

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**





KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : / /

Tezin Savunma Tarihi : / /

Tez Danışmanı :

Trabzon

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Fizik Ana Bilim Dalında
Taylan BAŞKAN Tarafından Hazırlanan**

**DÖTERONUN BAĞLANMA ENERJİSİNİN KUANTUM HESAPLAMA TEORİSİ İLE
İNCELENMESİ**

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 24/ 12/2019 gün ve 1833 sayılı
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Ahmet Hakan YILMAZ

Üye : Prof. Dr. Belgin KÜÇÜKÖMEROĞLU

Üye : Prof. Dr. Mehmet ŞAHİN

Hakan yılmaz
Belgin Küçükömeroğlu
M. Şahin

Prof. Dr. Asim KADIOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Döteronun bağlanma enerjisinin kuantum hesaplama teorisiyle, bir kuantum bilgisayar üzerinde hesaplanmasına yönelik yaptığım bu çalışmamda, yardımlarını esirgemeyen, çalışmamın ve kariyerimin gelişmesinde çok önemli katkıları bulunan, insani değerleri ve özverili çalışma prensipleriyle her zaman örnek aldığım ve alacağım, yol göstericim, değerli hocam, danışmanım, Fizik Bölümü Bölüm Başkanı Prof. Dr. Ahmet Hakan YILMAZ'a, çalışmamın gelişmesi ve başarılı olabilmesi için bana önemli yardımları dokunan, tez çalışmamın tamamlanmasında bilgi ve görüşleriyle bana yol gösteren Bilgisayar Mühendisliği Bölümü'nden değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi İbrahim SAVRAN'a, çalışmam ve eğitimimde bana kol kanat veren, her zaman yanımdan olduğunu hissettirmekten bir an olsun vazgeçmeyen Kimya Bölüm Başkanı saygı değer hocam Prof. Dr. Sevil SAVAŞKAN YILMAZ'a, ayrıca yardımlarından dolayı Dr. Öğr. Üyesi Mehmet DEMİRCİ'ye, yine çalışmamda katkı ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen Arş. Gör. Zehra Merve CİNAN'a, değerli ekip arkadaşım Arş. Gör. Burcu EROL'a , gönülden teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca birlikte çalışmaktan onur duyduğum KTÜ Fizik Bölümündeki tüm değerli hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Eğitimimin bu aşamaya gelmesinde önemli katkılarını hiçbir zaman unutmayacağım Sn.Nadir ULU'ya gönülden teşekkürlerimi sunarım.

Çevremde bana katkılarını esirgemeyen, dostluk ve ilgilerini her zaman hissettiğim tüm dostlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, bu zorlu süreçte hep yanımda olan, anlayış ve sabrını esirgemeyen sevgili eşim Selin'e, değerli Pekçeer ailesine ve bugünlere gelmemdeki emekleri son derece önemli olan, sevgi ve ilgilerini esirgemeyen, yol gösteren ve büyük bir güç olarak sürekli arkamda duran anneme ve babama sonsuz saygı ve sevgilerimi sunarım.

Taylan BAŞKAN

TRABZON 2020

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

(Yüksek Lisans Tezi) olarak sunduğum “Döteronun bağlanma enerjisinin kuantum hesaplama teorisi ile incelenmesi” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Ahmet Hakan Yılmaz‘ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 09/01/2020

Taylan BAŞKAN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET.....	VIII
SUMMARY.....	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
TABLolar DİZİNİ.....	XI
KISALTMALAR DİZİNİ.....	XII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1 Giriş.....	1
1.2. Kuantum Bilgisayarda Hesaplama.....	2
1.2.1. Birinci Postulat.....	2
1.2.2. İkinci Postulat.....	4
1.2.3. Üçüncü Postulat.....	6
1.2.4. Dördüncü Postulat.....	7
1.2.5. Beşinci Postulat.....	8
1.3. Kubit.....	8
1.3.1. Bloch Küresi Üzerinde Kubit Temsili.....	10
1.3.2. Birleşik Sistem.....	12
1.4. İz Düşüm İşlemcisi.....	13
1.4.1. Spektral Teoremi.....	13
1.4.2. Pozitif İşlemci.....	15
1.4.3. Bir İşlemcinin Kutupsal Ayrışması.....	15
1.4.4. Tekil Değer Ayrışması.....	16
1.5. Kuantum Mekaniğinde Yoğunluk Matris Formülasyonu.....	16
1.5.1. Yoğunluk Matrisi.....	18
1.5.2. Karışık Hal Yoğunluk Matrisi.....	22
1.5.3. Yoğunluk Matrisi ve Bloch Küresi.....	22

1.5.4.	Yoğunluk Matrisi Cinsinden Kuantum Mekanikçi Postulatları.....	26
1.5.5.	İndirgenmiş Yoğunluk Matrisi.....	27
1.5.6.	Schmidt Ayrışması Yöntemi ve Schmidt Sayıları.....	28
1.5.7.	Arıtma.....	30
1.6.	Çoklu Kubit Durumları ve Kuantum Kapıları.....	31
1.6.1.	Birleşik Sistemler.....	31
1.6.2.	İki Kubit Uzayında Matris Bazı.....	32
1.6.3.	Tek Kubit Kapıları.....	34
1.6.4.	Hadamard Kapısı.....	37
1.6.5.	İki Kubit Kapıları.....	38
1.6.6.	Üç Kubit Kapısı.....	40
1.7.	Kuantum Bilgi ve Hesaplama Kuantum Devreleri.....	43
1.7.1.	Klasik Mantık Kapılarının Uygulanması.....	43
1.7.2.	Kahin (Oracle).....	45
1.7.3.	Bir Kuantum Yazmacının Durumu.....	46
1.7.4.	Kuantum Paralellik.....	47
1.7.5.	Dalga Fonksiyonunun Çöküşü ve Ölçme Süresi.....	48
1.7.6.	Dolanıklık.....	48
1.7.7.	Kuantum Kopya Yok Teorisi.....	49
2.	YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	50
2.1.	Program Hazırlanması.....	50
2.2.	Pionsuz Efektif Alan Teorisi.....	51
2.3.	Osilatör Bazında Pionsuz Efektif Alan Teorisi.....	52
2.4.	Kuantum Bilgisayar Üzerinde Atomik Nükleonların Hesaplama.....	53
2.4.1.	Hamiltonyen ve Uzay Modeli.....	53
2.4.2.	VQE Algoritması.....	54
2.4.3.	UCC: Birimsel Çiftlenmiş Küme Yaklaşımı.....	55
2.4.4.	Kubitler Üzerinde Döteron Modellemesi.....	55
2.4.5.	Varyasyonel Dalga Fonksiyonu.....	57
2.4.6.	Kuantum Hesaplama.....	58
3.	BULGULAR VE İRDELEME.....	60
4.	SONUÇLAR.....	63
5.	ÖNERİLER.....	65

6. KAYNAKLAR.....	66
ÖZGEÇMİŞ	



Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

DÖTERONUN BAĞLANMA ENERJİSİNİN KUANTUM HESAPLAMA TEORİSİ İLE
İNCELENMESİ

Taylan BAŞKAN
Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı
Danışman: Prof.Dr. Ahmet Hakan YILMAZ
2020, 67 Sayfa

Çalışmamızda, bulut servisler üzerinden erişilen kuantum işlemcilerle klasik bilgisayar kullanarak erişim sağlayıp, döteronun bağlanma enerjisini çok küçük bir sapma ile hesaplandık. Döteronun Hamiltonyenini yazarken Pionsuz Efektif Alan Teorisini kullandık. Döteron için tam bağlanma enerjisi ölçümünü bilinen değerleriyle kıyaslanarak iki nükleonlu bir sistemin kuantum bilgisayar uygulamasını, üç-kubit üzerinde inceledik. Bu tez; nükleer yapı hesaplamaların kuantum bilgisayarda yapılabileceğini gösteren bir çalışma olup nükleer yapı hesaplarının kuantum bilgisayara nasıl aktarıldığını açıklamaktadır.

Anahtar Kelimeler: Kuantum Bilgisayar, Kuantum Hesaplama Teorisi, Döteron, nükleer yapı, bağlanma enerjisi,

Master Thesis
SUMMARY

EXAMINE OF DEUTERON BINDING ENERGY WITH QUANTUM COMPUTING
THEORY

Taylan BAŞKAN
Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Physics Graduate Program
Supervisor: Prof.Dr. Ahmet Hakan YILMAZ
2020, 67 Pages

In our study, we provided access to the quantum processors accessed via cloud services using a conventional computer, and detected the deuterium's binding energy with a very small deviation. We used the Pionless Theory of Effective Field when writing Hamiltonian of deuteron. We compared quantum computer application of a two-nucleon system on three-qubits by comparing the exact binding energy measurement for deuteron with known values. This thesis; A study showing how nuclear structure calculations can be done on a quantum computer and how nuclear structure calculations are transferred to a quantum computer.

Key Word: Quantum computer, quantum computing theory, deuteron, nuclear structure, binding energy

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Bloch Küresi.....	11
Şekil 2. Hadamard Kapısının Block Küresi üzerinde gösterimi.....	38
Şekil 3. İki kubit üzerinde CNOT kapısı.....	39
Şekil 4. Bell durumundaki bir kuantum devresi.....	39
Şekil 5. Bell durumunun şematik gösterimi.....	40
Şekil 6. Toffoli Kapısı.....	41
Şekil 7. CSWAP kapısı.....	42
Şekil 8. NOT kapısı.....	43
Şekil 9. CCNOT kapısı.....	44
Şekil 10. CCNOT ve CNOT kapılarının bir kuantum devresinde kullanımı.....	44
Şekil 11. Full-Adder devresi.....	45
Şekil 12. Kuantum devresi üzerinde bir Kahin (Oracle) gösterimi.....	45
Şekil 13. Çalışma akış diyagramı.....	50
Şekil 14. Döteron Hamilyonteninin ikinci durumu için aldığımız çıktı.....	51
Şekil 15. Yazılan kodun bir bölümü.....	57
Şekil 16. Kuantum bilgisayarda yazılan kodun devre şeması - (a) İki Hamiltonyen durumu için - (b) Üç Hamiltonyen durumu için.....	58
Şekil 17. IBM Kuantum Bilgisayarı.....	59
Şekil 18. Üstteki tabloda Hamiltonyenin teoriden gelen beklenen değeri ile kubit üzerinde alınan beklenen değerin döndürülmelerinin karşılaştırılması, alt tabloda ise Pauli kapılarının döndürme altında beklenen değerlerinin karşılaştırılması gösterilmiştir.....	62
Şekil 19. Hamiltonyen-3 için yazılan kodun bir bölümü	63

TABLolar DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. Toffoli kapısının çalışma durumu.....	41
Tablo 2. CSWAP (Fredkin Gate) kapısının çalışma durumu.....	42
Tablo 3. Matris köşegenleştirmesinden gelen döteronun enerji değerleri tablonun üst bölümünde verilmiştir. Alt tabloda ise kuantum hesaplama yöntemi ile kuantum bilgisayarda hesaplanan döteronun bağlanma enerji değerleri verilmiştir. $N=2,3$ kullanılan kubit sayısıdır. Diğer sütunlar döndürme durumları ile gerçek değere ulaşmak için kullanılan parametrelerdir.....	61



KISALTMALAR DİZİNİ

CBİT	: Klasik Bit
KUBİT	: Kuantum Bit
MeV	: Milyon elektron volt
GeV	: Milyar elektron volt
σ_x	: Pauli X matrisi
σ_y	: Pauli Y matrisi
σ_z	: Pauli Z matrisi
API-key	: Uygulama programlama arayüzü anahtarı
XACC	: Hibrit kuantum-klasik hesaplama mimarileri için genişletilebilir bir derleme çerçevesidir
TNQVM	: Tensör ağı sağlayıcısı
VQE	: Bir kuantum algoritması
NN	: Nötron-Nötron
LO	: Sıralı mertebe terimi
NLO	: Bir sonraki sıralı mertebe terimi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Kuantum mekaniğinin bilgisayar üzerindeki hesaplamalardaki etkisinin önemini ilk olarak Feynman ortaya koymuştur. Klasik bilgisayarların hesaplama kabiliyetinin, kuantum mekaniği altında çalışan sistemler üzerinde doğru ama gerçekten uzak çözümler yapabileceğini, bu durumun çözülmesi için, sonsuz olasılıkla çalışabilecek ve bu sonsuz olasılığı son derece rastgele üretebilecek bir makinanın, evrensel fiziği simüle edebileceğini öngördü. Bu yaklaşımı, kuantum mekaniği kavramlarına uyan, üstelik temelde kuantum mekaniği yasalarının öngörülere gibi davranış sergileyen bilgisayarların önünü açtı. Feynman, 1982 yılında INTERNATIONAL JOURNAL OF THEORETICAL PHYSICS’de yayımlanan SIMULATING PHYSICS WITH COMPUTERS isimli makalesinde kuantum bilgisayarlar için düşünsel bir temel atmış oldu [1].

1995 yılına gelindiğinde, kuantum hesaplama teorisi üzerine ilk önemli adım Peter SHOR tarafından atıldı. Shor, PHYSICAL REVIEW A’da yayımlanan SCHEME FOR REDUCING DECOHERENCE IN QUANTUM COMPUTER MEMORY isimli makalesinde kuantum mekaniği kullanılarak geliştirdiği bir algorithmadan söz etti. Algoritma kuantum mekaniği yasalarının bünyesinde barındıran bir hesaplama yöntemini kullanarak, klasik hesaplamalardaki aramaları düzenliyordu [2]. İkinci önemli adım ise 2001 yılında Lov GROVER tarafından atıldı. Grover, Shor gibi bir algoritma geliştirdiği ve PHYSICAL RESEARCH’da yayımlanan FORM SCHRÖİNGER’S EQUATION TO THE QUANTUM SEARCH ALGORITHM isimli makalesinde özel bir genlik yükseltme fonksiyonu tanımlayarak, kuantum hesaplama teorisine kahin (oracle) kavramını ekledi. Bu kavram sayesinde arama işlemlerine önemli bir kolaylık getiren Grover, klasik bilgisayarlara kuantum mekaniği kavramlarının eklenmesi sürecine önemli bir katkı sağlamış oldu [3].

Klasik bilgisayarlar üzerinde bu algoritmalar ve bazı temel kuantum mekaniği fonksiyonlarının kullanılması ile sağlanan gelişmelere bir örnek olarak, ülkemizde, Karadeniz Teknik Üniversitesi’nde yapılan bir çalışma olan ACCELERATING SHOR’S FACTORIZATION ALGORITHM ON GPUS isimli ve 2018 yılında CANADIAN JOURNAL OF PHYSICS’de yayımlanan makaleyle, İbrahim SAVRAN, Mehmet DEMİRCİ, Ahmet

Hakan YILMAZ, kuantum mekaniğinin klasik bilgisayarlardaki hızlandırma işlevini gözlemlemeyi başardılar [4].

Son birkaç yıldır yapılan çalışmalar, IBM, Google gibi firmaların kuantum bilgisayarı donanımsal olarak üretmelerinden kaynaklı olarak değişiklik göstermektedir. Artık çalışmalar teorik kalmayarak, gerçek bir kuantum bilgisayar üzerinde çalıştırılabilmektedir. Bu çalışmalardan biri 2010 yılında NATURE CHEMISTRY’de yayımlanan TOWARDS QUANTUM CHEMISTRY ON A QUANTUM COMPUTER isimli makaledir. Bu makalede hidrojen üzerinde kuantum kimyası hesaplamalarının kuantum bilgisayarlara aktarılıp, simüle edilmesiyle ilgilenilmiştir [5]. Daha sonra 2018 yılında Oak Üniversitesi’nde yine öncü bir çalışma yapıldı. PHYSICAL REVIEW’da yayımlanan E.F.Dumitrescu ve ekinin hazırladığı CLOUD QUANTUM COMPUTING OF AN ATOMIC NUCLEUS isimli bu makalede nükleer fiziğin önemli bir konusu olan, döteronun bağlanma enerji gerçek kuantum bilgisayar olan IBM-Q üzerinde yapmayı başardılar [14].

Biz de bu çalışmayı örnek aldık ve adımlarını tekrarlayıp uygulamayı çalıştırmayı başardık. Bu çalışmada parametreler üzerinde bazı açısız değişimler yaparak hesabı tekrarladık ve bir adım daha öteye taşındık. Çalışmamız Türkiye’de kuantum bilgisayarlar üzerine yapılan ve genelde bir literatür taramasından ibaret olan diğer çalışmaların aksine, bulut erişim üzerinden kuantum bilgisayara bağlanarak, bu bilgisayarda döteronun bağlanma enerjisinin hamiltonyen hesabı olan bir kuantum mekaniği probleminin çalıştırılması açısından bir ilktir. Bu çalışma, önümüzdeki dönemde bu nükleer problemin çalıştırılması adımlarını kullanarak, başka problemleri de kuantum bilgisayar üzerinde çalıştırabilmemiz açısından öncü olacaktır.

1.2. Kuantum Mekanik Postulatları

Postulatlar bir aksiyomlar setidir ve kanıtlanamamıştır ancak deneysel gözlemlerle tutarlıdır. Bu normların asgari setini neyin oluşturduğu konusunda standart yoktur ve bakış açımıza göre çok fazla şeye bağlıdır.

1.2.1. Birinci Postulat

Fiziksel durumlar, fiziksel sistem tartışması altında tam bir tanımlaması sağlanan *durum vektörleri* tarafından temsil edilir. Bunlar *Hilbert Uzayı* olarak bilinen bir soyut uzay

içerisinde tanımlı vektörlerdir. Bir Hilbert uzayı kompleks sayıların alanı üzerinde tanımlanan normlanmış bir lineer vektör uzayıdır. Bir durum Dirac notasyonunda bir *ket* tarafından gösterilir [6]. Hilbert uzayında bir ışın tarafından tanımlanan vektörlerden oluşmuş, skaler bir çarpım faktörü ile birbirinden farklı, genelde kompleks olan fiziksel bir durumdur. Bir ket vektörüne karşılık gelen ve kendi ikili uzayında *bra* vektörü olarak bilinen uzayda bir vektör vardır. $c|\psi\rangle$ durumuna karşılık gelen $c^*\langle\psi|$ vektörüdür. Aynı uzayda aşağıdaki özelliklere sahip olan $|\varphi\rangle$ vektörüyle $|\psi\rangle$ vektörünün bir iç çarpımını tanımlayalım:

1. Pozitiflik: $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$, eşitsizliği $|\psi\rangle$ geçersiz(boş) bir vektör olduğunda geçerlidir.

2. Lineerlik: $\langle\varphi|a\psi_1 + b\psi_2\rangle = a\langle\varphi|\psi_1\rangle + b\langle\varphi|\psi_2\rangle$.

3. $\langle\psi|\varphi\rangle$ 'in kompleks eşleniği anti simetriktir ve $\langle\psi|\varphi\rangle^* = \langle\varphi|\psi\rangle$ olur. Bu durumda $\langle\psi|\psi\rangle$ bir gerçek sayıdır. Tüm sıfır olmayan vektörler $|\psi\rangle$ için $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ olarak normalize edilebilir.

4. Schwartz Eşitsizliği: $|\langle\psi|\varphi\rangle|^2 \leq \langle\psi|\psi\rangle\langle\varphi|\varphi\rangle$

Hilbert uzayının boyutları sonlu ya da sonsuz olabilir. (Hilbert uzayının bir özelliği normda tam set olmasıdır.)

Durumlar seti $\{|e_n\rangle\}, n = 1,2,3, \dots, d$, burada d uzayın boyutudur ve *baz vektör* seti olarak adlandırılır. Eğer set lineer vektör uzayında yayılırsa, diğer bir deyişle, eğer bir keyfi $|\psi\rangle$ durumu $|e_n\rangle$ 'nin lineer bir süper-pozisyonu olarak ifade edilebilirse,

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |e_n\rangle \quad (1.1)$$

yazılır. Burada a_n katsayıları genelde komplekstir. Genellikle ortanormal olması için temel vektör alınır ve

$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (1.2)$$

yazılır. Baz vektör bu şekilde seçilirse,

$$a_n = \langle e_n | \psi \rangle \quad (1.3)$$

alınır. Kuantum mekaniğinin *Kopenhag Yorumu*'na göre, $|a_n|^2$ olasılığının, $|\psi\rangle$ durumunun $|e_n\rangle$ noktasındaki olasılığı olduğu varsayılmaktadır [7].

1.2.2. İkinci Postulat

Konum, momentum, enerji ve bunun gibi fiziksel gözlenebilirler lineer ve öz-ek işlemciler (Hermityen işlemciler olarak adlandırılır) olarak temsil edilebilirler ve özdeğerleri reeldir. Kendine bitişik işlemciler ise gerçek özdeğerlere sahiptir. İşlemciler Hilbert uzayında kendi üzerine haritalanır, yani eğer $|\psi\rangle$ Hilbert uzayında bir vektör ve bu vektör üzerine \hat{A} işlemcisi etki ederse, $\hat{A}|\psi\rangle$ bu uzayda başka bir vektördür. Aynı şekilde bir \hat{B} işlemcisi sola, bir bra vektörü üzerine etki ederek, ikili uzaydaki diğer bir bra vektörü $\langle\psi|\hat{B}$ 'nü verir. Bu işlemciler aşağıdaki özelliklere sahiptir;

1. Lineerlik: Eğer α ve β kompleks skalerler ise, aşağıdaki denklemi yazarız;

$$\hat{A}(\alpha|\psi\rangle + \beta|\varphi\rangle) = \alpha\hat{A}|\psi\rangle + \beta\hat{A}|\varphi\rangle \quad (1.4)$$

(“zaman tersinir” işlemcisinden kaynaklı bir istisna vardır, sağdaki katsayılar onların kompleks eşlenikleri tarafından değiştirilebilir.)

2. Bir \hat{I} birim işlemci özelliğine sahiptir; $\hat{I}|\psi\rangle = |\psi\rangle$

3. \hat{A} ve \hat{B} gibi iki işlemcinin iç çarpımı da bir işlemcidir. Diğer bir deyişle hem $\hat{A}\hat{B}$ hem de $\hat{B}\hat{A}$ bir işlemcidir. Bunun yanında genelde $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ olur. İşlemci iç çarpımı birleşim özelliğine, diğer bir deyişle $\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C}$ özeliğine sahip olur. İşlemci toplamı hem bra değişimli hem de birleşim özelliğine sahiptir, yani, $\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A}$ ve $\hat{A} + (\hat{B} + \hat{C}) \neq (\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C}$ olur. Eğer bir $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{I}$ gibi bir \hat{B} işlemcisi varsa, \hat{B} işlemcisi \hat{A} 'nın tersidir denir ve $\hat{B} = \hat{A}^{-1}$ şeklinde yazılır.

4. Bir işlemcinin eşleniği: Bir \hat{A} işlemcisinin hermityen eşleniğini tanımlayalım ve bu ilişkiyi \hat{A}^\dagger ile gösterelim;

$$[\hat{A}|\psi\rangle]^* = \langle\psi|\hat{A}^\dagger \quad (1.5)$$

Bu durumda keyfi $|\varphi\rangle$ ve $|\psi\rangle$ vektörleri için aşağıdaki denklemi yazabiliriz [8];

$$\langle\varphi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\varphi|\hat{A}\psi\rangle = \langle\hat{A}^\dagger\varphi|\psi\rangle \quad (1.6)$$

ya da

$$\langle\varphi|\hat{A}|\psi\rangle^* = \langle\psi|\hat{A}^\dagger|\varphi\rangle \quad (1.7)$$

yazılabilir. Eğer $\hat{A} = |\alpha\rangle\langle\beta|$ ise $\hat{A}^\dagger = |\beta\rangle\langle\alpha|$ olur. Eğer bir işlemci $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ şeklindeyse öz-ek hermityendir. $\hat{A}\hat{B}$ 'nin hermityen eşleniği $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$ dir. Şunu not edelim ki \hat{A} ve \hat{B} hermityen olsa bile $\hat{A}\hat{B}$ işlemcisi hermityen değildir. $(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})$ ve $i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$ hermityendir. Kuantum mekaniğinin ikinci postulatına göre bir $|\psi\rangle$ durumu \hat{A} tarafından tanımlanan bir gözlenebilir için λ özdeğerine sahiptir. Eğer sadece ve sadece $|\psi\rangle$ durumu \hat{A} 'nın λ özdeğerli bir özdurumu ise;

$$\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \quad (1.8)$$

olur. \hat{A} 'nın özduurmları, \mathcal{H} Hilbert uzayı için tam ortonormal bir baz oluşturur. Eğer $\{\hat{P}_n\}$, λ_n özdeğerlerine sahip olan özvektör üzerine \hat{A} 'nın ortogonal yansımasıysa;

$$\hat{A} = \sum_n \lambda_n \hat{P}_n \quad (1.9)$$

yazılır. Yansıma işlemcileri aşağıdaki bağıntıları sağlar;

$$\hat{P}_n \hat{P}_m = \delta_{m,n} \hat{P}_n \quad (1.10)$$

$$\hat{P}_n^\dagger = \hat{P}_n \quad (1.11)$$

Denklem (1.10) *Spektral Teoremi'nin* bir ifadesidir [7]. Bir \hat{A} işlemcisinin $|\psi\rangle$ ve $|\varphi\rangle$ 'leri aynı normlara sahip $\hat{A}|\psi\rangle = |\varphi\rangle$ olduğunu varsayalım. Bu durumda;

$$\langle \psi | \hat{A}^\dagger \hat{A} | \psi \rangle = \langle \varphi | \varphi \rangle \equiv \langle \psi | \psi \rangle \quad (1.12)$$

yazarız. Böylece;

$$\hat{A}^\dagger \hat{A} = \hat{I} \quad (1.13)$$

olur. Böyle bir işlemci kuantum mekaniğinde yaygın bir özel yeri bir *birim işlemci* olarak adlandırılır.

1.2.3. Üçüncü Postulat

Zamanla birimsel gelişen bir kuantum durumu Schrödinger denklemiyle verilen zamandaki değişim;

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (1.14)$$

$\langle \psi(t) |$ durumuna karşılık gelen denklem ise;

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(t) | = \langle \psi(t) | \hat{H} \quad (1.15)$$

ile verilir. $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle$ iç çarpımının zaman ile değişmediği görülür ve aşağıda görüldüğü gibi değişim birimseldir. Bir zamanla değişim işlemcisi $\hat{U}(t, t_0)$ 'ı tanımlayalım;

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (1.16)$$

$\hat{U}(t_0, t_0) = \hat{I}$ olduğuna dikkat edelim. Ayrıca aşağıdaki bağıntıyı yazarız;

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_1) |\psi(t_1)\rangle = \hat{U}(t, t_1) \hat{U}(t_1, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (1.17)$$

Bu durum;

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t_1)\hat{U}(t_1, t_0) \quad (1.18)$$

sonucunu verir. $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | \psi(t_0) \rangle$ olduğunda;

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle \quad (1.19)$$

elde edilir. Böylece;

$$\hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) = \hat{I} \quad (1.20)$$

$t = t_0$ 'dan $t = t_0 + \Delta t$ 'ye bir durumun zaman evrimini düşünelim. Schrödinger denkleminin aşağıdaki ifadeyi yazarız;

$$\left| \psi(t + \Delta t) \right\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t \right) \left| \psi(t) \right\rangle \quad (1.21)$$

\hat{H} hermityen olduğu için, $1 - \frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t$, Δt basamağı için birimseldir. Kısa adımlarda sonlu bir zaman evrimi elde edebiliriz ve eğer \hat{H} zamana bağıllığı belirgin değilse aşağıdaki gibi yazarız.

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp\left(-i \frac{\hat{H}}{\hbar} (t - t_0)\right) \quad (1.22)$$

1.2.4. Dördüncü Postulat

A gözleminin sonucu \hat{A} işlemcisinin bir λ özdeğeridir. Ölçümden hemen sonra, kuantum durumu bu özdeğere uyan öz durum için devam ediyor olabilir. Eğer ölçümden önce sistem durumu $|\psi\rangle$ olsaydı ölçüm sonucu aşağıdaki olasılıkla λ_n olacaktır;

$$\langle \psi | P_n | \psi \rangle = ||P_n | \psi \rangle||^2 \quad (1.23)$$

Hesaplamadan hemen sonraki durum şudur;

$$\frac{P_n|\psi\rangle}{|\langle\psi|P_n|\psi\rangle|^{1/2}} \quad (1.24)$$

Bunun zamanla gelişen bir kuantum durumunda doğal bir ikilik olduğuna dikkat edelim. Öte yandan, bir yandan Schrödinger denkleminin doğrusallığı, ölçülmediğinde durumun birimsel olarak geliştiğini gösterirken, öte yandan ölçüm postulatı yalnızca muhtemel çıktı sonuçlarını belirleyen olasılıklıdır [7].

1.2.5. Beşinci Postulat

Eğer \hat{A} ve \hat{B} , a ve b gibi iki klasik gözlenebilir karşılık gelen iki hermityen işlemci ise, \hat{A} ve \hat{B} 'nin sıra değişimi aşağıdaki gibidir;

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\hat{C} \quad (1.25)$$

Burada \hat{C} , a ve b değişkenlerinin klasik Poisson bağıntısı $c=\{a,b\}$ olarak tanımlanan, klasik bir değişkene karşılık gelen işlemcisi ise c' 'dir, \hbar ise Planck sabitidir.

1.3. Kubit

İki mümkün değerden sadece birini alabilen *bit* hem klasik hem de kuantum hesaplamasının en küçük bilgi taşıyıcısıdır. Kuantum bit genellikle *qbit* olarak adlandırılır. Bir klasik bitten ayırt etmek için bu tez boyunca *kubit* olarak adlandıracağız. Kuantum hesaplamasının özel bir kavrayışında kubitleri fiziksel durumları ile belirleyeceğiz. Soyut nesnelere olarak kubitleri işlemek hesaplama açısından kullanışlıdır. Bu durum kuantum hesaplamasının matematiksel bir çalışma sahasını düzenlemek için bağımsız özel bir fiziksel platforma izni verir. En küçük Hilbert uzayı iki boyutludur. Bu uzaydaki temel birim vektör şöyle verilir;

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Bu uzayda genel bir normalize vektör herhangi bir $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ şeklinde olup, olasılıklar toplamı $|a|^2 + |b|^2 = 1$ 'dir. Bir kubit bu uzayda her $|\psi\rangle$ durumudur. Temel vektörler $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ olup ve *bilişimsel temel durumlar* olarak adlandırılır [8,9].

Eğer $|\psi\rangle$ durumunun bir ölçümü hesaplama temelinde yapılırsa, $|a|^2$ olasılığıyla $|0\rangle$ ve $|b|^2$ olasılığıyla $|1\rangle$ sonucunu elde ederiz. a veya b 'nin sıfır olması dışında, bir ölçüm $|0\rangle$ veya $|1\rangle$ 'e giden durumların çökmesine neden olur. Tek bir ölçüm a ya da b'yi belirleyemez. $|\psi\rangle$ hakkında bilgi almanın yolu aynı ölçümlerden yapılan istatistiksel sonuçlar ve benzer sistemlerin büyük sayıda özdeş kopyalarının hazırlamaktır. Böyle olsa bile bu sadece a ve b'nin büyüklükleri hakkında bilgi verecektir ve onların bağıl fazları hakkında bilgi veremeyecektir.

Bu durum kubitlerin kuantum mekaniksel davranışlarına bir örnek teşkil eder. Kubitlerin birkaç fiziksel anlamından bahsedelim;

1. $|0\rangle$ fotonun dikey bir polarizasyonu olan $|\uparrow\rangle$ durumunu ve $|1\rangle$ fotonun yatay bir polarizasyonu olan $|\leftrightarrow\rangle$ durumunu gösterir. Alternatif olarak, $|0\rangle$ durumu olarak 45° de yataya polarize olan bir foton ve $|1\rangle$ durumu için 135° 'de polarize olan bir foton alınabilir. $|+\rangle$ ve $|-\rangle$ 'yi temsil eden formüller şu şekildedir;

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\leftrightarrow\rangle) \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\leftrightarrow\rangle) \end{aligned} \tag{1.27}$$

2. Keyfi olarak z eksenin de tanımlanmış olan bir manyetik alandaki bir elektronun spin durumu bu iki durum için alınabilir.
3. $|0\rangle$ durumunu atomik bir sistemin taban durumu olarak ve $|1\rangle$ durumunu bu sistemin uyarılmış biri durumu olarak alabiliriz.

Bilgi işleme süreci için bu iki durumdan daha fazlası ile kuantum sistemi kullanmanın mümkün olabileceğini söylemek önemlidir. Üç farklı temel durumlu bir kuantum sisteme kutrit denilir. Kutrit üç durumun tüm özelliklerini içinde barındırabilir. Kubitler üzerinde saklanan bilgi boyut sayısı ile ilişkilidir.

Boyut genişledikçe, süperpoze kubit durumlarının olasılıkları da büyür. Bu geniş olasılık dağılımı kubitleri klasik bitlerden ayıran en önemli özelliklerden biridir.

1.3.1. Bloch Küresi Üzerinde Kubit Temsili

$S = \frac{1}{2}$ cebiri hakkındaki bazı temel gerçekleri tekrar edelim. Eğer $|+\rangle$ ve $|-\rangle$ sırasıyla spin yukarı ve spin aşağı durumlarıyla temsil edilirse, spin işlemcilerini şu şekilde sunabiliriz;

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|) \\ S_y &= \frac{i\hbar}{2} (|-\rangle\langle+| - |+\rangle\langle-|) \\ S_z &= \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Bunlara uyan matris temsilleri ise şu şekildedir;

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ S_y &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ S_z &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.29)$$

$S_n = \vec{S} \cdot \hat{n}$ 'nin özdeğeri olduğuna dikkat edelim. Buradaki \hat{n} yönü $\pm \frac{\hbar}{2}$ olan herhangi keyfi bir yön ve *Bloch vektör*'ü olarak bilinen gerçek bir birim vektördür. \hat{n} küresel koordinatlardaki bileşenleri $\hat{n}(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ olur ve bu durumda S_n matrisi şöyle olur;

$$S_n = \vec{S} \cdot \hat{n} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \cos \varphi - i \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi + i \sin \theta \sin \varphi & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

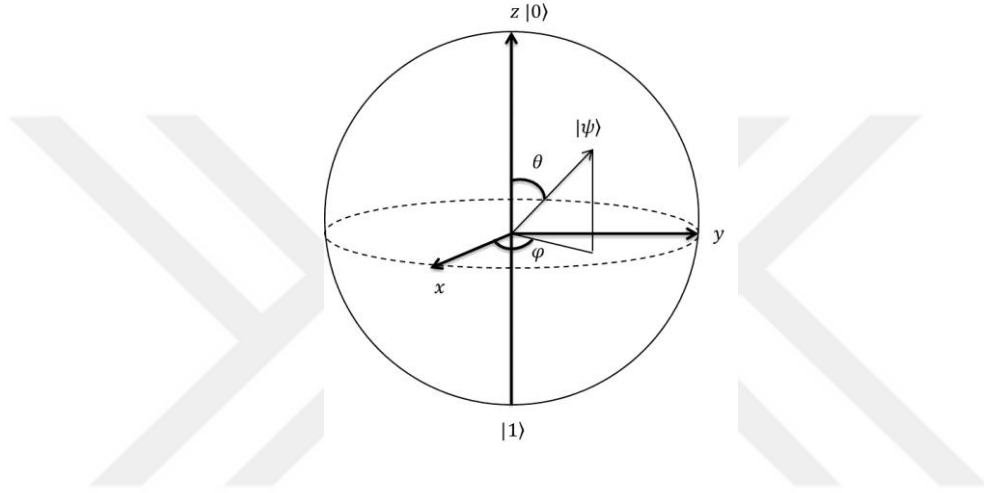
Özdeğerlerin $\frac{\hbar}{2}\lambda$ olduğu görülür, burada,

$$(\lambda^2 - \cos^2 \theta) - [(\sin \theta \cos \varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi)^2] = 0 \quad (1.31)$$

olur. Bu denklem $\lambda = \pm 1$ 'i verir. $+\frac{\hbar}{2}$ özdeğeri için normalize özvektör;

$$|\psi(\theta, \varphi)\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (1.32)$$

ile verilir.



Şekil 1. Bloch Küresi

Geometrik olarak *Bloch Küresi*'ni birim kürenin yüzeyi üzerindeki keyfi bir durum gibi temsil edebiliriz. Bu küre üzerinde alınan bir noktanın küresel koordinatları (θ, φ) vardır ve her bir (θ, φ) değeri bir $\psi(\theta, \varphi)$ ket vektörüdür. Kolayca görüleceği gibi kürenin kuzey kutbu ($\theta = \varphi = 0$), $|0\rangle$ durumunu temsil eder ve güney kutbu da ($\theta = 0, \varphi = \pi$), $|1\rangle$ durumunu temsil eder. Bu nokta $+x$ ekseninde küre ile kesişirse ($\theta = \pi/2, \varphi = 0$), durum vektörü $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ olur ve nokta $-x$ ekseninde küre ile kesişiyorsa ($\theta = \pi/2, \varphi = \pi$), durum vektörü $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ olur.

Bir kubitin içereceği bilgi prensipte sonsuz miktardadır, çünkü θ 'nin ikili genişlemesi sonsuz haneli sayı içerebilir. Bununla birlikte, ne zaman kubit gözlenmek istenirse (hesaplama temelinde) ya 0 ya da 1 durumuna çökecektir. Bir durumun $|+\rangle$ ya da $|-\rangle$ durumundan birinde gözlendiğini varsayalım ve $|0\rangle$ durumuna sahip olalım. Ölçümden sonra da bu durum devam edecektir. Ancak eğer, kubiti ölçmezsek sistem bu bilgiyi koruyacaktır.

Spinin z bileşenini ölçtüğümüzü düşünelim. Eğer orijinal durum $|\psi(\theta, \varphi)\rangle$ olsaydı, beklenen değer şu olurdu [7,9];

$$\begin{aligned} \langle \psi(\theta, \varphi) | \sigma_z | \psi(\theta, \varphi) \rangle &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \cos \theta \end{aligned} \quad (1.33)$$

Ancak, bu bize xy düzlemindeki bileşeni hakkında hiçbir şey söylemeyecektir. $|\psi\rangle$ 'nin belirlenmesi için üç bileşenin belirlenmesi gerekir. $\langle \sigma_z \rangle$ ve $\langle \sigma_1 \rangle$ 'den, n_3 ve n_1 belirlenebilir ancak n_2 işareti hala bilinmeyecektir.

1.3.2. Birleşik Sistem

Birleşik bir sistem A ve B gibi iki alt sistemden oluşsun. A'nın Hilbert uzayı \mathcal{H}_A ve B'nin Hilbert uzayı \mathcal{H}_B olsun. Birleşik sistem uzayı $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{AB}$ olur. $\{|\alpha\rangle_A\}$, \mathcal{H}_A 'da bir kök ve $\{|\beta\rangle_B\}$, \mathcal{H}_B 'de bir kök olsun. $\mathcal{H}_{A,B}$ 'nin kökünü birleşik bir $\{|\alpha, \beta\rangle_{AB}\}$ setiyle tanımlayalım. Bu kök için ortanormallik ilişkisini yazalım;

$${}_{AB}\langle \alpha' \beta' | \alpha \beta \rangle_{AB} = \delta_{\alpha, \alpha'} \delta_{\beta, \beta'} \quad (1.34)$$

Bu birleşik uzayda, birleşik sistem durumu üzerinde etki eden bir $M_A \otimes N_B$ işlemcisini tanımlayalım;

$$M_A \otimes N_B |\psi, \varphi\rangle_{AB} = M_A |\psi\rangle \otimes N_B |\varphi\rangle = \sum (M_A)_{\psi, \alpha} |\alpha\rangle (N_B)_{\varphi, \beta} |\beta\rangle \quad (1.35)$$

İki kubitlik bir sistemi dikkate alalım. Klasik bitlere karşılık gelen ifadeler, 00, 01, 10 ve 11 şeklindedir. İki kubitlik bir sistemin kuantum durumları ise,

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle \quad (1.36)$$

olup aşağıdaki koşul da sağlanır;

$$|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1 \quad (1.37)$$

İlk kubit ölçtüğümüzü varsayalım ve 0 olsun ($|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{10}|^2$ olasılıkla). Ölçüm sonrası durum;

$$|\psi\rangle = \frac{\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}} \quad (1.38)$$

olur. Burada, tüm iki kubit durumlarının tek bir kubit durumunun bir ürünü olarak yazılamayacağını belirtelim. Böyle bir durum;

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.39)$$

olur. Bu *Bell Durumları* olarak bilinen bir kümenin üyesidir. Üst durumun ilk kubitini ölçtüğümüzü varsayalım. Eğer 0 alırsak, ölçüm sonrası durum $|00\rangle$ olurdu (ki bu durum 0,5 olasılıkla elde edilir). İlk kubit sonuçları ikinci kubit de belirler. Bu gösteriyor ki ölçüm çıktıları birbiriyle bağlantılıdır.

1.4. İzdüşüm İşlemcisi

Bir izdüşüm işlemcisini temel $|e_k\rangle$ vektörünü $|e_k\rangle\langle e_k|$ ifadesini verecek şekilde tanımlarız. Keyfi bir $|\psi\rangle$ durumuna etki eden bu işlemci, bileşeni $|e_k\rangle$ boyunca yansıtırsa böylece $|\psi\rangle - P_k|\psi\rangle$, $|\psi\rangle$ için ortogonaldır.

İzdüşüm işlemcisi aşağıdaki özelliklere sahiptir;

- Eş kuvvetlilik: $P_k^2 = P_k$
- Ortogonalite : $P_k P_j = 0$ eğer $j \neq k$
- Tamlık : $\sum_k P_k = I$

1.4.1. Spektral Teoremi

Spektral teoremi tüm normal matrisler için uygulanabilir ve bu matrisler $AA^\dagger = A^\dagger A$ ifadesini sağlayacak şekildedirler. Şüphesiz, hermityen matrisleri normaldir ve bu teorem

onlara kolayca uygulanabilir. Genelde, normal matrislerin özdeğerleri gerçek olmak zorunda değildir ve bu nedenle, aksi durumunun mutlaka doğru olması gerekmez. Diğer bir deyişle tüm normal matrisler hermityen değildir. Eğer normal bir matris gerçek bir özdeğere sahipse, farklı özdeğerlere ait özvektörler ortogondur. Normal bir matris spektral ayrışması açısından [7];

$$\hat{A} = \sum_i \lambda_i |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i| \quad (1.40)$$

olarak yazılabilir. Burada $\{|\lambda_i\rangle\}$ karşılık gelen özdeğerlere etiketlenmiş A 'nın normalleştirilmiş özvektörleridir denir. Bunu takiben tamlık bağıntısı $I = \sum_i |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i|$ olur ve bu,

$$A = AI = \sum_i A |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i| = \sum_i \lambda_i |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i| \quad (1.41)$$

ifadesini vermektedir. $|\lambda_i\rangle \langle \lambda_i|$, $|\lambda_i\rangle$ vektörü yönündeki izdüşüm işlemcisi olduğuna dikkat edelim. \hat{A} 'nın etkisi skaler bir λ_i 'nin çarpımlarının eğdeğeri olan $\{\lambda_i\}$ tarafından bir boyutlu uzayda yayılmıştır. \hat{A} 'nın özuzayında izdüşüm işlemcisi için bir ifade tanımlayalım. Bu \hat{A} normal bir matris ve;

$$\{\lambda_i\} \text{ ve } \{|\lambda_{a,p}\rangle; (1 \leq p \leq g_\alpha)\} \quad (1.42)$$

özdeğer ve dejenere bir g_α 'ya uyan özvektör olacaktır. Eğer uzay n boyutluysa, $\sum_\alpha 1 = n$; $\sum_\alpha g_\alpha = n$ ifadesine ulaşırız. λ_α uzayında bir izdüşüm işlemcisi;

$$P_\alpha = \frac{\prod_{\beta \neq \alpha} (\hat{A} - \lambda_\beta \hat{I})}{\prod_{\gamma \neq \alpha} (\lambda_\alpha - \lambda_\gamma)} \quad (1.43)$$

olur. Eğer P_α , $|\lambda_{a,p}\rangle$ üzerine etki ederse,

$$P_\alpha |\lambda_{a,p}\rangle = \frac{\prod_{\beta \neq \alpha} (\hat{A} - \lambda_\beta \hat{I}) |\lambda_{a,p}\rangle}{\prod_{\gamma \neq \alpha} (\lambda_\alpha - \lambda_\gamma)} = \frac{\prod_{\beta \neq \alpha} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta)}{\prod_{\gamma \neq \alpha} (\lambda_\alpha - \lambda_\gamma)} |\lambda_{a,p}\rangle = |\lambda_{a,p}\rangle \quad (1.44)$$

olur. Diğer yandan, ($\delta \neq \alpha$) farklı bir özdeğere ait bir durum üzerine etki ediyorsa,

$$P_\alpha |\lambda_{\delta,q}\rangle = \frac{\prod_{\beta \neq \alpha} (\hat{A} - \lambda_\beta \hat{I}) |\lambda_{\delta,q}\rangle}{\prod_{\gamma \neq \alpha} (\lambda_\alpha - \lambda_\gamma)} = \frac{\prod_{\beta \neq \alpha} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta)}{\prod_{\gamma \neq \alpha} (\lambda_\alpha - \lambda_\gamma)} |\lambda_{\delta,q}\rangle = 0 \quad (1.45)$$

pay sıfır olur çünkü terimlerden biri $\beta = \delta$ olur. Böylece $P_\alpha = \sum_{p=1}^{g_\alpha} |\lambda_{\alpha,p}\rangle \langle \lambda_{\alpha,p}|$, λ_α 'nın özuzayında izdüşüm işlemcisidir.

1.4.2. Pozitif İşlemci

Bir işlemcinin pozitif yarı tanımlı olduğu söylenir; eğer her $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ için $\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \geq 0$ ise bunu düşünmemiz mümkündür. Bir pozitif işlemci sadece negatif olmayan özdeğerlere sahip olan hermityendir.

1.4.3. Bir İşlemcinin Kutupsal Ayırışması

Eğer bir \hat{A} işlemcisini temsil eden matris tekil değil ise, \hat{A} ifadesi U birim işlemcisinin bir ürünü ve pozitif bir işlemci olarak tanımlanır.

Bu tür iki pozitif işlemci J ve K olsun. Birincisi sol ayırışmayı ve ikincisi sağ ayırışmayı sağlasın.

$$A = UJ = KU \quad (1.46)$$

burada $J = \sqrt{A^\dagger A}$ ve $K = \sqrt{AA^\dagger}$ olur. $\sqrt{A^\dagger A}$ pozitif bir işlemci olduğundan (hermityen olduğundan) spektral ayırışmaya sahiptir;

$$J = \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| \quad (1.47)$$

buradaki $\lambda_i \geq 0$. $|\psi\rangle = A|i\rangle$ olduğundan $\langle \psi_i | \psi_i \rangle = \lambda_i^2$ olur. Burada $\lambda_i, \lambda_i > 0$ dır.

$|e_i\rangle = \frac{|\psi\rangle}{\lambda_i} = \frac{A|i\rangle}{\lambda_i}$ olsun böylece $|e_i\rangle$ normalize olsun.

Bunlar ayrıca ortogonaldır. $i \neq j$ için;

$$\langle e_i | e_j \rangle = \frac{1}{\lambda_i \lambda_j} \langle i | A^\dagger A | j \rangle = \frac{1}{\lambda_i \lambda_j} \langle i | J^2 | j \rangle = 0 \quad (1.48)$$

olur. Son bağıntı sıfırdır, çünkü $|j\rangle$, J^2 'nin öz durumudur. Şimdi $\{|e_i\rangle\}$ 'yi genişletmek için Gram-Schmidt yöntemini kullanıyoruz böylece ortonormal bir baz oluştururuz [7].

$U = \sum_i |e_i\rangle \langle i|$ olsun. $\lambda_i \neq 0$ olduğunda;

$$U J |i\rangle = \lambda_i U |i\rangle = \lambda_i |e_i\rangle = |\psi_i\rangle = A |i\rangle \quad (1.49)$$

elde ederiz. Bu durumda $A = U J$, $A^\dagger = J U^\dagger$, $A^\dagger A = J U^\dagger U J = J^2$ sonucunu verir. Eğer A tersinirse, $U = A J^{-1}$ tarafından verilen J ayrıca U eşitliğini belirler. Bu süreç kutupsal ayrışma olarak adlandırılır çünkü $\det A = \det U \det J$, $re^{i\theta}$ formuna sahiptir [7].

1.4.4. Tekil Değer Ayrışması

A kompleks elemanı bir $m \times n$ matrisi olsun. A 'yı $A = U \Sigma V^\dagger$ olarak ayrıştırmak mümkün olabilir. Burada U ve V birim matrislerdir diğer bir deyişle $U^\dagger U = V^\dagger V = I$. U $m \times m$ 'lik, V ise $n \times n$ 'lik bir kare matristir.

Σ ise pozitif yarı tanımlı köşegen elemanları olan $m \times n$ 'lik bir matristir. Σ tekil değer matrisi olarak bilinir. Eğer A gerçek bir matris ise, U ve V ortogonal matrislerdir.

$A = S J$ olsun, burada S birimseldir. J pozitif olduğundan uniter T matrisi tarafından köşegenleştirilebilir ve hermityendir. $J = T \Sigma T^\dagger$ olsun, burada Σ negatif değildir ve reeldir. Bu nedenle, $A = S T \Sigma T^\dagger$ olur. S ve T birimsel olduğundan $S T = U$ ve $T = V$ ifadelerini aşağıdaki gibi tanımlarız.

$$A = U \Sigma V^\dagger \quad (1.50)$$

1.5. Kuantum Mekaniğinde Yoğunluk Matris Formülasyonu

Baz vektörleri $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ ile iki boyutlu Hilbert uzayını dikkate alalım. Bu tür sistemlerden çok sayıda hazırladığımızı varsayalım. Burada üyelerin her birini aşağıdaki iki durumdan birinde ifade edelim;

$$|a\rangle = \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle, |b\rangle = \gamma|x\rangle + \delta|y\rangle \quad (1.51)$$

Burada $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$ 'dir. Böylece, eğer $|a\rangle$ durumunda bir sistem seçersek ve $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ bazında bir ölçüm yaparsak, $|x\rangle$ durumunu $|\alpha|^2$ olasılıkla bulabiliriz. Aynı şekilde $|y\rangle$ durumunu $|\beta|^2$ olasılıkla bulabiliriz.

Şimdi, tarafımızca hazırlanan N tane sistemden n_a tane sistem $|a\rangle$ durumundadır ve n_b sayıda sistem ise $|b\rangle$ durumundadır ve $n_a + n_b = N$ 'dir. Eğer N sistem topluluğundan rastgele bir sistem seçersek, seçilen $|a\rangle$ durumundaki sistem $p_a = n_a/N$ olasılığına ve $|b\rangle$ durumundaki sistemde $\frac{n_b}{N} = 1 - p$ olasılığına sahip olur. Bu olasılıklar topluluk seviyesinde iş gören sadece klasik olasılıklardır. Bununla birlikte, sistemler seçildikten sonra, ölçüm olasılıkları kuantum mekaniğinin Born yorumuyla tanımlanır. Bu daha önce çalıştığımız kuantum mekaniği kurallarımızı düzeltmemiz gereken açık bir sistem örneğidir [6,9].

İkinci bir örnek düşünelim. İlgilendiğimiz sistemi A sistemi olarak, çevre ile iletişime geçen sistemi B sistemi olarak adlandıralım. Eğer sistem faktörlerinin birleştirilmiş durumu A sistemi ile B sisteminin bir ürünüyse, diğer bir deyişle;

$$|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \quad (1.52)$$

ise, çevresel etki ihmal edilebilir çünkü verilen her A işlemcisi sadece A sistemi üzerinde etkili olup, B sistemi üzerinde değildir. Bu durumda

$$\langle \psi_{AB} | A | \psi_{AB} \rangle = \langle \psi_A | A | \psi_A \rangle \quad (1.53)$$

olur. Böyle bir durumda, A sisteminin bir *saf durumda* olduğu söylenir. Bununla birlikte, eğer ilgili sistemin durumu çevreden bağımsız değilse, çevrenin etkisi çarpanlara ayrılmaz. “Çevre” kelimesi büyük bir sistemin varlığını ortaya koyar; biri Hilbert uzayı \mathcal{H}_A 'ya ve diğeri \mathcal{H}_B 'ye ait kubitlerden iki bitlik bir sistem düşünülebilir. $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ birleşik uzayında bir durum düşünelim;

$$|\psi\rangle = a|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + b|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B \quad (1.54)$$

olsun. A ve B kubitlerinin bağlantılı olduklarına dikkat edelim, A kubitini ölçtüğümüzde A sisteminin bazıları $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ bulunabilir. $|\alpha|^2$ olasılığı ile $|0\rangle$ durumunu bulacağız. Bu durumda, durum $|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B$ 'ye çökebilir. B sisteminin kesin bir durumda olduğuna dikkat edelim. Aynısı $|1\rangle_A$ ölçümü için de geçerlidir. Sistem A *karişık bir durumda* olarak adlandırılır. Karişık durumla ilgilenirken (aynı zamanda saf durum) daha uygun bir formalizm *Yoğunluk Matrisi* tarafından sağlanır.

1.5.1. Yoğunluk Matrisi

B sistemine olan etkilerine bakılmaksızın, A sisteminin genel bir ölçümüne bakalım. $M_A \otimes I_B$ şeklinde bir ölçüm işlemcisi olsun. Daha sonra;

$$\begin{aligned}
 {}_{AB}\langle \psi | M_A \otimes I_B | \psi \rangle_{AB} &= [a^* {}_A\langle 0 | \otimes {}_B\langle 0 | b^* {}_A\langle 1 | \otimes {}_B\langle 1 | (M_A \otimes I_B)] [a |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + b |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B] \quad (1.55) \\
 &= |\alpha|^2 {}_A\langle 0 | M_A | 0 \rangle_A + |b|^2 {}_A\langle 1 | M_A | 1 \rangle_A \\
 &= \langle M_A \rangle = \text{tr}(M_A \rho_A)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada ρ_A işlemcisi yoğunluk işlemcisi ya da yoğunluk matrisidir,

$$\rho_A = |\alpha|^2 |0\rangle_A \langle 0| + |b|^2 |1\rangle_B \langle 1| \quad (1.56)$$

şeklinde yazılabilir ve M_A işlemcisi sadece A kubitine etki eder. ρ_A 'yı $P_0 = |\alpha|^2, P_1 = |b|^2$ özel bir olasılığında meydana gelen tüm durumların mümkün bir kuantum topluluğu olarak yorumlayabiliriz. Böylece, yukarıda, iki farklı durum hakkında;

1. $|0\rangle_A$ ve $|1\rangle_A$ durumlarının tutarlı bir süper-pozisyonu gösterir.
2. Önceden belirlenmiş ve belirli bir olasılık ile meydana gelen $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumlarında bir süper-pozisyon olasılığı sonuçlarını elde ettik.

Ayrımı görmek için bu iki farklı durumdaki σ_x 'nın ölçümünü düşünelim. $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ süperpozisyonunu ele alalım. σ_x 'nın beklenen değeri bu durumda şöyle verilir;

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_x \rangle &= \frac{1}{2} (\langle 0| + \langle 1|) X (|0\rangle + |1\rangle) \\
&= \frac{1}{2} (\langle 0| + \langle 1|) [|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|] (|0\rangle + |1\rangle) \\
&= \frac{1}{2} (\langle 0| + \langle 1|) (\langle 1| + \langle 0|) = 1
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Diğer yandan, $1/2$ olasılığıyla meydana gelen $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumları topluluğunu düşünürsek, $\langle \sigma_x \rangle = \frac{1}{2} (\langle \alpha|X|\alpha\rangle + \langle \alpha|X|\beta\rangle) = 0$ sonucunu elde ederiz. Bu durumda yoğunluk matrisi;

$$\rho = \frac{1}{2} (|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta|) = \frac{I}{2} \tag{1.58}$$

olur. Böylece

$$\langle \sigma_x \rangle = \text{tr}(\sigma_x \rho) = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_x) = 0 \tag{1.59}$$

yazarız. Bu durumda yoğunluk işlemcisi bir ortalama işlemcidir ve bir sistemi tanımlamak için, saf hal durumunda olmasına gerek yoktur. Ama saf durumun istatistiksel bir karışımı olabilir. İlk olarak sistemin saf hal de olduğu durumla başlayalım. $\{|e_i\rangle\}$, $|\psi\rangle = \sum_i c_i |e_i\rangle$ ile verilen $|\psi\rangle$ durumu terimlerinde ve sistemin Hilbert uzayında bir baz olsun. Bunun karışım durumu değil, saf durum olduğuna dikkate edelim. Bu durumdaki bir \hat{A} işlemcisinin beklenen değeri;

$$\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \sum_{ij} c_i^* c_j A_{ij} \tag{1.60}$$

ile verilir. Burada $A_{ij} = \langle e_i | \hat{A} | e_j \rangle$, $c_j = \langle e_j | \psi \rangle$ ve $c_i^* = \langle \psi | e_i \rangle$ 'dir ve

$$c_i^* c_j = \langle \psi | e_i \rangle \langle e_j | \psi \rangle = \langle e_j | \psi \rangle \langle \psi | e_i \rangle = \langle e_j | (|\psi\rangle\langle\psi|) | e_i \rangle = \langle e_j | \hat{\rho} | e_i \rangle \tag{1.61}$$

olur ve buradan;

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (1.62)$$

tanımı yapılır. $|\psi\rangle$ durumu için sadece izdüşüm işlemcisi olan saf durum için yoğunluk matrisidir. Yoğunluk matrisi cinsinden \hat{A} 'nın beklenen değeri şu şekilde yazılabilir;

$$\langle\hat{A}\rangle = \sum_{ij} \langle e_j|\hat{\rho}|e_i\rangle A_{ij} \quad (1.63)$$

Yukarıdaki beklenen değeri aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz,

$$\begin{aligned} \langle\hat{A}\rangle &= \sum_{ij} \langle e_j|\psi\rangle\langle\psi|e_i\rangle \langle e_i|\hat{A}|e_j\rangle = \sum_{ij} \langle e_j|\hat{\rho}|e_i\rangle \langle e_i|\hat{A}|e_j\rangle = \sum_j \langle e_j|\hat{\rho}\hat{A}|e_j\rangle \\ \langle\hat{A}\rangle &= \text{tr}\hat{\rho}\hat{A} \end{aligned} \quad (1.64)$$

Son adımda, toplamı i üzerinden gerçekleştirmek için tamlık bağıntısını kullandık. $\hat{\rho}$ 'nin izi aşağıdaki gibi hesaplanır. İz herhangi baz da hesaplanabildiğinde;

$$\text{tr}\rho = \sum_i \langle e_i|\hat{\rho}|e_i\rangle = \sum_i \langle e_i|\psi\rangle\langle\psi|e_i\rangle \quad (1.65)$$

elde edilir. Yoğunluk işlemcisi zamanla nasıl değiştiğini inceleyelim: $|\psi\rangle$ durumunun Schrödinger denklemini sağladığı,

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle = \mathcal{H}|\psi\rangle \quad (1.66)$$

$$-i\hbar \frac{d}{dt}\langle\psi| = \langle\psi|\mathcal{H} \quad (1.67)$$

ifadelerine sahibiz. Böylece;

$$\begin{aligned} i\hbar|\psi\rangle\langle\psi| &= \left(i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle\right)\langle\psi| + |\psi\rangle\left(i\hbar \frac{d}{dt}\langle\psi|\right) = \mathcal{H}|\psi\rangle\langle\psi| - |\psi\rangle\langle\psi|\mathcal{H} \\ i\hbar|\psi\rangle\langle\psi| &= [\mathcal{H}, \rho] \end{aligned} \quad (1.68)$$

elde ederiz. Böylece yoğunluk matrisi istatistiği Liouville denklemini sağlar,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = [\mathcal{H}, \rho] \quad (1.69)$$

ρ bir işlemci olmasına rağmen, kuantum mekaniksel etkinin Heisenberg denklemini sağlamadığına dikkat edelim.

Bunun nedeni ise yoğunluk işlemcisinin, bir işlemcinin matematiksel yapısına sahip herhangi basit ve gözlenebilir tarafından temsil edilemediğidir. Yoğunluk işlemcisi $\rho^\dagger = |\psi\rangle\langle\psi|$ açıkça hermityendir. Dahası,

$$\rho^2 = (|\psi\rangle\langle\psi|)(|\psi\rangle\langle\psi|) = |\psi\rangle\hat{I}\langle\psi| = \rho \quad (1.70)$$

ifadesini sağlar ve bu sadece saf haller için geçerlidir ve buradan

$$\text{tr}\rho^2 = \text{tr}\rho = 1 \quad (1.71)$$

bağıntısını yazarız.

Aynı zamanda ρ bir *pozitif işlemci*dir; çünkü keyfi bir $|\phi\rangle$ durumu için;

$$\langle\phi|\rho|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle = |\langle\phi|\psi\rangle|^2 \quad (1.72)$$

yazılır. ρ hermityen işlemci olduğunda spektral bir ayrışmayı kullanabiliriz;

$$\rho = \sum_n \lambda_n |n\rangle\langle n| \quad (1.73)$$

ρ bir pozitif işlemci olduğu için, özdeğerler negatif değildir. $\text{tr}\rho = 1$ olduğundan,

$$\sum_n \lambda_n = 1 \quad (1.74)$$

ifadesini yazarız [7].

1.5.2. Karışık Hal Yoğunluk Matrisi

Eğer bir saf durum yerine, klasik p_i olasılığıyla çeşitli $|\psi\rangle$ durumlarında bulunabilen sistemler topluluğu varsa, yoğunluk işlemcisini aşağıdaki bağıntıyla tanımlarız,

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (1.75)$$

$|\psi_i\rangle$ durumunun ortogonal olması gerekmez. Yoğunluk işlemcisinin özellikleri aşağıdaki gibidir;

- (i) $\rho^\dagger = \rho$
- (ii) ρ pozitif bir işlemcidir
- (iii) $tr(\rho) = 1$
- (iv) $\langle A \rangle = tr(\rho A)$
- (v) Liouville denklemini sağlar $i\hbar \frac{d}{dt} \rho = [\mathcal{H}, \rho]$

1.5.3. Yoğunluk Matrisi ve Bloch Küresi

Spin 1/2 durumuna uyan yoğunluk matrisini dikkate alalım. Bloch küresi üzerindeki bir kubit durumu ile ilişki olan bir noktayı hatırlayalım. Doğal olarak Bloch küresi üzerindeki her nokta için bir yoğunluk matrisini tam olarak ilişkilendirebiliriz. Bu durum σ_n öz durumları dikkate alınarak görülebilir. Burada \hat{n} birim vektörü olmak üzere;

$$(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad (1.76)$$

koordinatlarına sahiptir. Öz durumlar;

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

ile verilir. Karşılık gelen yoğunluk matrisi $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ kullanılarak hesaplanabilir. Böylece;

$$\begin{aligned}\rho &= |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}I + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \sin \theta \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cos \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \rho &= \frac{1}{2}(1 + \hat{n} \cdot \vec{\sigma})\end{aligned}\quad (1.78)$$

yazarız. Bloch küresi ile karışık durum için bir yoğunluk matrisi ilişkisi mümkündür. Sadece bu tür noktalar kürenin içindedir ve saf haller için olduğu gibi üzerinde değildir. Çünkü herhangi bir 2×2 birim matrisi ve üç Pauli matrisi σ_x, σ_y ve σ_z cinsinden yazılabilir. Bu durumda;

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \vec{a} \cdot \vec{\sigma})\quad (1.79)$$

olur. 2×2 birim bir matrisi için $tr(\sigma_i) = 0$ ve $tr(I) = 2$ olduğu için $tr(\rho) = 1$ 'dir. Buradaki \vec{a} vektörüne Bloch vektörü denir. Aşağıdaki bağıntıları yazalım;

$$\begin{aligned}\sigma_x &= tr(\sigma_x \rho) \\ &= \frac{1}{2} tr \left(\sigma_x (1 + a_x \sigma_x + a_y \sigma_y + a_z \sigma_z) \right) \\ &= \frac{a_x}{2} tr(\sigma_x^2) \\ \sigma_x &= \frac{a_x}{2} \times 2 = a_x\end{aligned}\quad (1.80)$$

Yukarıda Pauli matrislerinin $\sigma_x \sigma_y = i \sigma_z$, $\sigma_i^2 = I$ özelliklerini kullandık ve biliyoruz ki σ_i 'nin izi sıfırdır. Yukarıdaki sonuç, a_x, a_y ve a_z sırasıyla σ_x, σ_y ve σ_z beklenen değerlerine sahip olduğunu gösteriyor. Şimdi ρ^2 'nin izini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
tr(\rho^2) &= tr \left[\frac{1}{4} (I + \vec{a} \cdot \sigma)^2 \right] \\
&= \frac{1}{4} tr [I^2 + a_x^2 \sigma_x^2 + a_y^2 \sigma_y^2 + a_z^2 \sigma_z^2 + 2a_x \sigma_x + 2a_y \sigma_y + 2a_z \sigma_z] \\
&= \frac{1}{2} [1 + a_x^2 + a_y^2 + a_z^2] \\
tr(\rho^2) &= \frac{1 + |a|^2}{2} \tag{1.81}
\end{aligned}$$

Yukarıda $tr(\sigma_i) = 0$ ve $tr(\sigma_i^2) \equiv tr(I) = 2$ durumlarını kullandık. Böylece karışık durumlar için, $|a|$ merkezi ile arasındaki mesafe 1'den az olması gerekir ve bundan dolayı karışık durumlar Bloch küresinin içinde yer almaktadır. Saf durumu $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ ve istatistiksel karışımı %50 $|0\rangle$ durumunda, %50 $|1\rangle$ durumunda olan sistem arasındaki fark nedir? Saf hal için, $|\psi\rangle$ durumu Bloch küresi üzerinde $\theta = \pi/2, \varphi = 0$ ile bulunur, çünkü durum şöyle bir matris ile temsil edilir;

$$\psi \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ e^{i \times 0} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \tag{1.82}$$

Eğer bu durumu Bloch küresinde y-ekseni etrafında $-\pi/2$ kadar döndürürsek, durum kuzey kutbuna, diğer bir deyişle, $|0\rangle$ durumuna gider. Ölçümde $|0\rangle$ durumunu birim olasılıkla alırız. Şimdi yukarıdaki karışıma sahip olduğumuzda ne yapacağımızı düşünelim. Bloch küresini y-ekseni ile $-\pi/2$ derece döndürülmesi ekvator için $|0\rangle$ durumu $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ durumunu alır. Benzer olarak $|1\rangle$ durumu $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ olur. Bundan dolayı aynı dönmeden önceki durumda olduğu gibi ölçümde $|0\rangle$ durumu %50 olasılıkla ve $|1\rangle$ durumu %50 olasılıkla alınır. Karışık durum Bloch küresinin orijininde bulunur ve dolayısıyla yukarıda açıklanan rotasyonda değişmez. Yoğunluk matrisi fiziksel bir durumu benzersiz (özgün) olarak temsil edip edemediğini inceleyelim. Karışık durum için, cevap hayırdır. Yukarıda verilen 50-50 karışımını düşünelim. Yoğunluk matrisi;

$$\rho = \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{I}{2} \tag{1.83}$$

olur. Bu durumda yoğunluk matrisi %50 olasılıkla $|+\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)$ durumunda ve diğ er %50 olasılıkla $|-\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle)$ durumundan oluşan farklı bir karışım düşünelim. Yoğunluk matrisi bir önceki durumda olduğu gibi çalışır. Yoğunluk matrisinin elementleri aşağıdaki gibi yorumlanır. Eğer bir sistem ρ yoğunluk matrisiyle tanımlanırsa, bir $|\psi\rangle$ durumunda bulunma olasılığı $\langle P_\psi \rangle$ ile verilir, burada $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$, $|\psi\rangle$ durumu için izdüşüm işlemcisidir. Bir $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ saf durumu düşünelim. Bu durumun $|0\rangle$ durumunda bulunma olasılığı $\langle\psi|P_0|\psi\rangle = |a|^2$ olur. Keyfi bir durum için yoğunluk matrisiyle tanımlanır,

$$P_0 = tr(P_0\rho) = tr \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \right] \quad (1.84)$$

$$P_0 = tr \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \rho_{00} = \frac{1 + a_z}{2}$$

Aynı şekilde, $|1\rangle$ durumunun bulunma olasılığı şöyle verilir;

$$P_1 = \rho_{11} = \frac{1 - a_z}{2} \quad (1.85)$$

Sistemin belli bir durumda bulunma olasılığı yoğunluk matrisinin köşegen elemanlarıyla verilir. Köşegen dışındaki elemanlar durumlar arası uyumu verir. Bir $\rho^2 = \rho$ saf durumuna dikkat edelim.

Spektral teoremi kullanılarak, $\rho = \sum_i \lambda_i |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|$ durumu $\rho^2 = \sum_i \lambda_i^2 |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|$ olur. $\rho^2 = \rho$ olduğundan $\lambda_i^2 = \lambda_i$ ve böylece, $\lambda_i = 0$ yada 1 olur.

$tr(\rho) = 1$ olduğundan bazı $i = \rho$ 'ler için $\lambda_p = 1$ ve $i \neq \rho$ için sıfır olur. Karışık bir durum için, bununla birlikte $\rho = p_i \rho_i$ ile ρ_i bir saf durum yoğunluk matrisi olur ve $\rho^2 = \sum_{ij} p_i p_j \rho_i \rho_j$ elde ederiz. ρ 'nin izi hala 1'dir (iz her bazda hesaplanabilir).

$$tr(\rho) = \sum_j \sum_i p_i \langle e_j | \psi_i \rangle \langle \psi_i | e_j \rangle = \sum_{ij} p_i \langle \psi_i | e_j \rangle \langle e_j | \psi_i \rangle \quad (1.86)$$

$$tr(\rho) = \sum_i p_i \langle \psi_i | \psi_i \rangle = \sum_i p_i = 1$$

burada son fakat ilk adımda tamlık bağıntısını kullandık. Ama karışık bir durum için ρ^2 'nin izi genellikle birden küçüktür ve aşağıdaki gibi gösterilebilir;

$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho) &= \sum_k \sum_{ij} p_i p_j \langle e_k | \rho_i \rho_j | e_k \rangle = \sum_{ijk} p_i p_j \langle e_k | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \psi_j \rangle \langle \psi_j | e_k \rangle \\ \text{tr}(\rho) &= \sum_{ik} p_i^2 \langle \psi_i | e_k \rangle \langle e_k | \psi_i \rangle = \sum_i p_i^2 \leq 1 \end{aligned} \quad (1.87)$$

Burada eşitlik sadece p_i bire eşit ve diğerleri sıfır olduğu zaman, diğer bir deyişle saf bir durumda uygulanabilir. Böylece karışık durum için $\text{tr}(\rho^2) \leq \text{tr}(\rho)$ olur [6,9].

1.5.4. Yoğunluk Matrisi Cinsinden Kuantum Mekanik Postulatları

Yoğunluk matrisi formülasyonunun avantajının açık bir sistemin tanımını sağlamak için öncekinin becerisinde yatan durum vektörü tanımlaması üzerinde olduğunu gördük. Bunun nedeni ise: bizim sistemimizin ilgisi genellikle çevreyle ilişkili olan bir alt sistem olmasındandır. Bu durumlarda, sistem altındaki inceleme ile bir vektör ortaklığı mümkün değildir. Yoğunluk matrisi, diğer yandan, hem kapalı sistem hem de açık sistem ile ilgili olabilir. Bu yüzden, kuantum postulatlarını yoğunluk matrisi bakımından yeniden formüle etmek gereklidir.

1. Bir kuantum sistem bir *birim ize sahip pozitif bir işlemci* olan ve sistemin durum uzayı üzerinde etki eden, ρ yoğunluk matrisi tarafından tamamen tanımlanabilir.
2. Kapalı bir sistem birimsel olarak gelişir;

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0) \quad (1.88)$$

3. Bir ölçümün çıktısı istatikseldir, sadece mümkün çıktıları işlemcisinin özdeğeri λ_m 'ı temsil ettiği gözlenebilir ve bu ölçümün olasılığı ise;

$$P(m) = \text{tr}(\langle \phi_m | \psi \rangle \langle \psi | \phi \rangle) = |\langle \phi_m | \psi \rangle|^2 \quad (1.89)$$

ile verilir.

$\rho = \sum_i p_i |\psi\rangle\langle\psi_i|$ 'li bir karışık durum için, açıkça şu şekilde gözlenebilir:

$$P(m) = \sum_i p_i |\langle\phi_m|\psi\rangle|^2 = \sum_i p_i \langle\phi_m|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\phi_m\rangle = \langle\phi_m|\rho|\phi_m\rangle \quad (1.90)$$

Bununla birlikte, son ifade $tr(\rho|\phi_m\rangle\langle\phi_m|) \equiv tr(\rho P_m)$ 'e eşit olur burada $P_m = |\phi_m\rangle\langle\phi_m|$, $|\phi_m\rangle$ öz durumu için izdüşüm işlemcisidir.

4. Sistemin ölçüm sonrası durumu şöyle verilir;

$$\rho(\lambda_m) = \frac{1}{P(m)} |\phi_m\rangle\langle\phi_m| \langle\phi_m|\rho|\phi_m\rangle \langle\phi_m| \quad (1.91)$$

Her durum postulatı gibi, ölçüm sonrası durumun da aşağıdaki gibi verildiğine dikkat edelim;

$$\frac{P_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_m^2|\psi\rangle}} = \frac{P_m|\psi\rangle}{\sqrt{P_m}} \quad (1.92)$$

1.5.5. İndirgenmiş Yoğunluk Matrisi

Daha önce bahsedildiği gibi çoğu kez, ilgili sistemimiz A birbiriyle etkileşen daha büyük bir sistemin bir parçasıdır. Kuantum koordinat ilişkileri ilgili sistemimiz içinde var olan çevre ile etkileşimin bir sonucu olarak çözülecektir. Eğer sistemin geri kalanı (A+ çevre B olarak etiketleyelim) yoğunluk matrisiyle tanımlanırsa, A'nın özellikleri çevrenin izi üzerinden kısmi iz alınarak elde edilir. İndirgenmiş yoğunluk matrisinin temel kavramlarını bir bitlik sistem olan A ve ayrıca bir bitlik sistem olan B ile göstereceğiz. Sadece A sistemi üzerinde ölçüm yapmak istediğimizde görmek için, birleşik (A+B) sistemde bir ölçüm yapmış gibi işlerin nasıl değişeceği, tek bir yoğunluk matrisi ρ^{AB} tarafından tanımlanan A sistemi için *indirgenmiş yoğunluk matrisi* şu şekilde tanımlanır;

$$\rho^A = tr_B(\rho^{AB}) \quad (1.93)$$

burada tr_B , B üzerindeki kısmi izdir, şu şekilde tanımlanır;

$$\text{tr}(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) = |a_1\rangle\langle a_2| \text{tr}(|b_1\rangle\langle b_2|) \quad (1.94)$$

burada $\{b_1, b_2\}$ B'nin (saf) durumlarıdır. Şimdi,

$$\text{tr}|b_1\rangle\langle b_2| = \sum_i \langle i|b_1\rangle\langle b_2|i\rangle = \langle b_2|b_1\rangle \quad (1.95)$$

İndirgenmiş yoğunluk matrisinin A sisteminin için istatistiksel uygun ölçümü sağladığını göreceğiz. Neden birleşik sistemle uğraşırken kısmi ize ihtiyacımız olduğunu cevaplayalım. M , sistem A'da gözlemlenebilir olurken, \tilde{M} , AB sisteminde yapılan aynı ölçüm olur. $\tilde{M} = M \otimes I_B$ olduğunu göstereceğiz. Bizim birleşik sistemimiz $|m\rangle \otimes |\psi\rangle$ durumunda verilmiş olsun, burada $|m\rangle$, A'nın bir öz durumu ve $|\psi\rangle$ keyfi bir B durumudur. Birleşik sistemde bir ölçüm yaptığımızı varsayalım. Eğer P_m , M 'nin özuzayı üzerindeki $|m\rangle$ için iz düşümdür. \tilde{M} için iz düşüm $P_m \otimes I_B$ olsun. Böylece,

$$\tilde{M} = \sum_m m P_m \otimes I_B = M \otimes I_B \quad (1.96)$$

olur. ρ_A veya ρ_{AB} ile ölçüm sonucunu hesaplayıp hesaplamadığımızda aynı sonucu almamız, ve şuna sahip olmalıyız;

$$\text{tr}(\rho_A M) = \text{tr}(\rho_{AB} \tilde{M}) = \text{tr}((M \otimes I_B) \rho_{AB}) \quad (1.97)$$

Eğer $\rho_A = \text{tr}_B(\rho_{AB})$ alırsak, yukarıdaki denklem sağlanır.

1.5.6. Schmidt Ayrışması Yöntemi ve Schmidt Sayıları

$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ birleşik uzayındaki keyfi bir vektör açıkça \mathcal{H}_A için $\{|\phi_i^A\rangle\}$ ortonormal bir baz ve \mathcal{H}_B için $\{|\phi_\mu^B\rangle\}$ ortonormal bir baz cinsinden ifade edilebilir.

$$|\psi\rangle = \sum_{i,\mu} C_{i,\mu} |\phi_i^A\rangle \otimes |\phi_\mu^B\rangle \quad (1.98)$$

$C_{i,\mu}$ 'nin katsayıları genelde kompleksdir ve $\sqrt{p_{i,\mu}}e^{i\varphi_{i,\mu}}$ formundadır. Eğer \mathcal{H}_A , m boyutlu ve \mathcal{H}_B , n boyutluysa bu birleşik sistem mn boyutludur.

Schmidt ayrışması bize, genellikle $\{|\phi_i^A\rangle\}$ ve $\{|\phi_\mu^B\rangle\}$ bir baz çiftini bulabileceğimizi söyler.

Dolayısıyla bütün çarpma terimleri $|\psi\rangle$ açılımında yok olur ve sonra;

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |\widetilde{\phi}_i^A\rangle \otimes |\widetilde{\phi}_i^B\rangle \quad (1.99)$$

ifadesine sahip oluruz. Yani tüm $\sqrt{p_i}$ katsayıları gerçektir ve uzayın boyutu $\min(m, n)$ 'dir.

$|\widetilde{\phi}_0^B\rangle = \sum_\mu C_{i,\mu} |\phi_\mu^B\rangle$ ifadesini tanımlayalım. $|\psi\rangle = \sum_i |\widetilde{\phi}_i^A\rangle \otimes |\widetilde{\phi}_i^B\rangle$ olmak üzere $|\widetilde{\phi}_i^B\rangle$ seti ne ortogonal ne de normalize olmayabileceğini belirtelim. Ancak, genelliği kaybetmeden $|\widetilde{\phi}_i^A\rangle$ bazını ρ_A 'nın bu bazda ortogonal olacak şekilde seçebiliriz. Böylece,

$$\rho_A = \sum_i p_i |\phi_i^A\rangle\langle\phi_i^A| \quad (1.100)$$

olur. Ancak ρ_A 'yı birleşik sistemin yoğunluk matrisinden ifadelendirilmiş indirgenmiş bir yoğunluk matrisi olarak hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned} \rho_A &= tr_B \rho_{AB} = tr_B (|\psi\rangle_{AB} \langle\psi|) \\ &= tr_B \left[\sum_{i,j} (|\phi_i^A\rangle \otimes |\phi_i^B\rangle) (\langle\phi_j^A| \otimes \langle\phi_j^B|) \right] \\ &= \sum_{i,j} (|\phi_i^A\rangle\langle\phi_j^A|) tr(|\widetilde{\phi}_i^B\rangle\langle\widetilde{\phi}_j^B|) = (|\phi_i^A\rangle\langle\phi_j^A|) (\langle\widetilde{\phi}_j^B|\widetilde{\phi}_i^B\rangle) \end{aligned} \quad (1.101)$$

burada, $tr(|\widetilde{\phi}_i^B\rangle\langle\widetilde{\phi}_j^B|) = \langle\widetilde{\phi}_j^B|\widetilde{\phi}_i^B\rangle$ ifadesini kullandık. Bununla birlikte, ρ_A için (??) ifadesi kullanılır. Sonuçta;

$$\sum_i p_i |\phi_i^A\rangle\langle\phi_i^A| = \sum_{i,j} (|\phi_i^A\rangle\langle\phi_j^A|) (\langle\widetilde{\phi}_j^B|\widetilde{\phi}_i^B\rangle) \quad (1.102)$$

elde edilir. Bu ise $\langle \widetilde{\phi}_j^B | \widetilde{\phi}_i^B \rangle = p_i \delta_{i,j}$ olduğunu göstermektedir. Diğer bir deyişle, yeni baz ortogonaldır. $\pi \neq 0$ olduğunu varsayalım.

Bu durumda olacak şekilde normalize edebiliriz ve;

$$|\widetilde{\phi}_i^B\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{p_i}} |\widetilde{\phi}_i^B\rangle \quad (1.103)$$

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i p_i |\phi\rangle_A \otimes |\widetilde{\phi}_i^B\rangle \quad (1.104)$$

yazılır. ρ_B 'yi elde etmek almak için A üzerinde kısmi iz alabiliriz;

$$\begin{aligned} \rho_B &= \text{tr}_A(|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|) \\ &= \text{tr}_A \left(\sum_{i,j} \sqrt{p_i p_j} (|\phi_i^A\rangle\langle\phi_j^A|) \otimes (|\widetilde{\phi}_i^B\rangle\langle\widetilde{\phi}_j^B|) \right) \\ \rho_B &= \sum_i p_i |\phi_i^B\rangle\langle\phi_i^B| \end{aligned} \quad (1.105)$$

olur. Bu bize gösterir ki ρ_A ve ρ_B 'nin sıfır olmayan özdeğerlere sahip olduğunu gösterir. Bu \mathcal{H}_A ve \mathcal{H}_B özdeğerleri sıfırdan farklı olabilecek aynı boyuta sahip olacağı anlamına gelmez. ρ_A ve ρ_B 'nin sıfır olmayan özdeğerleri *Schmidt Sayısı* olarak bilinir. Eğer bir durum ayrılabilir ise, Schmidt sayısı 1'dir.

1.5.7. Aritma

Bize bir karışık durum veren saf bir durumun kısmi izinin alınmasını gördük. Bunun karşıtının da doğru olduğu ve karışık durum yoğunluk matrisini veren bir kısmi iz durumuna sahip bir saf durum yoğunluk matrisini bulunduğu süreç *arıtma* olarak adlandırılır. $p_a = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$, \mathcal{H}_A Hilbert uzayında A'nın yoğunluk matrisi olsun. İkinci bir Hilbert uzayı \mathcal{H}_B sunalım ki \mathcal{H}_A ile aynı boyutlara sahip olsun.

$$|\psi\rangle = \sum_k \sqrt{p_k} |\psi_k\rangle \otimes |\phi_k\rangle \quad (1.106)$$

İfadesini tanımlayalım. Burada $\{|\phi_k\rangle\}$, \mathcal{H}_B 'de ortonormal bir bazdır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} tr_B |\psi\rangle\langle\psi| &= tr_B \sum_{k,l} \sqrt{p_k p_l} |\psi_k\rangle_A \langle\psi_l| \otimes |\phi_k\rangle_B \langle\phi_l| \\ &= \sum_{k,l} \sqrt{p_k p_l} |\psi_k\rangle_A \langle\psi_l| \langle\phi_k|\phi_l\rangle \\ &= \sum_{k,l} \sqrt{p_k p_l} |\psi_k\rangle_A \langle\psi_l| \delta_{k,l} = \sum_k p_k |\psi_k\rangle_A = \rho_A \end{aligned} \quad (1.107)$$

elde edilir [7].

1.6. Çoklu Kubit Durumları ve Kuantum Kapıları

1.6.1. Birleşik Sistemler

A ve B'nin birleşik bir sistemin iki alt sisteminden oluştuğunu varsayalım. A'nın Hilbert uzayı \mathcal{H}_A ve B'nin Hilbert uzayı \mathcal{H}_B olsun. Birleşik sistemin uzayı $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{AB}$ olsun. $\{|\alpha\rangle_A\}$, \mathcal{H}_A 'da bir baz ve $\{|\beta\rangle_B\}$, \mathcal{H}_B 'de bir baz olsun. \mathcal{H}_{AB} bazının bileşik seti $\{|\alpha, \beta\rangle_{AB}\}$ olarak tanımlanır. Baz için ortonormallik ilişkisi,

$${}_{AB}\langle\alpha', \beta'|\alpha, \beta\rangle_{AB} = \delta_{\alpha, \alpha'} \delta_{\beta, \beta'} \quad (1.108)$$

olur. Bu birleşik uzayda bileşik sistemin üzerinde etki eden, $M_A \otimes N_B$ olmak üzere bir işlemci tanımlayalım;

$$M_A \otimes N_B |\psi, \varphi\rangle_{AB} = M_A |\psi\rangle_A \otimes N_B |\varphi\rangle_B = \sum (M_A)_{\psi, \alpha} |\alpha\rangle (N_B)_{\varphi, \beta} |\beta\rangle \quad (1.109)$$

olur. İki kubitli sisteme bakalım. Klasik bitler 00,01,10 ve 11 gibidir. İki kubit için kuantum durumu ise;

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle \quad (1.110)$$

olur ve olasılıklar toplamı,

$$|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1 \quad (1.111)$$

olmalıdır. İlk kubiti ölçtüğümüzü ve 0 bulduğumuzu varsayalım ($|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2$ olasılıkla). Bu durumda ölçülen durum;

$$|\psi'\rangle = \frac{\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}} \quad (1.112)$$

olur. Her iki kubit durumunun, tek bir kubit durumunun ürünü olarak yazılamayabileceğine dikkat edelim. Bu tür durumların özellikle önemli bir kümesi *Bell durumları* olarak bilir ve aşağıdaki gibi verilir;

$$|\psi_+\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.113)$$

$$|\psi_-\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.114)$$

$$|\psi_+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.115)$$

$$|\psi_-\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.116)$$

Yukarıdaki durumdan birinin ilk kubitini ölçtüğümüzü varsayalım, yani, $|\psi_+\rangle$ olsun. Eğer ölçümün bir sonucu olarak 0 bulursak, bu sadece $|01\rangle$ bileşeninden gelebilir, bu bileşen sistemin normalleştirilmiş ölçüm sonrası hali olacaktır. Ancak, bu ölçümün bir sonucu olarak, ölçmememize rağmen, ikinci kubitin durumunun $|1\rangle$ olduğu belirlenir. Bu ölçüm sonuçlarının korelasyonudur. Bu durum dolanıklık olarak bilinir [7,8].

1.6.2. İki Kubit Uzayında Matris Bazı

Görürüz ki, bir kubit için \mathbb{C}^2 Hilbert uzayında durumlar, bir sütun vektörü ile tanımlanabilir. Bu uzayda mümkün bazlardan biri, *hesaplamalı baz*:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ve } |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.117)$$

olur. Daha yüksek boyutlar için bir baz tanımlamasında bu kullanılabilir. Örneğin, iki kubit durumu için hesaplamalı baz, bir kubit baz durumunun ürünü olan matrizen aşağıdaki gibi elde edilir:

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.118)$$

$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.119)$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.120)$$

$$|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.121)$$

Bu n-kubit için genelleştirilebilir ve bir n-kubit durumu;

$$|a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\rangle = |a_0\rangle \otimes |a_1\rangle \dots |a_{n-1}\rangle \quad (1.122)$$

olarak tanımlanabilir. Burada her a_i katsayısı 0 ya da 1 değerini alır. Böylece bir durum eşzamanlı olarak 2^n durumun lineer bir kombinasyonu olabilir ve 2^n miktarda bilgi içerebilir. Ancak, daha sonra bu bilgilerin çoğunun gizli kaldığını ve ölçümün sadece n-kubitlik bilgiyi açığa çıkardığını göreceğiz.

Ölçüm kuantum bilgi bileşenleri için oldukça önemlidir, çünkü klasik teorinin aksine sonuçlar olasılıksal olabilir. Yukarıda tanımlanan ölçüm cihazlarımızın basitçe hazırlandığı hesaplamalı bazda ölçümden sık sık bahsediyoruz. Ancak, Hilbert uzayında bir bazın sadece hesaplamalı olmasına gerek yoktur. Her vektör seti bir baz formunda keyfi bir durum açısından ifade edilebilir. \mathbb{C}^2 'de $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumları hesaplamalı bazda tanımlayabiliriz. Ancak, genel bir $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ durumumuz varsa, bu baz üzerinde tekrarlanan bir ölçüm bize $|\alpha|^2$ ve $|\beta|^2$ hakkında bilgi verebilir ama her göreceli faz durumu ile iki kompleks katsayı

hakkında bilgi veremez. Eğer, bununla birlikte, bu durumun bir ölçümünü *köşegen baz* olarak adlandırılan ve $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ olarak alınan baz vektörleri üzerinde yaparsak, görelî faz hakkında bazı bilgileri iyi bir şekilde ortaya çıkartabilir.

1.6.3. Tek Kubit Kapıları

Kubitlerin, klasik bitlere uyan gerekli mantık elemanlarını, yani, bir kuantum durumu üzerindeki etkilerin aynı Hilbert uzayında diğeri bir durumu veren mantık kapılarını tartışalım. Durum, bazı evrensel mantık kapılarını inşa ederken ihtiyaç duyduğumuz (NOR ve NAND gibi) ve her boole fonksiyonunu ifade edebilen klasik duruma çok benzer. Kuantum bilgisayarları aynı zamanda, sadece birkaç kapı elemanına ihtiyaç duyar. Bu klasik ve kuantum arasındaki çok belirgin bir farktır. Kuantum dünyasında, durumlar birimselliği geliştirir (ölçüm zamanının beklenmesi) ve bu nedenle, kapılar onların *birimsellik ve tersinir* işlemcilerini gerçekleştirmelidir. (Klasik hesaplama aynı zamanda, kapılardan biri, yani, NOT kapısı tersinirdir ama hepsi değil.)

Klasik bilgisayardaki gibi, giriş ve çıkış için kayıt yapılır. Bu kayıtların depolama kapasiteleri durumların lineer kombinasyonlarıdır. Hesaplama yapılırken, *kahin (ancilla)* olarak adlandırılacak bazı ek kayıtlara ihtiyacımız olacaktır. Birim işlemciler bir kuantum durumunun birimini korur.

Tek kubit durumunun Bloch küresi olarak adlandırılan birim kürede geometrik olarak tanımlandığını tekrar edebiliriz. Birim işlemciler bir vektörün uzunluğunu kapsadığından, bu işlemciler Bloch küresi üzerindeki bir noktayı aynı küre üzerindeki diğeri bir noktaya alır. Bunun anlamı, küre üzerindeki katı dönmeleri ve küre üzerindeki yansımalar korunur. Matris gösterimi açısından, durum aşağıdaki gibidir: Çünkü işlemciler $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$ bir durumunu veren $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ durumunda gerçekleşecektir. İşlemcilerin durumlar üzerindeki etkileri 2x2'lik bir matris olarak verilecektir.

$$U = e^{i\alpha} \exp(-i\theta \hat{n} \cdot \vec{\sigma}/2) \quad (1.123)$$

ifadesi 2x2'lik matris formunda tanımlanabilir. Burada α ve θ reel sayılardır, \hat{n} uzayda bir birim vektördür ve $\vec{\sigma}$ ise Pauli vektör bileşenidir.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.124)$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.125)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.126)$$

Bunu kanıtlamak için, aşağıdaki adımları izleyelim. Matris aşağıdaki gibi olsun:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.127)$$

Burada a, b, c, d genelde kompleksdir. Herhangi 2×2 'lik bir matrisin, birim matris I ve yukarıda verilen Pauli matrislerinin lineer bir kombinasyonu olarak yazılabileceğine dikkat edelim. Matris

$$U = u_0 I + u_1 \sigma_x + u_2 \sigma_y + u_3 \sigma_z \quad (1.128)$$

olarak yazılır. İfade aşağıdaki gibi genişletilir.

$$\begin{aligned} UU^\dagger &= (|u_0|^2 + |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2)I \\ &+ [u_0 u_1^* + u_0^* u_1 + i(u_2 u_3^* - u_3 u_2^*)] \sigma_x \\ &+ [u_0 u_2^* + u_0^* u_2 + i(u_3 u_1^* - u_1 u_3^*)] \sigma_y \\ &+ [u_0 u_3^* + u_0^* u_3 + i(u_1 u_2^* - u_2 u_1^*)] \sigma_z \end{aligned} \quad (1.129)$$

Burada $\sigma_i^2 = I$ ve $\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k$ ilişkilerinin kullandık. Bu ifadenin birim matris olması için, ifadeler aşağıdaki gibi olmalıdır;

$$|u_0|^2 + |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2 = 1 \quad (1.130)$$

$$u_0 u_1^* + u_0^* u_1 + i(u_2 u_3^* - u_3 u_2^*) = 0 \quad (1.131)$$

$$u_0 u_2^* + u_0^* u_2 + i(u_3 u_1^* - u_1 u_3^*) = 0 \quad (1.132)$$

$$u_0 u_3^* + u_0^* u_3 + i(u_1 u_2^* - u_2 u_1^*) = 0 \quad (1.133)$$

Bu denklemler, aşağıdaki ifadeleri seçersek karşılanabilir;

$$u_0 = e^{i\alpha} \cos(\theta/2) \quad (1.134)$$

$$u_1 = -ie^{i\alpha} \sin(\theta/2)n_x \quad (1.135)$$

$$u_2 = -ie^{i\alpha} \sin(\theta/2)n_y \quad (1.136)$$

$$u_3 = -ie^{i\alpha} \sin(\theta/2)n_z \quad (1.137)$$

burada $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ olur. Klasik NOT kapısı tersinir bir kapıdır. Bunun kuantum karşılığı, $|0\rangle$ durumunu $|1\rangle$ 'e dönüştürür ve bu tersine süreci Pauli σ_x matrisi sağlar. Bu kapı bir X-kapısı olarak adlandırılır ve bu kapının matris temsili ise;

$$X : \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.138)$$

ile verilir. NOT kapısı klasik bilgisayarda mümkün olan, tek kubit kapısıdır. Ancak, kuantum durumların doğası gereği, burada diğer olasılıklar da vardır.

Bu bir faz kapısıdır. Faz kapısı $|0\rangle$ durumu üzerine etki ederek onu değiştirmez ancak $|1\rangle$ durumuna etki ettiğinde $-|1\rangle$ durumunu verir.

$$\text{Faz Kapısı: } |0\rangle \rightarrow |0\rangle \quad |1\rangle \rightarrow -|1\rangle \quad (1.139)$$

Matris gösterimine uyan işlemci Pauli σ_z matrisi tarafından verilir ve bu kapı Z-kapısı olarak bilinir.

$$Z : \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.140)$$

Genelde, tek kubit durumları için seçici bir faz işlemcisinden bahsedilebilir. Bu seçicilik $|0\rangle$ durumunu değiştirmezken, $|1\rangle$ durumu φ 'nın bir fazını verir.

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle \quad |1\rangle \rightarrow e^{i\varphi}|1\rangle \quad (1.141)$$

bu ifadeye uyan matris gösterimi;

$$P(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (1.142)$$

olur. Z-kapısı $\varphi = \pi$ ile yukarıdakilerin özel bir durumudur. Burada kuantum hesaplama için önemli birkaç özel faz durumu daha vardır, bunlardan biri T-kapısıdır ve $\varphi = \pi/4$ için matris gösterimi;

$$T \text{ Kapısı} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} \quad (1.143)$$

olur. İlginç biçimde, bu kapı ayrıca $\pi/8$ kapısı olarak bilinir, bu terminolojinin nedeni, eğer $e^{i\pi/8}$ 'in genel bir faz faktörünü götürürse, kapının yapısı

$$\frac{\pi}{8} \text{ Kapısı} := \begin{pmatrix} e^{-i\pi/8} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/8} \end{pmatrix} \quad (1.144)$$

gibi olacağından dolayıdır. Diğer olasılıklar bir yüzeyde dönmeyi içerir. Örnek olarak z-ekseni etrafında dönme işlemcisi

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.145)$$

dönme matrisi ile verilir [7,8].

1.6.4. Hadamard Kapısı

En önemli tek kubit kapılarından biri de bir Hadamard kapısıdır çünkü bu kapı $|0\rangle$ ya da $|1\rangle$ kubitleri üzerine etki eder ve onları aşağıdaki gibi karıştırır;

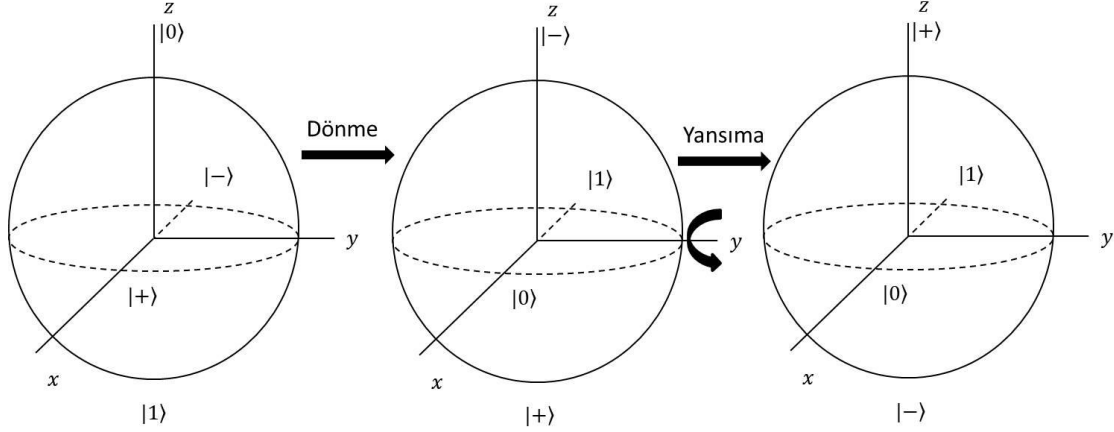
$$|0\rangle \rightarrow |+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}; \quad |1\rangle \rightarrow |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.146)$$

Gördüğümüz her durum Bloch küresi üzerinde farklı bir konuma sahiptir.

Hadamard kapısının tek kubit durumu üzerinde ekvator yüzeyinin bir yansıması şeklinde izlenen y-ekseni üzerinde $\pi/2$ kadar döndürülebilir. Bir dönüşte, dönme yönünün saatin tersi yönünde alındığı hatırlanabilir. Böylece $\pi/2$ ile y-ekseni etrafında bir dönüş verildiğinde, $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumları sırasıyla $|+\rangle$ ve $|-\rangle$ konumlarına gelir ve bunun için de Ha-

damard kapısı gereklidir. Ancak, Hadamard kapısının $|+\rangle$ durumu üzerine uygulandığında $|0\rangle$ durumunu vermesi ve aynı şekilde $|-\rangle$ durumu üzerine uygulandığında $|1\rangle$ durumunu vermesi gerekir. Ancak, yukarıdaki dönüş bu iki konumun yerini alır.

Ekvator düzlemindeki yansıma, o düzlemdeki durumları etkilemeden bu ikisi için doğru konumları verecektir.



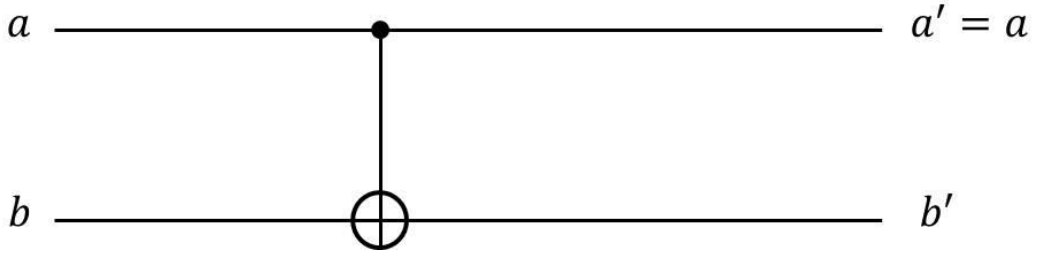
Şekil 2. Hadamard Kapısının Block Küresi üzerinde gösterimi

Hadamard kapısının matris gösterimi aşağıdaki gibidir [6,9].

$$H \text{ kapısı} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.147)$$

1.6.5. İki Kubit Kapıları

Klasik hesaplamada NAND kapısı evrensel kapı olarak etki eder ve her boole işlemcisi tek başına NAND kapısı kullanılarak gerçekleştirilebilir. Aynı şekilde, tüm kuantum işlemciler tek başına bir iki kubitlik kapı ve tek kubit kapılarının bir alt kümesi kullanılarak keyfi hassasiyet derecesiyle gerçekleştirilebilir. İkili kubit kapısı, *Kontrol NOT* ya da kısaca *CNOT* kapısı olan, evrensel kapı setinin bir üyesidir. Bu kapı iki giriş alır; bir kontrol ve bir hedef. Kontrol bit 0 olduğunda, hedef bit değişmeden kalacaktır ama kontrol bit 1 olduğunda hedef bit çevrilecektir.



Şekil 3. İki kubit üzerinde CNOT kapısı

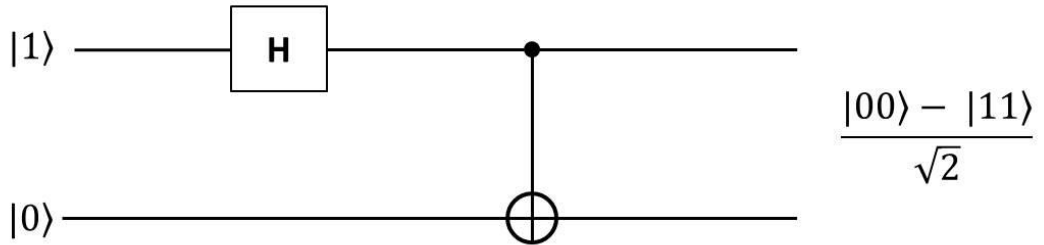
Böylece kontrol kapısının etkisi aşağıdaki gibi olur;

$$\begin{aligned} |0\rangle \otimes |b\rangle &\rightarrow |0\rangle \otimes |b\rangle \\ |1\rangle \otimes |b\rangle &\rightarrow |0\rangle \otimes |\tilde{b}\rangle \end{aligned} \quad (1.148)$$

burada \tilde{b} , b 'nin tamamlamak için kalır. İki kubit için baz olan hesaplamalı baz ile, CNOT kapısı için matris gösterimi;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1.149)$$

olarak verilir. Daha önce Bell bazından bahsettik. Bir hadamard kapısı ve bir CNOT kapısı kullanan kuantum devresi tasarlayabiliriz.



Şekil 4. Bell durumundaki bir kuantum devresi

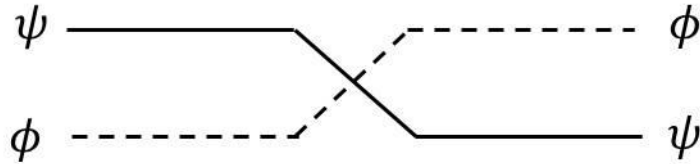
CNOT kapısının Bell durumu için dolanıklık sağladığına dikkat edelim. $|1\rangle \otimes |0\rangle$ ile başlayan ilk durumu bir hadamard kapısına maruz bıraktık. Bu kontrol bitini $\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ durumuna çevirir. Böylece, iki kubit durumu $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$ ile verilir, hala *çarpanlara ayrılabilir* ve dolayısıyla dolanık değildir. Ancak, CNOT kapısı bu iki kubit durumu için uygulandığında Bell durumu $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$ halini alır. Çünkü ilk terim değişmediğinden ikinci terim kontrol biti 1, hedef ise 0 olur. Bir ikili kubit kapısı kullanışlı bir SWAP kapısıdır ve iki durumu temsil eder:

$$U_s |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle \rightarrow |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle \quad (1.150)$$

Bu kapının işlemci gösterimi,

$$U_s = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 11| \quad (1.151)$$

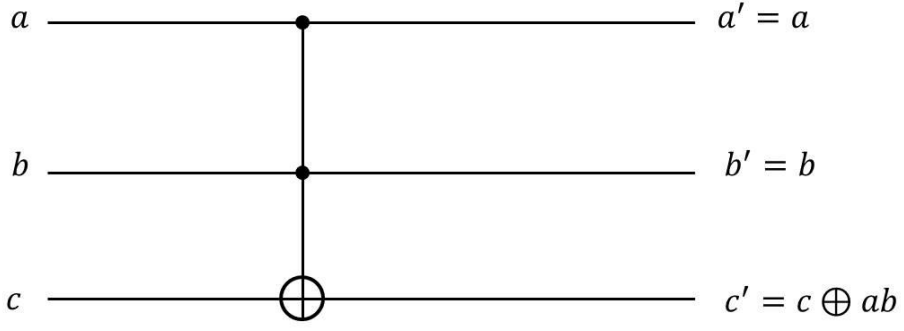
olur. Kapının şematik diyagramı aşağıdaki gibidir [7],



Şekil 5. Bell durumunun şematik gösterimi

1.6.6. Üç Kubit Kapısı

Bazı üç kubit kapıları çok gerekli olmamasına rağmen, yine de bir şekilde tanımlanabilir. Kontrol-Kontrol **NOT** ya da **CCNOT** kapısı diye bilinen bir kapı, iki kubiti kontrol ve üçüncü kubiti hedef olmak üzere üç kubite sahiptir. Bu durumda hedef biti sadece her iki kontrol biti 1 olduğu zaman döndürür. Bu kapı geri çevrilebilir ve klasik kapılarla taklit edilebilir. Ancak, bu klasik durumlardaki uygulamalarda çöp birikimi nedeniyle kullanılamaz. Bu kapı ayrıca Toffoli Kapısı olarak bilinir. Bir CCNOT kapısı aşağıdaki gibi gösterilir;



Şekil 6. Toffoli Kapısı

Bu gösterimde \oplus sembolü 2 modül ekleme işlemi için konulmuştur. Bu kapı için işlemci temsili;

$$U_{CCNOT} = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| \otimes I + |11\rangle\langle 11| \otimes X \quad (1.152)$$

olur. Burada işlemci yukarıdaki işlemin yazılı olduğu sırada üç kubit üzerine etki eder, yani, AND sadece 1 alanı hedeflerini üzerine işler. Daha sonra sadece hedef bit döndürülür. Toffoli kapısının gerçek tablosu aşağıdaki gibidir;

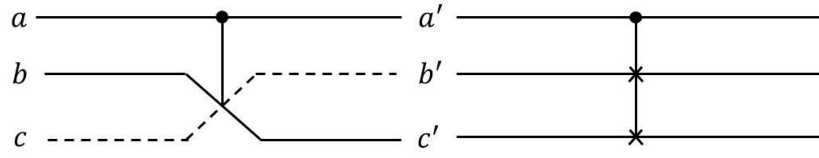
Tablo 1. Toffoli kapısının çalışma durumu

a	b	c	a'	b'	c'
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

CCNOT kapısının matris gösterimi ise, 8×8 'li bir matris ile verilir;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.153)$$

Yine bir başka üç kubit kapısı kullanışlı kontrol Swap (CSWAP) kapısıdır. Bu kapı eğer kontrol bit 1 ise, iki hedef bitini değiştirir. İki eş değer şematik kapı gösterimi aşağıdaki gibidir;



Şekil 7. CSWAP kapısı

Bu kapı ayrıca *Fredkin Gate* olarak bilinir. Fredkin kapısının gerçek tablosu aşağıdaki gibidir;

Tablo 2. CSWAP (Fredkin Gate) kapısının çalışma durumu

a	b	c	a'	b'	c'
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

1.7. Kuantum Bilgi ve Hesaplama Kuantum Devreleri

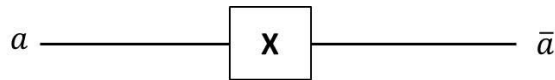
Bazı kapılar boole işlemcileri tarafından ifade edilebilen “*Evrensel Kapılar*” olarak düşünülebilir. Bu bazı evrensel kapı setleri aşağıdaki gibi ifade edilir [7];

1. Tüm tek kubit kapıları ve CNOT kapısı
2. CNOT, Hadamard, T kapısı ve X kapısı
3. Toffoli ve Hadamard

Bir kuantum devresi girdileri, bu girdileri kuantum devreye maruz bırakmayı, çıktı almayı ve çıktının ölçümünü yapmayı içerir. Devre, kuantum kayıtları üzerinde, kuantum işlemcilerin ardaşık uygulamalarını oluşturur. Kuantum kayıtlar genelde, kuantum durumların lineer kombinasyonlarıdır. Şemada kuantum devreleri, klasik bir devrede tellere benzeyen düz çizgiler ile bağlanırlar. Bununla birlikte, şemada işlem sağdan sola doğru bir yol izler. Bağlantı fiziksel tellere ihtiyaç duymaz ancak fiber bağlantılara ya da kablosuz bağlantı elemanlarına ihtiyaç duyar. Kapılar içlerinde sembollerin bulunduğu bloklarla temsil edilir. Klasik devrelerin aksine, döngüye yani geri bildirimine izin verilmez diğer bir deyişle, mantık akışı tek yönlüdür. FAN-IN işlemcisi (kapının tek bir çıkışa yol açmak için birden fazla girdi aldığı durumlarda) geri çevrilebilir olmayan işlemlere izin vermez. Aynı şekilde FAN-OUT işlemcisi de (bir çıkışın birden fazla yüke bağlı olduğu) esas olarak aynı çıktının kopyalanması, *Kopyalama Yok* Teoremin ihlali anlamına geleceğinden, buna izin vermez. Açıkça belirtilmediği sürece, kubitler hesaplamalı bazdadır [7,9].

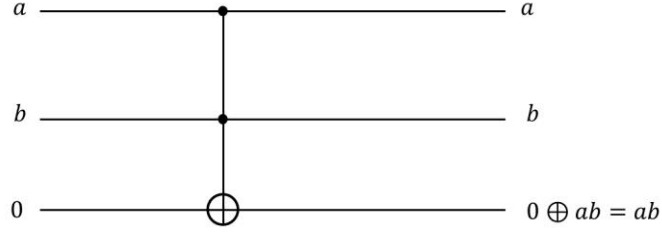
1.7.1. Klasik Mantık Kapılarının Uygulanması

NOT kapısı basitçe, bir X-Kapısı olarak temsil edilir. XOR ya da eklenen 2 modül, sadece hedef kayıta çıktı olan iki girdi için XOR’un sonuçları ile CNOT kapısıdır. İki alternatif devre, aşağıdaki XOR kapısını üretmek içindir ve biri için CNOT diğeri için ise CCNOT kapısı kullanılır.



Şekil 8. NOT kapısı

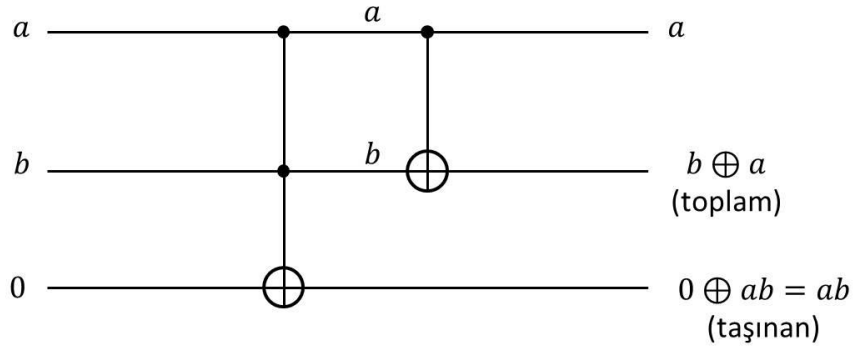
CCNOT kapısını kullanan klasik AND gösterilebilir. Burada iki girdi, iki kontrol bitidir. Hedef başlangıçta bit 0 olarak ayarlanır, böylece AND işleminin sonucu hedef kaydında ortaya çıkar.



Şekil 9. CCNOT kapısı

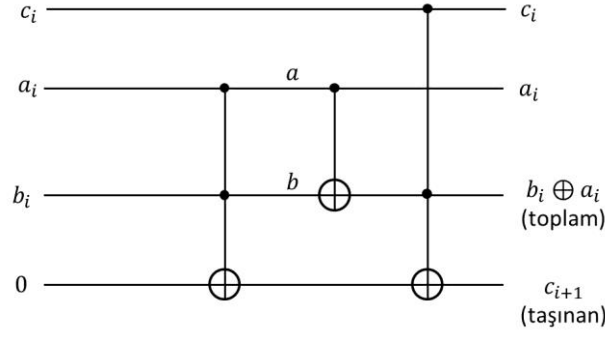
Bir Half-Adder ve Full-Adder devreleri için, kuantum devreleri verelim. Half adder durumunda, iki tek bit, bir kayıta eklenmenin sonucu ve sadece eklenen her bir bit 1 olduğunda, bir başka kayıta depolandığında ortaya çıkan olası bir taşıma sonucu eklenir. Devre bir CCNOT ve CNOT kapısı kullanır.

Hedef bit, başlangıçta 0 olarak ayarlı kaynağın taşınması sonucundadır. Toplam kontrol kayıtlarının birinin içinde ki çıktıdır. (hedef ve CNOT kapı kontrolünü değiştirerek ikisini birden kullanabilirdik).



Şekil 10. CCNOT ve CNOT kapılarının bir kuantum devresinde kullanımı

Full-Adder devresi önceki adımdan c_i ile beraber a_i ve b_i iki bitine sahiptir. Toplam, ilk iki bitten birine göre depolanırken, bir sonraki seviyeye c_{i+1} , başlangıçta 0'a ayarlanan bir kahin (ancilla) bitinde depolanır.

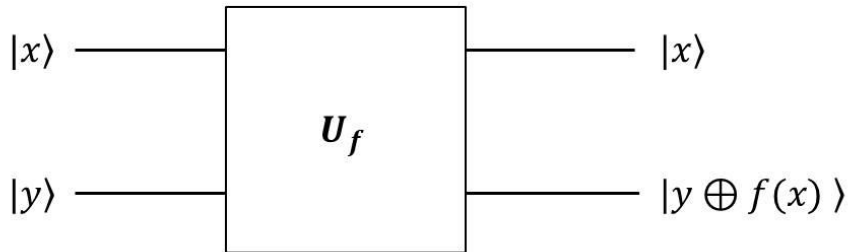


Şekil 11. Full-Adder devresi

1.7.2. Kahin (Oracle)

Kuantum hesaplamının gerekli bir bileşeni Kahin (Oracle) olarak bilinir. Bir kahin klasik bilgisayardaki bir altyordama ihtiyaç vardır. Benzer bir yolla, bir bilgisayarda bir fonksiyonun hesaplanması, bir kahin tarafından yapılır ve fonksiyonun hesaplanması için birim dönüşümler hakkında bilgiye sahip olmak gerekir.

Kahin, girdi olarak işlevin hesaplanması için gerekli verileri alan ve işlevin değerini başlangıçta $|0\rangle$ ifadesine kadar olan bir hedef kayıt defterine veren bir kara kutu gibidir. Burada dikkat edilmesi gereken bazı noktalar vardır. İlk olarak, paralellik sayesinde kahin girdilerin büyük bir sayısı için fonksiyon aynı anda hesaplanabilir. Bunun yanında, fonksiyonun bir ölçümü yapıldığında, hesaplanan fonksiyonlar arasından rastgele bir çıktı alınabilir. Girdi yazmacı filtrelenmiş işleve karşılık gelen tüm bu durumların doğrusal bir kombinasyonunu içerebilir. Ayrıca, eğer hedef yazmacı 1'e ayarlanırsa, fonksiyonun kendisi yerine fonksiyonun tamamlayıcısı alınabilir.



Şekil 12. Kuantum devresi üzerinde bir Kahin (Oracle) gösterimi

Bir örnek olarak, herhangi bir n-kubit girişine karşılık gelen belirli bir işlevi hesaplamak istediğimizi varsayalım. $|00 \dots 0\rangle = |0\rangle^{\otimes n}$ olarak kurulan bir giriş yazmacı ile başlayabilir. Bu boş durumların her biri bir Hadamard kapısı vasıtasıyla geçilirse, n-kubitli baz durumunun düzgün doğrusal kombinasyonunu aşağıdaki gibi buluruz [7];

$$\begin{aligned} |0\rangle^{\otimes n} &= |0\rangle \otimes |0\rangle \dots |0\rangle \rightarrow \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \dots \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_x |x\rangle \end{aligned} \quad (1.154)$$

Eğer bu kehanette beslenirse, fonksiyon n-kubit hesaplamalı bazının tüm durumları için eşzamanlı hesaplanabilecektir.

1.7.3. Bir Kuantum Yazmacının Durumu

Klasik bir Turing makinesinde, bir yazmacın durumu herhangi bir zaman da sabitlenir. Örnek olarak, eğer 3 bitlik bir yazmaç düşünürsek, durumların her biri: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 ve 111 olabilir. Kıyas yoluyla, n-bitlik bir klasik yazmaç, 2^n değerlerinin biri tarafından tanımlanan durumların herhangi bir anında olabilir.

Aksine, n-bitlik bir kuantum yazmaç tüm bu durumlarda aynı anda olabilir. Kuantum yazmacın durumu 2^n boyutlu kompleks uzayda bir vektördür. Tek kubitin genel durumu $\{0,1\}$ baz vektörü açısından aşağıdaki gibi yazılır:

$$|\psi_1\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1.155)$$

burada $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ olur. İki boyutlu Hilbert uzayında bir vektöre bakılabilir. n-kubitin genellemesi basittir. 2^n boyutlu kompleks vektör uzayının belirtilen bazı olan ket $\{i_k\}$, keyfi bir $|\psi\rangle$ ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{2^n-1} w_k |i_k\rangle \quad (1.156)$$

burada w_k , k –inci baz durumu için kompleks yük faktörüdür ve

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} |w_k|^2 = 1 \quad (1.157)$$

ile verilir. Böylece n-kubit ile bir kuantum yazmaç 2^n kompleks sayılarının belirlenmesini gerektirir. 2^n durumlarının süperpozisyonunun depolanan durumlarının olasılığı aynı zamanda üstel olarak büyük miktarda bilgi klasik bilgisayarın aynı boyutlu yazmacıyla karşılaştırıldığında bir kuantum bilgisayar belleğinde saklanabilir.

1.7.4. Kuantum Paralellik

Bir hesaplama, bir x girdisini alıp, bir $f(x)$ çıktısını üretmeyi gerektirir. Kuantum bilgisayarda, bu işlemler birimsel işlemcilerle yapılır. Eğer girdi n kubitte sahip ve çıktı m kubit olursa;

$$f(x) = \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^m \quad (1.158)$$

olur. Gerçek hesaplamanın birçok yazmacı kullanmayı gerektirmesine rağmen, n-kubitlik bir girdi yazmacı ve m-kubitlik bir çıktı yazmacı birlikte hesaplamanın sürecini göstereceğiz. Hesaplamanın süreci:

$$U\{|x\rangle_n |0\rangle_m\} = |x\rangle_n |f(x)\rangle_m \quad (1.159)$$

ile gösterilir. Burada $|0\rangle_m$ çıktı yazmacının ilk boş durumunu gösterir. Bir U işleminin bir girdi yazmacı üzerinde 2^n durumunun bir süperpozisyonunu içermesi gerekir.

$f(x)$ 'in hesaplanması tek bir hesaplama adımında yapılır ve $f(x)$ değeri tüm girdi değerlerine uyar, yani;

$$U\left(\sum_x |x\rangle |0\rangle\right) \rightarrow \sum_x |x\rangle |f(x)\rangle \quad (1.160)$$

tüm $f(x)$ değerleri hakkında bilgi içerir.

Bu klasik paralel bir bilgisayarda olandan farklıdır, burada işlemler problemi hesaplaması birbirinden bağımsız olarak yapılabilecek farklı bölümlere bölerek yapılır. Farklı işlemciler tarafından böyle paralel hesaplamasının sonucu daha sonra sorunun nihai çözümüne ulaşmak için birleştirilir.

Kuantum mekaniğinde, paralellik bir seri makinedeki paralel hesaplamada olduğu gibidir ve doğaldır. Fonksiyonların değerlendirilmesi bir *kahin* tarafından yapılır, bu kahin esasen bir siyah kutudur ve bu siyah kutu klasik bir alt programa benzeyen hesaplama detaylarını gizler.

1.7.5. Dalga Fonksiyonunun Çöküşü ve Ölçme Süreci

Bir $f(x)$ fonksiyonu hesaplaması yapıldıktan sonra, verilen bir $|x\rangle$ 'e uyan $f(|x\rangle)$ 'in değerinin bilinmesi istenir. Klasik bilgisayarda, bu değeri çıktıdan kolayca okuyabiliriz. Değer okuma süreci herhangi bir şekilde çıktı yazmacını bozamaz.

Diğer yandan, bir kuantum bilgisayarda, bunu yapmanın açık bir yolu yoktur, ölçme süreci yapılırken, gözlenebilir öz ketlerden birinin ölçülmesi sistemi bozar. $|x\rangle$ girdi durumu, $|w_k|^2$ olasılıkla $|i_k\rangle$ durumunun çeşitli durumlarının lineer bir kombinasyonu olduğunda, bir ölçüm yapılır, $|w_k|^2$ olasılıkla $f(|x\rangle)$ durumu bulunur. Belirli durumun ne olduğunun tahmin edilmesinin bir yolu olmadığı için, durum, ölçümün bir sonucu olarak çökebilir. Durum rasgele bir girdili bir klasik bilgisayarda yapılan hesaptan farklı değildir.

1.7.6. Dolanıklık

Eğer çıktı yazmacının bir ölçümü yapılırsa, $x = r$ olarak bilinen x girdi değerlerinden sadece birine uyan $|f(x)\rangle$ 'nin değerinin m kubitleri geri gelecektir. n -kubit girdi yazmacı bazı r çıktılarına veren x değerlerinin tümünün bir süperpozisyonuna sahip olacaktır. Fonksiyonun bire-bir olması durumunda, r çıktısıyla sonuçlanan x 'in değerini alacaktır.

Kuvvetle bağlı yani dolanık olan m bit çıktı yazmacı ve n bit girdi yazmacı gerçekte yukarıdakinin bir sonucudur. Her iki yazmacın içeriğinin bir ölçümü yapıldığında, diğer yazmacıların içeriği karşılık gelen değere çökebilir. Bu durum, durumların birbirleriyle etkileştiği ve sonuç durumlarını etkilediği anlamına gelmektedir. Kuantum mekaniğinin önemli bir sonucu olan dolanıklık, kuantum bilgisayarda da aynı davranışı sergilemektedir.

1.7.7. Kuantum Kopya Yok (No-Cloning) Teorisi

Her bir yazmacın ölçümünün yapılmasından önce, iki yazmacın birkaç özdeş kopyası yapılırsa, kopyalar üzerinde ölçüm sürecinin tekrarlanmasıyla ilgilendiğimiz $|x\rangle$ durumu için $f(x)$ 'in değerini alabiliriz. Bununla birlikte, kuantum kopya yok (no-cloning) teorisine göre, keyfi bir kuantum durumu kopyalanamaz [8].

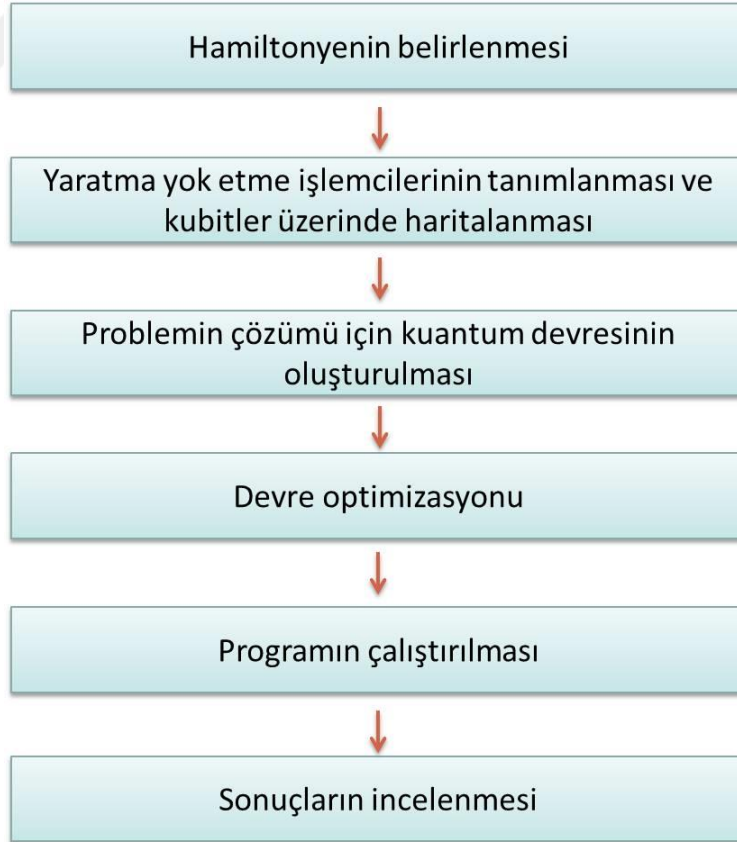


2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Programın Hazırlanması

Kuantum bilgisayarlarda hesaplama yapmak için bulut erişim yöntemlerinin kullanımı yaygındır. Donanım olarak gelişmiş, büyük ve maliyetli yapılara sahip olan bu bilgisayarlar için üretici olan firmalar bulut erişim yöntemiyle bilgisayarlar üzerinde hesaplama yapmak isteyen kullanıcılara olanak tanımakta ve bilgisayarların gelişmesine katkı sağlamaktadır.

Çalışmamızda bu bulut erişimini IBM-Q bilgisayarı üzerine yönlendirerek hesaplamamızı Python-3 temelinde hazırladık. Ubuntu’da Python-3 kurduktan sonra Qiskit üzerinde API-key yardımı ile IBM-Q bağlantımızı kullanarak, IBM kuantum bilgisayarında hesaplama kabiliyetini test ettik.



Şekil 13. Çalışma akış diyagramı

Hamiltonyen hesabı için gerekli olan XACC çatısı altında VQE bandını kurduk ve ExaTENSOR (tensör cebirinin programda çalıştırılabilmesi için gerekli olan matematik kütüphanesi [10] işlemcisi altında döteryum için hamiltonyen hesaplarını gerçekleştirdik. Programı tamamlamak için bulut erişimini sistem içerisine bütünleştirip NQVM üzerinde sanal hesaplamaların, gerçek kuantum bilgisayar ile uyumunu gözlemledik.

```
@ubuntu:~/Documents/xacc/python/examples$ python3 deuteriumH2_taylan.py
Energy = -1.7488648395384407
Opt Angles = [0.5944175451660157]
[12.25029, 13.298449795800014, 13.54563131606458, 12.965048607656563, 11.6196168
1570089, 9.6551343513812, 7.284483371792636, 4.764560695013601, 2.36843904370210
9, 0.3557753784359396, -1.055326962958848, -1.7119531462833297, -1.5429475359692
93, -0.5666245122865047, 1.111216175936417, 3.308754455749824, 5.787852956216252
, 8.279862887633517, 10.51473630641442, 12.25029]
```

Şekil 14. Döteron Hamilyonteninin ikinci durumu için aldığımız çıktı

2.2. Efektif Alan Teorisi

Yaklaşık 1 GeV 'den daha büyük kütleli hadronların kompleks spektrumlarını yani nükleon enerjilerini açıklayan düşük enerji, nükleer fiziğin ideal bir çalışma aracı olarak ortaya çıkmıştır. Düşük enerji, hadronik fiziğin efektif alanının başarılı bir uygulamasına örnek olarak *kiral (chiral) pertürbasyon* teorisini gösterebiliriz.

Efektif alan teorileri kuvvetli etkileşme fiziği ile ilgili bir standarttır. Ana fikir ilgili serbestlik derecelerinin yaratan ve yok eden kuantum [11] kromo-dinamik alanların simetrisi dışında ilgili en genel lagranjyeni oluşturmaktır. Efektif lagrenjyenden ortaya çıkan terimlerin sayısını sınırlandıran kuvvet ile açılım şemasını içerir. Pionun kendisini kendi etkileşmelerinin açılımı için kullanılan efektif lagrenjyen durumunda tipik momentum kuvvetinde ($p \sim m_\pi$) ρ kütlesi mertebesinde tipik hadronik skalaya bölünür. Artan mertebede dallanma diyagramı gerek iki türevi veya verteksdeki hafif kuark kütle matrisinin bir terimini içerir. Bir sonraki mertebede, dallanma seviyesinde dört türev işlemcisinin hepsini içerir ve aynı zamanda vertekslerdeki ilgili işlemcilerin halka diyagramlarını vb. içerir. Bu pertürbatif açılım kiral pertürbasyon teorisi olarak bilir ve nükleon-pion etkileşimlerine uygulanmaktadır. Bununla beraber nükleer fiziğe kiral pertürbasyon teorisini uygulama çabaları bir takım problemlerin oraya çıkmasına neden olmaktadır. Örneğin bir 1S_0 ve 3S_1

nükleon nükleon (NN) saçılma genliklerinde büyük saçılma mesafeleri gibi zorluklarla karşılaşmaktadır.

Pionsuz efektif alan teorisi ise çok hafif çekirdeklerin yapı ve reaksiyonlarını tanımlamak için kullanılır. Efektif alan teorisinin bu türü halo çekirdekleri ve seyreltik fermi gazlarını incelemek için de uygulanmaktadır.

2.3. Osilatör Bazında Pionsuz Efektif Alan Teorisi

Pionsuz efektif alan teorisi şu makalelerde [11,13] ayrıntısıyla verilmiştir. Pionsuz efektif alan teorisinde nötronlar ve protonlar ilgili serbestlik derecelerine sahip olup ayrılma skalası pion kütlesiyle verilir. Boyut analizini yapacak olursak momentum uzayındaki nükleon nükleon (NN) etkileşimleri,

$$\begin{aligned}
 V_{NN}^{LO}(\vec{P}', \vec{P}) &= C_s + C_T \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \\
 V_{NN}^{LO}(\vec{P}', \vec{P}) &= C_1 q^2 + C_2 k^2 + (C_3 q^2 + C_4 k^2) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \\
 &\quad - i C_5 \frac{\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2}{2} * (\vec{q} \times \vec{k}) + C_6 (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q}) \cdot (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q}) + C_7 (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k}) \cdot (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k})
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

ile verilir. Burada yaklaşık \vec{P}' ve \vec{P} sırasıyla giden ve gelen bağıl rölatif momentumlar olup momentum transferi için $\vec{q} = \vec{P} - \vec{P}'$ ve ortalama momentum için $\vec{k} = (\vec{P}' + \vec{P})/2$ değerlerini yazarız. Düşük enerji katsayıları (LEC) C_i olarak gösterilmiştir. Zayıf bağlı döteron ve daha sıkı bağlı di-nötrondan dolayı tekli ve üçlü S dalgalarındaki büyük saçılma uzunlukları $\aleph \cong 40 \text{ MeV}$ ile gösterilen başka bir küçük momentum skalasının varlığını ifade eder ve bu *Kaplan-Savage-Wise (KSW) kuvvet hesaplamasına* yol açar. Tekli ve üçlü S kısmi dalgalarındaki sıralı terimlerin düşük enerji katsayıları $1/m\pi$ yerine $1/\aleph$ skalasıyla verilen uygun saçılma uzunluğuyla orantılı olma durumu beklenmekteydi çünkü aksi takdirde pion kütle setleri skalayı bozardı. her iki S dalgasının düşük enerji katsayılarının doğal olmayan boyutları onların, bir sonra gelen sıralı terim düzeltmelerinin farklı bir ele alınışını gerektirir. Böylece bir sonra gelen sıralı terimde girilen geri kalan etkileşmeler boyut analizinde KSW hesaplamasıyla ele alınır. Bir sonra gelen sıralı terim (NLO) pionsuz efektif alan teorisi için sadece sıralı mertebeye (LO) potansiyelli denklem (2.2) ve NLO potansiyelleri denklem (2.3), S dalgalarını,

$$\begin{aligned} V_{NN}^{LO}({}^1S_0) &= \tilde{C}_{1S_0} = C_S - 3C_T \\ V_{NN}^{LO}({}^3S_1) &= \tilde{C}_{3S_1} = C_S + C_T \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} V_{NN}^{NLO}({}^1S_0) &= C_{1S_0} (\vec{P}'^2 + \vec{P}) \\ V_{NN}^{NLO}({}^3S_1) &= C_{3S_1} (\vec{P}'^2 + \vec{P}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

ile verilir. Pionsuz efektif alan teorisi döteronun bağlanma enerjisinin yeniden elde edilmesinde ve N-N (nükleon nükleon) saçılması için efektif menzile açılımında kullanılabilir;

$$k \cot \delta_0(k) = -\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} r_0 k^2 + \dots \quad (2.4)$$

Bu S dalgasının saçılma genliği a_0 olarak ve efektif menzile değeri r_0 olarak tanımlar. Pionsuz efektif alan teorisi sıralı terimde saçılma uzunluğunu ve bir sonra gelen sıralı terimde efektif menzile verir.

$$V_{NNN} = \frac{cE}{F_\pi^4 \Lambda_x} \sum_{j \neq i} \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j \quad (2.5)$$

2.4. Kuantum Bilgisayar Üzerinde Atomik Nükleonların Hesaplanması

2.4.1. Hamiltonyen ve Uzay Modeli

Pionsuz efektif alan teorisini kullanarak hazırlanan döteryumun Hamiltonyeni,

$$H_N = \sum_{n, n'=0}^{N-1} \langle n' | (T + V) | n \rangle a_n^\dagger a_n \quad (2.6)$$

olarak yazılır [14]. Burada işlemciler a_n^\dagger ve a_n harmonik osilatör S dalgasının $|n\rangle$ durumunda bir döteryumu yaratıp yok etme işlemcileridir. Kinetik ve potansiyel enerjinin belirlenmesi için türetilen matris elemanları,

$$\langle n'|T|n\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \begin{bmatrix} \left(2n + \frac{3}{2}\right) \delta_n^{n'} - \sqrt{n\left(n + \frac{1}{2}\right)} \delta_n^{n'+1} \\ - \sqrt{(n+1)\left(n + \frac{3}{2}\right)} \delta_n^{n'-1} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\langle n'|V|n\rangle = V_0 \delta_n^0 \delta_n^{n'} \quad (2.8)$$

olur. Burada N boyut bazı için, $V_0 = -5,68658111 \text{ MeV}$ ve $n, n' = 0, 1, \dots, N - 1$ olur. $\hbar\omega = 7 \text{ MeV}$ ve potansiyel bir morötesi kesme olan $\lambda \approx 152 \text{ MeV}$ değerine sahiptir. Bu değer $Q \cong 46 \text{ MeV}$ olan bağlı durum momentumundan iyi ayrılmıştır.

2.4.2. VQE Algoritması

Varyasyonel kuantum özdeğer çözümleyicisi (VQE: Variational Quantum Eigensolver) bir kuantum/klasik hibrit algoritma olup çoğu kez büyük H matrisinin özdeğerlerini bulmak için kullanılır.

Bu hibrit algoritma klasik bir optimizasyon halkasının içerisinde çalışan bir kuantum alt programdır. Bu kuantum alt program iki temel adıma sahiptir [15]:

- Kuantum durumunu hazırlanması $|\psi(\text{vec}(\theta))\rangle$
- $\langle \psi(\text{vec}(\theta)) | H | \psi(\text{vec}(\theta)) \rangle$ beklenen değerinin ölçülmesi

Varyasyon prensibi bu beklenen değeri sağlar ve daima H 'nin en küçük özdeğerinden daha büyük olur. Bu ilişki bize bu özdeğerin optimizasyon halkasında çalışması için klasik hesaplamayı kullanmamıza izin verir:

1. Anzast parametreleri $\text{vec}(\theta)$ 'yı değiştirerek beklenen değeri minimize etmek için lineer olmayan klasik bir optimizasyonu kullanmak,
2. Uygun değer bulununcaya kadar iterasyona devam etmek.

Pratikte VQE kuantum alt programlarının $\text{vec}(\theta)$ parametre setini baz alır ve uygun bir baz da ölçüm serisini gerçekleştirir.

2.4.3. UCC : Birimsel Çiftlenmiş Küme Yaklaşımı

UCC (Unitary Coupled Cluster) yaklaşımı kuantum kimyasındaki çiftlenmiş küme yönteminin benzer bir yaklaşımdır ve çoğu kez kuantum bilgisayarlarıyla bir moleküler sistemin hesaplanmasına uygulanır. En sık kullanılan tercih UCC tekileri ve çiftleri yaklaşımıdır ve

$$|\psi_{birimsel-CCSD}\rangle = U(\vec{\theta})|HF\rangle$$

$$U(\vec{\theta}) = \exp\left(T(\vec{\theta}) - T^\dagger(\vec{\theta})\right) \quad (2.9)$$

$$T(\vec{\theta}) = \sum_{ij} \theta_{ij} a_i^\dagger a_j + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \theta_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l$$

ifadeleri ile temsil edilir. Burada HF sistemi Hartree-Fock durumudur. Bu yaklaşım çoğu kez verilen bir moleküler hamiltonyenin taban durumu için iyi bir yöntemdir. Çünkü moleküldeki elektron düzeltmelerinin varlığını çok iyi bir şekilde tespit etmektedir [16].

2.4.4. Kubitler Üzerinde Döteron Modellemesi

Kuantum bilgisayarları Pauli matrisleri üzerinde modellenen kubitler ile çalışmaktadır (bir q kubit üzerindeki Pauli matrisleri X_q, Y_q, Z_q).

Döteryumun yaratılma ve yok edilme işlemcileri aşağıda verilen *Jordan-Wigner* dönüşümleri;

$$a_j \rightarrow \left(\prod_{i=1}^{j-1} -\sigma_z^i \right) - \sigma_-^j = (-1)^{j-1} \sigma_z^1 \sigma_z^2 \dots \sigma_z^{j-1} \sigma_-^j = (-1)^{j-1} \frac{\gamma_{2j-1} - i\gamma_{2j}}{2} \quad (2.10)$$

$$a_j^\dagger \rightarrow \left(\prod_{i=1}^{j-1} -\sigma_z^i \right) - \sigma_+^j = (-1)^{j-1} \sigma_z^1 \sigma_z^2 \dots \sigma_z^{j-1} \sigma_+^j = (-1)^{j-1} \frac{\gamma_{2j-1} + i\gamma_{2j}}{2}$$

kullanılarak Pauli matrislerinden türetilebilir [17],

$$\begin{aligned}
a_n^\dagger &\rightarrow \frac{1}{2} \left[\prod_{j=0}^{n-1} -Z_j \right] (X_n - iY_n) \\
a_n &\rightarrow \frac{1}{2} \left[\prod_{j=0}^{n-1} -Z_j \right] (X_n + iY_n)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Spin yukarı $|\uparrow\rangle$ durumu, $|n\rangle$ durumundaki döteryumun 0'ını spin aşağı $|\downarrow\rangle$ durumu ise 1'ini temsil eder. Tek parçacık durumuyla ilgilendiğimiz için pertürbasyon altında simetrisinin bir rolü bulunmaz. Döteryumun taban durum enerjisini hesaplamak için bu durum dikkate alınır. $N = 1, 2, 3$ için Hamiltonyenin taban durum enerjisinin değerlerini hesaplayıp, enerjiyi sonsuz boyutlu uzaya yansıtmak için kullanılır. $H_1 = 0,21829 (Z_0 - I) MeV$ ve taban durum enerjisi $E_1 = \langle \downarrow | H_1 | \downarrow \rangle \approx -0,436 MeV$ değerlerini denklem (2.7)'den elde ederiz. Burada I özdeşlik işlemi temsil eder [14].

$N = 2, 3$ için;

$$H_2 = 5,906709 I + 0,218291 Z_0 - 6,125 Z_1 - 2,143304 (X_0 X_1 + Y_0 Y_1) \tag{2.12}$$

$$H_3 = H_2 + 9,625 (I - Z_2) - (X_1 Y_2 + Y_1 Y_2) \tag{2.13}$$

bulunur. Hamiltonyenimizin üçgensel yapısının bağlı kubitlerin doğrusal bir zincirine verimli bir şekilde uygulanabileceği ve bu mevcut tasarımlara uygun olduğu görülmektedir. H_N Hamiltonyeninin simülasyonu $N - 1$ açılara ve N 'de lineer olan devre derinliğine ihtiyaç duyar. Sonsuz uzayda ekstrapolasyon için, Lüscher denklemine harmonik osilatör varyantını taban durum enerjisi için uygulayalım. Bu durumda taban durum enerjisi için,

$$\begin{aligned}
E_n &= -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(1 - 2 \frac{\gamma^2}{k} e^{-kL} - 4 \frac{\gamma^4 L}{k} e^{-4kL} \right) \\
&\quad + \frac{\hbar^2 k \gamma^2}{m} \left(1 - \frac{\gamma^2}{k} - \frac{\gamma^4}{4k^2} + 2w_2 k \gamma^4 \right) e^{-4kL}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

yazılır. Burada E_n eşitliğinin sonlu temel sonucu için $E_\infty = -\hbar^2 k^2 / (2m)$ ile birlikte küçük üstel düzeltmeler vardır. Denklem (2.14)'de $L = L(N)$, N boyutlu sonlu baz için etkin katı-kuyu yarı çapı, k bağlı durum momentumu, γ asimtotik normalizasyon katsayısı ve w_2 ise etkili alan parametresidir [14].

$N = 1,2,3$ için; $\hbar\omega = 7 \text{ MeV}$ osilatör temeli üzerinde, etkin katı-kuyu yarı-çapı $L(N) = 9,14 \text{ fm}$, $11,45 \text{ fm}$ ve $13,38 \text{ fm}$ değerlerini alır ve $N \gg 1$ için,

$$L(N) \cong \sqrt{(4N + 7) \hbar/(m\omega)} \quad (2.15)$$

ifadesine sahiptir. Taban durum enerjileri E_N 'ler, $N = 1,2$ durumları için k, γ ifadelerinin ayarlanmasıyla ilk $O(e^{-2kL})$ ve daha sonraki $Q(kL e^{-4kL})$ düzeltmelere tabi tutularak belirlenir.

```

7
8
9 # Get access to the desired QPU and
10 # allocate some qubits to run on
11 qpu = xacc.getAccelerator('ibm-q')
12 buffer = ibm.createBuffer('q', 2)
13
14 # Construct the Hamiltonian as an XACC-VQE PauliOperator
15 ham = xacc.getObservable('pauli', '5.907 - 2.1433 X0X1 - 2.1433 Y0Y1 + .21829 Z0 - 6.125 Z1')
16
17 @xacc.qpu(algo='vqe', accelerator=qpu, observable=ham)
18 def ansatz(q, t0):
19     X(q[0])
20     Ry(q[1], t0)
21     CNOT(q[1], q[0])
22
23 ansatz(buffer)
24

```

Şekil 15. H2 için yazılan kodun bir bölümü

$N = 3$ dahil edildiği zaman taban durum enerjisi ayrıca w_2 düzeltmelerini de içerir ve daha küçük $Q(e^{-4kL})$ düzeltmesini sağlar. Bu ekstrapolasyon tablo 3'de, matris köşegenleştirilmesinden gelen E_N enerjileri ile birlikte gösterilmektedir.

2.4.5. Varyasyonel Dalga Fonksiyonu

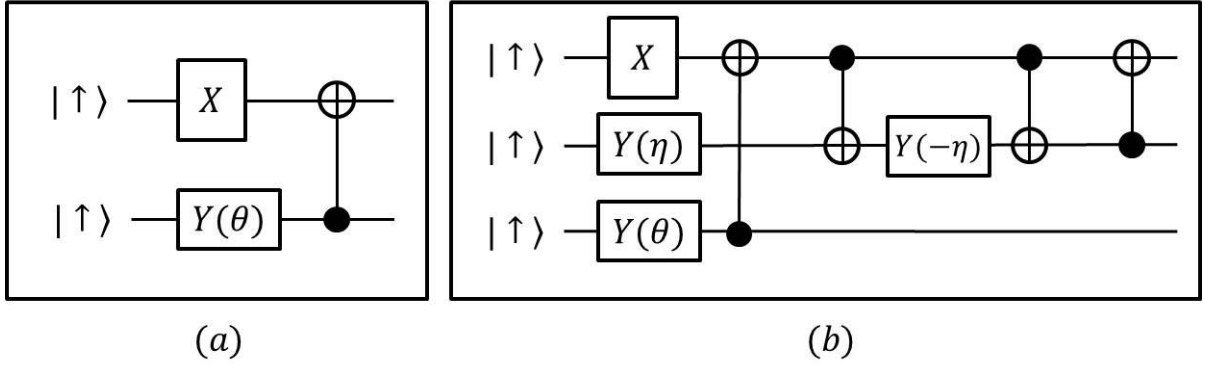
Kuantum hesaplamada bir Hamiltonyenin taban durum enerjisinin toplanması için yaygın bir yaklaşım olan UCC yaklaşımıyla VQE algoritması peş peşe kullanılır [15,16]. Denklem (2.12) ve (2.13) ifadelerinde Hamiltonyeni tanımlamak için bu ifadeleri kullandık. İki ve üç yörüngeyi dolanıklaştıran birimsel işlemcileri tanımlayalım.

$$U(\theta) = e^{\theta(a_0^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_0)} = e^{i\frac{\theta}{2}(X_0 Y_1 - X_1 Y_0)} \quad (2.16)$$

$$U(\eta, \theta) = e^{\eta(a_0^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_0) + \theta(a_0^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_0)} \approx e^{i\frac{\eta}{2}(X_0 Y_1 - X_1 Y_0)} e^{i\frac{\theta}{2}(X_0 Z_1 Y_2 - X_2 Z_1 Y_0)} \quad (2.17)$$

Denklem (2.17)'in ikinci bölümünde, üstlerin çarpımı olarak toplamın üstelini tanımladık ve atılan yüksek mertebeli sıra değişimlerin ilk çarpım durumuna $|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle$ etkilerinin önemsiz olduğunu gördük.

$U(\theta)$ ve $U(\eta, \theta)$ ifadeleri daha da basitleştirilebilir çünkü denklem (2.16)'deki gibi bir kubitin Y eksenini üzerindeki dönmesi, iki boyutlu alt uzaya da uygulanabilir ($|\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle$). Aynı şekilde denklem (2.17)'de alt uzay içinde yer alan ilk dönme dışında, yukarıdaki argüman ile basitleştirilebilir ($|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$).



Şekil 16. Kuantum bilgisayarda yazılan kodun devre şeması (a) İki Hamiltonyen durumu için - (b) Üç Hamiltonyen durumu için

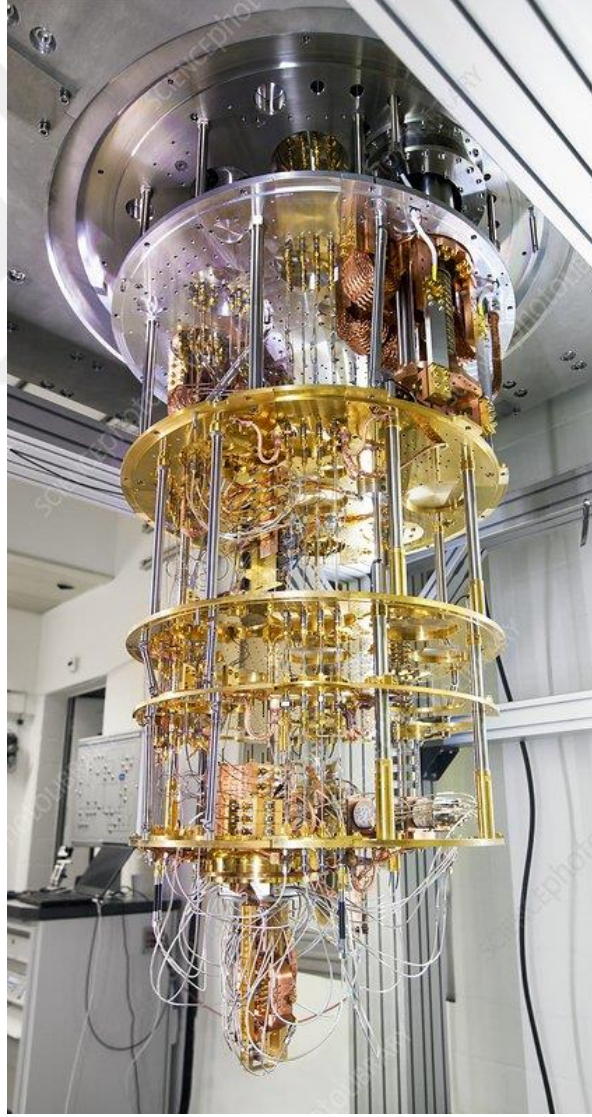
2.4.6. Kuantum Hesaplama

Dalga fonksiyonu yaklaşımımız için Hamiltonyenin beklenen değerini minimize eden kuantum klasik hibrit algoritması VQE'yi kullandık. Bu yaklaşım, Hamiltonyenin beklenen değeri, değişken bir dalga fonksiyonuna bağlı olarak bir kuantum işlemcisi üzerinde doğrudan değerlendirilir. Yani Hamiltonyende görünen her Pauli teriminin beklenen değeri kuantum çipi üzerinde ölçülür.

Kuantum mekaniksel ölçümler, istenmeyen ses girişleri (gürültü) de dahil olmak üzere tamamen izole sistemler olmalarına rağmen rastlantısaldır. Bu rastlantısallığı önlemek için QX5 (19Q) cihazındaki her ölçüm çok kez tekrarlanır. Örneğin, IBM gurubu yaptığı

bir çalışmada Beltz molekülü için yüzden fazla Pauli terimi kullandı ve hesaplamayı en az 10^5 kez tekrarlayarak bu molekülü 6 kubit ile incelediler [14].

Bizim hesaplamalarımız ise bu hesaplamalar ile iki kubit üzerinde H_2 molekülü için yapılan hesap arasında bir yerde bulunmaktadır. İstatistiksel hatalara ek olarak, deneysel beklenti değerlerini değiştirerek ve yeniden ölçeklendirerek sistematik ölçüm hatalarını işleme dahil etmiş olduk. Elde ettiğimiz sonuçlar QX5 için sırasıyla 16 ve 19 süper-iletken kubit içeren 19Q çiplerine bulut erişimiyle gerçekleştirildi. Burada bir kubit üç komşu kubitte bağlıdır. Denklem (2.14) ile verilen Hamiltonyen, her bir kubit için sadece iki bağıntı gerektirdiğinden bu yapı işlemlerimiz için doğrudur.



Şekil 17. IBM Kuantum Bilgisayarı [15]

3. BULGULAR VE İRDELEME

Şekil (14) üst tabloda $\langle H_2 \rangle$, şekil (14) alt tabloda QX5 için θ varyasyonel parametresinin fonksiyonu olarak H_2 Hamiltonyenine giren dört Pauli teriminin beklenen değerleri gösterilmektedir. Ölçümün özellikle enerjinin değişken minimum değeri civarında kesin sonuçlara yakın olduğu görülmektedir.

Bulut erişimi ve bazen meydana gelen ağ kesintileri enerji düzeyinin VQE ile enerji yüzeyinin doğrudan minimizasyonunu çok zorlaştırdı. Bunun yerine minimum enerjileri

$$\begin{aligned} E_2^{QX5} &\approx -1,80 \pm 0,05 \text{ MeV} \\ E_2^{19Q} &\approx -1,72 \pm 0,03 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (2.18)$$

olan minimum seviyeye yakın bir değere yerleştirerek belirledik.

Genel olarak QX5 ve 19Q kuantum devreleri ile elde edilen sonuçlarını eski cihazda daha büyük erişim süreleri olduğu düşüldüğünde kalite ve farkların oluşturduğu görülebilir. Bağımsız sonuçların her iki devre alanında birleştirilmesi,

$$E_2 \approx -1,74 \pm 0,03 \text{ MeV} \quad (2.19)$$

sonucunu vermektedir. Bu enerji bireysel sonuçların yanı sıra belirsizlikler içerisinde $-1,749 \text{ MeV}$ 'lik gerçek enerji değeri ile aynı seviyededir (Tablo 3). Sonsuz uzay sonuçlarını elde etmek için enerjileri

$$E_1 = 0,436 \text{ MeV} \text{ ve } E_2 = -1,74 \pm 0,03 \text{ MeV} \quad (2.20)$$

değerine ayarladık. k ve γ 'yı denklem (2.14)'daki ekstrapolasyon formülünün önemli ve daha az önemli terimlerini ayarlamak için kullandık.

$E_\infty = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ Tablo 3.'deki ilk ve daha sonraki ekstrapolasyon mertebesinde gösterilmiştir.

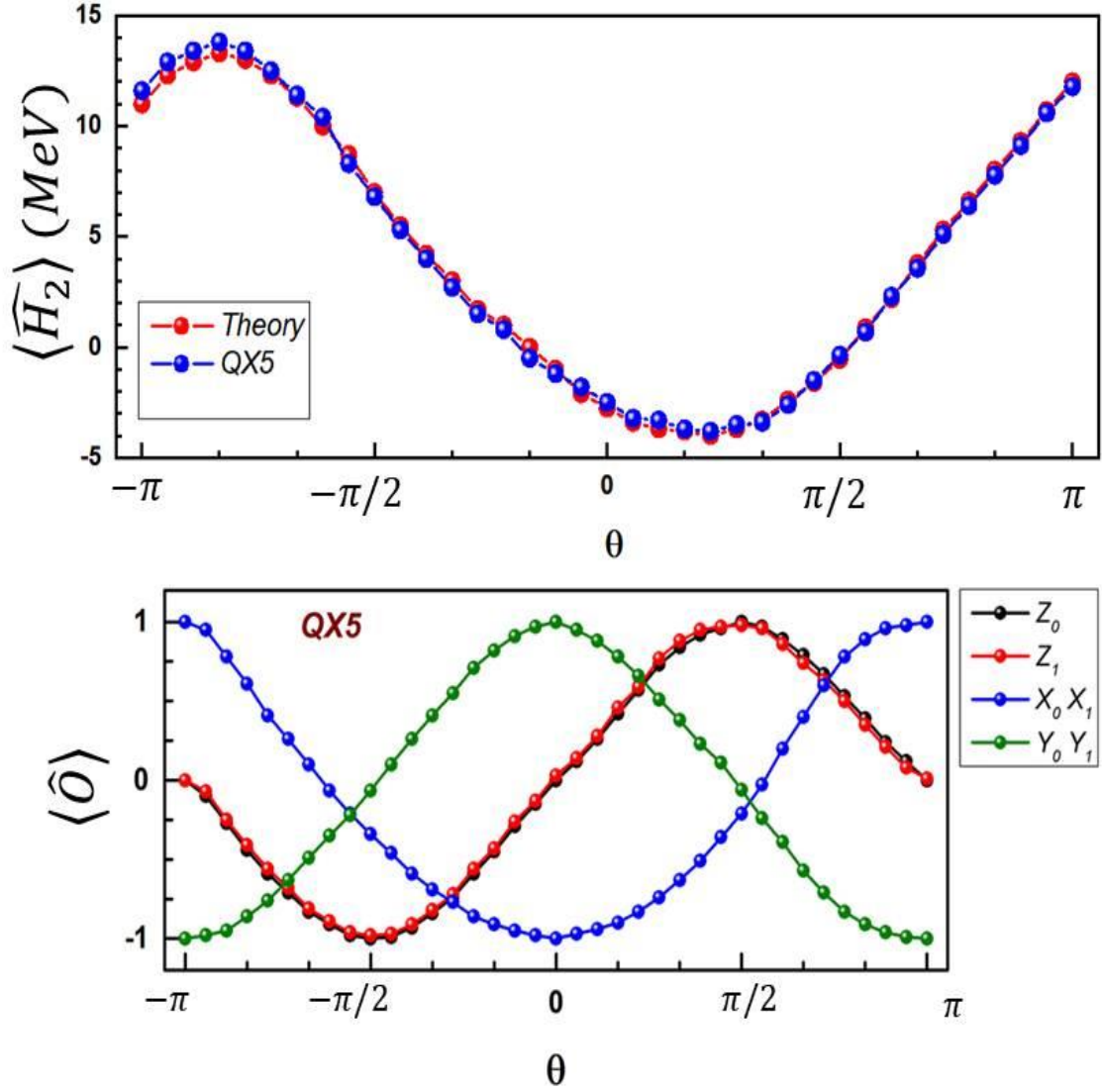
Bu sonuçlar tam köşegenleştirmeden elde edilen sonuçlarla belirsizlikler içerisinde uyumludur. Bunlara ilaveten $Q(kLe^{-4kL})$ sonucuna karşılık gelen döteronun taban enerji durumu olan $-2,22 \text{ MeV}$ 'den %2 oranında farklıdır.

Uyumu kontrol etmek için $N = 3$ durumunu dikkate aldık. Bu kuantum hesaplamalarının sadece QX5 üzerinde gerçekleştirdik. Denklem (2.13) Hamiltonyenin minimum enerjisini bulmak için iki açıyı optimize ettik. Kuantum devresi üzerindeki enerji beklenen değerini hesaplayarak bu minimum değeri sisteme uygulayacak şekilde belirledik.

Tablo 3. Matris köşegenleştirmesinden gelen döteronun enerji değerleri tablonun üst bölümünde verilmiştir. Alt tabloda ise kuantum hesaplama yöntemi ile kuantum bilgisayarda hesaplanan döteronun bağlanma enerji değerleri verilmiştir. $N=2,3$ kullanılan kubit sayısıdır. Diğer sütunlar döndürme durumları ile gerçek değere ulaşmak için kullanılan parametrelerdir.

Köşegenleştirmeden Gelen Gerçek E				
N	E_N	$O(e^{-2kL})$	$O(kLe^{-2kL})$	$O(e^{-4kL})$
2	-1,749	-2,39	-2,19	
3	-2,046	-2,33	-2,2	-2,21
Kuantum Hesaplamadan Gelen E				
N	E_N	$O(e^{-2kL})$	$O(kLe^{-2kL})$	$O(e^{-4kL})$
2	-1,74	-2,38	-2,18	
3	-2,08	-2,35	-2,21	-2,28

Bu minimizasyon problemi belirgin bir şekilde $N = 2$ için olandan daha çarpıcıdır. Çünkü artan sayıdaki kontrollü not (CNOT) kapıları daha fazla gürültü ve hata vermektedir. Ortaya çıkan hataları düzeltmek için sıfır-gürültü ekstrapolasyon hibrit kuantum-klasik hata yok etme tekniklerini kullandık. Sıfır-gürültü ekstrapolasyonu için Hamilton beklenen değeri $\langle \hat{O} \rangle$, $\langle \hat{O} \rangle(0)$ gürültüsüz limitine, iki kubit CNOT işlemcisiyle gürültüyü uyararak ekstrapole ettik. Gerçek dolanık hata modelinden dolayı bu iyi yapılandırılmaz ve bir genel iki kubit sistematik olmayan hata kanalını varsayalım. $\varepsilon(\rho) = (1 - \varepsilon)\rho + \frac{\varepsilon I}{4}$ Burada ρ yoğunluk matrisini göstermekte olup her bir CNOT için bir uygulamayı takip etmektedir. Bizim orijinal devremizdeki her bir CNOT kapısı için CNOT kapıları (gürültü özdeşlik kapıları) çiftlerini ekleyerek ε hata oranını yapay olarak azalttık. Burada r CNOT kapı tekrarlarının sayısı olmak üzere tüm gürültü modelimiz $r\varepsilon$ ile böylece parametrize edildi.



Şekil 18. Grafikte Hamiltonyenin teoriden gelen beklenen değeri ile kubit üzerinde alın beklenen değerin döndürülmelerinin karşılaştırılması, alt tabloda ise Pauli kapılarının döndürme altında beklenen değerlerinin karşılaştırılması gösterilmiştir.

4. SONUÇLAR

Gürültü beklenen değerler seti $\langle \hat{O} \rangle(r)$ deneysel olarak tanımlandı ve yine aynı ifadenin gürültüsüz benzerini $\langle \hat{O} \rangle(0)$ tahmin etmek için kullanıldı [32]. İki kubit Pauli bazında Krause ayrıştırma yöntemi sistematik olmayan hata kanalını CNOT işlemi kendi üzerine Pauli grubunu haritalar. Gürültü kanalının sıra değişimli olduğunu ve CNOT işlemcileriyle sıra değiştiğini belirtelim. r tane CNOT uygulandıktan sonra gürültü kanalı (c_x işlemcisiyle gösterildi),

$$\varepsilon_r(p) = (1 - r\varepsilon)CX_pCX + 1\varepsilon I/4 + Q(\varepsilon^2) \quad (2.21)$$

haline gelir [14]. Verilen bir Küçük CNOT hata oranı için kuadratik katkılar göz ardı edilebilir ve $\langle \hat{O} \rangle(r) = \langle \hat{O} \rangle(0) + xr$ formunun lineer regresyonu $X = \langle \hat{O} \rangle(0)\varepsilon$ eğimine sahiptir ve bu ifade gürültüsüz beklenen değerleri verir.

Minimum enerji değerini $E = -2,08 \mp 0,03 \text{ MeV}$ olarak bulduk ve bu belirsizlikler içerisindeki tam sonuçla uyumludur.

```
6
7 #IBMQ.enable_account('ba84e0bd8e48e3fdb97ea6114b5c25291bab311cac303ba756168bad'
8 #provider = IBMQ.get_provider(hub='ibm-q')
9
10
11 ibm = xacc.getAccelerator('local-ibm')
12 buffer = ibm.createBuffer('q', 2)
13
14 h2 = xacc.getObservable('pauli', '5.907 - 2.1433 X0X1 - 2.1433 Y0Y1 + .21829 Z0
15
16 h3 = h2 + xacc.getObservable('pauli', '9.625 - 3.913119 X1X2 - 3.913119 Y1Y2 - 3
17
18
19
20 xacc.qpu(accelerator=ibm, observable=h3)
21 def ansatz(buffer, t0, t1):
22     X(0)
23     Ry(t0, 2)
24     CNOT(2, 0)
25     Ry(t1, 1)
26     CNOT(0,1)
27     Ry(-t1, 1)
28     CNOT(0,1)
29     CNOT(1,0)
30
31 # Run VQE with given ansatz kernel
32 initAngle = .2
33
34 ansatz(buffer, initAngle, initAngle)
35
```

Şekil 18. Hamiltonyen-3 için yazılan kodun bir bölümü

$N = 3$ sonuçlarını dahil ettiğimizde ve denklem(2.14) ekstrapolasyonunu uyguladığımızda sonsuz uzay enerjisini buluruz. Sonuçlar tablo 3.'ün alt kısmında gösterdik. Ekstrapole edilmiş enerjilerin en düşük iki mertebedeki tam sonuçlarla uyum içerisinde olduğunu görmekteyiz. Bununla beraber $Q(e^{-4kL})$ için ekstrapolle edilmiş enerji %3'den daha büyük olmayan bağlanma enerjisi değerini vermektedir. Kuantum hesaplamadaki bu düşük fark, gerçek kuantum makinasının dış etmenlerden etkilenmesinden kaynaklandığını düşünmekteyiz.

Fermiyonlar için N tekil parçacığı içeren bir Hilbert uzayı N tane kubit içerir ve genel iki cisim Hamiltonyeni N^4 pauli terimi içerecektir. Böylece dalga fonksiyonu hazırlanması N^4 mertebesinde olacaktır. Bu durumda hatası düzeltilmiş kubitler üzerindeki tam birimsel çiftlenmiş küme hesaplamaları için merteye belirlemek karmaşık hesaplar gerektirmektedir.

5. ÖNERİLER

- Döterondan başka nükleer yapıların da enerji hesapları kuantum bilgisayar üzerinde yapılabilir.
- Hamiltonyen arttırılarak alınan sonuçların kesinliği geliştirilebilir.
- Artan Hamiltonyen hesabının doğuracağı çok sayıdaki Pauli matrisi için düzenleme yapılarak, matrislerin haritalanma süreçleri geliştirilebilir.
- Kuantum mekaniksel problemler yine kuantum bilgisayar devreleri üzerine kodlanarak, gelişmiş hesaplar üretilebilir.



6. KAYNAKLAR

1. Feynman, R.P., Simulating Physics with Computers, International Journal of Theoretical Physics, 21 (1982) 467-488.
2. Shor, W.P., Scheme for Reducing Decoherence in Quantum Computer Memory, Physical Review A, 52 (1995) R2493.
3. Grover, L.K., From Schrödinger's Equation to the Quantum Search Algorithm, American Journal of Physics. 56 (2001) 333-348.
4. Savran, I., Demirci, M. ve Yılmaz, A.H., Accelerating Shor's Factorization Algorithm on GPUs, Canadian Journal of Physics, 96,7 (2018) 759-761.
5. Lanyon, B. P., Whitfield, J.D., Gillett, G.G., Goggin, M.E., Almeida, M.P., Kasal, I., Biamonte, J.D., Mohseni, M., Powell, B.J., Barbieri, M., Aspuru-Guzik, A. ve White, A.G., Towards Quantum Chemistry on a Quantum Computer, Nature Chemistry. 2 (2010) 106.
6. Giuliano, B. ve Giulio, C., Principles of Quantum Computation and Information, 272, World Scientific, (2018)
7. <https://www.dipanghosh.com/quantum-computing>, Quantum Information and Computing. 10 Kasım 2019.
8. Vladimir, S., Practical Quantum Computing for Developers, 364, Apress, (2017)
9. Yılmaz, A.H., Kuantum Hesaplama Teorisi, Ders Notları, (Yayınlanmamış)
10. <https://www.osti.gov/biblio/1546763-exatensor>, ExaTENSOR. 10 Aralık 2019.
11. Bansal, A., Binder, S., Ekstrom, A., Hagen, G., Jansen, G. ve Papenbrock, T., Pion-less Effective Field Theory for Atomic Nuclei and Lattice Nuclei, Physical Review Letter., 98 (2018) 054301.
12. Kolck, U.V., Effective Field Theory of Nuclear Forces, Prog.Part.Nucl.Phys, (1999) 43.
13. Savage, M.J., 2002. Effective Field Theory in Nuclear Physics, AIP Conf. Proceeding 2002, 610, 118.
14. Dumitrescu, E.F., McCaskey, A.J., Hagen, G., Jansen, G.R., Morris, T.D., Papenbrock, T., Pooser, R.C., Dean, D.J. ve Lougovski, P., Could Quantum Computing of an Atomic Nucleus, Physical Review Letter. 120 (2018) 210501.

15. <https://grove-docs.readthedocs.io/en/latest/vqe.html> Variational Quantum Eigensolver (VQE), 07 Kasım 2019.
16. Peruzzo, A., McClean, J., Shadbolt, P., Yung, M.H., Zhou, X.Q., Love, P.J., Aspuru-Guzik, A., ve O'Brien, L.J., A Variational Eigenvalue Solver on a Photonic Quantum Processor, *Nature*, 5 (2014) 4213.
17. Ried, T., Jordan Wigner Transformations and Quantum Spin Systems on Graphs, Master's Thesis, Ludwig Maximilian University of Munich, Munich. (2013)
18. Bartlett, R.J. ve Musial, M., Coupled-Cluster Theory in Quantum Chemistry, *Rev. Mod. Phys.*, 79 (2007) 291.
19. Hagen, G., Papenbrock, T., Hjorth-Jensen, M., ve Dean, D.J., Coupled Cluster Computations of Atomic Nuclei, *Reports on Progress in Physics*, 77 (2004) 096302.
20. <https://www.sciencephoto.com/media/952771/view/ibm-q-quantum-computer-cryostat>, IBM Q Quantum Computer Cryostat, 13 Kasım 2019.

ÖZGEÇMİŞ

Taylan Başkan, 01.08.1988 yılında Yozgat'ın Yerköy ilçesinde doğmuştur. Aslen Trabzon ili Tonya ilçesindedir. İlkokulu babasının görevi dolayısıyla Siirt ve İstanbul olmak üzere çeşitli okullarda tamamlamıştır. Liseyi İstanbul Ali Kul Çok Programlı Lisesinde tamamlamıştır (2002-2005). Üniversite eğitimini Karadeniz Teknik Üniversitesi Fizik Bölümünde tamamlamıştır.

2016 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fizik Bölümünde yüksek lisans eğitimi-ne başladıktan sonra 2019 yılı şubat ayında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fizik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı.

12-14 Eylül tarihinde Trabzon'da düzenlenen "XI. INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUCLEAR STRUCTURE PROPERTIES" konferansında organizasyon komitesi üyeliği yaptı. 27-28 Nisan 2019 , ODTÜ Ankara'da "Üniversiteler Arası Fizik Öğrencileri Zirvesi" isimli konferansa katıldı. 03-05 Mayıs 2019 tarihinde Ankara'da "Nükleer Bilimler Lisansüstü Öğrenci Kongresi" etkinliğine katılarak "Kuantum Bilgisayarlarda Hesaplama" isimli çalışmasını sundu. Temmuz 2019 tarihinde Ukrayna Kiev'de II. INTERNATIONAL NUCLEAR SUMMER SCHOOL (CHERNOBYL and RIVNE NPP Technical Training Research) (National Scientific and Technical Center for Nuclear and Radiation Safety (SSTC NRS) of Ukraine, Energoatom, Odessa National Polytechnic University (ONPU) and Ankara University Institute of Nuclear Sciences) bilimsel etkinliğe katıldı. 04-06 Eylül 2019 tarihinde Trabzon'da düzenlenen "International Conference On Chemical Energy Semiconductor Photochemistry" kongresinde organizasyon komitesi üyeliği yaptı ve yine aynı kongrede, "Determination of the Gamma Ray Mass Attenuation Coefficient of HB(PAE-b-PCL-DI)-PU-OPC Composites Sorbed Se and Pb Atoms" başlıklı sunumunu gerçekleştirdi.

Linux işletim sistemi kullanabilmekte, Fortran, C, C++, Python, Qiskit, yazılım dillerini kullanabilmektedir. İngilizce bilmektedir. İleri excel eğitim sertifikası bulunmaktadır.

2015 yılında evlenmiştir. Akademi dışında özel sektörde çeşitli işlerde çalışmıştır.