ZAYIF DİSİPATİF CAMASSA-HOLM DENKLEMİNİN PATLAMASI OLAYI ÜZERİNE

ON BLOW-UP PHENOMENA FOR THE WEAKLY DISSIPATIVE CAMASSA-HOLM EQUATION

CENK GEMİCİ

Prof. Dr. EMİL NOVRUZOV
Tez Danışmanı

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
Lisansüstü Eğitim–Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2015

CENK GEMİCİ'nin hazırladığı "**Zayıf Disipatif Camassa-Holm Denkleminin Patlaması Olayı Üzerine**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan

(Prof. Dr., Azer HANMEHMETLİ)

Danışman

(Prof. Dr., Emil NOVRUZOV)

Üye

(Doç. Dr., Ayşe Feza GÜVENİLİR)

Üye

(Doç. Dr., Canan KÖROĞLU)

Üye

(Doç. Dr., İsmet YURDUŞEN)

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

10/02/2015

Cenk GEMİCİ

ÖZET

ZAYIF DİSİPATİF CAMASSA-HOLM DENKLEMİNİN PATLAMASI OLAYI ÜZERİNE

Cenk GEMİCİ

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emil NOVRUZOV

Şubat 2015, 90 sayfa

Bu çalışmada, zayıf disipatif Camassa-Holm denklemi için Cauchy probleminin çözümünün patlaması incelenmiştir. Giriş bölümünde, incelediğimiz problem tanıtılmış ve benzer tipteki problemler üzerine diğer yazarların yapmış oldukları çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde, bu çalışmada kullanılan genel ve özel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde,

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x + 2ku_x + \lambda(u - u_{xx}) = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

zayıf disipatif Camassa-Holm denkleminin Cauchy problemi ele alınmıştır. Bu bölümdeki çalışmamız yerel çözümün varlığı ve tekliği ile çözümün k dispersiv katsayısına sürekli bağlılığı olmak üzere iki alt bölümde incelenmiştir. Dördüncü bölümde, belli koşullar altında Sobolev uzayında ele alınan problemin global çözümünün varlığı, k dispersiv katsayısının sıfır ve sıfırdan farklı olduğudurumlar için iki alt bölümde incelenmiştir. Beşinci bölümde, ele alınan problemin sonlu zamanda patlamasını garanti eden yeterli koşullar araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Zayıf Disipatif Camassa-Holm Denklemi, Cauchy Problemi, Yerel Çözümün Varlığı ve Tekliği, Global Çözümün Varlığı, Çözümün Patlaması.

ABSTRACT

ON BLOW-UP PHENOMENA FOR THE WEAKLY DISSIPATIVE CAMASSA-HOLM EQUATION

Cenk GEMİCİ

Master of Science, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Emil NOVRUZOV

February 2015, 90 pages

This study is devoted to the blow up of solutions of the Cauchy problem for the weakly dissipative Camassa-Holm equation. In introductory chapter, the problem we studied has been introduced and other authors' studies done on the type of similar problems are mentioned. In the second chapter, general and specific informations which were used in this study are given. In the third chapter, Cauchy problem for the equation,

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x + 2ku_x + \lambda(u - u_{xx}) = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

is considered. In this chapter, our study has been investigated in two sub-sections as local existence and uniqueness and constant commitment of solution to k dispersive coefficient. In the forth chapter, under certain conditions global existence for problem discussed in Sobolev space has been examined in two sub-sections for situations where k dispersive coefficient is 0 and different from 0. In the fifth chapter, the sufficient conditions which guarantee the blow-up of the solution of the problem under consideration in finite time have been considered.

Keywords: Weakly Dissipative Camassa-Holm Equation, Cauchy Problem, Local Existence and Uniqueness, Global Existence, Blow-up of Solution.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını benden esirgemeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde sürekli olarak yardımını gördüğüm, çalışmam boyunca ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu mütevazi tavır, sempatik yaklaşım, hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli tez danışman hocam Sayın Prof. Dr. Emil NOVRUZOV'a,

Ders dönemi boyunca engin bilgilerinden istifade ettiğim, bizlere her konuda deneyimleri ile yol gösteren ve akademik başarıları ile olduğu kadar şahsiyetleriyle de örnek olan Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma,

Yaşamım boyunca olduğu kadar öğrenimim boyunca da ilk öğretmenlerim olan benden maddi manevi hiçbir fedakarlığı esirgemeyen, her türlü sıkıntıma katlanan, beni ben yapan değerlerin oluşmasındaki en önemli varlıklarım olan ve bu çalışmamı başarıyla sonuçlandırmam konusunda beni her daim motive eden ayrıca başarılı olacağıma herzaman inanan cefakar anneme, babama ve ağabeyime,

Yaşamıma girdiği andan itibaren sevinç kaynağım olan, çalışmalarım boyunca tüm nazıma katlanan, ders çalışabilmem ve çalışmalarıma konsantre olabilmem için elinden gelen desteği esirgemeyen, yüksek lisans programımı başarıyla tamamlama konusunda en büyük destekçim olan, hayatın bana sunduğu en büyük hazine olarak nitelendirdiğim ve çok sevdiğim biricik eşim Hülya GEMİCİ' ye teşekkür ederim.

İçindekiler

1 GİRİŞ

Doğanın temel kanunlarının matematiksel olarak ifade edilebilmesi ve doğa olaylarının anlaşılabilmesi için öne sürülen modeller genel olarak lineer değildir. Bu yüzden oluşturulan bu modellerin bir çoğu lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlere dayanmaktadır.

1830'lu yıllardan itibaren birçok fizikçi ve matematikçi lineer olmayan dalga kuramının bir parçası olan sığ su rejimlerindeki tekil dalgaların (solitary waves) hareketlerine matematiksel modeller oluşturabilmek için çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmalarda, tekil dalgaların yayılımını ifade eden ve lineer olmayan denklemlerin başlangıç değer problemleri ele alınmış ve bu problemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği incelenmiştir.

1834 yılında İskoç mühendis John Scott Russell, Edinburgh yakınındaki bir kanalda ilerleyen büyük bir su kitlesi olarak tanımladığı bir tekil dalganın, yüksekliğinde ve şeklinde görülebilir bir değişme olmaksızın 2 km kadar yol aldığını gözlemlemiştir. John Scott Russell, bu gözleminden yola çıkarak tekil dalgalar üzerine yaptığı çalışmalardan elde ettiği tüm sonuçları 10 yıl sonra İngiliz Bilim Gelişme Kurumu'na rapor olarak sunmuştur [1]. Tekil dalgaların en önemli özelliğini Russell raporunda şöyle ifade etmiştir: Sığ su rejimlerinde suyun derinliğine oranla daha büyük dalga yüksekliğine sahip su dalgaları oluşmaktadır. Ayrıca bu dalgalar şekil ve hız özelliklerini kaybetmeden uzun mesafeleri katetmektedir. [1].

Bu çalışmanın ardından birçok matematikçi ve fizikçi sığ su rejimlerinde ortaya çıkan su dalgalarının bu durumunu anlayabilmek için çeşitli matematiksel modeller öne sürmüşlerdir.

John Scott Russell'ın bu gözlemi teorik olarak 1895 yılında Hollandalı iki matematikçi D. J. Korteweg ve G. de Vries tarafından çalışılmıştır. D. J. Korteweg ve G. de Vries bu olayın matematiksel teorisi üzerinde çalışarak suyun sığ bir tabakasının serbest yüzeyinde iki boyutlu, tekyönlü yayılan su dalgalarının hareketini modelleyen ve lineer olmayan bir kısmi türevli diferansiyel denklem elde etmişlerdir. Böylece Korteweg de Vries (KdV) denklemi, sığ bir kanalın yüzeyindeki su dalgalarının tekyönlü yayılımını ifade etmek için matematiksel bir model olarak ortaya çıkmıştır [2].

KdV denklemi,

$$u_t(x,t) - 6u(x,t)u_x(x,t) + u_{xxx}(x,t) = 0, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı olan $u(x,t)$ fonksiyonu için lineer olmayan dispersiv kısmi türevli diferensiyel denklemdir. $u(x,t)$ fonksiyonu, x konumunda ve t zamanındaki dalganın yüksekliğini ifade etmektedir [2].

KdV denkleminin c sabit hızı ile hareket eden ve dalga formunu koruyan bir özel çözümü

$$u(x,t) = f(X) = f(x - ct - \delta)$$

şeklinde bulunmuştur. Burada δ dalganın fazıdır ve keyfi bir sabit sayıdır. Bu dönüşüm sonucunda KdV denkleminin bir özel çözümü

$$u(x,t) = \frac{1}{2}c\ sech^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct - \delta)\right] \tag{1.2}$$

olacak şekilde elde edilir [3].

N. J. Zabusky ve M. D Kruskal, tekil dalgaların özelliklerini anlayabilmek için KdV denklemi üzerinde kapsamlı çalışmalar yaparak denklemin analitik çözümlerini elde etmişler ve bu çözümlerin davranışları hakkında önemli açıklamalar da bulunmuşlardır. Bu çalışmalar esnasında çarpıştıktan sonra hızlarını ve şekillerini (dalga formunu) koruyan tekil dalgalar tespit etmişlerdir. Böylece N. J. Zabusky ve M. D Kruskal, sabit bir hızla hareket ederken etkileşime giren ancak dalga formunu koruyarak kendi kendini güçlendiren tekil dalgalara "soliton", dalga formu $f(X)$ ile gösterilmek üzere (1.1) denkleminin dalga formunu koruyan (1.2) çözümlerine de "soliter dalga çözümleri" ya da "soliton çözümler" adını vermişlerdir [3].

Alternatif bir model oluşturabilmek için B. Benjamin, J. L. Bona ve J. J. Mahony tarafından bir çalışma yapılmıştır. Bu çalışma sonucunda KdV denklemi geliştirilerek Benjamin–Bona–Mahony (BBM) ya da bir diğer adıyla düzenli uzun dalga denklemi olarak isimlendirilen yeni bir denklem elde edilmiştir. Ayrıca bu denklemin çözümünün tekliği ve kararlılığı ispatlanmıştır [4].

BBM denklemi,

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

şeklindedir ve bu denklem de

$$u(x,t) = 3\frac{c^2}{1-c^2}\ sech^2\left(\frac{1}{2}cx - \frac{\frac{1}{2}ct}{1-c^2} + \delta\right)$$

olacak şekilde bir özel çözüme sahiptir [4].

BBM denkleminin KdV denkleminden ayrılan en önemli özelliği, BBM denkleminin tekil dalga çözümlerinin solitonlar olmamasıdır [5].

1981 yılında, KdV denklemininin bi-hamilton yapısı üzerine B. Fuchssteiner çalışmalar yapmıştır [6].

1990'lı yılara gelindiğinde R. Camassa ve D. Holm. sığ sularda oluşan tekil dalgaların hareketleri üzerine yeni bir model önermişlerdir. Camassa-Holm denklemi olarak bilinen bu denklem

$$u_t + 2ku_x - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

suyun sığ yerlerinde dalga hareketi için alternatif bir modeldir. Bu denklemde de $u(x,t)$ fonksiyonu, dibi düz bir yapıya sahip olan zemin üzerindeki suyun t zamanında ve x konumundaki yüksekliği, k katsayısı ise pozitif bir sayı olup denklemin dispersiv katsayısı olarak tanımlanmıştır [7], [8].

R. Camassa, D. Holm ve J. Hyman (1.4) denklemini KdV ve BBM denklemleriyle karşılaştırıp bu denklemler arasındaki benzer ve farklı yönleri tespit etmişlerdir. Yaptıkları çalışmada Camassa-Holm denkleminin diğer denklemlere göre en önemli farkını denklemin tekil dalga çözümlerinin zirveli solitonlara, kırılan dalgalara ve düzenli dalgalara sahip olması olarak açıklamışlardır [8], [28].

Camassa-Holm denklemin tekil dalgaları zirve noktasına sahiptir ve tekil dalga çözümleri düzgün solitonlar olup bu çözümler kararlıdır [8], [9], [11].

Camassa-Holm denklemi bi-hamilton yapıya sahiptir [6] ve tamamen integrallenebilirdir [8], [10].

Camassa-Holm denkleminin Hamilton yapısı ile ilgili olan en geniş kapsamlı çalışma A. Constantin tarafından gerçekleştirilmiştir [29].

Camassa-Holm denklemi $k = 0$ için yazılırsa

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

denklemi elde edilir.

(1.5) denkleminin tamamen integrallenebilirliği [13], [14] makalelerinde ele alınmıştır. Ayrıca A. Constantin, H. P. Mckean ve J. Escher periyodik Camassa-Holm denkleminin Cauchy problemi üzerine kapsamlı çalışmalar yapmışlardır [12], [24].

Bu çalışmaların bir diğer yönü ise (1.4) ve (1.5) denklemlerinin çözümlerinin patlaması (blow up) olayıdır. Genel olarak zaman, sonlu bir $T > 0$ limitine yaklaştığında çözümün (uygun normda) sonsuza gitmesi olayı ”blow up” olarak adlandırılır.

Blow up konusu özellikle 1950’lerde Nikolay Semenov’un yaptığı çalışmalar sonucunda elde ettiği ”zincir reaksiyon teorisi” ile ortaya çıkmıştır [15].

1960’larda özellikle S.Kaplan [16], H.Fujita [17], A. Friedman [18] ve R. T. Glassey [19] tarafından bu konuda daha kapsamlı çalışmalar yapılmıştır.

A. Constantin ve J. Escher başlangıç koşulunun geniş bir sınıfı için (1.4)’te verilen Camassa-Holm denkleminin Cauchy problemi için global çözümünün varlığını ve çözümün patlama olayını araştırarak yeni sonuçlar elde etmişlerdir. Ayrıca yaptıkları çalışmalarda Camassa-Holm denkleminin zayıf çözümünü öğrenmişlerdir [25], [27], [28].

A. Constantin, J. Escher ve L. Molinet (1.5) denkleminin Cauchy probleminin global çözümünün varlığı ve çözümün sonlu bir zamanda patlaması üzerine araştırmalar yapmışlardır. Çalışmalarının sonucunda herhangi bir $T > 0$ pozitif reel sayısı ile birlikte verilen u_0 başlangıç koşulu için $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ olmak üzere $y_0(x) := u_0(x) - u_{0xx}(x)$ ifadesinin pozitif olması durumunda (1.5) denkleminin $u \in C([0,T], H^1(\mathbb{R}))$ olacak şekilde global zayıf çözümünün varolduğunu keşfetmişlerdir. Bununla birlikte, $u_0(x) \in H^3(\mathbb{R})$ ve $u_0(x)$ tek fonksiyon olmak üzere eğer $u_{0x}(0) < 0$ şartı sağlanıyorsa (1.5) denkleminin Cauchy problemi için u_0 başlangıç koşulu ile incelenen çözümünün sonlu bir zamanda patladığını tespit etmişlerdir [25], [26].

Camassa-Holm denkleminin tekil dalga çözümlerinin varlığı ve çözümün patlaması üzerine yeni sonuçlar [20], [21], [22], [23] makalelerinde verilmiştir.

P. Zhang ve X. Y. Zheng tarafından yapılan çalışmalar sonucunda Camassa-Holm denkleminin başlangıç sınır değer problemi için çözümün patlaması olayı üzerine daha genel sonuçlar ede edilmiştir [31]. Aynı yıllarda, (1.4) denkleminin zayıf çözümünün varlığı ve tekliği üzerine çalışmalar da yapılmaya devam edilmiştir [32], [33], [34], [35], [36].

2000 yılında, A. A. Himonas ve G. Misiolek (1.4)’te verilen Camassa-Holm denkleminin bir modifikasyonu olan periyodik Cauchy probleminin yerel çözümünün varlığını ve tekliğini ayrıca aynı problemin global çözümünün varlığını da ispatlamışlardır [37].

Y. A. Li, P. J. Olver ve G. Misiolek $s > \frac{3}{2}$ olmak üzere H^s Sobolev uzayında sığ su dalgalarına bir model olarak ortaya çıkan nonlineer dispersiv dalga denkleminde yerel çözümün varlığını ve tekliğini ispatlamışlar ve problemin kuvvetli çözümlerinin sonlu bir zamanda patlamasına neden olan başlangıç koşulları üzerine çalışmalar yapmışlardır

[38], [39], [40].

S. Wu ile Z. Yin disipatif terim içeren Camassa- Holm denklemini

$$u_t - u_{txx} + 3uu_x + \lambda(u - u_{xx}) = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

ele almışlar ve bu denklemin Cauchy probleminin iyi tanımlılığını, global çözümünün varlığını ve çözümün patlaması olayını çalışmışlardır [41], [43], [44], [46], [47].

Ayrıca L. Tian, G. Gui, Y. Liu ve Y. Zhou, Camassa-Holm denkleminin bir modifikasyonu olan Dullin, Gottwald and Holm (DGH) denklemi üzerine çalışmalar yaparak elde ettikleri sonuçları [42], [45] çalışmalarında yayınlamışlardır.

E. Novruzov, [48], [49] çalışmalarında zayıf disipatif Camassa-Holm denklemi ile zayıf disipatif Dullin–Gottwald–Holm (DGH) denklemi için Cauchy probleminin pozitif kuvvetli çözümlerinin sonlu bir zamanda patlaması için yeterli koşullar elde etmiştir.

H. Qiaoyu, iki bileşenli zayıf disipatif Camassa-Holm denklem sisteminin Cauchy problemini ele alarak problemin yerel ve global çözümünün varlığını ispatlamıştır. Ayrıca sistemin kuvvetli çözümlerinin patlaması için bazı sonuçlar elde ederek kuvvetli çözümlerin patlama hızını tespit etmiştir [50].

A. A. Himonas ve C. Holliman, $(k+1)$. mertebeden lineer olmayan genelleştirilmiş Camassa-Holm denkleminin başlangıç değer problemi üzerinde çalışmalar yaparak $s > \frac{3}{2}$ için H^s Sobolev uzayında, problemin lokal çözümünün varlığını göstermişlerdir [51].

G. Yunxi ve L. Shaoyang, modifiye edilmiş iki bileşenli periyodik Camassa-Holm denklem sisteminin $s > \frac{7}{2}$ için H^s Sobolev uzayında lokal çözümünün varlığını ispatlamışlardır. Ayrıca sistemin global çözümünün olması için yeterli bir koşul elde etmişlerdir [52].

[53], çalışmasında keyfi dispersiyon katsayılı ve kompakt destekli başlangıç değere sahip olan disipatif Camassa-Holm denkleminin global çözümünün varlığını garanti edecek ve çözümün sonlu bir zamanda patlamasını sağlayacak basit koşullar elde edilmiştir.

Y. Wei, L. Yongsheng ve Z. Yimin, genelleştirilmiş Camassa-Holm denkleminin Cauchy problemi üzerinde çalışmalar yaparak problemin Besov uzayında lokal çözümünün varlığını göstermişlerdir. Ayrıca problemin çözümünün patlamasını garanti edecek bir kriter elde etmişlerdir [54].

Son zamanlarda, Camassa-Holm denkleminin Cauchy problemi ve bu problemin yerel çözümünün varlığı ve tekliği, global çözümünün varlığı ile çözümün patlaması olayı üzerine bir çok çalışmanın yapılmasına devam edilmektedir.

Bu tez üç ana bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde, H. Dai, K. Kwek, H. Gao ve C.Qu' nun birlikte hazırladıkları [55] makalesi incelenmiştir. Bu makaleye dayanarak çalışılan zayıf disipatif Camassa-Holm denklemi için Cauchy problemi

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} + 3uu_x + 2ku_x + \lambda(u - u_{xx}) = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, & (x,t) \in Q_T \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.7}$$

şeklinde olup burada $Q_T = \mathbb{R} \times [0,T]$'dir. Burada (1.7) probleminin yerel kuvvetli çözümünün var ve tek olduğu $W^{4,p}(\mathbb{R})$ uzayında gösterilmiştir. Ayrıca bu bölümde, (1.7)'de ele alınan problemin yerel kuvvetli çözümünün k dispersiv katsayısına sürekli bağlılığı da incelenmiştir. Böylece k dispersiv katsayısı için $k \to 0$ iken yerel kuvvetli çözümün limit altındaki davranışı araştırılmıştır. Bu araştırma,

$$\begin{cases} u_{kt} - u_{kxxt} + 3u_k u_{kx} + 2ku_{kx} + \lambda(u_k - u_{kxx}) = 2u_{kx}u_{kxx} + u_k u_{kxxx}, & (x,t) \in Q_T \\ u_k(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.8}$$

şeklindeki problem için ele alınmıştır. u_k bu problemin yerel kuvetli çözümüdür. Ayrıca $w_k = u_k - u_{kxx}$ alınırsa

$$\begin{cases} w_{kt} + u_k w_{kx} + \lambda w_k = -2u_{kx}(w_k + k), & (x,t) \in Q_T \\ w_k(x,0) = w_{k0}(x) := u_0(x) - u_{0_{xx}}(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.9}$$

problemi elde edilir. Çalışma (1.9) problemi üzerinden gerçekleştirilmiştir.

İkinci bölümde, [55] makalesi incelenmeye devam edilmiş ve (1.7)'de ele alınan zayıf disipatif Camassa-Holm denkleminin Cauchy problemi için global çözümün varlığı k dispersiv katsayısının 0 sayısına eşit olması durumunda araştırılmıştır. Çalışmamızdaki bu inceleme karakteristik eğriler yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Burada, zayıf disipatif Camassa-Holm denkleminin Cauchy problemi için global çözümün varlığı $k = 0$ için $w_0(x) = u_0(x) - u_{0xx}(x) \geq 0$ olmak üzere ve w_0 ın işaretinin değişmez olması koşulları altında elde edilmiştir.

Ayrıca yine bu bölümde, Y. Zhou ve H. Chen tarafından yazılan [56] makalesi ele alınmış ve incelenmiştir. İlk makalede $k = 0$ için çalışılan (1.7) problemi [56] makalesine dayanarak $k \neq 0$ olması koşulu ile yeniden çalışılmıştır. Yaptığımız çalışma sonucunda, $k \neq 0$ olması durumunda (1.7) probleminin global çözümünün varlığını kesin olarak garanti eden yeterli bir koşul elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, (1.7)'de ele alınan Camassa-Holm denkleminin Cauchy problemi için sonlu zamanda çözümün patlaması olayı ele alınmıştır. Yapılan bu çalışma sonucunda $k \neq 0$ olmak üzere, $\lambda = 0$ ve $\lambda \neq 0$ olacak şekilde iki ayrı durum için ele alınan problemin çözümünün sonlu zamanda patlamasını garanti eden yeterli koşullar ortaya konmuştur.

2 ÖNBİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar, teoremler, gösterimler, eşitsizlikler ve sonuçlar verilecektir.

Tanım 1 ***(Sınırlı Lineer Operatör)*** *$(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ normlu vektör uzaylar ve $T : D(T) \subset X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer $\forall x \in D(T)$ için*

$$\|T(x)\|_Y \leq C\,\|x\|_X$$

olacak şekilde x'e bağlı olmayan pozitif bir C reel sayısı varsa T operatörüne sınırlı lineer operatör denir [58].

Tanım 2 ***(Kapalı Lineer Operatör)*** *$(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ normlu vektör uzaylar ve $T : D(T) \subset X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer T'nin*

$$G(T) = \{(x, y) : x \in D(T), \quad Tx = y\} \subset X \times Y$$

şeklinde tanımlanan grafiği $X \times Y$ normlu uzayında kapalı ise T'ye bir kapalı lineer operatör denir [58].

Notasyon 3 *X ve Y normlu vektör uzaylar olsun. X'den Y üzerine bütün lineer dönüşümlerin kümesini $L(X, Y)$, X'den Y üzerine bütün sürekli (sınırlı) lineer dönüşümlerin kümesini ise $B(X, Y)$ ile göstereceğiz. X'den X üzerine bütün sürekli (sınırlı) lineer dönüşümlerin kümesini de $B(X, X)$ veya $B(X)$ ile göstereceğiz. X ve Y normlu vektör uzaylar ise o zaman $B(X, Y) \subseteq L(X, Y)$'dir.*

Tanım 4 *X ve Y normlu vektör uzaylar olsun. $\|.\| : B(X, Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$$

ile tanımlı ise $\|.\|$, $B(X, Y)$ üzerinde bir norm tanımlar. Tanımlı olan bu norma T'nin operatör normu adı verilir [57].

Tanım 5 ***(Banach Uzayı)*** *Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzaydaki her Cauchy dizisi, X içinde bir limite yakınsıyorsa bu $(X, \|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir. Ya da başka bir deyişle bir normlu vektör uzayı, normdan indirgenen metrik ile tam ise bir Banach uzayı olarak adlandırılır [59].*

Tanım 6 ***(İç Çarpım Uzayı ve Hilbert Uzayı)*** *İç çarpım uzayı, üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış vektör uzayıdır. Bir Hilbert uzayı ise, üzerindeki iç çarpımla tanımlanmış metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayıdır [58].*

Tanım 7 ***($\mathbf{L}^p(\Omega)$ Uzayı)*** *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge ve $p > 0$ bir reel sayı olmak üzere, Ω üzerinde*

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty$$

koşulunu sağlayan u ölçülebilir fonksiyonlarından oluşan uzaya $L^p(\Omega)$ uzayı adı verilir. $L^p(\Omega)$ bir normlu lineer uzaydır ve bu uzay üzerindeki norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

biçiminde tanımlanır. Bu norm ile $L^p(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır [60].

Tanım 8 ***(Esaslı Supremum)*** *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge, $u(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon olsun. Hemen hemen her yerde $|u(x)| \leq K$ olacak şekilde sabit bir K sayısı bulunabiliyorsa, $u(x)$ fonksiyonuna Ω da hemen hemen her yerde sınırlı fonksiyon denir. Böyle K'ların en büyük alt sınırına da $|u(x)|$'in esaslı supremumu adı verilir ve*

$$ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

ile gösterilir [60].

Tanım 9 ***($\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ Uzayı)*** *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge olmak üzere, Ω üzerinde ölçülebilir ve hemen hemen her yerde sınırlı fonksiyonlardan oluşan uzaya $L^\infty(\Omega)$ uzayı adı verilir. $L^\infty(\Omega)$ bir normlu lineer uzaydır ve bu uzay üzerindeki norm*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

biçiminde tanımlanır. Bu norm ile $L^\infty(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır [60].

Not 10 *Yukarıda verilen tanımlarda, fonksiyon ile kastedilen sıfır ölçümlü küme dışında eşit olan fonksiyonlardan oluşan denklik sınıfıdır.*

Tanım 11 ***($\mathbf{L}^p(a, b; X)$ Uzayı)*** *X bir Banach uzayı, $1 \leq p < \infty$ ve $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere*

$$\int_a^b \|u(t)\|_X^p \, dt < \infty$$

koşulunu sağlayan $u:(a,b)\to X$ *ölçülebilir fonksiyonlarından oluşan uzaya* $L^p\,(a,b;X)$ *uzayı denir.* $L^p\,(a,b;X)$ *bir normlu lineer uzaydır ve bu uzay üzerindeki norm*

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int\limits_a^b \|u\,(t)\|_X^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlıdır. $L^p\,(a,b;X)$ *uzayı tanımlı olan bu norm ile bir Banach uzayıdır [63].*

Tanım 12 ***(L***$^\infty\,(a,b;X)$ ***Uzayı)*** X *bir Banach uzayı,* $p=\infty$ *ve* $-\infty\le a<b\le\infty$ *olmak üzere ölçülebilir ve hemen hemen her yerde sınırlı* $u:(a,b)\to X$ *fonksiyonlarından oluşan uzaya* $L^\infty\,(a,b;X)$ *uzayı denir.* $L^\infty\,(a,b;X)$ *bir normlu lineer uzaydır ve bu uzay üzerindeki norm*

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} = ess \sup_{t\in(a,b)} \|u\,(t)\|_X$$

biçiminde tanımlıdır. $L^\infty\,(a,b;X)$ *uzayı tanımlı olan bu norm ile bir Banach uzayıdır [63].*

Teorem 13 $p\in[1,\infty)$ *için* $L^p\,(a,b;X)$ *Banach uzayıdır [63].*

Tanım 14 ***(Hölder Eşitsizliği)*** $1\le p,q<\infty$ *ve* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *olsun. Eğer* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$*'de açık bir bölge,* $u\in L^p(\Omega)$, $v\in L^q(\Omega)$ *ise*

$$\int\limits_\Omega |u(x)v(x)|\,dx \le \left(\int\limits_\Omega |u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_\Omega |v|^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}} = \|u\|_p\,\|v\|_q$$

eşitsizliği sağlanır [62].

Tanım 15 ***(Genelleştirilmiş Hölder Eşitsizliği)*** $\Omega\subset\mathbb{R}^n$*'de açık bir bölge,* $1\le p_1,......,p_m\le\infty$ *ve* $\frac{1}{p_1}+.........+\frac{1}{p_m}=1$ *olsun.* $u_k\in L^{p_k}(\Omega)$, $k=1,.....,m$ *ise*

$$\int\limits_\Omega |u_1......u_m|\,dx \le \prod_{k=1}^m \|u_k\|_{L^{p_k}}$$

eşitsizliği sağlanır [62].

Lemma 16 ***(Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)*** *X bir iç çarpım uzayı ve $x,\ y \in X$ olsun. O zaman*

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle \langle y,y\rangle$$

eşitsizliği sağlanır. X bir iç çarpım uzayı olmak üzere

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlı olan $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde bir norm belirttiğinden Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

olarak ta yazılabilir [57].

Tanım 17 ***(Minkowski Eşitsizliği)*** *$1 \leq p < \infty$ ve $u, v \in L^p(\Omega)$ olsun. Bu durumda $u + v \in L^p(\Omega)$ olur ve*

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_q$$

eştsizliği sağlanır [62].

Tanım 18 ***(Young Eşitsizliği)*** *a ve b negatif olmayan reel sayılar, $1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

eşitsizliği sağlanır [62].

Tanım 19 ***(Zayıf Türev)*** *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge ve $u, v \in L^1(\Omega)$ ve α bir çoklu indeks olsun. Eğer her $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ için*

$$\int\limits_\Omega u(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v(x)\phi(x)dx$$

eşitliği sağlanıyorsa, v fonksiyonuna u fonksiyonunun Ω bölgesinde $|\alpha|$. mertebeden genelleşmiş (zayıf) türevi denir ve $D^\alpha u = v$ ile işaret edilir [62].

Tanım 20 ***(Sobolev Uzayı)*** *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge, $1 \leq p \leq \infty$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere kendisi ve k. mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L^p(\Omega)$ sınıfına ait olan fonksiyonlar uzayına $W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı denir. Yani*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

şeklindedir. $W^{k,p}(\Omega)$ *Sobolev uzayı bir normlu lineer uzaydır. Bu uzay üzerindeki norm,* $1 \leq p < \infty$ *için;*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^{p}\, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{L^{p}(\Omega)}^{p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ *için;*

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} ess \sup_{x \in \Omega} |D^{\alpha}u| = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)}$$

biçiminde tanımlıdır [62].

Teorem 21 $W^{k,p}(\Omega)$ *uzayı, üzerinde tanımlı olan* $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ *normu ile Banach uzayıdır [62].*

Teorem 22 $W^{k,2}(\Omega)$ *uzayı bir Hilbert uzayıdır ve* $H^{k}(\Omega)$ *ile gösterilir. Bu uzay üzerindeki iç çarpım* $u, v \in W^{k,2}(\Omega)$ *olmak üzere*

$$\langle u, v \rangle_{W^{k,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha}u(x) D^{\alpha}v(x) dx$$

biçiminde tanımlanır [62].

Tanım 23 X *ve* Y *normlu uzaylar ve* $T \in L(X, Y)$ *bir lineer dönüşüm olsun. Eğer* X *içindeki her sınırlı* $\{x_n\}$ *dizisi için* Y *içindeki* $\{Tx_n\}$ *dizisi yakınsak bir alt dizi içerirse (sahipse)* T*'ye kompakttır denir [57].*

Tanım 24 X *ve* Y *normlu lineer uzaylar olsun. Bu durumda,*

(i) $X \subset Y$

(ii) Her $f \in X$ *için* $\|f\|_{Y} \leq C \|f\|_{X}$ *olacak şekilde* $C > 0$ *vardır.*

koşulları sağlanıyorsa X *uzayı* Y *uzayına sürekli gömülür denir ve* $X \hookrightarrow Y$ *ile işaret edilir [60].*

Teorem 25 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n}$ *sınırlı bir bölge olsun. O zaman,* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *için*

$$L^{q}(\Omega) \subset L^{p}(\Omega)$$

olur . Ayrıca $u \in L^{q}(\Omega)$ *için*

$$|\Omega|^{-1/p} \|u\|_{L^{p}(\Omega)} \leq |\Omega|^{-1/q} \|u\|_{L^{q}(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sürekli gömülmesi geçerlidir [60].

Teorem 26 *$m \geq 1$ tamsayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere aşağıdaki sürekli gömülmeler geçerlidir.*

(i) *Eğer $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ ise $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ için $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$,*

(ii) *Eğer $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ ise $\forall q \in [p, \infty)$ için $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$,*

(iii) *Eğer $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ ise $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$,*

son durumda

$$k = \begin{cases} \left[\left|m - \frac{n}{p}\right|\right], & \frac{n}{p} \notin \mathbb{Z} \\ m - \frac{n}{p} - 1\text{'den küçük pozitif tamsayı}, & \frac{n}{p} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ve

$$\theta = (m - \frac{n}{p}) - k$$

olmak üzere

$$\gamma = \begin{cases} k, & \frac{n}{p} \notin \mathbb{Z} \\ m - \frac{n}{p} - 1, & \frac{n}{p} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $\forall |\alpha| \leq \gamma$ için

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)},$$

ve ayrıca $|\alpha| = \gamma$ için h.h.y.,

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C |x-y|^\theta \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)},$$

olur dolayısıyla

$$\|u\|_{C^\gamma(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}$$

sağlanır [61].

Teorem 27 ***(Rellich-Kondrasov)*** *Ω, $\mathbb{R}^n$'de sınırlı bir bölge ve Ω'nın sınırı C^1 sınıfından olmak üzere aşağıdaki kompakt gömülmeler geçerlidir [61].*

(i) Eğer $p < n$ ise $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < p^*, \quad p^* = \frac{np}{n-p}$,

(ii) Eğer $p = n$ ise $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$,

(iii) Eğer $p > n$ ise $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.

Teorem 28 ***(Kısmi İntegrasyon Formülü)*** *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık, sınırlı bir küme ve $\partial\Omega$ sınırı C^1 sınıfından olmak üzere $u, v \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ olsun. O zaman, $i = 1, ..., n$ için*

$$\int_{\Omega} u_{x_i} v dx = -\int_{\Omega} u v_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v \eta^i dS$$

eşitliği sağlanır. Burada η^i, $\partial\Omega$ sınırının dış yönlü normal vektörünün i. bileşenidir [62].

Lemma 29 ***(Gronwall Eşitsizliği 1)*** *$\eta(t)$, $[0, T]$ aralığında sürekli, negatif olmayan bir fonksiyon $\Phi(t)$ ve $\Psi(t)$, $[0, T]$ aralığında integrallenebilen, negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere*

$$\eta'(t) \leq \Phi(t)\eta(t) + \Psi(t)$$

eşitsizliği geçerli ise her $0 \leq t \leq T$ için

$$\eta(t) \leq \exp(\int_0^t \Phi(s)ds) \left[\eta(0) + \int_0^t \Psi(s)ds\right]$$

olur [62].

Lemma 30 ***(Gronwall Eşitsizliği 2)*** *α, β ve u reel değerli fonksiyonları $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar ve*

a) $\forall t \in [a, b]$ için $\beta(t) > 0$ olsun. Bu durumda $[a, b]$ aralığı üzerinde u fonksiyonu için

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)ds$$

ise

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s)\exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right)ds, \qquad t \in [a, b]$$

eşitsizliği sağlanır.

b) Ek olarak α azalmayan bir fonksiyon ise

$$u(t) \leq \alpha(t) \exp(\int_a^t \beta(s)ds), \qquad t \in [a,b]$$

eşitsizliği de sağlanır [64].

Tanım 31 ***(Konvolüsyon)*** *$f,\ g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere*

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

şeklinde tanımlanmış olan $h(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna f ile g fonksiyonlarının konvolüsyonu denir ve

$$h = f * g$$

şeklinde gösterilir [61].

Teorem 32 *$f,\ g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu*

$$f * g = g * f$$

olacak şekilde değişme özelliğine sahiptir [61].

Tanım 33 ***(İyi Tanımlılık)*** *Kısmi türevli diferansiyel denklemlerde verilen bir problem, verilere sürekli bağlı ve tek bir çözüme sahip ise bu probleme iyi tanımlıdır denir [62].*

Teorem 34 *$s > 3$ için $u_0(x) \in H^s(\mathbb{R})$ verilsin. Bu durumda (1.7)'de verilen denklemin bir maximal $T = T\left(\lambda, \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}\right) > 0$ değeri ile*

$$u = u(.,u_0) \in C\left([0,T); H^s(\mathbb{R})\right) \cap C^1([0,T); H^{s-1}(\mathbb{R}))$$

olacak şekilde bir tek u çözümü mevcuttur ve denklemin bu çözümü başlangıç değerlere sürekli bağlıdır. Dolayısıyla

$$u_0 \longrightarrow u\left(.,u_0\right) : H^s\left(\mathbb{R}\right) \longrightarrow C\left([0,T); H^s(\mathbb{R})\right) \cap C^1([0,T); H^{s-1}(\mathbb{R}))$$

dönüşümü süreklidir ve $T > 0$ olacak şekilde mevcut olan sürelerden maximal olanı s'den bağımsız olarak seçilebilir [46].

Tanım 35 ***(Çözümün Patlaması)*** *Bir başlangıç sınır değer probleminde* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*'de açık bir bölge ve* $T > 0$ *olmak üzere* $\Omega \times [0, T)$*'de çözümün mevcut olduğu tüm* T*'lerin supremumuna çözümün varlık aralığının uzunluğu denir. Bu sayı* $T_{\max}$ *ile gösterilsin. Eğer* $T_{\max} = +\infty$ *ise global çözüm vardır,* $T_{\max} < +\infty$ *ise global çözüm yoktur,* $0 < T_{\max} < +\infty$ *ise çözüm sonlu bir zamanda patlar denir [65].*

Tanım 36 X *vektör uzayı üzerinde bir* $\|.\|_1$ *ve* $\|.\|_2$ *normları tanımlı olsun. Eğer* $\forall x \in X$ *için*

$$m \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \|x\|_1$$

olacak biçimde $m, M > 0$ *sayıları varsa* $\|.\|_1$ *normu* $\|.\|_2$ *normuna denktir denir [59].*

Tanım 37 ***(Daralma Dönüşümü)*** X *bir normlu vektör uzay* $T : X \to X$ *bir fonksiyon olsun. Eğer* $\forall x, y \in X$ *için*

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha \|x - y\|$$

olacak şekilde bir $0 < \alpha < 1$ *varsa* T *fonksiyonuna bir daralma (büzülme) fonksiyonu denir [57].*

Tanım 38 ***(Spektrum ve Rezolvent)*** $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \in L(X)\}$ *kompleks sayılar kümesine* T *operatörünün rezolvent kümesi ve* $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ *kümesine ise* T *operatörünün spektrumu adı verilir.* $\lambda \in \rho(T)$ *olmak üzere* $R(\lambda; T) = (T - \lambda I)^{-1}$ *operatörüne* T *operatörünün rezolventi denir [59].*

Tanım 39 **(C$_0$− *Yarıgrup)*** X *bir Banach uzayı ve* $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ *ise bu Banach uzayı üzerindeki* X*'den* X*'e tanımlı olan sınırlı lineer operatörlerin bir ailesi olsun. Eğer,*

(i) $T(0) = I$, X üzerinde birim operatördür.

(ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$.

(iii) $\forall u \in X$ için $\lim\limits_{t \to 0} T(t)u \to u$.

koşulları sağlanıyorsa $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ ailesine $C_0 -$ *yarıgrup* denir [61].

Teorem 40 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, *ailesi* X *Banach uzayı üzerinde bir* $C_0 -$ *yarıgrup olsun. Bu durumda*

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \qquad \forall t \geq 0$$

olacak şekilde $\omega \in \mathbb{R}$ *ve* $M \geq 1$ *sabit sayıları vardır [61].*

Tanım 41 **($\mathbf{C_0}$− *Yarıgrubunun Üreteci*)** *X bir Banach uzayı olmak üzere* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *ailesi bu uzayda tanımlı bir* C_0 − *yarıgrup olsun. Bu durumda*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in X : \lim_{t\to 0} \frac{T(t)u - u}{t} \quad vard\imath r \right\}$$

$$Au = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)u - u}{t}, \quad u \in D(A)$$

olarak verilen $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *lineer operatörüne* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *yarıgrubunun üreteci denir [61].*

Teorem 42 *X, bir Banach uzayı olmak üzere* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *ailesi bu uzayda tanımlı bir* C_0−*yarıgrup olsun. Eğer* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *lineer operatörü* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *yarıgrubunun bir üreteci ise*

(i) $\mathcal{D}(A)$, X'de yoğundur. ($\overline{\mathcal{D}(A)}^X = X$)

(ii) A kapalı bir lineer operatördür [61].

Tanım 43 ***(Daraltma Yarıgrubu)*** *X, bir Banach uzayı olmak üzere* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *ailesi bu uzayda tanımlı bir* C_0 − *yarıgrup olsun. Eğer her* $t \geq 0$ *için* $\|T(t)\| \leq 1$ *ise* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ C_0 − *yarıgrubuna daraltma yarıgrubu denir [61].*

Teorem 44 ***(Daraltma Yarıgrubu için Hille-Yosida Teoremi)*** *A, X Banach uzayı üzerinde sınırlı olmayan bir lineer operatör olsun. Bu durumda A, bir daraltma yarıgrubunun üretecidir ancak ve ancak*

(i) A, kapalı bir lineer operatördür.

(ii) A, X Banach uzayında yoğundur.

(iii) A'nın rezolvent kümesine ait olan $\forall\lambda > 0$ için $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ bir sınırlı lineer operatördür ve

$$\|R(\lambda; A)\| = \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

eşitsizliği sağlanır [61].

Teorem 45 ***(Hille-Yosida Teoremi)*** $w \geq 0$ *olmak üzere A, X Banach uzayı üzerinde tanımlı bir lineer operatör olsun. A lineer operatörü,*

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t}, \qquad \forall t \geq 0$$

özelliğini sağlayan bir C_0 − *yarıgrubunun üretecidir ancak ve ancak*

(i) A, kapalı bir lineer operatördür.

(ii) A, X Banach uzayında yoğundur.

(iii) A'nın rezolvent kümesine ait olan $\forall\lambda > w$ için $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ operatörü vardır ve

$$\|R(\lambda; A)\| = \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda - w}$$

eşitsizliği sağlanır [61].

Şimdi ise **Kato Teoremini** ifade edelim.

X ve Y Banach uzayları olmak üzere Y, X'e sürekli ve kompakt gömülsün ve $\mathcal{L} : Y \to X$ dönüşümü Y'den X üzerine bir izomorfizma olsun. Aşağıdaki Cauchy problemini ele alalım ve bu problem için $(1-4)$ koşullarının sağlandığını kabul edelim.

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + A(v)v = f(v), & t > 0, \\ v(0) = v_0. \end{cases} \tag{A1}$$

1. $y \in Y$ olmak üzere X'de tanımlı lineer $A(y)$ dönüşümü için $\forall M > 0$ sayısına karşılık gelen öyle bir β reel sayısı vardır ki $\|y\| \leq M$ olmak üzere $-A(y)$ operatörü bir $\left\{e^{-tA(y)}\right\}_{t\geq 0}$, $C_0 - yarıgrubu$ üretir ve

$$\left\|e^{-tA(y)}\right\|_{L(X)} \leq e^{\beta t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

2. $y \in Y$ olmak üzere $A(y) : Y \to X$ sınırlı bir lineer operatör $(A(y) \in L(Y, X))$ ve $\max\{\|y\|_Y, \|z\|_Y\}$ kümesine bağlı olan μ_A sabit sayıları için

$$\|(A(y) - A(z))w\|_X \leq \mu_A \|y - z\|_X \ \|w\|_Y, \qquad \forall y, z, w \in Y.$$

3. $\forall M > 0$ ve $y \in Y$ için $\|y\|_Y \leq M$ olmak üzere $\mu_1(M)$ sabit sayısının pozitif olduğu durumlarda $\forall w \in Y$ için

$$\left\|(\mathcal{L}A(y) - A(y)\mathcal{L})\mathcal{L}^{-1}w\right\|_X \leq \mu_1(M) \|w\|_X .$$

4. $\forall M > 0$, için $f : \{y \in Y : \|y\|_Y \leq M\} \to Y$ fonksiyonu sınırlı ve μ_2 ile μ_3 sabit sayıları sırasıyla $\max\{\|y\|_X, \|z\|_X\}$ ve $\max\{\|y\|_Y, \|z\|_Y\}$ kümelerine bağlı olsun. Bu durumda

$$\|f(y) - f(z)\|_X \leq \mu_2 \|y - z\|_X \ , \qquad \forall y, z \in X.$$

$$\|f(y) - f(z)\|_Y \leq \mu_3 \|y - z\|_Y \ , \qquad \forall y, z \in Y.$$

Teorem 46 ***(Kato Teoremi)*** (1−4) *koşullarını sağlayan* $(A1)$ *problemini ele alalım. Keyfi* $v_0 \in Y$ *için sadece* $\|v_0\|_Y$*'ye bağlı olan bir* $T > 0$ *sayısı ve (A1) probleminin*

$$v \in C([0, T]; Y) \cap C^1([0, T]; X)$$

olacak şekilde bir tek çözümü vardır. Ayrıca problemin çözümü $v(t)$, Y *normuna göre* $v(0) = v_0$ *başlangıç değerlere sürekli bağlıdır [66].*

3 ZAYIF DİSİPATİF CAMASSA-HOLM DENKLEMİNİN YEREL ÇÖZÜMÜNÜN İNCELENMESİ

Bu bölümde, aşağıda verilen zayıf disipatif Camassa-Holm denkleminin Cauchy problemi incelenmiştir:

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} + 3uu_x + 2ku_x + \lambda(u - u_{xx}) = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, & (x,t) \in Q_T \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.1}$$

Burada, $s > 3$ için $u_0(x) \in H^s(\mathbb{R})$ problemin başlangıç değeri olup $\lambda > 0$ sabit sayısı için $\lambda(1-\partial_x^2)u = \lambda(u-u_{xx})$ olacak şekilde ifade edilen terim, denklemin disipatif terimi ve $k \neq 0$ sayısı ise denklemin dispersiv katsayısıdır. Ayrıca $Q_T = \mathbb{R}\times\ [0,T]$'dir.

3.1 Zayıf Disipatif Camassa-Holm Denkleminin Yerel Çözümünün Varlığı Ve Tekliği

Bu alt bölümde, (3.1) probleminin yerel çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili teorem ve önermeler verilecektir.

Bu incelemeler, (3.1)'de ifade edilen problemde $w = u - u_{xx}$ alınarak gerçekleştirilecektir. (3.1)'de verilen problemin denklemini

$$u_t - u_{xxt} + 2uu_x + uu_x + 2ku_x + \lambda(u - u_{xx}) = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$u_t - u_{xxt} + uu_x - uu_{xxx} = -2uu_x + 2u_x u_{xx} - 2ku_x - \lambda(u - u_{xx})$$

denklemine ulaşılır. Böylece

$$(u - u_{xx})_t + u(u - u_{xx})_x = -2u_x(u - u_{xx} + k) - \lambda(u - u_{xx})$$

denklemi elde edilir. Yukarıdaki son denklemde $w = u - u_{xx}$ kullanılır ve $u_0(x)$ başlangıç koşulu ile birlikte yazılırsa

$$\begin{cases} w_t + uw_x = -2u_x(w + k) - \lambda w, & (x,t) \in Q_T \\ w(x,0) = w_0(x) := u_0(x) - u_{0_{xx}}(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.1.2}$$

problemi elde edilir.

$p \geq 2$ için $X = L^p(\mathbb{R})$, $Y = W^{2,p}(\mathbb{R})$ olsun. $D = \partial/\partial x$ türev ve Id birim operatörü olmak üzere $\mathcal{L} = Id - D^2$ olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda $Y \hookrightarrow X$ gömülme dönüşümü sürekli ve kompakttır. Ayrıca $\mathcal{L}\colon Y \to X$ dönüşümü izomorfiktir [55].

Şimdi, (3.1.2) probleminin yerel çözümünün varlığını ve tekliğini ispatlayabilmek için kullanacağımız teoremi ifade etmeden önce sonuç değerlendirmesinde göz önünde bulunduracağımız lemmayı verelim.

Lemma 47 *$p \geq 2$ olmak üzere $\forall v \in Y = W^{2,p}(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda,* $M_0 = \min\left\{1, \frac{2}{\sqrt{p-1}}\right\}$ *için*

$$\frac{M_0}{6} \|v\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})} \leq \left\|(Id - D^2)\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2 \|v\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})} \tag{3.1.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Öncelikle (3.1.3) eşitsizliğinin sağ tarafını ispatlayalım. Bunun için normun üçgen eşitsizliği özelliğinden yararlanacağız. Bu durumda

$$\|v - v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|v\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})} \tag{3.1.4}$$

olmak üzere (3.1.4) eşitsizliğinin sağ tarafını, $L^p(\mathbb{R})$ uzayında norm tanımından

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\|v\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\|v_{xx}\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{p}}$$

olacak şekilde yazabiliriz. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafına

$$a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}} \leq 2(a+b)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1, \; a, b \geq 0 \tag{3.1.5}$$

eşitsizliğini uygulayarak düzenleyelim. O halde

$$\left(\|v\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\|v_{xx}\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\left(\|v\|^p_{L^p(\mathbb{R})} + \|v_{xx}\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{p}}$$

olacaktır. Son eşitsizliğin sağ tarafını, parantez içindeki ifadeye $\|v_x\|^p_{L^p(\mathbb{R})}$ terimini ekleyerek kuvvetlendirirsek

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq 2\left(\|v\|^p_{L^p(\mathbb{R})} + \|v_x\|^p_{L^p(\mathbb{R})} + \|v_{xx}\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2\|v\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\|v - v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\,\|v\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece (3.1.3) eşitsizliğinin sağ tarafının ispatı tamamlanmış olur.

Diğer yandan, (3.1.3)'te verilen eşitsizliğin sol tarafını ispatlayayabilmek için $\|v\|_{L^p(\mathbb{R})}$, $\|v_x\|_{L^p(\mathbb{R})}$ ve $\|v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})}$ terimlerinin $\|v - v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})}$'den küçük olduğunu göstermeliyiz.

Bu nedenle $\|v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})}$ terimini

$$\begin{aligned}\|v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \|v_{xx} - v + v\|_{L^p(\mathbb{R})}\\ &\leq \|v - v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|v\|_{L^p(\mathbb{R})}\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

olacak şekilde yazabiliriz.

Şimdi ise $\|v_x\|_{L^p(\mathbb{R})}$ terimi için kısmi integrasyon formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|v_x\|^p_{L^p(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |v_x|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}} v_x\,|v_x|^{p-2}\,v_x dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}} v\left(|v_x|^{p-2}\,v_x\right)_x dx = -\int_{\mathbb{R}} v\left(|v_x|^{p-1}\right)_x dx\\ &= -(p-1)\int_{\mathbb{R}} v v_{xx}\,|v_x|^{p-2}\,dx\\ &\leq (p-1)\left|\int_{\mathbb{R}} v v_{xx}\,|v_x|^{p-2}\,dx\right|, \qquad p \geq 2\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Elde edilen (3.1.8) eşitsizliğine genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\|v_x\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \leq (p-1)\,\|v\|_{L^p(\mathbb{R})}\,\|v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})}\,\|v_x\|^{p-2}_{L^p(\mathbb{R})}, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{p-2}{p} = 1 \text{ için}\right)$$

olacaktır. Böylece

$$\|v_x\|^{p-(p-2)}_{L^p(\mathbb{R})} \leq (p-1)\,\|v\|_{L^p(\mathbb{R})}\,\|v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan ise

$$\|v_x\|^2_{L^p(\mathbb{R})} \leq (p-1)\,\|v\|_{L^p(\mathbb{R})}\,\|v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

veya

$$\|v_x\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \sqrt{p-1}\,\|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^p(\mathbb{R})}\,\|v_{xx}\|^{\frac{1}{2}}_{L^p(\mathbb{R})}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Son eşitsizlikte Young eşitsizliği kullanılırsa

$$\|v_x\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{\sqrt{p-1}}{2}\left(\|v\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})}\right) \tag{3.1.9}$$

eşitsizliği elde edilir.

Aslında $v \in W^{2,p}(\mathbb{R})$ olduğu bilindiğinden (3.1.3) eşitsizliğinin sol tarafının ispatını sonuçlandırabilmek için

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|v - v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})} \tag{3.1.10}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu göstermek yeterlidir. O halde (3.1.10) eşitsizliginin doğruluğunu gösterelim. Bunun için

$$v - v_{xx} = f \tag{3.1.11}$$

işaretlemesini kullanacağız. (3.1.11)'de verilen eşitliğin her iki tarafını $v\,|v|^{p-2}$ ile çarpalım ve elde edilen sonuca $\mathbb{R}$ üzerinde integrasyon uygulayalım. O halde

$$\int\limits_{\mathbb{R}} vv\,|v|^{p-2}\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}} v_{xx}v\,|v|^{p-2}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} fv\,|v|^{p-2}\,dx$$

olacaktır. Burada kısmi integrasyon formülünü kullanırsak

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |v|^p\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}} (p-1)v_x^2\,|v|^{p-2}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} fv\,|v|^{p-2}\,dx$$

eşitliğine ulaşılır. Son eşitliğin sağ tarafına Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\|v\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |v|^p\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\,\|v\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R})}\,,\quad \left(\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1\right)$$

bulunur. $f = v - v_{xx}$ olduğundan son eşitsizliği

$$\|v\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|v - v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})}\,\|v\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R})}$$

olacak şekilde yazabiliriz. Bu durumda

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|v - v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (3.1.10) eşitsizliğinin doğruluğu gösterilmiş olur.

Son eşitsizlik kullanılarak sırasıyla (3.1.7) ve (3.1.9) eşitsizlikleri üstten değerlendirilirse

$$\|v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|v - v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|v\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\,\|v - v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})} \tag{3.1.12}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\|v_x\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \frac{\sqrt{p-1}}{2}\left(\|v\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})}\right) \\
&\leq \frac{\sqrt{p-1}}{2}\left(\|v-v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})} + 2\,\|v-v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})}\right) \\
&\leq \frac{3}{2}\sqrt{p-1}\,\|v-v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})} \qquad (3.1.13)
\end{aligned}
$$

eşitsizliklerine ulaşılır. Sonuç olarak (3.1.10), (3.1.12) ve (3.1.13) değerlendirmelerine göre

$$\frac{M_0}{6}\,\|v\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})} \leq \|v-v_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})}\,, \qquad M_0 = \min\left\{1, \frac{2}{\sqrt{p-1}}\right\}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece (3.1.3) eşitsizliğinin sol tarafı da ispatlanmış olduğundan lemmanın ispatı tamamlanmış olur. ■

Yukarıdaki lemmaya göre $Y = W^{2,p}(\mathbb{R})$'nin normu

$$\|y\|_Y = \|y - y_{xx}\|_X = \|\mathcal{L}y\|_X\,, \qquad \forall y \in Y \qquad (3.1.14)$$

olacak şekilde tanımlanabilir. Bunun sonucu olarak $\mathcal{L}\colon Y \to X$ dönüşümü bir izometrikli izomorfizmdir. $\mathcal{L}^{-1}$, $\mathcal{L}$ dönüşümünün tersi olmak üzere $w = \mathcal{L}(u) = u - u_{xx}$ ve $u = \mathcal{L}^{-1}(w)$ kullanılarak (3.1.2)'de verilen problemin denklemini düzenleyebiliriz. Yukarıda ifade ettiğimiz gösterimleri

$$w_t + uw_x = -2u_x(w+k) - \lambda w$$

denkleminde kullanalım. Bu durumda,

$$w_t + \mathcal{L}^{-1}(w)Dw = -2\left(\mathcal{L}^{-1}(w)\right)_x (w+k) - \lambda w \qquad (3.1.15)$$

denklemi elde edilir. Burada sadelik için (3.1.2) problemi,

$$A\,(w) = \mathcal{L}^{-1}(w)D \qquad ve \qquad F(w) = -2\left(\mathcal{L}^{-1}(w)\right)_x (w+k) - \lambda w$$

işaretlemeleri kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{cases} w_t + A(w)w = F(w), & (x,t) \in Q_T \\ w\mid_{t=0} = w_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (3.1.16)$$

problemine ulaşılır.Böylece aşağıdaki teorem (3.1.16) probleminin dolayısıyla (3.1.2) probleminin yerel çözümünün varlığını ve tekliğini ifade etmektedir.

Teorem 48 *Eğer* $w_0 \in W^{2,p}(\mathbb{R})$ *ise* $\|w_0\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})}$*'ye bağlı olan bir* $T > 0$ *sabit sayısı vardır, öyleki (3.1.16)'da verilen başlangıç değer probleminin*

$$C\left([0,T)\,; W^{2,p}(\mathbb{R})\right) \cap C^1\left([0,T)\,; L^p(\mathbb{R})\right)$$

uzayında çözümü var ve tektir. Ayrıca problemin çözümü olan w, $W^{2,p}(\mathbb{R})$ *normuna göre başlangıç değerlere sürekli bağlıdır.*

Teorem 48'i ispatlayabilmek için [66] sonucunu kullanacağız. Diğer bir ifadeyle Kato teoreminin koşullarının sağlandığını göstereceğiz. Bu amaçla Teorem 48'i iki lemmaya ayırarak ispatlayacağız.

Lemma 49 $\forall M > 0$ *için sabit bir* β *reel sayısı vardır ki* $\forall y \in Y$ *ve* $\|y\|_Y \leq M$ *olmak üzere* $-A(y)$, X *uzayında* $\left\{e^{-tA(y)}\right\}_{t\geq 0}$, C_0- *yarıgrubunun üretecidir ve*

$$\left\|e^{-tA(y)}\right\|_{X\to X} \leq e^{\beta t}, \qquad t \geq 0$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. [1. Koşulun İspatı] $A(y)$' nin kapalı bir lineer operatör olduğu açıktır. Hille-Yosida Teoremi [61] gereğince $A(y)$ kapalı lineer operatörünün rezolvent kümesine ait olan $\forall\lambda \in \rho(A(y))$ için

$$\left\|(\lambda Id + A(y))^{-1}\right\|_{X\to X} \leq \frac{1}{\lambda - w}, \qquad \forall\lambda > w \tag{3.1.17}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $w \in \mathbb{R}$ olduğunu göstermek ispat için yeterlidir.
$\forall y \in Y$, $\|y\|_Y \leq M$ ve $f, g \in X$ olmak üzere

$$(\lambda Id + A(y))^{-1}\, g = f$$

veya

$$\lambda f + A(y)f = g$$

denklemlerini göz önünde bulunduralım. Burada $A(y) = \mathcal{L}^{-1}(y)D$ kullanılırsa

$$\lambda f + \mathcal{L}^{-1}(y)Df = g$$

veya

$$\lambda f + \mathcal{L}^{-1}(y)f_x = g \tag{3.1.18}$$

elde edilir. (3.1.18) eşitliğinin her iki tarafını $|f|^{p-2} f$ ile çarparsak

$$\lambda f\,|f|^{p-2} f + \mathcal{L}^{-1}(y) f_x\,|f|^{p-2} f = g\,|f|^{p-2} f$$

bulunur. Son eşitliğin her iki tarafının $\mathbb{R}$ üzerinde integralini alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \lambda f\,|f|^{p-2} f dx + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^{-1}(y) f_x\,|f|^{p-2} f dx &= \int_{\mathbb{R}} g\,|f|^{p-2} f dx \\
\int_{\mathbb{R}} \lambda\,|f|^{p} dx + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^{-1}(y)\,|f|^{p-2} f f_x dx &\le \int_{\mathbb{R}} |g|\,|f|^{p-2}\,|f|\,dx \\
\lambda \int_{\mathbb{R}} |f|^{p} dx + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^{-1}(y)\left(|f|^{p}\right)_x dx &\le \int_{\mathbb{R}} |f|^{p-1}\,|g|\,dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte, Hölder eşitsizliği ile eşitsizliğin sol tarafındaki ikinci terime kısmi integrasyon formülü uygulanırsa

$$\lambda\,\|f\|_X^p - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{L}^{-1}(y))_x\,|f|^p dx \le \|f\|_X^{p-1}\,\|g\|_X$$

elde edilir. Böylece,

$$\left(\lambda - \frac{1}{p}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\left(\mathcal{L}^{-1} y(x)\right)_x\right|\right)\|f\|_X^p \le \|f\|_X^{p-1}\,\|g\|_X$$

eşitsizliğine ulaşılır. Ayrıca son eşitsizlikte, $w = \frac{1}{p}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|(\mathcal{L}^{-1}y(x))_x|$ alınırsa

$$\|f\|_X^{p-(p-1)} \le \frac{1}{(\lambda - w)}\,\|g\|_X$$

veya

$$\frac{\|f\|_X}{\|g\|_X} \le \frac{1}{(\lambda - w)}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada f fonksiyonunun eşiti yerine yazılırsa

$$\frac{\left\|(\lambda Id + A(y))^{-1} g\right\|_X}{\|g\|_X} \le \frac{1}{(\lambda - w)}$$

olacaktır. Yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafında supremuma geçersek

$$\sup_{0\neq\|g\|\in X}\frac{\left\|(\lambda Id + A(y))^{-1} g\right\|_X}{\|g\|_X} \le \frac{1}{(\lambda - w)}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Son eşitsizlikte operatör normunun tanımı göz önüne alındığında

$$\left\|(\lambda Id + A(y))^{-1}\right\|_{X\to X} \le \frac{1}{(\lambda - w)}, \qquad \forall\lambda > w$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla (3.1.17) eşitsizliğinin doğruluğu gösterilmiş olur.

Şimdi, $M > 0$ ve $\|y\|_Y \leq M$ olmak üzere $\forall y \in Y$ için $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |(\mathcal{L}^{-1}y(x))_x|$ ifadesini üstten değerlendirelim.

$$\left|(\mathcal{L}^{-1}y(x))_x\right|^p = \left|p\int\limits_{-\infty}^{x} (\mathcal{L}^{-1}y(x))_{xx} \left|(\mathcal{L}^{-1}y(x))_x\right|^{p-1} dx\right|$$

olarak yazılabilir. Burada $\mathcal{L}u = y = u - u_{xx}$ve $\mathcal{L}^{-1}y = u$ olmak üzere u_{xx} terimi yalnız bırakılırsa

$$u_{xx} = -y + u$$

eşitliğine ulaşılır. $u = \mathcal{L}^{-1}y$ son eşlitlikte kullanılırsa

$$\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_{xx} = -y + \mathcal{L}^{-1}y$$

olacaktır. Son eşitlik integralde yerine yazılırsa

$$\left|(\mathcal{L}^{-1}y(x))_x\right|^p = p\left|\int\limits_{-\infty}^{x} (-y + \mathcal{L}^{-1}y(x)) \left|(\mathcal{L}^{-1}y(x))_x\right|^{p-1} dx\right|$$

elde edilir. Elde edilen bu son eşitlikte, Hölder eşitsizliği kullanılarak integral hesaplanırsa

$$\left|(\mathcal{L}^{-1}y(x))_x\right|^p \leq p\left(\|y\|_X + \left\|\mathcal{L}^{-1}y\right\|_X\right) \left\|(\mathcal{L}^{-1}y)_x\right\|_X^{p-1}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada (3.1.10) ve (3.1.13) eşitsizliklerinden $\|\mathcal{L}^{-1}y\|_X \leq \|y\|_X$ ve $\|(\mathcal{L}^{-1}y)_x\|_X \leq \|y\|_X$ olduğu bilinmektedir. Bilinen bu eşitsizlikler, yukarıdaki son eşitsizlikte yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left|(\mathcal{L}^{-1}y(x))_x\right|^p &\leq p(\|y\|_X + \|y\|_X)\, \|y\|_X^{p-1} \\ &\leq 2pMM^{p-1} = 2pM^p\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(\mathcal{L}^{-1}y(x))_x\right| \leq (2p)^{\frac{1}{p}} M$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, $\beta = \frac{1}{p}(2p)^{\frac{1}{p}} M$ sabit sayısı ile Kato Teoremi'nin 1. koşulunun sağlandığı gösterilmiş olur. Sonuç olarak bu durum lemma 49'un ispatını tamamlar. ■

Lemma 50 *Kato Teoremi'nin 2., 3. ve 4. koşulları (3.1.16)'da ifade edilen problem için sağlanır.*

İspat. [2. Koşulun İspatı] (3.1.16)'da verilen problem için Kato Teoremi'nin 2. koşulunun sağlandığını ispatlayacağız. Öncelikle $\forall y \in Y$ için $A(y) : Y \to X$ dönüşümünün sınırlı bir lineer operatör olduğunu gösterelim. Her $v \in Y$ için $A(y) = \mathcal{L}^{-1}(y)D$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|A(y)v\|_X^p &= \left\|\mathcal{L}^{-1}(y)Dv\right\|_X^p \\
&= \left\|\mathcal{L}^{-1}(y)v_x\right\|_X^p \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} v_x^p \left(\mathcal{L}^{-1}y(x)\right)^p dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikten

$$\begin{aligned}
\|A(y)v\|_X^p &\leq \|v_x\|_{L^\infty}^p \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\mathcal{L}^{-1}y(x)\right|^p dx \\
&= \|v_x\|_{L^\infty}^p \left[\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\mathcal{L}^{-1}y(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \\
&= \|v_x\|_{L^\infty}^p \left\|\mathcal{L}^{-1}y\right\|_X^p
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\|A(y)v\|_X^p \leq \|v_x\|_{L^\infty}^p \left\|\mathcal{L}^{-1}y\right\|_X^p$$

olacaktır. Son eşitsizlikte

$$\|v_x\|_{L^\infty} \leq C \|v\|_Y$$

Sobolev gömülme teoremi (teorem 26) kullanılarak

$$\|A(y)v\|_X^p \leq C \|v\|_Y^p \left\|\mathcal{L}^{-1}y\right\|_X^p$$

eşitsizliğine ulaşılır. Son eşitsizlikte $Y = W^{2,p}(\mathbb{R})$ uzayının tanımı ve (3.1.14) kullanılarak elde edilen

$$\left\|\mathcal{L}^{-1}y\right\|_X \leq \left\|\mathcal{L}^{-1}y\right\|_Y \overset{3.1.14}{=} \|y\|_X \leq \|y\|_Y \tag{3.1.19}$$

eşitsizliği göz önünde bulundurulursa

$$\|A(y)v\|_X^p \leq C \|v\|_Y^p \|y\|_Y^p$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece son eşitsizlikten $A(y)$'nin sınırlı bir lineer operatör olduğu gösterilmiş olur.

Ayrıca $y,\ z,\ w \in Y$ için

$$\|(A(y)-A(z))w\|_X^p = \int_{\mathbb{R}} \left|\left[\mathcal{L}^{-1}y - \mathcal{L}^{-1}z\right]\right|^p |w_x|^p \, dx$$
$$\leq \|w_x\|_{L^\infty}^p \left\|\mathcal{L}^{-1}y - \mathcal{L}^{-1}z\right\|_X^p$$

olacaktır. Burada operatörün lineerlik özelliği kullanılırsa

$$\|(A(y)-A(z))w\|_X^p \leq \|w_x\|_{L^\infty}^p \left\|\mathcal{L}^{-1}(y-z)\right\|_X^p$$

eşitsizliğine ulaşılır. Son eşitsizliğe Sobolev gömülme teoremi ile (3.1.19) eşitsizliği uygulanırsa

$$\|(A(y)-A(z))w\|_X^p \leq C\,\|w\|_Y^p\,\|(y-z)\|_X^p$$

eşitsizliği elde edilir. Elde edilen bu eşitsizlik sonucunda (3.1.16) problemi için Kato teoreminin 2. koşulunun sağlandığı gösterilmiş olur. ■

İspat. [3. Koşulun İspatı] (3.1.16)'da verilen problem için Kato Teoremi'nin 3. koşulunun sağlandığını göstereceğiz. Ancak bu koşulun sağlandığını göstermeden önce ispatta kullanacağımız eşitlik ve eşitsizlikleri ifade edelim.

$w = \mathcal{L}u = u - u_{xx}$ ve $\mathcal{L}^{-1}w = u$ olmak üzere

$$(\mathcal{L}^{-1}w)_{xx} = (\mathcal{L}^{-1}w_{xx}) \tag{3.1.20}$$

eşitliği sağlanır.

Sobolev gömülme teoreminden

$$\left\|\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x\right\|_{L^\infty} \leq \left\|\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x\right\|_{W^{1,p}}$$

ve

$$\left\|\mathcal{L}^{-1}y\right\|_{L^\infty} \leq \left\|\mathcal{L}^{-1}y\right\|_{W^{1,p}}$$

olduğu bilinmektedir. Yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve sabit bir $C > 0$ sayısı için Sobolev gömülme teoremi göz önüne alınırsa

$$\left\|\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x\right\|_{L^\infty} + \left\|\mathcal{L}^{-1}y\right\|_{L^\infty} \leq \left\|\mathcal{L}^{-1}y\right\|_{W^{1,p}} + \left\|(\mathcal{L}^{-1}y)_x\right\|_{W^{1,p}}$$
$$\leq C\left\|\mathcal{L}^{-1}y\right\|_Y$$

olacaktır. Son eşitsizliğin sağ tarafına (3.1.19) eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}\left\|\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x\right\|_{L^\infty} + \left\|\mathcal{L}^{-1}y\right\|_{L^\infty} &\leq C\left\|\mathcal{L}^{-1}y\right\|_Y \\ &= C\,\|y\|_X \\ &\leq C\,\|y\|_Y \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sobolev gömülme teoreminden

$$\|y\|_{L^\infty} \leq C\, \|y\|_Y \tag{3.1.22}$$

ve

$$\left\|(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X \leq \left\|\mathcal{L}^{-1}w\right\|_Y \tag{3.1.23}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (3.1.23)'te ifade edilen eşitsizliğe (3.1.19) uygulanırsa

$$\left\|(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X \leq \left\|\mathcal{L}^{-1}w\right\|_Y = \|w\|_X \tag{3.1.24}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Yine (3.1.19) eşitsizliğinden

$$\left\|\mathcal{L}^{-1}w\right\|_X \leq \|w\|_X \tag{3.1.25}$$

olduğu bilinmektedir.

Tüm bu hazırlıklardan sonra ispata geçebiliriz. $\forall M > 0$ ve $\forall w, y \in Y$ için $\|y\|_Y \leq M$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left\|(\mathcal{L}A(y) - A(y)\mathcal{L})\mathcal{L}^{-1}w\right\|_X \\
&= \left\|\mathcal{L}\left(A(y)\mathcal{L}^{-1}w\right) - A(y)\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}w\right\|_X \\
&= \left\|A(y)\mathcal{L}^{-1}w - \left(A(y)\mathcal{L}^{-1}w\right)_{xx} - A(y)w\right\|_X \\
&= \left\|\mathcal{L}^{-1}y(\mathcal{L}^{-1}w)_x - \left(\mathcal{L}^{-1}y(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right)_{xx} - \mathcal{L}^{-1}(y)w_x\right\|_X \\
&= \left\|\mathcal{L}^{-1}y(\mathcal{L}^{-1}w)_x - \left[\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w)_x + \left(\mathcal{L}^{-1}y\right)\left(\mathcal{L}^{-1}w\right)_{xx}\right]_x - \mathcal{L}^{-1}(y)w_x\right\|_X \\
&= \left\|\mathcal{L}^{-1}y(\mathcal{L}^{-1}w)_x - \left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_{xx}(\mathcal{L}^{-1}w)_x - 2\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w)_{xx} - \left(\mathcal{L}^{-1}y\right)(\mathcal{L}^{-1}w)_{xxx}\right. \\
&\left.-\mathcal{L}^{-1}(y)w_x\right\|_X
\end{aligned}$$

son eşitlikte $(\mathcal{L}^{-1}w)_{xxx} = (\mathcal{L}^{-1}w_{xx})_x = (\mathcal{L}^{-1}w - w)_x = (\mathcal{L}^{-1}w)_x - w_x$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\left\|(\mathcal{L}A(y) - A(y)\mathcal{L})\mathcal{L}^{-1}w\right\|_X \\
&= \left\|\mathcal{L}^{-1}y(\mathcal{L}^{-1}w)_x - \left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_{xx}(\mathcal{L}^{-1}w)_x - 2\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w)_{xx}\right. \\
&\left.- \left(\mathcal{L}^{-1}y\right)\left[(\mathcal{L}^{-1}w)_x - w_x\right] - \mathcal{L}^{-1}(y)w_x\right\|_X \\
&= \left\|\mathcal{L}^{-1}y(\mathcal{L}^{-1}w)_x - \left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_{xx}(\mathcal{L}^{-1}w)_x - 2\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w)_{xx} - \left(\mathcal{L}^{-1}y\right)(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X
\end{aligned}$$

olacaktır. Son eşitliğin ikinci ve üçüncü terimine (3.1.20) uygulanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\left\|(\mathcal{L}A(y)-A(y)\mathcal{L})\mathcal{L}^{-1}w\right\|_X\\
&=\left\|\mathcal{L}^{-1}y(\mathcal{L}^{-1}w)_x-\left(\mathcal{L}^{-1}y_{xx}\right)(\mathcal{L}^{-1}w)_x-2\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w_{xx})-\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X\\
&=\left\|\mathcal{L}^{-1}(y-y_{xx})(\mathcal{L}^{-1}w)_x-2\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w_{xx})-\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X\\
&=\left\|\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}y(\mathcal{L}^{-1}w)_x-2\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w_{xx})-\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X\\
&=\left\|y(\mathcal{L}^{-1}w)_x-2\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w_{xx})-\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafına $2\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w)$ terimini ekleyip çıkaralım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\left\|(\mathcal{L}A(y)-A(y)\mathcal{L})\mathcal{L}^{-1}w\right\|_X\\
&=\left\|y(\mathcal{L}^{-1}w)_x-2\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w_{xx})+2\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w)-2\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w)\right.\\
&\left.-\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X\\
&=\left\|y(\mathcal{L}^{-1}w)_x+2\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x\left(\mathcal{L}^{-1}(w-w_{xx})\right)-2\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w)-\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X\\
&=\left\|y(\mathcal{L}^{-1}w)_x+2\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x\left(\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}w\right)-2\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w)-\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X\\
&=\left\|y(\mathcal{L}^{-1}w)_x+2\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x w-2\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w)-\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X \qquad (3.1.26)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (3.1.26)'da normun üçgen eşitsizliği özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left\|(\mathcal{L}A(y)-A(y)\mathcal{L})\mathcal{L}^{-1}w\right\|_X\\
&\leq\left\|y(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X+2\left\|\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x w\right\|_X+2\left\|\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w)\right\|_X\\
&+\left\|\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X \qquad (3.1.27)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (3.1.27)'de elde edilen eşitsizliğinin herbir terimini sırasıyla inceleyelim.

Birinci terim,

$$\left\|y(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X\leq\|y\|_{L^\infty}\left\|(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X$$

olarak yazılabilir. Burada son eşitsizliğe (3.1.22) ve (3.1.24) uygulanırsa

$$\left\|y(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X\leq C\,\|y\|_Y\,\|w\|_X \qquad (3.1.28)$$

eşitsizliği elde edilir.

İkinci terim,

$$2\left\|\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x w\right\|_X \leq 2\left\|\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x\right\|_{L^\infty}\|w\|_X$$

şeklinde olup (3.1.21) uygulanırsa

$$2\left\|\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x w\right\|_X \leq 2C\|y\|_Y\|w\|_X \tag{3.1.29}$$

eşitsizliği elde edilir.

Üçüncü terim,

$$2\left\|\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w)\right\|_X \leq 2\left\|\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x\right\|_{L^\infty}\left\|\mathcal{L}^{-1}w\right\|_X$$

şeklindedir. Son eşitsizlikte (3.1.21) ve (3.1.25) kullanılırsa

$$2\left\|\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w)\right\|_X \leq 2C\|y\|_Y\|w\|_X \tag{3.1.30}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Son olarak dördüncü terim,

$$\left\|\mathcal{L}^{-1}y(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X \leq \left\|\mathcal{L}^{-1}y\right\|_{L^\infty}\left\|(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X$$

olacak şekilde yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafına (3.1.21) ve (3.1.24) uygulanırsa

$$\left\|\mathcal{L}^{-1}y(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X \leq C\|y\|_Y\|w\|_X \tag{3.1.31}$$

eşitsizliği elde edilir.

Yukarıda (3.1.28)'den başlayıp (3.1.31)'e kadar parça parça incelediğimiz eşitsizlikleri düzenli bir şekilde yazalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\left\|(\mathcal{L}A(y) - A(y)\mathcal{L})\mathcal{L}^{-1}w\right\|_X \\
&\leq \left\|y(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X + 2\left\|\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x w\right\|_X + 2\left\|\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)_x(\mathcal{L}^{-1}w)\right\|_X + \left\|\left(\mathcal{L}^{-1}y\right)(\mathcal{L}^{-1}w)_x\right\|_X \\
&\leq C\|y\|_Y\|w\|_X + 2C\|y\|_Y\|w\|_X + 2C\|y\|_Y\|w\|_X + C\|y\|_Y\|w\|_X \\
&= 6C\|y\|_Y\|w\|_X \\
&\leq 6CM\|w\|_X \\
&= \mu_1(M)\|w\|_X
\end{aligned}$$

olacaktır. Böylece $\mu_1(M) = 6CM$ olmak üzere Kato Teoremi'nin 3. koşulunun sağlandığı gösterilerek ispat tamamlanmış olur. ■

İspat. [4. Koşulun İspatı] Burada (3.1.16)'da verilen problem için Kato Teoremi'nin 4. koşulunun sağlandığını göstereceğiz. İspata geçmeden önce kullanacağımız eşitsizlikleri ifade edelim.

Operatörün lineerlik özelliği ile (3.1.19)'dan

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{L}^{-1}(y_1)-\mathcal{L}^{-1}(y_2)\right\|_X &= \left\|\mathcal{L}^{-1}(y_1-y_2)\right\|_X \\
&\leq \left\|\mathcal{L}^{-1}(y_1-y_2)\right\|_Y \\
&= \|(y_1-y_2)\|_X \\
&\leq \|(y_1-y_2)\|_Y
\end{aligned} \tag{3.1.32}$$

olacaktır. Sobolev gömülme teoremi ile (3.1.19)'dan

$$\left\|(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x\right\|_X \leq \left\|\mathcal{L}^{-1}y_1\right\|_Y = \|y_1\|_X \tag{3.1.33}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca (3.1.14) eşitsizliği ile Y uzayının tanımı göz önüne alınırsa

$$\left\|\mathcal{L}^{-1}(y_2-y_1)_x\right\|_Y \overset{3.1.14}{=} \|(y_2-y_1)_x\|_X \leq \|y_2-y_1\|_Y \tag{3.1.34}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Yukarıdaki hazırlıklardan sonra ispatı gerçekleştirebiliriz. $\forall y_1,\, y_2 \in Y$ için

$$\begin{aligned}
&\|F(y_1)-F(y_2)\|_X \\
&= \left\|-2(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x(y_1+k)-\lambda y_1-\left[-2(\mathcal{L}^{-1}(y_2))_x(y_2+k)-\lambda y_2\right]\right\|_X \\
&= \left\|-2\left[(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x(y_1+k)-(\mathcal{L}^{-1}(y_2))_x(y_2+k)\right]-\lambda(y_1-y_2)\right\|_X \\
&\leq 2\left\|y_1(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x-y_2(\mathcal{L}^{-1}(y_2))_x+k\left[(\mathcal{L}^{-1}(y_1)_x-\mathcal{L}^{-1}(y_2)_x\right]\right\|_X+\lambda\|y_1-y_2\|_X
\end{aligned}$$

olacaktır. Son eşitsizlikte operatörün lineerlik özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\|F(y_1)-F(y_2)\|_X \\
&\leq 2\left\|y_1(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x-y_2(\mathcal{L}^{-1}(y_2))_x+k\left[(\mathcal{L}^{-1}(y_1-y_2)_x\right]\right\|_X+\lambda\|y_1-y_2\|_X \\
&\leq 2\left\|y_1(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x-y_2(\mathcal{L}^{-1}(y_2))_x\right\|_X+2k\left\|(\mathcal{L}^{-1}(y_1-y_2))_x\right\|_X+\lambda\|y_1-y_2\|_X
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Son eşitsizliğin sağ tarafına $y_2(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x$ terimi eklenir ve çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
&\|F(y_1) - F(y_2)\|_X \\
&\leq 2\left\|y_1(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x - y_2(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x + y_2(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x - y_2(\mathcal{L}^{-1}(y_2))_x\right\|_X \\
&+ 2k\left\|(\mathcal{L}^{-1}(y_1 - y_2))_x\right\|_X + \lambda\|y_1 - y_2\|_X \\
&= 2\left\|(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x(y_1 - y_2) + y_2\left[(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x - (\mathcal{L}^{-1}(y_2))_x\right]\right\|_X \\
&+ 2k\left\|(\mathcal{L}^{-1}(y_1 - y_2))_x\right\|_X + \lambda\|y_1 - y_2\|_X \\
&= 2\left\|(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x(y_1 - y_2) + y_2(\mathcal{L}^{-1}(y_1 - y_2)_x\right\|_X \\
&+ 2k\left\|(\mathcal{L}^{-1}(y_1 - y_2))_x\right\|_X + \lambda\|y_1 - y_2\|_X \\
&\leq 2\left\|(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x(y_1 - y_2)\right\|_X + 2\left\|y_2(\mathcal{L}^{-1}(y_1 - y_2)_x\right\|_X \\
&+ 2k\left\|(\mathcal{L}^{-1}(y_1 - y_2))_x\right\|_X + \lambda\|y_1 - y_2\|_X \\
&\leq 2\left\|(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x\right\|_{L^\infty}\|y_1 - y_2\|_X + 2\|y_2\|_X\left\|(\mathcal{L}^{-1}(y_1 - y_2))_x\right\|_{L^\infty} \\
&+ 2k\left\|(\mathcal{L}^{-1}(y_1 - y_2))_x\right\|_X + \lambda\|y_1 - y_2\|_X
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizlikte Sobolev gömülme teoremi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\|F(y_1) - F(y_2)\|_X \\
&\leq 2C\left\|\mathcal{L}^{-1}(y_1)\right\|_Y\|y_1 - y_2\|_X + 2C\|y_2\|_X\left\|\mathcal{L}^{-1}(y_1 - y_2)\right\|_Y \\
&+ 2k\left\|(\mathcal{L}^{-1}(y_1 - y_2))_x\right\|_X + \lambda\|y_1 - y_2\|_X
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizlikte (3.1.19), (3.1.32) ve (3.1.33) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
&\|F(y_1) - F(y_2)\|_X \\
&\leq 2C\|y_1\|_X\|y_1 - y_2\|_X + 2C\|y_2\|_X\|y_1 - y_2\|_X \\
&+ 2k\|y_1 - y_2\|_X + \lambda\|y_1 - y_2\|_X \\
&= (2C\|y_1\|_X + 2C\|y_2\|_X + 2k + \lambda)\|y_1 - y_2\|_X \\
&= \mu_2\|y_1 - y_2\|_X
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada μ_2 katsayısı

$$\mu_2 = (2C\|y_1\|_X + 2C\|y_2\|_X + 2k + \lambda)$$

olacak şekilde yazılabilir.

Benzer şekilde $\forall y_1,\, y_2 \in Y$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\|F(y_1) - F(y_2)\|_Y \\
&= \left\| -2(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x(y_1 + k) - \lambda y_1 - \left[-2(\mathcal{L}^{-1}(y_2))_x(y_2 + k) - \lambda y_2 \right] \right\|_Y \\
&= \left\| -2\left[(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x(y_1 + k) - (\mathcal{L}^{-1}(y_2))_x(y_2 + k) \right] - \lambda(y_1 - y_2) \right\|_Y \\
&\leq 2\left\| (\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x(y_1 + k) - (\mathcal{L}^{-1}(y_2))_x(y_2 + k) \right\|_Y + \lambda \|y_1 - y_2\|_Y
\end{aligned}
$$

eşitsizliğinin sağ tarafına $(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x(y_2 + k)$ terimi eklenip çıkarılır ve operatörün lineerlik özelliği uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&\|F(y_1) - F(y_2)\|_Y \\
&\leq 2\left\| (\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x(y_1 + k) - (\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x(y_2 + k) + (\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x(y_2 + k) - (\mathcal{L}^{-1}(y_2))_x(y_2 + k) \right\|_Y \\
&+ \lambda \|y_1 - y_2\|_Y \\
&= 2\left\| (\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x(y_1 + k - y_2 - k) + (y_2 + k)\left[(\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x - (\mathcal{L}^{-1}(y_2))_x \right] \right\|_Y + \lambda \|y_1 - y_2\|_Y \\
&= 2\left\| (\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x(y_1 - y_2) + (y_2 + k)(\mathcal{L}^{-1}(y_1 - y_2))_x \right\|_Y + \lambda \|y_1 - y_2\|_Y \\
&\leq 2\left\| (\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x(y_1 - y_2) \right\|_Y + 2\left\| (y_2 + k)(\mathcal{L}^{-1}(y_1 - y_2))_x \right\|_Y + \lambda \|y_1 - y_2\|_Y \\
&\leq 2\left\| (\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x \right\|_{L^\infty} \|y_1 - y_2\|_Y + 2\|y_2 + k\|_{L^\infty} \left\| (\mathcal{L}^{-1}(y_1 - y_2))_x \right\|_Y + \lambda \|y_1 - y_2\|_Y \\
&\leq 2\left\| (\mathcal{L}^{-1}(y_1))_x \right\|_{L^\infty} \|y_1 - y_2\|_Y + 2(\|y_2\|_{L^\infty} + k) \left\| (\mathcal{L}^{-1}(y_1 - y_2))_x \right\|_Y + \lambda \|y_1 - y_2\|_Y
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki son eşitsizliğe Sobolev gömülme teoremi ile (3.1.34) eşitsizliği uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&\|F(y_1) - F(y_2)\|_Y \\
&\leq 2C\left\| \mathcal{L}^{-1}(y_1) \right\|_Y \|y_1 - y_2\|_Y + (2C\|y_2\|_Y + 2k)\|y_1 - y_2\|_Y + \lambda \|y_1 - y_2\|_Y \\
&\leq 2C\|y_1\|_Y \|y_1 - y_2\|_Y + (2C\|y_2\|_Y + 2k)\|y_1 - y_2\|_Y + \lambda \|y_1 - y_2\|_Y \\
&= 2C\|y_1\|_Y + 2C\|y_2\|_Y + 2k + \lambda)\|y_1 - y_2\|_Y \\
&= \mu_3 \|y_1 - y_2\|_Y
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada μ_3 katsayısı ise

$$
\mu_3 = 2C(\|y_1\|_Y + \|y_2\|_Y) + 2k + \lambda
$$

olacak şekilde mevcuttur. Böylece (3.1.16) problemi için Kato Teoremi'nin 4. koşulunun sağlandığı gösterilmiş olur.

Dolayısıyla lemma 49 ve lemma 50'nin ispatından Teorem 48'in ispatı tamamlanmış olur. Bu durumda $\mathcal{L}$: $W^{4,p}(\mathbb{R}) \to W^{2,p}(\mathbb{R})$ dönüşümü birebir ve örten bir dönüşüm olduğu için (3.1.16) probleminin $w = u - u_{xx}$ olacak şekilde tek olarak belirli bir u çözümü mevcuttur. ■

Sonuç 51 $u_0 \in W^{4,p}(\mathbb{R})$ *olmak üzere (3.1) başlangıç değer probleminin belli bir sabit* $T > 0$ *sayısı için*

$$C([0,T); W^{4,p}(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T); W^{2,p}(\mathbb{R}))$$

uzayında çözümü var ve tektir.

3.2 Zayıf Disipatif Camassa-Holm Denkleminin Yerel Çözümünün k Dispersiv Katsayısına Sürekli Bağlılığı

Bu alt bölümde, (3.1)'de verilen Zayıf Disipatif Camassa-Holm denkleminin yerel kuvvetli çözümünün k dispersiv katsayısına sürekli bağlılığı incelenecektir. Bu incelemeyi gerçekleştirebilmek için aşağıda ifade edilen teorem ispatlanacaktır.

Teoremin ifade ve ispatına geçmeden önce aşağıdaki ifadeleri göz önüne alalım.

$$\begin{cases} u_{kt} - u_{kxxt} + 3u_k u_{kx} + 2ku_{kx} + \lambda(u_k - u_{kxx}) = 2u_{kx}u_{kxx} + u_k u_{kxxx}, & (x,t) \in Q_T \\ u_k(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Başlangıç değer probleminin kuvvetli yerel çözümü u_k olmak üzere verilen bu problemi $w_k = u_k - u_{kxx}$ işaretlemesini kullanarak yazarsak

$$\begin{cases} w_{kt} + u_k w_{kx} + \lambda w_k = -2u_{kx}(w_k + k), & (x,t) \in Q_T \\ w_k(x,0) = w_{k0}(x) := u_0(x) - u_{0_{xx}}(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.2.2}$$

problemi elde edilir. Ayrıca bir önceki bölümden elde edilen sonuç gereğince

$$w_k(x,t) \in C([0,T); W^{2,p}(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T); L^p(\mathbb{R}))$$
$$u_k(x,t) \in C([0,T); W^{4,p}(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T); W^{2,p}(\mathbb{R}))$$

ifadelerine sahip olduğumuz açıktır.

Teorem 52 *(3.2.2)'de verilen başlangıç değer probleminin çözümü* w_k *ve (3.1.2)'de verilen başlangıç değer probleminin* $k = 0$ *için çözümü ise* w *olsun. Bu durumda,*

$z_k = w_k - w$ için w ile w_k çözümlerinin ortak mevcut olduğu aralık (lifespan) T olmak üzere,

$$\sup_{t\in[0,T]} \|w_k - w\|_{W^{1,p}} \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow 0$$

olur.

İspat. Burada, (3.2.2)'de elde edilen

$$\begin{cases} w_{kt} + u_k w_{kx} = -2u_{kx}(w_k + k) - \lambda w_k, & (x,t) \in Q_T \\ w_k(x,0) = w_{k0}(x) := u_0(x) - u_{0_{xx}}(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

problem ile (3.1.2)'de $k = 0$ yazılarak oluşturulan

$$\begin{cases} w_t + u w_x = -2u_x w - \lambda w, & (x,t) \in Q_T \\ w(x,0) = w_0(x) := u_0(x) - u_{0_{xx}}(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

problem taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned} &(w_k - w)_t + u_k w_{kx} - u w_x \\ &= -2u_{kx}(w_k + k) + 2u_x w - \lambda(w_k - w) \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

eşitliğine ulaşılır. Ayrıca $u = \mathcal{L}^{-1}(w)$ ile $u_k = \mathcal{L}^{-1}(w_k)$ dönüşümleri (3.2.3) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &(w_k - w)_t + \mathcal{L}^{-1}(w_k) w_{kx} - \mathcal{L}^{-1}(w) w_x \\ &= -2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x (w_k + k) + 2\left(\mathcal{L}^{-1}(w)\right)_x w - \lambda(w_k - w) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte $z_k = w_k - w$ alınır ve eşitliğin sol tarafına $\mathcal{L}^{-1}(w) w_{kx}$ terimi eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned} &z_{kt} + \mathcal{L}^{-1}(w_k) w_{kx} - \mathcal{L}^{-1}(w) w_{kx} + \mathcal{L}^{-1}(w) w_{kx} - \mathcal{L}^{-1}(w) w_x \\ &= -2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x (w_k + k) + 2\left(\mathcal{L}^{-1}(w)\right)_x w - \lambda z_k \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bulunan bu son eşitlikte $\mathcal{L}^{-1}$ operatörünün lineerlik özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} &z_{kt} + \mathcal{L}^{-1}(w_k - w) w_{kx} + \mathcal{L}^{-1}(w)(w_k - w)_x \\ &= -2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x (w_k + k) + 2\left(\mathcal{L}^{-1}(w)\right)_x w - \lambda z_k \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} &z_{kt} + \mathcal{L}^{-1}(z_k) w_{kx} + \mathcal{L}^{-1}(w) z_{kx} \\ &= -2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x (w_k + k) + 2\left(\mathcal{L}^{-1}(w)\right)_x w - \lambda z_k \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada son eşitliğin sağ tarafına $2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x w$ terimi eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
&z_{kt}+\mathcal{L}^{-1}(z_k)w_{kx}+\mathcal{L}^{-1}(w)z_{kx}\\
&=-2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x w_k-2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x k+2\left(\mathcal{L}^{-1}(w)\right)_x w+2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x w\\
&-2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x w-\lambda z_k
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte $\mathcal{L}^{-1}$ operatörünün lineerlik özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&z_{kt}+\mathcal{L}^{-1}(z_k)w_{kx}+\mathcal{L}^{-1}(w)z_{kx}\\
&=-2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k-w)\right)_x w-2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x k-2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x w_k+2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x w-\lambda z_k\\
&=-2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k-w)\right)_x w-2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x k-2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x (w_k-w)-\lambda z_k
\end{aligned}$$

olacaktır. Buradan ise

$$\begin{aligned}
&z_{kt}+\mathcal{L}^{-1}(z_k)w_{kx}+\mathcal{L}^{-1}(w)z_{kx}\\
&=-2\left(\mathcal{L}^{-1}(z_k)\right)_x w-2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x k-2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x (z_k)-\lambda z_k
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Yukarıdaki eşitlikte $u_k=\mathcal{L}^{-1}(w_k)$ olduğunu göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}
&z_{kt}+\mathcal{L}^{-1}(z_k)w_{kx}+\mathcal{L}^{-1}(w)z_{kx}\\
&=-2\left(\mathcal{L}^{-1}(z_k)\right)_x w-2\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x z_k-2ku_{kx}-\lambda z_k,\quad (x,t)\in Q_T
\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

elde edilmiş olur. (3.2.4) eşitliğinin her iki tarafı $|z_k|^{p-2}z_k$ ile çarpılır ve sonrasında $\mathbb{R}$ üzerinde integrallenirse

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|z_k\|^p_{L^p(\mathbb{R})}+\int_{\mathbb{R}} w_{kx}z_k|z_k|^{p-2}\mathcal{L}^{-1}(z_k)dx+\int_{\mathbb{R}} z_{kx}z_k|z_k|^{p-2}\mathcal{L}^{-1}(w)dx\\
&=-2\int_{\mathbb{R}} wz_k|z_k|^{p-2}\left(\mathcal{L}^{-1}(z_k)\right)_x dx-2\int_{\mathbb{R}}|z_k|^p\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x dx\\
&-2k\int_{\mathbb{R}} u_{kx}z_k|z_k|^{p-2}dx-\lambda\int_{\mathbb{R}} z_kz_k|z_k|^{p-2}dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu son eşitliğe Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|z_k\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\\
&\le p\|w_{kx}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\left\|\mathcal{L}^{-1}(z_k)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\|z_k\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R})}\\
&+p\left\|\mathcal{L}^{-1}(w)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|z_{kx}\|_{L^p(\mathbb{R})}\|z_k\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R})}\\
&+2p\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\left\|(\mathcal{L}^{-1}(z_k))_x\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\|z_k\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R})}\\
&+2p\left\|\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|z_k\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\\
&+2kp\|u_{kx}\|_{L^p(\mathbb{R})}\|z_k\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R})}
\end{aligned}\tag{3.2.5}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Yukarıda elde edilen eşitsizliği değerlendirebilmek için Y uzayının tanımı, Sobolev gömülme teoremi ve (3.1.19) eşitsizliği kullanılarak

$$\|w_{kx}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\|w_k\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})} \tag{3.2.6}$$

$$\|z_{kx}\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|w_{kx}\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|w_x\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|w_k\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})} + \|w\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})} \tag{3.2.7}$$

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{L}^{-1}(z_k)\right\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq C\left\|\mathcal{L}^{-1}(z_k)\right\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})} \\ &= C\left\|\mathcal{L}^{-1}(z_k)\right\|_Y \\ &= C\|z_k\|_{L^p(\mathbb{R})} \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

$$\begin{aligned} \left\|(\mathcal{L}^{-1}(z_k))_x\right\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq C\left\|\mathcal{L}^{-1}(z_k)\right\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})} \\ &= C\left\|\mathcal{L}^{-1}(z_k)\right\|_Y \\ &= C\|z_k\|_{L^p(\mathbb{R})} \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{L}^{-1}(w)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq C\left\|\mathcal{L}^{-1}(w)\right\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})} \\ &= C\left\|\mathcal{L}^{-1}(w)\right\|_Y \\ &= C\|w\|_{L^p(\mathbb{R})} \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

$$\begin{aligned} \left\|\left(\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right)_x\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq C\left\|\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})} \\ &= C\left\|\mathcal{L}^{-1}(w_k)\right\|_Y \\ &= C\|w_k\|_{L^p(\mathbb{R})} \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

eşitsizliklerine ulaşılır. (3.2.6) - (3.2.11) eşitsizliklerini (3.2.5) eşitsizliğine uygulayacak olursak

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|z_k\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq C\|w_k\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})}\|z_k\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \\ &+ C\|w\|_{L^p(\mathbb{R})}\left(\|z_{kx}\|^p_{L^p(\mathbb{R})} + \|z_k\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right) \\ &+ C\|w\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})}\|z_k\|^p_{L^p(\mathbb{R})} + C\|w_k\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\|z_k\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \\ &+ Ck\left(\|u_{kx}\|^p_{L^p(\mathbb{R})} + \|z_k\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right) \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, $w_k, w \in C([0,T]\,;W^{2,p}(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T]\,;L^p(\mathbb{R}))$ olduğundan aşağıda verilen eşitlikleri

$$M = \sup_{t\in[0,T]} \|w\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})}$$
$$M_1 = \sup_{t\in[0,T]} \|w_k\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})}$$

olacak şekilde yazabiliriz. Kato Teoremi'nin ispatında [66], $0 \leq |k| \leq 1$ olduğundan M_1'in k'dan bağımsız olduğu bilinmektedir. Bu durumda C gibi k'dan bağımsız sabit bir sayı vardır. O halde, (3.2.12)'de verilen eşitsizliği daha basit bir şekilde ifade edebiliriz. Böylece

$$\frac{d}{dt}\|z_k\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\left(\|z_k\|^p_{L^p(\mathbb{R})} + \|z_{kx}\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right) + Ck \tag{3.2.13}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Ayrıca $\|z_{kx}\|_{L^p(\mathbb{R})}$ terimini değerlendirebiliriz. Bu amaçla (3.2.4)'te verilen eşitliğin her iki tarafı önce $|z_{kx}|^{p-2}\, z_{kxx}$ ile çarpılır sonrasında $\mathbb{R}$ üzerinde integrallenirse

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|z_{kx}\|^p_{L^p(\mathbb{R})} + \int_{\mathbb{R}} z_{kx}\,|z_{kx}|^{p-2}\,(\mathcal{L}^{-1}(z_k)w_{kx})_x dx + \frac{p-1}{p}\int_{\mathbb{R}} |z_{kx}|^p\,(\mathcal{L}^{-1}(w))_x dx \\
&= -2\int_{\mathbb{R}} z_{kx}\,|z_{kx}|^{p-2}\,(\mathcal{L}^{-1}(z_k)w)_x dx - 2\int_{\mathbb{R}} \left[z_k z_{kx}\,|z_{kx}|^{p-2}\,(\mathcal{L}^{-1}(w_k))_{xx} + |z_{kx}|^p\,(\mathcal{L}^{-1}(w_k))_x\right] dx \\
&- 2k\int_{\mathbb{R}} u_{kxx} z_{kx}\,|z_{kx}|^{p-2}\, dx - \lambda\int_{\mathbb{R}} z_k\,|z_{kx}|^{p-2}\, z_{kx} dx
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\mathcal{L}$'nin tanımı kullanılır ve (3.2.13)'ün elde edilmesindeki benzer işlemler gerçekleştirilirse

$$\frac{d}{dt}\|z_{kx}\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\left(\|z_k\|^p_{L^p(\mathbb{R})} + \|z_{kx}\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right) + Ck \tag{3.2.14}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Dolayısıyla (3.2.13) ile (3.2.14) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\frac{d}{dt}\|z_k\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\left(\|z_k\|^p_{L^p(\mathbb{R})} + \|z_{kx}\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right) + Ck$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, son eşitsizlikte başlangıç değeri

$$z_k\,|_{t=0} = 0$$

olmak üzere Gronwall eşitsizliği kullanılırsa Teorem 52'nin ispatı tamamlanmış olur. ∎

Burada Lemma 47'den $k \longrightarrow 0$ iken $u_k \longrightarrow u$ olduğu da bilinmektedir.

Sonuç 53 *(3.2.1) probleminin çözümü u_k ve bu problemin aynı başlangıç değeri için (3.1) probleminin $k = 0$ olmak üzere çözümü ise u olsun. Bu durumda*

$$\lim_{k \longrightarrow 0} \sup_{t \in [0,T]} \|u_k - u\|_{W^{3,p}(\mathbb{R})} = 0$$

4 DENKLEMİN GLOBAL ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI

Bu bölümde, zayıf disipatif terim içeren Camassa-Holm denkleminin Cauchy problemi:

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} + 3uu_x + 2ku_x + \lambda(u - u_{xx}) = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, & (x,t) \in Q_T \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.1}$$

şeklinde olup bu problemin global çözümünün varlığı $k = 0$ ve $k \neq 0$ durumları için ele alınarak iki alt bölümde incelenecektir.

4.1 $k = 0$ Olması Durumunda Global Çözümün Varlığının İncelenmesi

Bu alt bölümde, (4.1)'de verilen problemin global çözümünün varlığı, $k = 0$ olmak üzere w_0 başlangıç koşulunun işaretinin değişmez olması varsayımı altında incelenecektir. Bu inceleme gerçekleştirilirken

$$\begin{cases} \frac{dx(x_0,t)}{dt} = u(x(x_0,t),t), & t > 0 \\ x(x_0,t) \mid_{[t=0]} = x_0, & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.1.1}$$

probleminin çözümü olan karakteristik eğrilerden yararlanılacaktır. Burada $x(x_0,t)$, xt düzlemi üzerindeki $(x_0,0)$ noktasından geçen karakteristik eğridir. Ayrıca $u(x,t)$ için sonuç 51 göz önünde bulundurulduğunda

$$u(x,t) \in C([0,T]\,; W^{4,p}(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T]\,; W^{2,p}(\mathbb{R}))$$

olduğu bilinmektedir. Bununla birlikte $u(x,t)$ fonksiyonu $x \in \mathbb{R}$ için $G(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ olmak üzere

$$G(x) * w(x,t) = u(x,t)$$

olacak şekilde konvolüsyon dönüşümü ile verilmiştir. Bu dönüşümün doğruluğunu aşağıdaki adımları takip ederek gösterebiliriz.

$$\begin{aligned}
G(x) * w(x,t) &= \frac{1}{2}e^{-|x|} * w(x,t) \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-\xi|} w(\xi,t)d\xi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{\xi-x} w(\xi,t)d\xi + \frac{1}{2}\int_{x}^{+\infty} e^{x-\xi} w(\xi,t)d\xi \\
&= \frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{\xi} w(\xi,t)d\xi + \frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{+\infty} e^{-\xi} w(\xi,t)d\xi
\end{aligned}$$

bulunmuş olur. $w = (1-\partial_x^2)u = u - u_{xx}$ işaretlemesini yukarıdaki son eşitlikte yerine yazıp kısmi integrasyon formülünü uygulayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&G(x) * w(x,t) \\
&= \frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{\xi}\left(u(\xi,t) - u_{\xi\xi}(\xi,t)\right)d\xi + \frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{+\infty} e^{-\xi}\left(u(\xi,t) - u_{\xi\xi}(\xi,t)\right)d\xi \\
&= \frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{\xi}u(\xi,t)d\xi - \frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{\xi}u_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi + \frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{+\infty} e^{-\xi}u(\xi,t)d\xi - \frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{+\infty} e^{-\xi}u_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi \\
&= \frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{\xi}u(\xi,t)d\xi + \frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{\xi}u_{\xi}(\xi,t)d\xi - \frac{1}{2}e^{-x}\left(e^{\xi}u_{\xi}(\xi,t)\right)|_{-\infty}^{x} + \frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{+\infty} e^{-\xi}u(\xi,t)d\xi \\
&- \left[-\frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{+\infty} - e^{-\xi}u_{\xi}(\xi,t)d\xi + \frac{1}{2}e^{x}\left(e^{-\xi}u_{\xi}(\xi,t)\right)|_{x}^{\infty}\right]
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\xi \longrightarrow -\infty \text{ için } e^{\xi}u_{\xi}(\xi,t) \longrightarrow 0$$

ve

$$\xi \longrightarrow \infty \text{ için } e^{-\xi}u_{\xi}(\xi,t) \longrightarrow 0$$

olacaktır. Dolayısıyla bu bilgiler yukarıdaki son eşitlikte kullanılır ve yeniden kısmi integralleme yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&G(x) * w(x,t) \\
&= \frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{\xi}u(\xi,t)d\xi + \frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{\xi}u_{\xi}(\xi,t)d\xi - \frac{1}{2}e^{0}u_x(x,t) + \frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{+\infty} e^{-\xi}u(\xi,t)d\xi \\
&- \frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{+\infty} e^{-\xi}u_{\xi}(\xi,t)d\xi + \frac{1}{2}e^{0}u_x(x,t) \\
&= \frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{\xi}u(\xi,t)d\xi - \frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{\xi}u(\xi,t)d\xi + \frac{1}{2}e^{-x}\left(e^{\xi}u(\xi,t)\right)|_{-\infty}^{x} + \frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{+\infty} e^{-\xi}u(\xi,t)d\xi \\
&- \left[-\frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{+\infty} - e^{-\xi}u(\xi,t)d\xi + \frac{1}{2}e^{x}\left(e^{-\xi}u(\xi,t)\right)|_{x}^{\infty}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada

$$\xi \longrightarrow -\infty \text{ için } e^{\xi}u(\xi,t) \longrightarrow 0$$

ve

$$\xi \longrightarrow \infty \text{ için } e^{-\xi}u(\xi,t) \longrightarrow 0$$

olacağından son eşitlik, bu bilgiler kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
&G(x) * w(x,t) \\
&= \frac{1}{2}e^{0}u(x,t) + \frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{+\infty} e^{-\xi}u(\xi,t)d\xi - \frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{+\infty} e^{-\xi}u(\xi,t)d\xi + \frac{1}{2}e^{0}u(x,t) \\
&= u(x,t)
\end{aligned}
$$

olacak şekilde bulunmuş olur.

(4.1.1)'de verilen karakteristik eğri denkleminin 0'dan t' ye integrali alınırsa

$$x(x_0,t) = x_0 + \int_{0}^{t} u(x(x_0,\tau),\tau)d\tau$$

integral denklemine ulaşılır. Burada u'nun $u(x,t) = G(x)*w(x,t)$ konvolüsyon dönüşümü ile elde edilen ifadesi göz önünde bulundurulursa

$$x(x_0,t) = x_0 + \frac{1}{2}\int_{0}^{t}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x(x_0,\tau)-\xi|}w(\xi,\tau)\,d\xi d\tau \tag{4.1.2}$$

integral denklemi elde edilmiş olur. a sabit bir sayı ve δ daha sonra belirlenecek oldukça küçük bir sayı olmak üzere

$$M = \sup_{(\xi,\tau)\in Q_T} |w(\xi,\tau)| \tag{4.1.3}$$

ve

$$Q_\delta = \{(x,t) \in Q_T : |x - x_0| \leq a,\ 0 < t \leq \delta\}$$

olsun. Ayrıca $x(x_0,t) = x_0 + h(x_0,t)$ işaretlemesini kullanarak bir operatör tanımlayalım. Bu operatörü

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(h)x_0 &= \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{-|x(x_0,\tau)-\xi|} w(\xi,\tau)\, d\xi d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{-|x_0+h(x_0,\tau)-\xi|} w(\xi,\tau)\, d\xi d\tau\end{aligned}$$

olacak şekilde ifade edebiliriz.

Şimdi, yukarıda tanımladığımız $\mathcal{F}(h)$ operatörünün

$$E = \left\{ h(x,t) \in C(Q_\delta) : \sup_{(x,t)\in Q_\delta} |h(x,t)| \leq M\delta \right\} \tag{4.1.4}$$

kümesi üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. Aynı zamanda teorem 48'den

$$w(x,t) \in C([0,T]\,; W^{2,p}(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T]\,; L^p(\mathbb{R}))$$

olduğu için Sobolev gömülme teoremi gereğince Q_δ üzerinde $\mathcal{F}(h)$ operatörü süreklidir.

Şimdi ise $\mathcal{F}(.) : E \longrightarrow E$ dönüşümünün daralma dönüşümü olduğunu ispatlayalım. Bunun için öncelikle $h \in E$ için $\mathcal{F}(h) \in E$ olduğunu göstermeliyiz. O halde $h \in E$ olmak üzere

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}(h)x_0| &= \left| \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{-|x_0+h(x_0,\tau)-\xi|} w(\xi,\tau)\, d\xi d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-|x_0+h(x_0,\tau)-\xi|} \right| |w(\xi,\tau)|\, d\xi d\tau\end{aligned}$$

olacak şekilde yazılabilir. Son eşitsizlikte (4.1.3) göz önünde bulundurulursa

$$|\mathcal{F}(h)x_0| \leq \frac{1}{2} \sup_{(\xi,\tau)\in Q_T} |w(\xi,\tau)| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{-|x_0+h(x_0,\tau)-\xi|} d\xi d\tau$$

veya

$$|\mathcal{F}(h)x_0| \leq \frac{M}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|x_0+h(x_0,\tau)-\xi|}d\xi d\tau \leq Mt \leq M\delta \tag{4.1.5}$$

elde edilir. Bu durumda $\mathcal{F}(h) \in E$ yani $\mathcal{F}(.)$'nin E'den E'ye bir dönüşüm olduğu gösterilmiş olur. Şimdi ise $h_1, h_2 \in E$ için

$$|\mathcal{F}(h_1)x_0 - \mathcal{F}(h_2)x_0|$$

farkını değerlendireceğiz. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{F}(h_1)x_0 - \mathcal{F}(h_2)x_0| \\
&= \left| \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|x_0+h_1(x_0,\tau)-\xi|} w(\xi,\tau)\, d\xi d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|x_0+h_2(x_0,\tau)-\xi|} w(\xi,\tau)\, d\xi d\tau \right| \\
&= \left| \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} \left[e^{-|x_0+h_1(x_0,\tau)-\xi|} - e^{-|x_0+h_2(x_0,\tau)-\xi|}\right] w(\xi,\tau) d\xi d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} \left|e^{-|x_0+h_1(x_0,\tau)-\xi|} - e^{-|x_0+h_2(x_0,\tau)-\xi|}\right| |w(\xi,\tau)|\, d\xi d\tau
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Son eşitsizlikte, (4.1.3) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{F}(h_1)x_0 - \mathcal{F}(h_2)x_0| \\
&\leq \frac{1}{2}\sup_{(\xi,\tau)\in Q_T} |w(\xi,\tau)| \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} \left|e^{-|x_0+h_1(x_0,\tau)-\xi|} - e^{-|x_0+h_2(x_0,\tau)-\xi|}\right| d\xi d\tau \\
&= \frac{M}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} \left|e^{-|x_0+h_1(x_0,\tau)-\xi|} - e^{-|x_0+h_2(x_0,\tau)-\xi|}\right| d\xi d\tau
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

olacak şekilde yazılabilir. (4.1.6)'da elde edilen ifadeye ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{F}(h_1)x_0 - \mathcal{F}(h_2)x_0| \\
&\leq \frac{M}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} \left|e^{-|x_0+\theta(\tau)-\xi|}\right| |h_1(x_0,\tau) - h_2(x_0,\tau)|\, d\xi d\tau \\
&\leq \frac{M}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|x_0+\theta(\tau)-\xi|} \sup_{0<t\leq\delta} |h_1(x_0,\tau) - h_2(x_0,\tau)|\, d\xi d\tau
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\theta(\tau)$ için

$$\min_{\xi}\left(h_1(\tau), h_2(\tau)\right) \leq \theta(\tau) \leq \max_{\xi}\left(h_1(\tau), h_2(\tau)\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Üçgen eşitsizliğinden

$$|x_0 + \theta(\tau) - \xi| = |\xi - (x_0 + \theta(\tau))| \geq |\xi| - |x_0 + \theta(\tau)|$$

veya

$$-|x_0 + \theta(\tau) - \xi| \leq |x_0 + \theta(\tau)| - |\xi| \leq |x_0| + |\theta(\tau)| - |\xi|$$

olduğu bilinmektedir. Buradan ise

$$e^{-|x_0+\theta(\tau)-\xi|} \leq e^{-|\xi|+|x_0+\theta(\tau)|} \leq e^{-|\xi|}e^{|\theta(\tau)|}e^{|x_0|} \tag{4.1.8}$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece (4.1.8) eşitsizliği, (4.1.7) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{F}(h_1)x_0 - \mathcal{F}(h_2)x_0| \\
&\leq \frac{M}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{-|\xi|}e^{|\theta(\tau)|+|x_0|}\sup_{0<t\leq\delta}|h_1(x_0,\tau) - h_2(x_0,\tau)|\,d\xi d\tau \\
&= \frac{M}{2}\sup_{0<t\leq\delta}|h_1(x_0,\tau) - h_2(x_0,\tau)|\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{-|\xi|}e^{|\theta(\tau)|+|x_0|}d\xi d\tau
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (4.1.9)'da elde edilen ifade (4.1.4) ve

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|\xi|}d\xi = 2$$

eşitliği kullanılarak yazılırsa

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{F}(h_1)x_0 - \mathcal{F}(h_2)x_0| \\
&\leq \frac{M}{2}e^{M\delta+|x_0|}\sup_{0<t\leq\delta}|h_1(x_0,\tau) - h_2(x_0,\tau)|\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{-|\xi|}d\xi d\tau \\
&\leq M\delta e^{M\delta}e^{|x_0|}\sup_{0<t\leq\delta}|h_1(x_0,\tau) - h_2(x_0,\tau)|
\end{aligned}$$

olacak şekilde bulunur. Son eşitsizlikte $\vartheta = M\delta e^{M\delta}e^{|x_0|}$ işaretlemesi kullanılırsa

$$|\mathcal{F}(h_1)x_0 - \mathcal{F}(h_2)x_0| \leq \vartheta\sup_{0<t\leq\delta}|h_1(x_0,\tau) - h_2(x_0,\tau)| \tag{4.1.10}$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada $\vartheta = M\delta e^{M\delta}e^{|x_0|}$ olup $\vartheta < 1$ için δ sağlandığında $\mathcal{F}(.) : E \longrightarrow E$ olacak şekilde tanımlanan dönüşümün (4.1.1 probleminin çözümünün) bir daralma dönüşümü olduğu gösterilmiş olur. Böylece Q_δ üzerinde $(x_0, 0)$'dan geçen bir ve yalnız bir karakteristik eğri vardır. δ sadece M'ye bağlı olduğunda $[0, T]$ üzerinde xt düzlemindeki $\forall(x, t) \in Q_T$ olmak üzere (x, t) noktasından geçen bir tek karakteristik eğrinin varolduğunu ispatlayabilmek için bu karakteristik eğrilerin başlangıç değerlere sürekli bağlı olduğunu gösterelim. Bu nedenle,

$L_1 : x = x(x_1, t)$ ve $L_2 : x = x(x_2, t)$ sırasıyla $(x_1, 0)$ ve $(x_2, 0)$ noktalarından geçen ve

$$\begin{cases} \frac{dx(x_0,t)}{dt} = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|x(x_0,t)-\xi|}w(\xi, t)d\xi, \quad t \in [0, T] \\ x(x_1, t) \mid_{[t=0]} = x_1 \end{cases} \tag{4.1.11}$$

$$\begin{cases} \frac{dx(x_0,t)}{dt} = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|x(x_0,t)-\xi|}w(\xi, t)d\xi, \quad t \in [0, T] \\ x(x_2, t) \mid_{[t=0]} = x_2 \end{cases} \tag{4.1.12}$$

olacak şekilde belirlenen doğrular olsun. O halde

$$|x(x_1, t) - x(x_2, t)|$$

farkını değerlendirelim. Buradan

$$\begin{aligned} &|x(x_1, t) - x(x_2, t)| \\ &= \left| \left(x_1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|x(x_1,\tau)-\xi|}w(\xi, \tau)d\xi d\tau \right) - \left(x_2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|x(x_2,\tau)-\xi|}w(\xi, \tau)d\xi d\tau \right) \right| \\ &= |x_1 - x_2| + \left| \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} \left[e^{-|x(x_1,\tau)-\xi|} - e^{-|x(x_2,\tau)-\xi|} \right] w(\xi, \tau)d\xi d\tau \right| \\ &\leq |x_1 - x_2| + \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \left| e^{-|x(x_1,\tau)-\xi|} - e^{-|x(x_2,\tau)-\xi|} \right| |w(\xi, \tau)| \, d\xi d\tau \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu son eşitsizlikte (4.1.3) eşitliği ve ortalama değer teoremi kullanılırsa

$$\begin{aligned} &|x(x_1, t) - x(x_2, t)| \\ &\leq |x_1 - x_2| + \frac{M}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|\xi|}e^{|\theta(\tau)|} \, |x(x_1, \tau) - x(x_2, \tau)| \, d\xi d\tau \\ &\leq |x_1 - x_2| + M\int\limits_0^t e^{|\theta(\tau)|} \, |x(x_1, \tau) - x(x_2, \tau)| \, d\tau \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada θ için aşağıdaki eşitsizlik

$$\min\{x_1 + h(x_1,t), x_2 + h(x_2,t)\} \le \theta \le \max\{x_1 + h(x_1,t), x_2 + h(x_2,t)\}$$

olacak şekilde yazılabilir. Bu durumda

$$|\theta(\tau)| \le \max\{x_1, x_2\} + \max(h(x_1,\tau), h(x_2,\tau)) \le \max\{x_1, x_2\} + M\delta \qquad (4.1.14)$$

olacaktır. (4.1.14) eşitsizliği (4.1.13) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} &|x(x_1,t) - x(x_2,t)| \\ &\le |x_1 - x_2| + Me^{\max\{x_1,x_2\}} e^{M\delta} \int_0^t |x(x_1,\tau) - x(x_2,\tau)|\, d\tau \end{aligned} \qquad (4.1.15)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada son eşitsizlik $C_1 = Me^{\max\{x_1,x_2\}+M\delta}$ alınarak yazılırsa

$$|x(x_1,t) - x(x_2,t)| \le |x_1 - x_2| + C_1 \int_0^t |x(x_1,\tau) - x(x_2,\tau)|\, d\tau$$

olacaktır. Elde edilen bu son eşitsizliğe Gronwall eşitsizliği uygulanırsa

$$|x(x_1,t) - x(x_2,t)| \le |x_1 - x_2|\, e^{C_1 t}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece tüm bu incelemelerden sonra aşağıdaki önermeyi ifade edebiliriz.

Önerme 54 *$w(x,t) \in C^1([0,T]; W^{2,p}(\mathbb{R}))$ olmak üzere xt düzlemi üzerindeki $(x_0,0)$ noktasından geçen ve*

$$\begin{cases} \frac{dx(x_0,t)}{dt} = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|x(x_0,t)-\xi|} w(\xi,t) d\xi, \quad t \in [0,T] \\ x(x_0,t)\ |_{[t=0]} = x_0 \end{cases}$$

olarak ele alınan karakteristik eğri denklemini sağlayan bir ve yalnız bir $L : x = x(x_0,t)$ karakteristik eğrisi vardır. $(x_1,0)$ ve $(x_2,0)$ noktalarından geçen karakteristik eğriler sırasıyla $L_1 : x = x(x_1,t)$ ve $L_2 : x = x(x_2,t)$ olmak üzere

$$|x(x_1,t) - x(x_2,t)| \le |x_1 - x_2|\, e^{C_1 t}$$

eşitsizliği sağlanır.

Önerme 54'ten yararlanarak aşağıda ifade edilen önerme 55'i yazabiliriz.

Önerme 55 *Eğer* $w_0(x) \in W^{2,p}(\mathbb{R})$ *ve* $\forall x \in \mathbb{R}$ *için* $w_0(x) \geq 0$ *oluyorsa Teorem 48'de ifade edilen* $w(x,t)$ *için* $(x,t) \in Q_T$ *olmak üzere*

$$w(x,t) \geq 0$$

olacaktır.

İspat. $w_0(x) \in W^{2,p}(\mathbb{R})$ olduğundan Teorem 48 ve Önerme 54 gereğince biliyoruz ki $(x_0, 0)$ noktasından geçen $L : x = x(x_0, t)$ olacak şekilde bir tek karakteristik eğri vardır. Bu L karakteristik eğrisi boyunca (3.1.2)'de verilen problemi $t \in [0,T]$ için

$$\begin{aligned}\frac{dw(x(x_0,t),t)}{dt} &= w_x \frac{dx(x_0,t)}{dt} + w_t \\ &= w_x u + w_t \\ &= -2u_x w(x(x_0,t),t) - \lambda w(x(x_0,t),t) \\ &= -\left(2u_x + \lambda\right) w(x(x_0,t),t) \qquad (4.1.16)\end{aligned}$$

olacak şekilde yazabiliriz. (4.1.16)'da elde edilen eşitliği

$$\frac{dw(x(x_0,t),t)}{dt} + \left(2u_x + \lambda\right) w(x(x_0,t),t) = 0$$

olarak yazalım ve eşitliğin her iki tarafını $e^{\int_0^t (2u_x+\lambda) w(x(x_0,\tau),\tau) d\tau}$ ile çarpalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{dw(x(x_0,t),t)}{dt} e^{\int_0^t (2u_x+\lambda) w(x(x_0,\tau),\tau) d\tau} + \left(2u_x + \lambda\right) e^{\int_0^t (2u_x+\lambda) w(x(x_0,\tau),\tau) d\tau} w(x(x_0,t),t) &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(w(x(x_0,t),t) e^{\int_0^t (2u_x+\lambda) w(x(x_0,\tau),\tau) d\tau} \right) &= 0\end{aligned}$$

olacaktır. Son eşitlik $(0,t)$ üzerinde integrallenirse

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{d}{dt}\left(w(x(x_0,t),t) e^{\int_0^t (2u_x+\lambda) w(x(x_0,\tau),\tau) d\tau} \right) &= 0 \\ w(x(x_0,t),t) e^{\int_0^t (2u_x+\lambda) w(x(x_0,\tau),\tau) d\tau} \Big|_0^t &= 0 \\ w(x(x_0,t),t) e^{\int_0^t (2u_x+\lambda) w(x(x_0,\tau),\tau) d\tau} - w_0(x_0) &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise $t \in [0,T]$ için

$$w(x(x_0,t),t) = w_0(x_0) e^{-\int_0^t (2u_x+\lambda)(x(x_0,\tau),\tau) d\tau}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece, eğer $w_0(x_0) \geq 0$ olursa L karakteristik eğrisi boyunca

$$w(x,t)\mid_{x=(x_0,t)} \geq 0, \quad (x,t) \in Q_T$$

olacağı açıktır. Önerme 54'ten $(x,t) \in Q_T$ için $w(x,t) \geq 0$ olduğu bilinmektedir. Böylece Önerme 55'in ispatı tamamlanmış olur. ■

Not 56 *Önerme 55'in ispatından bilindiği üzere $w_0 \leq 0$ olması aynı zamanda $w \leq 0$ olması anlamına gelmektedir.*

Not 57 *A. Constantin ve J. Escher tarafından yayınlanan [28] makalesindeki Lemma (3. 4)'ün ispatında yapılan basit işlemleri yaparsak*

$$\int_{\mathbb{R}} w dx = \int_{\mathbb{R}} w_0 dx - \lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}} w dx dt$$

eşitliğini elde ederiz. Son önermeye göre $w_0 \geq 0$ ise $w \geq 0$ olacağı bilinmektedir. Dolayısıyla

$$\int_{\mathbb{R}} w dx \leq \int_{\mathbb{R}} w_0 dx$$

elde edilir. Benzer şekilde $w_0 \leq 0$ durumunu ele alarak

$$\int_{\mathbb{R}} w dx$$

integralinin sınırlı olduğunu gösterebiliriz. Ayrıca,

$$\int_{\mathbb{R}} u dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} u dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} (u - u_{xx})\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} w dx = \int_{\mathbb{R}} w dx$$

olacağından

$$\int_{\mathbb{R}} u dx$$

integralide sınırlıdır. Böylece $u \in L^1(\mathbb{R})$ olduğu açıktır.

Şimdi, Önerme 55 ve Not 57 kullanılarak global çözümün varlığını ifade eden teoremi vereceğiz.

Teorem 58 *$u_0(x) \in W^{4,p}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ ve $w_0 = u_0 - u_{0xx}$ olmak üzere w_0 başlangıç değerinin işaretinin değişmez olduğunu kabul edelim. Bu durumda herbir T için (3.1)'de verilen başlangıç değer probleminin*

$$u(x,t) \in C\left([0,T]\,; W^{4,p}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})\right) \cap C^1\left([0,T]\,; W^{3,p}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})\right)$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $u(x,t)$ çözümü vardır.

İspat. Global çözümün varlığını garanti edebilmek için bazı hesaplamalar vereceğiz. Bu nedenle Teorem 48'i kullanarak $\|w\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})}$'nin sınırını değerlendireceğiz. Burada $w_0 \geq 0$ koşulu ile verilen ispat ile $w_0 \leq 0$ koşulu ile verilen ispatın birbirinin benzeri olacağı açıktır.

Burada, $w_0 \geq 0$ olduğunda Önerme 55'ten $w \geq 0$ olduğu da bilinmektedir. Ayrıca tanımdan $w = u - u_{xx}$ olup

$$u_0(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-\xi|} w_0(\xi) d\xi$$

ve

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-\xi|} w(\xi,t) d\xi$$

yukarıdaki formüllerden de açık bir şekilde görüldüğü üzere w_0 ve w'nin pozitif oluşu u_0 ve u'nunda pozitif olmasını gerektirir. Böylece $u \in L^1(\mathbb{R})$ ve $w \in L^1(\mathbb{R})$ olacaktır.

Diğer taraftan,

$$\int_{-\infty}^{x} (u - u_{xx}) dx = -u_x + \int_{-\infty}^{x} u dx = \int_{-\infty}^{x} w dx$$

olduğundan

$$u_x \leq \int_{\mathbb{R}} u dx = \int_{\mathbb{R}} u_0 dx = C$$

eşitsizliği yazılır. Benzer şekilde

$$\int_{x}^{+\infty} (u - u_{xx}) dx = u_x + \int_{x}^{+\infty} u dx = \int_{x}^{+\infty} w dx$$

olacaktır. Buradan ise

$$u_x \geq -\int_{\mathbb{R}} u dx = -\int_{\mathbb{R}} u_0 dx = -C_0$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki elde edilen eşitsizlikleri birleştirirsek

$$-C_0 \leq u_x \leq C_0$$

eşitsizliğine ulaşılır. Son eşitsizlik

$$\|u_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_{\mathbb{R}} |u_x| \leq C_0 \tag{4.1.17}$$

olacak şekilde ifade edilir. Bundan sonra $\|w\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})}$'nin sınırını bulmak için (4.1.17)'de verilen eşitsizliği kullanacağız. Bunu ise aşağıda takip eden üç adımı kullanarak gerçekleştireceğiz.

[1.*adım*] : Burada $\|w\|_{L^p(\mathbb{R})}$'yi değerlendireceğiz. (3.1.2)'de verilen problemin her iki tarafını $|w|^{p-2}\, w$ ile çarpalım bu durumda

$$w_t\, |w|^{p-2}\, w + uw_x\, |w|^{p-2}\, w = -2u_x w\, |w|^{p-2}\, w - \lambda\, |w|^p$$

eşitliğine ulaşılır. Son eşitliğin her iki tarafı $\mathbb{R}$ üzerinde integrallenir ve eşitliğin sol tarafındaki ikinci terimde kısmi integrasyon formülü kullanılırsa

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} |w|^p\, dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} u_x\, |w|^p\, dx = -2\int_{\mathbb{R}} u_x\, |w|^{p-2}\, w^2 dx - \lambda\int_{\mathbb{R}} |w|^p\, dx$$

eşitliği elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\, \|w\|_{L^p(\mathbb{R})}^p - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} u_x\, |w|^p\, dx = -2\int_{\mathbb{R}} u_x\, |w|^p\, dx - \lambda\int_{\mathbb{R}} |w|^p\, dx$$

eşitliğine ulaşılır. Bulunan bu son eşitliğin her iki tarafını p ile çarpıp düzenlersek

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\, \|w\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \\
&= -(2p-1)\int_{\mathbb{R}} u_x\, |w|^p\, dx - \lambda p\int_{\mathbb{R}} |w|^p\, dx \\
&\leq -(2p-1)\, \|u_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\, \|w\|_{L^p(\mathbb{R})}^p - \lambda p\, \|w\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \\
&\leq (2p-1)\, \|u_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\, \|w\|_{L^p(\mathbb{R})}^p + \lambda p\, \|w\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \\
&\leq ((2p-1)C_0 + \lambda p)\, \|w\|_{L^p(\mathbb{R})}^p
\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

bulunur. Elde edilen son eşitsizliğe Gronwall eşitsizliği uygulanırsa

$$\|w\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq e^{((2p-1)C_0+\lambda p)t}\, \|w_0\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\,, \quad t \in [0,T] \tag{4.1.19}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.1.2)'de verilen problemin her iki tarafını $|w|^{2p-2}\, w$ ile çarpıp sonrasında $\mathbb{R}$ üzerinde integral alırsak

$$\|w\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}^{2p} \leq e^{((4p-1)C_0+\lambda p)t}\, \|w_0\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}^{2p}$$

bulunur. Burada son eşitsizlik Sobolev gömülme teoremi $\|v\|_{L^{2p}(\mathbb{R})} \leq C\, \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}$ kullanılarak yazılırsa

$$\|w\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})} \leq Ce^{((4p-1)C_0+\lambda p)t} \|w_0\|^{2p}_{W^{1,p}(\mathbb{R})}, \qquad t \in [0,T] \tag{4.1.20}$$

elde edilir.

[2.*adım*] : Burada $\|w_x\|_{L^p(\mathbb{R})}$'yi değerlendireceğiz. Bu nedenle (3.1.2)'de verilen problemin her iki tarafını $|w_x|^{p-2} w_{xx}$ ile çarpıp $\mathbb{R}$ üzerinde integralleyelim. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}} w_t |w_x|^{p-2} w_{xx} dx + \int_{\mathbb{R}} u w_x |w_x|^{p-2} w_{xx} dx$$
$$= -2\int_{\mathbb{R}} u_x w |w_x|^{p-2} w_{xx} dx - \lambda \int_{\mathbb{R}} w |w_x|^{p-2} w_{xx} dx$$

yazabiliriz. Buradan

$$\frac{1}{(p-1)}\int_{\mathbb{R}} w_t \left(|w_x|^{p-2} w_x\right)_x dx + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} u \left(|w_x|^p\right)_x dx$$
$$= -\frac{2}{(p-1)}\int_{\mathbb{R}} u_x w \left(|w_x|^{p-2} w_x\right)_x dx - \frac{\lambda}{(p-1)}\int_{\mathbb{R}} w \left(|w_x|^{p-2} w_x\right)_x dx$$

eşitliğine ulaşılır. Kısmi integrasyon formülü kullanılırsa

$$-\frac{1}{(p-1)}\int_{\mathbb{R}} w_{tx} |w_x|^{p-2} w_x dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} u_x |w_x|^p dx$$
$$= \frac{2}{(p-1)}\int_{\mathbb{R}} (u_x w)_x |w_x|^{p-2} w_x dx + \frac{\lambda}{(p-1)}\int_{\mathbb{R}} |w_x|^p dx$$

veya

$$-\frac{1}{(p-1)}\int_{\mathbb{R}} w_{tx} |w_x|^{p-2} w_x dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} u_x |w_x|^p dx$$
$$= \frac{2}{(p-1)}\int_{\mathbb{R}} u_{xx} w w_x |w_x|^{p-2} dx + \frac{2}{(p-1)}\int_{\mathbb{R}} u_x w_x |w_x|^{p-2} w_x dx + \frac{\lambda}{(p-1)}\int_{\mathbb{R}} |w_x|^p dx$$

olacaktır. Eşitliğin her iki tarafını $-p(p-1)$ ile çarparsak

$$p\int_{\mathbb{R}} w_{tx} |w_x|^{p-2} w_x dx + (p-1)\int_{\mathbb{R}} u_x |w_x|^p dx$$
$$= -p\left[2\int_{\mathbb{R}} u_{xx} w w_x |w_x|^{p-2} dx + 2\int_{\mathbb{R}} u_x w_x |w_x|^{p-2} w_x dx + \lambda\int_{\mathbb{R}} |w_x|^p dx\right]$$

veya

$$\frac{d}{dt}\|w_x\|^p_{L^p(\mathbb{R})} + (p-1)\int_{\mathbb{R}} u_x |w_x|^p dx$$
$$= -p\left[2\int_{\mathbb{R}} u_{xx} w w_x |w_x|^{p-2} dx + 2\int_{\mathbb{R}} u_x |w_x|^p dx + \lambda\int_{\mathbb{R}} |w_x|^p dx\right] \tag{4.1.21}$$

elde edilir.

$$\int_{\mathbb{R}} u_{xx} w w_x \left|w_x\right|^{p-2} dx$$

integralini ele alalım. Burada $w = u - u_{xx}$ alarak elde edilen $u_{xx} = u - w$ eşitliğini yerine yazarsak.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u_{xx} w.w_x \left|w_x\right|^{p-2} dx &= \int_{\mathbb{R}} (u-w) w w_x \left|w_x\right|^{p-2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} u w w_x \left|w_x\right|^{p-2} dx - \int_{\mathbb{R}} w^2 w_x \left|w_x\right|^{p-2} dx\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki son ifadeye Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_{\mathbb{R}} u_{xx} w.w_x \left|w_x\right|^{p-2} dx \leq \left\|u\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left\|w\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \left\|w_x\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-1} + \left\|w\right\|_{L^{2p}(\mathbb{R})} \left\|w_x\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-1}$$

elde edilir. Elde edilen son eşitsizliğe

$$\left|u^2(x,.)\right| = \left|\int_{-\infty}^{x} \left(u^2\right)_x dx\right| \leq 2\left|\int_{-\infty}^{x} u u_x dx\right| \leq \left\|u_x\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} |u|\, dx$$

veya

$$\left\|u\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \leq \left\|u_x\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left\|u\right\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_{\mathbb{R}} u_{xx} w.w_x \left|w_x\right|^{p-2} dx \leq C(\left\|w\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p + \left\|w\right\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}^p + \left\|w_x\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p)$$

olacaktır. Ayrıca son eşitsizlikte (4.1.17), (4.1.19) ve (4.1.20) eşitsizlikleri göz önünde bulundurulursa

$$\int_{\mathbb{R}} u_{xx} w.w_x \left|w_x\right|^{p-2} dx \leq \tilde{C}\left(e^{((4p-1)C_0+\lambda p)t} C_1 + \left\|w_x\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\right) \tag{4.1.22}$$

ulaşılır. Burada (4.1.21) ve (4.1.22) eşitsizliklerinden

$$\frac{d}{dt}\left\|w_x\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq \tilde{C}\left(e^{((4p-1)C_0+\lambda p)t} C_1 + \left\|w_x\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı 0'dan t'ye integrallenirse

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left\|w_x\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq \tilde{C}\int_0^t e^{((4p-1)C_0+\lambda p)t} C_1 d\tau + \tilde{C}\int_0^t \left\|w_x\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p d\tau$$

veya

$$\|w_x\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|w_{0x}\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R})} + \frac{\tilde{C}C_1 e^{((4p-1)C_0+\lambda p)t}}{((4p-1)C_0+\lambda p)} + \tilde{C}\int\limits_0^t \|w_x\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\, d\tau \qquad (4.1.23)$$

olacaktır. Burada

$$\tilde{C}_1 = \frac{\tilde{C}C_1}{((4p-1)C_0+\lambda p)}$$

ve

$$\psi(t) = \|w_{0x}\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R})} + \tilde{C}_1 e^{((4p-1)C_0+\lambda p)t}$$

denilirse (4.1.23) eşitsizliği

$$\|w_x\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \leq \psi(t) + \tilde{C}\int\limits_0^t \|w_x\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\, d\tau$$

olarak yazılabilir. Ayrıca son eşitsizliğe Gronwall eşitsizliği uygulanırsa

$$\|w_x\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \leq \psi(t) + \tilde{C}\int\limits_0^t \psi(s) e^{\tilde{C}(t-s)} ds, \qquad t \in [0,T] \qquad (4.1.24)$$

olur.

[3.$adım$] : Şimdi ise $\|w_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})}$'yi değerlendireceğiz. (3.1.2)'de verilen denklemin x'e göre türevini alalım

$$w_{tx} + (uw_x)_x = (-2u_x w)_x - \lambda w_x$$

buradan

$$w_{tx} + (u_x w_x + u w_{xx}) = (-2u_{xx} w - 2u_x w_x) - \lambda w_x$$

denklemine ulaşılır. Bu son denklemin bir kez daha x'e göre türevini alırsak

$$w_{txx} + u_{xx}w_x + u_x w_{xx} + u_x w_{xx} + u w_{xxx} = -2u_{xxx}w - 2u_{xx}w_x - 2u_{xx}w_x - 2u_x w_{xx} - \lambda w_{xx}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$w_{txx} + 2u_x w_{xx} + u w_{xxx} = -5u_{xx}w_x - 2u_{xxx}w - 2u_x w_{xx} - \lambda w_{xx}$$

denklemine ulaşılır. Son denklemde $w = u - u_{xx}$ alınarak elde edilen $u_{xx} = u - w$ ve $u_{xxx} = u_x - w_x$ eşitlikleri kullanırsak

$$w_{txx} + 4u_x w_{xx} + u w_{xxx} = 5ww_x - 5uw_x + 2w_x w - 2u_x w - \lambda w_{xx} \qquad (4.1.25)$$

bulunur. (4.1.25) denkleminin her iki tarafını $|w_{xx}|^{p-2} w_{xx}$ ile çarpar ve $\mathbb{R}$ üzerinde integralini alırsak

$$\int_{\mathbb{R}} w_{txx} |w_{xx}|^{p-2} w_{xx} dx \tag{4.1.26}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} [5ww_x - 5uw_x + 2w_x w - 2u_x w - \lambda w_{xx} - 4u_x w_{xx} - uw_{xxx}] |w_{xx}|^{p-2} w_{xx} dx$$

elde edilir. (4.1.26)'da verilen denklemin herbir terimini aşağıda değerlendireceğiz.Bu durumda

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} w_{txx} |w_{xx}|^{p-2} w_{xx} dx &= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} |w_{xx}|^p dx \\ &= \frac{1}{p}\frac{d}{dt} \|w_{xx}\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\end{aligned} \tag{4.1.27}$$

$$\int_{\mathbb{R}} u_x w_{xx} |w_{xx}|^{p-2} w_{xx} dx \leq \|u_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|w_{xx}\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R})} \tag{4.1.28}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} uw_{xxx} |w_{xx}|^{p-2} w_{xx} dx &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} u \left(|w_{xx}|^p\right)_x dx \\ &= -\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} u_x |w_{xx}|^p dx \\ &\leq \frac{1}{p} \|u_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|w_{xx}\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\end{aligned} \tag{4.1.29}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} ww_x |w_{xx}|^{p-2} w_{xx} dx &\leq \int_{\mathbb{R}} |w| |w_x| |w_{xx}|^{p-1} dx \\ &\leq \|w\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|w_x\|_{L^p(\mathbb{R})} \|w_{xx}\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R})}\end{aligned} \tag{4.1.30}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} uw_x |w_{xx}|^{p-2} w_{xx} dx &= \int_{\mathbb{R}} uw_x |w_{xx}|^{p-1} dx \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|w_x\|_{L^p(\mathbb{R})} \|w_{xx}\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R})}\end{aligned} \tag{4.1.31}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} u_x w \left|w_{xx}\right|^{p-2} w_{xx} dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \left|u_x\right| \left|w\right| \left|w_{xx}\right|^{p-1} dx \\
&\leq \left\|u_x\right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} \left|w\right| \left|w_{xx}\right|^{p-1} dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} \left(\left|w\right|^p + \left|w_{xx}\right|^p\right) dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} \left|w\right|^p dx + C \int_{\mathbb{R}} \left|w_{xx}\right|^p dx \\
&= C \int_{\mathbb{R}} \left|w\right|^p dx + C \left\|w_{xx}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \\
&\leq CC(t) + C \left\|w_{xx}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p
\end{aligned} \tag{4.1.32}
$$

dir. (4.1.27)'den başlayıp (4.1.32)'de neticelenen değerlendirmeler (4.1.26)'da yerlerine yazılır, Young eşitsizliği ile $\|w\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}$ 'nin sınırı kullanılırsa

$$
\frac{d}{dt} \left\|w_{xx}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq C \left\|w_{xx}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p + C(t)
$$

eşitsizliğine ulaşılır. Son eşitsizliğe Gronwall eşitsizliği uygulanırsa

$$
\left\|w_{xx}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq C \left\|w_{0xx}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p e^{C(t)} + C(t), \qquad t \in [0, T] \tag{4.1.33}
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda (4.1.19), (4.1.24) ve (4.1.33) eşitsizlikleri kullanılarak $\|w\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})}$ için bir değerlendirmeye ulaşılır. Böylece Teorem 58'in ispatı tamamlanmış olur. ■

4.2 $k \neq 0$ Olması Durumunda Global Çözümün Varlığının İncelenmesi

Bu alt bölümde, $k \neq 0$ olmak üzere (3.1)'de verilen zayıf disipatif Camassa-Holm denkleminin Cauchy problemi için global çözümün varlığını garanti edecek yeterli bir koşulu inceleyeceğiz. Bu amaçla u (3.1)'de verilen problemin kuvvetli bir çözümü olmak üzere

$$
\tilde{u} = u + k
$$

kullanarak (3.1) probleminin denklemini yeniden yazacak olursak

$$\tilde{u}_t - \tilde{u}_{xxt} + 3\tilde{u}\tilde{u}_x - 3k\tilde{u}_x + 2k\tilde{u}_x + \lambda(u - u_{xx}) = 2\tilde{u}_x\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}\tilde{u}_{xxx} - k\tilde{u}_{xxx}$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler sonucunda

$$\tilde{u}_t - \tilde{u}_{xxt} - k\tilde{u}_x + k\tilde{u}_{xxx} + 3\tilde{u}\tilde{u}_x + \lambda(u - u_{xx}) = 2\tilde{u}_x\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}\tilde{u}_{xxx}$$

veya

$$\tilde{u}_t - \tilde{u}_{xxt} - k\left(\tilde{u}_x - \tilde{u}_{xxx}\right) + 3\tilde{u}\tilde{u}_x + \lambda(u - u_{xx}) = 2\tilde{u}_x\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}\tilde{u}_{xxx} \tag{4.2.1}$$

elde edilmiş olur. Bundan sonraki yapacağımız uygulamalarda, (3.1)'deki problemde ele alınan denklemin u çözümünün yerine (4.2.1)'de elde ettiğimiz denklemin çözümü olan $\tilde{u}$ göz önünde bulundurulacaktır. Hatta daha basit olması adına (4.2.1)'de elde edilen denklemde $\sim$ 'yı ihmal ederek $\tilde{u}$ yerine u yazabiliriz. Böylece (4.2.1) denklemi

$$u_t - u_{xxt} - k\left(u_x - u_{xxx}\right) + 3uu_x + \lambda(u - u_{xx}) = 2u_xu_{xx} + uu_{xxx} \tag{4.2.2}$$

olacak şekilde ifade edilebilir. Burada, $k \neq 0$ olmak üzere (4.2.2) denklemi için global çözümün varlığını incelemeye geçmeden önce aynı denklemin yerel çözümünün varlığını ve tekliğini ifade eden lemmayı inceleyelim.

Lemma 59 *Verilen $s > 3$ için (4.2.2) denkleminin Cauchy probleminin başlangıç değeri $u_0(x) \in H^s(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda (4.2.2) denkleminin bir maximal $T = T(u_0) > 0$ yaşam süresi ve*

$$u = u(.u_0(x)) \in C\left([0,T]\,; H^s(\mathbb{R})\right) \cap C^1\left([0,T]\,; H^{s-1}(\mathbb{R})\right)$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir u çözümü vardır. Bu u çözümü, u_0 başlangıç değerlere sürekli bağlıdır. Dolayısıyla,

$u_0 \to u(., u_0) : H^s(\mathbb{R}) \to C\left([0,T]\,; H^s(\mathbb{R})\right) \cap C^1\left([0,T]\,; H^{s-1}(\mathbb{R})\right)$

dönüşümü süreklidir. [42], [43], [44]

Şimdi (4.2.2) denkleminin global çözümünün varlığının incelenebilmesi için gerekli olan aşağıdaki lemma ve teoremleri inceleyeceğiz.

Lemma 60 *$s > 3$ olmak üzere $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ ve (4.2.2) denkleminin çözümüne karşılık gelen yaşam süresinin maximalı $T > 0$ olsun. O halde*

$$\|u(x,t)\|_{H^1}^2 = e^{-2\lambda t}\,\|u_0(x)\|_{H^1,}^2 \qquad \forall t \in [0,T) \tag{4.2.3}$$

sağlanır. [43], [44]

İspat. İspata geçmeden önce (4.2.2)'de elde edilen denklemi düzenlersek

$$(u_t - u_{xxt}) + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} - k\left(u_x - u_{xxx}\right) + \lambda(u - u_{xx}) = 0$$

buluruz. Buradan ise gerekli düzenlemeler yapılarak

$$(u - u_{xx})_t + uu_x - uu_{xxx} + 2uu_x - 2u_x u_{xx} - k\left(u_x - u_{xxx}\right) + \lambda(u - u_{xx}) = 0$$

veya

$$(u - u_{xx})_t + u(u - u_{xx})_x + 2u_x(u - u_{xx}) - k\left(u_x - u_{xxx}\right) + \lambda(u - u_{xx}) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu son denklemde $y = u - u_{xx}$ alınırsa

$$y_t + uy_x + 2u_x y - ky_x + \lambda y = 0, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.2.4}$$

olacaktır. Şimdi ispatımızı gerçekleştirebilmek için yukarıda elde edilen (4.2.4) denkleminin her iki tarafını u ile çarpıp $\mathbb{R}$ üzerinde integralleyelim. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}} uy_t dx + \int_{\mathbb{R}} u^2 y_x dx + 2\int_{\mathbb{R}} uu_x y dx - k\int_{\mathbb{R}} uy_x dx + \lambda\int_{\mathbb{R}} uy dx = 0$$

eşitliğine ulaşılır. Yukarıdaki son ifadenin birinci ve beşinci teriminde $y = u - u_{xx}$ işaretlemesini ve ikinci teriminde ise kısmi integrasyon formülünü göz önünde bulundurursak

$$\int_{\mathbb{R}} u(u_t - u_{txx})dx - 2\int_{\mathbb{R}} uu_x y dx + 2\int_{\mathbb{R}} uu_x y dx - k\int_{\mathbb{R}} uy_x dx + \lambda\int_{\mathbb{R}} (u^2 - u_{xx}u)dx = 0$$

veya

$$\int_{\mathbb{R}} uu_t dx - \int_{\mathbb{R}} uu_{xxt} dx + \lambda\int_{\mathbb{R}} u^2 dx - \lambda\int_{\mathbb{R}} u_{xx} u dx = 0$$

olacaktır. Son ifadede kısmi integrasyon formülü kullanılarak

$$\int_{\mathbb{R}} (uu_t + u_x u_{xt})dx + \lambda\int_{\mathbb{R}} (u^2 + u_x^2)dx = 0$$

olacak şekilde yazılabilir. Buradan ise

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} (u^2 + u_x^2)dx + \lambda\int_{\mathbb{R}} (u^2 + u_x^2)dx = 0$$

veya

$$\frac{d}{dt}\left\|u\right\|_{H^1}^2 + 2\lambda\left\|u\right\|_{H^1}^2 = 0$$

ulaşılır. Son eşitliğin her iki tarafı $e^{2\lambda t}$ ile çarpılır ve 0'dan t'ye integrallenirse

$$\|u\|_{H^1}^2 = e^{-2\lambda t}\|u_0\|_{H^1}^2, \qquad \forall t \in [0,T)$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 61 *Başlangıç değeri $u_0(x) \in H^s(\mathbb{R})$, $s > 3$ olmak üzere $u(x,t)$ fonksiyonu, (4.2.2) denkleminin çözümü ve T ise denklemin yaşam süresi olsun. Bu durumda*

$$\sup_{x\in\mathbb{R},\ 0\le t<T} |u(x,t)| \le C\left(\|u_0(x)\|_{H^1}\right) \tag{4.2.5}$$

dır. Ayrıca T'nin sınırlı olması için aşağıdaki koşul sağlanır.

$$\lim_{t\to T}\inf \inf_{x\in\mathbb{R}} \{u_x(x,t)\} = -\infty$$

İspat. Sobolev gömülme teoreminden

$$\|f\|_{L^\infty}^2 \le \frac{1}{2}\|f\|_{H^1}^2$$

olduğu bilinmektedir. Burada Sobolev gömülme teoremini u fonksiyonu için yazarsak

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \le \frac{1}{2}\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \tag{4.2.6}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca (4.2.3)'ten

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R})} = e^{-\lambda t}\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

elde edilir. Son eşitlik ile (4.2.6) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R},\ 0\le t<T} |u(x,t)| &= \|u(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\le \frac{1}{2}\|u(x,t)\|_{H^1(\mathbb{R})} = \frac{1}{2}e^{-\lambda t}\|u_0(x,t)\|_{H^1(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Dolayısıyla

$$\sup_{x\in\mathbb{R},\ 0\le t<T} |u(x,t)| \le C\|u_0\|_{H^1}$$

olacaktır. Böylece teoremin ilk ifadesinin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi ise teoremin ikinci ifadesinin ispatını gerçekleştirelim. Bunun için öncelikle (4.2.4) denklemindeki y_t terimini yalnız bırakarak yazalım. Bu durumda

$$y_t = -uy_x - 2u_x y + ky_x - \lambda y, \qquad t>0,\quad x\in\mathbb{R} \tag{4.2.7}$$

veya

$$y_t = -y_x(u-k) - 2u_x y - \lambda y, \qquad t>0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.2.8}$$

elde edilir. $u_0(x) \in H^3(\mathbb{R})$ olmak üzere (4.2.7) denkleminin her iki tarafını y ile çarpalım ve ardından elde edilen denklemi $\mathbb{R}$ üzerinde integralleyelim. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}} y y_t dx = -\int_{\mathbb{R}} u y y_x dx - 2\int_{\mathbb{R}} u_x y^2 dx + k\int_{\mathbb{R}} y y_x dx - \lambda \int_{\mathbb{R}} y^2 dx \tag{4.2.9}$$

eşitliğine ulaşılır. (4.2.9)'da kısmi integrasyon formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} y^2 dx &= 2\int_{\mathbb{R}} y y_t dx \\
&= -2\int_{\mathbb{R}} u y y_x dx - 4\int_{\mathbb{R}} u_x y^2 dx + 2k\int_{\mathbb{R}} y y_x dx - 2\lambda\int_{\mathbb{R}} y^2 dx \\
&= -2.\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u (y^2)_x dx - 4\int_{\mathbb{R}} u_x y^2 dx - 2\lambda\int_{\mathbb{R}} y^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} u_x y^2 dx - 4\int_{\mathbb{R}} u_x y^2 dx - 2\lambda\int_{\mathbb{R}} y^2 dx \\
&= -3\int_{\mathbb{R}} u_x y^2 dx - 2\lambda\int_{\mathbb{R}} y^2 dx
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca $u_0(x) \in H^4(\mathbb{R})$ olmak üzere (4.2.7) denkleminin x'e göre türevini alıp her iki tarafını y_x ile çarparsak

$$y_x y_{xt} = -3u_x y_x^2 - u y_x y_{xx} - 2u_{xx} y y_x + k y_{xx} y_x - \lambda y_x^2, \qquad t>0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.2.11}$$

elde edilir. (4.2.11) denkleminin her iki tarafı $\mathbb{R}$ üzerinde integrallenirse

$$\int_{\mathbb{R}} y_x y_{xt} dx = -3\int_{\mathbb{R}} u_x y_x^2 dx - \int_{\mathbb{R}} u y_x y_{xx} dx - 2\int_{\mathbb{R}} u_{xx} y y_x dx + k\int_{\mathbb{R}} y_{xx} y_x dx - \lambda\int_{\mathbb{R}} y_x^2 dx$$

olacaktır. Burada kısmi integrasyon formülü kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}} y_x^2 dx = 2\int\limits_{\mathbb{R}} y_x y_{xt} dx & \\
&= -6\int\limits_{\mathbb{R}} u_x y_x^2 dx - 2\int\limits_{\mathbb{R}} u y_x y_{xx} dx - 4\int\limits_{\mathbb{R}} u_{xx} y y_x dx + 2k\int\limits_{\mathbb{R}} y_{xx} y_x dx - 2\lambda\int\limits_{\mathbb{R}} y_x^2 dx \\
&= -6\int\limits_{\mathbb{R}} u_x y_x^2 dx - 2.\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} u (y_x^2)_x dx + 4.\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} u_x y^2 dx - 2\lambda\int\limits_{\mathbb{R}} y_x^2 dx \\
&= -6\int\limits_{\mathbb{R}} u_x y_x^2 dx + \int\limits_{\mathbb{R}} u_x y_x^2 dx + 2\int\limits_{\mathbb{R}} u_x y^2 dx - 2\lambda\int\limits_{\mathbb{R}} y_x^2 dx \\
&= -5\int\limits_{\mathbb{R}} u_x y_x^2 dx + 2\int\limits_{\mathbb{R}} u_x y^2 dx - 2\lambda\int\limits_{\mathbb{R}} y_x^2 dx \qquad (4.2.12)
\end{aligned}
$$

eşitliğine ulaşılır. (4.2.10) ve (4.2.12) taraf tarafa toplanırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} y^2 dx + \int\limits_{\mathbb{R}} y_x^2 dx\right) \\
&= -5\int\limits_{\mathbb{R}} u_x y_x^2 dx - \int\limits_{\mathbb{R}} u_x y^2 dx - 2\lambda\left(\int\limits_{\mathbb{R}} y^2 dx + \int\limits_{\mathbb{R}} y_x^2 dx\right) \qquad (4.2.13)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. γ pozitif bir sabit sayı olmak üzere eğer u_x, $[0,T)$ üzerinde $u_x \geq -\gamma$ olacak şekilde alttan sınırlı ise (4.2.13) eşitliği

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} y^2 dx + \int\limits_{\mathbb{R}} y_x^2 dx\right) \\
&\leq 5\gamma\int\limits_{\mathbb{R}} y_x^2 dx + \gamma\int\limits_{\mathbb{R}} y^2 dx - 2\lambda\left(\int\limits_{\mathbb{R}} y^2 dx + \int\limits_{\mathbb{R}} y_x^2 dx\right) \\
&\leq 5\gamma\left(\int\limits_{\mathbb{R}} y^2 dx + \int\limits_{\mathbb{R}} y_x^2 dx\right) - 2\lambda\left(\int\limits_{\mathbb{R}} y^2 dx + \int\limits_{\mathbb{R}} y_x^2 dx\right) \\
&= (5\gamma - 2\lambda)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} y^2 dx + \int\limits_{\mathbb{R}} y_x^2 dx\right) \qquad (4.2.14)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Böylece (4.2.14)'te elde edilen ifadeye Gronwall eşitsizliği uygulanırsa

$$
\|y\|_{H^1}^2 \leq e^{(5\gamma-2\lambda)t}\,\|y(0)\|_{H^1}^2
$$

elde edilir. Bu ise (4.2.4)'te ele alınan denklemin çözümünün H^3-normunun sonlu bir zamanda patlamayacağı anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Mc Kean'ın [30] makalesinde yaptığı gibi aşağıdaki probleme karşılık gelen $q(x,t)$ eğrilerini

$$\begin{cases} \frac{dq(x,t)}{dt} = u(q(x,t),t) - k, & x \in \mathbb{R} \\ q(x,t=0) = x, & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.2.15}$$

olacak şekilde yazabiliriz. Bu durumda, yaşam süresi içindeki her bir sabit t değeri için $q(x,t)$ eğrileri aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$q_x(x,t) = e^{\int\limits_0^t u_x(q,s)ds}, \quad q_x(x,0) = 1.$$

Bu eşitliklerin doğruluğunu gösterelim.

Öncelikle bunun için (4.2.15)'deki ifadenin x'e göre türevini alırsak

$$\frac{d}{dt} q_x(x,t) = u_x(q(x,t),t) q_x(x,t) \tag{4.2.16}$$

olacaktır. Burada (4.2.16)'da $t=0$ yazılırsa

$$q_x(x,0) = 1 \tag{4.2.17}$$

olarak bulunur. (4.2.16) ifadesini

$$\frac{dq_x(x,t)}{q_x(x,t)} = u_x(q(x,t),t)dt$$

olacak şekilde yazabiliriz. Son eşitliğin her iki tarafının 0'dan t'ye integrali alınırsa

$$\ln q_x(x,t) \mid_0^t = \int\limits_0^t u_x(q(x,t),t)dt$$

olacaktır. Buradan ise

$$q_x(x,t) = q_x(x,0) e^{\int\limits_0^t u_x(q,s)ds} = e^{\int\limits_0^t u_x(q,s)ds} \tag{4.2.18}$$

elde edilir. Böylece eşitliklerin doğruluğu gösterilmiş olur.

Lemma 62 *$s > 3$ olmak üzere $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ ve (4.2.2) denkleminin çözümüne karşılık gelen yaşam süresinin maximalı $T > 0$ olsun. Bu durumda, yaşam süresi içinde*

$$y(q(x,t),t) q_x^2(x,t) = y_0(x) e^{-\lambda t}, \quad \forall (x,t) \in [0,T) \times \mathbb{R} \tag{4.2.19}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. İspatı gerçekleştirebilmek için öncelikle

$$\frac{d}{dt}(y(q)q_x^2) = -\lambda y(q)q_x^2 \tag{4.2.20}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterelim. Bunun için (4.2.8) eşitliğinin her iki tarafını q_x^2 ile çarpar ve (4.2.15) ifadesini göz önünde bulundurarak düzenlersek

$$y_t q_x^2 = -y_x q_t q_x^2 - 2yu_x q_x^2 - \lambda y q_x^2 \tag{4.2.21}$$

ulaşılır. Ayrıca $y(q)q_x^2$ 'nin t'ye göre kısmi türevini alırsak

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(y(q(x,t),t)q_x^2(x,t)) = y_t(q(x,t),t)q_x^2(x,t) + y_x(q(x,t),t)q_t(x,t)q_x^2(x,t) + \\ y(q(x,t),t)2q_x(x,t)\frac{dq_x(x,t)}{dt} \\ = y_t q_x^2 + y_x q_t q_x^2 + 2yq_x u_x q_x \\ = y_t q_x^2 + y_x q_t q_x^2 + 2yu_x q_x^2 \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

elde edilir. (4.2.22)'de (4.2.21) eşitliği yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt}(y(q)q_x^2) = -\lambda y(q)q_x^2$$

eşitliğine ulaşılmış olur. Böylece (4.2.20) eşitliğinin doğruluğu gösterilmiş olur.

Şimdi ise (4.2.20) eşitliğini kullanarak ispata devam edebiliriz. (4.2.20) eşitliğini

$$\frac{d}{dt}(y(q)q_x^2) + \lambda y(q)q_x^2 = 0$$

olacak şekilde yazıp bu eşitliğin her iki tarafını $e^{\lambda t}$ ile çarparak düzenlersek

$$e^{\lambda t}\frac{d}{dt}(y(q)q_x^2) + \lambda e^{\lambda t}y(q)q_x^2 = 0$$

veya

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}y(q)q_x^2\right) = 0$$

elde edilir. Elde edilen son eşitliğin her iki tarafı 0'dan t'ye integrallenirse

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}y(q)q_x^2\right) &= \int_0^t 0dt \\ e^{\lambda t}y(q)q_x^2 \,|_0^t &= 0 \\ e^{\lambda t}y(q(x,t),t)q_x^2(x,t) - y(q(x,0),0)q_x^2(x,0) &= 0 \\ e^{\lambda t}y(q(x,t),t)q_x^2(x,t) - y(x,0) &= 0 \\ y(q(x,t),t)q_x^2(x,t) &= y(x,0)e^{-\lambda t} \\ y(q(x,t),t)q_x^2(x,t) &= y_0(x)e^{-\lambda t}, \quad \forall (x,t) \in [0,T) \times \mathbb{R}\end{aligned}$$

olacaktır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 63 *$u_0 \in H^3(\mathbb{R})$ ve $y_0 = u_0 - u_{0xx}$ olmak üzere herhangi bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası için $y_0(x) \leq 0,\ x \in (-\infty, x_0)$ ve $y_0(x) \geq 0,\ x \in (x_{0,} + \infty)$ koşullarını sağlıyor olsun. Bu durumda (4.2.2) denklemine karşılık gelen global çözüm mevcuttur.*

İspat. Denklemin yaşam süresi içindeki her bir $t \geq 0$ için $y(x,t) = (1 - \partial_x^2)\, u(x,t)$ olmak üzere (4.2.19) eşitliğinden

$$\begin{cases} y(x,t) \geq 0, & \textit{eğer} \quad q\,(x_0,t) \leq x < \infty \\ y(x,t) \leq 0, & \textit{eğer} \quad -\infty < x \leq q\,(x_0,t) \end{cases}$$

olduğu bilinmektedir. $y(x,t) := u(x,t) - u_{xx}(x,t)$ ve $G(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $u(x,t) = G * y$ konvolüsyonu ile tanımlanır. Bu durumda $u(x,t)$ ve $u_x(x,t)$ sırasıyla

$$u(x,t) = \frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{\xi}y(\xi,t)d\xi + \frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{\infty} e^{-\xi}y(\xi,t)d\xi, \tag{4.2.23}$$

$$u_x(x,t) = -\frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{\xi}y(\xi,t)d\xi + \frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{\infty} e^{-\xi}y(\xi,t)d\xi, \tag{4.2.24}$$

olacak şekilde yazılabilir. Böylece (4.2.23) ve (4.2.24) eşitliklerini kullanarak ve $x > x_0$ olduğunda

$$u_x(q\,(x,t),t) + u(q\,(x,t),t) = e^{q(x,t)}\int_{q(x,t)}^{\infty} e^{-\xi}y(\xi,t)d\xi \geq 0$$

yazılabilir. Buradan ise

$$u_x(q\,(x,t),t) = -u(q\,(x,t),t) + e^{q(x,t)}\int_{q(x,t)}^{\infty} e^{-\xi}y(\xi,t)d\xi$$

eşitliği yazılabileceğinden

$$u_x(q\,(x,t),t) \geq u(q\,(x,t),t)\,, \qquad x > x_0$$

elde edilir. Burada son eşitsizlik, Sobolev gömülme teoremi ve (4.2.3) eşitliği göz önünde bulundurularak yazılırsa

$$-u_x(q\,(x,t),t) \leq u(q\,(x,t),t) \leq \|u\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|_{H^1} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\lambda t}\|u_0\|_{H^1}\,.$$

bulunur. Dolayısıyla $u_x(x,t)$ alttan sınırlıdır.

Ayrıca $x < x_0$ olursa

$$u_x(q\,(x,t),t) - u(q\,(x,t),t) = -e^{-q(x,t)}\int_{-\infty}^{q(x,t)} e^{\xi}y(\xi,t)d\xi \geq 0$$

yani

$$u_x(q\,(x,t),t) = u(q\,(x,t),t) - e^{-q(x,t)} \int\limits_{-\infty}^{q(x,t)} e^{\xi} y(\xi,t) d\xi$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$u_x(q\,(x,t),t) \geq u(q\,(x,t),t)\,, \qquad x < x_0$$

elde edilir. Son eşitsizliğe Sobolev gömülme teoremi ve (4.2.3) eşitliği uygulanırsa

$$-u_x(q\,(x,t),t) \leq -u(q\,(x,t),t) \leq u(q\,(x,t),t) \leq \|u\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u\|_{H^1} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\lambda t} \|u_0\|_{H^1}\,.$$

elde edilir. Dolayısıyla $u_x(x,t)$ alttan sınırlıdır. O halde ispat tamamlanmış olur. ■

5 DENKLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN PATLAMASI

Bu bölümde, (4.2.2)'de ele aldığımız denklemin sonlu bir zamanda çözümünün patlamasını (blow up) garanti edecek başlangıç değerler üzerindeki yeterli bir koşulu inceleyeceğiz.

Bu incelemeyi yapabilmek için öncelikle (4.2.2) denklemini integral-diferansiyel formda yazmak uygun olacaktır.

Bunun için sırasıyla aşağıdaki adımları takip ederek (4.2.2) denkleminin integral-diferansiyel formunu elde edelim.

Öncelikle (4.2.2) denklemi

$$(u-u_{xx})_t - k\,(u-u_{xx})_x + \lambda(u-u_{xx}) + 3uu_x - 2u_xu_{xx} - uu_{xxx} = 0 \tag{5.1}$$

olacak şekilde yazılabilir. Bu son denklem $(I-\partial_x^2)$ operatörü kullanılarak yazılırsa

$$(I-\partial_x^2)u_t - k(I-\partial_x^2)u_x + \lambda(I-\partial_x^2)u + 3uu_x - 2u_xu_{xx} - uu_{xxx} = 0$$

elde edilir. Elde edilen bu son denklemde ise $(I-\partial_x^2)^{-1}$ operatörünü kullanırsak

$$u_t - ku_x + \lambda u + (I-\partial_x^2)^{-1}(3uu_x - 2u_xu_{xx} - uu_{xxx}) = 0$$

veya

$$u_t - ku_x + \lambda u + (I-\partial_x^2)^{-1}(uu_x + 2uu_x - 3u_xu_{xx} + u_xu_{xx} - uu_{xxx}) = 0$$

denklemine ulaşılır. Son denklemi gerekli düzenlemeler yardımıyla

$$u_t - ku_x + \lambda u + (I-\partial_x^2)^{-1}\,(uu_x - 3u_xu_{xx} - uu_{xxx}) + (I-\partial_x^2)^{-1}\,(2uu_x + u_xu_{xx}) = 0$$

veya

$$u_t - ku_x + \lambda u + (I-\partial_x^2)^{-1}\left[uu_x - (2u_xu_{xx} + u_xu_{xx} + uu_{xxx})\right] + (I-\partial_x^2)^{-1}\partial_x\left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2\right) = 0$$

olacak şekilde yazabiliriz.

Son denklemde, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $G(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ ve $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ için $(I-\partial_x^2)^{-1}f = G * f$ konvolüsyon eşitliği göz önünde bulundurulursa

$$u_t - ku_x + \lambda u + (I-\partial_x^2)^{-1}\left[uu_x - \partial_x\left(u_x^2 + uu_{xx}\right)\right] + \partial_x G * \left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2\right) = 0$$

veya

$$u_t - ku_x + \lambda u + (I - \partial_x^2)^{-1}\left[(uu_x) - \partial_x^2 (uu_x)\right] + \partial_x G * \left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2\right) = 0$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$u_t - ku_x + \lambda u + (I - \partial_x^2)^{-1}(I - \partial_x^2)(uu_x) + \partial_x G * \left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2\right) = 0$$

denklemine ulaşılır. Buradan ise (4.2.2) denkleminin integral-diferansiyel formu

$$u_t + (u-k)u_x + \partial_x G * \left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2\right) + \lambda u = 0 \tag{5.2}$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Şimdi, çözümün patlamasını garanti edecek olan teoremi ifade ederek bu teoremin ispatını gerçekleştirelim.

Teorem 64 *$s > 3$ için $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ olsun. $y_0 = u_0 - u_{0xx}$ olmak üzere belli bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası için*

$$\lambda = 0, \quad y_0(x) \geq 0,\ x \in (-\infty, x_0] \qquad ve \qquad y_0(x) \leq 0,\ x \in [x_0, +\infty)$$

koşulları sağlansın. Bu durumda, (5.1) denklemi için başlangıç değer probleminin çözümü sonlu bir zamanda patlar.

Not 65 *$(-\infty, x_0]$ ve $[x_0, +\infty)$ aralıkları üzerinde $y \neq 0$ olduğunu kabul ediyoruz.*

İspat. (5.2)'de ele alınan denklemin x'e göre diferansiyelini alırsak

$$u_{tx} + ((u-k)\,u_x)_x + \partial_x^2\left(G * \left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2\right)\right) = 0$$

veya

$$u_{tx} + u_x^2 + (u-k)\,u_{xx} + \partial_x^2\left(G * \left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2\right)\right) = 0$$

elde edilir. Son denklemde $\partial_x^2(G * f) = (G * f) - f$ eşitliğini kullanarak u_{tx} terimini yalnız bırakalım. Bu durumda

$$u_{tx} = -u_x^2 - (u-k)\,u_{xx} - G * \left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2\right) + \left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2\right)$$

veya

$$u_{tx} = u^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - (u-k)\,u_{xx} - G * \left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2\right) \tag{5.3}$$

olacaktır. Burada

$$\frac{d}{dt}u_x(q(x_0,t),t) = u_{tx}(q(x_0,t),t) + u_{xx}(q(x_0,t),t)\frac{dq(x_0,t)}{dt}$$

yazılabilir. Yukarıdaki son eşitlikte, (4.2.15) eşitliği kullanılırsa

$$\frac{d}{dt}u_x(q(x_0,t),t) = u_{tx}(q(x_0,t),t) + u_{xx}(q(x_0,t),t)\left(u\left(q(x_0,t),t\right) - k\right) \tag{5.4}$$

elde edilir. (5.3)'te elde edilen $u_{tx}(q(x_0,t),t)$ teriminin eşiti (5.4) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u_x(q(x_0,t),t) = {} & u^2(q(x_0,t),t) - \frac{1}{2}u_x^2(q(x_0,t),t) - u_{xx}(q(x_0,t),t)\left(u\left(q(x_0,t),t\right) - k\right) \\ & - G * \left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2\right)(q(x_0,t),t) + u_{xx}(q(x_0,t),t)\left(u\left(q(x_0,t),t\right) - k\right)\end{aligned}$$

olacaktır. Son denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u_x(q(x_0,t),t) = {} & u^2(q(x_0,t),t) - \frac{1}{2}u_x^2(q(x_0,t),t) \\ & - G * \left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2\right)(q(x_0,t),t)\end{aligned} \tag{5.5}$$

elde edilir. Yukarıdaki son denklemde, ispatı [28] ve [45]' de verilen $\forall f \in H^1(\mathbb{R})$ için

$$G * \left(f^2 + \frac{1}{2}f_x^2\right)(x) \geq \frac{1}{2}f^2(x) \tag{5.6}$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\frac{d}{dt}u_x(q(x_0,t),t) \leq u^2(q(x_0,t),t) - \frac{1}{2}u_x^2(q(x_0,t),t) - \frac{1}{2}u^2(q(x_0,t),t)$$

veya

$$\frac{d}{dt}u_x(q(x_0,t),t) \leq \frac{1}{2}u^2(q(x_0,t),t) - \frac{1}{2}u_x^2(q(x_0,t),t) \tag{5.7}$$

elde edilir.

İddia: $u_x(q(x_0,t),t) < 0$ ve kesin azalandır. T, çözümün yaşam süresinin maximumu olmak üzere $[0,T)$ aralığında $u^2(q(x_0,t),t) < u_x^2(q(x_0,t),t)$'dir.

Tersinin doğru olduğunu kabul edelim. Yani öyle bir t_0 noktası mevcut olsun ki $[0,t_0)$ aralığı üzerinde $u^2(q(x_0,t),t) < u_x^2(q(x_0,t),t)$ iken t_0 noktasında $u^2(q(x_0,t_0),t_0) \geq u_x^2(q(x_0,t_0),t_0)$ olsun.

Burada, $u(q(x_0,t),t)$ ve $u_x(q(x_0,t),t)$ fonksiyonlarını tespit edelim. Bunun için (4.2.23) ve (4.2.24) ifadelerinde x yerine $q(x_0,t)$ yazarsak sırasıyla

$$u(q(x_0,t),t) = \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y(\xi,t)d\xi + \frac{1}{2}e^{q(x_0,t)}\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}y(\xi,t)d\xi \tag{5.8}$$

ve

$$u_x(q(x_0,t),t) = -\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)} \int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y(\xi,t)d\xi + \frac{1}{2}e^{q(x_0,t)} \int\limits_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi} y(\xi,t)d\xi \tag{5.9}$$

eşitlikleri elde edilir.

Öncelikle, $u_x(q(x_0,t),t) < 0$ ifadesinin doğru olduğunu gösterelim.

Bunun için, teorem 64'ün koşulları ile (4.2.19) eşitliği birlikte ele alınırsa

$$\begin{cases} y(x,t) \geq 0, & -\infty < x \leq q(x_0,t) \\ y(x,t) \leq 0, & q(x_0,t) \leq x < \infty \end{cases} \tag{5.10}$$

olacaktır. Bu durumda (5.10) ifadesini göz önünde bulundurarak (5.9) eşitliğinin sağ tarafındaki terimleri sırasıyla değerlendirirsek

$$-\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)} \int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y(\xi,t)d\xi < 0$$

ve

$$\frac{1}{2}e^{q(x_0,t)} \int\limits_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi} y(\xi,t)d\xi < 0$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$u_x(q(x_0,t),t) = -\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)} \int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y(\xi,t)d\xi + \frac{1}{2}e^{q(x_0,t)} \int\limits_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi} y(\xi,t)d\xi < 0$$

dır.

Şimdi ise iddiamızın ikinci kısmının doğruluğunu gösterelim. Burada,

$$I := \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)} \int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y(\xi,t)d\xi, \qquad t \in [0,T)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda

$$\frac{d}{dt}I(t) = -I(t)\frac{d}{dt}q(x_0,t) + \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)} \int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y_t(\xi,t)d\xi$$

veya

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(t) = &-\frac{1}{2}\left(u\left(q(x_0,t),t\right) - k\right)e^{-q(x_0,t)} \int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y(\xi,t)d\xi \\ &+ \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)} \int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y_t(\xi,t)d\xi \end{aligned} \tag{5.11}$$

elde edilir.

(5.11)'in sağ tarafındaki ikinci terimi değerlendirelim. Bunu gerçekleştirebilmek için (4.2.7) eşitliği $y = u - u_{xx}$ alınarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}
-y_t &= y_x u + 2yu_x - ky_x \\
&= y_x u + yu_x + yu_x - ky_x \\
&= (yu)_x + yu_x - ky_x \\
&= (yu)_x + (u - u_{xx})u_x - ky_x \\
&= (yu)_x + uu_x - u_x u_{xx} - ky_x \\
&= (yu)_x + \frac{1}{2}\left(u^2 - u_x^2\right)_x - ky_x
\end{aligned} \tag{5.12}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece (5.11) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terimi (5.12)'de elde edilen eşitliği kullanarak düzenleyelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)} \int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y_t(\xi,t) d\xi \\
&= -\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)} \int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} (-y_t)(\xi,t)\, d\xi \\
&= -\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)} \int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} \left((yu)_x + \frac{1}{2}\left(u^2 - u_x^2\right)_x - ky_x\right)(\xi,t)\, d\xi \\
&= -\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)} \int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} (yu)_x (\xi,t)\, d\xi - \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)} \int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} \frac{1}{2}\left(u^2 - u_x^2\right)_x (\xi,t)\, d\xi \\
&+ \frac{k}{2}e^{-q(x_0,t)} \int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y_x (\xi,t)\, d\xi
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikte, kısmi integrasyon formülü kullanılırsa

$$\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y_t(\xi,t)d\xi$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}e^{q(x_0,t)}(yu)(q(x_0,t),t) + \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}yu\,(\xi,t)\,d\xi$$

$$-\frac{1}{4}e^{-q(x_0,t)}e^{q(x_0,t)}\left(u^2-u_x^2\right)(q(x_0,t),t) + \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{1}{2}\left(u^2-u_x^2\right)(\xi,t)\,d\xi$$

$$+\frac{k}{2}e^{-q(x_0,t)}e^{q(x_0,t)}y(q(x_0,t),t) - \frac{k}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y\,(\xi,t)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(u^2-uu_{xx})(\xi,t)d\xi + \frac{1}{4}\left(u_x^2-u^2\right)(q(x_0,t),t)$$

$$+\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}u_x^2)(\xi,t)d\xi - \frac{k}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y(\xi,t)d\xi$$

olacaktır. Buradan ise gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y_t(\xi,t)d\xi$$

$$= \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}u^2(\xi,t)d\xi - \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(uu_{xx})(\xi,t)d\xi + \frac{1}{4}\left(u_x^2-u^2\right)(q(x_0,t),t)$$

$$+\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\left(\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}u_x^2\right)(\xi,t)d\xi - \frac{k}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y(\xi,t)d\xi \tag{5.13}$$

elde edilir.

Şimdi son eşitliği daha detaylı bir şekilde değerlendirebilmek için karşımıza çıkan

$$-\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(uu_{xx})(\xi,t)d\xi$$

integrali hesaplayalım. Bunun için $(uu_x)_x = u_x^2 + uu_{xx}$ eşitliğini kullanırsak

$$-\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(-u_x^2+(uu_x)_x)(\xi,t)d\xi$$

$$= \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}u_x^2(\xi,t)d\xi - \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(uu_x)_x(\xi,t)d\xi$$

elde edilir. Son eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terime kısmi integrasyon formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(uu_{xx})(\xi,t)d\xi \\
&=\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}u_x^2(\xi,t)d\xi+\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(uu_x)(\xi,t)d\xi-\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}e^{q(x_0,t)}uu_x(q(x_0,t),t) \\
&=\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}u_x^2(\xi,t)d\xi+\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{1}{2}2(uu_x)(\xi,t)d\xi-\frac{1}{2}(uu_x)\left(q(x_0,t),t\right) \\
&=\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}u_x^2(\xi,t)d\xi+\frac{1}{4}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(u^2)_x(\xi,t)d\xi-\frac{1}{2}(uu_x)\left(q(x_0,t),t\right)
\end{aligned}$$

olacaktır. Son eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terimde yeniden kısmi integrasyon formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(uu_{xx})(\xi,t)d\xi \\
&=\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}u_x^2(\xi,t)d\xi-\frac{1}{4}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}u^2(\xi,t)d\xi \\
&+\frac{1}{4}e^{-q(x_0,t)}e^{q(x_0,t)}u^2(q(x_0,t),t)-\frac{1}{2}(uu_x)\left(q(x_0,t),t\right) \\
&=\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\left(u_x^2-\frac{1}{2}u^2\right)(\xi,t)d\xi+\frac{1}{4}u^2\left(q(x_0,t),t\right) \\
&-\frac{1}{2}(uu_x)\left(q(x_0,t),t\right)
\end{aligned}\tag{5.14}$$

olarak integralin sonucu bulunacaktır. (5.14)'te bulunan integralin sonucu (5.13)'te elde edilen eşitlikte yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y_t(\xi,t)d\xi \\
&= \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\left(\frac{3}{2}u^2-\frac{1}{2}u_x^2\right)(\xi,t)d\xi + \frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\left(u_x^2-\frac{1}{2}u^2\right)(\xi,t)d\xi \\
&+ \frac{1}{4}u^2\left(q(x_0,t),t\right) - \frac{1}{2}(uu_x)\left(q(x_0,t),t\right) + \frac{1}{4}\left(u_x^2-u^2\right)\left(q(x_0,t),t\right) \\
&- \frac{k}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y(\xi,t)d\xi \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Diğer taraftan, (5.11)'de verilen eşitliğin sağ tarafındaki birinci terimi $y = u - u_{xx}$ kullanarak hesaplayalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}u\left(q(x_0,t),t\right)e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y(\xi,t)d\xi \\
&= -\frac{1}{2}u\left(q(x_0,t),t\right)e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(u-u_{xx})(\xi,t)d\xi \\
&= -\frac{1}{2}u\left(q(x_0,t),t\right)e^{-q(x_0,t)}\left(\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}u(\xi,t)d\xi - \int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}u_{xx}(\xi,t)d\xi\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son eşitlikte kısmi integrasyon formülü kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}u\left(q(x_0,t),t\right)e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y(\xi,t)d\xi \\
&= -\frac{1}{2}u\left(q(x_0,t),t\right)e^{-q(x_0,t)}\left(\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}u(\xi,t)d\xi + \int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}u_x(\xi,t)d\xi - e^{q(x_0,t)}u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}u\left(q(x_0,t),t\right)e^{-q(x_0,t)}\left(e^{q(x_0,t)}u\left(q(x_0,t),t\right) - e^{q(x_0,t)}u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}u\left(q(x_0,t),t\right)u\left(q(x_0,t),t\right) + \frac{1}{2}u\left(q(x_0,t),t\right)u_x\left(q(x_0,t),t\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(uu_x\right)\left(q(x_0,t),t\right) - \frac{1}{2}u^2\left(q(x_0,t),t\right) \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (5.15) ile (5.16) eşitlikleri (5.11) ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(t) &= -\frac{1}{2}\left(u\left(q(x_0,t),t\right)-k\right)e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y(\xi,t)d\xi+\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y_t(\xi,t)d\xi \\
&= -\frac{1}{2}u\left(q(x_0,t),t\right)e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y(\xi,t)d\xi+\frac{k}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y(\xi,t)d\xi \\
&+\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y_t(\xi,t)d\xi
\end{aligned}
$$

veya

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(t) &= \frac{1}{2}\left(uu_x\right)\left(q(x_0,t),t\right)-\frac{1}{2}u^2\left(q(x_0,t),t\right)+\frac{k}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y(\xi,t)d\xi \\
&+\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\left(\frac{3}{2}u^2-\frac{1}{2}u_x^2\right)(\xi,t)d\xi+\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\left(u_x^2-\frac{1}{2}u^2\right)(\xi,t)d\xi \\
&+\frac{1}{4}u^2\left(q(x_0,t),t\right)-\frac{1}{2}(uu_x)\left(q(x_0,t),t\right)+\frac{1}{4}\left(u_x^2-u^2\right)\left(q(x_0,t),t\right) \\
&-\frac{k}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y(\xi,t)d\xi
\end{aligned}
$$

olacaktır. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(t) &= -\frac{1}{2}u^2\left(q(x_0,t),t\right)+\frac{1}{4}u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)+\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(u^2+\frac{1}{2}u_x^2)(\xi,t)d\xi \\
&= -\frac{1}{2}u^2\left(q(x_0,t),t\right)+\frac{1}{4}u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)+\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u_x^2)(\xi,t)d\xi \\
&+\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{1}{2}u^2(\xi,t)d\xi \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

eşitliğine ulaşılır. (5.17)'yi daha basit bir şekilde ifade edebilmek için

$$
\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u_x^2)(\xi,t)d\xi
$$

integraline Young eşitsizliğini uygulayarak düzenleyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi-q(x_0,t)}(\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u_x^2)(\xi,t)d\xi &\geq \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi-q(x_0,t)}(uu_x)(\xi,t)d\xi \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi-q(x_0,t)}\frac{1}{2}(2uu_x)(\xi,t)d\xi \\ &= \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi-q(x_0,t)}(u^2)_x(\xi,t)d\xi\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte kısmi integrasyon formülü kullanılarak düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi-q(x_0,t)}(\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u_x^2)(\xi,t)d\xi \\ &\geq -\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi-q(x_0,t)}u^2(\xi,t)d\xi \\ &= +\frac{1}{4}e^{q(x_0,t)-q(x_0,t)}u^2(q(x_0,t),t)-\frac{1}{4}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}u^2(\xi,t)d\xi \\ &= \frac{1}{4}u^2(q(x_0,t),t)-\frac{1}{4}e^{-q(x_0,t)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}u^2(\xi,t)d\xi\end{aligned}$$

bulunur. Böylece son eşitsizlik (5.17)'de yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt}I(t) \geq -\frac{1}{2}u^2\left(q(x_0,t),t\right)+\frac{1}{4}u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)+\frac{1}{4}u^2(q(x_0,t),t)$$

veya

$$\frac{d}{dt}I(t) \geq \frac{1}{4}(u_x^2-u^2)(q(x_0,t),t) > 0, \quad t\in[0,t_0)$$

elde edilir. Teoremin koşullarından $I(t)\geq 0$ olacağı açıktır. Bununla birlikte $\frac{d}{dt}I(t)>0$ olduğundan $I(t)$ fonksiyonu kesin artandır. $I(t)$ fonksiyonunun süreklilik özelliği dikkate alınırsa

$$t_0>0 \quad \text{için} \quad I(t_0)>I(0)$$

veya

$$e^{-q(x_0,t_0)}\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t_0)} e^{\xi}y(\xi,t_0)d\xi > e^{-x_0}\int\limits_{-\infty}^{x_0} e^{\xi}y_0(\xi)d\xi > 0 \tag{5.18}$$

olacaktır.

Ayrıca,

$$II := \frac{1}{2}e^{q(x_0,t)} \int\limits_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}y(\xi,t)d\xi$$

olacak şekilde tanımlansın. O halde, $I(t)$ için yapılan işlemler benzer şekilde $II(t)$ için de uygulanırsa

$$\frac{d}{dt}II(t) \leq \frac{1}{4}(u^2 - u_x^2)\left(q(x_0,t),t\right) < 0, \qquad t \in \ [0,t_0)$$

elde edilir. Teoremin koşullarından $II(t) \leq 0$ olacaktır. Bununla birlikte son eşitsizlikten $\frac{d}{dt}II(t) < 0$ olduğudan $II(t)$ kesin azalan olup $II(t)$ fonksiyonunun süreklilik özelliğinden

$$t_0 > 0 \quad \text{için} \ \ II(t_0) < II(0)$$

veya

$$e^{q(x_0,t_0)} \int\limits_{q(x_0,t_0)}^{\infty} e^{-\xi}y(\xi,t_0)d\xi < e^{x_0}\int\limits_{x_0}^{\infty} e^{-\xi}y_0(\xi)d\xi < 0 \tag{5.19}$$

elde edilir.

Burada, (5.9) ile (5.8)'in kareleri alınıp taraf tarafa çıkarılır ayrıca (5.18) ile (5.19) ifadeleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} u_x^2\left(q(x_0,t_0),t_0\right) - u^2\left(q(x_0,t_0),t_0\right) &= -\int\limits_{-\infty}^{q(x_0,t_0)} e^{\xi}y(\xi,t_0)d\xi \int\limits_{q(x_0,t_0)}^{\infty} e^{-\xi}y(\xi,t_0)d\xi \\ &> -\int\limits_{-\infty}^{x_0} e^{\xi}y_0(\xi)d\xi\int\limits_{x_0}^{\infty} e^{-\xi}y_0(\xi)d\xi \\ &= u_{0x}^2(x_0) - u_0^2(x_0) > 0 \end{aligned} \tag{5.20}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece iddiamız doğrudur.

Şimdi teoremin ispatını devam ettirebiliriz. Çözümün yaşam süresi içindeki herbir t değeri için

$$m(t) := u_x\left(q(x_0,t),t\right) \tag{5.21}$$

olacak şekilde tanımlanmış olsun. (5.7) eşitsizliği ile (5.20) eşitliğini göz önünde bulundurarak (5.21)'de ifade edilen eşitliğin t'ye göre türevini alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{dm(t)}{dt} &\leq \frac{1}{2}\left(u^2\left(q(x_0,t),t\right) - u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(u_0^2(x_0) - u_{0x}^2(x_0)\right) = C \\ &< 0 \end{aligned} \tag{5.22}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Burada (5.22) eşitsizliğinin her iki tarafı 0'dan t'ye integrallenirse $C < 0$ olduğundan öyle bir t_0 noktası vardır ki $\forall t > t_0$ için

$$m(t) \leq m(0) + Ct < -\left\| u_0(x) \right\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

olacaktır. Son eşitsizlikte her iki tarafın karesi alınırsa

$$m^2(t) \geq (m(0) + Ct)^2 > \left\| u_0(x) \right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Aslında, basit bir hesaplama ile t_0 değeri için farklı iki durumun mevcut olduğu açıktır. Bu durumu

$$\begin{cases} m_0 \leq -\left\| u_0(x) \right\|_{H^1(\mathbb{R})} & \text{ise} \quad t_0 = 0, \\ m_0 > -\left\| u_0(x) \right\|_{H^1(\mathbb{R})} & \text{ise} \quad t_0 = \frac{-2m_0 - 2\left\| u_0(x) \right\|_{H^1(\mathbb{R})}}{\left(u_0^2 - u_{0x}^2\right)(x_0)} \end{cases} \tag{5.23}$$

olacak şekilde ifade edebiliriz.

(5.23)'ün ikinci kısmının doğruluğunu gösterelim. $m_0 > -\left\| u_0(x) \right\|_{H^1(\mathbb{R})}$ olsun.

$$\frac{dm(t)}{dt} \leq \frac{1}{2}\left(u_0^2(x_0) - u_{0x}^2(x_0)\right)$$

eşitsizliğini 0'dan t'ye kadar integrallersek

$$m(t) - m(0) \leq (t - 0)\frac{1}{2}\left(u_0^2(x_0) - u_{0x}^2(x_0)\right)$$

veya

$$m(t) - m_0 \leq \frac{1}{2}t\left(u_0^2(x_0) - u_{0x}^2(x_0)\right)$$

olacaktır. Buradan ise

$$m(t) \leq m_0 + \frac{1}{2}t\left(u_0^2(x_0) - u_{0x}^2(x_0)\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizlikte $\frac{1}{2}\left(u_0^2(x_0) - u_{0x}^2(x_0)\right) < 0$ olduğundan

$$t_0 = \frac{-2m_0 - 2\left\| u_0(x) \right\|_{H^1(\mathbb{R})}}{\left(u_0^2 - u_{0x}^2\right)(x_0)}$$

için

$$\begin{aligned} m(t) &\leq m(t_0) \\ &\leq m_0 + \frac{1}{2}t_0\left(u_0^2(x_0) - u_{0x}^2(x_0)\right) = -\left\| u_0(x) \right\|_{H^1(\mathbb{R})}, \forall t \geq t_0 \end{aligned} \tag{5.24}$$

olacaktır. Son eşitsizliğin sağ tarafını ele alıp düzenlersek

$$m_0 + \|u_0(x)\|_{H^1(\mathbb{R})} = -\frac{1}{2}t_0 \left(u_0^2(x_0) - u_{0x}^2(x_0)\right)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikten t_0 çekilirse

$$t_0 = \frac{-2m_0 - 2\|u_0(x)\|_{H^1(\mathbb{R})}}{\left(u_0^2 - u_{0x}^2\right)(x_0)}$$

olarak bulunur. Böylece (5.23)'te verilen ifadenin ikinci kısmının doğruluğu gösterilmiş olur.

Yeniden (5.22)'ye dönerek $t > t_0$ için

$$\frac{dm(t)}{dt} \leq \frac{1}{2}u^2\left(q(x_0,t),t\right) - \frac{1}{2}u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)$$

eşitsizliğini inceleyelim. Burada $u\left(q(x_0,t),t\right)$ fonksiyonu için (4.2.6) göz önünde bulundurulursa

$$\frac{dm(t)}{dt} \leq \frac{1}{4}\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 - \frac{1}{2}u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Son eşitsizlikte $\lambda = 0$ için (4.2.3) kullanılırsa

$$\frac{dm(t)}{dt} \leq \frac{1}{4}\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 - \frac{1}{2}u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)$$

elde edilir.(5.21) ve (5.24) göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}\frac{dm(t)}{dt} &\leq \frac{1}{4}m^2(t) - \frac{1}{2}m^2(t)\\ &= -\frac{1}{4}m^2(t), \quad t \in (t_0,\infty)\end{aligned}$$

olacaktır. Sonuç olarak $m_0 < 0$ olduğunda (4.2.2) denkleminin çözümü sonlu bir zamanda patlar. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Şimdi $\lambda \neq 0$ olmak üzere Zayıf Disipatif Camassa-Holm denkleminin çözümünün patlamasını garanti edecek daha basit bir koşulu inceleyeceğiz. Bunun için aşağıda verilen lemmayı göz önünde bulunduracağız.

Lemma 66 *C, K pozitif sabit sayılar olmak üzere türevlenebilir $y(t)$ fonksiyonu*

$$\frac{d}{dt}y(t) \leq -Cy^2(t) + K \tag{5.25}$$

eşitsizliğini sağlasın. Eğer $y(0) = y_0 < -\sqrt{\frac{K}{C}}$ koşulu sağlanırsa $y(t)$ fonksiyonu sonlu bir zamanda $-\infty$'a yaklaşır.

İspat. Her $t \geq 0$ için $y^{'}(t) < 0$ olduğunu gösterelim. Bunu gerçekleştirebilmek için tersinin doğru olduğunu yani $\forall t \in [0, t_0]$ için

$$y^{'}(t) < 0 \;\; \text{ve} \;\; y^{'}(t_0) = 0$$

olacak şekilde bir t_0 zamanının mevcut olduğunu kabul edelim.

Teoremin koşullarından $t = 0$ komşuluğunda

$$-Cy^2(0) + K < 0$$

yazılabileceğinden $y^{'}(t) < 0$ olacaktır.

Bu durumda, $[0, t_0]$ aralığı üzerinde $y(t)$ fonksiyonu azalan olduğu için

$$y(t_0) \leq y(0) = y_0 \leq -\sqrt{\frac{K}{C}}$$

veya

$$y^2(t_0) > \frac{K}{C}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Son eşitsizlikten

$$-Cy^2(t) + K < 0$$

elde edilir. Fakat (5.25)'ten $t = t_0$ için

$$-Cy^2(t_0) + K \geq y^{'}(t_0) = 0$$

yani

$$-Cy^2(t_0) + K \geq 0$$

olduğu bilinmektedir. Bu durum ise bir çelişkidir. Böylece iddiamız doğrudur.

Şimdi yeniden (5.25) eşitsizliğini ele alalım. Eşitsizliğin sağ tarafına $\frac{K}{y_0^2}y^2(t)$ terimi eklenip çıkarılır ve sırasıyla aşağıdaki adımlar uygulanırsa

$$\begin{aligned} y^{'}(t) &\leq -Cy^2(t) + K \\ &= -Cy^2(t) + \frac{K}{y_0^2}y^2(t) - \frac{K}{y_0^2}y^2(t) + K \\ &= -C\left(1 - \frac{K}{Cy_0^2}\right)y^2(t) - \frac{K}{y_0^2}\left(y^2(t) - y_0^2\right) \end{aligned} \tag{5.26}$$

elde edilir. Ayrıca $y(t)$, negatif ve azalan bir fonksiyon olduğundan

$$y^2(t) > y_0^2$$

veya

$$y^2(t) - y_0^2 > 0$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği bilinmektedir. Bu durumda son eşitsizlik göz önüne alınarak (5.26) eşitsizliği düzenlenirse

$$y'(t) \leq -C\left(1 - \frac{K}{Cy_0^2}\right) y^2(t)$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafının integrali alınırsa

$$y(t) \leq \left(\frac{1}{y_0} + C\left(1 - \frac{K}{Cy_0^2}\right) t\right)^{-1}$$

elde edilir. Burada, eğer t

$$\frac{1}{-Cy_0 + \frac{K}{y_0}}$$

sayısına giderse (5.25) eşitsizliğinin çözümü de $-\infty$'a yaklaşır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Yukarıda verilen lemmadan yararlanarak çözümün patlamasını garanti edecek daha basit bir koşulu ifade edip ispatlayalım.

Teorem 67 $K = \frac{1}{2}\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \lambda^2$ *olmak üzere eğer*

$$u_x(x_0) < -2\sqrt{K} \tag{5.27}$$

eşitsizliği sağlanırsa (5.1) denkleminin başlangıç değer probleminin çözümü sonlu bir zamanda patlar.

İspat. $\lambda \neq 0$ olmak üzere (5.7) eşitsizliğini

$$\frac{d}{dt}u_x(q(x_0,t),t) \leq \frac{1}{2}u^2(q(x_0,t),t) - \frac{1}{2}u_x^2(q(x_0,t),t) - \lambda u_x\left(q(x_0,t),t\right)$$

veya

$$\frac{d}{dt}u_x(q(x_0,t),t) \leq \frac{1}{2}u^2(q(x_0,t),t) - \frac{1}{2}u_x^2(q(x_0,t),t) - 2\frac{\lambda u_x\left(q(x_0,t),t\right)}{2}$$

şeklinde yazabiliriz. Son eşitsizliğin sağ tarafındaki üçüncü terime Young eşitsizliği uygulanarak,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u_x(q(x_0,t),t) &\leq \frac{1}{2}u^2(q(x_0,t),t) - \frac{1}{2}u_x^2(q(x_0,t),t) + \lambda^2 + \frac{1}{4}u_x^2(q(x_0,t),t) \\ &= \frac{1}{2}u^2(q(x_0,t),t) - \frac{1}{4}u_x^2(q(x_0,t),t) + \lambda^2 \end{aligned} \tag{5.28}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Ayrıca burada (4.2.6) ve (4.2.3)'ten

$$\|u\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R})} = \frac{1}{2}e^{-2\lambda t}\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})} < \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}$$

olacaktır. Böylece elde edilen son eşitsizlik (5.28) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\frac{d}{dt}u_x(q(x_0,t),t) \leq -\frac{1}{4}u_x^2(q(x_0,t),t) + \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})} + \lambda^2 \tag{5.29}$$

elde edilir. (5.29) eşitsizliğinde $C = \frac{1}{4}$ ve $K = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})} + \lambda^2$ alınırsa

$$\frac{d}{dt}u_x(q(x_0,t),t) \leq -Cu_x^2(q(x_0,t),t) + K$$

eşitsizliğine ulaşılır. Dolayısıyla Lemma 66 göz önüne alınırsa başlangıç değer için

$$u_x(x_0) < -\sqrt{\frac{K}{\frac{1}{4}}} = -\sqrt{4K} = -2\sqrt{K}$$

eşitsizliği sağlanmış olduğundan (5.1) denkleminin başlangıç değer probleminin çözümü sonlu bir zamanda patlar. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Kaynaklar

[1] Russell J. S. Report of the Fourteenth Meeting of The British Association for the Advancement of Science, London: John Murray, 311–390, Plates XLVII–LVII, York, September, 1844

[2] Korteweg D. J., de Vries G. On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves, Philosophical Magazine 39, 240, 422–443, 1895

[3] Zabusky N. J., Kruskal, M. D. Interaction of ”Solitons” in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, Physical Review Letters, 15, 6, 240–243, 1965

[4] Benjamin B, Bona J. L. and Mahony J. J., Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, Philosophical Transactions Society London Series A, 272, 47-78, 1972

[5] J. L. Bona, W. G. Pritchard and L. R. Scott, Solitary wave interaction, Physics of Fluids, 23, 438-441, 1980

[6] Fuchssteiner B., The Lie algebra structure of nonlinear evolution equations admitting infinite dimensional Abelian symmetry group, Progress of Theoretical Physics, 65, 861-876, 1981

[7] Camassa R. and Holm D., An integrable shallow water equation with peaked solitons, Physical Review Letters, 71, 1661-1664, 1993

[8] Camassa R., Holm D. and Hyman J., A new integrable shallow water equation, Advences in Applied Mechanics, 31, 1-33, 1994

[9] Constantin A., Strauss W. A., Stabilty of peakons, Pure Applied Mathematics, 53, 603-610, 2000

[10] Beals R., Sottinger D. and Szmigielski J., Acoustic scattering and the extended Korteweg de Vries hierarchy, Advances in Mathematics, 140, 190-206, 1998

[11] Beals R., Sottinger D. and Szmigielski J., Multipeakons and a theorem of Stieltjes, Inverse Problem, 15, 1-4, 1999

[12] Constantin A. and Mckean H. P., A shallow water equation on the circles, Communications on Pure and Applied Mathematics, 52, 949-982, 1999

[13] Alber M. S., Camassa R., Holm D., and Marsden J. E., The geometry of peaked solitons and billiard solutions of a class of integrable PDEs, Letters in Mathematical Physics, 32, 137-151, 1994

[14] Alber M. S., Camassa R., Fedorov Y. N., Holm D., and Marsden J. E., On billiard solutions of nonlinear PDEs, Physics Letters A, 264, 171-178, 1999

[15] Semenov N., Some Problems Relating to Chain Reactions and to the Theory of Combustion, Nobel Lectures, Chemistry 1942 - 1962, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1964

[16] Kaplan S., On the Growth of Solutions of Quasilinear Parabolic Equations, Comm. Pure Appl. Math. 16, 305-330, 1963

[17] Fujita H., On the Blowing Up of Solutions to the Cauchy Problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ Journal Faculty Science, University of Tokyo, 13, 109-124, 1969

[18] Friedman A., Partial Differential Equations of Parabolic Type, Prentice-Hall, Inc., 1964

[19] Glassey R. T., Blow up Theorems of Nonlinear Wave Equations, Mathematische Zeitschrift, 132, 183-203, 1973

[20] Cooper F. and Shepard H., Solitons in the Camassa-Holm shallow water equations, Physics Letters A, 194, 246-250, 1994

[21] M. S. Alber, R. Camassa, D. Holm and J. E. Marsden On the link between umbilic geodesics and soliton solutions of nonlinear PDEs, Proceedings of the Royal Society A, 450, 677–692, 1995

[22] Li Y. A. and Olver P. J., Convergence of solitary-wave solutions in a perturbed bi-Hamiltonian dynamical system I. Compactons and peakon, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 3, 419–432, 1997

[23] Li Y. A. and Olver P. J., Convergence of solitary-wave solutions in a perturbed bi-Hamiltonian dynamical system II. Complex analytic behavior and convergence to non-analytic solution, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 4, 159-191, 1998

[24] Constantin A., On the Cauchy problem for the periodic Camassa-Holm equation, Journal of Differential Equations, 141, 218-223, 1997

[25] Constantin A. and Escher J., Global weak solutions for a shallow water equation, Indiana University Mathematics Journal, 47, 1527-1545, 1998

[26] Constantin A. and Molinet L., Global weak solutions for a shallow water equation, Communications in Mathematical Physics, 211, 45-61, 2000

[27] Constantin A. and Escher J., Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations, Acta Mechanica, 181, 229-243, 1998

[28] Constantin A. and Escher J., Global existence and blow-up for a shallow water equation, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Scienze, 26, 303-328, 1998

[29] Constantin A., The Hamiltonian structure of the Camassa-Holm equation, Exposetiones Mathematics, 15, 53-85, 1997

[30] McKean H. P., Breakdown of a shallow water equation, Asian Journal of Mathematics, 2, 4, 867-874, 1998

[31] Zhang P. and Zheng Y. X., On oscillations of an asymptotic equation of a nonlinear variational wave equation, Asymtotic Analysis, 18, 307-327, 1998

[32] Zhang P. and Zheng Y. X., On the existence and uniqueness of solutions to an asymptotic equation of a variational wave equation, Acta Mechanica Sinica, Engl. Ser., 15, 115-130, 1999

[33] Zhang P. and Zheng Y. X., Existence and uniqueness of solutions of an asymptotic equation arising from a variational wave equation with general data, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 155, 49-83, 2000

[34] Xin Z. P. and Zhang P., On the weak solutions to a shallow water equation, Pure and Applied Mathematics, 53, 1411-1433, 2000

[35] Zhang P. and Zheng Y. X., Singular and rarefactive solutions to a nonlinear variational wave equation, Chinese Annals of Mathematics, Series B, 22, 159-170, 2001

[36] Hunter J. H. and Zheng Y. X., On a completely integrable nonlinear hyperbolic variational equation, Physica D., 79, 361-386, 1994

[37] Himonas A. A. and Misiolek G., Well-posedness of the Cauchy problem for a shallow water equation on the circle, Journal of Differential Equations, 161, 479-495, 2000

[38] Li Y. A. and Olver P. J., Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation, Journal of Differential Equations, 162, 27–63, 2000

[39] Camassa R., Characteristic variables for a completely integrable shallow water equation, Proceedings of the Workshop on Nonlinearity, Integrability and All That: Twenty Years after NEEdS'79 (Gallipoli, 1999), River Edge, NJ: World Science Publishing, 65–74, 2000

[40] Misiolek G., Classical solutions of the periodic Camassa-Holm equation, Geometric and Functional Analysis, 12, 5, 1080-1104, 2002

[41] Yin Z., Well-posedness, blow up and global existence for an integrable shallow water equation, Discrete and Continuous Dynamical Systems A, 11, 2&3, 393-411, 2004

[42] Tian L., Gui G. and Liu Y., On the Cauchy Problem and the scattering problem for the Dullin-Gottwald-Holm equation, Communications in Mathematical Physics, 257, 3, 667-701, 2005

[43] Wu S. and Yin Z., Blow-up, blow-up rate and decay of the solution of the weakly dissipative Camassa–Holm equation, Journal of Mathematical Physics, 47, 1–12, 2006

[44] Wu S. and Yin Z., Blow-up and decay of the solution to the weakly dissipative Camassa-Holm equation, Acta Mathematicae Applicatae Sinica 30 (in Chinese), 996-1003, 2007

[45] Zhou Y., Blow up solutions to the DGH equation, Journal of Functional Analysis, 250, 1, 227-248, 2007

[46] Wu S. and Yin Z., Global existence and blow-up phenomena for the weakly dissipative Camassa-Holm equation, Journal of Differential Equations 246, 4309–4321, 2009

[47] Wu S., Global weak solutions for the weakly dissipative Camassa-Holm equation, Journal of Partial Differantial Equations, 24, 165-179, 2011

[48] Novruzov E., On blow-up phenomena for the weakly dissipative Camassa-Holm equation, Journal of Engineering Mathematics, 77, 187-195, 2012

[49] Novruzov E., Blow-up phenomena for the weakly dissipative Dullin–Gottwald–Holm equation, Journal of Mathematical Phsics, 54, 9, 2013

[50] Qiaoyu H., Global existence and blow-up phenomena for a weakly dissipative 2-component Camassa-Holm system, Aplicable Analysis, Vol. 92, No. 2, 398-410, 2013

[51] Himonas A. A. and Holliman C., The Cauchy Problem For A Generalized Camassa-Holm Equation, Advances in Differential Equation, 19, 1-2, 161-200, 2014

[52] Yunxi G. and Shaoyong L., The local well-posedness and global solution for a modified periodic two-component Camassa-Holm system, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 413, 641-647, 2014

[53] Novruzov E. and Hagverdiyev A., On the behavior of the solution of the dissipative Camassa–Holm equation with the arbitrary dispersion coefficient, Journal of Differantial Equations, 257, 4525–4541, 2014

[54] Wei Y., Yongsheng L. and Yimin Z., The Cauchy problem for the generalized Camassa-Holm equation, Applicable Analysis, Vol. 93, No. 7, 1358–1381, 2014

[55] Dai H., Kwek K., Gao H. and Qu C., On the Cauchy Problem of the Camassa-Holm equation, Frontiers of Mathematics in China, 1, 144-159, 2006

[56] Zhou Y. and Chen H., Wave breaking and propagation speed for the Cammas-Holm equation with $K \neq 0$, Nonlinear Analysis: Real World Aplications, 12, 1875-1882, 2011

[57] Soykan Y., Fonksiyonel Analiz, 1. Baskı, Nobel Yayın Dağıtım, 2008

[58] Kreyszig E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, New York, 1978

[59] Musayev B., ve Alp M., Fonksiyonel Analiz, 1. Baskı, Balcı Yayınları, 2000

[60] Adams R. A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975

[61] Kesevan S., Topics in Functional Analysis and Applications, John Wiley and Sons, India, 1989

[62] Evans L. C., Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, AMS, Rhode Island, 1998

[63] Temam R., Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer-Verlag New York, 1988

[64] Gronwall, T.H., Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations, Annals of Mathematics, 20 (2), 292-296, 1919

[65] Levine H. A. and Todorova G., Blow-up Solutions of Cauchy Problem for a Wave Equation with Nonlinear and Damping and Source Terms and Positive Initial Energy, Proceedings of the A.M.S., 129, (3), 793-895, 2000

[66] Kato T., Quasi-linear Equations of Evolution with Applications to Partial Differential Equations, Spectral Theory and Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics, Berlin Heidelberg New York, Springer, 448, 25-70, 1975

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı	:	Cenk GEMİCİ
Doğum Yeri ve Yılı	:	Ankara/01.03.1978
Medeni Hali	:	Evli
E-posta	:	cenkgemici@gmail.com

Eğitim

Lise	:	1992-1996	İstanbul Şehremini Anadolu Lisesi,
Lisans	:	1996-2000	İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, iyi

İş Deneyimi

2000-2001

Ankara Tümay Dersanesi, Matematik Öğretmeni.

2002-2006

Bolu Mimar İzzet Baysal Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, Matematik Öğretmeni.

2006-2009

Erzurum Horasan Anadolu Lisesi, Matematik Öğretmeni.

2009-2013

Yozgat Sorgun Anadolu Lisesi, Matematik Öğretmeni.

2013-

Ankara Yavuz Sultan Selim Anadolu Lisesi, Matematik Öğretmeni.

Deneyim Alanları

–

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

–

Tezden Üretilmiş Yayınlar

–

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

–