KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TALEP MİKTARLARI AĞIR KUYRUKLU GAMMA-g SINIFINDAN DAĞILIMA SAHİP (s, S) TİPLİ ENVANTER MODELLERİN YAKLAŞIK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Büşra ALAKOÇ

OCAK 2020
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TALEP MİKTARLARI AĞIR KUYRUKLU GAMMA-g SINIFINDAN DAĞILIMA SAHİP (s,S) TİPLİ ENVANTER MODELLERİN YAKLAŞIK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

Büşra ALAKOÇ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16 / 12 / 2019
Tezin Savunma Tarihi : 10 / 01 / 2020

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Tülay KESEMEN

Trabzon 2020

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında
Büşra ALAKOÇ Tarafından Hazırlanan

TALEP MİKTARLARI AĞIR KUYRUKLU GAMMA-g SINIFINDAN DAĞILIMA SAHİP (s, S) TİPLİ ENVANTER MODELLERİN YAKLAŞIK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 17 / 12 /2019 **gün ve** 1832 **sayılı**
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU ....

Üye : Prof. Dr. Tülay KESEMEN ....

Üye : Prof. Dr. Selçuk Han AYDIN ....

Prof. Dr. Asim KADIOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma, (s, S) tipli stok kontrol modelinin Gamma-g sınıfından dağılıma sahip talepler altında matematiksel analizi amacı ile KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tez çalışması olarak yapılmıştır.

Bu tez çalışmasının hazırlanma süreci boyunca yardım ve yönlendirmeleri ile her an yanımda olan, tez konusunun belirlenmesinden sonuç aşamasına kadar emeği ve yol göstericiliği ile bana rehberlik eden danışman hocam Prof. Dr. Tülay KESEMEN'e teşekkür eder, en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Aynı zamanda tez çalışması boyunca bana yol gösteren, değerli görüş ve tavsiyeleri ile katkıda bulunan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU (KHANİYEV)'na teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca yüksek lisans eğitimim süresince her türlü destek ve yardımları ile yanımda olan RTEÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi Dr. Öğr. Üyesi Aslı BEKTAŞ KAMIŞLIK ve KTÜ İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü öğretim üyesi Doç. Dr. Orhan KESEMEN'e teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim-öğretim hayatımın her aşamasında maddi ve manevi desteklerini arkamda hissettiğim ailem başta olmak üzere daima sevgisi ve desteği ile yanımda olan Edanur BALAK, Eylül EMRAL ve Buse ÖZKES'e sonsuz teşekkür ederim.

Büşra ALAKOÇ

Trabzon 2020

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Talep Miktarları Ağır Kuyruklu Gamma-g Sınıfından Dağılıma Sahip (s, S) tipli Envanter Modellerin Yaklaşık Yöntemlerle İncelenmesi" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Tülay KESEMEN'in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 10/01/2020

Büşra ALAKOÇ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

TALEP MİKTARLARI AĞIR KUYRUKLU GAMMA-g SINIFINDAN DAĞILIMA SAHİP (s, S) TİPLİ ENVANTER MODELLERİN YAKLAŞIK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

Büşra ALAKOÇ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Tülay KESEMEN
2020, 65 Sayfa

Bu çalışmanın amacı, literatürdeki stok kontrol modellerinden biri olan (s, S) tipli stok kontrol modellerini ağır kuyruklu dağılımlara ait olan Gamma-g sınıfından dağılıma sahip talep miktarları ile incelemektir. Böylece (s, S) tipli modellerin ağır kuyruklu dağılımlar ile matematiksel analizinde yaklaşık yöntemler kullanılarak literatürdeki boşluğu doldurmak hedeflenmektedir. Talep miktarları ağır kuyruklu olan Gamma-g sınıfına sahip (s, S) tipli stok kontrol modellerini teorik olarak yaklaşık yöntemlerle incelemek ve taleplerde meydana gelebilecek beklenmedik dalgalanmaların bu modeller üzerindeki etkilerini tahmin edebilmek açısından önemlidir.

Bu çalışmada öncelikle ağır kuyruklu dağılımlara ait Gamma-g sınıfı hakkında detaylı bir literatür taraması verilecektir. (s, S) tipli stok kontrol modeli, Ödüllü Yenileme Süreci olarak adlandırılan yarı-Markov bir model ile temsil edilecek ve bu modeli ifade eden stokastik süreç matematiksel olarak inşa edilecektir. Yenileme sürecinde yenileme fonksiyonunu oluşturan rasgele değişkenler ağır kuyruklu dağılımlardan Gamma-g sınıfına sahip olduğunda Mitov ve Omey (2014) tarafından yenileme fonksiyonu için önerilmiş olan yaklaşık açılımlar kullanılarak, inşa edilen sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için yaklaşık açılımlara ulaşılacaktır. Daha sonra sürecin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremi ifade ve ispat edilecektir. Ardından ergodik dağılım fonksiyonunun n. mertebeden sonlu momentleri için açılımlar elde edilecektir.

Anahtar Kelimeler: (s,S) tipli stok kontrol modelleri, Ödüllü yenileme süreçleri, Yenileme fonksiyonu, Ergodik dağılım fonksiyonu, Ağır kuyruklu dağılımlar, Gamma-g sınıfı, Ergodik dağılımın momentleri, Zayıf yakınsama.

SUMMARY

INVESTIGATION OF INVENTORY MODEL OF TYPE (s, S) WITH ASYMPTOTIC METDODS WHEN DEMAND DISTRIBUTIONS ARE IN HEAVY TAILED GAMMA-g CLASS

Büşra ALAKOÇ

Karadeniz Technical University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Tülay KESEMEN
2020, 65 Pages

The aim of this study is to examine inventory model of type (s, S), one of the stock control models in the literature, with demand quantities distributed from Gamma-g class belonging to heavy tailed distributions. In this way, it is aimed to complete the lack in the literature by using approximate methods for mathematical analysis of inventory model of type (s, S) with heavy tailed distributions. In order to analyze the effects of unexpected fluctuations in demand on these models, it is important to investigate stock control models with heavy-tail demand quantities in the gamma class by approximate methods.

In this study, firstly, a detailed literature review about Gamma-g class of heavy-tailed distributions will be discussed. Then, an inventory model of type (s,S) will be represented with a semi-Markovian model called a renewal reward process. A stochastic process which expresses this model will be constructed mathematically. When the random variables that make up the renewal function in the renewal process have the Gamma-g class of heavy-tailed distributions, approximate expansions for the ergodic distribution function of the constructed process will be achieved using approximate expansions proposed by Mitov and Omey (2014). Then, an asymptotic expansion for nth order finite moments of the ergodic distribution function will be obtained. Finally, weak convergence theorem will be expressed and proved for the ergodic distribution function.

Keywords: Inventory model of type (s, S), Renewal reward process, Renewal function, Ergodic distribution function, Heavy tailed distributions, Gamma-g class, Moments of ergodic distribution, Weak convergence.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$a(x)\sim b(x)$	: $a(x)$'in $b(x)$'e asimptotik denkliği.
$B(a,b)$	: Beta fonksiyonu.
$E(X)$	: X rastgele değişkeninin beklenen değeri.
$E(X^n)$	: X rasgele değişkeninin $n.$ (başlangıç) momenti.
$F_1(x) * F_2(x)$	: F_1 ve F_2 fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımı.
$\bar{F}(x)$	: F_1 ve F_2 fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımı.
$\Gamma(x)$	: Gamma fonksiyonu.
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi.
$P(A)$	: A olayının olasılığı.
$Var(X)$	: X rastgele değişkeninin varyansı.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Yunancada tahmin etmek anlamına gelen “stokhastikos” kelimesinden köken alan Türkçeye “rassal” ya da “rasgele” olarak çevrilen stokastik süreç, zaman içerisinde rastlantısal olarak değişen fenomenler (hissse senedi fiyatları, internet trafiği, biyolojik popülasyonların çeşitli özellikleri v.b.) için matematiksel bir modeldir. Diğer bir deyişle zamanla olasılık kurallarına göre değişim gösteren bir süreçtir.

Stokastik süreçler ilk olarak 19. yüzyılın sonlarında finansal piyasalar ve Brown hareketini anlamaya yardımcı olmak için titizlikle incelenmiştir. 1900 yılında L. Bachelier borsadaki hisse senedi değerlerinin zamana bağlı olarak rasgele değişimini incelediği “The Theory of Speculation” adlı tezinde, günümüzde rasgele yürüyüş süreci olarak adlandırılan süreci kullanmıştır. Stokastik süreçler teorisinde ve onun uygulama alanlarında en çok karşılaşılan sınıfları yenileme, ödüllü yenileme, Markov süreçleri ve rasgele yürüyüş süreçleridir.

Yenileme süreci, Poisson sürecinin bir genellemesidir. Temel olarak olaylar arası geçiş süreleri birbirinden bağımsızdır ve Poisson sürecinden farklı olarak bu zaman süreleri aynı keyfi dağılıma sahip rasgele değişkenlerdir. Yenileme süreçleri literatürde en sık kullanılan envanter modellerden biri olan (s,S) tipli envanter modellerle ilgili problemlerin modelleme ve çözümünde önemli rol almaktadır. (s,S) tipli envanter modellerle ilgili mevcut literatürün büyük bir bölümü talep miktarlarının hafif kuyruklu ve sonlu varyanslı dağılıma sahip olması varsayımı üzerinde durmaktadır.

Hafif kuyruklu dağılımların incelenmesindeki yoğunluğun en önemli nedeni hafif kuyruklu dağılımların merkezi limit teoremini sağlamasına dayanmaktadır. Merkezi limit teoremi, anakütle dağılımı ne olursa olsun rasgele örneklemle alınan birim sayısının artmasıyla örneklem ortalamasının dağılımının normal dağılıma uyduğunu açıklayan teoremdir. Örneğin, 2017 yılında Türkiye’de doğum yapan kadınların ilk doğum yaşı ortalama 28,7 olarak belirlenmiştir. Bu veriler içerisinde ortalamadan çok büyük ya da çok küçük değerlerin bulunma ihtimali nadir görülür. Belirli bir ortalama değer etrafında kümelenen bu gibi veriler üreten süreçler hafif kuyruklu dağılımlara örnek olarak incelenir ve merkezi limit teoremini sağlamaktadır.

Tüm bunların yanında normal dağılım varsayımına uyum sağlamayan ve veri kümesi içerisinde sayısız çoklukta uç değerler bulunduran durumlar da vardır. Literatürde bu türdeki dağılımlara ağır kuyruklu dağılımlar denmektedir ve bu dağılımlar merkezi limit teoremini sağlamamaktadır.

Ağır kuyruklu dağılımlar üstel dağılımdan daha ağır bir kuyruğa sahiptir. Diğer bir deyişle kuyruk kısmı üstel dağılıma kıyasla daha yavaş sıfıra giden dağılımlardır. Ağır kuyruklu dağılımlar çok sayıda aykırı (çok büyük veya çok küçük) değere sahip olma eğilimindedir. Kuyruk ne kadar ağır olursa, bir örnekte aykırı değer elde etme olasılığı da o kadar yüksek olur. Eğer dağılımdan rasgele bir örnek alırsak genellikle ortalama değerden oluşan bir örneklem ile karşılaşmak muhtemeldir. Ancak bir veya daha fazla sayıda aykırı değerler olabilir. Örneğin, Türkiye'de yaşayan insanların yıllık gelir miktarlarından örnek alırsak verilerimizin büyük kısmı yaklaşık olarak 22 bin lira olacaktır. Ancak örneğimizde "Murat Ülker" gibi yılda birkaç milyar dolar kazanan kişileri de seçebiliriz. Bu büyük değerler örnek istatistiklerini saptırma eğilimindedir. Yukarıdaki örnekte örneklem ortalaması milyonlarca dolar olacaktır ve popülasyon ortalamasını küçümseyecektir. Benzer şekilde örnek varyansı da çok büyük olacaktır.

Gerçekleşme olasılığı düşük fakat gerçekleştiğinde etkisi yüksek olan olaylara sıra dışı ya da katastrofik olaylar denir. Bilindiği gibi dağılım fonksiyonunun kuyruk bölgelerinde gerçekleşme ihtimali düşük olaylara ait olasılıklar yer alır. Eğer kuyruktaki verilerle modellenen olaylar normal dağılımın kuyruk kısmındaki olaylara göre daha fazla gerçekleşme olasılığına sahipse ve bu olaylar meydana geldiklerinde etkileri büyük olan katastrofik olaylar ise bu veriler de ağır kuyruklu dağılımlar ile modellenir. Bu tür sıra dışı olaylara hayatın birçok alanında karşılaşıldığı için ağır kuyruklu dağılımların ve etkilerinin araştırılması son zamanlarda çok önemi bir çalışma alanı haline gelmiştir.

Bu çalışmanın amacı (s,S) tipli envanter modellerini ağır kuyruklu dağılımlara ait olan Gamma-g sınıfından dağılıma sahip talep miktarları ile incelemektir. Bu amaç ile öncelikle ağır kuyruklu dağılımlar ve $\Gamma(g)$ sınıfı hakkında detaylı bilgiler verilecektir. $\Gamma(g)$ sınıfından bazı temsilciler seçilerek (lojistik gibi), talep miktarlarının sırası ile bu temsilci dağılıma sahip olduğu varsayılacaktır. Bu varsayımlarla (s,S) tipli envanter modeli ifade eden sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için asimptotik açılımlar elde edilecektir. Daha sonra sürecin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremi ispat edilecektir. Ayrıca sürecin ergodik dağılım fonksiyonunun n. dereceden momentleri için asimptotik açılımlara ulaşılacaktır.

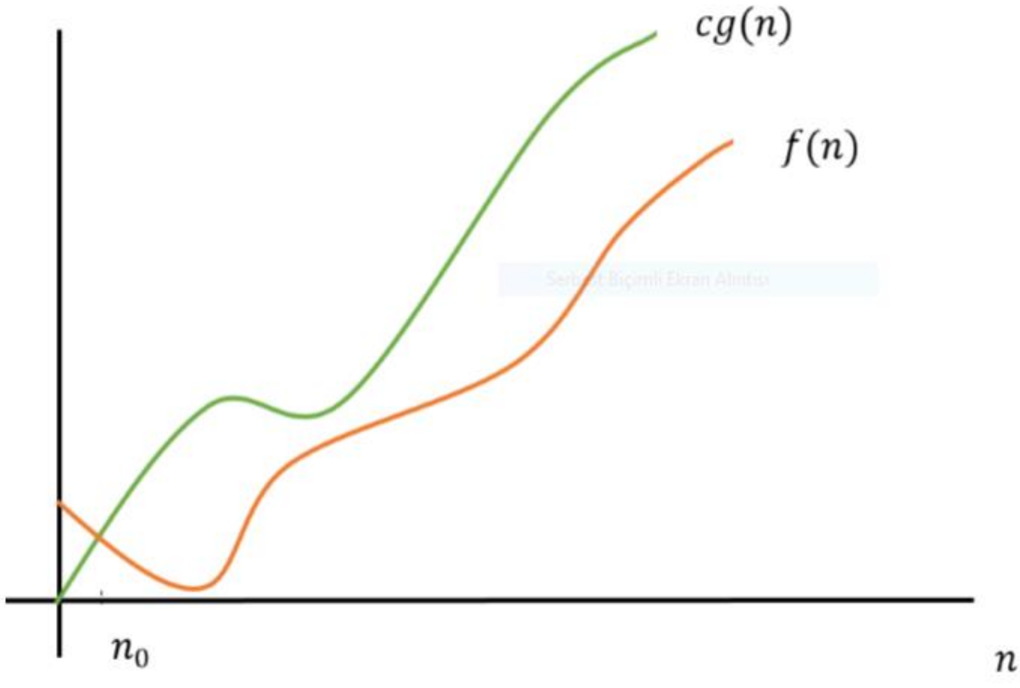
1.2. Temel Tanım ve Teoremler

1.2.1. Asimptotik Notasyonlar

Bu bölümde genellikle kesilmiş bir sonsuz serinin kalan terimini karakterize etmek için kullanılan bazı önemli notasyonlar ve asimptotik denklik kavramı kısaca ele alınacaktır.

Tanım 1.2.1.1. (Büyük O Notasyonu) [62] (Özdemir, 2017) $f(n)$ ve $g(n)$ reel sayılar kümesinin bir alt kümesi üzerinde tanımlanmış iki fonksiyon olsun. $n > n_0$ olmak üzere $|f(n)| \leq c|g(n)|$ olacak biçimde n_0 ve c keyfi sabitleri mevcut ise $f(n) \in O(g(n))$ denir.

Not 1.2.1.1. [62] $f(n) \in O(g(n))$ üyelik ifadesi yerine $f(n) = O(g(n))$ eşitliği kullanılabilir.



Şekil 1. *f(n)* ve *cg(n)* Fonksiyonlarının Karşılaştırılması

Şekil 1.'den de görülebilir ki yeterince büyük n değerleri için $f(n)$ fonksiyonunun değeri her zaman $cg(n)$ değerinden küçük olmaktadır. Bu nedenle $f(n)$ fonksiyonu $n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{R}$) için her zaman üstten sınırlandırılmıştır. ([28])

Örnek 1.2.1.1. $x^3 + x^2 = O(x^4)$ dir. Burada $f(x) = x^3 + x^2$ ve $g(x) = x^4$ olarak belirlenirse bu eşitliği ispatlamak için her $x > x_0$ için $x^3 + x^2 \leq cx^4$ olacak şekilde x_0 ve c sabitlerinin mevcut olduğu gösterilmelidir. $f(x)$ ve $g(x)$ pozitif değerli fonksiyonlar kabul edilirse $0 \leq x^3 + x^2 \leq cx^4$ dir. Buradan $0 \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \leq c$ yazılabilir ve $x_0 = 1$ ve $c = 2$ değerleri için eşitliğin sağlandığı görülür. Dolayısıyla $x^3 + x^2 = O(x^4)$ ifadesi doğrudur.

Not 1.2.1.2. [62] Fonksiyonun üst sınırı için daha kesin bir ifade isteniyorsa O notasyonu yerine o notasyonu kullanılır. o notasyonu $f(x)$ fonksiyonunun $g(x)$ fonksiyonundan çok daha yavaş büyüdüğünü ifade eder.

Tanım 1.2.1.2. (Küçük *o* Notasyonu) [36] $f(x)$ ve $g(x)$ reel sayılar kümesinin bir alt kümesi üzerinde tanımlanmış iki fonksiyon ve $g(x) \neq 0$ olsun. Eğer $x \to \infty$ iken

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$$

koşulu sağlanıyorsa $f(x) = o\big(g(x)\big)$ denir.

Tanım 1.2.1.3. (Asimptotik Denklik) [36] $f(x)$ ve $g(x)$ reel sayılar kümesinin bir alt kümesi üzerinde tanımlanmış iki fonksiyon ve $g(x) \neq 0$ olsun. Eğer $x \to \infty$ iken

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$$

koşulu sağlanıyorsa $f(x) \sim g(x)$ biçiminde ifade edilir ve $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları asimptotik denktir denir.

Özellik 1.2.1.1. (O Fonksiyonlar Sınıfı ile İlgili Temel Özellikler) [22]

i. $C > 0$ ($C \in \mathbb{R}$) olmak üzere $O\big(Cg(x)\big) = O\big(g(x)\big)$ dir. Özel olarak $f(x) = O(C)$ veya $f(x) = C$ ise $f(x) = O(1)$ dir.

ii. $f(x) = O\big(g(x)\big)$ ve $g(x) = O\big(h(x)\big)$ ise $f(x) = O\big(h(x)\big)$ dir.

iii. $O\big(g_1(x)\big)O\big(g_2(x)\big) = O\big(g_1(x)g_2(x)\big)$ dir.

iv. $O\big(g(x)h(x)\big) = g(x)O\big(h(x)\big)$ dir.

v. $f(x) = p(x) + O(x^n)$, $g(x) = q(x) + O(x^m)$ ve $r = min\{m, n\}$ olmak üzere $f(x) + g(x) = p(x) + q(x) + O(h^r)$ dir.

vi. $f(x)$ ve $g(x)$ sonlu aralıklarda integrallenebilir iki fonksiyon ve $f(x) = O\big(g(x)\big)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\int_{x_0}^{x} f(y)dy = O\left(\int_{x_0}^{x} |g(y)|dy\right), \qquad x \geq x_0$$

Özellik 1.2.1.2. (Asimptotik Denklik ile İlgili Temel Özellikler) [19]

i. $f(x) \sim g(x)$ ve r herhangi bir sabit olmak üzere $f^r(x) \sim g^r(x)$ ve $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ ise $\log(f(x)) \sim \log(g(x))$ dir.

ii. $f(x) \sim g(x)$ ve $h(x) \sim k(x)$ ise $f(x)h(x) \sim g(x)k(x)$ ve $f(x)/h(x) = g(x)/k(x)$ dir.

Teorem 1.2.1.1. [40] $f(x)$ ve $g(x)$, $[a,\infty) \subseteq \mathbb{R}$ aralığında sürekli pozitif fonksiyonlar olmak üzere $f(x) \sim g(x)$ olsun. Bu durumda

$$\int_{a}^{\infty} f(t)dt \text{ yakınsaktır } \Leftrightarrow \int_{a}^{\infty} g(t)dt \text{ yakınsaktır.}$$

Teorem 1.2.1.2. [40] $f(x) \sim g(x)$ olsun. Eğer $\int_a^\infty g(t)\, dt = \infty$ ise

$$\int_{a}^{x} f(t)dt \sim \int_{a}^{x} g(t)dt$$

dir.

1.2.2. Olasılık Teorisinde Yakınsama Çeşitleri

Tez çalışmasında, rasgele olarak meydana gelen olayların özelliklerinin ve sonuçlarının incelenmesi için (s, S) tipli envanter modelde kullanılacak rasgele değişkenlerin bazı sayısal karakteristikleri belirlenecektir. Ayrıca modeli ifade eden sürecin ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik dağılım fonksiyonunun n. dereceden momentleri için asimptotik ve yaklaşık sonuçlar elde edilecektir. Bu amaç doğrultusunda olasılık teorisindeki yakınsama çeşitleri kullanılacaktır. Çalışmanın bu bölümünde yakınsama türleri hakkında genel tanımlamalar verilecektir.

Tanım 1.2.2.1. [4] X_n $(n \geq 1)$ rasgele değişkenleri F_n, X rasgele değişkeni F dağılım fonksiyonuna sahip olsun. F’nin sürekli olduğu tüm x noktalarında

$$F_n(x) \to F(x)$$

ise, X_n rasgele değişkenler dizisi X rasgele değişkenine dağılımda yakınsıyor denir ve $X_n \xrightarrow{D} X$ ile gösterilir. Merkezi Limit Teoremi bu yakınsama türüne örnektir.

Tanım 1.2.2.2. [4] X_n $(n \geq 1)$ rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 0$$

ise X_n rasgele değişkenler dizisi X rasgele değişkenine olasılıkta yakınsıyor denir ve $X_n \xrightarrow{P} X$ ile gösterilir. Bu yakınsamaya zayıf yakınsama da denir.

Tanım 1.2.2.3. [4] X_n $(n \geq 1)$ rasgele değişkenlerin herhangi bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$P\left(w: \lim_{n\to\infty} |X_n(w) - X(w)| > \varepsilon\right) = 0 \text{ veya } P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$$

ise X_n rasgele değişkenler dizisi X rasgele değişkenine hemen hemen her yerde yakınsıyor denir ve $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ ile gösterilir. Bu yakınsamaya güçlü yakınsama veya 1 olasılığı ile yakınsama da denir. Güçlü Sayılar Kanunu (SLLN) by yakınsama türüne örnektir.

Yukarıda verilen farklı tanımlamalar tanımın geçerlilik gücüne göre verilmiştir. Yani, sıranın içindeki herhangi bir tanım daha önce verilmiş olan tanımlamaları da içine alır.

1.2.3. Konvolüsyon Çarpımı

Konvolüsyon, olasılık, istatistik, bilgisayar görüşü, görüntü ve sinyal işleme ve diferansiyel denklemleri içeren uygulama alanlarına sahiptir. Uzun yıllardır bilinen ve uygulanan matematiksel bir işlem olmakla birlikte konvolüsyonu tanımlamak için matematikte çeşitli terimler kullanılmıştır. Konvolüsyon integrali teriminin en eski kullanımlarından birine d'Alambert'in 1754 yılında yayınlanan [21] kitabında yer verilmiştir.

Bu bölümde, çalışmanın ilerleyen bölümlerinde verilecek olan tanım ve teoremlerin içerisinde kullanılan konvolüsyon çarpımı teriminin genel hatları ile tanımı ve bazı temel özelliklerine değinilecektir.

Tanım 1.2.3.1. [68] $f(t)$ ve $g(t)$, $[0,\infty]$ aralığında parçalı sürekli fonksiyonlar olsun. $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımı $f * g$ ile gösterilir ve

$$(f * g)(t) \equiv f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \quad (1)$$

integrali ile tanımlanır.

Özellik 1.2.3.1. (Konvolüsyonun Özellikleri) [35] $f(t), g(t)$ ve $h(t)$ fonksiyonları $[0,\infty]$ aralığında parçalı sürekli ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Konvolüsyon çarpımı aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. Yer değiştirme özelliği

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

ii. Dağılma özelliği

$$f(t) * \big(g(t) + h(t)\big) = \big(f(t) * g(t)\big) + \big(f(t) * h(t)\big)$$

iii. Birleşme özelliği

$$\big(f(t) * g(t)\big) * h(t) = f(t) * \big(g(t) * h(t)\big)$$

iv. Lineerlik özelliği

$$a\big(f(t) * g(t)\big) = af(t) * g(t)$$

v. $f(t) * 0 = 0$

vi. $f(t) * 1 \neq f(t)$

Teorem 1.2.3.1 (Konvolüsyon Teoremi) [68] $f(t)$ ve $g(t)$, $[0,\infty]$ aralığında parçalı sürekli ve α üstel mertebeden fonksiyonlar olsunlar. $F(s)$ ve $G(s)$ sırasıyla $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri ise, yani $F(S) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ve $G(S) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ ise

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s) \quad (2)$$

veya

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t) \tag{3}$$

dir.

1.3. Ağır Kuyruklu Dağılımlar ve Alt Sınıfları

1.3.1. Ağır Kuyruklu Dağılımlar

Uygulamada kullanılan çoğu dağılım hafif kuyruklu dağılımlardır. Ağır kuyruklu dağılımların ilk örneği pamuk fiyatlarındaki değişimin incelendiği Mandelbrot'un çalışması olmuştur ([55]). O zamandan günümüze kadar ağır kuyruklu dağılımların pek çok örneği bulunmuştur. Ekonomi, finans, internet trafiği, nehirlerdeki taşkın seviyeleri, düşük ve yüksek sıcaklıklar için ağır kuyruklu dağılımlar daha gerçekçi modeller olarak kabul edilmiştir ([66]).

Ağır kuyruklu dağılımlar en genel tanımı ile üstel dağılıma göre daha ağır kuyruğa sahip dağılımlardır. Bununla birlikte ağır kuyruklu dağılımlar için farklı tanımlamalar mevcuttur. Bazı kaynaklar her dereceden momenti sonlu olmayan dağılımlar için ağır kuyruklu terimini kullanırken bazıları ise varyansı sonlu olmayan dağılımları nitelemek için bu terimi kullanmaktadır. Nadiren de kuyruk kısmı normal dağılıma kıyasla daha ağır kuyruğa sahip dağılımlar için ağır kuyruklu terimi kullanılmaktadır. Ağır kuyruklu dağılımların farklı alt sınıflara sahip olması tanımlamalardaki farklılıklara sebep olmuştur. Çalışmanın bu kısmında ağır kuyruklu dağılımlar için çeşitli tanımlamalar ve ayrıca bu çalışmada kullanılacak olan $\Gamma(g)$ alt sınıfı hakkında ayrıntılı literatür taraması verilecektir.

Tanım 1.3.1.1. [73] X reel değerli bir rasgele değişken ve F, X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu olsun. x' in çok büyük değerleri için $P(X > x)$ ve $P(X < -x)$ olasılıkları F' in sırasıyla sağ ve sol kuyruklarına karşılık gelmektedir.

Bu çalışmada sağ kuyruk ile ilgilenilecek ve $P(X > x)$ için $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ notasyonu kullanılacaktır.

Tanım 1.3.1.2. [59] F, ℝ üzerinde tanımlı bir dağılım fonksiyonu olsun. Eğer her $t > 0$ için

$$\int_0^\infty e^{tX}\, dF(x) = \infty \tag{4}$$

şartı sağlanıyor ise F’ e sağdan ağır kuyruklu dağılım denir.

Tanımdan da görülebileceği gibi X rasgele değişkeni herhangi dereceden üstel momente sahip olmadığında X rasgele değişkeninin dağılımı ağır kuyrukludur. Ağır kuyruklu dağılımlar için mevcut literatürde farklı tanımlamalar da vardır.

Tanım 1.3.1.3. [73] X reel değerli bir rasgele değişken ve F, X’ in dağılım fonksiyonu olsun. Eğer $\bar{F}(x)$ kuyruk fonksiyonu üstel dağılımdan daha yavaş sıfıra yaklaşıyorsa yani

$$\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x}\bar{F}(x) = \infty \ ,\forall\lambda > 0 \tag{5}$$

şartı sağlanıyor ise X’ e sağdan ağır kuyruklu dağılıma sahiptir denir.

Şekil 2. Üstel Dağılım ile Ağır Kuyruklu Bir Dağılımın Karşılaştırılması

Örnek 1.3.1.1. [73] X rasgele değişkeni $k > 0$ şekil ve $\beta > 0$ ölçek parametreli Weibull dağılımına sahip olsun.

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^k\right), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

olduğu bilinmektedir. $k < 1$ olduğu zaman,

$$\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x} exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^k\right) = \lim_{x\to\infty} exp\left(\lambda x - \left(\frac{x}{\beta}\right)^k\right) = \infty \ , \forall\lambda > 0$$

elde edilir. Yani $0 < k < 1$ ve $\beta > 0$ parametreli Weibull dağılımı ağır kuyrukludur.

Tanım 1.3.1.4. [10] X negatif olmayan değerler alan bir rasgele değişken olsun. Eğer

$$\lim_{x\to\infty} P(X > x + y \mid X > x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = 1 \ , \forall y \geq 0 \quad (7)$$

şartı sağlanıyor ise yani, $x \to \infty$ iken $\bar{F}(x+y) \sim \bar{F}(x)$ ise F dağılım fonksiyonu ağır kuyrukludur denir.

Bu tanımlama çalışmanın ilerleyen bölümlerinde incelenecek olan ağır kuyruklu dağılımların bir alt sınıfı uzun kuyruklu dağılımlar için kullanılacaktır. Ayrıca, yine ilerleyen bölümlerde incelenecek olan bir diğer ağır kuyruklu alt sınıfı ise yağ kuyruklu dağılımlardır.

Tanım 1.3.1.5. [73] X rasgele değişkeni F dağılım fonksiyonuna sahip olsun. $x \to \infty$ iken

$$\bar{F}(x) \sim x^{-\alpha} \ , \alpha > 0 \quad (8)$$

şartı sağlanıyor ise F dağılımına ağır kuyrukludur denir. Bu koşullarda F, özel olarak yağ kuyruklu dağılımlar sınıfına aittir. Burada $\alpha > 0$ kuyruk indeksi olarak adlandırılmaktadır.

Örnek 1.3.1.2. [25] $\mathbb{R}^+$ da tanımlı $k = 1$ ölçek ve $\alpha > 0$ şekil parametreli Pareto dağılımının kuyruk fonksiyonu $\bar{F}(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^\alpha$ şeklinde ifade edilir ise

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^{-\alpha}}{x^{-\alpha}} = 1$$

olduğundan $\bar{F}(x) \sim x^{-\alpha}$ bulunur. Bu nedenle Pareto dağılımına bazen Power low (güç yasası) dağılımı denir.

Burada bahsi geçen güç yasası (ayrıca ölçekleme kanunu da denir) bir değişkenin başka bir nispi değişken ile orantılı olarak değiştiğini belirten tabirdir. Örneğin bir karenin uzunluğu 2 katına çıkarılırsa, alan 4 katına çıkmış olur. Alan ve kenar uzunluğu arasında

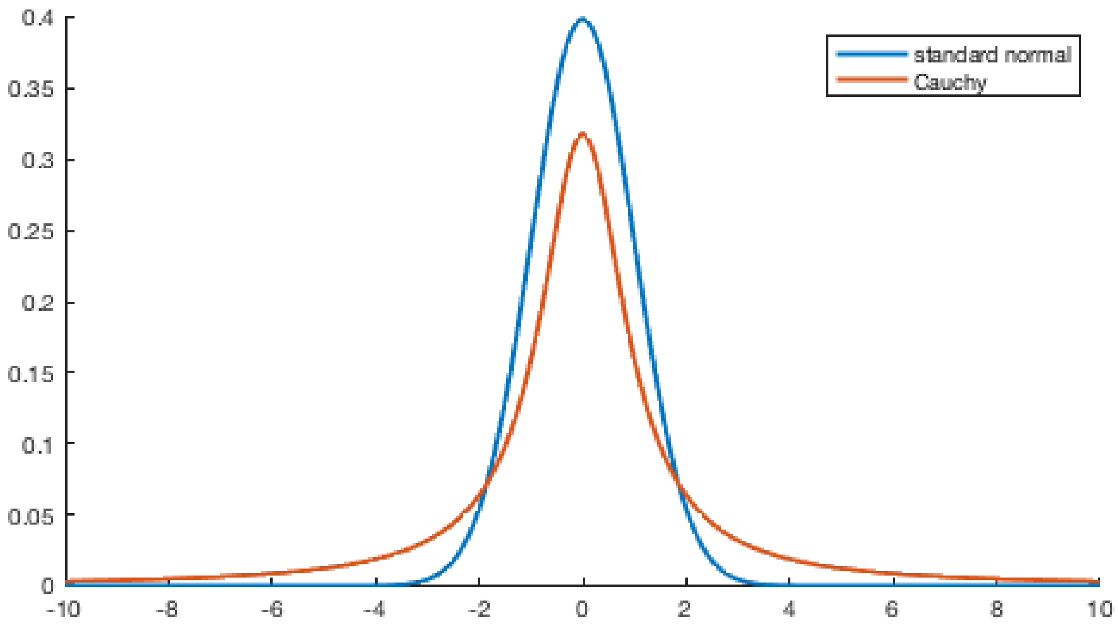
$Y = (kX)^2$ bağıntısı kolayca görülebilir. Güç yasası dağılımı $Y = (kX)^2$ şeklindedir ve Pareto dağılımında da $\bar{F}(x) \sim x^{-\alpha}$ olduğundan Pareto güç yasası dağılımlarına örnek verilebilir.

Tanım 1.3.1.6. [66] X, F dağılım fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken ve $n \geq 1$ için $E(X^n) = \mu_n$ olsun. Eğer

$$\Delta = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} > 3 \tag{9}$$

şartı sağlanıyor ise, yani basıklık katsayısı $\Delta = 3$ ile normal dağılımdan daha yüksek ise X rasgele değişkenine ağır kuyruklu dağılıma sahiptir denir.

Tanım 1.3.1.7. [25] Kuyruk kısmındaki verilerin meydana gelme olasılığı normal dağılımın kuyruk kısmındaki verilere göre daha büyük olan dağılımlara ağır kuyruklu dağılımlar dendir.



Şekil 3. Cauchy Dağılımı ile Standart Normal Dağılımın Karşılaştırması

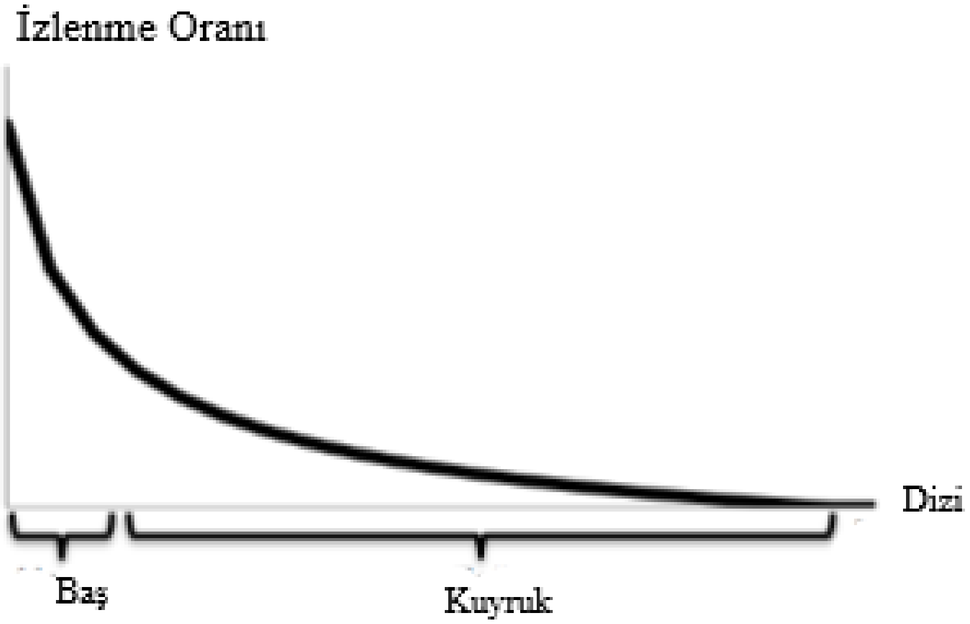
1.3.2. Ağır Kuyruklu Dağılımların Bazı Özel Alt Sınıfları

Bu bölümün amacı ağır kuyruklu dağılımların alt sınıflarını tanıtmak ve onların kullanım alanları hakkında bilgi vermektir. Bu bölüme kadar verilmiş olan tanımlamalar ağır kuyruklu için çok genel tanımlamalardır. Uygulamada, hangi durumlarda hangi tanımın dağılımı ağır kuyruklu sınıfına dahil ettiğini bilmek zordur. Tanımlamalardaki çeşitlilik ve uygulamadaki zorluk ağır kuyruklu dağılımları sınıflandırma ihtiyacını doğurmuştur. Ağır kuyruklu dağılımların en geniş alt sınıfı uzun kuyruklu dağılımlardır.

1.3.2.1. Uzun Kuyruklu Dağılımlar

İnsanın düşünce yapısı genellikle durumları iki zıt kategoriye göre sınıflandıran ikili düşünmeyi (düalizm) içermektedir. Örneğin iyi-kötü, yüksek-düşük, kentsel-kırsal, olağanüstü-sıradan gibi. Vilfredo Pareto'nun 1906'da yaptığı incelemeye dayanarak bu iki ayrım çoğu zaman 80/20 ilkesi ile nitelendirilir ([63]). Bir çok olayda bu ikili bölümler dengesiz bir zıtlık oluşturabilir. Arka planda kalan veriler çoğunluğu, ön planda kalan veriler ise azınlığı gösterebilir. Örneğin, Türkiye'deki mali gelirin %80'inin, nüfusun %20'sine ait olduğu söylenebilir. Bu gibi verilerin grafiği sağa eğik uzun kuyruklu bir dağılım göstermektedir ([37]).

Netflix internet sitesinde yayınlanan dizilere karşı izlenme oranını gösteren bir grafik verilsin.



Şekil 4. Netflix Dizilerinin İzlenme Oranına Göre Dağılımı

Yukarıdaki grafikte görülebileceği gibi yüksek izlenme oranına sahip az sayıda dizi varken düşük izlenme oranına sahip çok sayıda dizi bulunmaktadır. Kuyruk kısmında bulunan diziler tek başına düşük izlenme oranına sahip olsalar da kuyruğun oluşturduğu toplam hacim çok sayıda dizi içermesi nedeni ile nispeten büyük orana sahiptir ([32]).

Daha önce Tanım 1.3.1.4 ile verilen ağır kuyruklu tanımının özel olarak uzun kuyruklu dağılımları nitelediği bilinmektedir. Uzun kuyruklu dağılımlar sınıfı $\mathcal{L}$ notasyonu ile gösterilmektedir.

Örnek 1.3.2.1.1. [25] $\mathbb{R}^+$da tanımlı, $k, \alpha, \beta > 0$ parametreli Burr dağılımının kuyruk fonksiyonu

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{k}{k + x^{\beta}}\right)^{\alpha} \tag{10}$$

şeklinde ifade edilirse

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(k + x^{\beta}\right)^{\alpha}}{(k + (x+y)^{\beta})^{\alpha}} = 1 \ , \forall y > 0$$

olduğundan Burr dağılımı uzun kuyruklu dağılımdır.

Tanım 1.3.2.1.1. (h-Duyarlı Dağılım) [25] $F \in \mathcal{L}$ olsun. $y \neq 0$ için $\bar{F}(x+y) \sim \bar{F}(x)$, $x \to \infty$ olduğu bilinsin. Eğer,

$$\bar{F}(x+y) \sim \bar{F}(x) \quad , |y| \leq h(x) \ , h(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty \tag{11}$$

şartını sağlayacak şekilde azalmayan pozitif bir h fonksiyonu mevcut ise F dağılımına h-duyarlı dağılım denir.

Not 1.3.2.1.1. h seçimini değiştirerek uzun kuyruklu dağılımları sınıflandırmak için literatürde farklı teknikler mevcuttur ([25]). Bu kısımda ayrıntılı bilgi verilmeyecektir.

Ağır kuyruklu dağılımların bir diğer önemli alt sınıfı ise alt üstel dağılımlardır.

1.3.2.2. Alt Üstel Dağılımlar

Alt üstel dağılımlar $(\mathcal{S})$ ağır kuyruklu dağılımların özel bir alt sınıf olup, adını özelliklerinden birinden almaktadır. Kuyruk kısmı üstel dağılımdan daha yavaş sıfıra yaklaşan dağılımlardır.

Bu bölümde alt üstel dağılımlar ile birlikte uygulamada çok kullanılan güçlü alt üstel dağılımlar $(\mathcal{S}^*)$ sınıfı da incelenecektir.

Tanım 1.3.2.2.1. [75] F, $\mathbb{R}^+$ da tanımlı bir dağılım fonksiyonu olsun. Eğer $\bar{F}^{*n}(x) \sim n\bar{F}(x)$ yani

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}^{*n}(x)}{\bar{F}(x)} = n \quad , n \geq 2 \tag{12}$$

şartı sağlanıyor ise F dağılımına alt üstel dağılım denir.

Tanım 1.3.2.2.2. [39] $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri $\mathbb{R}^+$ da tanımlı, aynı F dağılımına sahip olsunlar. $X = max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ olmak üzere

$$\bar{F}_X(x) \sim \bar{F}_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(x) \quad , n \geq 2 \tag{13}$$

şartı sağlanıyor ise $F \in \mathcal{S}$ dir.

Tanımdan açıkça görüldüğü gibi, kuyruk kısmında öyle bir uç (aşırı) değer vardır ki toplamı domine edebilir. Bu durumda dağılım alt üstel dağılımlar sınıfına aittir.

Teorem 1.3.2.2.1 (Alt Üstel Dağılımların Temel Özellikleri) [56]

i. Eğer F alt üstel dağılıma sahip ise,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)}=1\ \ ,\forall y\in(0,\infty) \tag{14}$$

dir.

ii. Eğer (i) şartı sağlanıyor ise,

$$\lim_{x\to\infty} e^{\varepsilon x}\bar{F}(x)=\infty$$

dir.

iii. Eğer F alt üstel dağılıma sahip ise, her $\varepsilon>0$ ve $n\geq 2$ için

$$\frac{\bar{F}^{*n}(x)}{\bar{F}(x)}\leq c(1+\varepsilon)^n\ \ ,x\geq 0$$

koşulunu sağlayacak bir c sabiti vardır.

Teorem 1.3.2.2.2. [56] X, mutlak yakınsak F dağılımına ve f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun.

i. F alt üstel dağılımdır ancak ve ancak

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{yq(x)}f(y)dy=1\ \ ,q(x)\to 0$$

ii. Eğer $h(x)=exp\big(xq(x)\big)f(x)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilir ise F alt üstel dağılımdır.

Burada q bozulma oranı olup $q=f/\bar{F}$ dir.

Alt üstel dağılımlar, alt sınıfları ve uygulamaları ile ilgili teorik bilgiler literatürde mevcuttur ([9], [10], [26], [49]). Alt üstel dağılımların en önemli alt sınıflarından biri de $\mathcal{S}^*$ ile gösterilen güçlü alt üstel dağılımlardır.

Tanım 1.3.2.2.3. [9] Sonlu beklenen değere sahip X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında tanımlı F olsun. Eğer

$$\int_0^x\frac{\bar{F}(x-y)\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)}dy\sim 2\int_0^\infty\bar{F}(y)dy \tag{15}$$

şartı sağlanıyor ise F güçlü alt üstel dağılımdır, $F\in\mathcal{S}^*$ denir.

Teorem 1.3.2.2.3. [12] F dağılım fonksiyonu, $\bar{\mathrm{F}}$ kuyruk fonksiyonu, $Q = -\ln \bar{F}$ bozulma fonksiyonu, $q = f/\bar{F}$ bozulma oranı ve $r = \lim_{x\to\infty} \sup\big(tq(t)/Q(t)\big)$ bozulma oranı indeksi olmak üzere

i. $r < 1$,

ii.$r_\varepsilon = r + \varepsilon < 1$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır ki $\bar{F}^{2-2^{r_\varepsilon}}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ da integrallenebilir

koşulları sağlanıyor ise $F \in \mathcal{S}^*$ dır.

Ağır kuyruklu dağılımlar içinde tek başına olmasa da alt üstel veya uzun kuyruklu dağılımlar ile kesişimi sıklıkla incelenen bir diğer alt sınıf baskın değişen dağılımlar ($\mathcal{D}$) sınıfıdır.

1.3.2.3. Baskın Değişen Dağılımlar ve Sabit Değişen Dağılımlar

Tanım 1.3.2.3.1. ([76], [77]) F dağılım fonksiyonu

$$\lim_{x\to\infty} \sup \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} < \infty \quad , 0 < y < 1 \tag{16}$$

şartı sağlanıyor ise F baskın değişen dağılımdır ve $F \in \mathcal{D}$ denir. Ayrıca F, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı olmak üzere

$$\bar{F}(xy) = \mathrm{O}(1)\bar{F}(x) \tag{17}$$

şeklinde yazılabilir.

Literatürde sıkça karşılaşılan $\mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ (konvolüsyon-kapalı) alt sınıfı için uygulamada yaygın kullanılan dağılımlar örnek gösterilebilir. Pareto, Burr ve Cauchy dağılımları $\mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ sınıfına dahildir. Baskın değişen dağılım olmasına rağmen uzun kuyruklu dağılım sınıfına dahil olmayan, yani $\mathcal{D}/\mathcal{L}$ sınıfından olan dağılım mevcuttur. Peter and Paul [27] dağılımı $\mathcal{D}/\mathcal{L}$ sınıfındandır.

$\mathcal{D}$ ve $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ sınıfları [72] kaynağında daha ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Çalışmanın bu kısmında inceleyeceğimiz bir diğer ağır kuyruklu dağılım alt sınıfı da sabit değişen dağılımlar ($\mathcal{C}$) sınıfıdır.

Tanım 1.3.2.3.2. [48] F, dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$\lim_{y\uparrow 1}\lim_{x\to\infty}\sup\frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} = 1$$

veya

$$\lim_{y\downarrow 1}\lim_{x\to\infty}\inf\frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} = 1$$

şartı sağlanıyor ise F dağılımı sabit değişen dağılımdır ve $F \in \mathcal{C}$ denir.

1.3.2.4. Düzenli Değişen Dağılımlar

Düzenli değişen fonksiyonlar olasılığın çeşitli uygulama alanlarında kullanılmaktadır. Bu nedenle konu üzerinde ayrıntılı çalışmalar da mevcuttur. Düzenli değişen dağılımların tanımı da bu fonksiyonlarla ilişkilidir. Bu bölümde ayrıntıya girmeden düzenli değişen fonksiyonlar ile düzenli değişen dağılımlar hakkında tanımlar ve teoremler ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 1.3.2.4.1. [14] f herhangi bir $x_0 > 0$ için $[x_0, \infty)$ aralığında tanımlanmış, pozitif ve ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer her $t > 0$ için $f(tx) \sim t^{\alpha} f(x)$, yani

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(tx)}{f(x)} = t^{\alpha} \tag{18}$$

şartını sağlayacak bir $\alpha \in \mathbb{R}$ mevcut ise f fonksiyonu (sonsuzda) α indeksli düzenli değişen fonksiyondur denir ve $RV(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.2.4.2. [56] ℓ, $\alpha = 0$ indeksi ile düzenli değişen fonksiyon olsun. Yani

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ell(tx)}{\ell(x)} = 1 \;\; , \forall t > 0 \tag{19}$$

şartı sağlansın. Bu durumda ℓ fonksiyonuna sonsuzda yavaş değişen fonksiyondur denir.

Düzenli değişen fonksiyonlar ve yavaş değişen fonksiyonlar ile ilgili ayrıntılı çalışmalar, ayrıca Karamata teoremi ve düzenli değişen dağılımların integrallenmesi konusunda teoremler ile uygulama örnekleri [14] ve [40] kaynaklarında mevcuttur.

Tanım 1.3.2.4.3. [67] X negatif olmayan bir rasgele değişken ve F, X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu olsun. Eğer her $t > 0$ için

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} = t^{-\alpha} \tag{20}$$

şartını sağlayan bir $\alpha \geq 0$ mevcut ise, yani $\bar{F}(x)$ fonksiyonu $-\alpha$ indeksi ile düzenli değişen fonksiyon $\left(\bar{F}(x) \in \mathcal{RV}(-\alpha)\right)$ ise F dağılımı düzenli değişen dağılıma sahiptir denir.

Düzenli değişen bir dağılıma sahip rasgele değişkenlerin sonlu momentlerinin mevcut olup olmaması α indeksine bağlıdır.

Teorem 1.3.2.4.1. [56] X rasgele değişkeni F dağılımına sahip olsun. $\bar{F}(x) \in \mathcal{RV}(-\alpha)$ olması durumunda

$$k < \alpha \text{ için } E(X^k) < \infty$$
$$k > \alpha \text{ için } E(X^k) = \infty$$

ifadeleri doğrudur.

Düzenli değişen dağılımlar yavaş değişen fonksiyonlara bağlı olarak da açıklanabilmektedir.

Tanım 1.3.2.4.4. [40] ℓ, yavaş değişen bir fonksiyon olmak üzere $\bar{F} \in \mathcal{RV}(-\alpha)$, $\alpha \geq 0$ olduğu taktirde

$$\bar{F}(x) = x^{-\alpha}\ell(x)$$

şeklinde ifade edilebilir.

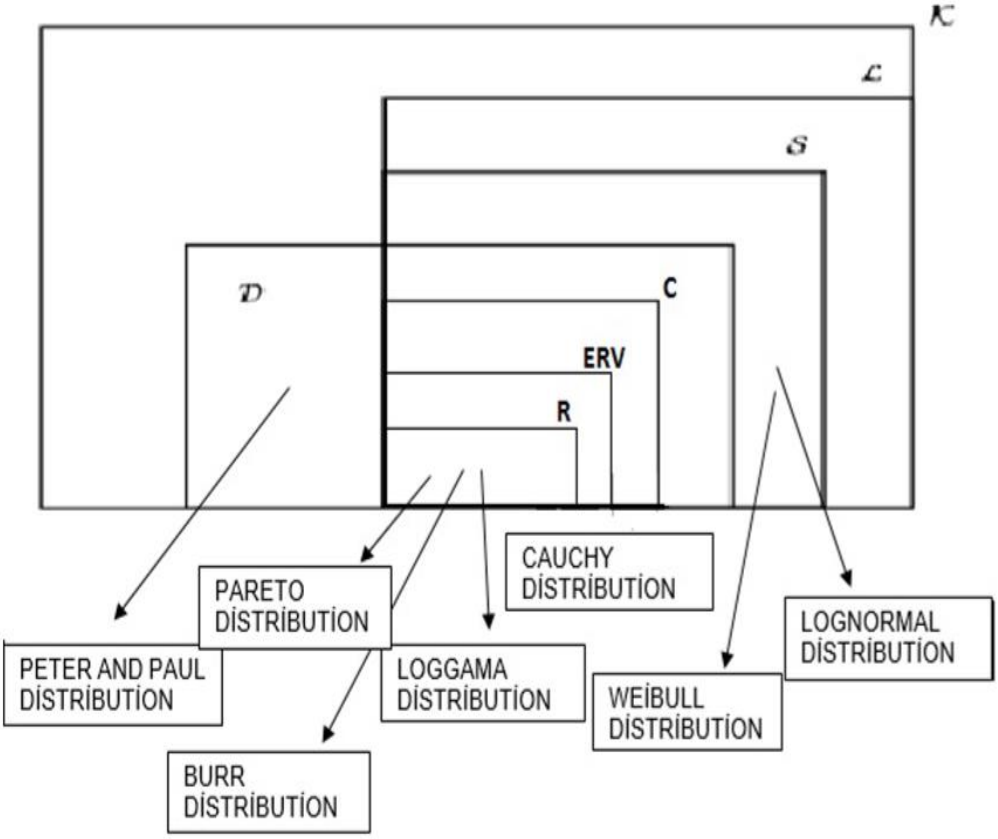
Tanım 1.3.2.4.5. [76] F dağılım fonksiyonu olsun.

$$t^{-\beta} \leq \lim_{x\to\infty} \inf \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} \leq \lim_{x\to\infty} \sup \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} \leq t^{-\alpha} \ ,\forall y > 1 \tag{21}$$

koşulunu sağlayacak şekilde $0 \leq \alpha \leq \beta < \infty$ mevcut ise F genişletilmiş düzenli değişen dağılımdır denir. $F \in E\mathcal{RV}(-\alpha, -\beta)$ ile gösterilir.

Tanımdan açıkça görülebilir ki $\alpha = \beta$ ise F düzenli değişen dağılımdır. Dolayısıyla $E\mathcal{RV}$ sınıfı $\mathcal{RV}$ sınıfının bir alt sınıfıdır.

Çalışmada şu ana kadar incelenen ağır kuyruklu dağılımların alt sınıfları arasındaki ilişkiyi ve bu alt sınıflara ait bazı dağılım örneklerini aşağıdaki tabloda görmek mümkündür.



Şekil 5. Ağır Kuyruklu Dağılımların Alt Sınıfları Arasındaki İlişki ve Örnekleri

Tezin bundan sonraki bölümlerinde çalışılmış olan Gamma-g sınıfı da ağır kuyruklu dağılımların bir alt sınıfıdır.

1.3.3. Gamma-g Sınıfı

Gerçekleşme sıklığı düşük olmakla birlikte sıra dışı olaylar hayatın her alanında, insan, toplum ve kuruluşlar için büyük önem taşımaktadır. Bu tür olaylar, örneğin, deprem, kasırga gibi doğal afetler, olaya maruz kalanlar için beklenmedik sonuçlar doğurabilir, ekonomik krizler yaşatabilir, firmalarda iflasa neden olabilirler.

Sıra dışı olayların etkilerinin büyük olabileceği bilinse de bu olayların ne zaman gerçekleşeceği belirsizdir. Bu belirsizliği tahmin edebilmek için bazı bilimsel yöntemlerin oluşması da doğaldır.

Sıra dışı olayların dağılımları incelendiğinde genellikle kalın (ağır) kuyruk yapısına sahip olduklarını söylemek mümkündür. Bu kalın kuyruklu yapıları modellemek için uç değer teorisi yaygın olarak kullanılmaktadır. Düzenli değişen dağılımlar sınıfı uç değer teorisinde kullanılan bazı dağılımları içermemektedir. Bu nedenle Gamma-g $\left(\Gamma(g)\right)$ sınıfı ortaya çıkmıştır. Bu sınıf hakkında özellikler ve ayrıntılı bilgi Geluk ve de Haan tarafından [29] ile verilmiştir.

Tanım 1.3.3.1. [59] $f(x)$, $\mathbb{R}$ üzerinde ölçülebilir ve x'in yeterince büyük değerleri için pozitif bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu $\Gamma_\alpha(g)$ sınıfına aittir denir ancak ve ancak

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x+yg(x)\right)}{f(x)}=e^{\alpha y}\ ,\forall y\in\mathbb{R} \tag{22}$$

koşulunu sağlayacak bir g, pozitif ölçülebilir fonksiyon mevcuttur.

Burada g fonksiyonuna yardımcı fonksiyon denir.

Not 1.3.3.1. $f\in\Gamma_\alpha(g)$ olsun.

i. Eğer $\alpha=0$ ise $f\in\Gamma_0(g)$ ile gösterilir.

ii. Eğer $\alpha>0$ ise genelliği kaybetmeden $\alpha=1$ farz edilerek $f\in\Gamma(g)$ ile gösterilir.

iii. Eğer $\alpha<0$ ise genelliği kaybetmeden $\alpha=-1$ farz edilerek $f\in\Gamma_-(g)$ ile gösterilir.

Açıkça görülür ki, $f\in\Gamma_-(g)$ dir ancak ve ancak $1/f\in\Gamma(g)$ dir.

Örnek 1.3.3.1. $f(x)=exp(-x/2)$ ve $g(x)=1/x$ için $f\in\Gamma_0(g)$ dir. Çünkü, açıkça görülür ki

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x+yg(x)\right)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}exp\left(-\frac{y}{2x}\right)=1\ ,\forall y\in\mathbb{R}$$

dir. Yani, $\alpha=0$ için bu limit $e^{\alpha y}$ şeklinde yazılabilir ve f, $\Gamma_0(g)$ sınıfına aittir.

Örnek 1.3.3.2. [59] $f(x)=\int_x^\infty exp(-y^2/2)dy$ ve $g(x)=1/x$ için $f\in\Gamma_0(g)$ dir.

Bu çalışmanın ana amacı, giriş kısmında da belirtildiği gibi literatürdeki açığı doldurmak için (s,S) tipli envanter modellerde talep miktarlarının $\Gamma(g)$ sınıfına ait olması durumunu incelemektir. Dolayısıyla çalışmanın bu bölümünde, ilerleyen bölümlerde kullanılacak olan $\Gamma(g)$ sınıfına ait bazı özel dağılımlar hakkında ayrıntılı bilgi verilecektir.

1.3.3.1. Lojistik Dağılımı

Tukey Lambda dağılımı John Tukey tarafından tanımlanmış olan sürekli, simetrik bir olasılık dağılımıdır. Bu dağılım tek bir $\lambda \in \mathbb{R}$ parametresine bağlıdır. Aslında Tukey Lambda dağılımı λ parametresine bağlı olarak farklı dağılımlara yaklaştırılabilen bir dağılım ailesidir. $\lambda = -1$ olduğunda Cauchy$(0, \pi)$ dağılımına yaklaşır. $\lambda = 0$ olduğunda tam olarak lojistik dağılım gibi davranır. $\lambda = 0{,}14$ seçildiğinde ise Normal$(0,\ 2{,}142)$ dağılıma yaklaşır. λ'nın optimal değeri $0{,}14$'ten -1'e geçerken giderek artan bir ağır kuyruk oluşturur, $0{,}14$'ten büyük olduğunda ise daha kısa kuyruklar görülür. Örneğin $\lambda = 1$ olduğunda $(-1{,}1)$ aralığında düzgün dağılıma tam uyum sağlar ([38]).

Lojistik dağılım farklı disiplinlere sahip çeşitli alanlarda kullanılmaktadır. En yaygın olarak büyüme modelleri için ve lojistik regresyon olarak bilinen bir regresyon tipinde kullanılmıştır. Lojistik dağılım ayrıca nüfus modellemesi, hayatta kalma analizi, jeolojik bilimler, envanter sistemler vb. için kullanılmaktadır.

Lojistik dağılımın kullanım alanlarındaki çeşitliliğin nedeni basit bir dağılım fonksiyonuna sahip olması ve normal dağılıma son derece iyi yaklaşmasıdır. Lojistik dağılımının çan şekli normal dağılım ile çok benzerdir ancak lojistik dağılım, normal dağılıma göre daha ağır kuyruk eğilimindedir.

Çalışmanın bu kısmında $\Gamma(g)$ sınıfından ilk özel örnek olarak lojistik dağılımının çeşitli özellikleri verilecektir. Mitov ve Omey'in [59] çalışmasında lojistik dağılımının kuyruk fonksiyonunun $\Gamma(g)$ sınıfına ait olduğu gösterilmiştir.

Tanım 1.3.3.1.1. [11] Lojistik dağılımının;

i. Olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x|\mu, s) = \frac{exp\left(-\frac{x-\mu}{s}\right)}{s\left(1 + exp\left(-\frac{x-\mu}{s}\right)\right)^2}, \qquad x \in (-\infty, \infty), \mu \in \mathbb{R}, s > 0 \tag{23}$$

ii. Dağılım fonksiyonu,

$$F(x|\mu, s) = \frac{1}{1 + exp\left(-\frac{x-\mu}{s}\right)}, \qquad x \in (-\infty, \infty), \mu \in \mathbb{R}, s > 0 \tag{24}$$

şeklinde ifade edilir.

Not 1.3.3.1.1. Bu çalışmada lojistik dağılımının konum parametresi $\mu = 0$, ölçek parametresi $s = 1$ olacak şekilde seçilerek işlemlere yön verilmiştir. Açıkça görülür ki, bu şartlar altında

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \ , \qquad x \in (-\infty, \infty) \tag{25}$$

elde edilir.

Tanım 1.3.3.1.2. Not 1.3.3.1.1'de belirtilen şartlar altında lojistik dağılımın kuyruk fonksiyonu

$$\bar{F}(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \ , \qquad x \in (-\infty, \infty) \tag{26}$$

şeklinde ifade edilir.

Lojistik dağılımının μ (bu çalışmada $\mu = 0$) ye göre simetrik olduğu bilindiğinden

$$F(x) = \frac{2}{1 + e^{-x}} \ , \qquad x \in [0, \infty) \tag{27}$$

ve

$$\bar{F}(x) = \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-x}} \ , \qquad x \in [0, \infty) \tag{28}$$

şeklinde yazılabilir.

Yardımcı Teorem 1.3.3.1.1. $\bar{F}(x)$, lojistik dağılımının $[0, \infty)$ aralığındaki dağılım fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki asimptotik ilişki doğrudur:

$$\bar{F}(x) \sim \frac{2}{1 + e^{x}} \tag{29}$$

İspat

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2/(1 + e^{x})}{2e^{-x}/(1 + e^{-x})} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{x}(1 + e^{-x})}{1 + e^{x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^x + 1}{1 + e^x} = 1$$

dir. Dolayısıyla asimptotik denklik sağlanır.

Teorem 1.3.3.1.1. [24-24] $\bar{F}(x) = C/(1 + e^x)\,, x \in [0, \infty)$ ise $\bar{F} \in \Gamma(1)$ dir.

Böylece Yardımcı Teorem 1.3.3.1.1 ve Teorem 1.3.3.1.1 den açıkça görülür ki

$$\bar{F}(x) = 2/(1 + e^x)\,, x \in [0, \infty) \text{ için } \bar{F} \in \Gamma(1) \tag{30}$$

dir. Yani varsayılan şartlar altında lojistik dağılımı $\Gamma(g)$ sınıfına aittir.

Lojistik dağılımın da yaygın olarak kullanıldığı uç değer teorisi olasılık dağılımlarının kuyruklarında bulunan aşırı olayların stokastik davranışını inceleyen bir istatistik alanıdır. Uç değer teorisi bilim ve iş dünyasının hemen her alanında uygulanabilir bir teori geliştirmiştir. Bu teoride büyük önem taşıyan bir diğer dağılım da genelleştirilmiş uç değer dağılımıdır.

1.3.3.2. Genelleştirilmiş Uç Değer Dağılımı

Genelleştirilmiş uç değer dağılımı, uç değer teorisini geliştirmek için tanımlanmış sürekli olasılık dağılımlarının bir ailesidir. En yaygın kullanılan üç tipi Gumbel (Tip-I), Fréchet (Tip II) ve Weibull (Tip III) dağılımlarıdır.

Tanım 1.3.3.2.1. [53] Genelleştirilmiş uç değer dağılımının

i. Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x|\mu, \sigma, \varepsilon) = \frac{1}{\sigma}\big(t(x)\big)^{\varepsilon+1} e^{-t(x)} \tag{31}$$

ii. Dağılım fonksiyonu

$$F(x|\mu, \sigma, \varepsilon) = e^{-t(x)} \tag{32}$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$t(x) = \begin{cases} \left(1 + \varepsilon\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1/\varepsilon}, & \varepsilon \neq 0 \\ exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right), & \varepsilon = 0 \end{cases}$$

dir. $\mu \in \mathbb{R}$ konum parametresi, $\sigma > 0$ ölçek parametresi ve $\varepsilon \in \mathbb{R}$ şekil parametresidir. Ayrıca $\varepsilon > 0$ ise $x \in [\mu - \sigma/\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon < 0$ ise $x \in [-\infty, \mu - \sigma/\varepsilon)$ ve $\varepsilon = 0$ ise $x \in (-\infty, \infty)$ dir.

İfadedeki karmaşıklığın giderilmesi ve kullanım kolaylığı için $z = (x - \mu)/\sigma$ standart değişkeni kullanılarak Otten ve Montfort (1980) tarafından oluşturulmuş yeni form $\theta = -\varepsilon$ olmak üzere

$$f(z|\theta) = \begin{cases} (1-\theta z)^{\frac{1}{\theta}-1} exp\left(-(1-\theta z)^{\frac{1}{\theta}}\right), & \theta \neq 0 \\ exp(-z)exp\big(-exp(-z)\big), & \theta = 0 \end{cases}$$

ve

$$F(z|\theta) = \begin{cases} exp\left(-(1-\theta z)^{\frac{1}{\theta}}\right), & \theta \neq 0 \\ exp\big(-exp(-z)\big), & \theta = 0 \end{cases}$$

biçimindedir. Bu koşullar altında $\theta < 0$ ise $z \in [1/\theta, \infty)$, $\theta > 0$ ise $z \in [-\infty, 1/\theta)$ ve $\theta = 0$ ise $z \in (-\infty, \infty)$ olur.

Dağılımın tanımında kullanılan $\varepsilon \in \mathbb{R}$ şekil parametresi dağılımın kuyruk davranışına yön vermektedir. Tanım üzerinden de görülebileceği gibi ε üç farklı duruma incelenip bu üç duruma göre genelleştirilmiş uç değer dağılımı özel isimler almaktadır. $\varepsilon = 0$, $\varepsilon > 0$ ve $\varepsilon < 0$ durumları sırasıyla Gumbel, Fréchet ve Weibull dağılımlarına karşılık gelmektedir.

Tanım 1.3.3.2.2. (Tip-III, Weibull Dağılımı) [18] $\varepsilon < 0$ şekil parametresine sahip genelleştirilmiş uç değer dağılımına yaygın bilinen adı ile Weibull dağılımı denir. Ayrıca $y = -(1 + \varepsilon z)$ ve $\varepsilon = -\alpha^{-1}$ dönüşümleri ile dağılım fonksiyonu

$$F(y) = \begin{cases} exp(-(-y)^{\alpha}), & y < 0 \\ 1, & y > 0 \end{cases} \tag{33}$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 1.3.3.2.3. (Tip-II, Fréchet Dağılımı) [18] $\varepsilon > 0$ şekil parametresine sahip genelleştirilmiş uç değer dağılımına Fréchet dağılımı denir. Ayrıca $y = 1 + \varepsilon z$ ve $\varepsilon = -\alpha^{-1}$ dönüşümleri ile dağılım fonksiyonu

$$F(y) = \begin{cases} exp(-y^{-\alpha}), & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \tag{34}$$

biçiminde ifade edilir.

Bu çalışmada üzerinde durulmak istenen durum genelleştirilmiş uç değer dağılımının $\varepsilon = 0$ şekil parametresine sahip olması ile tanımlanan Tip-I dir.

Tanım 1.3.3.2.4. (Tip-I, Gumbel Dağılımı) [18] Gumbel dağılımının

i. Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = e^{-x} exp(-e^{-x}) \ , \qquad x \in \mathbb{R} \tag{35}$$

ii. Dağılım fonksiyonu

$$F(x) = exp(-e^{-x}) \ , \qquad x \in \mathbb{R} \tag{36}$$

biçiminde ifade edilir.

Teorem 1.3.3.2.1. [57] $f(x) = e^{-x} exp(-e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f \in \Gamma(1)$ dir. Ayrıca $\bar{F}(x) \sim f(x) \sim e^{-x}$ olduğundan $\bar{F}(x) \in \Gamma(1)$ dir.

Böylece Tanım 1.3.3.2.4 (i) ve Teorem 1.3.3.2.1'den açıkça görülür ki $f(x) = e^{-x} exp(-e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip uç değer dağılımı $\Gamma(g)$ sınıfına aittir.

Uç değer teorisinde kullanılan ve bu çalışmada incelenecek olan bir diğer dağılım ailesi gamma tipli dağılımlardır.

1.3.3.3. Genelleştirilmiş Gamma Dağılımı

Gamma tipli dağılımlar 1920'lerde Luigi Amoroso tarafından tanıtılmıştır [8]. Bu ailenin üyeleri özellikle mühendislik ve son zamanlarda da tıbbi uygulamalarda oldukça fazla yer almaktadır ([52]).

Stacy ve Mihram ([70], [71]), iki güç yasası dağılımı olan gamma ve Weibull dağılımlarının gücünü birleştirmek için 1962 yılında genelleştirilmiş gamma dağılımının ilk tanımlamasını yapmıştır. Genelleştirilmiş gamma dağılımı yaygın kullanılan bir dağılım ailesidir. Bunun nedeni oldukça esnek olması, yani birçok özel duruma uyum sağlayabilecek formda olmasıdır. Üstel dağılım, gamma dağılımı, Weibull dağılımı gibi birçok dağılım genelleştirilmiş gammanın özel durumlarıdır ([33]).

Çalışmanın bu bölümünde 3 parametreli genelleştirilmiş gamma dağılımının genel formu verilip parametrelerin özel olarak seçilmesi halinde $\Gamma(g)$ sınıfına dahil olma koşulları incelenmiştir.

Tanım 1.3.3.3.1. (Genelleştirilmiş Gamma Dağılımı) [70] $a > 0$, $d > 0$ ve $q > 0$ parametreli gamma dağılımının

i. Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x|a,d,p) = \frac{(p/a^d)x^{d-1}exp(-(x/a)^p)}{\Gamma(d/p)} \quad , \qquad x \in [0,\infty) \tag{37}$$

ii. Dağılım fonksiyonu

$$F(x|a,d,p) = \frac{\gamma(d/p\,,\,(x/a)^p)}{\Gamma(d/p)} \quad , \qquad x \in [0,\infty) \tag{38}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\Gamma(.)$ gamma fonksiyonunu ve $\gamma(.)$ yarı gamma fonksiyonunu ifade eder.

Not 1.3.3.3.1 Özel tanımlı gamma fonksiyonları aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \tag{39}$$

$$\gamma(s,x) = \int_0^x t^{s-1}e^{-t}dt \tag{40}$$

$$\bar{\Gamma}(s,x) = \int_x^\infty t^{s-1}e^{-t}dt \tag{41}$$

Genelleştirilmiş gamma dağılımı parametrelerin seçimine göre farklı dağılımları taklit edebilir. Örneğin, $d = p$ olması durumunda Weibull, $p = 1$ olması durumunda ise gamma dağılımına dönüşür. Ayrıca a, d ve p parametrelerindeki kısıtlamalar kaldırılırsa ancak $a = d/p$ pozitif kalır ise oluşan dağılım Amoroso dağılımı olarak adlandırılır ([20]).

Çalışmanın ilerleyen bölümlerinde $a = 1, p = 1$ ve $d = \alpha > 0$ olacak şekilde seçilerek özel durum incelenecektir.

Tanım 1.3.3.3.2. $a = 1,\ p = 1$ ve $d = \alpha > 0$ parametreli genelleştirilmiş gamma dağılımının

i. Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}\ , \qquad x \in [0, \infty) \tag{42}$$

ii. Dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \frac{\gamma(\alpha, x)}{\Gamma(\alpha)}\ , \qquad x \in [0, \infty) \tag{43}$$

biçiminde ifade edilir.

Teorem 1.3.3.3.1. [57] $f(x) = Cx^{\alpha-1}e^{-x}\ , \alpha > 0, x \geq 0$ olması durumunda $f \in \Gamma(1)$ dir ve $\bar{F}(x) \sim f(x) \in \Gamma(1)$ dir.

Böylece Tanım 1.3.3.3.2 (i) ve Teorem 1.3.3.3.1'den görülür ki Tanım 1.3.3.3.2'nin koşullarını sağlayan genelleştirilmiş gamma dağılımı $\Gamma(g)$ sınıfına aittir.

1.4. Klasik (s,S) Tipli Envanter (Stok Kontrol) Modeli

Stok kontrolünün amacı firmaların hem stok maliyetinin minimum düzeyde tutmalarını hem de müşteriyi bekletmeden talebi karşılayacak kadar stok bulundurmalarını sağlayacak optimal sistemi kurup işletmektir.

(s,S) tipli envanter modeli son yıllarda kapsamlı bir şekilde çalışılmıştır ([17], [27], [58], [64]). Ancak mevcut literatürün büyük bir kısmı talep miktarlarının hafif kuyruk yapısına sahip olduğu varsayımına dayanmaktadır. Hafif kuyruklu talep varsayımları özellikle talep miktarlarında beklenmeyen bazı durumlar olduğunda her zaman tahmin edilemeyebilir. Bu tez çalışmasında talep miktarlarının ağır kuyruklu dağılıma sahip olması durumu ele alınacaktır.

(s,S) tipli envanter modeller içinde en yaygın kullanılanı klasik (s,S) tipli envanter modelidir ve bu modelin genel çalışma prensibi şu örnek ile açıklanabilir: Bir şirketin ani gelebilecek yüksek talep miktarlarını da göz önünde bulundurarak kendisi için en uygun envanter politikasını belirlemeye çalıştığı ve X(t) sürecinin herhangi bir t anında bu şirketin stok seviyesini temsil ettiği varsayılsın. Bu şirket klasik (s,S) tipli envanter model ile çalışmak istediğnde sistemi oluşturan elemanlar aşağıdaki gibidir:

X(t): t anında bir depodaki stok seviyesi,

η_n: Talep miktarlarını temsil eden rasgele değişkenler,

ξ_n: Talepler arasında geçen süreyi temsil eden rasgele değişkenler,

s: Stok kontrol seviyesi,

S: Maksimum stok seviyesi,

τ_1: Stok seviyesinin s seviyesinin altına düştüğü ilk an,

N_1: Stok seviyesinin s seviyesinin altına düştüğü ana kadar gerekli talep sayısı.

Depodaki stok seviyesi $t = 0$ başlangıç anında maksimum stok seviyesinde $(X(0) = S)$ olsun. Depodaki stok seviyesi önceden belirlenmiş kontrol seviyesinin (s) altına düştüğü ana kadar, her bir rasgele T_n anında sisteme rasgele η_n miktarlarında talepler gelmektedir. Bu durumda

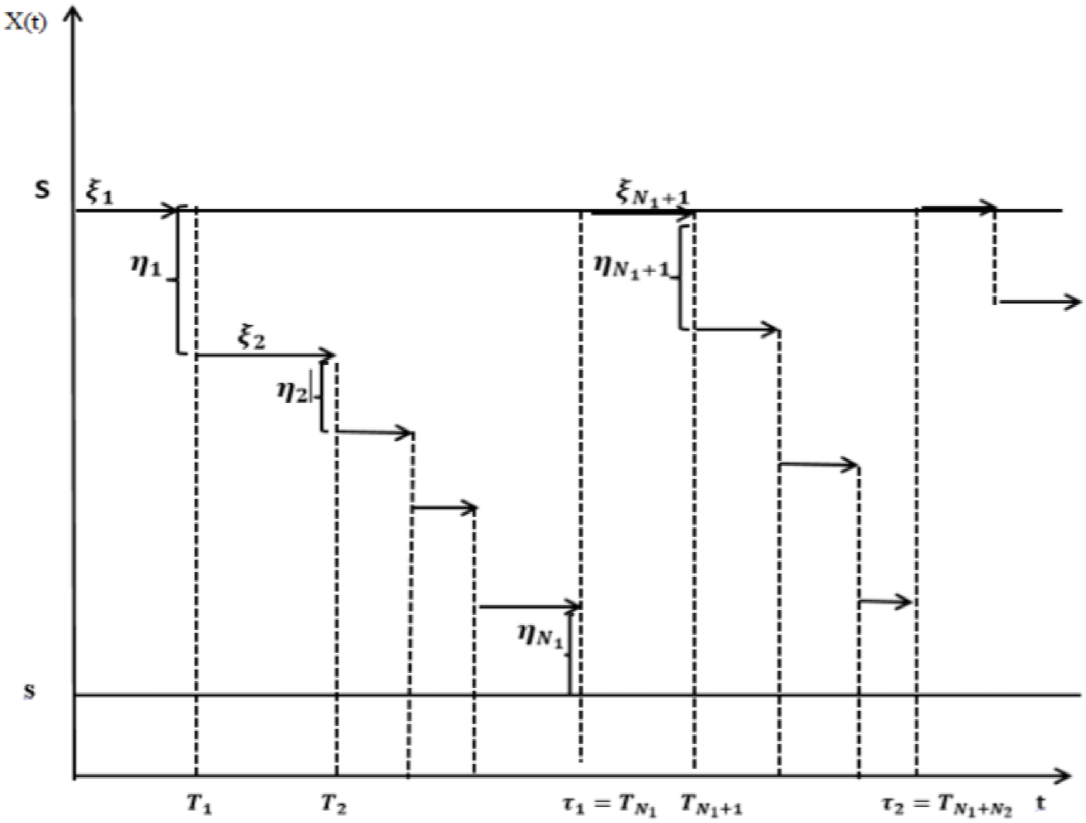
$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

biçiminde olacaktır. Depodaki stok seviyesindeki değişim aşağıdaki gibi olur:

$$X(T_1) \equiv X_1 = S - \eta_1$$
$$X(T_2) \equiv X_2 = S - (\eta_1 + \eta_2)$$
$$\vdots$$
$$X(T_n) \equiv X_n = S - \sum_{i}^{n} \eta_i$$

Açıkça görüldüğü gibi de depodaki stok değişimi $\{\eta_i\}_{i\geq 1}$ miktarları doğrultusundadır. Bu değişim stok seviyesi “s” kontrol seviyesinin altına düştüğü ilk ana (τ_1) kadar devam eder. Depodaki stok seviyesi kontrol seviyesinin altına düştüğü anda hiç beklenmeden depo maksimum stok seviyesine kadar doldurulur. Böylece ilk periyot tamamlanmış olur. İkinci periyot yeniden S seviyesinden başlar ve 1. periyoda benzer şekilde devam eder.

Bu çalışmada talep miktarları (η_n) ağır kuyruklu dağılıma sahiptir ve ardışık talepler arasında geçen zamanın (ξ_n) keyfi, pozitif değerli, mutlak sürekli dağılımlı rasgele değişkenler olduğu varsayılır. Klasik (s,S) tipli envanter sistemini ifade eden sürecin realizasyonu aşağıdaki gibi verilmektedir.



Şekil 6. Klasik (s,S) Tipli Envanter Modelin Bir Realizasyonu

1.4.1. Sürecin Matematiksel Kurulumu ve Ergodik Dağılımı İçin Kesin Formüller

$\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}, n \geq 1$ aynı $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında tanımlı bağımsız rasgele değişkenler dizisi olsun. Ayrıca bu iki rasgele değişken dizisi kendi aralarında da bağımsız olsun. ξ_n ve η_n sadece pozitif değerler alabilen rasgele değişkenler ve dağılım fonksiyonları sırası ile aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun:

$$\Phi(t) = P\{\xi_1 \leq t\}; \;\; F \equiv F_\eta(x) = P\{\eta_1 \leq x\}$$

ξ_n ve η_n rasgele değişkenleri yardımı ile T_n ve Y_n yenileme dizileri aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_n \,,\; Y_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \;, \qquad n \geq 1;\; T_0 = Y_0 = 0$$

$\{N_n\}$ tam değerli rasgele değişken dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$N_0 = 0; N_{n+1} = inf\{k \geq N_n + 1: S - \left(Y_k - Y_{N_n}\right) < s\}, n = 0,1,2,\ldots$$

Burada N_1, $\{Y_n\}$ tarafından “s” seviyesini ilk geçiş anına (τ_1) kadar gerekli talep sayısıdır. Ayrıca τ_n sistemin n. kez stok kontrol seviyesinin altına düştüğü andır ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tau_0 = 0\,, \qquad \tau_n = T_{N_n} = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i \;, \qquad n \geq 1$$

Ayrıca $v(t) = max\{n \geq 0: T_n \leq t\}, t > 0$ sayma süreci tanımlansın. Tüm tanımlanan notasyonlar kullanılarak depodaki depoda bulunan stok miktarındaki değişimi gösteren $X(t)$ süreci

$$X(t) = S - \left(Y_{v(t)} - Y_{N_n}\right), \tau_n \leq t \leq \tau_{n+1}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

biçiminde elde edilir. Bu çalışmanın amacı, $\beta \equiv S - s$ yeterince büyük iken yani $\beta \equiv S - s \to \infty$ durumunda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının asimptotik davranışını incelemektir. Daha önce de belirtildiği gibi bu tez çalışmasında talep miktarlarını ifade eden $\{\eta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin $\Gamma(g)$ alt sınıfından bazı özel ağır kuyruklu dağılımlara sahip olduğu varsayılacaktır.

Sürecin uzun süre çalışması durumunda, yani $t \to \infty$ iken sürecin dağılımını ve momentlerini bulabilmek için sürecin ergodik olup olmadığının bilinmesi gerekmektedir. Khaniyev ve Atalay tarafından [44] çalışmasında sürecin ergodikliği ve ergodik dağılımının kesin şekli belirli koşullar altında aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Teorem 1.4.1.1. [44] $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}, n \geq 1$ başlangıç rasgele değişkenleri aşağıdaki koşulları sağlasın.

i. $0 < E(\xi_1) < \infty$,

ii. $0 < E(\eta_1) < \infty$,

iii. $\{\eta_i\}, i \geq 1$ aritmetik olmayan rasgele değişkenlerdir.

Yukarıda belirtilen koşullar altında $X(t)$ süreci ergodiktir.

Teorem 1.4.1.2. [44] $X(t)$ süreci Teorem 1.4.1.1'in koşullarını sağlasın. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(x)$ ile gösterilip $Q_X(t) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \leq x\}, x \in [s, S)$ olsun. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının kesin formu aşağıdaki formda yazılır:

$$Q_X(x) = 1 - \frac{U(S-x)}{U(S-s)}, \qquad s \leq x \leq S \tag{44}$$

Burada $U(x), \{\eta_n\}_{n\geq 1}$ rasgele değişkenler dizisi tarafından üretilen yenileme fonksiyonudur ve

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) \tag{45}$$

biçiminde ifade edilir.

İfade kolaylığı açısından $X(t)$ sürecinin standartlaştırılmış hali aşağıdaki gibi ifade edilsin:

$$W_\beta(t) = \frac{1}{\beta}(X(t) - s). \tag{46}$$

Dolayısı ile $W_\beta(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun kesin hali aşağıdaki gibi elde edilir:

$$Q_{W_\beta}(t) = 1 - \frac{U\big(\beta(1-x)\big)}{U(\beta)}, \qquad \beta \equiv S - s \to \infty \tag{47}$$

$\{\eta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenleri üstel dağılım, Erlang dağılımı gibi basit bir dağılıma sahip olduğunda bu rasgele değişkenler tarafından üretilen $U(x)$ yenileme fonksiyonunun kesin formunu bulmak mümkündür. Fakat diğer pek çok dağılım için yenileme fonksiyonunun kapalı ve kesin formunu bulmak mümkün değildir. Bu nedenle $U(x)$ yenileme fonksiyonu için asimptotik açılımlar kullanmak daha uygundur. Böylece kesin formüllere yakın sonuçlar elde edilmiş olmaktadır.

1.4.2. Yenileme Fonksiyonu İçin Yaklaşık İfadeler

Literatürdeki önemli çalışma alanlarından biri de yenileme fonksiyonunun incelenmesidir. Yenileme fonksiyonunu üreten rasgele değişkenlerin sonlu momente ve hafif kuyruklu dağılıma sahip olduğu durum için Blackwell [15] ve Smith [69] tarafından yenileme fonksiyonları için asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Daha sonra bu açılımlar daha da geliştirilmiştir.

Ağır kuyruklu dağılımlar için yenileme teorisi olasılığın güncel çalışma alanlarından biridir. Bu konu ile ilgili ilk önemli çalışmalar Feller [24], Smith [69] ve Teugels [74] tarafından yapılmıştır.

Ağır kuyruklu dağılıma sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonları için en önemli açılımlardan biri de Mitov ve Omey [57] tarafından elde edilmiştir. Bu çalışmayı literatürde mevcut diğer çalışmalardan ayıran en önemli fark asimptotik terim içermeyen yaklaşık sonuçların elde edilmiş olmasıdır.

Teorem 1.4.2.1. [57] $\bar{F}(x) \in \mathcal{RV}(-\alpha), \alpha > 2$ olmak üzere $\{\eta_n\}, n \geq 1$ aynı F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Bu durumda sonlu varyanslı düzenli değişen dağılıma sahip $\{\eta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen $U(x)$ yenileme fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$U(x) = \frac{x}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1}\int_0^x \bar{F}_e(y)dy + 2\mu_e \bar{F}_e(x) \tag{48}$$

Teorem 1.4.2.2. [57] $\{\eta_n\}, n \geq 1$ aynı F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenlerinin bir dizisi olmak üzere $\bar{F} \in \Gamma(g)$ olsun. Bu durumda $\Gamma(\,g)$ sınıfına ait rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonun yaklaşık ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$U(x) = \frac{x}{\mu_1} + \frac{\mu_e}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_1^2} g^2(x)\bar{F}(x) \tag{49}$$

Son iki teoremde kullanılan $F_e(x)$ fonksiyonuna integrallenmiş kuyruk fonksiyonu ya da denge fonksiyonu denir ve

$$F_e(x) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^x \bar{F}(y)dy \tag{50}$$

biçiminde hesaplanır. μ_e, integrallenmiş kuyruk fonksiyonunun birinci momentini verir:

$$\mu_e = E(F_e) = \int_0^\infty \bar{F}_e(x)dx$$

$$= \int_0^\infty x\frac{1}{\mu_1}\bar{F}(x)dx = \frac{1}{\mu_1}\int_0^\infty x\bar{F}(x)dx$$

$$= \frac{1}{2\mu_1}\int_0^\infty 2x\bar{F}(x)dx = \frac{1}{2\mu_1}E(X^2)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\mu_e = \mu_2/2\mu_1 \tag{51}$$

eşitliği doğrudur:

Böylece (*) denklemindeki asimptotik yaklaşım aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$U(x) = \frac{x}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - \frac{1}{\mu_1^2}g^2(x)\bar{F}(x) \tag{52}$$

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu kısımda talep miktarları $\Gamma(g)$ sınıfından seçilen özel dağılımlara sahipken klasik (s,S) tipli envanter modeli ifade eden sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için yaklaşık sonuçlara ulaşılacaktır. Daha sonra ergodik dağılım fonksiyonunun momementleri için de asimptotik açılımlar elde edilecektir.

2.1. Talep Miktarları $\Gamma(g)$ Sınıfından Lojistik Dağılımına Sahip Olduğunda Sürecin Asimptotik Olarak İncelenmesi

2.1.1. Sürecin Ergodik Dağılımı İçin Yaklaşık İfadeler

Bu bölümde, Kısım 1.4'de çalışma prensibi ve matematiksel kurulumu verilen (s,S) tipli envanter modelin ergodik dağılımı için yaklaşık sonuçlara ulaşılacaktır. Teorem 1.4.1.1 ile verilen şartlara ek olarak talep miktarlarını ifade eden $\{\eta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin $\bar{F}(x) = 2/(1+e^x), x \geq 0$ kuyruk dağılımlı lojistik dağılımına sahip olduğu varsayılmıştır. Daha önce de belirtildiği gibi lojistik dağılıma sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun yaklaşık ifadesine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu amaçla öncelikle Mitov ve Omey'in [57] çalışmasında $\Gamma(g)$ alt sınıfından dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun yaklaşık ifadesi için (52) ile verilen açılım kullanılacaktır.

Yardımcı Teorem 2.1.1.1. $\{\eta_n\}, n \geq 1$ aynı Γ(g) sınıfından lojistik dağılımına sahip rasgele değişkenler olsun. Yani $\{\eta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenleri $\bar{F}(x) = 2/(1+e^x), x \geq 0$ kuyruk fonksiyonuna sahip olsun. $E(\eta_1^n) = \mu_n, n = 1,2$ olmak üzere, $\{\eta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$U(x) = \frac{x}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - \frac{1}{\mu_1^2}\frac{2}{1+e^x} \tag{53}$$

İspat: Yardımcı Teorem 1.3.3.1.1 ve Teorem 1.3.3.1.1 ile $\bar{F}(x) = 2/(1+e^x)$ olmak üzere $\bar{F}(x) \in \Gamma(1)$ olduğu bilinmektedir. Burada $g(x) = 1$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\Gamma(g)$ sınıfından rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için (52) açılımı kullanılır ise

$$U(x) = \frac{x}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - \frac{1}{\mu_1^2}\frac{2}{1+e^x}$$

sonucuna ulaşılır.

Yardımcı Teorem 2.1.1.2. Teorem 1.4.1.1 ve Yardımcı Teorem 2.1.1.1'in şartları sağlansın. Bu durumda $\beta \equiv S - s \to \infty$ için aşağıdaki açılımlar doğrudur:

$$U(\beta) = \frac{1}{\mu_1}\beta + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - \frac{1}{\mu_1^2}\frac{2}{1+e^\beta} \tag{54}$$

$$U\big(\beta(1-x)\big) = \frac{1-x}{\mu_1}\beta + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - \frac{1}{\mu_1^2}\frac{2}{1+e^{\beta(1-x)}} \tag{55}$$

İspat: Yardımcı Teorem 2.1.1.1 ile elde edilen

$$U(x) = \frac{x}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - \frac{1}{\mu_1^2}\frac{2}{1+e^x}$$

açılımında "x" yerine "β" ve "$\beta(1-x)$" ifadeleri yazılarak (.) ve (..) ifadeleri kolayca elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.1.1.3. Yardımcı Teorem 2.1.1.2'in şartları sağlansın. Bu durumda $\beta \equiv S - s \to \infty$ için aşağıdaki asimptotik açılım doğrudur:

$$\frac{1}{U(\beta)} = \frac{\mu_1}{\beta + \mu_e} + \frac{2}{(\beta+\mu_e)^2(1+e^\beta)} + O\left(\frac{1}{\beta^3 e^{2\beta}}\right) \tag{56}$$

Burada $\mu_n = E(\eta_1^n), n = 1{,}2$ olmak üzere $\mu_e = \mu_2/2\mu_1$ dir.

İspat:

$$\frac{1}{U(\beta)} = \left(\frac{1}{\mu_1}\beta + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - \frac{1}{\mu_1^2}\frac{2}{1+e^\beta}\right)^{-1}$$

$$= \frac{\mu_1}{\beta}\left(1 + \frac{\mu_e}{\beta} - \frac{1}{\mu_1}\frac{2}{1+e^\beta}\beta^{-1}\right)^{-1}$$

$$= \frac{\mu_1}{\beta}\left(\left(1+\frac{\mu_e}{\beta}\right)\left(1-\frac{2}{\mu_1(\beta+\mu_e)(1+e^{\beta})}\right)\right)^{-1}$$

$$= \frac{\mu_1}{\beta+\mu_e}\left(1+\frac{2}{\mu_1(\beta+\mu_e)(1+e^{\beta})}+O\left(\frac{1}{\beta^2 e^{2\beta}}\right)\right)$$

$$= \frac{\mu_1}{\beta+\mu_e}+\frac{2}{(\beta+\mu_e)^2(1+e^{\beta})}+O\left(\frac{1}{\beta^3 e^{2\beta}}\right)$$

elde edilir.

Teorem 2.1.1.1. Teorem 1.4.1.1 ve Yardımcı Teorem 2.1.1.1'in şartları sağlansın. Bu durumda $\beta \equiv S-s \to \infty$ için $W_\beta(t)=\frac{1}{\beta}(X(t)-s)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar:

$$\begin{aligned} Q_{W_\beta}(x) = {} & \frac{\beta x}{\beta+\mu_e}-\frac{2\beta(1-x)}{\mu_1(\beta+\mu_e)^2(1+e^{\beta})}+\frac{2}{\mu_1(\beta+\mu_e)(1+e^{\beta(1-x)})} \\ & +O\left(\frac{1}{\beta^2 e^{\beta(1-x)}}\right) \end{aligned} \tag{57}$$

İspat: Teorem 1.4.1.2'nin sonucu olarak verilen $Q_{W_\beta}(x)$ açılımında (55) ve (56) ifadeleri kullanılır ise;

$$Q_{W_\beta}(x) = 1-\frac{U\big(\beta(1-x)\big)}{U(\beta)}$$

$$\begin{aligned} = 1-\Bigg\{ & \left[\frac{\beta(1-x)}{\mu_1}+\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}-\frac{1}{\mu_1^2}\frac{2}{1+e^{\beta(1-x)}}\right] \\ & \left[\frac{\beta}{\mu_1}+\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}-\frac{1}{\mu_1^2}\frac{2}{1+e^{\beta}}\right]^{-1}\Bigg\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = 1-\Bigg\{ & \left[\frac{\beta(1-x)}{\mu_1}+\frac{\mu_e}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_1^2}\frac{2}{1+e^{\beta(1-x)}}\right] \\ & \left[\frac{\mu_1}{\beta+\mu_e}+\frac{2}{(\beta+\mu_e)^2(1+e^{\beta})}+O\left(\frac{1}{\beta^3 e^{2\beta}}\right)\right]\Bigg\} \end{aligned}$$

$$= 1 - \left\{ \frac{\beta(1-x)}{\beta+\mu_e} + \frac{\mu_e}{\beta+\mu_e} + \frac{2\beta(1-x)}{\mu_1(\beta+\mu_e)^2(1+e^{\beta})} \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\mu_1(\beta+\mu_e)(1+e^{\beta(1-x)})} + 0\left(\frac{1}{\beta^2 e^{(\beta(1-x))}}\right) \right\}$$

$$= 1 - \left\{ \frac{-\beta x}{\beta+\mu_e} + \frac{2\beta(1-x)}{\mu_1(\beta+\mu_e)^2(1+e^{\beta})} \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\mu_1(\beta+\mu_e)(1+e^{\beta(1-x)})} + 0\left(\frac{1}{\beta^2 e^{(\beta(1-x))}}\right) \right\}$$

$$= \frac{\beta x}{\beta+\mu_e} - \frac{2\beta(1-x)}{\mu_1(\beta+\mu_e)^2(1+e^{\beta})} + \frac{2}{\mu_1(\beta+\mu_e)(1+e^{\beta(1-x)})}$$

$$+0\left(\frac{1}{\beta^2 e^{(\beta(1-x))}}\right)$$

Sonuç 2.1.1.1. (Zayıf Yakınsama Teoremi) Teorem 2.1.1.1'in şartları sağlansın. Bu durumda (57) ile verilen $W_\beta(t) = \frac{1}{\beta}(X(t) - s)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun asimptotik açılımı $\beta \equiv S - s \to \infty$ için $[0,1]$ aralığında tanımlı düzgün dağılıma zayıf yakınsar. Yani $\beta \equiv S - s \to \infty$ için

$$Q_{W_\beta}(x) \to G(x) = x \tag{58}$$

dir.

İspat: Kolayca görülür ki;

$$\frac{\beta x}{\beta+\mu_e} \to x, \beta \to \infty; \ \frac{2\beta(1-x)}{\mu_1(\beta+\mu_e)^2(1+e^{\beta})} \to 0, \beta \to \infty;$$

$$\frac{2}{\mu_1(\beta+\mu_e)(1+e^{\beta(1-x)})} \to 0\,,\beta \to \infty \; ve \; \frac{1}{\beta^2 e^{(\beta(1-x))}} \to 0\,,\beta \to \infty$$

dir. Böylece

$$Q_{W_\beta}(x) \to G(x) = x\,,\beta \to \infty$$

elde edilir.

$W_\beta(t) = \frac{1}{\beta}(X(t) - s)$ eşitliğinden $X(t) = s + \beta W_\beta(t)$ elde edildiğine göre aşağıdaki önerme ifade edilebilir:

Sonuç 2.1.1.2. Teorem 1.4.1.1'in şartları sağlansın. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı $\beta \equiv S - s$'nın büyük değerlerinde yaklaşık olarak $[s, S]$ aralığında düzgün dağılım gibi davranır. Yani,

$$Q_X(x) \approx \frac{X-s}{S-s}\,, \qquad x \in [s, S] \tag{59}$$

dir.

İspat: Sonuç 2.1.1.1 ve $W_\beta(t) = \frac{1}{\beta}(X(t) - s)$ eşitliğinden açıkça görülür ki

$$Q_X(x) \approx \frac{X-s}{S-s}\,, x \in [s, S]$$

dir.

2.1.2. Sürecin Ergodik Dağılımının Momentleri İçin Asimptotik Açılımlar

Bu kısımda talep miktarlarını ifade eden $\{\eta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin $\bar{F}(x) = 2/(1+e^x), x \geq 0$ kuyruk dağılımlı lojistik dağılımına sahip olduğu varsayılarak Kısım 2.1.1'de elde edilen sürecin ergodik dağılım fonksiyonunun n. mertebeden momentleri için asimptotik açılımlara ulaşılacaktır.

Not 2.1.2.1. Burada $X(t)$ sürecinin standartlaştırılmış hali olarak $\tilde{X}(t) = X(t) - s$ tanımlanmıştır. Bu durumda; $\tilde{X}(t) = X(t) - s$ sürecinin ergodik dağılımının n. mertebeden momentlerinin kesin formülleri [46] çalışmasında aşağıdaki teoremle verilmiştir:

Teorem 2.1.2.1. [46] Teorem 1.4.1.1'in şartları sağlansın. $\tilde{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n. dereceden momentleri mevcut ve sonlu ise $E\left(\tilde{X}^n\right), n = 1,2, \ldots$'in kesin formül aşağıdaki gibidir:

$$E\left(\tilde{X}^n\right) = \frac{nU_\eta^n(\beta)}{U_\eta(\beta)}\,, \qquad n = 1,2, \ldots \tag{60}$$

Burada

$$U_\eta^n(\beta) \equiv \beta^{n-1} * U_\eta(\beta) = \int_0^\beta (\beta - t)^{n-1} U_\eta(t)dt \tag{61}$$

dir.

Yardımcı Teorem 2.1.2.1. Her $n \geq 1$ için

$$J_1(\beta) = \int_0^\beta (\beta - t)^{n-1} t dt \tag{62}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\beta \to \infty$ için aşağıdaki ilişki doğrudur:

$$J_1(\beta) = \frac{1}{n(n+1)}\beta^{n+1} \tag{63}$$

İspat: $t = \beta x$ değişken dönüşümü kullanılarak;

$$J_1(\beta) = \int_0^\beta (\beta - t)^{n-1} t dt = \left(\int_0^1 (1 - x)^{n-1} x dx\right)\beta^{n+1}$$

elde edilir ve kısmi integrasyon uygulanır ise,

$$J_1(\beta) = \left[-x\frac{(1 - x)^n}{n}\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{(1 - x)^n}{n} dx\right]\beta^{n+1}$$

$$= \left(- \frac{(1-x)^{n+1}}{n(n+1)} \Bigg|_0^1 \right) \beta^{n+1}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \beta^{n+1}$$

sonucuna ulaşılır.

Yardımcı Teorem 2.1.2.2. Her $n \geq 1$ için

$$J_2(\beta) = \int_0^\beta (\beta - t)^{n-1} dt \tag{64}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\beta \to \infty$ için aşağıdaki ilişki doğrudur:

$$J_2(\beta) = \frac{1}{n} \beta^n \tag{65}$$

İspat: $t = \beta x$ değişken dönüşümü kullanılarak;

$$J_2(\beta) = \int_0^\beta (\beta - t)^{n-1} dt = \left(\int_0^1 (1-x)^{n-1} dx \right) \beta^n$$

$$= \left(- \frac{(1-x)^n}{n} \Bigg|_0^1 \right) \beta^n$$

$$= \frac{1}{n} \beta^n$$

Yardımcı Teorem 2.1.2.3. Her $x > 0$ ve $n \geq 1$ için $h_1(x) = x^{n-1}$ ve $h_2(x) = e^{-x}$ olmak üzere

$$G_n(x) = h_1(x) * h_2(x) = \int_0^x (x-t)^{n-1} e^{-t} dt \tag{66}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$G_n(x) = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{x^{n-r-1}}{(n-r-1)!} + (-1)^n e^{-x} \tag{67}$$

İspat: $\tilde{G}_n(\lambda), \tilde{h}_1(\lambda)$ ve $\tilde{h}_2(\lambda)$ sırasıyla $G_n(x), h_1(x)$ ve $h_2(x)$'in Laplace dönüşümleri olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\tilde{G}_n(\lambda) = \tilde{h}_1(\lambda)\tilde{h}_2(\lambda) \tag{68}$$

olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla;

$$\tilde{h}_1(\lambda) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_0^\infty z^{n-1} e^z dz$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\lambda^n} = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}$$

ve

$$\tilde{h}_2(\lambda) = \int_0^\infty e^{-x} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda+1} \int_0^\infty e^z dz$$

$$= \frac{\Gamma(1)}{\lambda+1} = \frac{1}{\lambda+1}$$

şeklinde hesaplanır. Burada $\Gamma(n)$ fonksiyonu (39) denklemi ile tanımlanmış olan özel fonksiyondur. Böylece,

$$\tilde{G}_n(\lambda) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n(\lambda+1)} \tag{69}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\tilde{G}_n(\lambda) = (n-1)! \frac{1}{\lambda^n(\lambda+1)} = (n-1)! \left[\frac{1}{\lambda^n} - \frac{1}{\lambda^{n-1}} + \frac{1}{\lambda^{n-2}} - \cdots\right]$$

$$= (n-1)! \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{1}{\lambda^{n-r}} + (-1)^n \frac{1}{\lambda+1}$$

bulunur. Buradan ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$G_n(x) = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{x^{n-r-1}}{(n-r-1)!} + (-1)^n e^{-x}$$

sonucuna ulaşılır ve iddianın doğruluğu görülür.

Yardımcı Teorem 2.1.2.4. Her $n \geq 1$ için

$$J(\beta) = \int_0^\beta (\beta - t)^{n-1} \frac{1}{1+e^t} dt \tag{70}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki asimptotik ilişki doğrudur.

$$J(\beta) = \beta^n \left[\sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r a_r}{(n-r-1)!} \beta^{n-r-1} + O\left(\beta^n e^{-\beta}\right) \right] \tag{71}$$

Burada;

$$a_r = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{r+1}} \tag{72}$$

dir.

İspat: $t = \beta(1-x)$ değişken dönüşümü ve $1/\left(1 + e^{\beta(1-x)}\right)$ için Taylor açılımı kullanılarak;

$$J(\beta) = \int_0^\beta (\beta - t)^{n-1} \frac{1}{1+e^t} dt = \beta^n \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+e^{\beta(1-x)}} dx$$

$$= \beta^n \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{e^{\beta(1-x)}\left(1 + e^{-\beta(1-x)}\right)} dx$$

$$= \beta^n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \int_0^1 x^{n-1} e^{-k\beta(1-x)} dx \tag{73}$$

elde edilir. Kolayca görmek mümkündür ki;

$$I(\beta) = \int_0^1 x^{n-1} e^{-\beta(1-x)} dx = \frac{1}{\beta^n} \int_0^\beta (\beta - t)^{n-1} e^{-t} dt = \frac{1}{\beta^n} G_n(\beta)$$

dir ve (67) eşitliğinde $x = \beta$ alınır ise

$$I(\beta) = \frac{1}{\beta^n}\left[\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{\beta^{n-r-1}}{(n-r-1)!} + (-1)^n e^{-\beta}\right]$$

elde edilir. Benzer şekilde aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$I(k\beta) = \frac{1}{(k\beta)^n}\left[\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(k\beta)^{n-r-1}}{(n-r-1)!} + (-1)^n e^{-k\beta}\right] \tag{74}$$

Buradan

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} I(k\beta) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\int_0^1 x^{n-1}e^{-k\beta(1-x)}dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-1)^r}{(n-r-1)!\,(k\beta)^{r+1}} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+n-1}(k\beta)^{-n}e^{-k\beta}$$

$$\approx \sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-1)^r}{(n-r-1)!\,\beta^{r+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{r+1}} + \mathrm{O}\left(\beta^{-n}e^{-\beta}\right)$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-1)^r a_r}{(n-r-1)!\,\beta^{r+1}} + \mathrm{O}\left(\beta^{n}e^{-\beta}\right) \tag{75}$$

olarak bulunur. Böylece (75) eşitliği (72) eşitliğinde yerine yazılır ise (71) denklemi sağlanır ve ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 2.1.2.5. Teorem 1.4.1.1 ve Teorem 2.1.2.1'in şartları sağlansın. Bu durumda (61) ile tanımlı $U_\eta^n(\beta)$ için asimptotik açılım aşağıdaki gibidir:

$$U_\eta^n(\beta) = \frac{1}{\mu_1 n(n+1)}\beta^{n+1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2 n}\beta^n - \frac{2a_0}{\mu_1^2(n-1)!}\beta^{n-1} + O(\beta^{n-2}) \tag{76}$$

Burada $\mu_i = E\left(\eta_1^i\right), i = 1{,}2,\ n \geq 1$ ve her $r \geq 0$ için $a_r = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}/k^{r+1}$ dir.

İspat: Yardımcı Teorem 2.1.1.1'de elde edilen U(x) açılımı ile Yardımcı Teorem 2.1.2.1, Yardımcı Teorem 2.1.2.2 ve Yardımcı Teorem 2.1.2.4 ifadelerinde elde edilen sonuçlar (61) denkleminde kullanılarak;

$$U_\eta^n(\beta) \equiv \beta^{n-1} * U(\beta) = \int_0^\beta (\beta - t)^{n-1} U(t) dt$$

$$= \frac{1}{\mu_1} \int_0^\beta (\beta - t)^{n-1} t dt + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} \int_0^\beta (\beta - t)^{n-1} dt$$
$$- \frac{2}{\mu_1^2} \int_0^\beta (\beta - t)^{n-1} \frac{1}{1 + e^t} dt$$

$$= \frac{1}{\mu_1 n(n+1)} \beta^{n+1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2 n} \beta^n - \frac{2}{\mu_1^2} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r a_r}{(n-r-1)!} \beta^{n-r-1}$$
$$+ O(e^{-\beta})$$

$$= \frac{1}{\mu_1 n(n+1)} \beta^{n+1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2 n} \beta^n - \frac{2a_0}{\mu_1^2 (n-1)!} \beta^{n-1}$$
$$+ O(\beta^{n-2}) + O(e^{-\beta})$$

bulunur. Burada $\max\{\beta^{n-2}, e^{-\beta}\} = \beta^{n-2}$ olduğundan (76) ile verilen asimptotik ilişki doğrudur.

Teorem 2.1.2.2. Teorem 1.4.1.1 ve Teorem 2.1.2.1'in koşulları sağlansın. Bu durumda $\beta \to \infty$ iken $\tilde{X}(t) = X(t) - s$ sürecinin ergodik dağılımının n. dereceden momentleri için asimptotik açılım aşağıdaki gibidir:

$$E\left(\tilde{X}^n(\beta)\right) = \frac{1}{(n+1)(\beta + \mu_e)} \beta^{n+1} + \frac{\mu_e}{(\beta + \mu_e)} \beta^n - \frac{2na_0}{\mu_1 (n-1)!\,(\beta + \mu_e)} \beta^{n-1} + O\left(\frac{\beta^{n-2}}{\beta + \mu_e}\right) \quad (77)$$

İspat: (56) ve (76) kullanılarak

$$E\left(\tilde{X}^n(\beta)\right) = \frac{n U_\eta^n(\beta)}{U(\beta)}$$

$$= \left\{\frac{1}{\mu_1(n+1)}\beta^{n+1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\beta^n - \frac{2na_0}{\mu_1^2(n-1)!}\beta^{n-1} + O(\beta^{n-2})\right\}$$
$$\left\{\frac{\mu_1}{\beta+\mu_e} + \frac{2}{(\beta+\mu_e)^2(1+e^{\beta})} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\beta^3 e^{2\beta}}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(\beta+\mu_e)}\beta^{n+1} + \frac{\mu_e}{(\beta+\mu_e)}\beta^n$$
$$- \frac{2na_0}{\mu_1(n-1)!\,(\beta+\mu_e)}\beta^{n-1} + O\left(\frac{\beta^{n-2}}{\beta+\mu_e}\right), \beta \to \infty$$

elde edilir.

Sonuç 2.1.2.1. Teorem 1.4.1.1 ve Teorem 2.1.2.1'in koşulları sağlansın. Bu durumda $\beta \to \infty$ iken $\widetilde{\mathrm{X}}(\mathrm{t}) = \mathrm{X}(\mathrm{t}) - \mathrm{s}$ sürecinin ergodik dağılımının 1. ve 2. dereceden momentleri için asimptotik açılım aşağıdaki gibidir:

$$E\left(\tilde{X}(\beta)\right) = \frac{1}{2(\beta+\mu_e)}\beta^2 + \frac{\mu_e}{(\beta+\mu_e)}\beta - \frac{2a_0}{\mu_1(\beta+\mu_e)} + O\left(\frac{1}{\beta(\beta+\mu_e)}\right) \quad (78)$$

$$E\left(\tilde{X}^2(\beta)\right) = \frac{1}{3(\beta+\mu_e)}\beta^3 + \frac{\mu_e}{(\beta+\mu_e)}\beta^2 - \frac{4a_0}{\mu_1(\beta+\mu_e)}\beta$$
$$+O\left(\frac{1}{(\beta+\mu_e)}\right) \quad (79)$$

Burada

$$a_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = log(2), \mu_1 = 2log(2), \mu_2 = \frac{\pi^2}{3}, \mu_e = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$$

dir.

2.2. Talep Miktarları $\Gamma(g)$ Sınıfından Dağılımlara Sahip Olduğunda Sürecin Ergodik Olarak İncelenmesi

2.2.1. Sürecin Ergodik Dağılımı İçin Yaklaşık İfadeler

Tez çalışmasının bu aşamasında Teorem 1.4.1.1 ile verilen şartlara ek olarak $g^2(x)$ sabit veya artmayan bir fonksiyon olmak üzere, talep miktarlarını ifade eden $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ rasgele değişkenlerinin $\Gamma(g)$ sınıfından herhangi bir dağılıma sahip olduğu durumlar için daha önce matematiksel kurulumu ve çalışma prensibi verilen (s,S) tipli envanter modelin ergodik dağılımı için genel sonuçlar elde edilecektir. Bu amaç doğrultusunda $\mathrm{F(x)} \in \Gamma(g)$ dağılımına sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun yaklaşık ifadesine ihtiyaç vardır. $\Gamma(g)$ alt sınıfından dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun yaklaşık ifadesi için Mitov ve Omey'in ([57]) çalışmasında verilen (52) açılımı kullanılacaktır.

Yardımcı Teorem 2.2.1.1. Teorem 1.4.1.1 ve Teorem 1.4.2.2'nin koşulları sağlansın. $g^2(x)$ sabit veya artmayan bir fonksiyon olmak üzere, $\{\eta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenleri $\Gamma(g)$ sınıfından aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler olsun. $E(\eta_1^n) = \mu_n, n = 1,2$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur:

$$U(\beta) = \frac{1}{\mu_1}\beta + \frac{\mu_e}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_1^2} g^2(\beta)\bar{F}(\beta) \qquad (80)$$

$$U\big(\beta(1-x)\big) = \frac{1}{\mu_1}\beta(1-x) + \frac{\mu_e}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_1^2} g^2\big(\beta(1-x)\big)\bar{F}\big(\beta(1-x)\big) \qquad (81)$$

Burada $\mu_e = \mu_2/2\mu_1$ dir.

İspat: Teorem 1.4.1.1 ile verilen (49) açılımında x' yerine sırasıyla 'β' ve '$\beta(1-x)$' ifadeleri yazılarak (80) ve (81) ifadeleri kolayca elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.2.1.2. Yardımcı Teorem 2.2.1.1'in şartları sağlansın. Bu durumda $\beta \equiv S - s \to \infty$ için aşağıdaki asimptotik ilişki doğrudur:

$$\frac{1}{U(\beta)} = \frac{\mu_1}{\beta + \mu_e}\left(1 + \frac{1}{\beta + \mu_e}\frac{1}{\mu_1} g^2(\beta)\bar{F}(\beta) + o\left(\frac{1}{\beta} g^2(\beta)\bar{F}(\beta)\right)\right) \qquad (82)$$

Burada $E(\eta_1^n) = \mu_n, n = 1{,}2$ olmak üzere $\mu_e = \mu_2/2\mu_1$ dir.

İspat:

$$\frac{1}{U(\beta)} = \left[\frac{1}{\mu_1}\beta + \frac{\mu_e}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_1^2} g^2(\beta)\bar{F}(\beta)\right]^{-1}$$

$$= \left[\left(\frac{\beta}{\mu_1} + \frac{\mu_e}{\mu_1}\right)\left(1 - \frac{\mu_1}{\beta + \mu_e}\frac{1}{\mu_1^2} g^2(\beta)\bar{F}(\beta)\right)\right]^{-1}$$

$$= \left(\frac{\mu_1}{\beta + \mu_e}\right)\left[\left(1 - \frac{\mu_1}{\beta + \mu_e}\frac{1}{\mu_1^2} g^2(\beta)\bar{F}(\beta)\right)\right]^{-1}$$

$$= \left(\frac{\mu_1}{\beta + \mu_e}\right)\left(1 + \frac{1}{\mu_1(\beta + \mu_e)} g^2(\beta)\bar{F}(\beta) + o\left(\frac{1}{\beta} g^2(\beta)\bar{F}(\beta)\right)\right)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.2.1.3. $\bar{F}(x)$, herhangi bir ağır kuyruklu dağılımın kuyruk fonksiyonu ve $g^2(x)$, herhangi sabit veya artmayan bir fonksiyon olsun. $x \in [0,1]$ ve $0 < \beta \equiv S - s \to \infty$ için aşağıdaki ilişki doğrudur:

$$\frac{1}{\beta} g^2\big(\beta(1-x)\big)\bar{F}\big(\beta(1-x)\big) \geq \frac{1}{\beta} g^2(\beta)\bar{F}(\beta) \tag{83}$$

İspat: $0 \leq x \leq 1$ olduğundan $1 - x \leq 1$ dir. Eşitsizliğin her iki tarafı da pozitif olan β ile çarpılır ise

$$\beta(1-x) \leq \beta$$

elde edilir. $\bar{F}$ kuyruk fonksiyonu monoton azalan bir fonksiyon olduğundan

$$\bar{F}\big(\beta(1-x)\big) \geq \bar{F}(\beta)$$

dir. Ayrıca g^2 fonksiyonu da sabit veya artmayan bir fonksiyon olduğundan $g^2\big(\beta(1-x)\big) \geq g^2(\beta)$ dır. Böylece

$$g^2\big(\beta(1-x)\big)\bar{F}\big(\beta(1-x)\big) \geq g^2(\beta)\bar{F}(\beta)$$

yazılır ve eşitsizliğin her iki tarafı β ile bölünür ise (83) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.2.1.1. Teorem 1.4.1.1 ve Yardımcı Teorem 2.2.1.1'in şartları sağlansın. Bu durumda $\beta \equiv S - s \to \infty$ için $W_\beta(t) = \frac{1}{\beta}(X(t) - s)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun asimptotik açılımı aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{aligned} Q_{W_\beta}(x) &= \frac{\beta x}{\beta + \mu_e} + \frac{1}{\mu_1(\beta + \mu_e)} g^2\big(\beta(1-x)\big)\bar{F}\big(\beta(1-x)\big) \\ &\quad - \frac{\beta(1-x)}{\mu_1(\beta + \mu_e)^2} g^2(\beta)\bar{F}(\beta) + o\left(\frac{1}{\beta} g^2\big(\beta(1-x)\big)\bar{F}\big(\beta(1-x)\big)\right) \end{aligned} \tag{84}$$

İspat: (81) ve (82) ifadeleri kullanılarak;

$$Q_{W_\beta}(x) = 1 - \frac{U\big(\beta(1-x)\big)}{U(\beta)}$$

$$\begin{aligned} = 1 - \Bigg\{ &\left[\frac{\beta(1-x)}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - \frac{1}{\mu_1^2} g^2\big(\beta(1-x)\big)\bar{F}\big(\beta(1-x)\big)\right] \\ &\left(\frac{\mu_1}{\beta + \mu_e}\right)\left[1 + \frac{1}{\mu_1(\beta + \mu_e)} g^2(\beta)\bar{F}(\beta) \right. \\ &\left. + o\left(\frac{1}{\beta} g^2(\beta)\bar{F}(\beta)\right)\right]\Bigg\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = 1 - \Bigg\{ &\left[\frac{\beta(1-x)}{\mu_1} + \frac{\mu_e}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_1^2} g^2\big(\beta(1-x)\big)\bar{F}\big(\beta(1-x)\big)\right] \\ &\left[\frac{\mu_1}{\beta + \mu_e} + \frac{1}{(\beta + \mu_e)^2} g^2(\beta)\bar{F}(\beta) + o\left(\frac{1}{\beta^2} g^2(\beta)\bar{F}(\beta)\right)\right]\Bigg\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = 1 - \Bigg\{ &1 - \frac{\beta x}{\beta + \mu_e} - \frac{1}{\mu_1(\beta + \mu_e)} g^2\big(\beta(1-x)\big)\bar{F}\big(\beta(1-x)\big) \\ &+ \frac{\beta(1-x)}{\mu_1(\beta + \mu_e)^2} g^2(\beta)\bar{F}(\beta) + o\left(\frac{1}{\beta} g^2\big(\beta(1-x)\big)\bar{F}\big(\beta(1-x)\big)\right)\Bigg\} \end{aligned}$$

$$= \frac{\beta x}{\beta + \mu_e} + \frac{1}{\mu_1(\beta + \mu_e)} g^2\big(\beta(1-x)\big)\bar{F}\big(\beta(1-x)\big)$$

$$+ - \frac{\beta(1-x)}{\mu_1(\beta + \mu_e)^2} g^2(\beta)\bar{F}(\beta) + o\left(\frac{1}{\beta} g^2\big(\beta(1-x)\big)\bar{F}\big(\beta(1-x)\big)\right)$$

elde edilir.

Sonuç 2.2.1.1. (Zayıf Yakınsama Teoremi) Teorem 2.2.1.1'in şartları sağlansın. Bu durumda (84) ile verilen $W_\beta(t) = \frac{1}{\beta}(X(t) - s)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun asimptotik açılımı $\beta \equiv S - s \to \infty$ için $[0,1]$ aralığında tanımlı düğün dağılıma zayıf yakınsar. Yani $\beta \equiv S - s \to \infty$ için

$$Q_{W_\beta}(x) \to H(x) = x \tag{85}$$

dir.

İspat: Kolayca görülür ki,

$$\frac{\beta x}{\beta + \mu_e} \to x, \beta \to 0; \ \frac{\beta(1-x)}{\mu_1(\beta + c_1)^2}\bar{F}(\beta) \to 0, \beta \to \infty;$$

$$\frac{1}{\mu_1(\beta + \mu_e)}\bar{F}\big(\beta(1-x)\big) \to 0\,, \beta \to \infty \text{ ve}$$

$$\frac{1}{\beta} g^2\big(\beta(1-x)\big)\bar{F}\big(\beta(1-x)\big) \to 0\,, \beta \to \infty$$

dir. Böylece

$$Q_{W_\beta}(x) \to H(x) = x\,, \beta \to \infty$$

elde edilir.

Sonuç 2.2.1.2. Teorem 1.4.1.1'in şartları sağlansın. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı $\beta \equiv S - s \to \infty$ için yaklaşık olarak $[s, S]$ aralığında tanımlı düzgün dağılım gibi davranır. Yani

$$Q_X(x) \approx \frac{X-s}{S-s}, \quad x \in [s,S] \tag{86}$$

dir.

İspat: $W_\beta(t) = \frac{1}{\beta}(X(t)-s)$ sürecinden $X(t) = s + \beta W_\beta$ sürecine dönüşüm yapılır ve Sonuç 2.2.1.1'de yerine yazılırsa

$$Q_X(x) \approx \frac{X-s}{S-s}, x \in [s,S]$$

sonucu kolayca elde edilir.

2.2.2. Özel Durumlar İçin Uygulamalar

Tez Çalışmasının 2.2.1 kısmında, talep miktarları ağır kuyruklu $\Gamma(g)$ alt sınıfından bir dağılıma sahip olması durumunda sürecin ergodik dağılımı için yaklaşık ifadelerin genellemesi verilmiştir. Bu bölümde ise talep miktarlarını ifade eden rasgele değişkenlerin ağır kuyruklu $\Gamma(g)$ sınıfına ait olduğu bilinen genelleştirilmiş uç değer dağılımı ve genelleştirilmiş gamma dağılımına sahip olması durumları incelenecektir. Böylece Bölüm 2.2.1 ile elde edilen sonuçları örneklendirmek amaçlanmaktadır.

Teorem 1.4.1.1 ile verilen şartlara ek olarak talep miktarlarını ifade eden $\{\eta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin $F(x) = exp(-e^{-x}), x \in \mathbb{R}$ dağılımlı I. tip genelleştirilmiş uç değer dağılımına sahip olduğu varsayılsın. Tanım 1.3.3.2.4 ile açıkça görmek mümkündür ki $F(x) = exp(-e^{-x}), x \in \mathbb{R}$ dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenlerin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x) = e^{-x}exp(-e^{-x}), x \in \mathbb{R}$ dir. Ayrıca Teorem 1.3.3.2.1 ile $f(x) = e^{-x}exp(-e^{-x}), x \in \mathbb{R}$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler $\Gamma(1)$ sınıfına dahildirler.

$\{\eta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenleri aynı Tip-I Genelleştirilmiş Uç Değer Dağılımına sahip olsunlar. Yani $\{\eta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenleri $F(x) = exp(-e^{-x}), x \in \mathbb{R}$ dağılım fonksiyonuna sahip olsun. Bu durumda $F(x) \in \Gamma(1)$ olduğundan $g(x) = 1$ olduğu görülür. $E(\eta_1^n) = \mu_n, n = 1,2$ olmak üzere $\{\eta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$U(x)=\frac{x}{\mu_1}+\frac{\mu_e}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_1^2}\left(1-exp(-e^{-x})\right) \tag{87}$$

Böylece,

$$U(\beta)=\frac{\beta}{\mu_1}+\frac{\mu_e}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_1^2}\left(1-exp\left(-e^{-\beta}\right)\right) \tag{88}$$

ve

$$U\big(\beta(1-x)\big)=\frac{1}{\mu_1}\beta(1-x)+\frac{\mu_e}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_1^2}\left(1-exp\left(-e^{-\beta(1-x)}\right)\right) \tag{89}$$

elde edilir. (47) numaralı denklemde (88) ve(89) yerine yazılırsa (84) ile genel durumda hesaplanan errgodik dağılım fonksiyonu yardımı ile

$$\begin{aligned}Q_{W_\beta}(x)=&\frac{\beta x}{\beta+\mu_e}+\frac{1}{\mu_1(\beta+\mu_e)}\left(1-exp\left(-e^{-\beta(1-x)}\right)\right)\\&-\frac{\beta(1-x)}{\mu_1(\beta+\mu_e)^2}\left(1-exp\left(-e^{-\beta}\right)\right)\\&+o\left(\frac{1}{\beta}\left(1-exp\left(-e^{-\beta(1-x)}\right)\right)\right)\end{aligned} \tag{90}$$

bulunur.

$$\frac{\beta x}{\beta+\mu_e}\to x,\beta\to 0;\ \frac{\beta(1-x)}{\mu_1(\beta+c_1)^2}\left(1-exp\left(-e^{-\beta}\right)\right)\to 0,\beta\to\infty;$$

$$\frac{1}{\mu_1(\beta+\mu_e)}\left(1-exp\left(-e^{-\beta(1-x)}\right)\right)\to 0\ ,\beta\to\infty \text{ ve}$$

$$\frac{1}{\beta}\left(1-exp\left(-e^{-\beta(1-x)}\right)\right)\to 0\ ,\beta\to\infty$$

olduğundan $W_\beta(t)=\frac{1}{\beta}(X(t)-s)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun asimptotik açılımı $\beta\equiv S-s\to\infty$ için $[0,1]$ aralığında tanımlı düzgün dağılıma zayıf yakınsar. Yani $\beta\equiv S-s\to\infty$ için

$$Q_{W_\beta}(x) \to K(x) = x$$

dir. $W_\beta(t) = \frac{1}{\beta}(X(t) - s)$ sürecinden $X(t) = s + \beta W_\beta$ sürecine dönüşüm yapılır ise $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı $\beta \equiv S - s \to \infty$ için yaklaşık olarak $[s, S]$ aralığında tanımlı düzgün dağılım gibi davranır. Yani

$$Q_X(x) \approx \frac{X - s}{S - s}, \quad x \in [s, S]$$

dir.

Benzer şekilde Teorem 1.4.1.1 ile verilen şartlara ek olarak talep miktarlarını ifade eden $\{\eta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin Tanım 1.3.3.3.2 ile verilen koşulları sağlayan genelleştirilmiş uç değer dağılımına sahip olduğu varsayılsın. Yani $F(x) = \gamma(\alpha, x)/\,\Gamma(\alpha)$, $x \in [0, \infty)$ dağılımlı olsun. Teorem 1.3.3.3.1 ile biliniyor ki bu koşullar altında talep miktarlarını ifade eden rasgele değişkenler $\Gamma(1)$ sınıfına aittir, yani $g(x) = 1$ olmak üzere $F(x) \in \Gamma(1)$ dir. Ayrıca $F(x) = \gamma(\alpha, x)/\,\Gamma(\alpha)$ olduğundan $\bar{F}(x) = \bar{\Gamma}(\alpha, x)/\Gamma(\alpha)$ dır. Böylece

$$U(x) = \frac{x}{\mu_1} + \frac{\mu_e}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_1^2}\frac{\bar{\Gamma}(\alpha, x)}{\Gamma(\alpha)} \tag{91}$$

buradan da

$$U(\beta) = \frac{\beta}{\mu_1} + \frac{\mu_e}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_1^2}\frac{\bar{\Gamma}(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)} \tag{92}$$

ve

$$U\big(\beta(1 - x)\big) = \frac{1}{\mu_1}\beta(1 - x) + \frac{\mu_e}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_1^2}\frac{\bar{\Gamma}\big(\alpha, \beta(1 - x)\big)}{\Gamma(\alpha)} \tag{93}$$

elde edilir. Burada $\Gamma(.)$, $\gamma(.,.)$ ve $\bar{\Gamma}(.,.)$ fonksiyonları sırası ile (39), (40) ve (41) denklemlerinde tanımlanmış olan özel fonksiyonlardır.

(47) numaralı denklemde (92) ve (93) yerine yazılırsa (84) ile genel durumda hesaplanan ergodik dağılım fonksiyonu yardımı ile

$$Q_{W_\beta}(x) = \frac{\beta x}{\beta + \mu_e} + \frac{1}{\mu_1(\beta + \mu_e)} \frac{\bar{\Gamma}\big(\alpha, \beta(1-x)\big)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\beta(1-x)}{\mu_1(\beta + \mu_e)^2} \frac{\bar{\Gamma}(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)} + o\left(\frac{\bar{\Gamma}\big(\alpha, \beta(1-x)\big)}{\beta\Gamma(\alpha)}\right) \tag{94}$$

bulunur.

$$\frac{\beta x}{\beta + \mu_e} \to x, \beta \to 0; \ \frac{\beta(1-x)}{\mu_1(\beta + c_1)^2} \frac{\bar{\Gamma}(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)} \to 0, \beta \to \infty;$$

$$\frac{1}{\mu_1(\beta + \mu_e)} \frac{\bar{\Gamma}\big(\alpha, \beta(1-x)\big)}{\Gamma(\alpha)} \to 0\ , \beta \to \infty \text{ ve}$$

$$\frac{\bar{\Gamma}\big(\alpha, \beta(1-x)\big)}{\beta\Gamma(\alpha)} \to 0\ , \beta \to \infty$$

olduğundan $W_\beta(t) = \frac{1}{\beta}(X(t) - s)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun asimptotik açılımı $\beta \equiv S - s \to \infty$ için $[0,1]$ aralığında tanımlı düzgün dağılıma zayıf yakınsar. $W_\beta(t) = \frac{1}{\beta}(X(t) - s)$ sürecinden $X(t) = s + \beta W_\beta$ sürecine dönüşüm yapılır ise $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı $\beta \equiv S - s \to \infty$ için yaklaşık olarak $[s, S]$ aralığında tanımlı düzgün dağılım gibi davranır.

3. BULGULAR

Bu çalışmada klasik (s,S) tipli envanter modeller, literatürde önemli bir yere sahip olan ağır kuyruklu dağılımların $\Gamma(g)$ alt sınıfından rasgele değişkenler ile incelenmiştir. Burada ele alınmış olan (s,S) tipli yarı Markov envanter modellere dair literatür çok geniştir. Bu süreçler daha önce farklı sınıflardan hafif kuyruklu talep miktarları ve hafif kuyruklu müdahaleler ile incelenmiş ayrıca sürecin ergodik dağılımı ile n. mertebeden momentleri için asimptotik sonuçlara ulaşılmıştır.

(s,S) tipli envanter modeller ilk defa Aslı Bektaş Kamışlık'ın doktora tezinde ([40]) ağır kuyruklu dağılımların alt üstel dağılımlar ve düzenli değişen dağılımlar sınıfları ile ele alınmış sitemin karakteristikleri asimptotik yöntemlerle incelenmiştir. Ayrıca Ebru Şenol'un yüksek lisans çalışmasında ([72]) bu sistemler ağır kuyruklu dağılımların $L\cap D$ sınıfından daha sonra da $\mathcal{R}_\alpha$ sınıfından talep miktarları ile incelenmiştir. Fakat ağır kuyruklu dağılımlar sınıfı çok farklı karakteristiklere sahip farklı dağılımları ihtiva eder. Özellikle uç değerler teorisinin önemli bir çalışma alanı olan $\Gamma(g)$ sınıfı ağır kuyruklu dağılımların önemli alt sınıflarından biridir. Bu çalışmada ağır kuyruklu dağılımların daha önce incelenmemiş bir alt sınıfı olan $\Gamma(g)$ alt sınıfından dağılımlar ve asimptotik davranışları incelenmiştir. Daha sonra (s,S) tipli envanter modeller $\Gamma(g)$ sınıfından ağır kuyruklu dağılıma sahip talepler ile ele alınmıştır. Böylece (s,S) tipli envanter modellerin ağır kuyruklu dağılıma sahip talep miktarları ile incelenmesine dair çalışmalar tamamlanmıştır.

(s,S) tipli envanter modellerin, yarı Markov ödüllü yenileme süreci olarak adlandırılan matematiksel modeller yardımı ile inşasına dair literatürde pek çok çalışma mevcuttur ([41], [42], [43], [44], [45], [46]). Bu çalışmada da sürecin ergodik dağılımının asimptotik açılımı ve n. mertebeden momentlerinin asimptotik açılımlarına ulaşmak için bahsedilen çalışmalarda elde edilmiş olan genel formüllerinden faydalanılmıştır. (s,S) tipli envanter modeller ile ilgili literatür incelendiğinde sistemi ifade eden sürecin ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik dağılım fonksiyonunun momentleri için kesin formüllerin talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu aracılığı ile verildiği görülür. ([6], [7], [44], [45], [46]). Bu nedenle sistemin $\Gamma(g)$ sınıfından ağır kuyruklu dağılıma sahip talepler ile incelenmesi için öncelikle bu sınıf tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun elde edilmesi gerekir. Bu amaçla yapılan literatür araştırmasında yenileme fonksiyonunu oluşturan rasgele değişkenler $\Gamma(g)$ sınıfından olduğunda Mitov ve

Omey ([57]) tarafından yenileme fonksiyonu için önerilmiş olan aşağıdaki asimptotik açılıma ulaşılmıştır:

$$U(x) = \frac{x}{\mu_1} + \frac{\mu_e}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_1^2} g^2(x)\bar{F}(x)$$

Daha sonra Mitov ve Omey ([57]) tarafından önerilmiş olan bu açılım kullanılarak mevcut literatüre ek olarak aşağıdaki bulgular elde edilmiştir.

Mitov ve Omey ([57]) tarafından elde edilmiş genel formül kullanılarak Γ(g) sınıfından Lojistik dağılıma sahip rasgele değişkenler tarafından üretilmiş yenileme fonksiyonunun asimptotik açılımına ulaşılmıştır. Daha sonra elde edilmiş olan bu açılım kullanılarak talepleri ifade eden rasgele değişkenler Lojistik dağılıma sahipken (s,S) tipli envanter modeli ifade eden stokastik sürecin ergodik dağılımı ve n. mertebeden momentleri için asimptotik açılımlara ulaşılmıştır. Ayrıca ergodik dağılım için elde edilmiş olan asimptotik açılım kullanılarak ergodik dağılımın zayıf yakınsaklığı ispatlanmış ve sürecin limit dağılımı elde edilmiştir. Ardından talepleri ifade eden rasgele değişkenlerin $\Gamma(g)$ sınıfından bir dağılıma sahip olması durumunda (s,S) tipli envanter modeli ifade eden stokastik sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için genel bir asimptotik açılım elde edilmiş ve bu açılım kullanılarak ergodik dağılımın zayıf yakınsaklığı ispatlanmış ve sürecin limit dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca $\Gamma(g)$ sınıfından iki farklı özel dağılım seçilerek elde edilen bu genel durum örneklendirilmiştir.

4. İRDELEME

Yaşadığımız fiziksel dünya literatürde sıra dışı olaylar olarak adlandırılan olaylar ile kuşatılmıştır. Gerçekleşme olasılığı düşük, fakat gerçekleştiğinde kayıp değeri olaya maruz kalan kişi veya kurumlar için yüksek olan olaylara katastrofik olaylar denir. Bu olaylar gerek ekonomik ve finansal krizler gerekse kasırga ve tsunami gibi çevresel felaketler şeklinde kendilerini gösterebilirler. Risk yönetimi ve uç değerler teorisinin ana konusu olan sıra dışı olaylarla tıptan inşaat mühendisliği uygulamalarına, meteorolojiden finansal risk yönetimine ve envanter sistemlere kadar yaşamın birçok alanında karşılaşılmaktadır. Sıra dışı olayların meydana gelme zamanı ve olası etkileri konularında belirsizlik söz konudur. Bu belirsizliğin belli bir düzeyde tahmin edilebilmesi ve ortadan kaldırılabilmesi için bazı bilimsel yöntemlerin kullanılarak bu olayların meydana gelme dinamiklerinin ve çalışılan sistem üzerindeki etkilerinin anlaşılması gerekmektedir.

Günümüzde sıra dışı özellik gösteren olaylara ait verilerin ağır kuyruklu dağılım yapısı gösterdiği bilinmektedir. Ağır kuyruklu dağılıma uyan verilerin gözlemlendiği önemli uygulama alanlarından biri de envanter modeller ile ilgili problemlerdir. Talep miktarını ifade eden rasgele değişkenlerin kuyruk yapılarının envanter sitemler üzerinde önemli etkilerinin olduğu bilinmektedir. Dolayısı ile talep miktarı ağır kuyruklu dağılıma sahip stok kontrol modellerinin gerek olasılık karakteristiklerini incelemek gerekse bu modelleri istatistiksel olarak incelemek, taleplerde bu tür beklenmedik dalgalanmaların yaşandığı durumların stok kontrol modelleri üzerindeki uzun vadede etkilerini tahmin edebilmek açısından önemlidir. Bu çalışmada talep miktarları ağır kuyruklu dağılımların önemli bir alt sınıfı olan $\Gamma(g)$ sınıfından olduğunda (s,S) tipli yarı Markov bir envanter modelin ergodik dağılımı ve ergodik dağılımının momentleri için asimptotik açılımlara ulaşılması hedeflenmiştir. $\Gamma(g)$ sınıfı, uç değer teorisinde sıkça karşılaşılan Weibull, Lojistik ve uç değer dağılımları gibi örnekleri içerir. Bu çalışmanın en önemli ilham kaynağı, Mitov ve Omey ([57]) tarafından yapılmış olan çalışmadır. Bu çalışmada $\Gamma(g)$ sınıfının çok önemli asimptotik özellikleri incelenmiş, bu sınıf tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için bir asimptotik açılım elde edilmiş ve bu açılımın literatürde bilinen sonuçların birçoğunu kapsadığı gösterilmiştir.

Bu çalışmada amacımız klasik yarı Markov (s,S) tipli envanter modelini talep rastgele değişkenleri $\Gamma(g)$ genişletilmiş alt sınıfından bir rasgele değişkene sahip olduğunda incelemektir. Özellikle Lojistik dağılım $\Gamma(g)$ sınıfının bir temsilcisi olarak kullanılmıştır. Lojistik dağılım, büyüme modelleri ve lojistik regresyon olarak bilinen belirli bir regresyon tipinde kullanılan önemli dağılımlardan biridir. Ayrıca bu dağılım nüfus modellemelerinden sağ kalım analizine kadar çok geniş uygulama sahasına sahip bir dağılımdır. Lojistik dağılımın bu kadar geniş bir uygulama alanına sahip olmasındaki temel neden birikimli dağılım fonksiyonunun yapı olarak normal dağılıma göre daha basit olması ve ağır kuyruklu dağılımlar içinde normal dağılıma en iyi yaklaşım gösteren dağılım olmasıdır. Fakat Lojistik dağılımın normal dağılımdan en önemli farkı ağır kuyruklu dağılım yapısında olmasıdır. Normal dağılım için kümülatif olasılıkların bulunması için genellikle z tablosundaki değerlerden faydalanılır. Kesin değerler genellikle istatistiksel yazılımlarla bulunur ve kümülatif dağılım fonksiyonu karmaşık integralleri içerdiğinden çalışması çok zordur. Bu nedenle diğer bazı fonksiyonlar pratikte normal dağılıma yaklaşmak için kullanılmalıdır. Bu amaçla kullanılan birçok fonksiyon vardır fakat bu fonksiyonlar da nispeten karmaşık matematiksel yapılar içerirler. Lojistik dağılım bu dağılımlar ile karşılaştırıldığında çok daha basit bir kümülatif dağılım fonksiyonuna sahiptir, bu nedenle çalışılması daha kolaydır.

Bu çalışmanın önemli özelliklerinden biri (s,S) tipli yarı Markov envanter modellerin ilk defa önemli uygulama alanları olan $\Gamma(g)$ sınıfından dağılımlar ile ele alınmış olmasıdır. Özel olarak, normal dağılıma çok iyi yaklaşım sağladığı bilinen Lojistik dağılım kullanılmıştır. Ayrıca bu sistemlerin ergodik dağılımı ve n. mertebeden momentleri için daha önce yalnızca iki terimli asimptotik sonuçlara ulaşılmışken bu çalışmada ilk defa Lojistik dağılım kullanılarak üç terimli açılımlar elde edilebilmiştir. Üç terimli asimptotik açılımlar taleplerdeki kuyruk dağılımının etkisinin sistem üzerindeki etkisini daha iyi analiz etmemizi sağlamıştır.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada klasik (s,S) tipli yarı Markov envanter model ağır kuyruklu dağılımların önemli bir alt sınıfı olan $\Gamma(g)$ sınıfından dağılımlar ile incelenmiştir. Bu kapsamda yapılan çalışmalar aşağıdaki gibidir:

1. $\Gamma(g)$ sınıfından ağır kuyruklu dağılımlar ile ilgili ayrıntılı bir literatür taraması yapılmış bu dağılımlar bütün asimptotik özellikleri ile incelenmiştir.
2. $\Gamma(g)$ sınıfından dağılımlar tarafından üretilmiş yenileme fonksiyonu için literatürde Mitov ve Omey ([57]) tarafından önerilmiş olan asimptotik açılımlar kullanılarak sırası ile Lojistik dağılım tarafından üretilmiş olan yenileme fonksiyonu için asimptotik açılımlara ulaşılmıştır.
3. Talepleri ifade eden rasgele değişkenler Lojistik dağılıma sahipken (s,S) tipli envanter modeli ifade eden stokastik sürecin ergodik dağılımı için üç terimli asimptotik açılımlara ulaşılmıştır. Burada ayrıca ergodik dağılımın asimptotik açılımı kullanılarak zayıf yakınsama teoremi ispat edilmiş ve limit dağılımına ulaşılmıştır.
4. Talepleri ifade eden rasgele değişkenler Lojistik dağılıma sahipken (s,S) tipli envanter modeli ifade eden stokastik sürecin n. mertebeden momentleri için asimptotik açılımlara ulaşılmıştır.
5. Talepleri ifade eden rasgele değişkenler genel durumda $\Gamma(g)$ sınıfından bir dağılıma sahipken (s,S) tipli yarı Markov envanter modelin ergodik dağılımı için kapalı formüller elde edilmiş ve ergodik dağılım fonksiyonu için limit dağılımına ulaşılmıştır.
6. Beşinci maddede elde edilmiş olan kapalı formüller kullanılarak talepler özel durumda Uç değerler dağılımı ve Gamma tipli dağılıma sahipken ergodik dağılımın asimptotik açılımlarına ulaşılmıştır.

6. ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının (s,S) tipli yarı Markov envanter modellerin ağır kuyruklu dağılımlar ile incelenmesi tamamlanmıştır. Bu çalışmadan sonra ağır kuyruklu dağılımların envanter modellerde kullanımı ile ilgili aşağıdaki çalışmalar önerilebilir.

1. Rasgele yürüyüş süreçlerini içeren sistemlerin ağır kuyruklu dağılımların farklı alt sınıfları ile asimptotik yöntemlerle incelenmesi.

2. Burada bağımsız ağır kuyruklu dağılıma sahip talepler ile ele alınan (s,S) tipli yarı Markov envanter modeller ile ilgili çalışmanın bağımlı ağır kuyruklu dağılımları içerecek şekilde genişletilmesi.

3. Talep miktarları ağır kuyruklu dağılıma sahip envanter modellerin ve bu dağılımların envanter modeller üzerindeki etkisinin uç değerler teorisi kullanılarak istatistiki yönden incelenmesi, sistemlerin ergodik dağılımları ve momentleri için istatistiki tahmin edicilerin araştırılması.

7. KAYNAKLAR

1. Abramowitz, M. ve Stegun, I., Handbook of Mathematical Functions, Milton Abramowitz, U.S. Department of Commerce, ABD, 1964.

2. Adler, R., J., Feldman, R., Taqqu, M. (Eds.), A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques and Applications, Birkhäuser Basel, Boston, 1998.

3. Akdeniz, F., Olasılık ve İstatistik, Akademiyen Kitabevi, Ankara, 2014.

4. Akdi, Y., Matematiksel İstatistiğe Giriş, Bıçaklar Kitapevi, Ankara, 2005

5. Aliyev, R., Stokastik Süreçler Teorisine Giriş, Karadeniz Teknik Üniversitesi Matbaası, Trabzon, 2010.

6. Aliyev, R. ve Khaniyev, T., On the Moments of a Semi-Markovian Random Walk with Gaussian Distribution of Summands, Communications in Statistics: Theory and Methods, 43, 1 (2014) 90 – 104.

7. Aliyev, R., On a Stochastic Process with a Heavy-Tailed Distributed Component Describing Inventory Model Type of (s,S), Communications in Statistics: Theory and Methods, 46, 5 (2016) 2571-2579.

8. Amoroso, L., Ricerche intorno alla curva dei redditi, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 2, 1 (1925) 123-159.

9. Asmussen, S., Ruin Probabilities, Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability, World Scientific Publishing, Singapore, 2000.

10. Asmussen, S., Applied Probability and Queues, B. Roovskii, M. Yor, 2. Baskı, Springer Science & Business Media, New York, 2008.

11. Balakrishnan, N., Handbook of the Logistic Distribution, Narayanaswamy Balakrishnan, CRC Press, New York, 1991.

12. Baltünas, A. ve Klüppelberg, C., Subexponential Distributions - Large Deviations with Applications to Insurance and Queueing Models, Australian & New Zealand Journal of Statistics, 46, 1 (2004) 145-154.

13. Bartholomew, D., J., Stochastic Models for Social Processes, Second Edition, John Wiley & Sons, Chichester, 1973.

14. Bingham, N., H., Goldie, C.,M. ve Teugels, J., L., Regular Variation, Cambridge University Press, New York, 1989.

15. Blackwell, D.A., Renewal theorem, Duke Math. J., 15 (1948) 145-150.

16. Borovkov, A., A., Stochastic Processes in Queuing Theory, Springer, New York, 1976.

17. Chen, F. ve Zheng, Y., S., Sensitivity analysis of an (s,S) inventory model, Operations Research Letters, 21, 1 (1997) 19-23.

18. Coles, S., An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values, Springer Science & Business Media, London, 2013.

19. Conrad, K., Asymptotic Growth, www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/analysis/asymp.pdf, 17 Mart 2019.

20. Crooks, G., E., The Amoroso Distribution, arXiv, preprint arXiv 1005.3274, 2010.

21. d'Alambert, J., L., Recherches sur differens points importants du systeme du monde, 1. Cilt, David I'aine, Paris, 1754.

22. Embrechts, P. ve Omey, E., A Property of Longtailed Distributions, Journal of Applied Probability, 21, 1 (1984) 80-87.

23. **?** Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Applications, 1, 3. Baskı, John Wiley & Sons, New York, 1968.

24. Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications, 2, 2. Baskı, John Wiley & Sons, New York, 1971.

25. Foss, S., Korshunov, D. ve Zachary, S., An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions, Oberwolfach Preprints, Germany, 2009.

26. Foss, S., Korshunov, D. ve Zachary, S., An Introduction to Heavy Tailed and Subexponential Distributions, Springer Series in Operaions Research and Financial Engineering, New York, 2011.

27. Gavirneni, S., An efficient heuristic for inventory control when the customar is using a (s; S) policy, Operations Research Letters, 28, 4 (2001) 187-192.

28. Gellner, M., O-Notation (O-Kalkül, Big-Oh, Landau'sche Symbole), asymptotisches Maß, Sortieren und Algorithmen, https://michaelgoerz.net/studies/semester01/comp_sci2/inf_skript.pdf, 22 Şubat 2019.

29. Geluk, J.,L. ve de Haan, L., Regular variation, extensions and Tauberian theorems, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1987.

30. Geluk, J., L. ve Frenk, J., B., G., Renewal Theory for Random Variables with a Heavy Tailed Distribution and Finite Variance, Statistics and Probability Letters, 81 (2011) 77-82.

31. Gikhman, I., I. ve Skorohod, A., V., Theory of Stochastic Processes II, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1975.

32. Goel, A., Lecture 7: Long Tail, https://web.stanford.edu/~ashishg/msande235/spr08_09/Lecture07.pdf, 4 Mart 2019.

33. Gomes, O., Combes, C. ve Dussauchoy, A., Parameter estimation of the generalized gamma distribution, Mathematics and Computers in Simulation, 79, 4 (2008) 955-963.

34. Gut, A., Stopped Random Walks Limit Theorems and Applications e-book, Springer, New York, 2008.

35. https://docplayer.biz.tr/52585256-Isaret-ve-sistemler-ders-7-konvolusyon-evrisim.html, 9 Aralık 2019.

36. Hildebrand, A., J., Asymptotic Analysis Lecture Notes. www.math.illinois.edu/~ajh/595ama/ama-ch1.pdf, 10 Nisan 2019.

37. Jiang, B., Head/Tail Breaks: A New Classification Scheme for Data with a Heavy-Tailed Distribution, The Professional Geographer, 65, 3 (2013) 482-494.

38. Joiner, B., L. ve Rosenblatt, J., R., Some Properties of the Range in Samples from Tukey's Symmetric Lambda Distributions, Journal of the American Statistical Association, 66, 334 (1971) 394-399.

39. Kaasik, A., Estimating ruin probabilities in the Cramér-Lundberg model with heavy-tailed claims, Doktora Tezi, Institute of Mathematical Statistics, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Tartu, Tartu, 2009.

40. Kamışlık, A.B., (s,S) Tipli Envanter Modellerin Ağır Kuyruklu Dağılımların Belirli Alt Sınıfları ile İncelenmesi, Trabzon Mart 2017.

41. Kesemen, T., On the Semi-Markovian Random Walk with Delay and Weibull Distributed Interference of Chance, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 42, 3 (2013) 299-3007.

42. Kesemen, T., Kamışlık, A.B., Küçük, Z. ve Şenol E., Inventory Model of (s,S) with Subexponential Weibull Distributed Demand, Istatistik Journal of The Turkish Statistical Association, 9, 3 (2016) 81-92.

43. Khaniyev, T., A. and Mammadova, Z., On the Stationary Characteritics of the Extended Model of Type (s,S) with Gaussian Distribution of Summands, Journal of Statistical Computation and Simulation, 76, 10 (2006) 861-874.

44. Khaniyev, T., A. ve Atalay, K., D., On the Weak Convergence of the Ergodic Distribution for an Inventory Model of Type (s,S), Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 9, 4 (2010) 599-611.

45. Khaniyev, T. ve Aksop, C., Asymptotic Results for an Inventory Model of Type (s,S) with a Generalized Beta Interference of Chance, TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, 2, 1 (2011) 223 – 236.

46. Khaniyev, T., A., Kokangul, A. ve Aliyev, R., T., An Asymptotic Approach for a Semi-Markovian Inventory Model of Type (s,S), Applied Stochastic Models in Business and Industry, 29, 5 (2013) 439 – 453.

47. Khaniyev, T., Türksen, B., Gökpınar, F. ve Gever, B., Ergodic Distribution for a Fuzzy Inventory Model of Type (s,S) with Gamma Distributed Demands, Expert Systems with Applications, 40, 3 (2013) 958-963.

48. Kizinevič, E., Sprindys, J. ve Šiaulys, J., Randomly stopped sums with consistently varying distributions, Modern Stochastics: Theory and Applications, 3, 2 (2016) 165-179.

49. Klüppelberg, C., Subexponential Distributions and Integrated Tails, Journal of Applied Probability, 25, 1 (1988) 132-141.

50. Kolmogoroff, A., Über die Analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Annalen, 104, 1 (1931) 415-458.

51. Kolmogrov, A., N., Foundations of the Theory of Probability: Second English Edition, Nathan Morrison, Courier Dover Publications, New York, 2018.

52. Kotz, S. ve Kleiber, C., Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences, John Wiley & Sons, New Jersey, 2003.

53. Kotz, S. ve Nadarajah, S., Extreme Value Distributions: Theory and Applications, Imperial College Press, London, 2000.

54. Küçüközmen, C.C. ve Mazıbaşı, M., Bankalarda Operasyonel Riskin Ölçümü: Uç Değer Teorisi Uygulaması, www.coskunkucukozmen.com/wp-content/uploads/2012/02/ucdeger.pdf, 5 Şubat 2019.

55. Mandelbrot, B., The Variation of Certain Speculative Prices, The Journal of Business, 36, 4 (1963) 394-419.

56. Mikosh, T., Regular Variation, Subexponentiality and Their Applications in Probability Theory, EURANDOM European Institute for Statistics, Probability, Operations Research and their Applications Report, 99, 17, (1999) 1-57.

57. Mitov, K.V. and Omey, E., Intuitive Approximations for the Renewal Function, Statistics and Probability Letters, 84 (2014) 72-80.

58. Nasirova, T., Khaniyev, T., Yapar, C., Ünver, İ. ve Küçük, Z., Olasılık, Karadeniz Teknik Üniversitesi Matbaası, Trabzon, 2009.

59. Omey, E., On the class gamma and related classes of functions, Publications de l'Institut Mathematique, 93, 107 (2013) 1-18.

60. Otiniano, C., E., G ve Gonçalves, C., R., Domain of Attraction of α-Stable Distributions Under Finit Mixture Models, TEMA. Tendencias em Matematica Aplicada e Computacional, 11, 1 (2010) 69-76.

61. Önalan, Ö., Stokastik Süreçler, Avcıol Basım Yayın, Ġstanbul, 2010.

62. Özdemir, S., Gazi Üniversitesi 2017 Bahar dönemi ders notları, 25 Mart 2019.

63. Pareto, V., Manual of Political Economy: A Variorum Translation and Critical Edition, Aldo Montesano, Alberto Zanni, Luigino Bruni, John S. Chipman, Michael McLure, Oxford University Press, U.K., 2014.

64. Prabhu, N., U., Stochastic Storage Processes, Springer Verlag, New York, 1981.

65. Sahin, I., Regenerative Inventory Systems, Springer, New York, 1990.

66. Sayah, A., Kernel quantile estimation for heavy-tailed distributions, Doktora Tezi, Université Mohamed Khider, Biskra, 2012.

67. Seneta, E., Functions of Regular Variation, Lecture Notes in Mathematics 506, Springer, New York, 1976.

68. Sevimlican, A., Laplace Dönüsümü, http://kisi.deu.edu.tr//ali.sevimlican/laplace.pdf, 9 Aralık 2019.

69. Smith, W.L., Asymptotic renewal theorems, Proc. Roy. Soc. Sec. A: Mathematics, 64, 1 (1954) 9-48.

70. Stacy, E., W., A Generaliation of the Gamma Distribution, The Annals of Mathematical Statistics, 33, 3 (1962) 1187-1192.

71. Stacy, E., W. ve Mihram, G., A., Parameter Estimation for a Generalized Gamma Distribution, Technometrics, 7, 3 (1965) 349-358.

72. Şenol, E., Talep Miktarları Sonlu Varyanslı Ağır Kuyruklu Dağılıma Sahip (s,S) Tipli Envanter Modellerin Asimptotik ve Yaklaşık Yöntemlerle İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitersi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2017.

73. Taylor, J., Heavy-tailed Distributions, https://math.la.asu.edu/~jtaylor/teaching/Spring2016/STP421/lectures/stable.pdf, 27 Şubat 2019.

74. Teugels, J., Renewal theorems when the first or the second moment is infinite, The Annals of Mathematical Statistics, 39, 37 (1968) 1210-1219.

75. Teugels, J., L., The Class of Subexponential Distributions, The Annals of Probability, 3, 6 (1975) 1000-1011.

76. Wang, D. ve Tang, Q., Tail Probabilities of Randomly Weighted Sums of Random Variables with Dominated Variation, Stochastic Models, 22, 2 (2006) 253-272.

77. Zhang, C., Uniform Asymptotics for The Tail Probability of Weighted Sums with Heavy Tails, Statistics & Probability Letters, 94 (2014) 221-229.

ÖZGEÇMİŞ

Büşra ALAKOÇ, 1993 yılında Sivas ilinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Balıkesir/Edremit Karagözoğlu İlköğretim Okulunda, lise öğrenimini Balıkesir/Edremit Edremit Lisesinde tamamladı. 2012-2016 yılları arasında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimini yaptı ve lisans öğrenimini bölüm birinciliği ile tamamladı. 2016 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Pedagojik Formasyon eğitimini tamamladı. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim dalında yüksek lisans programına başladı.

Büşra ALAKOÇ bekardır ve İngilizce bilmektedir.

Bektaş Kamışlık, A., **Alakoç, B.**, Kesemen, T., Khaniyev, T., "Inventory Model of Type (s,S) with $\boldsymbol{\Gamma(g)}$ Distributed Component", International Conference on Mathematical and Related Sciences 2019 (ICMRS 2019), Antalya, Türkiye, 27-30 Nisan 2019, pp.45.