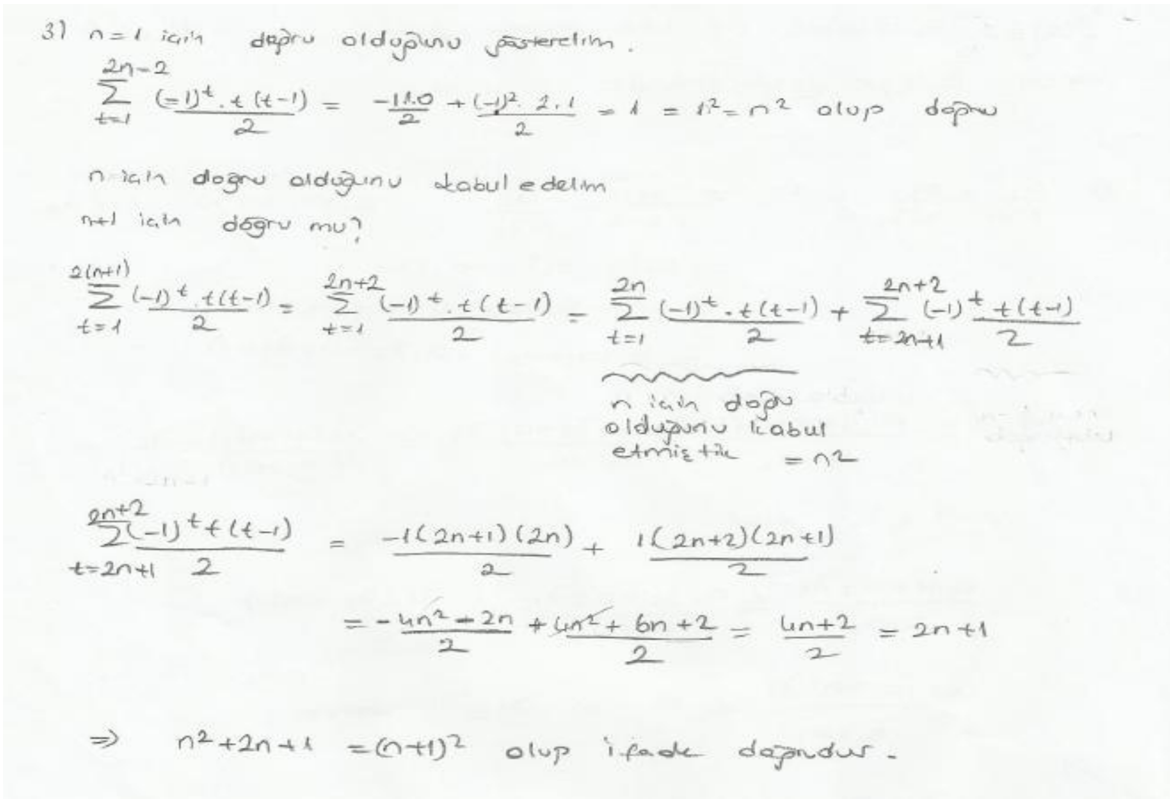
Şekil 4.9 İÖ1A'nın yarı yapılandırılmış görüşmedeki üçüncü probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede İÖ1A'nın çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P* : ***Bu soruda nasıl bir çözüm yolu izledin?***
*İÖ1A : Bu soruda mantık yürütemedim. Burda t vermiş falan.. yani aslında belki uğraşsam çözerdim ama pek yoğunlaşamadım soruya.*
*P : Anladım. Burada başlangıçta nasıl bir yol izledin peki..ne yapmayı amaçladın?*
*İÖ1A : ilk once şu verilen toplam sembolunu açtım. Hani belki bana bir önfikir verir, tanıdık bir şeyler gelir diye. Sonradan gözümü biraz korkuttuğu için devam edemedim öyle.*
*P : Anladım.*
*İÖ1A : Hani belki. Aslında şey düşünüyordum. Tümevarım yöntemini kullanmayı..hani işte ilk once n e bir verip n için doğru ise n+1 içinde doğrudur. Aslında o yönde yapıcaktım ama sonradan şu t, 2n biraz aslında sanırım biraz uğraşsam yapardım ama şey yapamadım..göze alamadım herhalde. Soru beni korkuttu.*
*P : Peki tümevarım yöntemini nerden biliyoruz?*
*İÖ1A : Tümevarım yöntemini liseden. Konumuz vardı zaten burada da yine soyut dersinde tümevarım yöntemini aslında genel matematiktede görmüştük. Şimdi soyuttada gördük. Soyutta daha ayrıntılı gördük tümdengelim tümevarım diye.*

Öğrenci bu çözümde kuralı ve ne yapması gerektiğini bilmekte fakat soru gözünü korkuttuğu için mantık yürütüp soruyu tamamlayamamıştır. Bu bize tam anlamıyla yöntemi pekiştiremediğini ve soruya önyargılı yaklaştığını göstermektedir. Dolayısıyla öğrenci dışsal şemalardan otoriteyi kullanmıştır.

İlköğretim birinci sınıf matematik öğretmen adayı olan OÖ5C üçüncü problemin çözümünde aynı çözüm yolunu tercih etmiş, hem yazılı sınavda hem de görüşmede analitik şemayı kullanmıştır. Aşağıda Şekil 4.10'da görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.



3) n = 1 için doğru olduğunu gösterelim.

$$\sum_{t=1}^{2n-2} \frac{(-1)^t . t(t-1)}{2} = -\frac{1.1.0}{2} + \frac{(-1)^2 . 2.1}{2} = 1 = 1^2 = n^2$$ olup doğru

n için doğru olduğunu kabul edelim

n+1 için doğru mu?

$$\sum_{t=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^t . t(t-1)}{2} = \sum_{t=1}^{2n+2} \frac{(-1)^t . t(t-1)}{2} = \underbrace{\sum_{t=1}^{2n} \frac{(-1)^t . t(t-1)}{2}}_{\text{n için doğru olduğunu kabul etmiştik } = n^2} + \sum_{t=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^t\, t(t-1)}{2}$$

$$\sum_{t=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^t t(t-1)}{2} = \frac{-1(2n+1)(2n)}{2} + \frac{1(2n+2)(2n+1)}{2}$$

$$= -\frac{4n^2+2n}{2} + \frac{4n^2+6n+2}{2} = \frac{4n+2}{2} = 2n+1$$

$\Rightarrow$ $n^2+2n+1 = (n+1)^2$ olup ifade doğrudur.

Şekil 4.10 OÖ5C'nin yarı yapılandırılmış görüşmedeki dördüncü probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede OÖ5C'nin çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P* : ***Bu soruyu çözerken nasıl düşündün çözümünü açıklar mısın?***

*OÖ5C* : *Tümevarım yöntemini kullandım. N eşit bir için doğru olduğunu kabul edip gösterip daha doğrusu n için doğruluğunu kabul ettiğimdede n artı bir için de doğruluğunu göstermiş oldum*

*P* : *Tümevarım yöntemini nerden biliyoruz?*

*OÖ5C* : *Soyut matematikten, bu hep zaten soyut matemetik konularını genellikle kapsayan bir şey.*

*P* : *Çözümündeki adımlarda ne yaptın anlatır mısın?*

*OÖ5C* : *Aynı şeyleri yaptım. n eşit bir için doğru olduğunu zaten gördüm. n artı bir için de doğru olduğunu göstermem için önce bunu parçaladım. Bunun doğruluğunu göstermek için. Orda işte.zaten bunun n kare olduğu belliydi. Burada da yerine yazınca bu geldi. istediğim şeye kolaylıkla buldum.*

*P* : ***Bu yolu tercih etmeye nasıl karar verdin?***

*OÖ5C* : *Bunla ilgili çok örnek çözdüm çok soru çözmemiştikte hep böyle benzer şeylerde genelde hocalar bizi yani bildiğimizden hocalar bize aynı şeyi göstere göstere ezberlettiler bence.*

*P* : *Peki bu yaptığın çözümün ezber olduğunumu düşünüyorsun yoksa zaten bu şekilde yapardım mı diyorsun?*

*OÖ5C : Öğrendiğim için bu şekilde yaparım evet. Aynı soruyu zaten çözmedik aynı soruyu birebir çözemeyiz zaten de. Tümevarım diyorum ya soru tipleri birbirine çok benziyor. sadece rakamları değiştirmek.yinede bence tümevarımdan değişik bir yol kullanmadığım için ezberlemiş gibi hissediyorum kendimi.*

*P : **Farklı bir şekilde bu ispatı yapabilir miydik?***

*OÖ5C : Bence yapılabilirdi ya ama o kadar bilgim yok.*

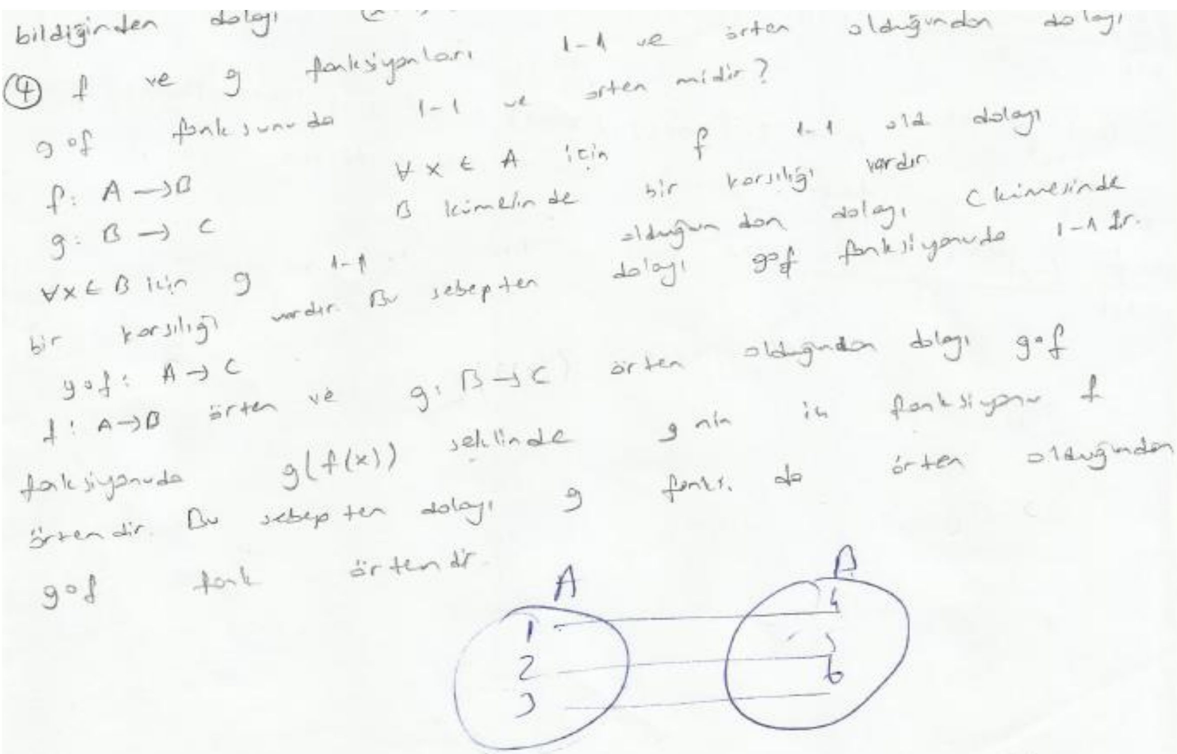
*P : **Tamam.ispatının yeterli olduğunu düşünüyor musun?***

*OÖ5C : Yani tümevarımdan çıktı istediğim şey çok rahat çıktı.yeterlidir o zaman.*

Öğrenci tümevarım yöntemini doğru bir şekilde uygulayarak sorunun ispatını yapmıştır. Dolayısıyla analitik şemalardan aksiyomatik şemayı kullanmıştır.

Yarı yapılandırılmış görüşmelerde üçüncü problemde öğrenciler dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç şemayı da kullanmıştır.

Ortaöğretim birinci sınıf matematik öğretmen adayı olan OÖ1B dördüncü problemin çözümünde aynı çözüm yolunu tercih etmiş, hem yazılı sınavda hem de görüşmede dışsal şemayı kullanmıştır. Aşağıda Şekil 4.11'de görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.




Şekil 4.11 OÖ1B'nin yarı yapılandırılmış görüşmedeki dördüncü probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede OÖ1B'nin çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P* : ***Bu soruyu çözerken nasıl bir yol izledin, çözümünü açıklar mısın?***

*OÖ1B : gof fonksiyonu A'dan C'ye olduğunu bize göstermiş. Böyle bir bileşke fonksiyonu yaparken g içerisinde f'ye bakmamız gerekir. Zaten f fonksiyonu bize birebir olduğunu göstermiş yani A kümesinin her bir elemanının B kümesinde bir karşılığı vardır. gof fonksiyonunda da g içerisinde f şeklinde yazarsak f fonksiyonu A'dan B'ye birebir olduğundan dolayı yani f fonksiyonu bu içerde birebirdir soruda vermiş. Her x eleman A için f fonksiyonu birebir olduğu için buradaki x'in herhangi bir elemanın B kümesinde bir karşılığı vardır.*

*P : Birebirlik senin tanımlarınla ne demektir?*

*OÖ1B : A kümesinde 1, 2, 3 elemanı olsun B kümesinde 3, 4, 5 olsun. Bu A kümesindeki 1, 3'e 2, 4'e 3 5'e gitmesi gerekir. Birebir bir görüntü olması gerekir fonksiyondaki elemanların.*

*P : Örtenliğin tanımını yapacak olursak?*

*OÖ1B : f fonksiyonunu ele alalım A'dan B'ye diyormuş örten olduğundan dolayı A kümesindeki değerler B kümesindeki bütün elemanları örtecek yani B kümesindeki elemanların A kümesinde bir karşılığı olacak ama A kümesinde boşluk olabilir. Burada birebir ve örten dediği için boşluk yok A kümesindeki bütün elemanlar B kümesine gitmiş kapsama olmuş. Birebir ve örten dediği için A kümesindeki bütün elemanların bir karşılığı olacak açıkta eleman olmayacak. Örten olabilmesi için görüntü kümesi dediğimiz B kümesinde açıkta eleman olmayacak. A kümesi yani tanım kümesinde açıkta eleman olabilir.*

*P : Bir ifadenin fonksiyon olabilmesi için ne olması gerekir?*

*OÖ1B : A kümesindeki bir eleman görüntü kümesindeki iki farklı elemana gidemez. Değer kümesinde açıkta eleman olabilir. Tanım kümesinde de açıkta eleman olabilir.*

*P : Burada örtenliği nasıl yaptığını anlatır mısın?*

*OÖ1B : gof fonksiyonu A' dan C'ye olduğu için C'den yani sondan başlayarak öne doğru geldim. g fonksiyonu B'den C'ye gidiyormuş tersten geldiğim için C kümesinin B deki elemanları kapsaması lazım. Çünkü birebir ve örten olduğu için iki kümedeki elemanlar birbirine gidecek. Aynı şekilde f fonksiyonunda tersten gidersek B kümesindeki elemanların A'ya gitmesi gerekiyor. Orada da hiç boşta eleman kalmayacak o da birebir ve örten olduğundan dolayı .*

*P* : ***Neden bu şekilde çözmeyi tercih ettin?***

*OÖ1B : Üniversiteye gelmeden önce bu soruyu şemayla gösterirdim ama burada bu şekilde çözüyoruz.*

*P* : ***Farklı bir çözüm yolu olabilir miydi?***

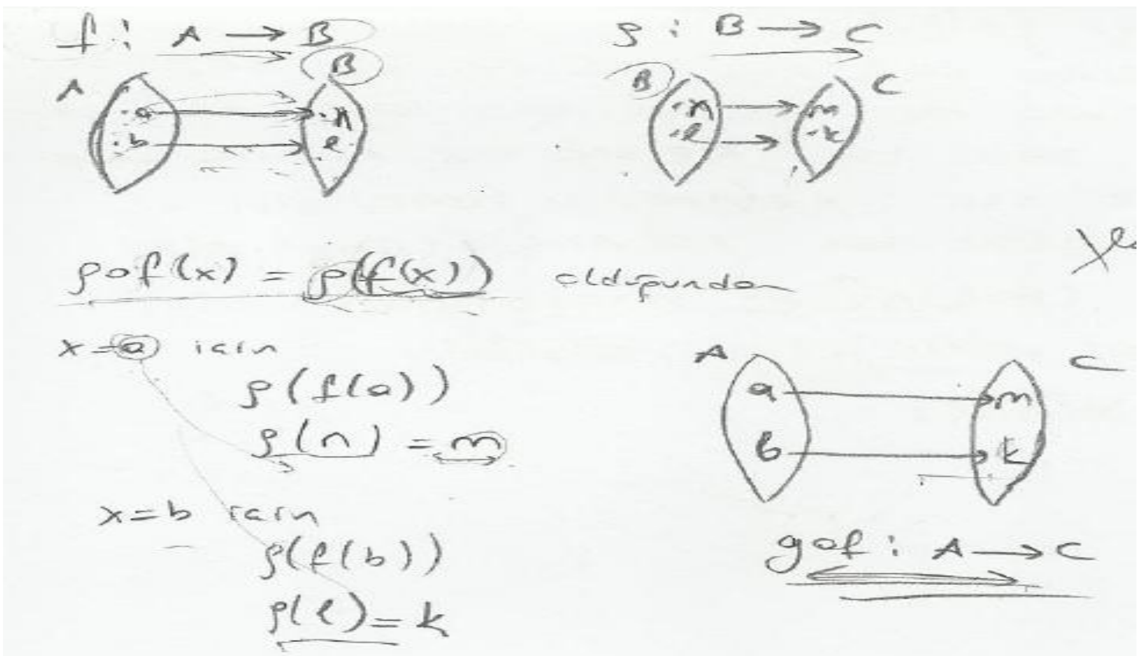
*OÖ1B : Bildiğim kadarıyla bir küme yöntemi var bir de bu.*

*P* : ***İspatının yeterli olduğunu düşünüyor musun?***

*OÖ1B : Şu an yazdığım ifade de eksikler olduğunu düşünüyorum ancak yapılış tarzını tam olarak bilseydim yeterli olacağını düşünürdüm.*

Bu çözümde öğrenci birebirlik tanımında da örtenlik tanımını yapmış, fonsiyonun tanımını ise tanım kümesinde açıkta eleman kalabilir diyerek yanlış yapmıştır. Bilgilerinin tam yerleşmediği hatalı kavram görüntülerine sahip olduğu görülmektedir. Dolayısyla öğrenci çözümünde dışsal şemalardan otoriteyi kullanmıştır.

İlköğretim birinci sınıf matematik öğretmen adayı olan İÖ1A dördüncü problemin çözümünde aynı çözüm yolunu tercih etmiş, hem yazılı sınavda hem de görüşmede deneysel şemayı kullanmıştır. Aşağıda Şekil 4.12'de görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.




Şekil 4.12 İÖ1A'nın yarı yapılandırılmış görüşmedeki dördüncü probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede OÖ1A'nın çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P* : ***Bu soruda nasıl bir çözüm yolu izledin?***

*İÖ1A : Burada ilk once işte A'dan B'ye bir fonksiyon ilk önce A işte bir A kümesi çizdim. a, b elemanlı ve B kümesi çizdim. Sonrada g fonksiyonu için sonrada bu ifadenin x in hani bu ifadenin açılımı. Biz burada ilk önce A kümesindeki a elemanını alarak işlem yaptım ve sonucunda m elemanına gittiğini gördüm yani C kümesinde bir eleman gittiğini gördüm. Sonrada yine A'nın b elemanını aldım b elemanı içinde yine C kümesinde bir elemana gittiğini gördüm. Burada o zaman A'dan C'ye gittiğini o zaman bu fonksiyonda A'dan C'ye gider. A'dan C'ye giden bir fonksiyon dedim*

*P : Peki birebir ve örten olduğunu nasıl gösterdin?*

*İÖ1A : Birebir zaten şey hani burada hani ikisi hani bir kümeden diğer kümeye gidecek ve bu kümeden açık bir eleman kalmayacak hani hepsi yani bu tanım kümesindeki elemanlar görüntü kümesindeki her bir elemana dağılmalı ve burda boş eleman kalmamalı hani öyle* *yaptım zaten bana ilk başta zaten bu iki kümenin şey olduğunu birebir ve örten olduğunu gösterdiği için ordan yola çıkarak zaten hani öyle.*

*P : Birebirliğin ve örtenliğin tanımını kendin kendi yorumlarınla yapabilirmisin?*

*İÖ1A : Birebir demek her hani birebir hani bir kümedeki elemanlar diğer kümedeki işte hani birer kere eşleşecek hani tanım kümesindeki bir eleman görüntü kümesindeki bir elemanla eşleşecek her eleman bir görüntü kümesinde bir karşılığı olacak. Örtende de görüntü kümesinde hiç boşta yani tanım kümesindeki her eleman fonksiyonda yerine yazdığımız zaman görüntü kümesinde bir karşılığı olmuş görüntü kümesinde de hani görüntü kümesinde tüm elemanları kapsayacak şekilde olacak.*

*P : **Bu yolu seçmeye nasıl karar verdin? Neden bu yolu tercih ettin?***

*İÖ1A : Bu yolu aslında tam olarak fonksiyonlarla ilgili çok ayrıntı bilgi bilmiyorum çok fazla özele indirgenecek bilgim yok. O yüzden hani kendi bilgilerimle yapabileceğim şekilde göstermeye çalıştım.*

*P : **Farklı bir şekilde gösterebilirmiyiz bu fonksiyonun birebir ve örten olduğunu?***

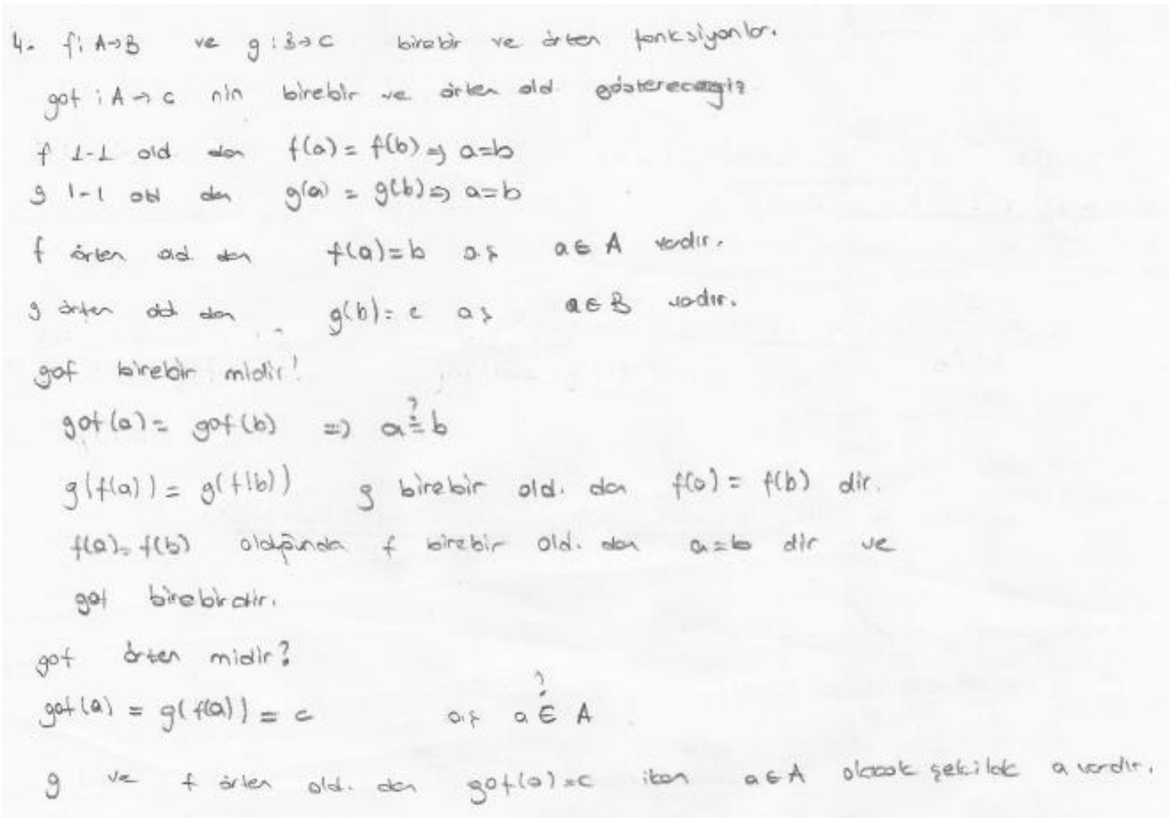
*İÖ1A : Farklı bir şekilde gösterebiliriz ama ben bilmiyorum. Bu şekilde aklıma geldi. Farklı yol olarak aslında hani şey geçişme özelliği var ya onu burada kullanabilirmiyiz tam olarak bilmiyorum ama geçişme özelliğini kullanarak hani belki yapabiliriz gibi.*

*P : **ispatının yeterli olduğunu düşünüyor musun?***

*İÖ1A : Bence yeterli. Sonuçta ben ispatladım evet ispatlarken kafama yattığı için yeterli.*

Örnekler üzerinden ispat yaptığı için öğrenci deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmıştır. Örneklerle doğruluğu göstermenin ispat için yeterli olduğunu düşünmektedir.

Ortaöğretim birinci sınıf matematik öğretmen adayı olan OÖ1A dördüncü problemin çözümünde aynı çözüm yolunu tercih etmiş, hem yazılı sınavda hem de görüşmede analitik şemayı kullanmıştır. Aşağıda Şekil 4.13’de görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.



4. $f: A \to B$ ve $g: B \to C$ birebir ve örten fonksiyonlar.
$gof: A \to C$ nin birebir ve örten old. göstereceğiz
$f$ 1-1 old dan $f(a) = f(b) \Rightarrow a=b$
$g$ 1-1 old dan $g(a) = g(b) \Rightarrow a=b$
$f$ örten old dan $f(a)=b$ o.ş $a \in A$ vardır.
$g$ örten old dan $g(b)=c$ o.ş $a \in B$ vadır.
gof birebir midir?
$gof(a) = gof(b) \Rightarrow a \overset{?}{=} b$
$g(f(a)) = g(f(b))$ $g$ birebir old. dan $f(a) = f(b)$ dir.
$f(a) = f(b)$ olduğunda $f$ birebir old. dan $a=b$ dir ve
gof birebirdir.
gof örten midir?
$gof(a) = g(f(a)) = c$ o.ş $a \overset{?}{\in} A$
$g$ ve $f$ örten old. dan $gof(a)=c$ iken $a \in A$ olacak şekilde $a$ vardır.

Şekil 4.13 OÖ1A'nın yarı yapılandırılmış görüşmedeki dördüncü probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede OÖ1A'nın çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P* : ***Bu soruyu çözerken nasıl bir yol izledin, çözümünü açıklar mısın?***

*OÖ1A : Orda nasıl bir çözüm yolu denedim..şimdi bize ne demiş..elimizdeki bilgileri kullandım öncelikle f A'dan B'ye g B'den C'ye birebir ve örten fonksiyonlarmış..öncelikle bu ifadeyi şöyle bir açtım.dedim ki birebir olduğunda hani f'de a, b elemanları alsak f a ve f b birbirine eşitse burda a ile b nin birbirine eşit olması lazım.yine aynı şekilde g içinde bunu yaptım. a ve b nin birbirine eşit olması lazım dedim. Şimdi f örten olduğunda f hariçtir b olucak şekilde hani şu b elemanını bulabileceğimiz şekilde a kümesinde bir küçük a elemanı vardır diye düşündüm. Yine g de de aynı şekilde bunu yaptım. Bana demiş ki g bileşke f a nın birebir ve örten olduğunu gösterin demiş. Elimdeki f'nin ve g'nin birbir örten olduğundan yararlanarak bunu göstermeye çalıştım. Dedim ki şu hani gof alalım dedim. gof a eşittir gof b olduğunda a eşit b midir dedim. Bunu şu şekilde yazdım. g'nin altında f a eşit g'nin altında f b. Şimdi dedim ki ben g birebir olduğundan bu eşitliğin sağlanabilmesi için içindeki f a ve f b nin birbirine eşit olması gerekir dedim. şimdi bu f a ve f b birbirine eşit olduğunda yine f'inde birebir olduğunu kullanarak dedim ki ben a ve b birbirine eşit olmalıdır dedim. Bu durumda gof'un birebir olduğunu gösterdim.*

*Yine örtenliğini de g ve f'nin örtenliğinden yola çıkarak yaptım dedim ki gof a eşit c olsun dedim daha sonra c bulabilecek şekilde f a nın b kümesinde olması lazım tamam bu varsa f' nin örten olmasından yararlanarak dedim ki şu içine f a yı b dersek f a eşit b olduğundan b yi bulabilecek şekilde a A kümesinde vardır. Çünkü zaten örten olduğunu bize vermişti bu durumda ben gof'unda birebir ve örten olduğunu göstermiş oldum.*

*P* : ***Bu şekilde çözmeye nasıl karar verdin? Neden bu yolu tercih ettin?***

*OÖ1A* : *Neden bunu tercih ettim..şimdi baktım kullanacak birşey yok zaten fazla birşey vermemiş birebir ve örten olduğunu vermiş dedim bunları kullanmak zorundayım zaten. verilerden yola çıkarak daha doğrusu bu yolu seçtim. Bildiğim tanımları kullanarak gösterdim*

*P* : ***Daha farklı bir şekilde gof'un birebir ve örten olduğunu gösterebilir miydik?***

*OÖ1A* : *Daha farklı bir şekilde..birebirlik böyle olur da biraz örtenlikten başka bir şey gelebilir mi bilmiyorum ki herhalde böyle gösterilir.*

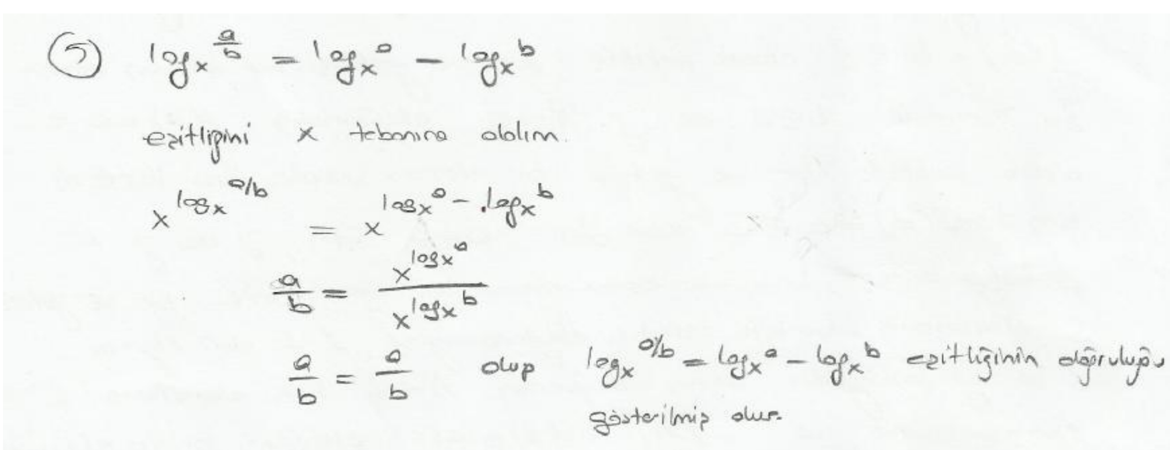
*P* : ***İspatının yeterli olduğunu düşünüyor musun?***

*OÖ1A* : *Yeterlidir. yetersiz bulmuyorum hiç kendimi.*

Öğrenci bildiklerinden yola çıkarak matematiksel bir dille problemin çözümünü göstermiş analitik şemalardan aksiyomatik şemayı kullanmıştır. Ayrıca ispatının doğruluna da güvenmektedir.

Yarı yapılandırılmış görüşmelerde öğrenciler beşinci sorunun çözümünde deneysel ve analitik şemaları tercih etmiş dışsal şemayı kullanan olmamıştır.

İlköğretim dördüncü sınıf matematik öğretmen adayı olan İÖ4C beşinci problemin çözümünde yazılı sınavda analitik şema kullanırken görüşmede deneysel şema kullanmıştır. Aşağıda Şekil 4.14'te görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.



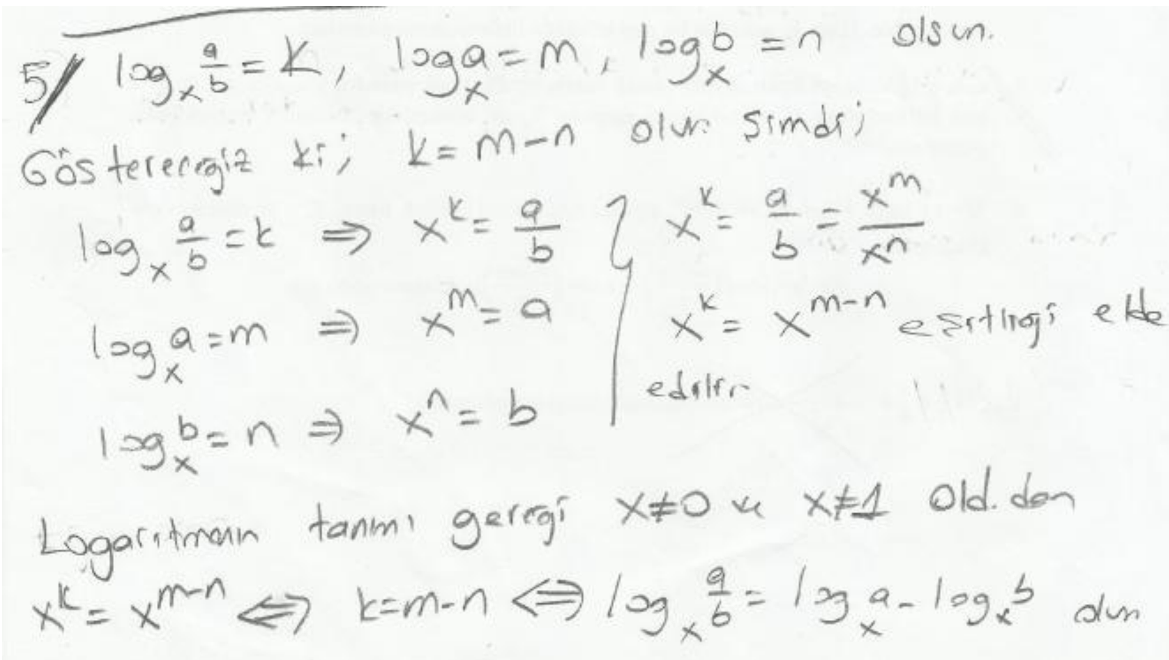

Şekil 4.14 İÖ4C'nin yarı yapılandırılmış görüşmedeki beşinci probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede İÖ4C'nin çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P* : ***Bu sorunun çözümünde nasıl bir yol izledin?***
*İÖ4C : Logaritmada yine logaritmanın tanımını kullandım. Eşitliğin her iki tarafınıda x tabanında yazdım. x logaritma x tabanında a bölü b karşısında ise logaritma x tabanında a eksi logaritma x tabanında b. Üssel sayılarda bölümlerin tabanlar aynıysa üslerin bölme ve çıkarma olarak yazıldığını biliyordum.*
*P : O kuralı nerden biliyoruz?*
*İÖ4C : Sürekli kullandığımız bir şey ama nerde gördüğümüzü bilmiyorum. Bu ortaokuldan beri gördüğümüz bir şey aslında. Tabanlar aynı ise üsler çıkarılır. üslü ifadelerden biliyordum. Tabanlar aynı ise bu sefer tabanları ayırdım ben bölme haline çevirdim. A bölü b eşittir karşısında da ne oldu ne geldi. Ayrıca şey vardı burada logaritmanın kuralında log x ile x birbirini götürüyordu orda a bölü b kalıyordu. Eşitliğin bir tarafında a bölü b kaldı diğer tarafta ise x üzeri logaritma a bölü x üzeri logaritma b kaldı diğer tarafta da ayrıca diğer tarafı kısalttığım gibi bu tarafıda kısalttım. Pay ve paydayı kısalttım. a bölü b eşittir a bölü b kaldı. Eşitliğin bu şekilde doğru olduğunu kabul ettim ben ve gösterdim.*
*P* : ***Bu şekilde göstermeye nasıl karar verdin? Neden bu yolu tercih ettin?***
*İÖ4C : Açıkcası başka bir yol düşünmedim direk bu yöntem aklıma geldi. x tabanına almak logaritmaları yok etmek, yok ederek yapabileceğimi düşündüm. Üslü sayılardan yararlandım.*
*P* : ***Farklı bir şekilde çözebilirmiydik?***
*İÖ4C : Farklı bir şekilde..matematiğin tek çözümü olmadığını söylemek gerekirse mutlaka vardır.*
*P* : ***İspatının yeterli olduğunu düşünüyor musun?***
*İÖ4C : Bu ispatın yeterli olduğunu düşünüyorum ben açıkcası.*

Öğrenci ifadede eşitliğin sağ tarafının sol tarafına eşit olduğunu göstermiş, sağlama yapmıştır. Dolayısıyla deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmıştır.

Ortaöğretim beşinci sınıf matematik öğretmen adayı olan OÖ5B beşinci problemin çözümünde yazılı sınavda ve görüşmede farklı çözüm yollarını tercih etmiş fakat her iki çözümde de analitik şemayı kullanmıştır. Aşağıda Şekil 4.15'te görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.



5/ $\log_x \frac{a}{b} = k$, $\log_x a = m$, $\log_x b = n$ olsun.

Göstereceğiz ki; $k = m - n$ olur şimdi

$\log_x \frac{a}{b} = k \Rightarrow x^k = \frac{a}{b}$ $\quad x^k = \frac{a}{b} = \frac{x^m}{x^n}$

$\log_x a = m \Rightarrow x^m = a$ $\quad x^k = x^{m-n}$ eşitliği elde edilir

$\log_x b = n \Rightarrow x^n = b$

Logaritmanın tanımı gereği $x \neq 0$ u $x \neq 1$ old.dan

$x^k = x^{m-n} \Leftrightarrow k = m - n \Leftrightarrow \log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$ olur

Şekil 4.15 OÖ5B'nin yarı yapılandırılmış görüşmedeki beşinci probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede OÖ5B'nin çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P* : ***Bu soruyu çözerken nasıl br yol izledin?***

*OÖ5B : Şimdi hocam nasıl yaptık o soruyu.. log x tabanında a bölü b eşittir k olsun dedim. log x tabanında a eşittir m olsun dedim. log x tabanında b eşittir n olsun dedim. Bana lazım olan k eşittir m eksi n. Eğer ben böyle olduğunu göstrerirsem ispat bitiyor. Şimdi hocam log x tabanında a bölü b olduğundan bu tanımı gereği x üzeri k eşittir a bölü b'dir. Burada sorun yok. Aynı şekilde x üzeri m eşittir a'dır.* $x^m$*= a dır, diğeri x üzeri n eşittir b'dir.şimdi hocam x üzeri k eşittir a bölü b olduğundan a da x üzeri m b de x üzeri n olduğundan x üzeri k eşittir x üzeri m bölü x üzeri n olur. Üslü sayıların tanımından hocam eğer o taban aynıysa x üzeri m eksi n olur dedim. Şimdi logaritmanın tanımından x sıfır yada 1 olamayacağından x üzeri k eşittir x üzeri m eksi n olması ancak ve ancak k eşittir m eksi n olmasıyla mümkündür dedim yerine yazdım ve ispat bitti.*

*P* : ***Peki bu yolu seçmeye nasıl karar verdin?***

*OÖ5B : Hocam bu yolu seçmeye nasıl karar verdim. Aklıma geldi bende böyle yaptım. Hani tecrübe diyelim hani pek yok ama.*

*P* : ***Farklı bir şekilde gösterebilir miydik.? Aklına gelen bir şey var mı?***

*OÖ5B : Hocam şu an yok*

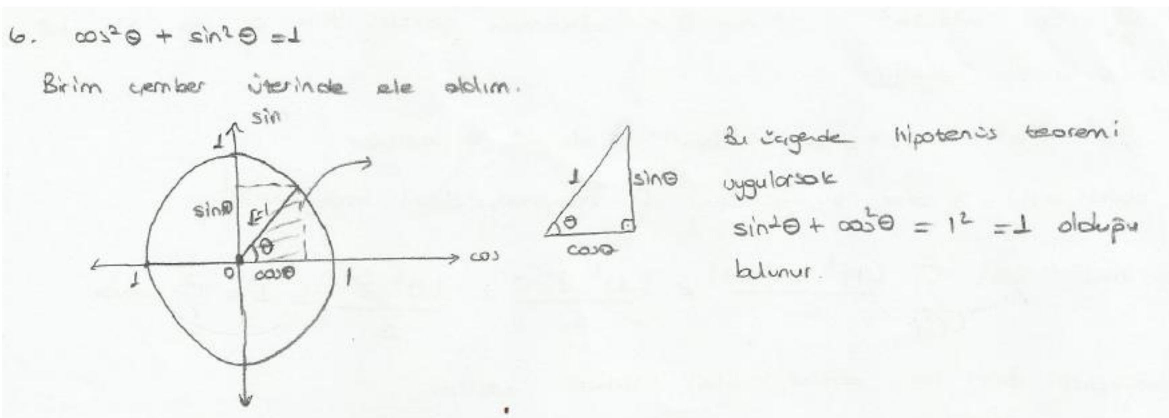
*P* : ***İspatının yeterli olduğunu düşünüyor musun?***

*OÖ5B : Düşünüyorum demek istemiyorum da hani düşünmüyor da değilim. Hani ikisinin arasında bir şey işte. Ama buna 10 puan verirdim.*

Öğrenci bildiği kuralları kullanarak matematiksel bir şekilde ifadenin doğruluğunu göstermiştir. Dolayısıyla analitik şemalardan aksiyomatik şemayı kullanmıştır.

Yarı yapılandırılmış görüşmelerde öğrenciler altıncı sorunun çözümünde dışsal, deneysel ve analitik şemaların üçünü de kullanmıştır.

Ortaöğretim birinci sınıf matematik öğretmen adayı olan OÖ1A altıncı problemin çözümünde yazılı sınavda ve görüşmede farklı çözüm yollarını tercih etmiş fakat her iki çözümde de analitik şemayı kullanmıştır. Aşağıda Şekil 4.16'da görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.




Şekil 4.16 OÖ1A'nın yarı yapılandırılmış görüşmedeki altıncı probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede OÖ1A'nın çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P : **Bu sorudaki çözüm yolunu açıklar mısın?***

*OÖ1A : Burada dedim ki cos kare teta ile sin kare tetanın toplamının 1 olduğunu söylemiş bu zaten bildiğimiz bir şey her yerde kullanıyoruz.Ben dedim ki bunu birim çember üzerinde ele alayım dedim. Birim çemberde yarıçapı 1 birim olan bir çember aldım çizdim.koordinat ekseni üzerine. Daha sonra uzattım onu şöyle şekildeki gibi şu alt kısmı cos teta*

*P : Neden oraya cos teta dedin?*

*OÖ1A : Nedenini bilmiyorum ama içimden bişey demelisin dedi dedim burası cos ekseni olarak alıyoruz burayı da sin ekseni olarak alıyoruz hani bu durumda burası cos burasıda sin olur diye düşündüm tetadan. Daha sonra orda bir üçgen oluştu dedim burada pisagor teoremini uygularsak cos kare teta ile sin kare tetanın toplamı 1 olur diye düşündüm. Bunu bulmuş oluruz dedim ama şurayı bilmemek büyük bir eksiklik yani. neden olduğunu bilmiyorum açıkcası. Yani hep böyle yapıyoruz.ne bileyim alışkın olduğum için öyle yaptım hatta bir yerlere de tanjant diyorduk ama öyle yani onun için dedim.*

*P : **Peki neden birim çemberi tercih ettin. Neden bu yolu kullandın?***

*OÖ1A : şimdi 1 elde etmem lazım dedim. Bir yerden.hani verilere göre baktım. 1 bulmam lazım dedim birim çember çizeyim yarıçapı 1. Ordan zaten o 1'i görünce ben hemen zaten bu şeyi ifadesine benziyor bakarsak a kare artı b kare eşittir c kare dedim o zaman burda pisagor falan kullnılamaz pisagor teoremi yani ordan yola çıkarak aslında.*

*P : **Farklı bir yol geliyor mu aklına?***

*OÖ1A : Aklıma gerçekten farklı bir yol gelmiyor. Benim zaten o trigonometriyle pek aram iyi değildir sevmem kendilerini onun için farklı da bir yol gelmiyor aklıma…nerden yola çıksak bilmiyorum ki.*

*P : **İspatının yeterli olduğunu düşünüyor musun?***

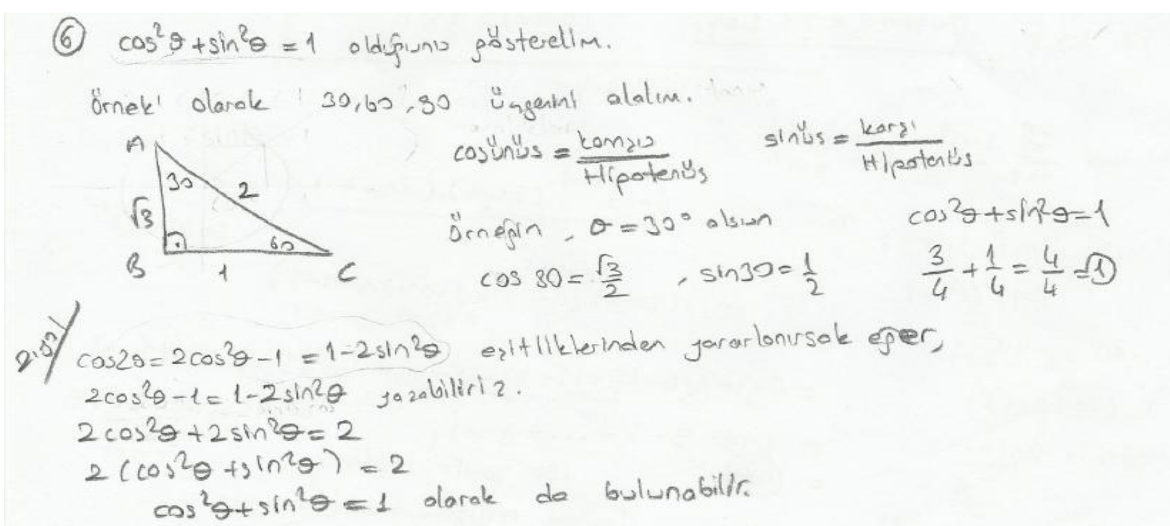
*OÖ1A : Düşünmüyorum açıkcası ama yani sonuçta doğru şey çıkıyor ama.*

*P : Peki sence eksik yanları neler?*

*OÖ1A : Eksik yanları neler..böyle şıp diye çizdim buraya.sin, cos dedim burada bir eksiklik var neye göre dedim onları yazmam lazımdı yani. şurayı söyleyebilseydim yeterli olucaktı.*

Öğrenci çözümü yaparken bazı adımların nedeni sorulduğunda neden öyle yaptığını açıklayamamış hep böyle yaptıkları için bu yolu tercih ettiğini belirtmiştir. Yani öğrencinin dışsal şemalardan otoriteyi kullandığı anlaşılmaktadır.

İlköğretim birinci sınıf matematik öğretmen adayı olan İÖ1B altıncı problemin çözümünde yazılı sınavda ve görüşmede aynı çözüm yollarını tercih etmiştir ve deneysel şemayı kullanmıştır. Bunun yanı sıra görüşmede ikinci bir yol olarak analitik şemayı kapsayan bir çözüm yapmıştır. Aşağıda Şekil 4.17'de görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.




Şekil 4.17 İÖ1B'nin yarı yapılandırılmış görüşmedeki altıncı probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede İÖ1B'nin çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P* : ***Burada nasıl bir yol izledin, çözümünü anlatır mısın?***

*İÖ1B* : *Bu soruda iki tane çözüm yaptım. aslında birinde değer verdim bir de normal trigonometrik tanımlardan yararlanarak yaptım. İlk değer verdiğimde 30, 60, 90 üçgenini aldım hani 1, 2, kök 3 diye değerlerini yazdım. Sonra cosinüs tanımı, sinüs tanımı, komşu bölü hipotenüs, karşı bölü hipotenüsden cos30'u aldım tetaya diyeyim 30 değerini vererek sonra karelerini aldığımız zaman 1 çıktı. Daha sonra 2. yol olarak da trigonometri fonksiyonların yardımlarından aldım. coskare tetanın hem 2 cos kare teta eksi 1'e bir de1 eksi 2 sin kare teta eşitliğinden yararlandım ikisi de birbirine eşit olduğu için cos ve sini aynı tarafta alarak şurda eşitliği sağladım.*

*P* : ***Neden bu yolları tercih ettin?***

*İÖ1B* : *ilk başta aslında bu eşitliğin doğru olduğunu bir örnekle görmek istedim o yüzden böyle bir örnek yaptım. Doğruluğunu görüncede daha sonra tekrar ispatlanmış olan örneklere baktım daha net kavram oluştu.*

*P* : *Anladım peki mesela bir örnek verdim doğruluğunu görmek istedim dedin.verdiğin bu örnek seni doğruluğuna ikna etmede yeterli oldu mu?*

*İÖ1B* : *Aslında tam olarak yeterli değil çünkü hani kesin söyleyebilmemiz için birçok örnek vermemiz gerekiyor o yüzden hani ben hepsini deneyemeyeceğimden dolayı ispatlanmış olanlar üzerinden yararlandım.*

*P* : ***Farklı bir çözüm yoku olabilir miydi? Aklına gelen başka bir yol var mı?***

*İÖ1B* : *Yine böyle ispatlanmış formüllerden olabilir yani.*

*P* : *Bu formülleri nereden biliyoruz?*

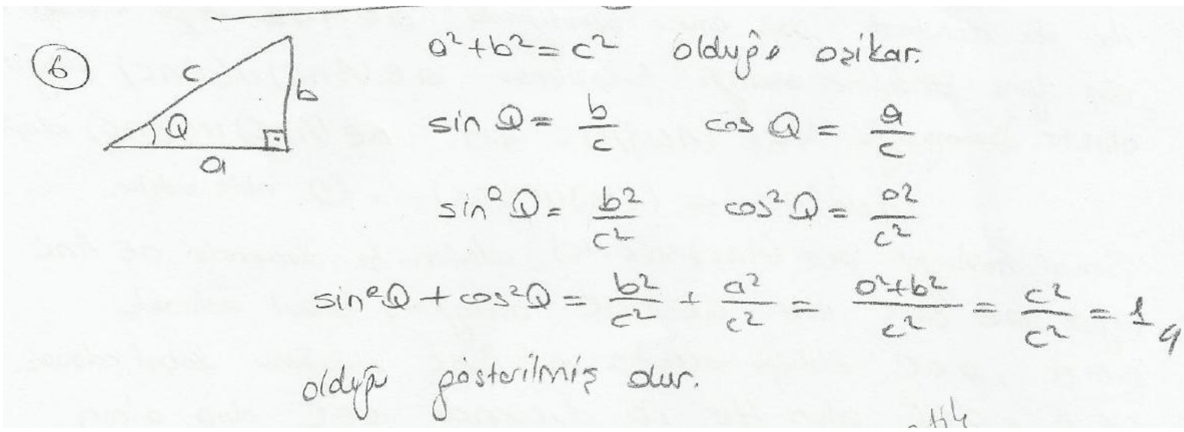
*İÖ1B* : *Liseden trigonometriden hatırladığım için kullandım*

*P* : ***İspatının yeterli olduğunu düşünüyor musun?***

*İÖ1B* : *Farklı ispatlar da olsa yine aynı sonucun çıkacağını düşünüyorum ve yeterli bence.*

Öğrenci çözüm sürecinde ifadenin doğruluğunu kendine gösterme ihtiyacı hissedip sayısal değerler vererek doğruluğuna kendini ikna ettikten sonra matematiksel bir dille ispatı yapmaya çalışmıştır. Bunun yanı sıra değer vermenin yeterli olmadığını düşünmektedir.

İlköğretim dördüncü sınıf matematik öğretmen adayı olan OÖ4C altıncı problemin çözümünde yazılı sınavda ve görüşmede farklı çözüm yollarını tercih etmiştir. Yazılı sınavda dışsal şemayı kullanırken görüşmede analitik şemayı kullanmıştır. Aşağıda Şekil 4.18'de görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.




Şekil 4.18 İÖ4C'nin yarı yapılandırılmış görüşmedeki altıncı probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede İÖ4C'nin çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P* : ***Bu soruda nasıl bir çözüm yolu izledin?***

*İÖ4C* : *Burada ben çok kullanılan bir yöntemle yaptım. İlk önce bir dik üçgen aldım kenarlarını isimlendirdim.*

*P* : *Neden bir dik üçgen aldın?*

*İÖ4C* : *Dik üçgen almamın sebebi sinüsü tanımlayabilmem rasyonel sayı şeklinde yazabilmem ve işleme öyle sokabilmem için bu yöntemi kullandım. Ayrıca hipotenüsün dik kenarların karelerinin toplamı olduğunu biliyoruz karekökü olduğunu biliyoruz.bundan da yararlandım. sinüs tanımını yaptım sinüsü belirledim b bölü c. verdiğim açıya göre cosinüsü belirledim karelerini aldım işlemde yerine koyduğumda b kare bölü c kare artı a kare bölü c kare buldum. Paydaları aynı üsleri topladım. a kare artı b kare çıktı o da zaten hipotenüsün karesine eşit dik üçgenden geldiği için c kareye eşit c kare bölü c kare çıktı bu da 1 e eşittir. Dolayısıyla denklemin 1'e eşit olduğunu gösterdim.*

*P* :***Neden bu yolu tercih ettin?***

*İÖ4C* : *Aslında başta soruyu yapamayacağımı düşündüm. Hiç aklıma gelmemişti.çünkü trigonometri sevmediğim bir konu ancak dik üçgen bu yöntem aklıma geldi. Sürekli buraya üniversiteye hazırlanırken de sorularda kullanmış olduğumuz bir yöntemdi.onu kullandım.*

*P* : ***Farklı bir şekilde ifade edebileceğimizi düşünüyor musun? Aklına gelen bir yöntem var mı ?***

*İÖ4C* : *Aklıma gelen bir yöntem..trigonometride sürekli birbirlerine dönüştükleri için dönüşüm fonksiyonlarıyla çıkabilir. Açıkcası başka bir yöntemlede kesin çözülebilir yani.*

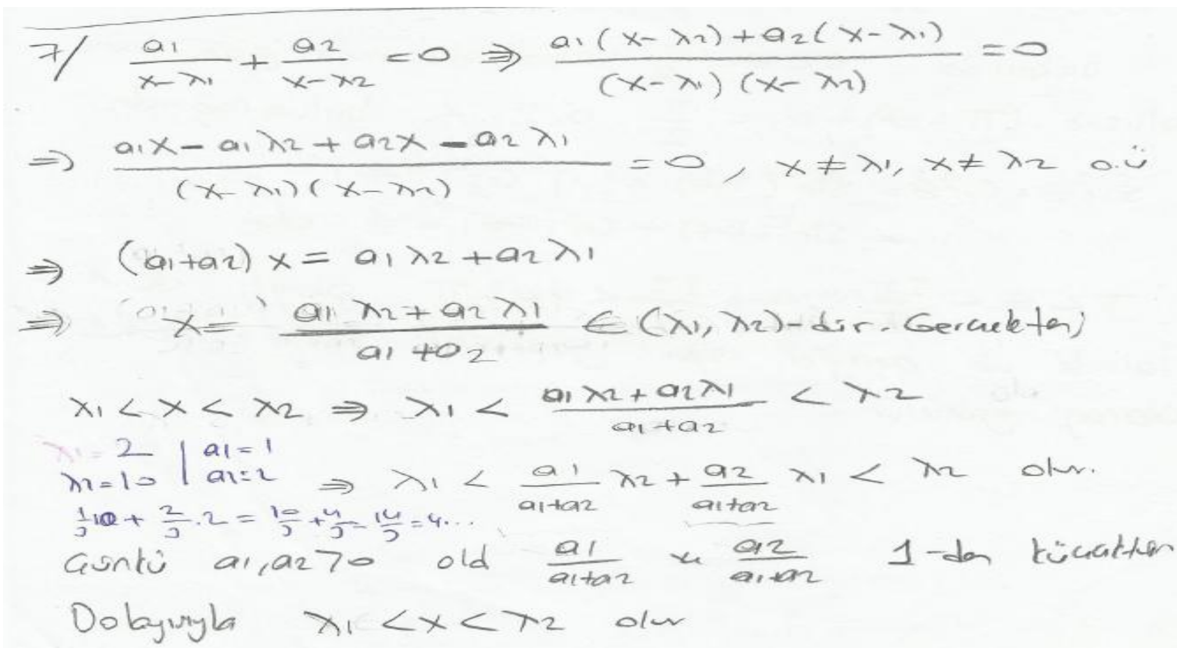
*P* : ***İspatının yeterli olduğunu düşünüyor musun?***

*İÖ4C* : *Açıkca ispatın ben bu şekilde yeterli olduğunu düşünüyorum.*

Öğrenci bildikleri ve daha önce gördüklerinden faydalanarak matematiksel olarak ispatı yaptığından analitik şemalardan aksiyomatik şemayı kullanmıştır.

Yarı yapılandırılmış görüşmelerde yedinci problemin çözümünde öğretmen adayları dışsal ve aksiyomatik şemayı kullanmış deneysel şemayı tercih eden olmamıştır.

Ortaöğretim dördüncü sınıf matematik öğretmen adayı olan OÖ5B yedinci problemin çözümünde yazılı sınavda deneysel şema kullanırken görüşmede dışsal şemayı kullanmıştır. Aşağıda Şekil 4.19'da görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.


7/ $\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} = 0 \Rightarrow \frac{a_1(x-\lambda_2)+a_2(x-\lambda_1)}{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)} = 0$

$\Rightarrow \frac{a_1x - a_1\lambda_2 + a_2x - a_2\lambda_1}{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)} = 0$, $x \neq \lambda_1$, $x \neq \lambda_2$ o.ü

$\Rightarrow (a_1+a_2)x = a_1\lambda_2 + a_2\lambda_1$

$\Rightarrow x = \frac{a_1\lambda_2 + a_2\lambda_1}{a_1+a_2} \in (\lambda_1, \lambda_2)$-dir. Gerçekten)

$\lambda_1 < x < \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 < \frac{a_1\lambda_2 + a_2\lambda_1}{a_1+a_2} < \lambda_2$

$\lambda_1 = 2$ | $a_1 = 1$

$\lambda_2 = 10$ | $a_2 = 2$ $\Rightarrow \lambda_1 < \frac{a_1}{a_1+a_2}\lambda_2 + \frac{a_2}{a_1+a_2}\lambda_1 < \lambda_2$ olur.

$\frac{1}{3}10 + \frac{2}{3}.2 = \frac{10}{3} + \frac{4}{3} = \frac{14}{3} = 4\ldots$

Çünkü $a_1, a_2 > 0$ old $\frac{a_1}{a_1+a_2}$ ve $\frac{a_2}{a_1+a_2}$ 1-den küçükler

Dolayısıyla $\lambda_1 < x < \lambda_2$ olur

Şekil 4.19 OÖ5C'nin yarı yapılandırılmış görüşmedeki altıncı probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede OÖ5C'nin çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P* : ***Burada nasıl bir çözüm yolu izledin?***

*OÖ5C : Öncelikle orda ne yaptığımı… burda işte payda eşitledim, sonra düzenledim ve a1x eksi a1 lamda2 artı a2x eksi a2 lamda1 sıfır geldi. Kesirli bir paydanın sıfır olabilmesi için payın sıfır olması gerekiyor hocam ve paydanın sıfırdan farklı olması gerekiyor.o yüzden x lamda 1 ve lamda 2 asla olamaz. İşte şu paydayı sıfıra eşitledim hocam x eşittir dedim bu. İşte bu eşitlik oldu. Ben dedim bu eşitliğin bu x bulduğum x sayısının landa1 ve landa2 arasında olduğunu iddia ediyorum dedim. İddiamı da hocam burada göstermeye çalıştım. Sonuçta x'i ikisinin arasında buldum.*

*P : Nasıl buldun?*

*OÖ5C : x'i lamda 1 lamda 2 aralığına yerleştirdim. Şimdi hocam hani burada a1ve a2 sıfırdan büyük ya şimdi a1 artı dolayısıyla a1 artı a2, a1'den büyük olur kesinlikle. Şimdi pardon sıfırdan büyük olur ama a1 bölü a1 artı a2 1'den küçük olur dedim. Aynı şekilde a2 bölü a1 artı a2 de 1 den küçük olur. Şimdi hocam ben iki aralıkta* *aralığın uçlarını 1 den küçük sayılarla çarptığım ve topladığım zaman onun aralığın arasında olduğunu genel matematik 1 den biliyorum o yüzden.*

P : *Birden küçük sayılarla çarpıp topladığında?*

OÖ5C : *Mesela ne olabilir örnek verelim lamda1 eşit 2, lamda2 eşit 10 olsun dedim a1 eşit 1, a2 eşit 2 alalım bunlar sıfırdan büyüktür. Şimdi a1 bölü yani bir bölü 1 artı 2 çarpı 10 artı 1 bölü 1 artı 2 çarpı 2 eşittir 10 bölü 3 artı 4 bölü 3 o da eşittir 14 bölü 3 yani eşittir 4 küsür oluyor. O da 2 ile 10 arasında yani lamda1 ile lamda2 arasında oluyor diye düşündüm.*

P : *Neden böyle yaptın?*

OÖ5C : *Genel matematik 1'de böyle bir eşitlik ispatladığımızı hatırlıyorum 5 sene önce .. ondan yola çıkarak bunu düşündüm*

P : *Eğer katsayıları 1 den küçük bir şeyle çarpıp o aralıktaki şeyleri toplarsak arasında olur?*

OÖ5C : *Arasında olur. O olduğunu biliyordum ben. Hocam yani emin değilim ama o zamanlar artık bir soru mu çözmüştüm bir şey olmuştu ben onu öyle olduğunu hatırlıyorum.*

P : ***Peki bu yolu seçmeye nasıl karar verdin?***

OÖ5C : *Önce bir amacımın x'in lamda1 ile lamda 2 arasında olduğunu göstermek olduğunu fark ettim sonra artık bu fark çerçevesinde işlemleri yaptım.*

P : *Söylediğin bilgiyi hatırlamasaydın farklı nasıl çözerdin?*

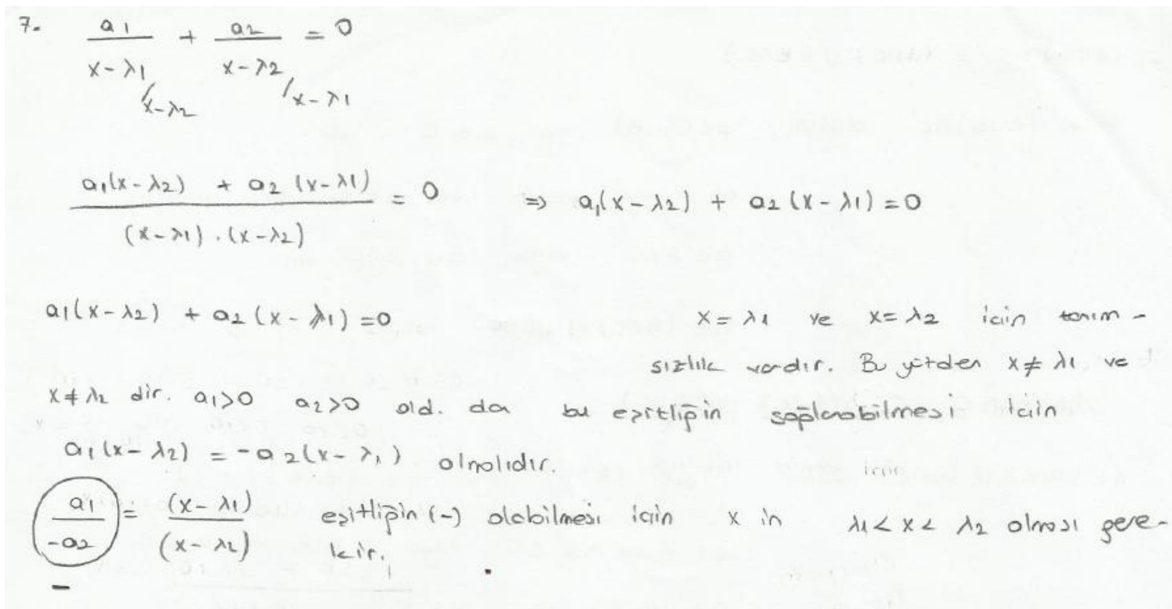
OÖ5C : *Hatırlamadığımı varsaysak nasıl tercih ederdim…aklıma bir şey gelmedi.*

P : ***İspatının yeterli olduğunu düşünüyor musun?***

OÖ5C : *Düşünüyorum burada. şu bilgi eğer doğruysa düşünüyorum.*

Öğrenci yaptığı ispatın doğruluğunu daha önceden hatırladığı bir kurala dayandırmakta ve kuralı kullanmadan ispatı açıklayamamaktadır. Açıklayamadığı noktada değerler vererek ifadesini savunmaya çalışmıştır. Dolayısıyla dışsal şemalardan otoriteyi kullanmıştır.

Ortaöğretim birinci sınıf matematik öğretmen adayı olan OÖ1A yedinci problemi yazılı sınavda boş bırakırken görüşmede analitik şemayı kullanmıştır. Aşağıda Şekil 4.20'de görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.




Şekil 4.20 OÖ1A'nın yarı yapılandırılmış görüşmedeki yedinci probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede OÖ1A'nın çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P* : ***Burada nasıl bir çözüm yolu izledin?***

*OÖ1A : Burada dedim ki ben a1 büyük sıfır, a2 büyük sıfır, bunları kullanmam lazım. lamda1 küçük lamda2. Şimdi ilk başta baktığımızda dedim ki bu bana benim paydalarımı eşitle diyor. Eşitledim paydalarını, paydalarını eşitledim sıfır. Daha sonar dedim ki şimdi bu sıfıra eşit olacak ama hani bunun paydası sıfır olmamalıdır diye çünkü tanımsızlık olur o durumda onun için dedim ki x eşit değildir lamda1, x eşit değildir lamda2 dedim. Bunları bir tarafa koydum daha sonra bunu eşitledim sıfır olması için hani payını. Payının sıfır olması gerekir dedim. Daha sonra buradan ama dedim ki bu da a1 çarpı x eksi lamda2 artı a2 çarpı x eksi lamda1 eşittir sıfır demek dedim. Bana burda diyor ki a1 ve a2 sıfırdan büyük ayrıca ben burada dedim ki x lamda1 de olamaz lamda2 de olamaz. Bu durumda bunu burada direk sıfır yapamıyorum. Dedim ki demekki bunlar birbirlerinin zıt işaretlisine eşitler ki sıfır gelsin. Bu durumda şu şekilde işledim. a1 çarpı x eksi lamda2eşittir - a2 çarpı x eksi lamda 1 olmalıdır dedim. Daha sonra bunları oranladım. a1 bölü - a2 eşitir x eksi landa1bölü x eksi lamda2. Eşitliğin olabilmesi için dedim ki şimdi şurası sol kısım geliyor, burası –eksi geldiğine göre*

*P : Neden eksi geliyor?*

*OÖ1A : Şimdi a1 ve a2 pozitifti. a2'nin önünde eksi vardı. Artı bölü eksiden eksi geldi. Daha sonra ben burda dedim ki x eksi lamda1 bölü x eksi lamda'nin eksi olması lazım dedim. Bir kere şöyle düşündüm ya altı pozitif ya farklı işaretlerde olmaları gerekiyor dedim yani kısacası. Daha sonra dedim ki yukarısı artı olduğunda x büyük lamda1 olması lazım aşağısı da o zaman eksi olmak durumunda o zaman bu* *ne olcak x küçük lamda2 olcak dedim. Yani bu aralıkta olması gerekiyor dedim. Öyle çözdüm yani.*

P : ***Neden bu yolu tercih ettin?***

OÖ1A : *Neden bu yolu tercih ettim..aslında ben bu denkleme bakınca ilk başta ne yapacağım pek aklıma gelmedi sadece paydaları eşitledim, yazdım bir kenara yani, aklıma birşey gelmedi. Baktım dedimki burada bana a1,a2'yi, lamda ve lamda2'yi boşuna vermemiştir bunları kullanmam gerekiyor. Daha sonra işte aklıma ne bileyim bana öyle oluyor yani geliyor birden aklıma nasıl çözüleceği öyle yazdım.*

P : ***Farklı bir çözüm yolu geliyor mu aklına buna dair?***

OÖ1A : *Yani daha farklı bir çözüm yolu nasıl olabilir bilmiyorum ki gelmiyor açıkcası bu bile zor geldi.*

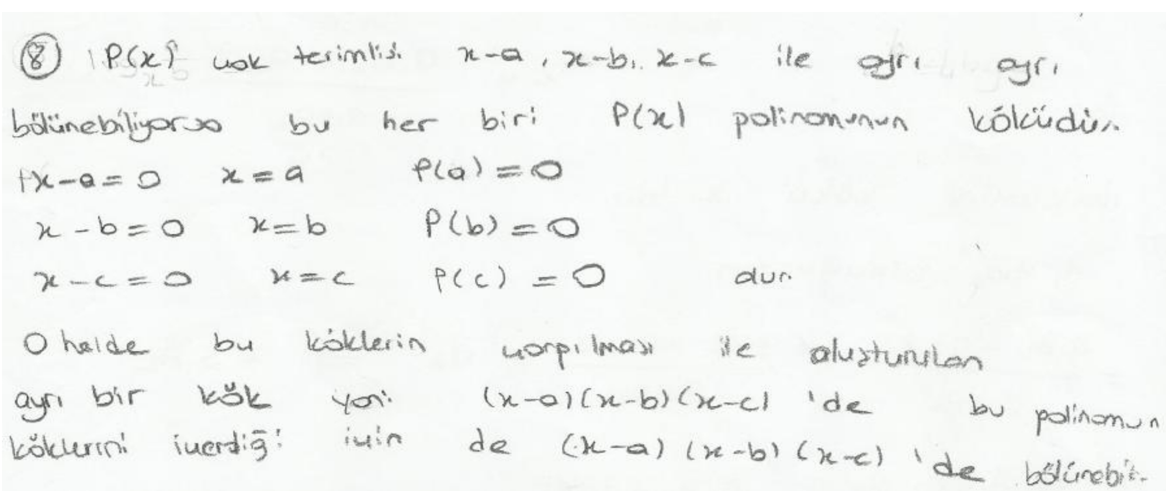
P : ***İspatının yeterli olduğunu düşünüyor musun?***

OÖ1A : *Yeterlidir bence.*

Öğrenci mantıksal akıl yürüterek matematiksel bir dille ifadenin doğruluğunu gösterdiğinden analitik şemalardan analitik şemayı kullanmıştır.

Yarı yapılandırılmış görüşmede sekizinci problemin çözümünde öğrenciler dışsal, deneysel ve analitik üç şemayı da kullanmıştır.

Ortaöğretim beşinci sınıf matematik öğretmen adayı olan OÖ5A sekizinci problemin çözümünde yazılı sınavda ve görüşmede farklı çözüm yollarını tercih etmiş, yazılı sınavda deneysel şemayı kullanırken görüşmede dışsal şemayı kullanmıştır. Aşağıda Şekil 4.21'de görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.


8 1. P(x) çok terimlisi x-a, x-b, x-c ile ayrı ayrı bölünebiliyorsa bu her biri P(x) polinomunun köküdür.
x-a=0 x=a P(a)=0
x-b=0 x=b P(b)=0
x-c=0 x=c P(c)=0 dır.
O halde bu köklerin çarpılması ile oluşturulan ayrı bir kök yani (x-a)(x-b)(x-c) 'de bu polinomun köklerini içerdiği için de (x-a)(x-b)(x-c) 'de bölünebi.

Şekil 4.21 OÖ5A'nın yarı yapılandırılmış görüşmedeki sekizinci probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede OÖ5A’nın çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P* : ***Bu soruda nasıl bir çözüm yolu izledin?***

*OÖ5A* : *O soruyu aslında şey emin değilim ama mantığımla yaptım.şimdi diyor ki px çok terimsi yani polinom, polinomun ayrı ayrı bölebiliyorsa herbiri bu polinomun köküdür dolayısıyla pa pb ve pc sıfıra eşit oldu. Aslında bu matematiksel anlamda şu yazdıklarım yeterli değil öğrenciyi ya da karşımda anlattığım kişiyi kimseyi tatmin edici değil fakat ben genel düşündüğümde eğer polinomun her böleni ayrı ayrı o polinomun köküyse bunların, bölenlerinin çarpımları da bir tanesinin bölmesi yeterli bu benim bildiğim bir kural dolayısıyla hangisini alırsam bu çarpan içinde gene polinomun kökü olucaktır diye düşündüm bilgilerimden dolayı ama ispatı bu yönde değildi.*

*P* : ***Başka bir çözüm yolu olabilir mi?***

*OÖ5A* : *Şu an aklıma geleni söylüyorum. Bunun derecesini vermiş mi?*

*P* : *Hayır.*

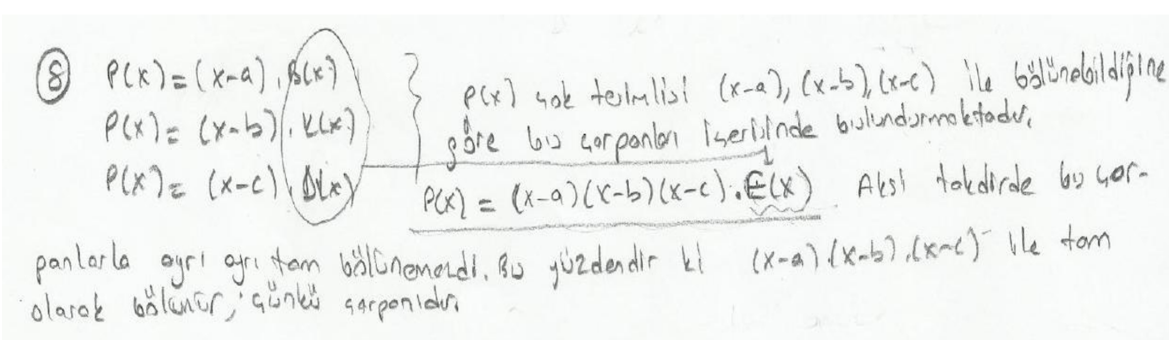
*OÖ5A* : *Mesela bir n dereceli polinom yazabilirdim. Onu yazıp daha inandırıcı olabilirdi yani şu an aklıma geldi*

*P* : ***İspatının yeterli olduğunu düşünüyor musun?***

*OÖ5A* : *Yeterli olduğunu düşünmüyorum şu an başka türlü çözülebilir söylediğim gibi eğer cok terimli bir polinom yazsaydım eğer daha açıklayıcı bir şekilde ispat yapabilirdim.*

Öğrenci çözümünü bildiği bir kurala dayandırmakta ve kendisi de çözümünün yeterli olmadığını düşünmektedir. Bu süreçte dışsal şemalardan otoriteye başvurmuştur.

İlköğretim birinci sınıf matematik öğretmen adayı olan İÖ1B sekizinci problemin çözümünde yazılı sınavda ve görüşmede aynı çözüm yolunu tercih etmiş ve her ikisinde de deneysel şemayı kullanmıştır. Aşağıda Şekil 4.22’de görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.




Şekil 4.22 İÖ1B’nin yarı yapılandırılmış görüşmedeki sekizinci probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede İÖ1B'nıin çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P* : ***Bu soruda nasıl bir çözüm yolu izledin?***

*İÖ1B : İlk başta verdiği çarpanlarla alakalı ayrı ayrı yazdım px'i sonra bunlara tam bölünebildiğine görededim px'in içinde bulunması gerekiyor.*

*P : Neden bulunması gerekiyor.*

*İÖ1B :Bölünebilme özelliğinden dolayı. Mesela diyelim ki bir denklem bir çarpana bölünüyorsa eğer tam bölünüyorsa demek ki içerisinde bulunduruyor ki sadeleştirme oluyor ve tam bölünmüş oluyor. Bu yüzden dolayı eğer hepsi bunun içerisimdeyse hepsiyle tam bölünüyor x eksi a, x eksi b, x eksi c ile demek ki. Bunları ayrı ayrı çarpanları kendi içinde bulunduruyor ama daha farklı çarpanlar olabileceği için bunlara bir tane Ex diye bir denklemle de çarptım. Ex'in ne olduğunu bilmiyorum yani kaçıncı dereceden olduğunu da bilmiyorum ama px'i bu şekilde yazabilirim. Bu çarpanları içerdiği için de bize verdiği sorudaki x eksi a çarpı x eksi b çarpı x eksi c çarpanına da tam olarak bölünür çarpanı olduğu için*

*P : Burada içinde yazabileceğine nasıl karar verdin?*

*İÖ1B : Bölünme özelliği dediğim gibi hani eğer tam bölünebilmesi için içerisinde bulunması gerekiyor. Nasıl söyleyeyim...mesela diyelim ki x eksi 2 nin karesi olsun px. x eksi 2'ye bölünürse x eksi 2 içinde bulunduğu için tam bölünmüş oluyor. Zaten çarpanı ki tam bölünüyor. Aslında tam cümleye dökemiyorum şu anda yani hani içerisinde bulunduğu için bulunmadığı bir değere tam bölünmez yani. Mesela diyelim 6 3'e bölünüyor. 3 çarpı 2 şeklinde içerisinde 3 çarpanı olduğu için tam bölünüyor bu şekilde.*

*P* : ***Bu şekilde çözmeye nasıl karar verdin?***

*İÖ1B : Bölünebiliyorsa direk aklıma çarpan geldi. Çarpan şeklinde yazabilir miyim diye baktım ve devam ettim.*

*P* : ***Farklı bir şekilde gösterebilir miydik bu ispatı?***

*İÖ1B : işte örnek vererek yapardım. Hani dediğim gibi px ve px denklemi seçerdim.ayrı ayrı x değerleri seçerdim hem bölünen hem de bölünemeyen seçerdim. Farkı görebilmek için.*

*P : İspatının yeterli olduğunu düşünüyor musun?*

*İÖ1B : Daha düzgün cümleler yerleştirirsek yeterli bence?*

*P : Mesela nasıl daha düzgün cümleler?*

*İÖ1B : Nasıl söyleyeyim…tam söyleyemiyorum, eksik söylüyorum daha net söylediğim zaman inandırıcılık payı daha yüksek oluyor*

*P : Peki genel olarak yine bu şekilde mi?*

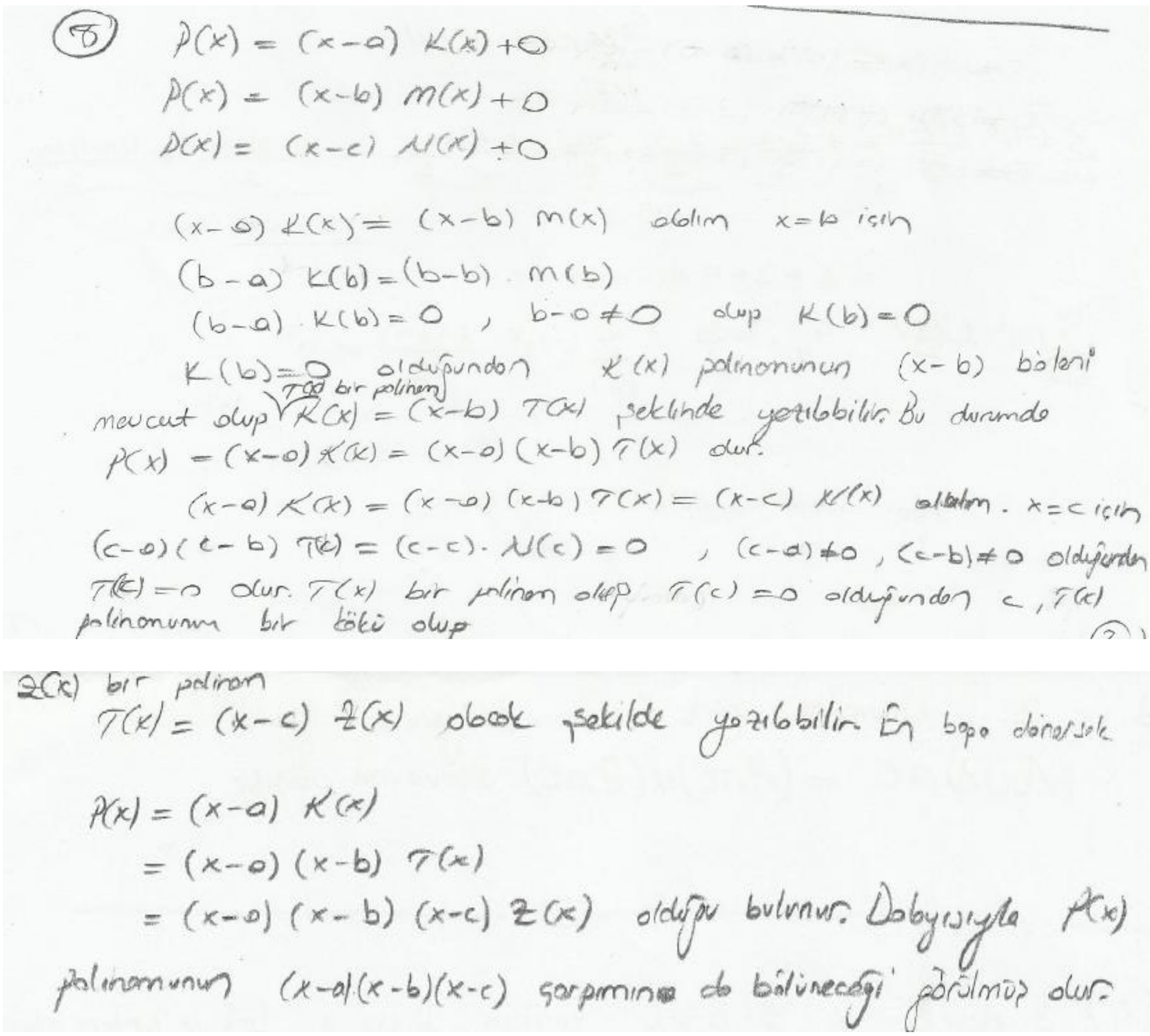
*İÖ1B : Evet.*

*Pınar:* ***Bu şekilde olduğunda ve biraz daha sözel olarak açıkladığında ispatın yeterli olur mu?***

*Hacer: İfade ettiğimize ispat yeterli olur.*

Öğrenci burada kendi belirlediği matematiksel ifadeleri kullanarak yeni bir polinom tanımlamışdır. Polinom örneğini kendisi belirlediği için deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmıştır.

İlköğretim dördüncü sınıf matematik öğretmen adayı olan İÖ4C sekizinci problemi yazılı sınavda boş bırakırken görüşmede çözümünde analitik şemayı kullanmıştır. Aşağıda Şekil 4.23'de görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.



(8) $P(x) = (x-a)\,K(x) + 0$

$P(x) = (x-b)\,M(x) + 0$

$P(x) = (x-c)\,N(x) + 0$

$(x-a)\,K(x) = (x-b)\,M(x)$ olsun $x=b$ için

$(b-a)\,K(b) = (b-b)\,.\,M(b)$

$(b-a)\,.\,K(b) = 0$ , $b-a \neq 0$ olup $K(b)=0$

$K(b)=0$ olduğundan $K(x)$ polinomunun $(x-b)$ böleni mevcut olup $T(x)$ bir polinom $K(x) = (x-b)\,T(x)$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda $P(x) = (x-a)\,K(x) = (x-a)(x-b)\,T(x)$ olur.

$(x-a)\,K(x) = (x-a)(x-b)\,T(x) = (x-c)\,N(x)$ olsun. $x=c$ için

$(c-a)(c-b)\,T(c) = (c-c)\,.\,N(c) = 0$ , $(c-a)\neq 0$ , $(c-b)\neq 0$ olduğundan $T(c)=0$ olur. $T(x)$ bir polinom olup $T(c)=0$ olduğundan $c$, $T(x)$ polinomunun bir kökü olup

$Z(x)$ bir polinom $T(x) = (x-c)\,Z(x)$ olacak şekilde yazılabilir. En başa dönersek

$P(x) = (x-a)\,K(x)$

$= (x-a)(x-b)\,T(x)$

$= (x-a)(x-b)(x-c)\,Z(x)$ olduğu bulunur. Dolayısıyla $P(x)$ polinomunun $(x-a)(x-b)(x-c)$ çarpımına da bölüneceği görülmüş olur.

Şekil 4.23 İÖ4C'nin yarı yapılandırılmış görüşmedeki sekizinci probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede İÖ4C'nıin çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P* : *Bu soruda nasıl bir çözüm yolu izledin?*

*İÖ4C* : *Polinomu açıkcası bölme olarak düşündüm. Normal Bölme işlemi olarak düşündüm. İlk önce verilenleri matematiksel olarak açıkladım. Tam bölündüğü için ben px'i (x-a).kx+0, kalan sıfır olduğu için artı sıfır olarak tanımladım. Burada kx'te bir polinom. Aynı şekilde yine px'I (x-b).mx+0 olarak tanımladım. 3 şekilde tanımladım burada ayrı ayrı bölündüğü için.*

P : *peki bu şekilde değilde farklı bir şekilde x eksi a'ya bölündüğünü gösterebilir miydin?*

İÖ4C : *x eksi a'ya bölündüğünü gösterebilir miydim?*

P : *Neden direkt bu şekilde göstermek geldi aklına?*

İÖ4C : *Soruda verilenleri yazmış gibi bir şey oldum yani başka bir yol da aklıma…hiç düşünmedim başka bir yolla yazmayı bu şekilde soruda verilenleri sadece yazdım işte. Matematiksel ifade etmeye çalıştım. Daha sonra px'ler birbirine eşit olduğu için 1. İfademle 2. ifademi birbirine eşitledim. burada x yerine b verdim ben. Sonuç olarak eşitliğin 2. tarafı b eksi b den sıfır olur. 1. kısmı da sıfır yapan bir şey olmalı dedim. a ile b nin tanımları birbirine eşit olmadığından dolayı b eski a nın sıfıra eşit olmayacağını gördük burda kb'nin sıfır olduğunu gördük. kx polinomu b'yi sıfır yapıyorsa demek ki b gibi bir şeyi var, kökü var dedim. Dolayısıyla ben kx'i tanımladım bu sefer. (x-b).tx şeklinde ..burada tx yine bir polinom dedim, bu şekilde tanımladım.*

*Burada px'in diğer bir açılımını bulmuş oldum px eşittir (x-a).(x-b).tx olduğunu buldum daha sonra kx'i yine buldum. px ifadesini bu sefer 3. İfadeye eşitledim.yani (x-a).(x-b).tx=(x-c).nx burada nx başta tanımladığım gibi bir polinomdur dedim. Burada bu eşitlikte yine x'e c verdim ben. 2. taraf yine negatif yaptı, sıfır yaptı pardon. Yine (c-a).(c-b).tc=(c-c).nc den dolayı bu taraf sıfır yaptı. (c-a).(c-b )'nin yine tanımda verilenlerden bize sıfır olmayacağını buldum.Bu seferde dedimki tc sıfır olmalı. Böylece tx polinomunu c gibi bir köke sahip olduğunu buldum ve aynı şekilde yazdım (x-c).zx olarak.. burada zx'i başka bir polinom olarak tanımladım dolayısıyla aynı şekilde tx'i yerine yazdım. tx'i, kx'i yerine yazdım ve px'i şöyle buldum (x-a).(x-b).(x-c).zx olduğunu buldum Böylece polinomun bu ifade ye bölünebileceğini göstermiş oldum.*

P : *Nasıl göstermiş olduk bunu?*

İÖ4C : *Üçü de aynı anda çarpanı olduğu için böylece göstermiş olduk..*

P : *Bu yolu seçmeye nasıl karar verdin? Bu süreçte nasıl düşündün?*

İÖ4C : *Açıkcası şeydi mesela px'i nasıl tanımlamıştım başta (x-a).kx diye tanımlamıştım. Soruyu okuduğumda ilk önce bu ilk ifadeyi yazdığımda kx'in içinde x-b ve x-c'nin çarpan olarak bulunduğunu düşündüm. Daha sonra bu çarpanları bulmaya ispat etmeye çalıştım. Bu yüzden o yazdığım eşitlikte karşı tarafın sıfır yapmak için b verdim. Bu yüzden de sonra kb'nin kök olduğunu buldum darken devamı geldi.*

P : *Başka bir çözüm yolu olabilir mi?*

İÖ4C : *Başka bir çözüm yolu benim aklıma gelmedi açıkcası en fazla tersten başlarım ama mantık değişmez kullanacağım yöntemde.*

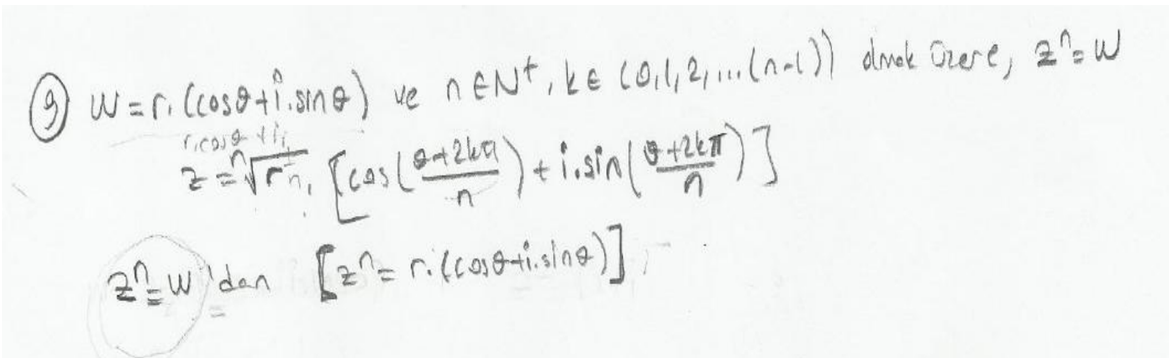
P : *Bu ispatın yeterli olduğunu düşünüyor musun?*

İÖ4C : *Açıkcası bu ispatın yeterli olduğunu düşünüyorum.*

Öğrenci çözümünde mantıksal akıl yürüterek ve adımları doğru bir şekilde takip ederek ispatı gerçekleştirdiğinden analitik şemalardan aksiyomayik şemayı kullanmıştır.

Yarı yapılandırılmış görüşmede öğretmen adayları dokuzuncu soruda dışsal ve deneysel şemayı kullanırken analitik şemayı kullanmamıştır.

İlköğretim birinci sınıf matematik öğretmen adayı olan İÖ1B dokuzuncu problemi yazılı sınavda boş bırakırken görüşmede çözümünde dışsal şemayı kullanmıştır. Aşağıda Şekil 4.24'te görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.




Şekil 4.24 İÖ1B'nin yarı yapılandırılmış görüşmedeki sekizinci probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede İÖ1B'nin çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P : Bu soruda nasıl bir çözüm yolu izledin?*

*İÖ1B :Aslında şey şurdan ötesini z üzeri n eşittir w ya benim eski bilgilerimden hatırladığım net aklıma gelmiyor. Bunun buna eşit olması hani 360 dereceye bölüyorduk n'i kaç tane cos çıkarsa o derece yapıyorduk. Çok fazla bir şey gelmiyor aklıma. Hani şöyle olsaydı eğer bu buna eşitte daha sonra n'sini alsaydık hani o zaman belki birşeyler yapardık şimdi hani kural olarak biliyorum ama yorumlayamıyorum şu anda hani bunu.*

*P : Bu neden kaynaklanıyor yorumlayamaman?*

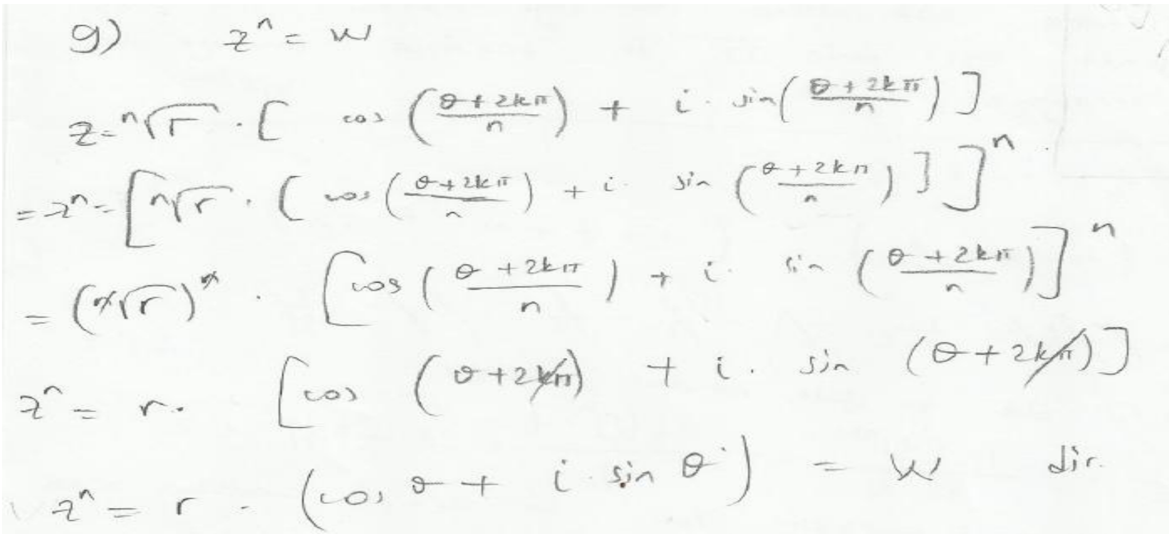
*İÖ1B : Çünkü bunları öğrenirken ezber olarak öğrendiğimiz için. Nereden geldiğini bilmediğimiz için.*

*P : Kuralları hatırlayamıyorsun?*

*İÖ1B : Kuralları tam olarak hatırlayamıyorum.*

Öğrenci kuralı hatırlayamadığı ve ezberlemiş olduğu için çözümü yapamamıştır. Dolayısıyla dışsal şemalardan otorite şemasını kullandığı görülmektedir.

Ortaöğretim birinci sınıf matematik öğretmen adayı olan OÖ1B dokuzuncu problemi yazılı sınavda boş bırakırken görüşmede çözümünde deneysel şemayı kullanmıştır. Aşağıda Şekil 4.25'te görüşmede izlediği çözüm yolu yer almaktadır.




Şekil 4.25 OÖ1B'nin yarı yapılandırılmış görüşmedeki sekizinci probleme ilişkin çözümü

Yarı yapılandırılmış görüşmede OÖ1B'nin çözümüne yönelik açıklaması aşağıdaki gibidir:

*P* : ***Bu soruda nasıl bir çözüm yolu izledin?***

*OÖ1B : Bu soruda tersten başladım. bize z üzeri n eşittir w olarak verilmiş ve z'nin verilen ifadeye eşit olduğunu gösterin denilmiş. z'nin eşit olduğu ifadenin n'inci kuvvetini aldım. z üzeri n eşittir r çarpı cos teta artı 2k pi artı i çarpı sin teta artı 2k pi geldi. Her iki 2k pi de aynı açıya geldiğinden açıyı teta olarak düşünebiliriz dolayısıyla teta artı 2k pi olan yere teta yazdım. Böylelikle istenilen ifadeyi elde etmiş oldum.*

*P : 2k pi'de aynı açıya geldiğini nereden biliyoruz?*

*OÖ1B: Trigonometri konusunda kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının periyotlarının böyle olduğunu ve 2k pi'de aynı açıya geldiğini öğrenmiştik. Açıya 2k pi ekleyerek başka açıları buluyoduk.*

*P* : ***Neden bu yolu tercih ettin?***

*OÖ1B : Açıkçası tersten gidip o ifadeye eşit olduğunu göstermek daha kolay geldi, ulaşmamı istediği sonuç daha karmaşıktı çünkü. Karmaşık sayılarda üslü ifade kuralını da bildiğimden bu yolu deneyeyim dedim baktım devamı geldi.*

*P* : ***Başka bir çözüm yolu olabilir miydi?***

*OÖ1B : Olabilir ama benim aklıma gelen bu şuan.*

*P* : ***İspatının yeterli olduğunu düşünüyor musun?***

*OÖ1B : Bence yeterli.*

Öğrenci sondan başa doğru giderek başlangıçta verilen ifadeye ulaşıp ulaşamayacağını kontrol etmiş, bilinenden yola çıkarak verilen eşitliğin doğruluğunu göstermiştir. Dolayısıyla deneysel şemalardan temel örnekler şemasını kullanmıştır.

### 4.2.2. Yarı Yapılandırılmış Görüşmelerde Matematik Öğretmen Adaylarının Kullandığı Hatalı Düşünme Yolları

İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının problemlerin doğrulanma sürecinde yaptığı çözümlerde nasıl düşündükleri varsa hatalı düşünme yolları tespit edilmeye çalışılmıştır. Öğrencilerin düşünme yolları Harel'in (2001) çalışmasında yer alan yaygın hatalı düşünme yolları kategorilerine göre sınıflanmıştır. Bazı öğrenciler için bazı sorularda hatalı düşünme yolu tespit edilmezken bazıları için bir problemde birden fazla hatalı düşünme yolu tespit edilmiştir.

**Tablo 4.8 Matematik Öğretmen Adayının Yarı Yapılandırılmış Görüşmelerde Kullandığı Hatalı Düşünme Yolları**

| | İlköğretim Matematik Öğretmenliği 1.Sınıf | | | İlköğretim Matematik Öğretmenliği 4.Sınıf | | | Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 1.Sınıf | | | Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 5.Sınıf | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Problemler | İÖ1A | İÖ1B | İÖ1C | İÖ4A | İÖ4B | İÖ4C | OÖ1A | OÖ1B | OÖ1C | OÖ5A | OÖ5B | OÖ5C |
| 1.Problem | | O<br>BFDYE | | BFDYE<br>EKGE | EKGE | | | O | O | O | O | O |
| 2.Problem | O | BFDYE | | | | | | O | | | O | |
| 3.Problem | EKGE | | | | | | | | | | S | |
| 4.Problem | EKGE | | EKGE | EKGE | O | O<br>EKGE | | O<br>EKGE | O | | O | |
| 5.Problem | | | BFDYE | | | | | | | BFDYE | | O |
| 6.Problem | | | | | | | O | | | | | |
| 7.Problem | | O | EKGE | | EKGE | | | | | S | O | |
| 8.Problem | EKGE<br>S | | | | | | O<br>BFDYE | | BFDYE | EKGE<br>O | | EKGE |
| 9.Problem | O | EKGE | EKGE<br>O | O | O | BFDYE | O<br>EKGE | | EKGE | EKGE | | |

Hatalı Düşünme Yolu Kategorileri - O: Otoriteden Dolayı İspat, BFDYE: Birden Fazla Düşünme Yolu Eksikliği, S: Sembolik Düşünme, EKGE: Etkili Kavram Görüntülerinin Eksikliği

Bu bölümde bazı öğretmen adaylarının hatalı düşünme yollarına bazı sorular üzerinden örnekler verilmiştir. İÖ1A kodlu öğretmen adayı ikinci problemde derste bu sorunun ispatını yaptıkları için bu sorunun ispatının nasıl olması gerektiğini bildiğini söylemiştir. Çözümü yarısına kadar yapmış fakat devamını getirememiştir. Dolayısıyla bilgilerini tam olarak kullanamadığından otoriteden dolayı ispat yaptığı anlaşılmıştır. Üçüncü problemde ne yapması gerektiğini bildiğini fakat sorudan korktuğunu ve çözmeye başlamayı göze alamadığından ispat yapamadığını belirtmiştir. Kavram görüntüsüne güvenmediğinden dolayı etkili kavram görüntüleri eksikliği olduğu görülmektedir. Dördüncü problemde birebirlik ve örtenlik tanımını tam olarak yapamamış, bilgisinin bu konuda eksik olduğunu düşündüğünden somut örneklerle basite indirgeyerek ispatı ifade etmeye çalışmıştır. Bunu da etkili kavram görüntülerinin eksikliğiyle açıklamak münkündür. Sekizinci problemde polinom ifadesi oluştururken kalan kavramı için ezberden giderek genelde kullandıkları matematiksel ifadeyi kullanmıştır. Nedeni sorulduğunda ezberden gitmiş olabileceğini söyleyerek açıklama yapamamıştır. Sembolü anlamını bilmeden kullandığı için burada sembolik düşünme yoluna rastlanmıştır. Ayrıca genelde össye hazırlanırken sorularda hep bu yöntemleri kullandıklarını ama sayısal örnekler üzerinden gittikleri için bu soruda matematiksel olarak ifade etmekte zorlandığını ifade etmiştir. Dolayısıyla öğrencinin etkili kavram görüntülerinde eksiklik olduğu anlaşılmaktadır.

İÖ1B kodlu öğretmen adayının birinci problemde probleme doğru bir mantıkla yaklaştığı fakat bazı sorgulamaları yapmadan sonucun doğruluğuna ulaştığı tespit edilmiştir. Bu durumda öğrencini bazı şeyleri ezbere yaptığı, farklı bakış açılarıyla soruyu ele almadığı ve üzerinde çok düşünmediği anlaşılmıştır. Öğrencinin bu çözümde otoriteden dolayı ispat yaptığı ve birden fazla düşünme yolu eksikliğine sahip olduğu düşünülmektedir. İkinci problemde öğrenci ispat yapamamış bunun yerine örnekler üzerinden ifadenin doğruluğunu göstermeye çalışmıştır. Bu durum öğrencinin birden fazla düşünme yolu eksikliğiyle açıklanabilir. Yedinci problemde öğrenci çözümü yaparken istenen ifadeye ulaşmada gerekli olmayan farklı kavramlar kullanmış ve çözümü tamamlayamamıştır. Bu bize öğrencinin hangi bilgileri nerede kullanacağını tam olarak bilmediğini bazılarını ezberlemiş olabileceğini göstermektedir. Dolayısıyla otoriden dolayı ispat yaptığını söylemek mümkündür.

Dokuzuncu problemde öğrenci eski bilgilerinden bazı şeyleri hatırladığını fakat aklına tam olarak gelmediğini, kuralı bildiğini fakat yorumlayamadığını dolayısıyla soruyu çözemediğini ifade etmiştir. Öğrencinin bu konuyla ilgili etkili kavram görüntüleri eksikliğinin olduğu görülmektedir.

İÖ1C kodlu öğretmen adayı birebirlik ve örtenlik tanımlarını bilmesine rağmen bunları bileşke fonksiyona aktarmakta sıkıntı yaşamıştır. Bileşke kavramıyla ilişkiyi kuramadığı ve geçiş yapamadığı için etkili kavram görüntüleri eksikliği mevcuttur. Beşinci soruda ifadeler kendisine tanıdık geldiği için ne yapması gerektiğine karar verebildiğini ve bu doğrultuda da ispatı yaptığını belirtmiştir. Bunun yanı sıra ifade başka bir şekilde gelseydi, tanıdık olmasaydı zorlanabileceğini ifade etmiştir. Dolayısıyla farklı şekillerde kavramları anlamada problem yaşadığı, birden fazla düşünme yolu eksikliğinin olduğu anlaşılmıştır. Yedinci problemde sorunun kökünü bulmuş fakat bunu aralıkta incelemesi gerektiğini anlamamış ve nasıl yapacağını bilmemektedir. Bu sebeple öğrencinin etkili kavram görüntülerinin eksik olduğunu söyleyebiliriz. Dokuzuncu problemde öğrenci bu konuyu genel matematik dersinde gördüklerini ama nereden başlaması gerektiğini hatırlamadığını belirtmiştir. Ayrıca kural olarak bildiğini ama çok oturtamadığını ifade etmiştir. Dolayısıyla öğrencide hem otoriyete dayalı hem de etkili kavram görüntüleri eksikliğini kapsayan hatalı düşünme yolları mevcuttur.

İÖ4A kodlu öğretmen adayı birinci problemde ispat yapamamış bunun yerine örnekler üzerinden sorunun doğruluğunu yaklaşık olarak göstermeye çalışmıştır. Örnekler üzerinden ifade ettiği için birden fazla düşünme yolu eksikliğinden ve tam olarak doğruluğu gösterip matematiksel olarak ikna edemediğinden öğrencide etkili kavram görüntüleri eksikliği olduğu görülmektedir. Dördüncü problemede öğrenci kavramların tanımını tam olarak yapamış ve bileşke fonksiyona aktarmakta zorlanmıştır. Dolayısıyla etkili kavram görüntüleri eksiklği olduğunu söylemek mümkündür. Dokuzuncu problemde bu kavramı derste kural olarak öğrendiklerini özüne inmediklerini dolasıyla kurala dayandırarak doğruluğu gösterebileceğini söyleyerek otoriteden dolayı ispatı kullanmıştır.

İÖ4C koldu öğretmen adayının dördüncü problemde fonksiyonla ilgili kavramdalarda eksikliklerinin olduğu tespit edilmiştir. Bunun yanı sıra birebirliği ve örtenliği gösterirken aynı tanımları kullandığından ezbere dayanarak çözüm yaptığı söylenebilir. Dolayısıyla öğrencide otoriteye dayalı ve etkili kavram görüntüleri eksikliği düşünme yolları bulunmaktadır. Dokuzuncu problemde öğrenci trigonometri ve karmaşık sayı konularına karşı önyargıya sahip olduğundan farkl bir şekilde soruyu anlamaya çalışmamıştır. Birden fazla düşünme yolu eksikliğinin olduğu anlaşılmaktadır.

OÖ1A kodlu öğretmen adayı altıncı problemde birim çember üzerinde aldığı dik üçgende kenarları sinüs ve kosinüs olarak alış nedeni sorulduğunda nedenini bilmediğini, hep böyle yaptıklarını ve alışkanlık olduğu için öyle yaptığını belirtmiştir. Öğrencinin otoriteden dolayı ispat yaptığı anlaşılmaktadır.

OÖ1B kodlu öğretmen adayı dördüncü problemde birebirlik ve örtenlik tanımının yanı sıra fonksiyon olma tanımını da yanlış yapmıştır. Bu öğrencinin bazı kavramları ezbelemiş olabileceğini pekiştirmediği göstermektedir. Bunun yanı sıra bu tanımları matematiksel olarak gösterirken ve bileşkeye aktarırken zorluk yaşamıştır. Öğrencide otoriteye dayalı ispat ve etkili kavram görüntüleri eksikliği olduğunu söylemek mümkündür.

OÖ5A kodlu öğretmen adayı rasyonelliği tanımlamış ve aralarında asal olma ifadesini kullanmıştır. Bunun nedeni sorulduğunda birinci sınıftan itibaren hep böyle yaptıklarını sebebini bilmediğini bunun alışkanlık olduğunu ifade etmektedir. Dolayısıyla öğrencinin otoriteden dolayı ispat yaptığı görülmektedir. Yedinci problemde kökün aralıkta olduğunu gösterirken küçüktür işaretiyle ifade etmesi gereken yerde küçük eşit sembolünü kullandığı, yazış sebebini bilmediği bunu el alışkanlığıyla nitelendirdiği ve eşit olup olmaması gerektiğinden emin olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencinin sembolik düşünmeye sahip olduğu anlaşılmaktadır.

OÖ5B kodlu öğretmen adayı üçüncü problemde sırayla sayısal değerler vererek tümevarım yöntemini kullanmaya çalışmıştır. Fakat sembollere odaklandığından örüntüyü fark edememiş ve sayıların önünde gelen eksi işareti kafasını karıştırmıştır. Öğrenci burada sembolik düşünme yoluna gitmiştir. Yedinci sorunun doğruluğunu nedenini bilmediği birinci sınıftan hatırladığı bir kurala dayandırarak açıklamış otoriteden dolayı ispatı kullanmıştır.

### 4.2.3. Yarı Yapılandırılmış Görüşmelerde Matematik Öğretmen Adaylarının İspata Yönelik Genel Bakış Açıları

İlköğretim ve ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik genel bakış açılarını ortaya koymak üzere hazırlanan yarı yapılandırılmış görüşmenin ikinci kısmını oluşturan 5 açık uçlu sorudan birincisi *"İspat yaparken zorlandığınız noktalar nelerdir?"* şeklindedir. Bu soru ile öğretmen adaylarının ispat yaparken hangi noktalarda zorluk yaşadıkları tespit edilmeye çalışılmıştır.

OÖ1A kodlu öğretmen adayının görüşü *" Bazı ispat sorularında ispata nasıl başlayacağımı bilemiyorum. Bazen başlasam da sonunu getiremiyorum"* şeklindedir.

İÖ4C kodlu öğretmen adayı görüşünü *"Uygun bir ispatlama yöntemini nasıl seçeceğim konusunda zorlanıyorum. Ayrıca soruda karşıma çıkan tüm olasılıkları bulup bunları göz önünde bulunduran bir çözüm yapmakta çoğu zaman zorlanıyorum"* olarak belirtmiştir.

Öğretmen adayları genel olarak ispata nasıl başlayacakları konusunda karar vermede, ispata başlayıp sonunu getirmede, formülleri, kuralları ve çeşitli bilgileri hatırlamada, zihinlerinde oluşan bilgileri toparlayarak düzenli bir şekilde kağıda dökmekte zorlandıklarını ifade etmişlerdir. Bunun yanı sıra ispat yaparken sayısal ifadeler kullanamadıklarından ispatı sözel olarak ifade etmede, ayrıntılı ve soyut düşünmede, soruda tüm olasılıkları bulup bunları göz önünde bulunduran bir çözüm yapmakta da zorluklar yaşadıklarını belirtmişlerdir.

Öğretmen adaylarına yöneltilen sorulardan ikincisi *'İspat yapmanın gerekli olduğunu düşünüyor musunuz? Sizce gerekliyse ya da değilse nedenini açıklar mısınız?'* şeklindedir. Bu soru ile matematik öğretmen adaylarının ispat yapmanın gerekliliğine ilişkin görüşleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

İÖ1B kodlu öğretmen adayının görüşü *"İspat yapmanın tabiî ki gerekli olduğunu düşünüyorum çünkü bir formülü, teoremi vb. ifadelerin nereden geldiğini, nasıl oluştuğunu bilmek soruları daha kolay anlamamızı ve daha kısa sürede çözmemizi sağlar. Çünkü karşımıza çıkan sorularda ezberci olmayız ve sorudan formül çıkartabiliriz"* şeklindedir.

OÖ1B kodlu öğretmen adayı görüşünü *"İspat yapmak yapmış olduğumuz ifadenin doğruluğunu göstermemizi sağlar. İspat yapmak gereklidir. Çünkü yaptığımız bir şeyin neden öyle olduğunu veya neden öyle yaptığımızı bize sorabilirler"* şeklinde belirtmiştir.

Bu soruda adayların çoğunluğu ispatın gerekli olduğunu belirtirken gerekli olma nedenlerini ifadenin doğruluğunu göstermeyi, konuyu daha iyi anlamayı, daha geniş ve mantıklı düşünmeye yardımcı olmayı, bir formülün teoremin ya da ifadenin nereden geldiğini, nasıl oluştuğunu bilmeyi sağladığı için şeklinde ifade etmişlerdir. Ayrıca ispatın ezberi önlemede ve matematik birikimli bir ders olduğundan bilinenden yola çıkarak bilinmeyene ulaşmada ispatın gerekli olduğunu vurgulamışlardır. Bunun yanı sıra ispat yapmanın inandırıcılığı ve güvenilirliği arttırmak, birileri sorduğunda cevap verebilmek ve mantıklı gelmeyen kavramları anlamlı hale getirmek için gerekli olduğuna inandıklarını belirtmişlerdir.

Adaylar kendilerine yöneltilen *'İspat yaparken nelere dikkat edersiniz? Genel olarak ispat yapış tarzınızı ve bu süreçteki düşünme yollarınızı açıklayabilir misiniz?'* şeklindeki üçüncü soruda amaç öğrencilerin ispat yaparkenki yaklaşımlarını, önem verdikleri noktaları ve düşünme süreçlerini öğrenmeye yöneliktir.

OÖ5B kodlu öğretmen adayının görüşü *"Öncelikle istenene bakarım sonra verilenler doğrultusunda işin içine kendi bildiklerimi de katarak ispat yapmaya çalışırım. İspat yaparken dikkat etmeye çalıştığım en önemli nokta neyin nerden geldiğini açık olarak göstermektir"* şeklindedir.

OÖ1C kodlu öğretmen adayı görüşü *"İspat yaparken yapmış olduğum yolların matematiğe aykırı olup olmadığına dikkat ederim. Çelişmemeye özen gösteririm"* şeklindedir.

Bu soruda genel olarak öğrenciler istenene bakarım, sonucu ele alarak bu sonuca nasıl ulaşmam gerektiğini anlamaya çalışırım, bana neler verilmiş ona bakarım, verilenler doğrultusunda kendi bilgilerimi gözden geçiririm ve çözüm yollu ararım şeklinde ispat süreçlerini tanımlamışlardır. Bunların yanı sıra yanıtlarda kullandığım yolların matematiğe aykırı olup olmamasına, çelişmemeye, sonuca giden en pratik yolu seçmeye, hocanın derste kullandığı ispat yöntemini kullanmaya, ispatın başında verilen ifadenin doğruluğunu ya da yanlışlığını kendime kısaca göstermeye ve dönüp baktığımda yaptığım ispatın öncelikle beni tatmin etmesine dikkat ederim şeklinde düşünceler yer almaktadır.

İspatla ilgili görüşlere yönelik sorulan dördüncü soru *'İspat yapmaya neden ihtiyaç duyarız?'* şeklindedir. Bu soru ile öğretmen adaylarının ispata ihtiyaç duyma nedenleri belirlenmeye çalışılmıştır.

İÖ1A kodlu öğretmen adayı görüşünü *"Neyin ne olduğunu anlamamız için, temelini bilmemiz için gerekli olduğunu düşünüyorum. İspat bizi ezberci eğitimden uzak tutmak için iyi bir yöntemdir. Anlayarak, bilerek sonuca ulaşmamızı sağlar"* şeklinde belirtmiştir.

İÖ4B kodlu öğretmen adayının görüşü *"Ortaya attığımız savın doğruluğunu gösterip makul yöntemlerle savımızı elde etmeliyiz ki herkes tarafından kabul görsün. Geçerli şeyler söylemek istiyorsak söylediğimizi dayanaklayırla birlikte vermeliyiz"* şeklindedir.

Öğretmen adayları temel bilgilerin nereden geldiğini, formüllerin nasıl türediğini görmek, ezberci eğitimden uzaklaşmak, ortaya atılan ifadenin doğruluğunu göstermek ve bunu diğerlerine kabul ettirmek ayrıca öğrenilenlerin anlamlı olması ve anlayarak neyin neden yapıldığını bilerek sonuca ulaşmak için ispata ihtiyaç duyduklarını belirtmiştir.

Öğretmen adaylarına yöneltilen sorulardan sonuncusu *'Verilen bir soruyu ispatladığınızda ya da ispatlayamadığınızda neler hissedersiniz?'* şeklindedir. Bu soru ile adayların ispat yaptıklarında ya da yapamadıklarında hissettikleri duygular betimlenmeye çalışılmıştır.

İÖ4A kodlu öğretmen adayı görüşünü *"Verilen bir soruyui spatladığımda kendimi daha iyi hissediyorum, yapabilirim duygusu oluşuyor, diğer sorulara da daha bir istekle yaklaşıyorum. İspatlayamadığımda ise hayal kırıklığı oluyor, diğer sorulara da çözemeyeceğim gözüyle bakıyorum, bir ön yargı oluşuyor"* şeklinde ifade etmiştir.

OÖ5C kodlu öğretmen adayı görüşü *"Verilen bir soruyu İspatladığımda kendime özgüvenim artar ve daha gayretli olmaya özen gösteririm. İspatlayamazsam biraz* *üzülürüm ve moralim bozulduğu için farklı bakış açılarıyla soruya yaklaşamam"* şeklindedir.

Öğretmen adayları genel olarak verilen bir soruyu ispatladığında mutlu olduğunu, kendine olan güveninin geldiğini, motive olduğunu, gururlandığını, daha gayretli olmaya özen gösterdiğini, sevindiğini, matematiğin kendine has olan hazzını tattığını ve kendini daha iyi hissettiğini belirtmiştir. İspatlayamadığı zaman ise moralinin bozulduğunu, üzüldüğünü, hayal kırıklığına uğradığını, sinirlendiğini, farklı yollar denediğini, matematiksel düşünmede eksikliğinin olduğunu hissettiğini, diğer sorulara karşı önyargısının oluştuğunu ve yetersiz hissettiğini ifade etmiştir.

## 4.3 İspata Yönelik Görüş Ölçeğinden Elde Edilen Bulgular

Çalışmanın bu kısmında ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının "Matematiksel İspat Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği"nden elde edilen görüşleri ile ölçekte yer alan faktörler bazında ayrı ayrı sınıf düzeyleri bakımından görüşlerindeki değişimler ele alınmıştır.

Ölçekte yer alan maddelere bakıldığında ölçeğin ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklere yönelik görüşler, ispat yapma benlik algısına ilişkin görüşler, ispat yapmanın önemine yönelik görüşler, ispat yapmaya ilişkin genel görüşler ve ispat yapma ile ilgili duygulara yönelik görüşler olmak üzere beş faktörden oluştuğu söylenebilir. Moralı ve ark. (2006) yanıtlarına göre denekleri üç farklı grup içerisinde sınıflandırmıştır. Bu sınıflamaya göre toplamda 70 puan üzeri alan kişilerin görüşleri istenilen düzeyde, 60 ve altı puan alan kişilerin görüşleri istenilmeyen yöndedir ve 70-61 arası puan alan kişiler ise kararsız grubu oluşturmaktadır.

**Tablo 4.9. İlköğretim Birinci ve Son sınıf Matematik Öğretmen Adaylarının İspata Yönelik Görüşlerine İlişkin Ortalamalar ve Standart Sapmalar**

| Sınıf Düzeyleri | N | Ortalama | Standart Sapma |
|---|---|---|---|
| İlköğretim Birinci Sınıf | 30 | 67.166 | 9.410 |
| İlköğretim Son Sınıf | 30 | 68.233 | 7.990 |
| Toplam | 60 | 67.700 | 8.671 |

Tablo 4.9'da çalışmaya katılan birinci ve son sınıf ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ölçekte yer alan maddelere verdikleri yanıtların ortalamaları ve standart sapmaları sunulmuştur. Ölçeğin sınıf düzeyleri bakımından genel ortalaması 67.700 olarak bulunmuştur. Bu ortalama ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispata

yönelik görüşlerinin net olmadığını göstermektedir. Ortalamalar ayrı ayrı ele alındığında ilköğretim birinci sınıfların 67.166, ilköğretim son sınıfların 68.233 ortalamaya sahip olduğu görülmektedir. Her iki sınıf seviyesi için değerlerin 70-61 puan aralığında olduğu yani ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinde kararsızlığın olduğu anlaşılmaktadır. Ortalamalar çok yakın olmakla beraber ilköğretim birinci sınıflar düşüncelerinde son sınıflara göre biraz daha kararsız çıkmıştır.

**Tablo 4.10. İlköğretim Birinci ve Son Sınıf Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri Arasındaki İlişki**

| Sınıf Düzeyi | N | $\bar{X}$ | S | Sd | T | P |
|---|---|---|---|---|---|---|
| İlköğretim Birinci Sınıf | 30 | 67.166 | 9.410 | 58 | -.473 | .638 |
| İlköğretim Son Sınıf | 30 | 68.233 | 7.990 | | | |

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının sınıf düzeyleri bakımından ispat yapmaya yönelik görüşlerinde anlamlı bir farklılığın olup olmadığı t testi ile kontrol edilmiştir. Tablo 4.10'a bakıldığında analizden elde edilen sonuçlar doğrultusunda birinci ve son sınıf düzeyinde olmalarına göre matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin anlamlı bir farklılık göstermediği tespit edilmiştir ($p > .05$). İki sınıf düzeyindeki ortalamaların birbirine yakın olduğu, sınıf düzeyi arttıkça ispata yönelik görüşlerde anlamlı bir değişimin olmadığı görülmektedir. Yani ilköğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının ispata ilişkin görüşleri benzerlik göstermektedir.

**Tablo 4.11. Matematiksel İspat Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeğinde Yer Alan Faktörlere Göre İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Görüşlerinin Ortalaması ve Standart Sapması**

| Faktörler | Sınıflar | N | Ortalama | Standart Sapma |
|---|---|---|---|---|
| İspat Yapmaya İlişkin Kavramsal Yeterliliklere Yönelik Görüşler | İlköğretim Birinci Sınıf<br>İlköğretim Son Sınıf<br>Toplam | 30<br>30<br>60 | 27.233<br>26.400<br>26.816 | 3.349<br>3.102<br>3.228 |
| İspat Yapma Benlik Algısına İlişkin Görüşler | İlköğretim Birinci Sınıf<br>İlköğretim Son Sınıf<br>Toplam | 30<br>30<br>60 | 5.800<br>5.833<br>5.881 | 1.374<br>1.620<br>1.415 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| İspat Yapmanın Önemine Yönelik Görüşler | İlköğretim Birinci Sınıf<br>İlköğretim Son Sınıf<br>Toplam | 30<br>30<br>60 | 12.500<br>14.300<br>13.400 | 2.800<br>2.306<br>2.700 |
| İspat Yapmaya İlişkin Genel Görüşler | İlköğretim Birinci Sınıf<br>İlköğretim Son Sınıf<br>Toplam | 30<br>30<br>60 | 15.366<br>15.466<br>15.416 | 2.428<br>2.315<br>2.352 |
| İspat Yapma ile İlgili Duygulara Yönelik Görüşler | İlköğretim Birinci Sınıf<br>İlköğretim Son Sınıf<br>Toplam | 30<br>30<br>60 | 6.266<br>6.233<br>6.250 | 1.981<br>1.887<br>1.918 |

Tablo 4.11'de ilköğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının ölçekte yer alan faktörlere göre maddelere verdikleri yanıtların ortalamaları bulunmaktadır.

İspat yapmaya ilişkin yeterliliklere yönelik olan ilk faktör 7 maddeden oluşmaktadır. Dolayısıyla bu faktörden alınabilecek maksimum puan 5x7=35 olacaktır. Moralı ve ark. (2006)' nın yaptığı sınıflamaya göre bu faktör için 35x0.7=24.5 puan üzeri alan kişilerin görüşleri istenilen düzeyde, 35x0.6=21 ve altı puan alan kişilerin görüşleri istenilmeyen yöndedir ve bu puanların arasında puan alan kişiler ise kararsız grubu oluşturmaktadır. Bu doğrultuda 26.816 olarak bulunan genel ortalama ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin yeterliliklere yönelik görüşlerinin istenilen yönde olduğunu göstermektedir. İlköğretim birinci sınıfların 27.233, ilköğretim son sınıfların 26.400 ortalama değerine sahip olduğu görülmektedir. Bu sonuçlar doğrultusunda her iki sınıfın ispatlamayla ilgili yeterliliklere ilişkin görüşlerinin olumlu olduğu görülmektedir. Ortalamalar arasındaki fark az olmakla beraber ilköğretim birinci sınıf matematik öğretmen adaylarının bu konudaki görüşleri son sınıflara göre daha olumlu bulunmuştur.

İspat yapma benlik algısına yönelik görüşleri kapsayan ikinci faktör 2 maddeden oluşmaktadır. Bu faktör için ölçekten alınabilecek maksimum puan 5x2=10' dur. 10x0.7=7 puan üzeri alan kişilerin görüşleri istenilen düzeyde, 10x0.6=6 ve altı puan alan kişilerin görüşleri istenilmeyen yöndedir ve bu puanların arasında puan alan kişiler ise kararsız grubu oluşturmaktadır. Bu faktörden elde edilen genel ortalama 5.881' dir. ilköğretim birinci sınıfların ortalaması 5.800, ilköğretim son sınıfların ortalaması 5.833 olarak bulunmuştur. Ortalama değerlerin birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir. Bu ortalamalara göre ilköğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının ispat yapma benlik algısına yönelik görüşlerinin olumsuz olduğu ve birbirleriyle paralellik gösterdiği sonucuna ulaşılmıştır.

Ölçekte yer alan üçüncü faktör ispat yapmanın önemine ilişkin genel görüşlere yöneliktir ve 4 maddeden oluşmaktadır. Dolayısıyla bu faktörden elde edilebilecek maksimum puan 5x4=20'dir. 20x0.7=14 puan üzeri alan kişilerin görüşleri istenilen düzeyde, 20x0.6=12 ve altı puan alan kişilerin görüşleri istenilmeyen yöndedir ve bu puanların arasında puan alan kişiler ise kararsız grubu oluşturmaktadır. Bu faktörün genel ortalaması 13.400 olarak bulunmuştur. Bu ortalama ilköğretim matematik öğretmen adaylarının genel olarak ispat yapmanın önemine ilişkin görüşlerinde kararsız olduklarını göstermektedir. Elde edilen sonuçlara göre ilköğretim birinci sınıfların ortalaması 12.500 iken ilköğretim son sınıfların ortalamasının 14.300' dür. İlköğretim birinci ve son sınıfların bu faktör bazında genel görüşleri net olmamakla beraber son sınıfların birinci sınıflara göre ispatın önemine yönelik daha olumlu düşündükleri görülmektedir.

İspat yapmaya ilişkin genel görüşleri içeren dördüncü faktör 5 maddeden oluşmaktadır. Dolayısıyla bu faktörden elde edilebilecek maksimum puan 5x5=25'dir. 25x0.7=17.5 puan üzeri alan kişilerin görüşleri istenilen düzeyde, 25x0.6=15 ve altı puan alan kişilerin görüşleri istenilmeyen yöndedir ve bu puanların arasında puan alan kişiler ise kararsız grubu oluşturmaktadır. Bu faktörden elde edilen genel ortalama 15.416' dır. Bu sonuç ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin düşüncelerinin olumsuz olduğunu göstermektedir. Öğretmen adaylarının ispat kavramının yapısal özelliklerine ilişkin görüşleri ele alındığında ilköğretim birinci sınıfların ortalamasının 15.366, ilköğretim son sınıfların ortalamasının 15.466 olduğu görülmektedir. Ortalamalar bazında ilköğretim birinci ve son sınıfların ispata ilişkin genel görüşleri benzerlik göstermektedir.

Ölçekteki son faktör ise ispat yapmayla ilgili duygulara yöneliktir ve 2 madden oluşmaktadır. Bu faktörden elde edilebilecek maksimum puan 5x2=10'dur. 10x0.7=7 puan üzeri alan kişilerin görüşleri istenilen düzeyde, 10x0.6=6 ve altı puan alan kişilerin görüşleri istenilmeyen yöndedir ve bu puanların arasında puan alan kişiler ise kararsız grubu oluşturmaktadır. Bu faktörden elde edilen genel ortalama 6.250

olarak bulunmuştur. Bu sonuç ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmayla ilgili sahip olduğu duyguların tam olarak netleşmediğini göstermektedir. Ortalamalar ayrı ayrı ele alındığında ilköğretim birinci sınıfların 6.266, ilköğretim son sınıfların 6.233 ortalama değerlerine sahip olduğu tespit edilmiştir. Her iki sınıf düzeyinin ispata yönelik duyguları paralellik göstermektedir ve bu duygularda kararsızlık hakimdir.

**Tablo 4.12. Matematiksel İspat Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeğinde Yer Alan Faktörlere Göre İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Görüşleri Arasındaki İlişki**

| Faktörler | Sınıf Düzeyi | N | $\bar{X}$ | S | Sd | t | P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| İspat Yapmaya İlişkin Kavramsal Yeterliliklere Yönelik Görüşler | İlköğretim Birinci Sınıf | 30 | 27.233 | 3.349 | 57.664 | 1.000 | .322 |
| | İlköğretim Son Sınıf | 30 | 26.400 | 3.102 | | | |
| İspat Yapma Benlik Algısına İlişkin Görüşler | İlköğretim Birinci Sınıf | 30 | 5.800 | 1.374 | 56.496 | -.086 | .932 |
| | İlköğretim Son Sınıf | 30 | 5.833 | 1.620 | | | |
| İspat Yapmanın Önemine Yönelik Görüşler | İlköğretim Birinci Sınıf | 30 | 12.500 | 2.800 | 55.944 | -2.717 | .009 |
| | İlköğretim Son Sınıf | 30 | 14.300 | 2.306 | | | |
| İspat Kavramına Yönelik Genel Görüşler | İlköğretim Birinci Sınıf | 30 | 15.366 | 2.428 | 57.870 | -.163 | .871 |
| | İlköğretim Son Sınıf | 30 | 15.466 | 2.315 | | | |
| İspat Yapma ile İlgili Duygulara Yönelik Görüşler | İlköğretim Birinci Sınıf | 30 | 6.266 | 1.981 | 57.865 | .067 | .947 |
| | İlköğretim Son Sınıf | 30 | 6. 233 | 1.887 | | | |

Sınıf düzeylerine göre ölçekte yer alan faktörlerde öğretmen adaylarının görüşleri arasındaki ilişkiye dair bulgular tablo 4.12'de sunulmuştur. İlköğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının faktörler bazında görüşleri arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığı t testi yapılarak kontrol edilmiştir. Bu verilere göre ispat yapmanın önemine ilişkin görüşlerinde $p < .05$ düzeyinde anlamlı bir farklılık tespit edilmiştir (.009). Ortalamalar ele alındığında ilköğretim son sınıf matematik öğretmen adaylarının birinci sınıf öğretmen adaylarına göre ispatın önemine ilişkin daha olumlu duygulara sahip oldukları tespit edilmiştir. Bunun yanı sıra her iki sınıfın diğer faktör görüşlerinde anlamlı bir farklılığın olmadığı saptanmıştır.

**Tablo 4.13. Ortaöğretim Birinci ve Son sınıf Matematik Öğretmen Adaylarının İspata Yönelik Görüşlerine İlişkin Ortalamalar ve Standart Sapmalar**

| **Sınıf Düzeyleri** | **N** | **Ortalama** | **Standart Sapma** |
|---|---|---|---|
| Ortaöğretim Birinci Sınıf | 19 | 62.894 | 10.278 |
| Ortaöğretim Son Sınıf | 19 | 61.736 | 11.298 |
| Toplam | 38 | 62.315 | 10.669 |

Tablo 4.13'te çalışmaya katılan birinci ve son sınıf ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ölçekte yer alan maddelere verdikleri yanıtların ortalamaları ve standart sapmaları sunulmuştur. Ölçeğin sınıf düzeyleri bakımından genel ortalaması 62.315 olarak bulunmuştur. Ortalamalar ayrı ayrı ele alındığında ortaöğretim birinci sınıfların ortalamasının 62.894, ortaöğretim son sınıfların ortalamasının 61.736 olduğu görülmektedir. Her iki sınıf seviyesi için değerlerin 70-61 puan aralığında olduğu yani ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinde kararsızlığın olduğu anlaşılmaktadır. Yani ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin ne olumlu ne de olumsuz olduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarının ortalamaları çok yakın olmakla beraber ortaöğretim son sınıflar düşüncelerinde birinci sınıflara göre biraz daha kararsız çıkmıştır.

**Tablo 4.14. Ortaöğretim Birinci ve Son Sınıf Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri Arasındaki İlişki**

| **Sınıf Düzeyi** | N | Sıralar Ortalaması | Sıralar Toplamı | Mann-Whitney U | Z | P |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ortaöğretim Birinci Sınıf | 19 | 20.21 | 384.00 | 167.000 | -.394 | .693 |
| Ortaöğretim Son Sınıf | 19 | 18.79 | 357.00 | | | |

Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının sınıf düzeyleri bakımından ispat yapmaya yönelik görüşlerinde anlamlı bir farklılığın olup olmadığı Mann-Whitney U testi ile kontrol edilmiştir. Tablo 4.14'te görüldüğü gibi analizden elde edilen sonuçlar doğrultusunda birinci ve son sınıf düzeyinde olmalarına göre matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin anlamlı bir farklılık göstermediği tespit edilmiştir ($p > .05$). İki sınıf düzeyindeki ortalama farkın çok olmadığı ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerinin birbirine yakın olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

**Tablo 4.15. Matematiksel İspat Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeğinde Yer Alan Faktörlere Göre Ortaöğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Görüşlerinin Ortalaması ve Standart Sapması**

| Faktörler | Sınıflar | N | Ortalama | Standart Sapma |
|---|---|---|---|---|
| İspat Yapmaya İlişkin Kavramsal Yeterliliklere Yönelik Görüşler | Ortaöğretim Birinci Sınıf<br>Ortaöğretim Son Sınıf<br>Toplam | 19<br>19<br>38 | 26.631<br>26.157<br>26.394 | 3.386<br>3.804<br>3.560 |
| İspat Yapma Benlik Algısına İlişkin Görüşler | Ortaöğretim Birinci Sınıf<br>Ortaöğretim Son Sınıf<br>Toplam | 19<br>19<br>38 | 5.210<br>5.368<br>5.289 | 2.347<br>1.920<br>2.116 |
| İspat Yapmanın Önemine Yönelik Görüşler | Ortaöğretim Birinci Sınıf<br>Ortaöğretim Son Sınıf<br>Toplam | 19<br>19<br>38 | 11.789<br>11.105<br>11.447 | 3.457<br>3.430<br>3.414 |
| İspat Yapmaya İlişkin Genel Görüşler | Ortaöğretim Birinci Sınıf<br>Ortaöğretim Son Sınıf<br>Toplam | 19<br>19<br>38 | 13.894<br>14.684<br>14.289 | 3.177<br>3.621<br>3.384 |
| İspat Yapma ile İlgili Duygulara Yönelik Görüşler | Ortaöğretim Birinci Sınıf<br>Ortaöğretim Son Sınıf<br>Toplam | 19<br>19<br>38 | 5.368<br>4.421<br>4.894 | 2.139<br>2.142<br>2.165 |

Tablo 4.15'de ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının ölçekte yer alan faktörlere göre maddelere verdikleri yanıtların ortalamaları bulunmaktadır.

İspat yapmaya ilişkin yeterliliklere yönelik olan ilk faktörde genel ortalama 26.394 olarak bulunmuştur. Genel ortalama ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin yeterliliklere yönelik görüşlerinin istenilen yönde olduğunu göstermektedir. Tablodan ortaöğretim birinci sınıfların 26.631, ortaöğretim son sınıfların 26.157 ortalama değerine sahip olduğu görülmektedir. Bu sonuçlar doğrultusunda her iki sınıfın ortalamaları arasındaki farkın çok az olduğu ve ispatlamayla ilgili yeterliliklere ilişkin görüşlerinin olumlu olduğu görülmektedir.

İspat yapma benlik algısına yönelik görüşleri kapsayan ikinci faktörden elde edilen genel ortalama 5.289’ dur. Ortaöğretim birinci sınıfların ortalaması 5.210, ortaöğretim son sınıfların ortalaması 5.368 olarak bulunmuştur. Ortalama değerler birbirine yakın olmakla beraber bu ortalamalara göre ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının ispat yapma benlik algısına yönelik görüşlerinin olumsuz olduğu ve birbirleriyle paralellik gösterdiği sonucuna ulaşılmıştır.

Ölçekte yer alan üçüncü faktör ispat yapmanın önemine ilişkin genel görüşlere yöneliktir. Bu faktörün genel ortalaması 11.447 olarak bulunmuştur. Bu ortalama ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının genel olarak ispat yapmanın önemine ilişkin görüşlerinin olumsuz olduğunu göstermektedir. Elde edilen sonuçlara göre ortaöğretim birinci sınıfların ortalaması 11.789 iken ortaöğretim son sınıfların ortalamasının 11.105’ dir. Ortaöğretim birinci ve son sınıfların bu faktör bazında görüşlerine yönelik ortalamalarında anlamlı bir farkın olmadığı görüşlerinin benzerlik gösterdiği görülmektedir

İspat yapmaya ilişkin genel görüşleri içeren dördüncü faktörden elde edilen genel ortalama 14.289’ dur. Ortaöğretim birinci sınıfların ortalaması 13.894, ortaöğretim son sınıfların ortalaması 14.684 olduğu görülmektedir. Bu sonuç ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin düşüncelerinin olumsuz olduğunu göstermektedir. Ortalamalar bazında ortaöğretim birinci sınıfların bu konudaki görüşlerinin son sınıflara göre daha olumsuz olduğu tespit edilmiştir.

Ölçekteki son faktör ise ispat yapmayla ilgili duygulara yöneliktir Bu faktörden elde edilen genel ortalama 4.894 olarak bulunmuştur. Bu sonuç ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmayla ilgili sahip olduğu duyguların olumsuz olduğunu göstermektedir. Ortalamalar ayrı ayrı ele alındığında ortaöğretim birinci sınıfların 5.368, ortaöğretim son sınıfların 4.421 ortalama değerlerine sahip olduğu tespit edilmiştir. Bu doğrultuda ortaöğretim son sınıf matematik öğretmen adaylarının birinci sınıflara göre ispata yönelik duygularının daha negatif olduğu görülmektedir.

**Tablo 4.16. Matematiksel İspat Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeğinde Yer Alan Faktörlere Göre Ortaöğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Görüşleri Arasındaki İlişki**

| Faktörler | Sınıf Düzeyi | N | Sıralar Ortalamas | Sıralar Toplamı | Mann-Whitney U | Z | P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| İspat Yapmaya İlişkin Kavramsal Yeterliliklere Yönelik Görüşler | Ortaöğretim Birinci Sınıf | 19 | 20.39 | 387.50 | 163.500 | -.500 | .617 |
| | Ortaöğretim Son Sınıf | 19 | 18.61 | 353.50 | | | |
| İspat Yapma Benlik Algısına İlişkin Görüşler | Ortaöğretim Birinci Sınıf | 19 | 19.00 | 361.00 | 171.000 | -.282 | .778 |
| | Ortaöğretim Son Sınıf | 19 | 20.00 | 380.00 | | | |
| İspat Yapmanın Önemine Yönelik Görüşler | Ortaöğretim Birinci Sınıf | 19 | 20.45 | 388.50 | 162.500 | -.528 | .597 |
| | Ortaöğretim Son Sınıf | 19 | 18.55 | 352.50 | | | |
| İspat Kavramına Yönelik Genel Görüşler | Ortaöğretim Birinci Sınıf | 19 | 18.08 | 343.50 | 153.500 | -.793 | .428 |
| | Ortaöğretim Son Sınıf | 19 | 20.92 | 397.50 | | | |
| İspat Yapma ile İlgili Duygulara Yönelik Görüşler | Ortaöğretim Birinci Sınıf | 19 | 21.87 | 415.50 | 135.500 | -1.328 | .184 |
| | Ortaöğretim Son Sınıf | 19 | 17.13 | 325.50 | | | |

Sınıf düzeylerine göre ölçekte yer alan faktörlerde öğretmen adaylarının görüşleri arasındaki ilişkiye dair bulgular tablo 4.16'da sunulmuştur. Ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının faktörler bazında görüşleri arasında anlamlı bir farklılığın olup olmadığı Mann-Whitney U testi yapılarak kontrol edilmiştir. Bu verilere göre öğretmen adaylarının faktör bazında görüşlerinde anlamlı bir farklılık saptanmamıştır. Yani ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının faktörlerin kapsadığı görüşlere yönelik benzer düşüncelere sahip oldukları tespit edilmiştir

## 4.4 Matematik Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspata Yönelik Görüşleri ile Genel Matematik Dersi Kapsamında Kullandıkları İspat Şemaları Arasındaki İlişkiye Dair Bulgular

Yazılı sınav ve ölçek arasındaki ilişkiyi belirlemeye yönelik olarak Mann-Whitney U testi kullanılarak analizler yapılmıştır. Ölçekten her bir öğrencinin aldığı puanların aritmetik ortalamaları alınarak ortalama puanları küçükten büyüğe doğru sıralanmıştır. Sıralamanın meydanında bulunan ortalama puana göre öğrenciler iki gruba ayrılmıştır. Ortalamanın altında puan alanlar ispata yönelik görüşleri olumsuz olan grubu ortalamanın üstünde puan alanlar ispata yönelik görüşleri olumlu olan grubu oluşturmaktadır. Mann-Whitney U testinin sonuçları bu iki gruba göre değerlendirilerek yorumlanmıştır.

**Tablo 4.17. İlköğretim Birinci ve Son Sınıf Matematik Öğretmen Adaylarının Yazılı Sınavda Kullandıkları İspat Şemaları İle İspata Yönelik Görüş Ölçeği Arasındaki İlişkiye Dair Mann-Whitney U Testi Sonuçları**

| Şemalar | Gruplar | N | Sıralar Ortalaması | Sıralar Toplamı | Mann-Whitney U | Z | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dışsal | 1.grup | 22 | 30.66 | 674.50 | 414.500 | -.055 | .956 |
| | 2.grup | 38 | 30.41 | 1155.50 | | | |
| | Toplam | 60 | | | | | |
| Deneysel | 1.grup | 22 | 39.34 | 865.50 | 223.500 | -3.087 | .002 |
| | 2.grup | 38 | 25.38 | 964.50 | | | |
| | Toplam | 60 | | | | | |
| Analitik | 1.grup | 22 | 23.02 | 506.50 | 253.500 | -2.584 | .010 |
| | 2.grup | 38 | 34.83 | 1323.50 | | | |
| | Toplam | 60 | | | | | |

Tablo 4.17 ilköğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşleriyle yazılı sınavda dışsal, deneysel ve analitik şema kullanımları arasında anlamlı bir fark olup olmadığına dair bulguları göstermektedir. Tabloda yer alan gruplardan birinci grup ispata yönelik görüşleri olumsuz ikinci grup ispata yönelik görüşleri olumlu olan öğrencilerden oluşmaktadır. Sonuçlar deneysel (.002) ve analitik şema (.010) kullanan öğrenciler ile ispata yönelik görüşleri arasında $p < .05$ düzeyinde anlamlı bir farklılık olduğunu göstermektedir. İspata yönelik görüşleri olumsuz olan öğrencilerin olumlu olan öğrencilere göre deneysel şemayı daha fazla kullandıkları saptanmıştır. Bunun yanı sıra analitik şemayı kullanan öğrencilerden ispata yönelik görüşleri olumsuz olan öğrencilerin bu şemayı daha az kullandığı

olumlu olanların ise daha fazla kullandığı görülmektedir. Öğrencilerin ispata yönelik görüşleri ile dışsal şema kullanımları arasında ise anlamlı bir farklılık bulunmamıştır.

**Tablo 4.18. Ortaöğretim Birinci ve Son Sınıf Matematik Öğretmen Adaylarının Yazılı Sınavda Kullandıkları İspat Şemaları İle İspata Yönelik Görüş Ölçeği Arasındaki İlişkiye Dair Mann-Whitney U Testi Sonuçları**

| Şemalar | Gruplar | N | Sıralar Ortalaması | Sıralar Toplamı | Mann-Whitney U | Z | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Dışsal** | 1.grup | 22 | 21.41 | 471.00 | 134.000 | -.055 | .190 |
| | 2.grup | 16 | 16.88 | 270.00 | | | |
| | Toplam | 38 | | | | | |
| **Deneysel** | 1.grup | 22 | 23.39 | 514.50 | 90.500 | -3.087 | .010 |
| | 2.grup | 16 | 14.16 | 226.50 | | | |
| | Toplam | 38 | | | | | |
| **Analitik** | 1.grup | 22 | 16.80 | 369.50 | 116.500 | -2.584 | .073 |
| | 2.grup | 16 | 23.22 | 371.50 | | | |
| | Toplam | 38 | | | | | |

Tablo 4.18 ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşleriyle yazılı sınavda dışsal, deneysel ve analitik şema kullanımları arasında anlamlı bir fark olup olmadığına dair bulguları göstermektedir. Tabloda yer alan gruplardan birinci grup ispata yönelik görüşleri olumsuz ikinci grup ispata yönelik görüşleri olumlu olan öğrencilerden oluşmaktadır. Sonuçlar deneysel (.010) şema kullanan öğrenciler ile ispata yönelik görüşleri arasında $p < .05$ düzeyinde anlamlı bir farklılık olduğunu göstermektedir. İspata yönelik görüşleri olumsuz olan öğrencilerin olumlu olan öğrencilere göre deneysel şemayı daha fazla kullandıkları saptanmıştır. Öğrencilerin ispata yönelik görüşleri ile dışsal ve analitik şema kullanımları arasında ise anlamlı bir farklılık bulunmamıştır. Bu şemaların kullanımlarındaki farklılık istatistiksel olarak anlamlı olmamakla beraber ispata yönelik olumsuz görüş bildiren öğrencilerin dışsal şema kullanımlarının, görüşleri olumlu olan öğrencilerin ise analitik şema kullanımlarının daha çok olduğu görülmektedir.

# BÖLÜM V: SONUÇ VE TARTIŞMA

## 5.1 Tartışma

Bu bölümde ilköğretim ve ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının genel matematik dersi kapsamında ispat yaparken kullandıkları ispat şemalarını ve genel olarak ispata yönelik bakış açılarını belirlemeyi amaçlayan bu çalışmada yapılan uygulamalar sonucunda elde edilen bulgulara ait tartışmalara yer verilecektir. Elde edilen bulguların yorumları yapılarak literatürde yer alan diğer çalışmalarla örtüşüp örtüşmediği karşılaştırmalı olarak ele alınacaktır.

### 5.1.1 Matematik Öğretmen Adaylarının Kullandıkları İspat Şemalarına Yönelik Bulguların Tartışılması

Harel ve Sowder (1998) üniversite öğrencilerinin matematik problemlerine yönelik çözümleri savunurken kullandıkları şemaları dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç ana şemaya ve bazı alt şemalara ayırmıştır. Çalışmamıza katılan ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adayları hem yazılı sınavda hem de yarı yapılandırılmış görüşmelerde kendilerine yöneltilen problemlere ürettikleri çözümleri, bu şemaları ve alt şemalarını kullanarak doğrulamaya çalışmıştır. Bu noktada araştırmamızın sonuçları da bu konuda yapılan çalışmalarla paralellik göstermektedir ( Sowder ve Harel, 1998; Flore, 2002; İskenderoğlu, 2003; Housman ve Porter, 2003; Stylianou, 2006; Flores, 2006; Baki ve ark., 2009; İskenderoğlu, 2010).

Öğretmen adaylarının kullandıkları ispat şemalarını belirlemeye yönelik hazırlanan ölçme aracındaki problemlerin doğrulanma sürecinde öğretmen adayları ispat şemalarının her üçünü de kullanmışlardır. Bu süreçte bazı problemleri ise boş bırakmışlardır. Bazı problemlerde bazı ispat şemaları ağılıklı olarak kullanılırken bazı problemler ise ağırlıklı olarak boş bırakılmıştır. Ayrıca bazı sınıflar tarafından bazı problemlerde şemaların hepsi kullanılırken diğer sınıflar tarafından şemaların hepsi kullanılmamıştır.

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispatlama sürecinde en fazla kullandığı şemanın deneysel en az kullandığı şemanın dışsal şema olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Çalışmaya katılan her bir sınıf için kullanılan ispat şemalarını ele alacak olursak bazı şemaların farklılıklar gösterdiği görülmektedir. İlköğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının kullandıkları şemalar arasındaki ilişkiye bakıldığında dışsal ve analitik şemaları kullanımları ile soruların boş bırakılma oranı açısından aralarında anlamlı bir farklılığın olduğu tespit edilmiştir. İlköğretim birinci sınıflar dışsal şemayı daha çok kullanırken son sınıflar analitik şemayı kullanmıştır. İlköğretim son sınıflar ise birinci sınıflara göre soruları daha fazla boş bırakmıştır. Bunun yanı sıra deneysel şemayı tercih etmeleri bakımından aralarında anlamlı bir farklılık bulunmadığı, bu şemayı kullanım sıklıklarının benzerlik gösterdiği saptanmıştır.

İlköğretim birinci sınıfların ağırlıklı olarak kullandığı şemanın deneysel şema son sınıfların ağırlıklı kullandığı şemanın analitik şema olduğu görülmektedir. Ağırlıklı olarak deneysel şemayı kullanan ilköğretim birinci sınıf matematik öğretmen adaylarının daha az kullandıkları dışsal ve analitik şemaları kullanım oranı birbirine oldukça yakındır. Yapılan bazı çalışmalar da ağırlıklı olarak deneysel şema kullanıldığını desteklemektedir (Coe ve Ruthven, 1994; Galbraith, 1995; Galindo, 1998; Harel ve Sowder, 1998; Harel ve Sowder, 2003; Knapp ve Zandieh, 2004; Rodriguez, 2006; İskenderoğlu, 2010). İlköğretim birinci sınıfların üniversiteye yeni başladıklarından dolayı ispat yapmaya çok fazla aşina olmamaları ve liseden kalma alışkanlıklarının etkisi örnekler vererek doğrulama yapmalarında, deneysel şemayı ağırlıklı olarak kullanmalarında etkili olmuş olabilir. Özer ve arıkan (2002) lise öğrencilerin değer vererek ve tümevarım yöntemini kullanarak ispatlama eğilimi olduğunu belirtmiştir. Bu nedenle bu eğilimin devam eden etkisiyle deneysel şemaların tercih edildiği söylenebilir.

İlköğretim son sınıflar ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken bunu sırasıyla deneysel ve dışsal şemalar takip etmektedir. İspatlamada en üst seviye olarak adlandırılan analitik şemanın ilköğretim matematik öğretmen adayları tarafından ağırlıklı kullanılmasına yönelik öğretim programının öğrencilerin gelişimde etkili olduğu ve becerilerine yansıdığı yorumu yapılabilir. Ayrıca matematiğe yönelik derslerin hepsini almış olmaları ve öğrenimleri süresince çeşitli ispatlarla karşılaşmış olmaları da etkili olabilir. Bunun yanı sıra ilköğretim son sınıfların birinci sınıflara göre soruları daha fazla boş bıraktıkları tespit edilmiştir Lisans süreci içerisinde birinci sınıftan son sınıfa doğru olan hiyerarşide matematik derslerinin ağırlığı azalıp eğitim dersleri ön plana çıktığından öğrenciler matematiksel kavramları unutmaktadırlar. Bu durumun oluşmasında matematik derslerinde öğretilenleri anlamlandırmadan genelde ezberleme yolunu tercih etmelerinin de etkisi olmaktadır. Dolayısıyla yetersiz kavramsallaştırmayla zaman içerisinde bilgilerin hatırlanması zorlaştığından ilköğretim matematik öğretmen adaylarının problemleri boş bırakma oranının yüksek olduğu düşünülmektedir. İskenderoğlu (2010) çalışmasında ilköğretim matematik birinci sınıf öğretmen adaylarının en fazla deneysel şemayı son sınıf öğretmen adaylarının ise analitik şemayı kullandığını tespit edilmiştir. Çalışması bu anlamda bizim araştırmamızla paralellik göstermektedir.

İlköğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının kullandıkları şemaların cinsiyetle ilişkisine bakıldığında deneysel şemaları kullanımları ve soruları boş bırakma oranları açısından aralarında anlamlı bir farklılığın olduğu tespit edilmiştir. Kız öğrencilerin erkek öğrencilere göre deneysel şemayı daha çok kullandıkları erkek öğrencilerin ise soruları daha çok boş bıraktıkları tespit edilmiştir.

Ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının kullandıkları şemalar arasındaki ilişkiye bakıldığında dışsal ve analitik şemaları kullanımları bakımından aralarında anlamlı bir farklılığın olduğu tespit edilmiştir. Bu farklılık doğrultusunda ortaöğretim birinci sınıflar son sınıflara göre dışsal şemayı daha çok kullanırken son sınıflar ise analitik şemayı birinci sınıflara göre daha çok kullanmaktadır. Bunun yanı sıra deneysel şemaları tercih etmeleri ve soruları boş bırakma oranları bakımından aralarında anlamlı bir farklılık bulunmadığı saptanmıştır.

Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının problemleri doğrulama sürecinde en fazla kullandığı şemanın analitik en az kullandığı şemanın deneysel şema olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ortaöğretim birinci ve son sınıflar ayrı ayrı ele alındığında ortaöğretim birinci sınıf matematik öğretmen adaylarının dışsal ve analitik şema yüzdeleri birbirine yakın olmasına rağmen en fazla analitik şemayı en az deneysel şemayı kullandığı saptanmıştır. Dışsal şemanın deneysel şemaya göre daha çok kullanılması ortaöğretim birinci sınıf matematik öğretmen adaylarının deneysel olarak ispatlamayı yeterli görmediğini bunun yerine daha önceki modellerden faydalanma yoluna giderek dışsal şemaya başvurduklarını gösterebilir. Ağırlıklı olarak analitik şemayı tercih etmeleri içinse henüz birinci sınıfta olmalarına ve ciddi anlamda ispatlarla yeni yeni karşılaşmasına rağmen analitik şemayı kullanma cesaretlerinin olduğu yorumunu yapabiliriz.

Ortaöğretim son yani beşinci sınıf matematik öğretmen adaylarının ağırlıklı olarak analitik şemayı en az dışsal şemayı kullandığı tespit edilmiştir. Analitik şemayı kullanım oranının dışsal ve deneysel şemaya göre oldukça fazla olduğu, deneysel ve dışsal şemayı kullanım oranının ise birbirine oldukça yakın olduğu saptanmıştır. Bu doğrultuda ortaöğretim son sınıf matematik öğretmen adaylarının aldıkları eğitimin öğrencilerin düşünme ve kavramsallaştırma becerilerini zenginleştirdiği, dışsal bir otorite ya da deneme yanılma yoluna güvenmek yerine mantıksal çıkarıma karşı güven geliştirmelerinde etkili olduğu düşünülmektedir. Bunun yanı sıra ortaöğretim birinci ve son sınıfların soruları boş bırakma oranı birbirine oldukça yakın bulunmuştur. Bu noktada öğretim programının olumlu etkisinden dolayı lisans sürecinde gerçekleşen öğrenmelerin içselleştirilmesinden dolayısıyla unutmaların az olmasından kaynaklandığı sonucuna ulaşılabilir.

Matematik öğretmen adaylarının genel anlamda şemalarına bakıldığında en fazla kullandıkları şema analitik, en az kullandıkları şema dışsal şema olarak bulunmuştur. Ayrıca öğretmen adayları soruların beşte birini de boş bırakmıştır. Harel ve Sowder (1998; 2003) çalışmalarında öğrencilerin çoğunluğunun dışşal ve deneysel şemaları kullandıklarını analitik şemayı ise daha az tercih ettiklerini ortaya koymuştur. Ağırlıklı olarak kullanılan şemayı analitik olarak bulduğumuzdan bu çalışmalarla sonuçlarımız paralellik göstermemektedir. Matematik öğretmen adaylarının ağırlıklı olarak kullandığı şemasının analitik çıkmasında daha önceki öğrenmelerinin ve yöneltilen problemlerin etkisi olabilir. Öğrencilerin aldığı matematik derslerinde öğretmenlerin sunduğu modellerin, yaptığı çözümlerin analitik yapıda olması öğretmen adaylarının da bunlara benzer yapıda çözümler üretmesinde dolayısıyla çözümlerinde analitik şema kullanmasında rol oynamış olabilir. Çünkü öğrenciler öğrendikleri gibi yapmadıklarında ispatın gerçekleşmediğini düşünebilmektedirler.

Ortaöğretim matematik öğretmen adayları ilköğretim matematik öğretmen adaylarına göre analitik şemaları daha fazla kullanmaktadırlar. Ortaöğretim öğrencileri matematik derslerini fen fakültesinde aldıklarından ve buradaki program eğitim fakültelerine göre farklılık gösterdiğinden bu etkinin öğrencilerin şemalarına yansıdığı söylenebilir.

Matematik öğretmen adaylarının genel olarak problemlerde kullandığı alt ispat şemalarını ele aldığımızda dışsal alt şemalardan en çok otorite şemasını daha sonra sembolik şemayı ve en az alışkanlık edinilmiş ispat şemasını kullandıkları görülmektedir. Yani doğrulamalarını öğretmen ya da kitap gibi bir otoriteye veya bildiği kurallara dayandırmayı tercih etmektedirler. Bulduğumuz bu sonuç Harel (2001), Aydoğdu ve ark., (2002) ve İskenderoğlu (2010) çalışmalarıyla paralellik göstermektedir. Öğretmen adayları bilgi eksiklerine ya da yanlış yapılandırmalarına bağlı olarak problemlere açıklama getiremedikleri için veya bu konularda kendi zihinsel yapılarını oluşturamadıkları için genellikle dışsal şemalardan otoriteyi kullanmış olabilirler (İskenderoğlu, 2010). Öğretmen adaylarının deneysel alt şemalardan temel örnekler ile sezgisel şemayı kullanma oranları açısından farkın fazla olduğu görülmektedir. Deneysel şemalardan ağırlıklı olarak temel örnekler şemasını kullanmayı tercih etmişlerdir. Yani örnekler ve değerler vererek, deneme yanılma yoluyla doğruluğu araştırma yoluna gitmişlerdir. Bulgularımız iskenderoğlu'nun (2010) sonuçlarıyla benzerlik taşımaktadır. Teknolojik gelişmelere bağlı olarak öğrencilerin yazma becerilerinin zayıflamasına ve sınav sisteminin kısa yoldan sonuca ulaşmaya, zamanı iyi kullanmaya ağırlık vermesine bağlı olarak öğrencilerde oluşan çalışma alışkanlığının öğrencilerin deneysel şemayı tercih etmelerinde etkili olduğu söylenebilir. Geçmişte aldığı eğitimin oluşturduğu düşünceyle, bu kadar işlemi ben mi yapacağım diyerek örnekleri kullanıp kısa yoldan kolayca problemlerin doğruluğunu göstermeye çalıştığı düşünülebilir. Flores (2006) çalışmasında öğrencilerin problemlerin doğruluğunu tek bir örnekle gösterebileceklerine inandıklarını ortaya koymuştur. Buradan hareketle öğrenciler örnekler vererek yaptığı ispatın yeterli olduğunu düşündüğünden ağırlıklı olarak temel örnekler ispat şemasını kullanmış olabilirler. Öğretmen adaylarının analitik ispat şemalarından ise dönüştürülebilen şemayı çok az kullandığı daha çok aksiyomatik şemayı tercih ettiği görülmektedir. Öğretmen adaylarının bir teori ya da kuralı başka bir duruma aktarması, aradaki bağlantıları kurup başka bilgiye dönüştürerek genellemeye ulaşması oldukça zor bir süreçtir. Eğitim sistemimizin getirdiği düşünce yapısına bağlı olarak öğrenciler kavramsallaştırma yapmaktan uzak olduklarından genelde kuralı ya da teoriyi anlamadan ezberlemeyi tercih etmektedirler. Bu durum da dönüştürülebilen ispat şemasının gerektirdiği bir bilgiden hareketle başka bir bilgiye ulaşma, genelleme yapma becerilerinin gelişmesini engellemektedir. Bu nedenle öğretmen adaylarının bu şemayı az kullandıkları söylenebilir. Ağırlıklı olarak aksiyomatik şemayı kullanmalarında matematiksel kavramlarla ilgili bilgilere hakim oluşu ve bu konudaki tecrübeleri etkili olabilir. İskenderoğlu'nun (2010) bulguları da bizim çalışmamızı desteklemekte, öğrencilerin analitik alt ispat şemalarından dönüştürülebilen şemayı aksiyomatik şemaya göre daha az kullandıklarını göstermektedir. İlköğretim birinci ve son sınıflar ile ortaöğretim birinci ve son sınıflar bazında ayrı ayrı bu alt ispat şemalarının tercih edilme oranına baktığımızda her bir sınıf için genel olarak açıkladığımız alt ispat şeması kullanım profilinin aynı olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra öğretmen adaylarının problemleri doğrulama sürecinde alt ispat şemalarını tercih etme sırası en çoktan en aza olmak üzere aksiyomatik, temel örnekler, otorite, sembolik, alışkanlık edinilmiş, dönüştürülebilen ve sezgisel şema şeklindedir. Sezgisel şemanın en az kullanılmasında öğrencilerin hissetmenin doğruluk gösterilmediği sürece önemli olmadığını düşünmelerinden ve bu şekilde ispatlamayla süreç içerisinde çok az karşılaşmalarından kaynaklanabilir. Sezgiselliğin doğruluğu göstermeden daha ziyade verilen ifadenin doğruluğu ya da yanlışlığı konusunda bireyin kendini ikna etmesinde ve ispatı nasıl yapacağına karar vermesinde yönlendirici olduğu düşünülebilir. Öğrenciler de bu nedenle gerekçelerini sunmadan sadece hisleriyle açıklama yapmanın yeterli olmayacağını düşündüklerinden bu şemayı kullanmaktan kaçınmış olabilirler.

Dışsal ispat şemaları bütün sınıf seviyelerindeki kullanım yüzdeleri bakımından ele alındığında en fazla yedinci problemde en az dokuzuncu problemde kullanıldığı görülmektedir. Bunun yanı sıra bazı sınıflarda ikinci, üçüncü ve dokuzuncu problemlerde dışsal şema hiç kullanılmamıştır. Deneysel şema en fazla sekizinci problemde en az beşinci problemde kullanılmıştır. Ayrıca bazı sınıflarda beşinci, altıncı ve dokuzuncu problemlerde deneysel şema hiç kullanılmamıştır. Analitik şema ise fazla beşinci problemde kullanılırken en az sekizinci problemde kullanılmıştır. Bunun yanı sıra bazı sınıflarda birinci, dördüncü, yedinci ve sekizinci problemlerde analitik şema hiç kullanılmamıştır.

Matematik öğretmen adaylarının bütün sınıf seviyeleri göz önünde bulundurulduğunda problemleri boş bırakma oranı ele aldığımızda seviyelerinde en fazla dokuzuncu problem en az ikinci problem boş bırakılmıştır. Ayrıca bazı sınıflarda ikinci, beşinci ve altıncı problem hiç boş bırakılmamıştır. Öğrencilerin problemlerde kullandıkları ispat şemaları yöneliten problem türlerine, öğrencinin bu sorularla karşılaşma sıklığına, geçmiş bilgi ve deneyimlerine bağlı olarak farklılık gösteriyor olabilir.

Özetle; ispatlama çok farklı stratejiler içerebilir ve birden fazla yolla yapılabilir (Raman, 2003). Harel ve Sowder da (1998) kişinin tek bir ispat şeması olmadığını, aynı soruyu farklı ispat şemaları kullanarak ispatlayabileceğini savunmuştur. Aydoğdu, Olkun ve Toluk (2003), Rodriguez (2006) ve İskenderoğlu (2010) yaptığı çalışmalarla bu görüşü desteklemiştir. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar öğrencilerin aynı anda farklı ispat şemaları kullandıklarını ve farklı stratejilerle ispatlama yaptıklarını gösterdiğinden bu çalışmalarla paralellik göstermektedir.

### 5.1.2 İlköğretim ve Ortaöğretim Matematik Öğretmen Adaylarıyla Yapılan Yarı Yapılandırılmış Görüşmelere İlişkin Bulguların Tartışılması

Yarı yapılandırılmış görüşmelerin birinci kısmında matematik öğretmen adaylarının kendilerine genel matematik dersi kapsamında yöneltilen dokuz problemde kullandıkları ispat şemaları ve hatalı düşünme yolları tespit edilmeye çalışılmıştır.

Öğretmen adaylarının çözümleri incelendiğinde görüşmelerde ağırlıklı olarak dışsal şemalardan otoriteyi, deneysel şemalardan temel örnekleri ve analitik şemalardan aksiyomatik şemaları kullandıkları saptanmıştır. Bunun yanı sıra az olmakla beraber sembolik, sezgisel, alışkanlık edinilmiş ve dönüştürülebilen ispat şemaları da kullanılmıştır. Sonuçlarımız iskenderoğlu’nun (2010) bulgularıyala paralellik göstermektedir.

Yarı yapılandırılmış görüşmelerde en çok kullanılan şema analitik iken en az kullanılan deneysel şema olarak tespit edilmiştir. Yazılı sınavda ise en çok kullanılan analitik iken en az kullanılan dışsal şema olmuştur.

Yarı yapılandırılmış görüşmelerede dışsal şemanın en çok kullanıldığı problemler 1. ve dördüncü, deneysel şemanın en çok kullanıldığı 8. ve analitik şemanın en çok kullanıldığı 5., 6. ve 7. problem ayrıca en çok boş bırakılan 9. problemdir. 3., 6. ve 7. problemlerde görüşmelerde deneysel şema hiç kullanılmazken 9. problemde sadece dışsal şema kullanılmıştır. Öğretmen adayları farklı sorularda farklı ispat şemalarını kullanmayı tercih etmiştir. Bu durumda geçmiş bilgilerinin, sorulan sorunun ve konunun etkisi olabilir.

Yarı yapılandırılmış görüşmelerde öğrencilerin hatalı düşünme yollarını incelediğimizde dört hatalı düşünme yolunu da kullandıkları saptanmıştır. Bazı problemlerde bazı öğrenciler hiç hatalı düşünme yoluna sahip değilken bazıları bir problemde birden fazla hatalı düşünme yoluna sahiptir. Öğrencilerin hatalı yaklaşımları genel olarak paralelik göstermektedir. Aynı soruda aynı şekilde düşünen öğrenciler mevcuttur bunun yanı sıra farklılıklar da bulunmaktadır. Görüşmeler sonucunda bu hatalı yaklaşımların oluşmasında öğretmenlerin etkisinin oldukça fazla olduğu tespit edilmiştir. Öğretmenin bakış açısı, bilgisi, kullandığı stratejiler öğrenciye yansımaktadır. Genel olarak derslerde gördükleri çözüm yöntemlerini kullanma eğiliminde oldukları anlaşılmıştır. Bunun yanı sıra öğrencinin bilgi eksikliği, içselleştirmeden ezbere yaptığı öğrenmeler de hatalı düşünmelerine neden olmaktadır. Ayrıca konuya ya da soruya yönelik önyargılarının da öğrencinin çözümünü ve düşüncelerini etkilediği sonucuna ulaşılmıştır.

Yarı yapılandırılmış görüşmelerin ikinci kısmında matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri araştırılmıştır. Bu amaçla sorulan sorulardan ilki öğretmen adaylarının ispat yaparken zorlandıkları durumları belirlemeye yönelik görüşleri ile ilgilidir. Öğretmen adayları genel olarak ispata nasıl başlayacakları konusunda karar vermede ve başladıktan sonra sonunu getirmede zorluklar yaşadıklarını belirtmiştir. Bunun yanı sıra formülleri, kuralları ve çeşitli bilgileri hatırlamada, zihinlerinde oluşan bilgileri toparlayarak düzenli bir şekilde kağıda dökmekte sıkıntı yaşadıklarını ifade etmişlerdir. Weber (2001) çalışmasında öğrencilerin ispatlamayı nasıl yapacağını, ispata nereden başlayacağını ve ispatı oluşturma sürecinde bilgileri nasıl kullanacağını bilmediğini, Sarı ve ark. (2007) ispata ilişkin akıl yürütme adımlarını takip edip ispatları formülleştirmede sorunlar yaşadıklarını ortaya koyarak bu sonucu desteklemektedir. Teoremin ya da kavramın eksik veya yanlış yapılandırılmış olması da öğrencilerin ispatı devam ettirme sürecinde problem yaşamalarına yol açıyor olabilir (Moore, 1994; Hazan ve Leron, 1994; Harel, 1998; Karaoğlu, 2010). Ayrıca öğretmen adayları ispat yaparken sayısal ifadeler kullanamadıklarından ispatı sembollerle ifade etmede, ayrıntılı ve soyut düşünmede, soruda tüm olasılıkları bulup bunları göz önünde bulunduran bir çözüm yapmakta da zorluklar yaşadıklarını belirtmişlerdir. Yıldız (2006) çalışmasında öğrencilerin matematiksel dili kullanamadıkları ve kavramlar arasındaki ilişkileri kurmakta zorlandıkları sonucuna ulaşmıştır. Moralı ve Uğurel (2010) ise öğrencilerin ispat yaparken kullanılması gereken tanım ve özelliklerin matematiksel gösterimlerini kullanmada, ispatın birbirini takip eden mantıksal bir dizi adımdan istenene ulaşma işlemi olduğunu anlamada ve bunları ispat yapma süreçlerine aktarmada önemli sıkıntılar yaşadıklarını ifade etmiştir. Dolayısıyla bu çalışmaların öğrencilerin belirttiği görüşlerle paralel olduğu görülmektedir

Öğretmen adaylarına sorulan ikinci soru öğrencilerin ispat yapmanın gerekliliğine yönelik görüşlerini nedenleriyle ortaya koymaya yöneliktir. Öğretmen adaylarının çoğu ispatın gerekli olduğuna inanmaktadır. İfadenin doğruluğunu göstermeyi ve konuyu daha iyi anlamayı sağladığı için gerekli olduğunu düşündüklerini belirtmişlerdir. Bunun yanı sıra ispatın kavramların nereden geldiğini görmeye, nasıl oluştuğunu öğrenmeye ve mantıksal düşünmeyi geliştirmeye olanak tanıdığı için ispatın önemli olduğuna inanmaktadırlar. Dikici ve Güler (2012) de çalışmasında öğrencilerin ispatın kalıcı ve mantıklı öğrenmeye yardım ettiğini düşündüklerinden bu konudaki görüşlerinin olumlu olduğunu ortaya koymuştur. Doruk, Kıymaz ve Horzum (2012) ise öğrencilerin bir sonucun doğruluğuna inanmada ve matematiksel olguları açıklamada ispatın önemli ve gerekli olduğunu düşündüklerini belirtmiştir. Ayrıca öğretmen adayları ispatın ezberi önlemede ve matematik birikimli bir ders olduğundan bilinenden yola çıkarak bilinmeyene ulaşmada ispatın gerekli olduğunu vurgulamışlardır. İskenderoğlu (2010) çalışmasında öğrencilerin ispatın kalıcı ve anlamlı öğrenme sağladığını, öğrenmeyi kolaylaştırdığını, ezberlemeyi engellediğini ve kavramsal ilişkileri kurmayı sağladığını düşündüklerini ortaya koymaktadır. Dolayısıyla öğrenciler böyle bu şekilde düşündükleri için ispatın gerekli olduğunu kabul etmektedirler. Bunların yanı sıra öğretmen adayları ispat yapmanın inandırıcılığı ve güvenilirliği arttırmak, birileri sorduğunda cevap verebilmek ve mantıklı gelmeyen kavramları anlamlı hale getirmek için gerekli olduğuna inandıklarını belirtmişlerdir. Bu görüşleri ispatın başkalarını ikna etme süreci olduğunu ifade eden çalışmalarla paralellik göstermektedir (Harel ve Sowder, 1998; Almeida, 2003; İskenderoğlu, 2010).

Öğretmen adaylarına yöneltilen üçüncü soru ispat yaparken nelere dikkat ettiklerini ve genel olarak ispat yapış tarzlarını, bu süreçteki düşünme yollarını ortaya koymaya ilişkindir. Bu süreçte öğretmen adayları önce istenenin ne olduğunu yorumladıklarını daha sonra sonuca nasıl ulaşmaları gerektiğini anlamaya çalıştıklarını ifade etmişlerdir. Bunun için de verilmiş olanları değerlendirdiklerini, verilenler doğrultusunda kendi bilgilerini gözden geçirdiklerini ve uygun çözüm yolu aradıklarını belirtmişlerdir. Yani öğrencilerin ispata başlamadan önce bu sürece ilişkin zihinlerinde bir taslak oluşturmaya çalıştıkları görülmektedir. Öğretmen adayları ispat yaparkenki yaklaşımlarını ve düşünme süreçlerini bu şekilde tanımlamakla birlikte kullandıkları yolların matematiğe aykırı olup olmamasına ve birbirleriyle çelişmemesine özen gösterdiklerini ifade etmişlerdir. Ayrıca sonuca giden en pratik yolu seçmeye, derste öğretmenin kullandığı ispat yolunu kullanmaya, ifadenin doğruluğunu ya da yanlışlığını kendilerine kısaca göstermeye ve dönüp baktıklarında yaptıkları ispatın öncelikle kendilerini tatmin etmesine dikkat ettiklerini vurgulamışlardır. Harel ve Sowder'e göre (1998) bazı öğrenciler derslerde öğretilenlerden farklı bir şekilde yaptıklarında ispatlarının geçersiz olduğunu düşünmektedirler. Öğrencilerin belirtmiş olduğu derste öğretmenin kullandığı ispat yolunu tercih etme eğilimi bu düşünceden kaynaklanıyor olabilir. Ayrıca eğitim sistemimiz de öğrencilere kendi zihinsel yapılarını oluşturmaları için yeterli fırsatların sunulmaması Galbraith (1995) da bu durumda etkili olmuş olabilir. İspatlama süreci uzun ve karmaşık bir yapıya sahiptir ve bu adımları takip etmekte öğrenciler genellikle zorlanmaktadırlar. Bu da öğrencilerin ispattan sıkılmalarına yol açmaktadır. Dolayısıyla en pratik, kendilerine en kısa gelen yolu tercih etme eğiliminde oldukları söylenebilir.

Öğretmen adaylarına yöneltilen dördüncü soru ispata ihtiyaç duyma nedenlerini belirlemeye yöneliktir. Öğretmen adayları ispata ihtiyaç duyma nedenlerini temel bilgilerin nereden geldiğini, formüllerin nasıl türediğini görmek, ezberci eğitimden uzaklaşmak, ortaya atılan ifadenin doğruluğunu göstermek ve bunu diğerlerine kabul ettirmek şeklinde açıklamışlardır. Bu görüşler birçok çalışmadan elde edilen sonuçlar ile paralellik göstermektedir (Harel ve Sowder, 1998; Hanna, 2000; Almeida, 2003; İskenderoğlu, 2010; Dikici ve Güler, 2012). Bunun yanı sıra İskenderoğlu (2010) öğretmen adaylarının ne zaman ispata ihtiyaç duyduklarını da ortaya koymuştur. Bu doğrultuda öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapmaya en çok derste, sınava hazırlanırken ve sınavda, doğru ya da yanlış olduğundan emin olunmayan durumlarda, anlaşılmayan durumlarda, konularda ve kural, formül, özellik vs. unutunca gereksinim duyduklarını ortaya koymuştur.

Öğretmen adaylarına yöneltilen son soru ispat yaptıklarında ya da yapamadıklarında hissettikleri duyguları betimlenmeye yöneliktir. Öğretmen adayları genel olarak verilen bir soruyu ispat ettiğinde mutlu olduğunu, kendine olan güveninin geldiğini, motive olduğunu, gururlandığını, daha gayretli olmaya özen gösterdiğini, sevindiğini, matematiğin kendine has olan hazzını tattığını ve kendini daha iyi hissettiğini belirtmiştir. İspat edemediği zaman ise moralinin bozulduğunu, üzüldüğünü, hayal kırıklığına uğradığını, sinirlendiğini, farklı yollar denediğini, matematiksel düşünmede eksikliğinin olduğunu hissettiğini, diğer sorulara karşı önyargısının oluştuğunu ve yetersiz hissettiğini ifade etmiştir. Güler ve Dikici (2012) öğretmen adalarıyla yaptığı çalışmada öğretmen adaylarının başarılı olduğu ispatta mutlu oldukların ve başarısız oldukları ispatta ise üzüldüklerini ortaya koymuştur. Bu anlamda çalışma bizim bulgularımızla paralellik göstermektedir. Öğretmen adayları, ispatta başarılı ya da başarısız olma durumlarının, kavramları içselleştirebilme becerilerine, ispatın yapısına ve yapılan ders ya da konuya bağlı olarak değiştiğini düşünmektedir. Çünkü sevdiği derslerdeki ispatları daha iyi yaptığını, sevmediği derslerdeki ispatlarda başarısız olduğunu ifade eden öğrenciler olduğu belirlenmiştir. Bununla birlikte öğretmen adayları bilgi birikiminin ve ders hocasının ispata hakimiyet düzeyinin ispatta başaralı olmayı ya da olmamayı etkilediği görüşündedirler (Güler ve Dikici, 2012).

### 5.1.3 Matematik Öğretmen Adaylarının İspata Yönelik Görüşlerine İlişkin Bulguların Tartışılması

Ölçekten elde edilen puanlara bakıldığında ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin tam olarak oluşmadığı görülmektedir. Alan yazında yapılan bazı çalışmalar bu sonucu desteklemektedir (Jones, 2000; Moralı ve ark., 2006; Öçal ve Güler, 2010; Kayagil, 2012). Kayagil (2012) bu çalışmada kullanılan ölçeği kullanarak ilköğretim matematik öğretmen adaylarıyla yaptığı çalışmada öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerinin ne olumlu ne de olumsuz olduğunu saptamıştır. Moralı ve ark. (2006) ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarıyla yaptığı çalışmasında öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerinin istenilen düzeyde olmadığını, görüşlerinde kararsızlığın hakim olduğunu ortaya koymuştur. Bu durumu öğretmen adaylarının matematik ve matematik öğretimi açısından ispatın önemini bilmemeleri ve ispat yapma becerilerine ilişkin kavramsal yeterliliklerinin düşüklüğü açısından açıklamıştır. Güler ve Dikici (2012) ortaöğretim matematik öğretmen adaylarıyla yaptığı çalışmada öğretmen adaylarının çoğunun ispata yönelik olumlu görüşlere sahip olduğu sonucuna ulaşırken benzer şekilde Lee (1999) ve İskenderoğlu (2010) da yaptığı çalışmalarda öğrencilerin ispatla ilgili görüşlerinin olumlu olduğunu tespit etmiştir. Bu anlamda sonuçlarımız paralellik göstermemektedir. Bu durum öğrencilerin görüşlerini belirlemeye yönelik kullanılan ölçme araçlarının farklılığından kaynaklanıyor olabilir. Elde edilen bu sonuçlara baktığımızda ispata yönelik olumlu ve tam oluşmayan görüşlerin varlığı görülmektedir. Bu durumu netleştirebilmek için bu konuya yönelik daha çok araştırma yapılması tavsiye edilebilir.

Matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin sınıflara göre farklılık göstermediği tespit edilmiştir. İlköğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının ispata ilişkin görüşleri benzerlik göstermektedir. Aynı şekilde ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının görüşlerinin de birbirine yakın olduğu tespit edilmiştir. Yani sınıf düzeyi arttıkça ispata yönelik görüşlerde anlamlı bir değişimin olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Sonuçlarımız Moralı ve ark. (2006) ile Kayagil (2012) çalışmaları ile bu açıdan paralellik göstermektedir. Bu noktada öğretmen adaylarının öğrenim gördükleri süre içerisinde aldıkları matematik derslerinin yoğunluğunun birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinde etkisi olmadığı yorumu yapılabilir. Beklenen durumun aksine öğrencilerin aldıkları derslerin ispata yönelik görüşlerine yansımamasında öğretim programından kaynaklanan eksikliklerin etkisi olduğu düşünülmektedir. Öğrenciler genel olarak ispatı anlamakta zorlandıkları için ezberleme yolunu tercih etmektedirler. Bu durum ispata ilişkin içselleştirmenin tam anlamıyla gerçekleşmesini engellediğinden dolayı ispata yönelik görüşlerine de yansımaktadır.

Genel olarak ayrı ayrı ortalamalara bakıldığında her bir sınıf için görüşler kararsızlık aralığında yer almakla birlikte ortaöğretim öğretmen adaylarının görüşlerinin ilköğretim öğretmen adaylarına göre daha olumsuz olduğu görülmektedir. İlköğretim son sınıflar en yüksek ortalama puanına sahipken ortaöğretim birinci sınıflar en düşük puana sahiptir. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının karşılaştığı ispatların ortaöğretim öğretmen adaylarına göre daha basite indirgenmiş olması ve daha az yoğunlukta verilmesi bu durumun oluşmasında etkili olmuş olabilir. Yani ortaöğretim matematik öğretmen adayları zor ve çeşitli ispat türleriyle uzun bir süreçte iç içe olduğundan bu durumun onların zorlanmalarına ve dolayısıyla ilköğretime göre daha olumsuz düşünceler geliştirmelerine yol açtığı düşünülebilir.

Ölçekte yer alan faktörleri ayrı ayrı ele aldığımızda, birinci faktör ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklere yönelik görüşleri kapsamaktadır. Faktörün genel ortalamaları, ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin yeterliliklere yönelik görüşlerinin istenilen yönde olduğunu göstermektedir. Yani öğretmen adayları ispatın işlevini, doğruluğu göstermedeki yararını ve ispatı oluşturan gerekli koşulları takdir etmektedirler. Bu sonuç Moralı ve ark. (2006) bulgularıyla paralellik göstermektedir. Bu faktöre ait görüşler istatistiksel olarak farklılık göstermemekle birlikte ortalamalar bazında en yüksek ortalamaya ilköğretim birinci sınıflar sahipken en düşük ortalamaya ortaöğretim birinci sınıfların sahip olduğu tespit edilmiştir.

Ölçekteki ikinci faktör İspat yapma benlik algısına yönelik görüşleri içermektedir. Bu faktörden elde edilen genel ortalamalar ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının bu konudaki görüşlerinin olumsuz olduğunu göstermektedir. Bu faktör ispat yapabilme becerime güveniyorum, ispatları anlamada genellikle zorlanıyorum gibi maddeler içermektedir. Bu doğrultuda öğretmen adaylarının ispat becerilerine güvenmediği ve ispat yapmada zorlandığı söylenebilir. Bu durum üniversite öğrencilerinin ispatlamada zorlandıklarını ortaya koyan pek çok çalışmayla benzerlik göstermektedir (Senk, 1983; Moore, 1994; Harel ve Sowder, 1998; Dreyfus, 1999; Almeida, 2000; Jones, 2000; Recio ve Godino, 2001; Weber, 2001; Weber, 2004; Knapp, 2005; Stylianides vd., 2005; Stylianides vd., 2007). Moralı ve ark. (2006) çalışmasında öğrencilerin ispat yapma benlik algısına yönelik görüşlerinde kararsız olduğu sonucuna ulaşmıştır. Lee (1999) ve İskenderoğlu (2010) da ilköğretim matematik öğretmen adaylarıyla yaptığı çalışmada öğrencilerin ispat yapmada bazen kendilerine güvendiklerini yani bu konuda kararsızlıklar yaşadıklarını saptamıştır. Bizim çalışmamızda ise öğrencilerin bu konuda negatif görüşlere sahip oldukları tespit edildiğinden sonuçlarımız bu çalışmalardan farklılık göstermektedir. Ortalama değerler birbirine çok yakın olmakla birlikte benlik algısına ilişkin en yüksek puana ilköğretim son sınıflar sahip iken en düşük puana ortaöğretim birinci sınıflar sahiptir. Bu doğrultuda her iki bölüm için son sınıf öğrencilerinin benlik algılarının daha olumlu olduğu görülmektedir. Öğrenimleri süresince gördükleri derslerden elde ettiği kazanımların son sınıf öğrencilerinin görüşlerini olumlu etkilediği düşünülebilir.

Ölçekte yer alan üçüncü faktör ispat yapmanın önemine ilişkin genel görüşlere yöneliktir. Bu faktörden elde edilen genel ortalamalar ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmanın önemine ilişkin görüşlerinde kararsız olduklarını, ortaöğretim öğretmen adaylarının ise bu konuda olumsuz düşündüklerini göstermektedir. İspatın matematik için vazgeçilmezliğine ve gerekliliğine yönelik öğrenci görüşlerinin netleşmediği ve negatif algının varlığı tespit edilmiştir. Matematiksel ispatlar karmaşık adımlar içerdiğinden çoğu öğrenci açısından bu adımları takip etmek, kavramsallaştırmak ve kendileri için anlamlı hale getirmek oldukça zordur. Bu durum onların ispatı anlamsız semboller bütünü olarak yorumlamasına yol açabilir. Dolayısıyla bu görüş öğrencilerin ispatın önemini anlamada düşüncelerini etkilemiş olabilir. Moralı ve ark. (2006) çalışmasında öğretmen adaylarının görüşlerinin istenilen yönde olduğu yani ispatın önemiyle ilgili olumlu düşündükleri saptanmıştır. Güler ve Dikici (2012) yaptığı çalışmada öğretmen adaylarının çoğunluğunun matematik eğitiminde ispatın önemli bir yere sahip olduğunu düşündüğü sonucuna varmıştır. Kayagil (2012) de çalışmasında öğrencilerin ispatın önemine yönelik görüşlerinin olumlu olduğu sonucuna ulaşmıştır. Bu sonuçlar bizim bulgularımızla paralellik göstermemektedir. Bunun nedeni çalışma gruplarının farklı olması ve öğrencilerin ispata yönelik geçmiş yaşantılarının farklılık göstermesi olabilir. Ortalamalar göz önünde bulundurulduğunda ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ortaöğretim matematik öğretmen adaylarına göre ispatın önemini daha çok kabul ettikleri anlaşılmaktadır. İspatın önemine yönelik görüşler bazında en yüksek ortalamaya ilköğretim son sınıfların en düşük ortalamaya ortaöğretim son sınıfların sahip olduğu görülmektedir. İlköğretim matematik öğretmen adayları ortaöğretime göre daha sınırlı sayıda ispatlarla ve neden sonuç ilişkisinin verildiği öğrenme durumlarıyla karşılaştığı için ispatın önemini anlamış olabilirler. Ortaöğretim öğrencilerinin ise ilköğretime göre daha yoğun ispatları içeren bu ortamlara rahat ulaştıkları için ispatın önemini fark edemediği düşünülebilir.

Ölçekteki dördüncü faktör ispat yapmaya ilişkin genel görüşleri içermektedir. Bu faktörden elde edilen genel ortalamalar ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin düşüncelerinin olumsuz olduğunu göstermektedir. İspatı anlaşılması zor stratejiler olarak gördüklerinden ve yalnız öğretmen ya da matematikçi gibi otoritelerin yapabileceğine inandıklarından bu konudaki görüşlerinin olumsuz olduğu düşünülmektedir. Moralı ve ark. (2006) öğrencilerin ispata yönelik genel görüşlerinin tam olarak oluşmadığını ortaya koymuştur. Bu noktada bizim çalışmamızla paralellik göstermemektedir. Çalışma gruplarında yer alan öğrencilerin bilgi birikimleri ve tecrübeleri bu durumda farklılığa neden olmuş olabilir. Ortalamalar bazında fark çok olmamakla birlikte ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ortaöğretim matematik öğretmen adaylarına göre ispata ilişkin genel görüşlerinin biraz daha olumlu olduğu anlaşılmaktadır. En yüksek ortalama değere ilköğretim son sınıflar sahipken en düşük ortalamaya ortaöğretim son sınıflar sahiptir. İlköğretim matematik öğretmen adayları ortaöğretime göre daha basite indirgenmiş ve yoğunluğu azaltılmış matematik dersleri gördüklerinden ortaöğretim matematik öğretmen adayları kadar ispat konusunda zorluk yaşamıyor olabilirler. Bunun da ispata yönelik genel görüşlerinin biraz daha olumlu çıkmasında etkili olduğu düşünülebilir.

Ölçekteki beşinci faktör ise ispat yapmayla ilgili duygulara yöneliktir. Ölçekten alınan genel ortalamalar ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmayla ilgili sahip olduğu duygularının tam oluşmadığını ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının görüşlerinin ise olumlu olmadığını göstermektedir. Bu faktör ispat yapmayı seviyorum ve ispat yapmakta zorlanıyorum gibi maddeler içermektedir. İspatla ilgili öğrenilmesi gereken kavramların çokluğu ve ispatlama sürecince yaşanılan zorluklar öğrencilerin duygularını olumsuz yönde etkilemiş olabilir. Moralı ve ark. (2006) da çalışmasında bu faktöre ilişkin görüşlerin istenilen yönde olmadığını ortaya koymuştur. Bu anlamda çalışmamızla paralellik göstermektedir. Ortalamalar birbirine yakın olmakla birlikte ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ortaöğretim matematik öğretmen adaylarına göre ispata ilişkin duygularının biraz daha olumlu olduğu anlaşılmaktadır. Bu sonuçlara göre ispatla ilgili en yüksek ortalamaya ilköğretim birinci sınıflar en düşük ortalamaya ortaöğretim son sınıflar sahiptir. İspatla yeni karşılaşan birinci sınıflar ispat yapmaya daha istekli olabilirler ve süreç içerisinde daha kapsamlı ispatlarla karşılaştıklarında bu duygu azalabilir (İskenderoğlu, 2010). Buna bağlı olarak zor ve çeşitli ispatlarla karşılaşmış olan ortaöğretim son sınıflar ispata yönelik duygularında bu düşüşü yaşamış olabilirler.

İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ölçekte yer alan faktörlere göre ispat yapmaya yönelik görüşleri arasındaki ilişkiye baktığımızda, ilköğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının ölçekte yer alan faktörlerden ispat yapmanın önemine yönelik görüşleri dışında diğer faktörler bazında görüşleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmamıştır. Yani ilköğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının her bir faktör bazında ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliğe, benlik algısına, ispatla ilgili duygulara ve genel görüşlere yönelik bakış açıları benzerlik göstermektedir. Öğretmen adaylarının ispat yapmanın önemine yönelik görüşlerindeki farklılık ise son sınıfların ispata daha çok önem verdiklerini ortaya koymaktadır. Bu durum gördükleri derslerin bir yansıması olarak yorumlanabilir. Ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının ölçekte yer alan faktörler bazında görüşleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmamıştır. Yani ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının her bir faktör bazında ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliğe, benlik algısına, ispatın önemine, ispatla ilgili duygulara ve genel görüşlere yönelik bakış açıları birbirine yakındır. Kısacası ilköğretim matematik öğretmenlerinin ispatın önemiyle ilgili görüşlerinin farklılığı dışında sınıf seviyesinin artışına bağlı olarak görüşlerde değişim olmadığı saptanmıştır. Bu noktada öğretim programının öğrencilerin ispata yönelik görüşlerini değiştirmediği, öğrencilerin üniversiteye başladığı dönemdeki görüşleri ile mezun olurken sahip olduğu görüşlerin paralellik gösterdiği görülmektedir. İspata yönelik derslerin öğrenciler açısından anlamlı öğrenme sağlamaması, öğrencilerin ispatın önemini ve gerekliliğini tam olarak algılayamamış olması görüşlerinde değişikliğin oluşmamasına neden olmuş olabilir. NCTM (2000) öğretim programlarının matematiksel tartışmaları ve ispatları geliştirmeye ve değerlendirmeye yer vermesi gerektiğini ifade etmektedir.

### 5.1.4 İlköğretim ve Ortaöğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspata Yönelik Görüşleri ile Kullandıkları İspat Şemaları Arasındaki İlişkiye Ait Bulguların Tartışılması

Bu kısımda ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüş ölçeğinde belirttikleri düşüncelerinin olumlu ya da olumsuz oluşuna göre kullandıkları ispat şemalarında anlamlı bir farklılık olup olmadığı ele alınarak bunların nedenlerine ilişkin yorumlar yapılacaktır.

Elde edilen bulgular doğrultusunda deneysel ve analitik şema kullanan ilköğretim matematik öğretmen adayları ile ispata yönelik görüşleri arasında anlamlı bir farklılık olduğu sonucuna ulaşılmıştır. İspata yönelik görüşleri olumsuz olan öğrencilerin olumlu olan öğrencilere göre deneysel şemayı daha fazla kullandıkları saptanmıştır. İspat ilköğretim matematik öğretmenliği programı kapsamında verilen derslerin geneline yayılmadığından ve verilen ispatlar sınırlı sayıda olup bilgi vermeye yönelik olduğundan öğrenciler ispat yapmaya çok yatkın değillerdir. Dolayısıyla ispatın gerekliliğini ve önemini anlamda da zorluk çekiyor olabilirler. Bütün bunlar onların doğrulama sürecinde örnekler vererek deneme yapmalarında etkili olmuş olabilir. Bunun yanı sıra analitik şemayı kullanan öğrencilerden ispata yönelik görüşleri olumsuz olan öğrencilerin bu şemayı daha az kullandığı olumlu olanların ise daha fazla kullandığı görülmektedir. İspatlama sürecinde anlamlı öğrenme gerçekleştiren, kavramları içselleştiren öğrenciler kendi zihinsel çıkarımlarını yapabilmekte ve bunu gerekli durumlara kolaylıkla aktarabilmektedir. Dolayısıyla bu durum onlarda kendilerine güven duygusunu geliştirerek ispata yönelik görüşlerini pozitif yönde etkileyebilir. Kavramsallaştırma becerileri gelişmiş öğrenciler analitik ispat şemaları çok rahat kullanabileceğinden görüşleri olumlu olan bu öğrencilerin analitik şemayı daha çok tercih etmeleri beklenen bir durumdur. Öğrencilerin ispata yönelik görüşleri ile dışsal şema kullanımları arasında ise anlamlı bir farklılık bulunmamıştır. Yani ispata yönelik görüşlerinin olumlu ya da olumsuz oluşu dışsal şemayı seçmelerini etkilememektedir.

Sonuçlar ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının kullandıkları deneysel şemalar ile ispata yönelik görüşleri arasında anlamlı bir farklılık olduğunu göstermektedir. İspata yönelik görüşleri olumsuz olan öğrencilerin olumlu olan öğrencilere göre deneysel şemayı daha fazla kullandıkları saptanmıştır. Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının gördüğü ispatlar ilköğretime göre daha kapsamlı, yoğun ve zordur. Bu ispatların bazıları başka ispatları da bilerek bunlar arasında bağlantı kurmayı gerektirmektedir. Dolayısıyla öğrenciler bu ispatları yapmakta zorluk yaşadıklarından zaman içerisinde ispata yönelik görüşlerini olumsuz yönde etkilenmektedir. Görüşlerindeki bu olumsuzluk onların zor, uzun ispatlarla uğraşmaktansa daha kolay nasıl soruyu çözerim kısmında deneysel şemayı kullanma yoluna gitmelerinde etkili olabilir. Öğrencilerin ispata yönelik görüşleri ile dışsal ve analitik şema kullanımları arasında ise anlamlı bir farklılık bulunmamıştır. Bu şemaların kullanımlarındaki farklılık istatistiksel olarak anlamlı olmamakla beraber ispata yönelik olumsuz görüş bildiren öğrencilerin dışsal şema kullanımlarının, görüşleri olumlu olan öğrencilerin ise analitik şema kullanımlarının daha çok olduğu görülmektedir.

Özetle; en üst düzey olarak kabul edilen analitik ispat şemasının kullanımı ilköğretim matematik öğretmen adaylarının görüşlerinin olumlu oluşuyla paralellik gösterirken ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının görüşlerine göre değişmemektedir. Deneysel şemanın kullanımı her iki bölümün görüşlerinin olumlu ya da olumsuz oluşuna bağlı olarak artıp azalırken, dışsal şemanın kullanımı bu görüşlere göre belirlenmemektedir.

## 5.2 Sonuçlar

Matematik öğretmen adayları problemlerin doğrulanma sürecinde dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere her üç ispat şemasını da kullanmış ve bazı problemleri boş bırakmıştır. İspat şemaları belirlemeye yönelik hazırlanan ölçme aracına verilen yanıtlara göre ilköğretim birinci sınıflar ağırlıklı olarak deneysel şema kullanırken, ilköğretim son sınıflar ile ortaöğretim birinci ve son sınıflar analitik şema kullanmaktadır. Sınıfların hepsi birlikte ele alındığında en fazla kullanılan şemanın analitik en az dışsal şema olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

İlköğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının kullandıkları şemalar farklılık göstermektedir. Birinci sınıflar en fazla deneysel şemayı kullanırken en az dışsal şemayı, son sınıflar ise ağırlıklı olarak analitik şemayı kullanırken en az dışsal şemayı kullanmaktadır. Analitik ve dışsal şemayı kullanımları açısından aralarında anlamlı bir farklılık bulunmaktadır. Birinci sınıflar son sınıflara göre dışsal şemayı daha fazla kullanmakta analitik şemayı ise daha az tercih etmektedir.

Ortaöğretim birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının her ikisi de ağırlıklı olarak analitik şemayı kullanırken birinci sınıflar en az deneysel şemayı kullanmaktadır. Son sınıfların dışsal ve deneysel şema kullanımları oldukça yakın olmakla beraber en az kullandığı dışsal şemadır. Ortaöğretim birinci ve son sınıf öğretmen adaylarının dışsal ve analitik şema kullanımları arasında anlamlı bir fark olduğu tespit edilmiştir. Her iki sınıfta ağırlıklı olarak analitik şemayı kullanmasına rağmen son sınıflar birinci sınıflara göre analitiği daha çok kullanmaktadırlar. Birinci sınıflar ise son sınıflara göre dışsal şemayı daha çok tercih etmektedirler.

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının kullandıkları şemalar cinsiyete göre ele alındığında deneysel şemayı kullanma ve boş bırakma bakımından öğretmen adaylarını aralarında anlamlı bir farklılık bulunmuştur. Kız öğrenciler deneysel şemayı daha çok kullanırken erkek öğrenciler soruları daha çok boş bırakmıştır. Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının kullandıkları şemalarda cinsiyete göre bir farklılık bulunmamıştır.

Öğretmen adaylarının ispat yaparkenki mevcut düşünme yollarında ağırlıklı olarak dışsal şemalardan otoriteyi, deneysel şemalardan temel örnekleri ve analitik şemalardan aksiyomatik şemaları kullandıkları saptanmıştır. Yani öğretmen adayları ispat yaparken bazı doğrulamalarını kitap ya da öğretmen gibi başka bir otoriteye, bazı sebebini bilmediği kurallara ve nedenini sorgulamadan yaptığı açıklamalara dayandırmaktadır. Bazı öğretmen adaylarının bu noktada sorgulama yapmaktan kaçınan bir düşünme yolu izlediği görülmektedir.

Öğretmen adayları tarafından tercih edilen bir diğer şema deneysel şemalardan temel örneklerdir. Bu şemanın kullanımı bazı öğretmen adaylarının örnekler üzerinden doğruluğu göstermenin yeterli olduğunu düşündüklerini ve en kısa, kendilerine kolay gelen yolu kullanma yatkınlıklarının olduğunu göstermektedir. Ayrıca kavram görüntüleri üzerinden düşündükleri bu nedenle kavramı açıklayan bilgi yerine örnekleri tercih etme düşünce yapısının hakim olduğu görülmektedir.

Analitik şema öğrencilerin ulaşması istenen bir şemadır. Bu şemayı kullananların düşünme yolları mantıksal akıl yürütmeyi, nedenleri sorgulamayı, matematiksel ifadelerle kurduğu ilişkileri yansıtabilmeyi kapsamaktadır. Bu bağlamda bazı öğretmen adaylarının kendisinden beklenen bu hedeflere ulaştığı aksiyomatik yapıları kullanarak matematiksel düşündüğü görülmektedir.

Öğretmen adaylarının ispat yaparken kullandıkları hatalı düşünme yollarını ele aldığımızda sembolik düşünme, otoriteden dolayı ispat, birden fazla düşünme yolu eksikliği ve etkili kavram görüntüleri eksikliği olmak üzere dört hatalı düşünme yolunu da kullandıkları saptanmıştır.

Ölçekten elde edilen puanlar doğrultusunda ilköğretim ve orta öğretim matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin tam olarak oluşmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Yani öğretmen adayları ispatla ilgili ne olumlu ne de olumsuz düşünmektedirler.

Öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşleri ile kullandıkları bazı şemalar paralellik gösterirken bazıları farklılık göstermektedir. İlköğretim matematik öğretmen adaylarından ispata yönelik görüşleri olumsuz olanlar ağırlıklı olarak deneysel şemayı ağırlıklı kullanırken olumlu olanlar analitik şemayı kullanmaktadır. Dışsal şemanın kullanımı görüşlere göre değişmemektedir. Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarından görüşleri olumsuz olanlar deneysel şemayı daha çok kullanmaktadırlar. Görüşlerin olumlu ya da olumsuz olması dışsal ve analitik şemanın kullanımını etkilememektedir.

## 5.3 Öneriler

Bu çalışma özet olarak öğretmen adaylarının ispat yaparken zorlandıklarını, sorulara nasıl yaklaşmaları gerektiğini bilmediklerini, mantıksal düşünmede eksikliklerinin olduğunu ve ispata yönelik görüşlerinin net olmadığını ortaya koymaktadır.

Bu doğrultuda eğitimin alt kademelerinden başlayarak ispatın öğrencilere anlayabilecekleri düzeylerde verilebilmesine yönelik ders programları ve etkinlikler hazırlanabilir.

DNR tabanlı öğretimin öğretmen adaylarıyla ya da öğretmenlerle uygulanmasına yönelik çalışmalar yapılabilir. Bu çalışmalarla öğretmenlerin düşünme süreçlerinin geliştirilmesi aynı zamanda öğrencilerin düşünme yapılarını görmeleri böylelikle derslerinde dikkat etmeleri gereken noktalar hakkında bilgi edinmeleri sağlanabilir.

Öğretmen adayları algoritmik sistematik yapıyı oluşturamadıkları ve bunu kendi davranışsal becerilerine dönüştüremedikleri için ispat yapmakta zorluk yaşamaktadırlar. Bu nedenle öğrenilen bilginin davranışa yansımasını ve ispat yapma becerilerinin gelişmesini sağlamak için düşünme süreçlerine ağırlık veren, sorgulamayı ön planda tutan, sonuçtan çok süreç odaklı olan ve matematiksel dili iyi kullanabilmeyi sağlayan müfredat programları oluşturulabilir. Böylelikle eğitim sistemimizin önemli sorunlarından biri olan ezberleme davranışının da azalacağı düşünülmektedir.

Ders içeriklerinin öğretmen adaylarının matematiksel dil ile iletişim boyutunu edinebilecekleri, mantıksal akıl yürütmeye, ilişki kurarak genelleme yapmaya ve algoritmik yapıyı iyi kullanmaya olanak tanıyan nitelikte hazırlanmasına özen gösterilmelidir. Çünkü öğrenciler bildiklerini ve düşündüklerini iyi bir matematiksel dille, sembolleri kullanarak ifade edemedikleri ve matematiksel düşünemedikleri için ispattan uzaklaşmatadırlar.

Öğretmen adaylarına ilköğretimin her aşamasında ispat yapabilecekleri, nedenlerini sorgulayabilecekleri matematiksel kavramların bulunduğunu gösterebilen etkinlikler tasarlanabilir.

Yanlış yapılandırmalar daha sonraki nesile aktarılacağı için öğretmen adaylarına kendilerinde mevcut olan anlama ve düşünme yolları eksikliklerini fark edeceği ve önemini hissedeceği öğrenme ortamları sağlanmalıdır.

Öğretmen adaylarının hatalı düşünme yollarının tespiti yanlış kavramsallaştırmayı önlemek, düzeltmek ve öğrencilerine hatalı aktarım yapmalarını önelemek adına oldukça önemlidir. Bu nedenle DNR tabanlı öğretim kapsamında hatalı düşünme yollarının tespitine yönelik öğrencilerle farklı konularda, farklı etkinlikler boyutunda çalışmalar yapılabilir. Bu çalışmalardan elde edilen sonuçlar öğretmenlerle bu kapsamda yapılacak çalışmalarda ya da hizmetiçi eğitimlerde paylaşılarak ve örnekler üzerinden açıklanarak bu düşünme yollarının oluşumunu engellemeye yönelik önceden bilgilendirilmeleri sağlanabilir. Eğitimde iyiliştirme sağlaması ve farkındalığı arttırması bakımından bu yöntemin faydalı olacağı düşünülmektedir.

Eğitim fakültelerindeki ders içeriklerinde süreç boyunca eğitim derslerinin yoğunluğu arttğından öğrenciler son dönemlerde çok fazla matematik dersi almamaktadırlar. Bu durum öğrenilmiş bilgilerin bir kısmının unutulmasına neden olmaktadır. Programda matematik derslerine birinci sınıftan son sınıfa kadar olan süreçte artan bir yoğunlukla, bilgi kaybını en aza indirecek şekilde yer verilebilir.

Sınav sisteminin getirdiği ezberleme, deneme yanılma, pratik çözüm yapma ve sadece sonuca odaklanma gibi davranışlar alışkanlık olarak öğrencilerin üniversitedeki düşünme yapılarına da yansımaktadır. Bu yapılarının zenginliğini arttırabilmek ve yanlış oluşumu ortadan kaldırabilmek için sınav sisteminde akıl yürütmeyi içeren soruların ağırlıklı olması gerektiği düşünülmektedir. Bunun ezberleyenle bilen öğrenciyi de birbirinden ayırt etmekte faydalı olacağına inanılmaktadır. Böylelikle akıl yürütme becerisi gelişmiş öğrenciler üniversiteye geldiğinde bunu daha etkili kullanabilecek ve geliştirebilecektir. Dolayısıyla verilen eğitim indirgenmeye çalışılmayacak ve daha zengin bir öğrenme ortamı oluşacaktır.

Yapılan bu çalışma sonucunda öğrencilerin en temel kavramlarda bile oldukça zorlandıkları ve kavramsallaştırmayı gerçekleştiremedikleri görülmektedir. İspat üzerinde önemle durulsa bile tam olarak yapılandırılamadığı sürece öğrencileri ezbere yöneltmekten daha ileriye gidemeyecektir. Çünkü matematik birikimli ilerleyen bir alan olduğundan öğrenci bir kavramı algılayamadığında buna bağlı diğer kavramları algoritmik olarak algılaması daha zordur ve bu durum onu ezberlemeye yöneltecektir. Bu nedenle tek başına üniversitede verilen eğitim yeterli olmayacaktır. Dolayısıyla kesinlikle üniversiteden önce öğrencilerin ispat yapmaya başlaması ve önyargılarının giderilebilmesi için her eğitim düzeyinde ispatın kullanılabilir olduğu gösterilerek ilköğretim düzeyinden itibaren ispatın gerekli olduğuna ikna edilmesi gerekmektedir. İlköğretimin her aşamasında zorunlu olarak kullanılması için öğrencilere modellemeler yapılabilir.

Eğitim sistemimizde her ne kadar yapılandırmacı yaklaşıma geçilmiş olsa da hala ezbercilik devam etmektedir. Öğrenciler soru çeşitlerini pekiştirdiğinden ve çok fazla soru çözerek çözemediği soru profili kalmadığı için çıkan soruları bu çeşitlere benzeterek çözmekte, aslında algoritmik yapıyı fark etmemektedir. Bunun yanı sıra küçük yaşlarda kurallara dayalı öğretim verilmesi daha sonraki yıllarda öğrencinin ilk yapılandırdığı bilgiyi değiştirmemesine ve üniversite düzeyinde bile akıl yürütmeden kurallara bağlı çözümler üretmesine yol açmaktadır. Bu durumun oluşmasında öğretmenlerinin sistemin ihtiyaçlarına direnerek metodolojik yaklaşımları kullanma gereksinimi hissetmemelerinin etkisi bulunmaktadır. Ayrıca sınavlarla ve şuanki mevcut yapısıyla öğrencilere başarılı olabilmek, sınırlı zaman diliminde birçok kişinin önüne geçebilmek için en kısa yoldan ezberle mesajı verlidiği sürece müfredat da değişse, kazanımlar da zenginleştirilse, dersler teknolojiyle de desteklense ezberin önüne geçmek mümkün olmayacaktır.

Çalışma grubumuz sınırlı sayıda öğrenciden oluştuğu için bu çalışma farklı matematik dersleri kapsamında daha fazla öğrenciyle tekrarlanabilir.

# KAYNAKLAR

Aladağ, A. (2009). İlköğretim Öğrencilerinin Orantısal Akıl Yürütmeye Dayalı Sözel Problemler ile Gerçekçi Cevap Gerektiren Problemleri Çözme Becerilerinin İncelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Almeida, D. (1996). Justifying and Proving in The Mathematics Classroom, Philosophy of Mathematics Education Newsletter, 9.

Almeida, D. A. (2000). Survey of Mathematics Undergraduates' Interaction With Proof: Some Implications for Mathematics Education, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31, 6, 869-890.

Almeida, D., 2001. Pupils' Proof Potential, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32, 1, 53–60.

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34(4), 479–488.

Alexander, P. A. ve Judy J. (1988). The interaction of domain specific and strategic knowledge in academic performance, Review of Educational Research, 58, 375-404.

Anderson, J. R. (1980). Cognitive psychology and its implications. San Francisco: Freeman.

Altıparmak, K. ve Öziş, T., (2005). Matematiksel İspat ve Matematiksel Muhakemenin Gelişimi Uzerine Bir İnceleme, Ege Eğitim Dergisi, 6(21), 25-37.

Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünmenin Aşamalarındaki Yaşantılarından Yansımalar, Eğitim ve Bilim, 35(156), 17-31.

Aydoğdu, T., Olkun, S. ve Toluk, Z. (2002). İlköğretim 6, 7 ve 8. Sınıf Öğrencilerinin Matematikte Çözdükleri Problemlerin Sonuçlarını Kanıtlama Süreçleri, XI. Eğitim Bilimleri Kongresi, Yakın Doğu Üniversitesi, Kuzey Kıbrıs Türk Cumhuriyeti.

Aydoğdu İskenderoğlu, T. (2003). Farklı Sınıf Duzeylerindeki Oğrencilerin Matematik Problemlerini Kanıtlama Surecleri, Yuksek Lisans Tezi, Abant İzzet Baysal Universitesi, Sosyal Bilimler Enstitusu, Bolu.

Aydoğdu, T. Olkun, S. ve Toluk, Z. (2003). İlköğretim öğrencilerinin çözdükleri matematik problemlerini kanıtlama süreçleri, Eğitim Araştırmaları, 4(12), 64-74.

Baker, J. D. (1996). Students' Difficulties with Proof by Mathematical Induction. Educational Resources Information Center (ERIC). Presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York.

Baki, A. (2008). Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.

Baki, A., İskenderoğlu, T. ve İskenderoğlu M., 2009. Classroom Teacher Candidates' Justifications' for Their Solutions to Function Problems in Mathematics, 2009 College Teaching and Learning Conference, June, Prague, Czech Republic.

Ball, D.L., Hoyles, C., Jahnke, H.N. ve Movshovitz-Hadar, N. (2002). The Teaching of Proof. In L.I. Tatsien (Ed.). Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vol. III, pp. 907–920). Beijing: Higher Education Press.

Balacheff, N. (1990). Towards a problematique for research on mathematics teaching, Research in Mathematics Education, 21, 258-272.

Brannigan, G. G. (1985). The research interview. A. Tolor (Ed.), Effective interviewing. Springfield, IL: Charles C. Thomas Pub.

Briggs, C. (1986). Learning how to ask: A sociolinguistic appraisal of the role of the interview in social science research. Cambridge: Cambridge University Press.

Burton, R. (1982). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills, Cognitive Science, 2, 155-192.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., ve Post, T. R. (1984). Tasks to assess children's perception of the size of a fraction. In A. Bell, B. Low, ve J. Kilpatrick (Eds.), Theory, research and practice in mathematical education. Working group reports and collected papers from the 5th International Congress on Mathematical Education, Adelaide (p. 179–181). Nottingham, UK: Shell Centre for Mathematical Education, Nottingham University.

Bernal, M. (1987). *Black Athena: The Afroasiatic roots of clasical civilization.* New Brunswick, NJ: Rutgers University Press.

Brousseau, G. (1997). Epistemological obstacles, problems and didactical engineering. In Theory of didactical situations in mathematics. Dordrecht: Kluwer.

Brownell, W. A. (1946). Introduction: Purpose and scope of the yearbook. The forty-fifth yearbook of the National Society for the Study of Education, Part I, the measurement of understanding, (pp. 1–6). University of Chicago, Chicago.

Büyüköztürk Ş., Çakmak, E. K., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2011). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (8. Baskı). Ankara: Pegem Yayıncılık.

Chazan, D.  (1993). 'High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof', Educational Studies in Mathematics 24(4), 359–387.

Coe, R. & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal, 20*(1), 41–54.

Confrey, J. (1990). What constructivism implies for teaching. In R. B. Cooper, R. (1991). The role of mathematical transformations and practice in mathematical development. In L. Steffe (Ed.), Epistemological foundations of mathematical experience. New York: Springer-Verlag.

Cuoco, A., Goldenberg, P. ve Mark, J. (1996). Haibts of minds: An organizing principle for mathematics curricula, Journal of Mathematical Behavior, 15, 375-402.

Çallıalp, F. (1999). Örnekler İle Soyut Matematik, Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi Yayınları, 3. Baskı, İstanbul.

Çolak, H., Bulut, S. ve Argun, Z., (2005). Problem Cozme Surecinde Yazma Tekniğinin Kullanımı ve Aday Matematik Oğretmenlerinin Bu Tekniğe Yonelik Gorusleri, XIV.Ulusal Eğitim Bilimleri Kongresi, Pamukkale Universitesi Eğitim Fakultesi, Eylul,Denizli, Bildiriler Kitabı II: 410-412.

Davis, R. B. (1992). Understanding'' Understanding. Journal of Mathematical Behavior, 11(3), 225–242.

Dedeoğlu, N. Ç. (2010). İlköğretimde Matematiksel İspatın Gelişim Süreci: İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programının İncelenmesi. *IX. Ulusal Fen*

*Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, 23-25 Eylül, İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi.

DeGroot, A. D. (1965). Thought and choice in chess. The Hage: Mouton.

Denzin, N. K. ve Lincoln, Y. S. (1998). Introduction: Entering the Field of Qualitative Research, in N.K. Denzin ve Y.S. Lincoln (Eds.), *The Landscape of Qualitative Research: Theories and Issues*, London: Sage.

De Villiers, M. (1990). "The role and function of proof with sketchpad" Pythagoras, 24, 17-24.

Dobos, S., Ocsko, E. ve Vasarhelyi, E. (2001). Reference levels in School Mathematics Education in Europe http://emis.matem.unam.mx/projects/Ref/doc_ems_pdf/EMS_NATIONAL_PRESENTATIONS/EMS_ HUNGARY.pdf adresinden 24.11.2011 tarihinde alınmıştır.

Doruk, B. K., Kıymaz, Y. ve Horzum, T. (2012). İspat Yapma ve İspatta Somut Modelden Yararlanma Üzerine Sınıf Öğretmeni Adaylarının Görüşleri. X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi. http://kongre.nigde.edu.tr/xufbmek/dosyalar/tam_metin/pdf/2474-30_05_2012-22_03_11.pdf adresinden 13.08.2012 tarihinde edinilmiştir.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny Can't Prove?, Educational Studies in Mathematics, 38, 1, 85-109.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 95–123): Kluwer.

Ekiz, D. (2003). *Eğitim Araştırma Yöntem ve Metotlarına Giriş.* Ankara: Anı Yayıncılık.

Fawcett, H. P. (1938). The nature of proof (1938 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics). New York: Bureau of Publications, Teachers college, Colimbia University.

Fischbein, E., ve Kedem, I. (1982). Proof and certitude in the development of mathematical thinking. In A. Vermandel (Ed.), Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (128–131). Antwerp, Belgium: Universitaire Instelling.

Flores, A. (2002). How Do Children Know That What They Learn in Mathematics is True?, Teaching Children Mathematics, 8, 5, 269–274.

Flores, A. (2006). How Do Students Know What They Learn in Middle School Mathematics is True?, School Science and Mathematics, 106, 3, 124-132.

Forman, E. A., Joernes, J. L., Stein, M. K. ve Brown, C. A., 1998. You're Going to Want to Find Out Which and Prove It: Collective Argumentation in a Mathematics Classroom, Learning and Instruction, 8, 527–548.

Frankel, R. M. ve devers, K. J. (2000). Study design in qualitative research. Education for Health: Change in Learning and Practice, 13(2), pp. 251-261.

Gali, M. D., Borg, W. R. ve Gali, j. P. (1996). Educational research: an introduction (6. Ed.). NewYork: Longman.

Galindo, E. (1998). Assessing Justification and Proof in Geometry Classes Taught Using Dynamic Software, The Mathematics Teacher, 91, 1, 76–82.

Garnier, R. Taylor, J. (1997), 100% Mathematical Proof, John Wily&Sonsn Pub.

Galbraith, P. (1995). Mathematics as Reasoning, The Mathematics Teacher, 88, 5, 412–417.

Goetting, M. M. (1995). The college student's understanding of mathematical proof (doctoral dissertation). University of Maryland.

Greeno, J. (1980). Conceptual entities. In D. Gentner, & A. Stevens (Eds.), Mental models (pp. 227–252). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Güler, G., Özdemir, E. ve Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının Matematiksel Tümevarım Yoluyla İspat becerileri ve matematiksel İspat Hakkındaki Görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi,* 20 (1), 219-236.

Güler, G.. ve Dikici, R. (2012). Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel İspat Hakkındaki Görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi* 20 (2), 571-590.

Güven, B., Çelik, D. ve Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki Çocukların Matematiksel İspat Yapabilme Durumlarının İncelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi*., 30, 319.

Hacısalihoğlu, H., Mirasyedioğlu, Ş. ve Akpınar, A. (2003). Matematik öğretimi: Matematikte yapılandırıcı öğrenme ve öğretme. Ankara: Asil Yayın Dağıtım.

Hanna, G. ve Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving, In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (Eds.), International Handbook of Mathematics Education, 2, 877-908, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1999). Using arguments from physics to promote unders¬tanding of mathematical proofs. In O. Zaslavsky (ed.), Proceedings of the twenty third conference of the international group for the psychology of mathematics education, 3, 73–80. Haifa, Israel.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview, Educational Studies in Mathematics, 44, 5–23.

Hanna, G. ve de Villiers, M. (2008). Proof and Proving in Mathematics Education, ZDM Mathematics Education, 40,329–336.

Hardy, G. H. (1997) A Mathematician's Apology, Univesity Pres, Cambridge.

Harel, G. (1995). From Naive Interpretist to Operation Conserver, In J. Sowder and B. Schapelle (Eds.), Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades, 143-165, SUNY Press, New York.

Harel, G. (1997). The linear algebra curriculum study group recommendations: Moving beyond concept definition, Resources for Teaching Linear Algebra, D. Carlson, C. Johnson, D. Lay, D.

Harel, G. (1998). Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (or vice versa), American Mathematical Monthly 105, 497-507

Harel, G. ve Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results From Exploratory Studies, In A. Schoenfeld, J. Kaput and E. Dubinsky (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education III, 234-283, Providence, RI, American Mathematical Society.

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: a model for DNR-based instruction. In S. C. R. Zaskis (Ed.), Learning and Teaching Number Theory (pp. Ablex Publishing Corporation): Ablex Publishing Corporation.

Hawro, J. (2007). University Students' Difficulties With Formal Proving and Attempts to Overcome Them. Working on Advanced Mathematical Thinking in Proceeding of CERME 5 p. 2290-2299. (Cyprus: Larnaca, February, 2007).

Harel, G. (2007). The DNR System as a Conceptual Framework for Curriculum Development and Instruction, In R. Lesh, J. Kaput, E. Hamilton (Eds.), Foundation for the Future in Mathematics Education, Erlbaum.

Housman, D. ve Porter, M. (2003). Proof Schemes and Learning Strategies of Above Average Mathematics Students, Educational Studies in Mathematics, 53, 139–158.

Harel, G. (2008a). DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction. Part I: Focus on Proving, ZDM Mathematics Education, 40,487-500.

Harel, G. (2008b). A DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction. Part II: With Reference to Teacher’s Knowledge Base, ZDM Mathematics Education, 40,893-907.

Hart, E. W. (1994). Aconceptual analysis of the proof-writing performance of expert and novice students in elemantary group theory in J.J. Kaput and E. Dubinsky (eds.).

Hazan, O. ve Leron, U. (1994). Students’ use and misuse of mathematical theorems: The case of Lagrange’s Theorem, *For the Learning of Mathematics* 16, 23-26 .

Heinze, A. ve Reiss, K. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence, In M.A. Mariotti (Ed.). Proceedings of the Third Conference of the Europian Society for Research in Mathematics Education,Bellaria, Italy.

Hiebert, J. (1997). Aiming research toward understanding: lessons we can learn from children. In A. Sierpinsda ve J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics education as a research domain: a search for identity: An ICMI study (pp. 141–152). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Holsteın, J. A. veGubrium, J. F. (1997). Active interviewing. D. Silverman (Ed.), Qualtitative research: theory, method and practise (s. 113-129).London: Sage Publications.

ICMI Study 19. (2009). Proof and Proving in Matematics Education: Discussion Document, (Eds. F. L. Lin; F. J. Hsieh; G. Hanna ve M. de Villiers) Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, (10-15 May) pp. 1-XIX--1-XXX,Taipei, Taiwan.

Işık, A. ve Bekdemir, M. (1998). Matematiğin Doğası Ve Eğitimdeki Yeri. *Çağdaş Eğitim Dergisi* Temmuz-Ağustos, 245-248.

İskenderoğlu, T. (2010). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kanıtlamayla İlgili Görüşleri ve Kullandıkları Kanıt Semaları. Doktora Tezi, Trabzon: KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.

Jones, K. (1997). Student-Teachers' Conceptions of Mathematical Proof, Mathematics Education Review, 9, 16-24.

Jones, K., (2000). The Student Experience of Mathematical Proof at University Level, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31, 1,53–60.

Karasar, N. (2002). *Bilimsel araştırma Yöntemi* (11. Baskı). Ankara: Nobel Yayınları.

Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. Mathemstics Magazine, 64 (5), 291-314.

Knapp, J.(2005). Learning to prove in order to prove to learn. [Online]:Retrieved on 16-April-2007 at URL: http://mathpost.asu.edu/~sjgm/issues/2005_spring/SJGM_knapp.pdf

Knapp, J. L. (2006). Students' Appropriation of Proving Practices in Advanced Calculus, Doktora Tezi, Arizona State University, USA

Knuth, E. J. (1999). The Nature of Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. Doktora Tezi, Faculty of the Graduate School of the University of Colorado, USA.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics, Journal of Mathematics Teacher Education, 5, 1, 61-88

Knuth, E. J., 2002b. Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics, Journal of Mathematics Teacher Education, 5, 61–88.

Kouba, V., Carpenter, T. ve Swafford, J. (1989). Number and Operations. *Reseults from the fourth Mathematics Assessments of the National Assessment of Educational Progress*, Lindquist, M., Editor Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Köğce, D. (2012). İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının İspatın Öğrenmeye Katkısı ile İlgili Görüşleri ve İspat Düzeyleri. X. Ulusal Fen Bilimleri ve

Matematik Eğitimi Kongresi. http://kongre.nigde.edu.tr/xufbmek/dosyalar/tam_metin/pdf/2322-29_05_2012-16_23_32.pdf adresinden 13.08.2012 tarihinde edinilmiştir.

Kuş, E. (2011). *Nicel-Nitel Araştırma Teknikleri*. Ankara: Anı Yayıncılık.

Lave, J. (1988). Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life. New York: Cambridge University Press.

Lawson-Tancred, H. T. (1998). Aristotle: The Metaphysics. Harmondsworth: Penguin.

LeCompte, M. D. ve Goetz, J. P. (1984). Ethnographic data collection in evaluation research. D. M. Fetterman (Ed.), Ethnography in educational evalution. Beverly Hills, CA: Sage.

Lee, W. I. (1999). The Relationship Between Students' Proof Writing Ability and Van Hiele Levels of Geometric Thought in a College Geometric Course, Doktora Tezi, College of Arts and Sciences Department of Mathematical Sciences, University of Northern Colorado, Greeley, Colorado, USA. Dreyfus, T., 1999. Why Johnny Can't Prove?, Educational Studies in Mathematics, 38, 1, 85-109.

Lee, J. K. (2002). Philosophical Perspectives on Proof in Mathematics Education. Philosophy of Mathematics Education Journal, 16.

Lim, K. H. (2006). Students' Mental Acts of Anticipating in Solving Problems Involving Algebraic Inequalities and Equations. Doctor of Philosophy in Mathematics and Science Education, University of California, San Diego and San Diego State University.

Maher, C. A., ve Martino, A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: a 5-year case study. JRME, 27(2), 194–214.

Marrades, R., ve Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. Educational Studies in Math¬ematics, 44, 87–125.

Martin, G.W. and Harel G. (1989) Proof frames of preservice elemantry teachers, Journal for Research in Mathematics Education 20, 41-51.

Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W. ve Dindyal, J., 2005. The Interplay of Teacher and Student Actions in the Teaching and Learning of Geometric Proof, *Educational Studies in Mathematics*, 60, 95–124.

MEB, (2009). İlköğretim (6–8). Sınıflar Programları Tanıtım El Kitabı. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.

MEB, (2011). Ortaöğretim (9–12). Sınıflar Programları Tanıtım El Kitabı. Milli Eğitim Başkanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.

Mejia-Ramos, J. P. ve Tall, D., 2005. Personal and Public Aspects of Formal Proof: A Theory and a Single-Case Study, in D. Hewitt and A. Noyes (Eds), Proceedings of the Sixth British Congress of Mathematics Education held at the University of Warwick, 97–104.

Mingus, T. T. Y.ve Grassl, R. M. (1999). Preservice Teacher Beliefs About Proofs, School Science and Mathematics, 99, 8, 438–444.

Miyazaki, M. (2000). Levels of Proof in Lover Secondary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 41, 47-68.

Moore, R. C. (1994) Making the transition to formal proof. Educational Studies in Mathematics, 27, 249-266.

Moralı, S., Uğurel, I, Turnuklu, E. B. ve Yesildere, S. (2006). Matematik Oğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yonelik Gorusleri, Kastamonu Eğitim Dergisi, 14, 1,147–160.

Nardi, E. ve Iannone, P., Transforming Theory into Practice: A Guide for Teaching Proof to Mathematics Undergraduates Grounded on the Co-Ordinated Perspectives and Recommendations of Mathematicians and Researchers in MathematicsEducation.http://research.edu.uea.ac.uk/projects/transformingtheory intopracticeaguide15.12.2008.

Nasibov, F. H. ve Zaimoğlu, Ş. (2010). Bilimde İspat, Onun Eğitimde Yeri ve Önemi Hakkında. *IX. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, 23-25 Eylül, İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi.

NCTM, (1989). Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics, The National Council of Teachers of Mathematics, INC, United States of America.

NCTM, (2000). Principles and Standards for School Mathematics, NCTM, Reston, Virginia.Oxford American Dictionary (1980). New York: Avon Boks.

Öçal, M. F. ve Güler, G. (2010). Pre-service mathematics teachers' views about proof by using concept maps. Procedia Social and Behavioral Sciences, 9, 318–323

Özer, O. ve Arıkan, A., (2002). Lise Matematik Derslerinde Oğrencilerin İspat Yapabilme Düzeyleri, V. Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Eylul, Ankara, Bildiriler Kitabı II: 1083-1089.

Öztuncay, F. (2005). *İlköğretim 6. Sınıflarda Problem Çözmede Standartların Uygulanmasının Öğrencilerin Matematik Başarısına Etkisi.* Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Padraig, M. & McLoughlin, M. M. (2002). The Central Role of Proof in the Mathematics Canon: The Efficacy of Teaching Students to Create Proofs Using a Fusion of Modified Moore, Traditional, and Reform Methods. The Annual Summer Meeting of the Mathematical Association of America, (3 August) Burlington, Vermont.

Padula, J. (2006). The Wording of a Proof: Hardys' Second "Elegant" Proof, Australian Mathematics Teacher, 62, 2, 18-24.

Patton, M. Q. (1987). How to use qualitative methods in evaluation. Newbury Park, Ca: Sage.

Patton, M. Q. (1990). Qualitative evaluation and research methods (2. Baskı). Newbury Park, Ca: Sage.

Piaget, J. ve Inhelder, B. (1967). The childs' conception of space. New York: W. W. Norton ve Company.

Piaget, J. (1978). Success and understanding. Cambridge, Mass.: Harvard University Press. Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22(1), 1–36. doi:10.1007/BF00302715.

Porter, A. Watkins, Editors, MAANotes, Mathematical Association of America, Washington, D.C.

Pusluoğlu, Z. (2002). İlköğretim matematik dersinde problem çözme becerisinin kazandırılmasında isbirliğine dayalı öğrenme yaklasımının etkililiği.

(Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Raman, M. (2001). Beliefs about proof in collegiate calculus, in Robert Speiser (Ed.), Proceedings of the Twenty Second Annual Meeting, North American Chapter for the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Snowbird, Utah.

Raman, M. J. (2002). Proof and Justification in Collegiate Calculus. Doctoral dissertation, University of California: Berkeley

Raman, M.(2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. Educational Studies in Mathematics, 52, 319–325.

Recio, A. M. ve Godino, J. D.(2001). Instutional and Personal Meanings of Mathematical Proof, Educational Studies in Mathematics, 48,1,83-89.

Reid; D. A. (2002). Conjectures and Refutations in Grade 5 Mathematics, Journal for Research in Mathematics Education, 33, 1, 5–29.

Robson, C. (1993). Real world research. Oxford: Blackwell Publishers Ltd.

Rodriguez, A. V. R. (2006). Ways of Reasoning and Types of Proofs That Mathematics Teachers Show in Technology-Enhanced Instruction, Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, TBA, Merida, Yucatan, Mexico.

Ross, Kenneth A. (1998). The place of Algorithms and Proofs in School Mathematics. Doing and Proving. March, 252-255.

Sarı, M., Altun, A., ve Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: Örnek olay çalışması. Ankara Üniversitesi Eğitim Bi¬limleri Fakültesi Dergisi, 40(2), 295–319.

Selden, A. ve Selden, J. (2003). Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem?, Journal for Research in Mathematics Education,34, 1, 4–36.

Senk, S. L. (1983). Proof-Writing Achievement and Van Hiele Levels Among Secondary School Geometry Students, Doktora Tezi, Department of Education, The University of Chicago, Chicago-Illinois, USA.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on Doing and Teaching Mathematics, Mathematical Thinking and Problem Solving, 53–69.

Solomon, Y. (2006). Deficit or difference? The role of students’ epistemologies of mathematics in their interactions with proof, Educational Studies in Mathematics, 61(3), 373–393.

Sowder, L. ve G. Harel (2003). Case studies of mathematics majors' proof understanding, production, and appreciation. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *3*(2), 251-267.

Steffe, L. P., von Glasersfeld, E., Richards, J., ve Cobb, P. (1983). Children’s counting types: philosophy, theory, and application. New York: Praeger.

Steffe, L. P., Cobb, P., ve Glasersfeld, E. (1988). Construction of arithmetical meanings and strategies: Springer: New York.

Steffe, L. P., ve Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Stewart, C.J. ve Cash, W. B. (1985). Interviewing: Principles and practices (4.Baskı). Dubuque, IO: Wm. C. Brown Pub.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. ve Philippou, G. N. (2005). Prospective Teachers’ Understanding of Proof: What if the Truth Set of an Open Sentence is Broader Than That Covered by the Proof?, In Chick, H. L. and Vincent, J. L. (Eds.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Melbourne, PME 4, 241-248.

Stylianou, D. A., Chae, N. ve Blanton, M. L. (2006). Students’ Proof Schemes: A Closer Look at What Characterizes Students’ Proof Conceptions, Psychology of Mathematics and Education of North America, 2006 Annual Meeting, USA, 2, 1-7.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. ve Philippou, G.N. (2007). Preservice teachers’ knowledge of proof by mathematical induction. Journal of Mathematics Teacher Education, 10, 145-166.

Szombathelyi, A. ve Szarvas, T., (1998). Ideas for Developing Students’ Reasoning: A Hungarian Perspective, *The Mathematics Teacher*, 91, 8, 677–681.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof, In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan, New York, NY,495-511.

Tall, D. (1998). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some?, Conference of the University of Chicago School Mathematics Project,August, USA.

Tall, D. ve Mejia-Ramos, J. P. (2006). The Long-Term Cognitive Development of Different Types of Reasoning and Proof, Conference on Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives, Universitat Duisburg- Essen, Germany.

Tanrıseven, I. (2000). Matematik öğretiminde problem çözme stratejisi olarak dramatizasyonun kullanılması (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Tatar, E. (2006). İkili İşlem Kavramı ile İlgili Öğrenme Güçlüklerinin Belirlenmesi ve 4Mat Yönteminin Başarıya Etkisi. Doktora Tezi, Erzurum: Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Tatar, E. ve Dikici, R. (2008). Matematik Eğitiminde Oğrenme Guclukleri, Mustafa Kemal Universitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 5, 9, 183-193.

Terzi, M., Ünal, M. ve Gürbüz, Ç. M. (2012). İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Matematiğe Yönelik Akademik Güdülenme Düzeylerinin Bazı Değişkenler Açısından İncelenmesi. *Pegem Eğitim ve Öğretim Dergisi*, 2 (1), 51-60.

Thompson, P. W. (1985). Experience, problem solving, and learning mathematics: considerations in developing. In E. A. Silver (Ed.) Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Türnüklü, A.(2000). Eğitimbilim Araştırmalarında Etkin Olarak Kullanılabilecek Nitel Bir Araştırma Tekniği: Görüşme. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Yönetimi Dergisi*, 24, 543-559.

Uğurel, I. ve Moralı, S. (2010a). Bir Ortaöğretim Matematik Dersindeki İspat Yapma Etlinliğine Yönelik Sınıfiçi Tartışma Sürecine Öğrenci Söylemleri Çerçevesinde Yakından Bakış, Buca Eğitim Fakültesi Dergisi, 28, 135-154.

Uğurel, I. ve Moralı, S. (2010b). Matematik Öğretmen Adaylarının İspat ve İspatlamaya Yönelik Bazı Temel Kavramlar Üzerine Düşünceleri. *IX. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, 23-25 Eylül, İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi.

von Glasersfeld, E. (1983). Learning as constructive activity. Proceedings of the 5th Annual Meeting of the North American Group of Psychology in Mathematics Education, 41–101.

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes (M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, ve E. Souberman, Eds. & Trans.): Cambridge: Harvard University Press.(Original work published 1934).

Wagner, S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. Journal of Research in Mathematics Education, 12, 107-118.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. Educational Studies in Mathematics, 48(1), 101–119.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. Educational Studies in Mathematics, 48(1), 101–119.

Weber, K. (2004). A Framework for Describing the Process That Undergraduates Use to Construct Proofs, In M. J. Hoines ve A. B. Fuglestad (Eds.). International Group for the Psychology of Mathematics Education, 28th, Bergen, Norway, 14-18.

Wragg, E. C. (1994). Conducting and analysing interviewies. N. Bennett, R, Glatter, R. Levacic (Edt). Improving educational management through research and consultancy (pp.267-282). The Open University.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (8.Basım). Ankara: Seçkin Yayınları.

Yıldız, G. (2006). Lisans Seviyesinde Genel Matematik Dersindeki Teorem ve İspatları Anlamaya Yonelik Kavrama Testinin Hazırlanması, Uygulanması ve Oğrenci Gorüşlerinin Değerlendirmesi, Yuksek Lisans Tezi, Gazi Universitesi Eğitim Bilimleri Enstitusu, Ankara.

Yumlu, K. (1990). *Kitle İletişim Araştırmaları.* İzmir: Neşe Yayıncılık.

# EKLER

## EK1

### İSPAT ŞEMALARINI BELİRMEYE YÖNELİK DEĞERLENDİRME ÖLÇEĞİ

**1.Problem**

| $\sqrt{3}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz. |
|---|

<table>
<tr><th colspan="2">Kanıt Şemaları</th><th>Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri</th><th>Problemin Değerlendirilmesi</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Dışsal Kanıt Şemaları</td><td>Otorite</td><td>Öğrenci ispatı öğretmenin, kitabın ya da bir başka otoritenin söyledikleri doğrultusunda yapmaktadır ve sonucu kurallara dayandırarak anlamlandırmadan kabul etmektedir.</td><td>• $\frac{a}{b}=\sqrt{3}$, a=$\sqrt{3}$ b, $a^2=3b^2$, $(\frac{a}{b})^2=3$ … devamını getirememiş.<br><br>• $3^{\frac{1}{2}}$ olarak yazılabilir.$a^b$'de b≠ $Z$ irrasyonel olur.<br><br>• İrrasyonel sayı virgülden sonrası kesin olarak bilinmeyen ya da sonsuza kadar giden sayıdır ve $\sqrt{3}$ sayısı da bu türden bir sayıdır.<br><br>• İrrasyonel sayılar $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan sayılardır ve $\sqrt{3}$, $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamaz.</td></tr>
<tr><td>Alışkanlık Edinilmiş</td><td>Öğrenci için doğruları göstermek zihnini çalıştırarak ispat yolunu bulmaya çalışmaktan daha önemlidir ve karşısındakileri inandırmak için daha önce öğrendiği nedenleri ve kanıtları kullanır.</td><td>• Öğrencinin karekök dışına tamsayı olarak çıkamayan sayıları irrasyonel sayılar olarak tanımlarız şeklinde bir ifade kullanması.<br><br>• Öğrencinin yaptığı işlemleri tekrar gözden geçirip kontrol etmesi.</td></tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **Sembolik** | Öğrenci anlamını kavramadan, problem durumuna yönelik anlaşılır imgeler olmadan ispat yapar örneğin $\sqrt[3]{a}+\sqrt[5]{b}=\sqrt[15]{a+b}$ ya da $x^3$=3.x ya da a.$\frac{c}{d}=\frac{a.c}{a.d}$ gibi. | • $\sqrt{3}$ sayısının rasyonel sayı olduğunu düşünelim. O zaman $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ şeklinde ifade edilebilir. (a,b$\in Z, b\neq 0$)<br>• $\sqrt{3}+\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ (c,d,e,f $\in Z, d, f\neq 0$)<br>$\frac{\sqrt{3}d+c}{d}=\frac{e}{f}$ |
| **Deneysel Kanıt Şemaları** | **Sezgisel** | Öğrenci duyguları ile hareket ederek bir durumun doğru olduğunu ifade etmektedir ancak bunun için sağlam bir dayanak bulamamaktadır. Ayrıca ispat yaparken görsellikten de yararlanmaktadır. | • Öğrencinin $\sqrt{3}$ ‘ün irrasyonel olması lazım gibi cümleler kullanması.<br>• Herhangi bir işlem yapmadan irrasyonel gibi görünüyor şeklinde açıklama yapması. |
| | **Temel Örnekler** | Öğrenci ispat yaparken genellikle daha önceden öğrendiği bir veya daha çok örneği kullanır zaman zaman aksi örnekleri de kullanabilmektedir. Sayısal örnekler vererek ispat yapma yoluna da gidebilmektedir. | • İrrasyonel sayı tanımından hareket edebiliriz. Kök dışına tam çıkamayan sayılar irrasyonel sayılardır. Kök derecesi 2 iken 3 sayısı hiçbir sayının tam karesi değildir.<br>• $\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$<br>$1<\sqrt{2}<\sqrt{3}<2$<br>1 ile 2 arasında değer alan irrasyonel sayılardır.<br>• $\sqrt{3}=x$ olsun.$1^2<x^2<2^2$<br>1<x<2 yani x$\in(1,2)$ aralığındadır.<br>$\sqrt{3}=1,$...dir.Yani irrasyoneldir. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Analitik Kanıt Şemaları** | **Dönüştürülebilen** | Öğrenci özelden genele ulaşmaya çalışır yani tümdengelimi kullanır. Amaca yönelik zihinsel operasyonları uygular; tanımlar, teoremler ve şekiller arasında geçişler yapar. | • Rasyonel olmayan sayılara irrasyonel sayılar denir.<br>$1^2=1$, $\sqrt{1}=1$<br>$2^2=4$, $\sqrt{4}=2$<br>$3^2=9$, $\sqrt{9}=3$<br>$(1/2)^2=\frac{1}{4}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$<br>$(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$<br>$(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$, $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$<br>• 1, 2, 3 rasyonel sayılardır.<br>$\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}$ rasyonel sayılardır.<br>½,2/3, ¾ rasyonel sayılardır.<br>$\sqrt{\frac{1}{4}}, \sqrt{\frac{4}{9}}, \sqrt{\frac{9}{16}}$ rasyonel sayılardır.<br>Ancak bu gibi ifadelerle kök içinden çıkamayan sayılar irrasyonel sayılar olduğundan $\sqrt{3}$ bir irrasyonel sayıdır. |
| | **Aksiyomatik** | Öğrenci tanımları, teoremleri, neden-sonuç ilişkilerini kullanır ve bunlara ek olarak kendisi de alternatif aksiyomlar sunabilir. | • $\sqrt{3}$ rasyonel olduğunu varsayalım. $\sqrt{3}=\frac{p}{q}, p,q \in Z$ $(p,q)=1$ olsun. Her iki tarafın karesini alalım.<br>$\sqrt{3}=\frac{p^2}{q^2} \Longrightarrow 3q^2=p^2$<br>$\Longrightarrow p^2$, 3 ile bölünebilen bir sayıdır.<br>$\Longrightarrow p$ sayısı da 3 ile bölünebilir. Aksi halde $p=3k+1$ veya $p=3k+2$ şeklindedir. ( k∈ $N \cup \{0\}$ )<br>$\Longrightarrow p^2=9k^2+6k+1$ veya<br>$p^2=9k^2+12k+4$<br>$=3.(3k^2+4k+1)+1$<br>$p^2=3.(3k^2+2k)+1$<br>şeklinde olurdu. Bu ise $p^2$'nin 3 ile bölünmesine aykırıdır.Şu halde t ∈ $N$ olmak üzere $p^2=(3t)^2=9t^2$dir.<br>$\Longrightarrow 3q^2=9t^2 \Longrightarrow q^2=3t^2$<br>$\Longrightarrow q^2$, 3 ile tam bölünür.<br>$\Longrightarrow q$, 3 ile tam bölünür.<br>$\Longrightarrow$ 3, p ve q'nun bir ortak bölenidir.<br>Bu ise varsayımımız ($(p,q)=1$ idi) ile çelişir.Şu halde $\sqrt{3}$ irrasyoneldir. |

**2.Problem**

| |
|---|
| $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ olduğunu gösteriniz. |

| Kanıt Şemaları | | Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri | Problemin Değerlendirilmesi |
|---|---|---|---|
| **Dışsal Kanıt Şemaları** | **Otorite** | Öğrenci ispatı öğretmenin, kitabın ya da bir başka otoritenin söyledikleri doğrultusunda yapmaktadır ve sonucu kurallara dayandırarak anlamlandırmadan kabul etmektedir. | • Kümelerde birleşme işleminin kesişim işlemi üzerinde dağılma özelliği vardır.<br>• Kesişimin birleşme üzerine sağdan dağılımı özelliğinden doğru olur. |
| | **Alışkanlık Edinilmiş** | Öğrenci için doğruları göstermek zihnini çalıştırarak ispat yolunu bulmaya çalışmaktan daha önemlidir. Karşısındakileri inandırmak için daha önce öğrendiği nedenleri ve kanıtları kullanır. | • Öğrencinin eşitliğin doğruluğunu gösterip bu tür ispatların sadece bu yolla yapılabileceğini ifade etmesi.<br>• Birkaç tane matematiksel formül yazarak eşitliğin gösterileceğini açıklaması. |
| | **Sembolik** | Öğrenci anlamını kavramadan, problem durumuna yönelik anlaşılır imgeler olmadan ispat yapar örneğin $\sqrt[3]{a} + \sqrt[5]{b} = \sqrt[15]{a+b}$ ya da $x^3=3.x$ ya da $a.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{a.d}$ gibi. | • $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$<br>$= A \cup (C \cap B)$<br>$=(A \cup C) \cap B$<br>$=(B \cap C) \cup A$<br>$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$<br>$= (A \cup B) \cap C$<br>$= C \cap (A \cup B)$<br>$=(C \cap A) \cup B$<br>Bu her iki eşitlikten $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ elde edilir. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Deneysel Kanıt Şemaları** | **Sezgisel** | Öğrenci duyguları ile hareket ederek bir durumun doğru olduğunu ifade etmektedir ancak bunun için sağlam bir dayanak bulamamaktadır. Ayrıca ispat yaparken görsellikten de yararlanmaktadır. | • Kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine dağılma özelliği var gibi görünüyor ya da verilen eşitlik doğru gibi görünüyor şeklinde cümleler kurması. |
| | **Temel Örnekler** | Öğrenci ispat yaparken genellikle daha önceden öğrendiği bir veya daha çok örneği kullanır zaman zaman aksi örnekleride kullanabilmektedir. Sayısal örnekler vererek ispat yapma yoluna da gidebilmektedir. | • A={1,3}, B={2,3,5}, C={1,5,9} olsun.<br>$A\cup B=\{1,2,3,5\}$<br>$(A\cup B)\cap C=\{1,5\}$<br>$(A\cap C)=\{1\}$ ve $(B\cap C)=\{5\}$<br>$(A\cap C)\cup(B\cap C)=\{1,5\}$<br>$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ |
| **Analitik Kanıt Şemaları** | **Dönüştürülebilen** | Öğrenci özelden genele ulaşmaya çalışır yani tümdengelimi kullanır. Amaca yönelik zihinsel operasyonları uygular; tanımlar, teoremler ve şekiller arasında geçişler yapar. | • Öğrencinin çeşitli örnekler vererek bir genellemeye ulaşması ifadenin doğruluğunu belirtmesi.<br><br>• Kesişim ve birleşim işlemlerinin farklı tanımlarını kullanarak genellemeye ulaşması. |
| | **Aksiyomatik** | Öğrenci tanımları, teoremleri, neden-sonuç ilişkilerini kullanır ve bunlara ek olarak kendisi de alternatif aksiyomlar sunabilir. | • Herhangi $a\in A\cup B$ ve $a\in C$ alalım.<br>$a\in A\cup B$ ise $a\in A$ veya $a\in B$ olur.<br>$a\in A$ alırsak ayrıca $a\in C$ olduğundan $a\in A\cap C$ olur; $a\in B$ alırsak, ayrıca $a\in C$ olduğundan $a\in B\cap C$ olur.<br>$a\in A\cap C$ veya $a\in B\cap C$ olduğundan $a\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$ olup istenen elde edilir. |

## 3.Problem

| |
|---|
| $\forall\, n \in N$ için $\sum_{t=1}^{2n} \frac{(-1)^t t.(t-1)}{2}$ = n² olduğunu gösteriniz. |

| Kanıt Şemaları | | Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri | Problemin Değerlendirilmesi |
|---|---|---|---|
| **Dışsal Kanıt Şemaları** | **Otorite** | Öğrenci ispatı öğretmenin, kitabın ya da bir başka otoritenin söyledikleri doğrultusunda yapmaktadır ve sonucu kurallara dayandırarak anlamlandırmadan kabul etmektedir. | • $\sum_{t=1}^{2n} \frac{(-1)^t t.(t-1)}{2}$=0+1-3-6-10+21…+$\frac{(1)^{2n} 2n.(2n-1)}{2}$ ….. devamını getirememiş. |
| | **Alışkanlık Edinilmiş** | Öğrenci için doğruları göstermek zihnini çalıştırarak ispat yolunu bulmaya çalışmaktan daha önemlidir ve karşısındakileri inandırmak için daha önce öğrendiği nedenleri ve kanıtları kullanır. | • Öğrenci istenen ifadeyi ispatladıktan sonra biz böyle ifadeleri hep böyle gösteririz tarzında cümleler kurar. |
| | **Sembolik** | Öğrenci anlamını kavramadan, problem durumuna yönelik anlaşılır imgeler olmadan ispat yapar örneğin $\sqrt[3]{a}$ +$\sqrt[5]{b}$ =$\sqrt[15]{a+b}$ ya da $x^3$=3.x ya da a.$\frac{c}{d}$ =$\frac{a.c}{a.d}$ gibi. | • $\sum_{t=1}^{2n} \frac{(-1)^t t.(t-1)}{2}$=0+1-3+6-10+… =$\sum_{i=1}^{n} 2n-1$=2$\sum_{i=1}^{n} n$-$\sum_{i=1}^{n} 1$ =$2n^2-n^2=n^2$ |

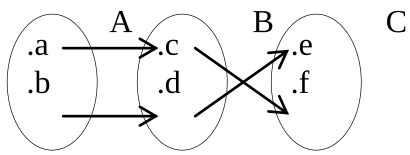
| | | | |
|---|---|---|---|
| **Deneysel Kanıt Şemaları** | **Sezgisel** | Öğrenci duyguları ile hareket ederek bir durumun doğru olduğunu ifade etmektedir ancak bunun için sağlam bir dayanak bulamamaktadır. Ayrıca ispat yaparken görsellikten de yararlanmaktadır. | • Öğrenci böyle olması gerekiyor, bana doğru gibi geldi şeklinde açıklamalar yapar.<br>• Eşitliğin doğru olduğunu bildiğini ancak nasıl göstereceğini bulamadığını ifade eder. |
| | **Temel Örnekler** | Öğrenci ispat yaparken genellikle daha önceden öğrendiği bir veya daha çok örneği kullanır zaman zaman aksi örnekleri de kullanabilmektedir. Sayısal örnekler vererek ispat yapma yoluna da gidebilmektedir. | • Tümevarımdan $\frac{(-1)^1.1.(2-1)}{2}+\frac{(-1)^2.2.(2-1)}{2}+\frac{(-1)^3.3.(3-1)}{2}+\frac{(-1)^4.4.(4-1)}{2}\dots+\frac{(1)^{2n}2n.(2n-1)}{2}=n^2$<br>şeklinde yazarak sayılar üzerinden gider.<br>t=1 için $\frac{(-1).1.(1-1)}{2}=0$<br>t=2 için $\frac{(-1)^2.2.(2-1)}{2}=1$<br>t=3 için $\frac{(-1)^3.3.(3-1)}{2}=-3$<br>t=n için $\frac{(-1)^n.n.(n-1)}{2}=\frac{n-n^2}{2}$<br>t=2n için<br>$\frac{(-1)^{2n}.2n.(2n-1)}{2}=2n^2-n$ |
| **Analitik Kanıt Şemaları** | **Dönüştürülebilen** | Öğrenci özelden genele ulaşmaya çalışır yani tümdengelimi kullanır. Amaca yönelik zihinsel operasyonları uygular; tanımlar, teoremler ve şekiller arasında geçişler yapar. | • $\forall n \in N$ için $\sum_{t=1}^{2n}\frac{(-1)^t t.(t-1)}{2}$<br>n=1 için $\sum_{t=1}^{2}\frac{(-1)^t t.(t-1)}{2}=\frac{(-1).1.(1-1)}{2}+\frac{(-1)^2.2.(2-1)}{2}=1^2$<br>n=2 için $\sum_{t=1}^{4}\frac{(-1)^t t.(t-1)}{2}=\frac{(-1).1.(1-1)}{2}+\frac{(-1)^2.2.(2-1)}{2}+\frac{(-1)^3.3.(3-1)}{2}+\frac{(-1)^4.4.(4-1)}{2}$=0+1-3+6=$2^2$<br>…..<br>Bu şekilde n'e kaç verirsek sonuç $n^2$ oluyor. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **Aksiyomatik** | Öğrenci tanımları, teoremleri, neden-sonuç ilişkilerini kullanır ve bunlara ek olarak kendisi de alternatif aksiyomlar sunabilir. | • $\forall\, n \in N$ için $\sum_{t=1}^{2n} \frac{(-1)^t t.(t-1)}{2}$ = n² <br><br> $\sum_{t=1}^{2n} \frac{(-1)^t t.(t-1)}{2} = \frac{(-1).(-1).0}{2} + \frac{1.2.1}{2} + \cdots \frac{(-1).3.2}{2} + \frac{1.4.3}{2} + \cdots \frac{(1)^{2n} 2n.(2n-1)}{2}$ <br> =0+1-3+6-5+10+…-(n-1).(2n-1)+n.(2n-1)=1+3+5+7+….+2n-1 <br> Buradan (2n-1) e kadar tek sayıların toplamıdır. <br> 1+3+5+…+2n-1=$n^2$ gelir. <br><br> • $\forall\, n \in N$ için $\sum_{t=1}^{2n} \frac{(-1)^t t.(t-1)}{2}$ <br> n=1 için $\sum_{t=1}^{2} \frac{(-1)^t t.(t-1)}{2} = \frac{(-1).1.(1-1)}{2} + \frac{(-1)^2.2.(2-1)}{2} = 1^2$ <br> n=k için iddia doğru olsun. <br> $$\sum_{t=1}^{2n} \frac{(-1)^t t.(t-1)}{2} = k^2$$ <br> n=k+1 için $(k+1)^2$ midir? <br> $$\sum_{t=1}^{2k+2} \frac{(-1)^t t.(t-1)}{2} = \sum_{t=1}^{2k} \frac{(-1)^t t.(t-1)}{2} + \frac{(-1)^{2k+1}(2k+1).(2k)}{2} + \frac{(-1)^{2k+2}(2k+2).(2k+1)}{2}$$ <br> $=k^2 - (2k^2+k) + 2k^2 + k + 2k + 1$ <br> $=k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ |

**4.Problem**

f: A→B ve g: B→C fonksiyonları verilsin. f ve g fonksiyonları 1-1 ve örten ise gof: A→C fonksiyonunun da 1-1 ve örten olduğunu gösteriniz.

<table>
<tr><th colspan="2">Kanıt Şemaları</th><th>Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri</th><th>Problemin Değerlendirilmesi</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Dışsal Kanıt Şemaları</td><td>Otorite</td><td>Öğrenci ispatı öğretmenin, kitabın ya da bir başka otoritenin söyledikleri doğrultusunda yapmaktadır ve sonucu kurallara dayandırarak anlamlandırmadan kabul etmektedir.</td><td>• f: A→B birebir ve örtense<br>g: B→C birebir ve örtense tersleri alınabilir.<br>$f^{-1}$: B→A birebir ve örtendir.<br>$g^{-1}$: C→B birebir ve örtendir.<br>$f^{-1}$o $g^{-1}$: C→A birebir örten ki tersi alınabilir.<br>gof: A→C birebir ve örtendir.</td></tr>
<tr><td>Alışkanlık Edinilmiş</td><td>Öğrenci için doğruları göstermek zihnini çalıştırarak ispat yolunu bulmaya çalışmaktan daha önemlidir ve karşısındakileri inandırmak için daha önce öğrendiği nedenleri ve kanıtları kullanır.</td><td>• Öğrencinin eşitliği göstermek için izlediği adımları tekrar gözden geçirmesi.</td></tr>
<tr><td>Sembolik</td><td>Öğrenci anlamını kavramadan, problem durumuna yönelik anlaşılır imgeler olmadan ispat yapar örneğin $\sqrt[3]{a}+\sqrt[5]{b}=\sqrt[15]{a+b}$ ya da $x^3$=3.x ya da a.$\frac{c}{d}=\frac{a.c}{a.d}$ gibi.</td><td>• f: A→B birebir ve örten, g: B→C birebir ve örten olduğuna gore s(A)=s(B)=s(C) olduğu için gof(x): A→C birebir ve örtendir.</td></tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Deneysel Kanıt Şemaları** | **Sezgisel** | Öğrenci duyguları ile hareket ederek bir durumun doğru olduğunu ifade etmektedir ancak bunun için sağlam bir dayanak bulamamaktadır. Ayrıca ispat yaparken görsellikten de yararlanmaktadır. | • Her bir fonksiyon ayrı ayrı birebir ve örten ise bileşke fonksiyonları da birebir ve örten olur diye düşünüyorum şeklinde ifadeler kullanması |
| | **Temel Örnekler** | Öğrenci ispat yaparken genellikle daha önceden öğrendiği bir veya daha çok örneği kullanır zaman zaman aksi örnekleri de kullanabilmektedir. Sayısal örnekler vererek ispat yapma yoluna da gidebilmektedir. | • $f: A \to B$ , $g: B \to C$ ve $gof: A \to C$<br>$f(x)=x^2$ olsun. $f: R \to R$ olur.<br>$A \to B$<br>$g(x)=x^3$ olsun. $g: R \to R$ olur.<br>$B \to C$<br>$gof(x)=g(f(x))=g(x^2)=(x^2)^3=x^5$<br>O halde $gof(x)= x^5$ , $gof: R \to R$<br>$A \to C$<br>•<br><br><br>• $f: A \to B$ birebir ve örten ise A daki bütün elemanlar B kümesindeki bütün elemanlarla eşleşmiştir. İki kümede de açıkta eleman yoktur ve her bir elemanın görüntüleri birbirinden farklıdır. , $g: B \to C$ de ise B deki bütün elemanlar açıkta kalmayacak şekilde C'nin tüm elemanlarıyla eşleşmiştir. İki kümenin birleşmesiyle $gof: A \to C$ oluşur. İki kümede de açıkta eleman yoktur ve her bir eleman farklı bir elemanla eşleşmiştir. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Analitik Kanıt Şemaları** | **Dönüştürülebilen** | Öğrenci özelden genele ulaşmaya çalışır yani tümdengelimi kullanır. Amaca yönelik zihinsel operasyonları uygular; tanımlar, teoremler ve şekiller arasında geçişler yapar. | • Öğrencinin farklı farklı f(x) ve g(x) fonksiyonları tanımlayarak eşitliğin doğru olduğunu göstermesi ve bunun sonucunda bir genellemeye ulaşarak bu eşitliğin her zaman doğru olduğunu göstermesi. |
| | **Aksiyomatik** | Öğrenci tanımları, teoremleri, neden-sonuç ilişkilerini kullanır ve bunlara ek olarak kendisi de alternatif aksiyomlar sunabilir. | • f: A→B ve g: B→C fonksiyonları verilsin. f ve g fonksiyonları 1-1 ve örten ise gof: A→C fonksiyonunun da 1-1 ve örten olduğunu göstermek için,<br><br>i) gof:A→C fonksiyonunun örten olduğunu yani C'deki her elemanın gof bileşkesi altında A'daki bir elemanın görüntüsü olduğunu göstermek gerekir.<br>c∈C olsun, g örten olduğundan<br>g(b)=c olacak şekilde $\exists b \in B$ vardır.<br>f de örten olduğundan f(a)=b olacak şekilde $\exists a \in A$ vardır.<br>Şu halde c=g(b)=g(f(a))=gof(a) elde edilir.<br><br>ii)$a_1,a_2 \in A$ için gof($a_1$)= gof($a_2$)olsun.<br>Bileşke tanımından ve g ile f nin birebir oluşlarından<br>$g(f(a_1))= g(f(a_2)) \Longrightarrow f(a_1)= f(a_2) \Longrightarrow a_1= a_2$<br>elde edilir.<br>Şu halde gof bileşke fonksiyonu da birebirdir. |

**5.Problem**

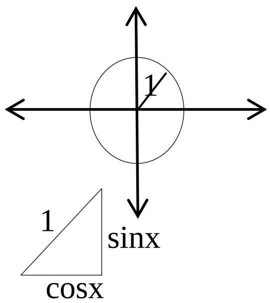
| $\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$ olduğunu gösteriniz. |
|---|

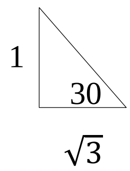
| **Kanıt Şemaları** | | **Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri** | **Problemin Değerlendirilmesi** |
|---|---|---|---|
| **Dışsal Kanıt Şemaları** | **Otorite** | Öğrenci ispatı öğretmenin, kitabın ya da bir başka otoritenin söyledikleri doğrultusunda yapmaktadır ve sonucu kurallara dayandırarak anlamlandırmadan kabul etmektedir. | • $\log_x \frac{a}{b} = \frac{\log_x a}{\log_x b}$ (bölümün logaritması) $= \log_x a - \log_x b$<br>• Öğrencinin bu ifadeyi bir kural olarak görüp ezberlediğini söylemesi bu yüzden ispatının açık olduğunu belirtmesi. |
| | **Alışkanlık Edinilmiş** | Öğrenci için doğruları göstermek zihnini çalıştırarak ispat yolunu bulmaya çalışmaktan daha önemlidir ve karşısındakileri inandırmak için daha önce öğrendiği nedenleri ve kanıtları kullanır. | • Öğrencinin eşitliğin doğruluğunu gösterdikten sonra ispatı bu yoldan yapabildiğim için böyle yaptım şeklinde açıklama yapması. |
| | **Sembolik** | Öğrenci anlamını kavramadan, problem durumuna yönelik anlaşılır imgeler olmadan ispat yapar örneğin $\sqrt[3]{a} + \sqrt[5]{b} = \sqrt[15]{a+b}$ ya da $x^3=3.x$ ya da $a.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{a.d}$ gibi. | • $\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$ ifadesini logx tabanından kurtarırsak $\log \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$ kalır. $\log \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$ dir. |
| **Deneysel Kanıt Şemaları** | **Sezgisel** | Öğrenci duyguları ile hareket ederek bir durumun doğru olduğunu ifade etmektedir ancak bunun için sağlam bir dayanak bulamamaktadır. Ayrıca ispat yaparken görsellikten de yararlanmaktadır. | • Bu eşitliğin doğru olduğunu bildiğini söylemesi ancak nasıl gösterileceğini bulamaması.<br>• Böyle olması gerekiyor, doğru olmalı şeklinde ifadeler kullanması. |

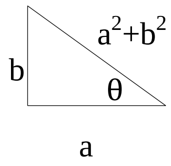
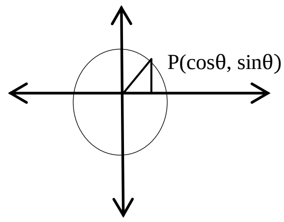
| | | | |
|---|---|---|---|
| | Temel Örnekler | Öğrenci ispat yaparken genellikle daha önceden öğrendiği bir veya daha çok örneği kullanır zaman zaman aksi örnekleri de kullanabilmektedir. Sayısal örnekler vererek ispat yapma yoluna da gidebilmektedir. | • x=10, a=$10^3$, b=$10^2$ alalım.<br>$\log_{10}\frac{10^3}{10^2}$=$\log_{10} 10 = 1$<br>$\log_{10} 10^3 - \log_{10} 10^2$=3-2=1<br><br>• $\log_x a$=k a=$x^k$<br>$\log_x b$=t , b=$x^t$<br>$\log_x \frac{x^k}{x^t}$=$\log_x x^k$-$\log_x x^k$<br>$\log_x x^{k-t}$=$\log_x x^k$-$\log_x x^k$<br>k-t=k-t |
| Analitik Kanıt Şemaları | Dönüştürülebilen | Öğrenci özelden genele ulaşmaya çalışır yani tümdengelimi kullanır. Amaca yönelik zihinsel operasyonları uygular; tanımlar, teoremler ve şekiller arasında geçişler yapar. | • Öğrencinin farklı a,b,x değerleri için eşitliğin doğru olduğunu göstermesi ve bir genellemeye ulaşarak bu ifadenin her zaman doğru olduğunu belirtmesi. |
| | Aksiyomatik | Öğrenci tanımları, teoremleri, neden-sonuç ilişkilerini kullanır ve bunlara ek olarak kendisi de alternatif aksiyomlar sunabilir. | • $\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$<br>=$\log_x a + \log_x \frac{1}{b}$<br>=$\log_x a.\frac{1}{b} = \log_x \frac{a}{b}$<br><br>• $x^p = a\ x^q = b$ olsun.<br>$x^p = a \Longrightarrow$ p=$\log_x a$<br>$x^q = b \Longrightarrow$ q=$\log_x b$<br>$\frac{a}{b} = \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$<br>$\log_x \frac{a}{b} = p - q$<br>$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$ |

**6.Problem**

| |
|---|
| $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ olduğunu gösteriniz. |

<table>
<tr><th colspan="2">Kanıt Şemaları</th><th>Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri</th><th>Problemin Değerlendirilmesi</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Dışsal Kanıt Şemaları</td><td>Otorite</td><td>Öğrenci ispatı öğretmenin, kitabın ya da bir başka otoritenin söyledikleri doğrultusunda yapmaktadır ve sonucu kurallara dayandırarak anlamlandırmadan kabul etmektedir.</td><td><br>Yarıçap 1 olduğundan Pisagor teoremini uygularsak $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ olur.</td></tr>
<tr><td>Alışkanlık Edinilmiş</td><td>Öğrenci için doğruları göstermek zihnini çalıştırarak ispat yolunu bulmaya çalışmaktan daha önemlidir ve karşısındakileri inandırmak için daha önce öğrendiği nedenleri ve kanıtları kullanır.</td><td>• Öğrencinin eşitliğin doğruluğunu yaptığı işlemleri kontrol ederek göstermesi.<br>• Öğrencinin verilen eşitliğin doğruluğunu gösterdikten sonra biz buna benzer ifadeleri hep böyle ispatlarız demesi.</td></tr>
<tr><td>Sembolik</td><td>Öğrenci anlamını kavramadan, problem durumuna yönelik anlaşılır imgeler olmadan ispat yapar örneğin $\sqrt[3]{a} + \sqrt[5]{b} = \sqrt[15]{a+b}$ ya da $x^3=3.x$ ya da $a.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{a.d}$ gibi.</td><td>• x ve y tümler açılar olmak üzere $\cos^2 x + \sin^2 y = 1$ olarak bu eşitliği ispatlamaya çalışması.</td></tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Deneysel Kanıt Şemaları** | **Sezgisel** | Öğrenci duyguları ile hareket ederek bir durumun doğru olduğunu ifade etmektedir ancak bunun için sağlam bir dayanak bulamamaktadır. Ayrıca ispat yaparken görsellikten de yararlanmaktadır. | • Bu eşitliğin doğru olduğunu biliyorum ama nasıl gösterebileceğimi bilemiyorum şeklinde ifadeler kullanması |
| | **Temel Örnekler** | Öğrenci ispat yaparken genellikle daha önceden öğrendiği bir veya daha çok örneği kullanır zaman zaman aksi örnekleri de kullanabilmektedir. Sayısal örnekler vererek ispat yapma yoluna da gidebilmektedir. | • $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$<br>cosa=x ve sina=y<br>$\cos^2 a+\sin^2 a+2.\sin a.\cos a=1+2.\sin a.\cos a$<br>$(\cos a+\sin a)^2= 1+2.\sin a.\cos a$<br>$(x+y)^2=1+2xy$<br>$x^2+2xy+y^2=1+2xy$<br>$x^2+y^2=1$<br><br>• $\theta = 30$ olsun.<br><br><br>$\cos \theta = \sqrt{3}/2$<br>$\cos^2 \theta = 3/4$<br>$\sin \theta = 1/2$<br>$\sin^2 \theta = 1/4$<br>$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ |
| **Analitik Kanıt Şemaları** | **Dönüştürülebilen** | Öğrenci özelden genele ulaşmaya çalışır yani tümdengelimi kullanır. Amaca yönelik zihinsel operasyonları uygular; tanımlar, teoremler ve şekiller arasında geçişler yapar. | • Öğrencinin farklı θ değerleri için sonuçlara ulaşarak genellemeye varması ve eşitliğin doğruluğunu göstermesi. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **Aksiyomatik** | Öğrenci tanımları, teoremleri, neden-sonuç ilişkilerini kullanır ve bunlara ek olarak kendisi de alternatif aksiyomlar sunabilir. | <br>• $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$<br>$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$<br>$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}$<br>$= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$<br><br>• Merkezi orjinde olan birim çember ve bu çember üzerinde olan bir P noktası alalım.Bu P noktasının apsisine θ açısının kosinüsü, ordinatına θ açısının sinüsü denir.Yani P(cosθ, sinθ) olur.<br><br>P noktası birim çember üzerinde olduğundan<br>$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ ve $-1 \leq \sin\theta \leq 1$<br>Birim çemberin denklemi $x^2+y^2=1$ olduğundan,<br>$x^2+y^2=1$<br>$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$<br>$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ |

**7.Problem**

| |
|---|
| $a_1 > 0$ , $a_2 > 0$ ve $\lambda_1 < \lambda_2$ olduğuna göre<br>$\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} = 0$<br>denkleminin $\lambda_1$ ve $\lambda_2$ arasında bir reel kökünün bulunduğunu gösteriniz. |

<table>
<tr><th colspan="2">Kanıt Şemaları</th><th>Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri</th><th>Problemin Değerlendirilmesi</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Dışsal Kanıt Şemaları</td><td>Otorite</td><td>Öğrenci ispatı öğretmenin, kitabın ya da bir başka otoritenin söyledikleri doğrultusunda yapmaktadır ve sonucu kurallara dayandırarak anlamlandırmadan kabul etmektedir.</td><td>• $\frac{a_1(x-\lambda_2)+a_2(x-\lambda_1)}{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)} = 0$<br>$a_1x - a_1\lambda_2 + a_2x - a_2\lambda_1 = 0$<br>$x(a_1 + a_2) - a_1\lambda_2 - a_2\lambda_1 = 0$<br>$x(a_1 + a_2) = a_1\lambda_2 + a_2\lambda_1$<br>$x = \frac{a_1\lambda_2 + a_2\lambda_1}{a_1 + a_2}$<br>devamını getirememesi<br><br>• $a_1 > 0$ , $a_2 > 0$ ve $\lambda_1 < \lambda_2$<br>$\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} = 0$<br>$(x-\lambda_2)$ $(x-\lambda_1)$<br><br>$\frac{xa_1 - a_1\lambda_2 + xa_2 - a_2\lambda_1}{(x-\lambda^1).(x-\lambda_2)} = 0$<br>$a_1.(x-\lambda_2) + a_2(x-\lambda_1) = 0$<br>$a_1.(x-\lambda_2) = 0$ ve $a_2(x-\lambda_1) = 0$<br>$a_1 = 0$ $x-\lambda_2 = 0$ ve $a_2 = 0$ $x-\lambda_1 = 0$<br>$x = \lambda_2$ $x = \lambda_1$</td></tr>
<tr><td>Alışkanlık Edinilmiş</td><td>Öğrenci için doğruları göstermek zihnini çalıştırarak ispat yolunu bulmaya çalışmaktan daha önemlidir ve karşısındakileri inandırmak için daha önce öğrendiği nedenleri ve kanıtları kullanır.</td><td>• $\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} = \frac{a_1(x-\lambda_2)+a_2(x-\lambda_1)}{(x-\lambda_1).(x-\lambda_2)}$<br><br>$x=\lambda_1$ ve $x=\lambda_2$<br><br>$\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{x} & & \boldsymbol{\lambda_1} \quad \boldsymbol{\lambda_2} & \\ \hline & + & - & + \end{array}$<br><br>$\lambda_1 < x < \lambda_2$</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Sembolik</td>
<td>Öğrenci anlamını kavramadan, problem durumuna yönelik anlaşılır imgeler olmadan ispat yapar örneğin $\sqrt[3]{a}+\sqrt[5]{b}=\sqrt[15]{a+b}$ ya da $x^3=3.x$ ya da $a.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{a.d}$ gibi.</td>
<td>• $\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}=$<br>$\frac{a.(x-\lambda_2)+a(x-\lambda_1)}{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)}=\frac{2ax-a(\lambda_1+\lambda_2)}{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)}$<br>$2ax-a(\lambda_1+\lambda_2)=0$<br>$a(2x-(\lambda_1+\lambda_2))=0$<br>$2x=\lambda_1+\lambda_2$<br>$x=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$<br>olup x, $\lambda_1 ve\ \lambda_2$ arasında bir sayı olur.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Deneysel Kanıt Şemaları</td>
<td>Sezgisel</td>
<td>Öğrenci duyguları ile hareket ederek bir durumun doğru olduğunu ifade etmektedir ancak bunun için sağlam bir dayanak bulamamaktadır. Ayrıca ispat yaparken görsellikten de yararlanmaktadır.</td>
<td>• $\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}=\frac{a_1(x-\lambda_2)+a_2(x-\lambda_1)}{x^2-(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1\lambda_2}$<br>$=\frac{a_1x-a_1\lambda_2+a_2x-a_2\lambda_1}{x^2-(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1\lambda_2}$<br>$=\frac{a_1x-a_1\lambda_2+a_2x-a_2\lambda_1}{x^2-(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1\lambda_2}$<br>$=\frac{x(a_1+a_2)-a_1\lambda_2-a_2\lambda_1}{x^2-(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1\lambda_2}$<br>$x(a_1+a_2)-(a_1\lambda_2+a_2\lambda_1)=0$<br>$x=\frac{a_1\lambda_2+a_2\lambda_1}{a_1+a_2}$ olur.<br>$\lambda_1<\frac{a_1\lambda_2+a_2\lambda_1}{a_1+a_2}<\lambda_2$ olmalı.</td>
</tr>
<tr>
<td>Temel Örnekler</td>
<td>Öğrenci ispat yaparken genellikle daha önceden öğrendiği bir veya daha çok örneği kullanır zaman zaman aksi örnekleri de kullanabilmektedir. Sayısal örnekler vererek ispat yapma yoluna da gidebilmektedir.</td>
<td>• $\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}=0$<br>$(x-\lambda_2)\ (x-\lambda_1)$<br>$x(a_1+a_2)-a_1\lambda_2-a_2\lambda_1=0$<br>$x(a_1+a_2)=a_1\lambda_2+a_2\lambda_1$<br>$a_1=2$, $a_2=1$, $\lambda_1=3$, $\lambda_2=4$ olsun.<br>x.3=2.4+1.3<br>3x=11<br>x=11/3 yani 3<11/3< 4 olur. O halde bu denklemin bir kökü $\lambda_1$ ile $\lambda_2$ arasındadır.</td>
</tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Analitik Kanıt Şemaları** | **Dönüştürülebilen** | Öğrenci özelden genele ulaşmaya çalışır yani tümdengelimi kullanır. Amaca yönelik zihinsel operasyonları uygular; tanımlar, teoremler ve şekiller arasında geçişler yapar. | • $a_1$, $a_2$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ ve x için farklı değerler vererek denklemin reel kökünün $\lambda_1$, $\lambda_2$ değerleri arasında kaldığını göstermesi. |
| | **Aksiyomatik** | Öğrenci tanımları, teoremleri, neden-sonuç ilişkilerini kullanır ve bunlara ek olarak kendisi de alternatif aksiyomlar sunabilir. | • $\frac{a_1}{x-\lambda_1} = -\frac{a_2}{x-\lambda_2}$<br>$a_1x - a_1\lambda_2 = -a_2x + a_2\lambda_1$<br>$a_1.\,(x-\lambda_2) = a_2(-x+\lambda_1)$<br>$a_1$ ve $a_2$ sayılarının işaretleri birbirine eşit olduğu için parantez içindeki ifadelerin işaretleri de birbirine eşit olmalıdır.<br>$x-\lambda_2 > 0$ ve $\lambda_1 - x > 0$ ; $x > \lambda_2$ ve $\lambda_1 > x$<br>$x-\lambda_2 < 0$ ve $\lambda_1 - x < 0$ ; $x < \lambda_2$ ve $\lambda_1 < x$<br>$\lambda_1 > x > \lambda_2$ ya da $\lambda_1 < x < \lambda_2$ olur.<br>$x_1 < x_2$ olduğundan $\lambda_1 < x < \lambda_2$ dir. |

**8.Problem**

| |
|---|
| a, b, c birbirinden farklı sayılar olmak üzere, bir P(x) çok terimlisi x-a, x-b, x-c ile ayrı ayrı bölünebilirse (x-a).(x-b).(x-c) çarpımı ile de bölünebilir ifadesinin doğruluğunu gösteriniz. |

| **Kanıt Şemaları** | | **Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri** | **Problemin Değerlendirilmesi** |
|---|---|---|---|
| **Dışsal Kanıt Şemaları** | **Otorite** | Öğrenci ispatı öğretmenin, kitabın ya da bir başka otoritenin söyledikleri doğrultusunda yapmaktadır ve sonucu kurallara dayandırarak anlamlandırmadan kabul etmektedir. | • Öğrencinin bu ifadeyi derste işlediklerini ve o yüzden ezbere bildiğini belirten açıklamalar yapması |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **Alışkanlık Edinilmiş** | Öğrenci için doğruları göstermek zihnini çalıştırarak ispat yolunu bulmaya çalışmaktan daha önemlidir ve karşısındakileri inandırmak için daha önce öğrendiği nedenleri ve kanıtları kullanır. | • Öğrencinin eşitliğin doğruluğunu gösterdikten sonra ispatı bu yoldan yapabildiğim için böyle yaptım şeklinde açıklama yapması. |
| | **Sembolik** | Öğrenci anlamını kavramadan, problem durumuna yönelik anlaşılır imgeler olmadan ispat yapar örneğin $\sqrt[3]{a}+\sqrt[5]{b}=\sqrt[15]{a+b}$ ya da $x^3$=3.x ya da $a.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{a.d}$ gibi. | • P(x)=k.(x-a)<br>P(x)=l.(x-b)<br>P(x)=m.(x-c)<br><br>P(x).P(x).P(x)=(x-a).k.(x-b).l.(x-c).m<br><br>$\sqrt[3]{P^3(x)}=\sqrt[3]{(x-a).k.(x-b).l(x-c).m}$<br><br>P(x)= $\sqrt[3]{(x-a).(x-b).(x-c).k.l.m}$<br><br>P(x)= $(x-a).(x-b).(x-c).R$ |
| **Deneysel Kanıt Şemaları** | **Sezgisel** | Öğrenci duyguları ile hareket ederek bir durumun doğru olduğunu ifade etmektedir ancak bunun için sağlam bir dayanak bulamamaktadır. Ayrıca ispat yaparken görsellikten de yararlanmaktadır. | • Öğrencinin eşitliğin doğru olduğunu düşünmesi fakat herhangi bir açıklama yaparak doğru olduğunu gösterememesi. |
| | **Temel Örnekler** | Öğrenci ispat yaparken genellikle daha önceden öğrendiği bir veya daha çok örneği kullanır zaman zaman aksi örnekleri de kullanabilmektedir. Sayısal örnekler vererek ispat yapma yoluna da gidebilmektedir. | • P(x) çok terimlisi ayrı ayrı (x-a), (x-b) ve (x-c) ifadelerine bölünebiliyorsa<br>P(x) = (x-a).(x-b).(x-c)<br>çarpımına da bölünebilir çünkü bu çarpma işlemi ve sadeleştirme yapabiliriz.<br>Mesela P(x)= (x-a).(x-b).(x-c) olsun.<br>P(x)'i (x-a)'ya böldüğümüzde (x-b).(x-c) bölüm olur. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Analitik Kanıt Şemaları** | **Dönüştürülebilen** | Öğrenci özelden genele ulaşmaya çalışır yani tümdengelimi kullanır. Amaca yönelik zihinsel operasyonları uygular; tanımlar, teoremler ve şekiller arasında geçişler yapar. | • Öğrencilerin x, a,b ve c ifadelerine sayısal olarak değerler verip her biri için doğruluğu sağlandıktan sonra genellemeye varması. |
| | **Aksiyomatik** | Öğrenci tanımları, teoremleri, neden-sonuç ilişkilerini kullanır ve bunlara ek olarak kendisi de alternatif aksiyomlar sunabilir. | • $P(x)$ çok terimlisi $(x-a)$ ile bölünebildiği için<br><br>$P(x)=(x-a).q_1(x)\ldots(1)$ şeklinde yazılabilir.<br>$P(x)$ çok terimlisi $(x-b)$ ile de bölünebildiğine göre<br>$P(b)=0$ veya $P(b)=(b-a).q_1(b)=0$ dır.<br>$(b-a).q_1(b)=0$ olabilmesi için çarpanlardan birinin sıfır olması gerekir.<br>Hipotezden $b-a\neq 0$ olduğu için $q_1(b)=0$'dır.<br><br>Buradan $q_1(x)$'in $(x-b)$ ile bölünebileceği anlaşılır. O halde<br>$q_1(x)=(x-b).q_2(x)\ldots(2)$ yazılabilir.<br><br>$q_1(x)$'in bu değeri (1) de yerine konulursa<br>$P(x)=(x-a).(x-b)q_2(x)$ elde edilir.<br><br>$P(x)$ çok terimlisi ayrıca $(x-c)$ ile de bölünebilir. Bundan dolayı $P(c)=0$ veya<br>$P(c)=(c-a).(c-b).q_2(c)=0$ dır.<br><br>Hipotezden $c-a\neq 0$ ve $c-b\neq 0$ dır. Buna göre $(c-a).(c-b)q_2(c)q_1(b)=0$ çarpımının 0 olabilmesi için $q_2(c)=0$ olmalıdır.<br><br>Buradan $q_2(x)$'in $(x-c)$ ile bölünebileceği sonucuna varılır. O halde<br>$q_2(x)=(x-c).Q(x)$ yazılabilir.<br><br>$q_2(x)$'in bu değeri (2) de yerine konulursa $P(x) = b(x-a).(x-b).(x-c).Q(x)\ldots(3)$ elde edilir.<br>Bu özdeşlik $P(x)$ çok terimlisinin iki terimli üç çarpan çarpımı ile bölünebildiğini ve bölümün $Q(x)$ olduğunu gösterir. |

## 9.Problem

| |
|---|
| W= r.( cosθ + i.sinθ) ve $n \in N^{+}$ olmak üzere $Z^{n}$ =W denkleminin köklerinin Z= $\sqrt[n]{r}.\,[\cos\left(\frac{\theta+2k\Pi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{\theta+2k\Pi}{n}\right)]$ , k∈ $(0,1,2,\ldots.(n-1)$, olduğunu gösteriniz. |

| **Kanıt Şemaları** | | **Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri** | **Problemin Değerlendirilmesi** |
|---|---|---|---|
| **Dışsal Kanıt Şemaları** | **Otorite** | Öğrenci ispatı öğretmenin, kitabın ya da bir başka otoritenin söyledikleri doğrultusunda yapmaktadır ve sonucu kurallara dayandırarak anlamlandırmadan kabul etmektedir. | • Öğrencinin daha önce kitapta bu formülü gördüğüm için soruda verilen değerleri yazarak sonuca ulaşabilirim şeklinde açıklamada bulunması. |
| | **Alışkanlık Edinilmiş** | Öğrenci için doğruları göstermek zihnini çalıştırarak ispat yolunu bulmaya çalışmaktan daha önemlidir ve karşısındakileri inandırmak için daha önce öğrendiği nedenleri ve kanıtları kullanır. | • Öğrencinin eşitliğin doğruluğunu yaptığı işlemleri kontrol ederek göstermesi.<br>• Öğrencinin verilen eşitliğin doğruluğunu gösterdikten sonra biz buna benzer ifadeleri hep böyle ispatlarız demesi. |
| | **Sembolik** | Öğrenci anlamını kavramadan, problem durumuna yönelik anlaşılır imgeler olmadan ispat yapar örneğin $\sqrt[3]{a}+\sqrt[5]{b}=\sqrt[15]{a+b}$ ya da $x^3=3.x$ ya da $a.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{a.d}$ gibi. | • Öğrencinin verilen bir karmaşık sayının köklerini bulurken formüldeki Z= $\sqrt[n]{r}.\,[\cos\left(\frac{\theta+2k\Pi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{\theta+2k\Pi}{n}\right)]$ kök derecesine (n) dikkat etmeden hep karekök alınacakmış gibi düşünüp sonuca ulaşması. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Deneysel Kanıt Şemaları** | **Sezgisel** | Öğrenci duyguları ile hareket ederek bir durumun doğru olduğunu ifade etmektedir ancak bunun için sağlam bir dayanak bulamamaktadır. Ayrıca ispat yaparken görsellikten de yararlanmaktadır. | • Herhangi bir işlem yapmadan denklemin kökleri bu yolla bulunacak gibi görünüyor şeklinde açıklama yapması. |
| | **Temel Örnekler** | Öğrenci ispat yaparken genellikle daha önceden öğrendiği bir veya daha çok örneği kullanır zaman zaman aksi örnekleride kullanabilmektedir. Sayısal örnekler vererek ispat yapma yoluna da gidebilmektedir. | • W=16.cis180 olsun.<br>1.kök $\sqrt{16}$ .cis($\frac{180}{2}$) =4.cis 90<br>2.kök $\sqrt{16}$ .cis($\frac{180}{2}+180$) =4.cis 270<br>• $z^n = w$<br>z= $\sqrt[n]{r}\ [\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) i.\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})]^{1/n}$<br>$z^n=(\sqrt[n]{r})^n\ [\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}.n\right) i.\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n}.n)]^{\frac{1}{n}.n}$<br>$z^n$ = r. $[\cos(\theta+2k\pi)\ i.\sin(\theta+2k\pi)]$<br>$z^n$ = r. $(\cos\theta + i.sin\theta) = w$ |
| **Analitik Kanıt Şemaları** | **Dönüştürülebilen** | Öğrenci özelden genele ulaşmaya çalışır yani tümdengelimi kullanır. Amaca yönelik zihinsel operasyonları uygular; tanımlar, teoremler ve şekiller arasında geçişler yapar. | • r, θ ve n’ye farklı değerler vererek denklemin köklerine ulaşılması ve çeşitli kökler bulduktan sonra bir genellemeye ulaşılması. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **Aksiyomatik** | Öğrenci tanımları, teoremleri, neden-sonuç ilişkilerini kullanır ve bunlara ek olarak kendisi de alternatif aksiyomlar sunabilir. | • Z=$\|Z\|$(cosθ + i.sinθ)<br>$Z^n$ =W denkleminin kökleri<br>$Z^n$ =W<br>$\Longrightarrow [\|Z\|(\cos\theta + i.\sin\theta)]^n$ = r.( cosθ + i.sinθ)<br><br>$\Longrightarrow \|Z\|^n(\cos n\theta + i.\sin n\theta)$ = r.( cosθ + i.sinθ)<br><br>Buradan $\|Z\|^n = r$ ve $n\theta = \theta + 2k\pi$ (k∈Z) yazılabilir.<br>$\|Z\|^n = r \Longrightarrow \|Z\| = \sqrt[n]{r}$ dir.<br><br>$n\theta = \theta + 2k\pi \Longrightarrow \theta = \frac{\theta+2k\pi}{n}$ elde edilir. O halde<br><br>Z= $\sqrt[n]{r}.[\cos\left(\frac{\theta+2k\Pi}{n}\right) + i.\sin\left(\frac{\theta+2k\Pi}{n}\right)]$ |

## EK2

Değerli öğrenciler,

Bu anket “matematiksel ispat yapma” ya yönelik görüşlerinizi almak amacıyla hazırlanmıştır. Bu araştırmadan elde edilen veriler, bilimsel bir araştırmada kullanılacaktır. Lütfen soruları dikkatlice okuyarak eksiksiz yanıtlayınız. Teşekkür ederiz.

Bölüm: ……….............           Sınıf: ………

| İFADE | | Tamamen katılıyorum | Katılıyorum | Kararsızım | Katılmıyorum | Kesinlikle katılmıyorum. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Matematiksel bir ispat olguları hem gerçekler, hem de açıklar. | | | | | |
| 2. | Matematiksel bir sonuç ispatlandığında doğru olduğuna inanırım. | | | | | |
| 3. | Bir sonucun örnekle gösterildiğini görmek, o sonucun neden doğru olduğunu anlamama her zaman yardımcı olmaz. | | | | | |
| 4. | İspat, teorik matematik için vazgeçilmezdir. | | | | | |
| 5. | Matematikte sadece örnekler yardımı ile bir şeyin doğru olup olmadığını anlayabiliriz. | | | | | |
| 6. | İspatları neden yapmamız gerektiğini <u>anlamıyorum</u>: derste gördüğümüz bütün sonuçlar daha önceden ünlü matematikçiler tarafından şüphe götürmez bir şekilde | | | | | |
| 7. | İspatlar bazen pek de açıkça anlaşılmayan stratejiler içerirler. | | | | | |
| 8. | Eğer matematikte bir sonuç açıkça doğruysa ispatlanmasının bir anlamı yoktur. | | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9. | Matematiksel ispat yapmayı seviyorum. | | | | | |
| 10. | Kendi kendime ispat yapabilme becerime güveniyorum. | | | | | |
| 11. | Bir ispatın aşamaları üzerinde çalışmak, neden doğru olduğunu anlamama yardımcı oluyor. | | | | | |
| 12. | Bir teoremin farklı ispatlarını görmek onu daha iyi anlamama yardımcı oluyor. | | | | | |
| 13. | Matematiksel bir ispat, başka matematiksel sonuçlara da bağlıdır. | | | | | |
| 14. | İspatları anlamada genellikle zorlanıyorum. | | | | | |
| 15. | İspat yapmak bir anlamda problem çözmedir. | | | | | |
| 16. | Matematiksel ispatları yalnızca profesyonel matematikçiler yapabilir. | | | | | |
| 17. | Bence teoremi (yada önermeyi) bilmek ispatını yapmaktan daha önemlidir. | | | | | |
| 18. | İspatlarla uğraşmak çok sıkıcıdır. | | | | | |
| 19. | Genelde bir teoremin ne ifade ettiğini anlamama rağmen ispatını anlamada zorlanıyorum. | | | | | |
| 20. | Bir ispatı ancak sınıfta hoca yapınca anlayabiliyorum. | | | | | |