

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**UYARLI KALMAN FİLTRESİNİN BAŞARIM VE KARARLILIK
ANALİZİ**

Çenker BİÇER

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2011

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

UYARLI KALMAN FİLTRESİNİN BAŞARIM VE KARARLILIK ANALİZİ

Caner BİÇER

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Levent ÖZBEK

Durum-uzay modelleri fen ve mühendislikte pek çok uygulama alanına sahiptir. Durum-uzay modellerinde asıl problem, gözlenemeyen durum değişkenlerinin tahmin edilmesidir. Bu problemin çözümünde Kalman Filtresi ve İlerletilmiş Kalman Filtresi sırası ile lineer ve lineer olmayan durum-uzay modelleri için sıklıkla kullanılan yöntemlerdir. Lineer durum-uzay modelleri için Kalman Filtresi, modelde bulunan matrisler tam olarak bilindiğinde en iyi durum tahminini verir. Ancak gerçek uygulamalarda bu matrisler tam olarak bilinmez. Bu durumda, Kalman Filtresi tahminlerinde ıraksama meydana gelebilir. Birçok araştırmacı, Kalman Filtresi tahminlerinde meydana gelebilecek ıraksama sorununun üstesinden gelebilmek için çeşitli uyarlı filtreler önermiş ve Kalman Filtresinde bazı güçlendirmeler yapmışlardır. Fakat halen her koşul için ıraksama problemini giderecek uyarlı bir Kalman Filtresi mevcut değildir ve araştırılması gereken konular arasında yer almaktadır.

Bu çalışmada, lineer ve lineer olmayan durum-uzay modelleri ele alınıp Kalman Filtresi, İlerletilmiş Kalman Filtresi açıklanmıştır. Ayrıca çeşitli uyarlı Kalman Filtreleri incelenmiş ve ıraksama sorununun üstesinden gelebilmek için iki yeni uyarlı Kalman Filtresi önerilmiştir. Bunun yanı sıra önerilen uyarlama yöntemlerinin yakınsama analizi üzerinde durulmuş ve filtrelerin tahmin performansları, sindirim sistemine verilen bir ilacın, sindirim sisteminden kan dolaşım sistemine geçişini modelleyen kompartman modeli, etkileşimli iki tür canlı için büyüme modeli olarak bilinen Lotka-Volterra modeli ve Küresel Konumlama Sistemi üzerine hazırlanan Monte Carlo simülasyon çalışmaları ile ortaya konmuştur.

Aralık 2011, 156 sayfa

Anahtar Kelimeler: Durum-Uzay Modeli, Kalman Filtresi, İlerletilmiş Kalman Filtresi, Uyarlı Kalman Filtresi, Kararlılık Analizi.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

PERFORMANCE AND STABILITY ANALYSIS OF ADAPTIVE KALMAN FILTER

Çenker BİÇER

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Statistics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Levent ÖZBEK

State-space models have many application fields in science and engineering. The main problem in state-space models estimates the unobservable state variables. In order to solve this problem, Kalman Filter and Extended Kalman Filter are often used for linear and non-linear state-space models, respectively. Kalman Filter for linear state-space models gives the optimal estimation of the states, when matrices in the model are exactly known. However, these matrices may not be exactly known in real applications. In this case, the Kalman Filter estimations may diverge. An extensive number of adaptive filters have been proposed to overcome the divergence problem of the Kalman Filter by many researchers and have been made some reinforcements in the Kalman Filter. But still, an adaptive Kalman Filter is not available to solve the divergence problem in each condition and is located among the issues to be investigated.

In this study, linear and nonlinear state-space models are emphasized and Kalman Filter and Extended Kalman Filter are investigated. Also, different adaptive Kalman Filters are investigated and two new adaptive Kalman Filters are proposed to overcome the divergence problem. In addition, stability analysis of the proposed adaptation methods are analyzed and estimation performance of the filters is demonstrated by the Monte Carlo simulation studies with compartmental model of drug mass in gastrointestinal system, reproduction model of interacting species and Global Positioning System.

December 2011, 156 pages

Key Words: State-space Model, Kalman Filter, Extended Kalman Filter, Adaptive Kalman Filter, Stability Analysis

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımnda öneri ve yardımlarını esirgemeyerek beni teşvik eden ve her konuda yol gösteren danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Levent ÖZBEK (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü)'e çok teşekkür ederim.

Doktora eğitimimin ilk döneminde danışman hocalığımy yapan, bilgi ve yardımlarını hiç bir zaman esirgemeyen sayın Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü)'e çok teşekkür ederim.

TİK üyelerim Doç. Dr. Cemal ATAKAN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü) ve Yrd. Doç. Dr. Murat EFE (Ankara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektronik Mühendisliği Bölümü)'ye tez çalışmalarım boyunca verdikleri katkılardan dolayı çok teşekkür ederim.

Bana hep destek olan, anlayışlarımı esirgemeyen, desteklerini her an hissettiren çok değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim. Beni anlayıp, her zaman yanımda olan ve beni her koşulda destekleyen sevgili eşim Hayrinisa DEMİRCİ BİÇER'e ve kızım İlayda'ya en içten sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Cenker BİÇER

Ankara, Aralık 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	1
2. KALMAN FİLTRESİ.....	5
2.1 Kesikli Zaman Lineer Stokastik Durum-Uzay Modeli ve Kalman Filtresi	5
2.2 Lineer Olmayan Durum-Uzay Modeli ve İlerletilmiş Kalman Filtresi.....	7
3. UYARLI KALMAN FİLTRESİ.....	10
3.1 Skaler Unutma Faktörü ile Kalman Filtresinin Uyarlanması.....	10
3.2 Matris Unutma Faktörü ile Kalman Filtresinin Uyarlanması	14
3.3 Sistem ve Gözlem Gürültü Süreçlerinin Kovaryans Matrislerinin Tahmin Edilmesi ile Kalman Filtresinin Uyarlanması	19
3.4 Tahmin Hatasına Ait Kovaryans Matrisinin ve Gözlem Gürültü Kovaryans Matrisinin Ölçeklendirilmesi ile Kalman Filtresinin Uyarlanması	28
3.5 Sistem Gürültü Sürecine ait Kovaryans Matrisinin Bir Ölçek Faktörü Kullanılarak Ölçeklendirilmesi ile Kalman Filtresinin Uyarlanması	30
3.6 Çoklu Ölçek Faktörü Kullanılması ile Kalman Filtresinin Uyarlanması.....	32
3.6.1 Belirlenemeyen ölçek faktörlerinin belirlenebilmesi için bir yöntem	36
3.6.2 Çoklu ölçek faktörü kullanılması ile Kalman Filtresinin uyarlanmasının yeni bir düzenlemesi.....	37
3.7 İnovasyon Sürecine Dayalı Yeni Bir Uyarlı Kalman Filtresi	38
4. İLERLETİLMİŞ KALMAN FİLTRESİNİN YAKINSAMASI.....	41
4.1 Kesikli Zaman Deterministik Durum-Uzay Modellerinde Unutma Faktörü ile Uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresinin Yakınsaması.....	41
4.2 Kesikli Zaman Stokastik Durum-Uzay Modellerinde Matris Unutma Faktörü ile Uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresinin Yakınsaması	55
4.2.1 Matris uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi için hata sınırları	58

4.3 Kesikli Zaman Deterministik Durum-Uzay Modellerinde İnovasyon Sürecine Dayalı Yeni Uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresinin Yakınsaması.....	72
4.4 Kesikli Zaman Stokastik Durum-Uzay Modellerinde İnovasyon Sürecine Dayalı Yeni Uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresinin Yakınsaması.....	83
4.4.1 İnovasyon sürecine dayalı yeni uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi için hata sınırları.....	84
5. UYGULAMA ve SİMÜLASYON ÇALIŞMALARI.....	97
5.1 Matris Unutma Faktörü ile Uyarlanmış Kalman Filtresinin Başarımı	97
5.1.1 Gözlem Matrisinin Tam Ranklı Olmaması Durumunda Matris Unutma Faktörü ile Uyarlanmış Kalman Filtresinin Başarımı	97
5.1.2 Gözlem matrisinin tam ranklı olması durumunda matris uyarlı Kalman Filtresinin başarımı	115
5.2 Çoklu Ölçek Faktörü ile Uyarlanmış Kalman Filtresinin Başarımı	119
5.3 Küresel Konumlama Sistemi ile Navigasyon Uygulaması	125
5.3.1 Küresel konumlama sistemi (GPS).....	125
5.3.2 Küresel konumlama sisteminin bölümleri	125
5.3.3 Küresel konumlama sistemi ile konum belirlemenin temel prensibi	126
5.3.4 Küresel konumlama sistemi gözlemleri.....	127
5.3.5 Küresel konumlama sistemi için Durum-uzay modeli.....	128
5.3.5.1 GPS alıcısındaki saatin modellenmesi	128
5.3.5.2 Hareket modeli	129
5.3.5.3 Lineerleştirilmiş gözlem modeli	130
5.3.6 Küresel konumlama sistemi ile anlık konum belirleme için simülasyon çalışması.....	131
5.3.7 Küresel konumlama sistemi ile navigasyon için uygulama çalışması.....	138
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	147
KAYNAKLAR	149
ÖZGEÇMİŞ.....	155

SİMGELER DİZİNİ

x_k	Durum vektörü
y_k	Gözlem vektörü
w_k	Hata vektörü
v_k	Hata vektörü
u_k	Kontrol girdisi
$E(x_0) = \bar{x}_0$	Başlangıç durumu
P_0	Başlangıç kovaryans matrisi
Y_k	$\{y_0, y_1, \dots, y_k\}$ k anına kadar olan tüm gözlemler
$\hat{x}_{k+1/k}$	Y_k verildiğinde x_{k+1} 'in koşullu beklenen değeri
$\hat{x}_{k/k}$	Y_k verildiğinde x_k 'nın koşullu beklenen değeri
$P_{k/k-1}$	Y_{k-1} verildiğinde x_k 'nın koşullu kovaryansı
$P_{k/k}$	Y_k verildiğinde x_k 'nın koşullu kovaryansı
K_k	Kalman kazanç matrisi
ζ_n	Hata vektörü
$f(x_k, u_k)$	Birinci dereceden türeve sahip fonksiyon
$h(x_k)$	Birinci dereceden türeve sahip fonksiyon
A_n	f fonksiyonunun x durum vektörüne göre birinci türevi
C_n	h fonksiyonunun x durum vektörüne göre birinci türevi
\hat{x}_n^-	Önsel tahmin
\hat{x}_n^+	Sonsal tahmin

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 5.1 x_1 durumuna ait filtre tahminleri (Senaryo 1)	100
Şekil 5.2 x_2 durumuna ait filtre tahminleri (Senaryo 1).....	101
Şekil 5.3 c_1 ve c_2 parametrelerine ait filtre tahminleri (Senaryo 1)	101
Şekil 5.4 Unutma faktörlerinin aldığı değerler. (Senaryo 1).....	102
Şekil 5.5 Filtrelerin x_1 durumu tahmin hataları (Senaryo 1)	102
Şekil 5.6 Filtrelerin x_2 durumu tahmin hataları (Senaryo 1).....	103
Şekil 5.7 Filtrelerin c_1 parametresinin tahmininde yaptıkları tahmin hataları (Senaryo 1).....	103
Şekil 5.8 Filtrelerin c_2 parametresinin tahmininde yaptıkları tahmin hataları (Senaryo1).....	104
Şekil 5.9 x_1 durumuna ait filtre tahminleri (Senaryo 2)	105
Şekil 5.10 x_2 durumuna ait filtre tahminleri (Senaryo 2).....	106
Şekil 5.11 c_1 ve c_2 parametrelerine ait filtre tahminleri (Senaryo 2).....	106
Şekil 5.12 Unutma faktörlerinin aldığı değerler (Senaryo 2).....	107
Şekil 5.13 Filtrelerin x_1 durumu tahmin hataları (Senaryo 2)	107
Şekil 5.14 Filtrelerin x_2 durumu tahmin hataları (Senaryo 2).....	108
Şekil 5.15 Filtrelerin c_1 parametresinin tahmininde yaptıkları tahmin hataları (Senaryo 2).....	108
Şekil 5.16 Filtrelerin c_2 parametresinin tahmininde yaptıkları tahmin hataları (Senaryo 2).....	109
Şekil 5.17 x_1 durumuna ait filtre tahminleri (Senaryo 3)	111
Şekil 5.18 x_2 durumuna ait filtre tahminleri (Senaryo 3).....	111
Şekil 5.19 c_1 ve c_2 parametrelerine ait filtre tahminleri (Senaryo 3)	112
Şekil 5.20 Unutma faktörlerinin aldığı değerler. (Senaryo 3).....	112
Şekil 5.21 Filtrelerin x_1 durumu tahmin hataları (Senaryo 3)	113
Şekil 5.22 Filtrelerin x_2 durumu tahmin hataları (Senaryo 3)	113

Şekil 5.23 Filtrelerin c_1 parametresinin tahmininde yaptıkları tahmin hataları (Senaryo 3).....	114
Şekil 5.24 Filtrelerin c_2 parametresinin tahmininde yaptıkları tahmin hataları (Senaryo 3).....	114
Şekil 5.25 Filtrelerin av tahminleri.....	117
Şekil 5.26 Filtrelerin avcı tahminleri.....	118
Şekil 5.27 Matris unutma faktörü ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresinde $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ olmak üzere hesaplanan λ_1 ve λ_2 unutma faktörleri.....	118
Şekil 5.28 İlerletilmiş Kalman Filtresi ve matris unutma faktörü ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresine ait hata kareler toplamı.....	119
Şekil 5.29 Küçük başlangıç hatası ile 1. kompartman için filtrelere ait tahminler	122
Şekil 5.30 Küçük başlangıç hatası ile 2. kompartman için filtrelere ait tahminler	122
Şekil 5.31 Küçük başlangıç hatası olduğu durumda Filtreler tarafından yapılan genel hata kareler toplamı.....	123
Şekil 5.32 Büyük başlangıç hatası ile 1. kompartman için filtrelere ait tahminler	123
Şekil 5.33 Büyük başlangıç hatası ile 2. kompartman için filtrelere ait tahminler	124
Şekil 5.34 Büyük başlangıç hatası olduğu durumda Filtreler tarafından yapılan hata kareler toplamı	124
Şekil 5.35 Aracın 3 boyutlu koordinat sistemindeki hareketi ve filtrelerin konum tahminleri.....	133
Şekil 5.36 Aracın X koordinatındaki hareketi ve filtrelerin konum tahminleri	133
Şekil 5.37 Aracın Y koordinatındaki hareketi ve filtrelerin konum tahminleri	134
Şekil 5.38 Aracın Z koordinatındaki hareketi ve filtrelerin konum tahminleri.....	134
Şekil 5.39 Filtreler tarafından X koordinatında yapılan tahmin hatası.....	135
Şekil 5.40 Filtreler tarafından Y koordinatında yapılan tahmin hatası.....	135
Şekil 5.41 Filtreler tarafından Z koordinatında yapılan tahmin hatası	136
Şekil 5.42 X koordinatında yapılan konum tahmin hatasına ait karekök hata kareler toplamı	136
Şekil 5.43 Y koordinatında yapılan konum tahmin hatasına ait karekök hata kareler toplamı	137

Şekil 5.44 Z koordinatında yapılan konum tahmin hatasına ait karekök hata kareler toplamı	137
Şekil 5.45 Aracın 3 boyutlu koordinat sistemindeki hareketi ve filtrelerin konum tahminleri ($Q_k = 0.01 \times I_8$)	138
Şekil 5.46 Aracın X-Y koordinat sistemindeki hareketi ve filtrelerin konum tahminleri ($Q_k = 0.01 \times I_8$)	139
Şekil 5.47 Filtrelerin X koordinatında yaptıkları tahmin hataları ($Q_k = 0.01 \times I_8$).....	139
Şekil 5.48 Filtrelerin Y koordinatında yaptıkları tahmin hataları ($Q_k = 0.01 \times I_8$).....	140
Şekil 5.49 Filtrelerin Z koordinatında yaptıkları tahmin hataları ($Q_k = 0.01 \times I_8$).....	140
Şekil 5.50 Filtrelerin X koordinatında yaptıkları tahmin hatalarına ait karekök hata kareler toplamları ($Q_k = 0.01 \times I_8$).....	141
Şekil 5.51 Filtrelerin Y koordinatında yaptıkları tahmin hatalarına ait kare kök hata kareler toplamları ($Q_k = 0.01 \times I_8$).....	141
Şekil 5.52 Filtrelerin Z koordinatında yaptıkları tahmin hatalarına ait karekök hata kareler toplamları ($Q_k = 0.01 \times I_8$).....	142
Şekil 5.53 Aracın 3 boyutlu koordinat sistemindeki hareketi ve filtrelerin konum tahminleri ($Q_k = 0.1 \times I_8$)	142
Şekil 5.54 Aracın X-Y koordinat sistemindeki hareketi ve filtrelerin konum tahminleri ($Q_k = 0.1 \times I_8$)	143
Şekil 5.55 Filtrelerin X koordinatında yaptıkları tahmin hataları ($Q_k = 0.1 \times I_8$).....	143
Şekil 5.56 Filtrelerin Y koordinatında yaptıkları tahmin hataları ($Q_k = 0.1 \times I_8$).....	144
Şekil 5.57 Filtrelerin Z koordinatında yaptıkları tahmin hataları ($Q_k = 0.1 \times I_8$).....	144
Şekil 5.58 Filtrelerin X koordinatında yaptıkları tahmin hatalarına ait karekök hata kareler toplamları ($Q_k = 0.1 \times I_8$).....	145
Şekil 5.59 Filtrelerin Y koordinatında yaptıkları tahmin hatalarına ait karekök hata kareler toplamları ($Q_k = 0.1 \times I_8$).....	145
Şekil 5.60 Filtrelerin Z koordinatında yaptıkları tahmin hatalarına ait karekök hata kareler toplamları($Q_k = 0.1 \times I_8$).....	146

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5.1 Simülasyon çalışmasında kullanılacak sayıların üretilmesinde kullanılan başlangıç değerleri	99
Çizelge 5.2 Filtrelerin çalıştırılmasında kullanılan başlangıç değerleri	100
Çizelge 5.3 Filtrelerin çalıştırılmasında kullanılan büyük hataya sahip başlangıç değerleri	105
Çizelge 5.4 c_1 ve c_2 bilinmeyen parametre değerlerinin değiştiği durum için simülasyon çalışmasında kullanılacak sayıların üretilmesinde kullanılan başlangıç değerleri.....	110
Çizelge 5.5 c_1 ve c_2 bilinmeyen parametre değerlerinin değiştiği durum için filtrelerin çalıştırılmasında kullanılan başlangıç değerleri	110
Çizelge 5.6 Simülasyon çalışmasında kullanılacak sayıların üretilmesinde kullanılan başlangıç değerleri	121
Çizelge 5.7 Filtrelerin çalıştırılmasında kullanılacak başlangıç tahminleri.....	121
Çizelge 5.8 Filtrelerin çalıştırılmasında kullanılacak başlangıç değerleri	132

1. GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Kesikli-zaman stokastik durum-uzay modelleri, 1960'lı yıllarda uydu, güdümlü mermi, uzay araçları ve hareket yeteneği olan hedeflerin konumunu izleme ve kontrol etme gibi uygulamalar için geliştirilmiştir. Durum-uzay modelleri, fiziksel ve ekonomik sistemlerin modellenmesinde pek çok uygulama alanına sahiptir (Özbek 1998).

Durum-uzay modelinde asıl problem, gözlenemeyen x_k durum vektörünü $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k$ gözlemlerini kullanarak tahmin etmektir. Bu problem filtreleme olarak bilinir (Jazwinski 1970). İndirgemeli (ardışık) tahmin; sadece k anındaki y_k gözlemine ve $k-1$ anındaki \hat{x}_{k-1} tahminine bağlı olarak k anındaki x_k durumunun en iyi \hat{x}_k değerini tahmin etme problemidir. Bu problem Kalman (1960) tarafından dik izdüşüm yöntemiyle çözülmüştür. Çözüm yöntemi Kalman Filtresi olarak bilinir ve bu tahmin değişik optimizasyon ölçütlerine göre elde edilebilir (Jazvinski 1970, Davis ve Vinter 1985, Özbek 2000a).

Filtreleme problemi oluşturulurken sistem gürültü süreçlerinin kovaryans matrislerinin ve modelde yer alan matrislerin tam olarak bilindiği varsayımı yapılır. Bu matrisler tam olarak bilindiğinde Kalman Filtresi en iyi sonucu verir (Özbek 1998). Ancak uygulamada bu matrisler tam olarak bilinmez. Bu durum filtrenin başarımını olumsuz yönde etkileyebilir ve filtre tahminlerinde ıraksama meydana gelebilir (Mehra 1972). Bu sorunun üstesinden gelebilmek için çeşitli uyarlı filtrelerin önerildiği çok sayıda çalışma yapılmıştır. Ancak her durumu göz önüne alan ve filtredeki ıraksama sorununu ortadan kaldıran bir yöntem halen mevcut değildir.

Kalman Filtresi tahminlerinde meydana gelebilecek ıraksama sorununu ilk olarak ele alan ve bunun önemini belirten araştırmacılar Fagin (1964) ve Fitzgerald (1971)'dir. Mehra (1972) modelde yer alan kovaryans matrislerinin bilinmemesi durumunu incelemiş ve bu kovaryans matrislerinin tahmin edilmesiyle uyarlanan bir Kalman Filtresi önermiştir.

Mohamed ve Schwarz (1999), Mehra (1972)'nin önerdiği yönteme benzer bir biçimde, gürültü süreçlerinin kovaryans matrisleri Q_k ve R_k 'nin filtre içerisinde tahmin edilmesine dayalı bir uyarlı Kalman Filtresi önermişlerdir.

Gustafson (1992) gürültü süreçlerine ait kovaryans matrislerinin yanlış olması durumunda filtrenin davranışını incelemiş ve gürültü süreçlerinin kovaryans matrislerinin aynı katsayı ile ağırlıklandırılması durumunda Kalman Filtresinde meydana gelen tek değişikliğin hata kovaryans matrisinde olduğunu göstermiştir.

Saab ve Nasr (1999) istatistiksel bir modelleme hatası olduğunda, kesikli zaman Kalman Filtresinin hataya olan duyarlılığını yaptığı çalışma ile ortaya koymuştur.

Kalman Filtresinde tahminler geçmiş verilerden elde edilen bilgilere dayanılarak yapıldığından; eğer geçmiş veriler hatalı model kullanımından dolayı anlamını yitirmişlerse bu verilerin güncel durum tahminine olan etkilerini azaltmak gerekir. Fagin (1964) bu amaçla yeni gözlemlerin eski gözlemlere göre daha çok bilgi içerebileceğini göz önünde bulundurarak gözlemlerin üstel olarak ağırlıklandırılabilceğini önermiştir. Xia vd. (1994) bu metodu durum-uzay modeline uyarlayarak, modelin hatalı oluşturulması durumunda filtrelemede bazı güçlendirmelerin yapılmasını sağlayacak, skaler unutma faktörünün hesaplanması için çeşitli algoritmalar önermiştir. Özbek ve Aliev (1998) yaptıkları çalışmada Xia vd. (1994) tarafından önerilen skaler unutma faktörünün filtrede nasıl yer alması gerektiğini göstermişlerdir. Ayrıca kurulan modelin sistemi temsil edip etmediğinin belirlenmesi Aliev ve Özbek (1999) tarafından yapılan çalışma ile ele alınmıştır.

Xia vd. (1994) tarafından da belirtildiği gibi, skaler bir unutma faktörü ile uyarlanmış Kalman Filtresi tek değişkenli sistemler için uygun bir uyarlama yöntemi olmasına rağmen, çok değişkenli sistemlerdeki iraksama sorununu gidermek için etkin bir yöntem değildir. Skaler unutma faktörü ile uyarlanmış Kalman Filtresinin bu eksikliğini gidermek için Özbek vd. (1996) tarafından Kalman Filtresinin bir matris unutma faktörü ile uyarlanması önerilmiştir.

Yang vd. (2006) tarafından İlerletilmiş Kalman Filtresinde zamanla değişen parametrelerin tahminlerini güçlendirmek amacıyla matris ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresi önerilmiştir. Ayrıca Yang vd. (2007) sisteme bilinmeyen bir girdinin olduğu durumu göz önüne almışlar ve filtre tahminlerini güçlendirmek amacıyla yeni bir uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi önermişlerdir.

Kim vd. (2006) sistemde bilinmeyen rasgele bir girdinin olduğu durumu incelemişler ve Kalman Filtresinin bu duruma uyum sağlayacak biçimde skaler bir unutma faktörü ile uyarlanmasını ele alan bir çalışma yapmışlardır.

Ding vd. (2007) gürültü kovaryans matrisinin bir ölçek parametresi kullanılarak filtre içerisinde ölçeklendirilmesiyle bir uyarlı filtre önermişlerdir. Ayrıca Ding vd. (2007) yaptıkları çalışmada ölçek parametresinin filtre eşitliklerinde nasıl yer alması gerektiğini belirtmiş ve ölçek parametresinin seçimi için bir yöntem vermişlerdir.

Jwo ve Weng (2008) yaptıkları çalışmada Kalman Filtresi tahminlerinde güçlendirme yapmak için hata kovaryans matrisinin ve gözlem gürültü sürecinin kovaryans matrisinin gelen veri ile uyum içerisinde olacak biçimde ölçeklendirilmesi gerektiğini belirtmişlerdir. Jwo ve Weng (2008) öngörü hata kovaryans matrisinin ve gözlem gürültü sürecinin kovaryans matrisinin ölçeklendirilmesinin iki farklı ölçek faktörü kullanılarak yapılmasını önermişler ve ölçek faktörlerinin seçimi için bir yöntem vermişlerdir.

Durum-uzay modelinde, sistem ve gözlem gürültü süreçlerin Normal dağılımlı beyaz gürültü süreçleri olduğu varsayıldığında, inovasyon süreci de Normal dağılımlı beyaz gürültü süreci olmaktadır. Ancak uygulamada, gerek gürültü süreçlerine ait kovaryans matrisleri için yaklaşık değerlerin alınmasından, gerekse filtreleme problemi modellenirken yapılan hatalardan dolayı, filtreleme sırasında hesaplanan inovasyon sürecinin Normal dağılıma sahip olmadığı durumlarla karşılaşılabilir. Geng ve Wang (2008) bu durumu göz önünde bulundurarak, filtreleme aşamasında hesaplanan inovasyon sürecinin, Normal dağılmadığı anlarda, inovasyon sürecini Normal dağılımlı olacak şekilde ayarlayacak, çoklu ölçek faktörünün kullanılmasını önermişlerdir. Ayrıca

Geng ve Wang (2008) tarafından çoklu ölçek faktörlerinin hesaplanabilmesi için bir yöntem verilmiştir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde lineer kesikli zaman stokastik durum-uzay modeli ve Kalman Filtresi ile lineer olmayan kesikli zaman stokastik ve deterministik durum-uzay-modeli ve İlerletilmiş Kalman Filtresi ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Kalman Filtresinde model kurma işleminden kaynaklanan kayıpların giderilmesi için Kalman Filtresinin uyarlanması üzerinde durulmuş ve uyarlı filtreler hakkında bilgi verilerek daha önce yapılan çalışmaların bazıları açıklanmıştır. Ayrıca incelenen uyarlı filtre çalışmalarından yola çıkarak, iki yeni uyarlı Kalman Filtresi önerilmiştir.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde önerilen uyarlama yöntemlerinin kullanılması durumunda, kesikli zaman deterministik ve stokastik durum-uzay modellerinde İlerletilmiş Kalman Filtresinin yakınsaması konusu ele alınmıştır. Ayrıca elde edilen sonuçlar daha önce incelenmiş olan yakınsama sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Beşinci bölümde, çalışmanın üçüncü bölümünde önerilen uyarlama yöntemlerinin kullanılması ile kurulacak olan Kalman Filtrelerinin başarımını değerlendirebilmek amacıyla çeşitli simülasyon çalışmaları ve Küresel Konumlama Sistemi (GPS) ile konum tahmini üzerine gerçek veriler kullanılarak bir uygulama çalışması verilmiştir.

Altıncı bölümde, çalışmada elde edilen sonuçlar verilmiştir.

2. KALMAN FİLTRESİ

Bu bölümde, lineer kesikli zaman stokastik durum-uzay modeli ve Kalman Filtresi, lineer olmayan kesikli zaman stokastik durum-uzay modeli ve İlerletilmiş Kalman Filtresi, lineer olmayan kesikli zaman deterministik durum-uzay modeli ve İlerletilmiş Kalman Filtresi açıklanmıştır.

2.1 Kesikli Zaman Lineer Stokastik Durum-Uzay Modeli ve Kalman Filtresi

Durum-uzay modeli, sistemin durumunu gösteren ancak gözlenemeyen, $\{x_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ stokastik süreci ile ilgili bir durum eşitliği ve gözlenebilen, $\{y_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ stokastik süreci ile ilgili bir gözlem eşitliğinden oluşan

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + w_k \quad (2.1)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (2.2)$$

şeklinde bir modeldir. Burada $x_k \in \mathbb{R}^n$ durum vektörü, $y_k \in \mathbb{R}^m$ gözlem vektörü, Φ_k, H_k bilinen matrisler, x_0, w_k, v_k normal dağılımlı ilişkisiz beyaz gürültü süreçleridir.

Ayrıca

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

olmak üzere, beyaz gürültü süreçlerinin her k, j değeri için

$$E[v_k] = 0 \quad (2.3)$$

$$E[w_k] = 0 \quad (2.4)$$

$$E[v_k v_j'] = R_k \delta_{kj} \quad (2.5)$$

$$E[w_k w_j'] = Q_k \delta_{kj} \quad (2.6)$$

$$E[v_k w_j'] = 0 \quad (2.7)$$

$$E[x_0] = \bar{x}_0 \quad (2.8)$$

$$E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)'] = P_0 \quad (2.9)$$

$$E[x_0 w_k'] = 0 \quad (2.10)$$

$$E[x_0 v_k'] = 0 \quad (2.11)$$

varsayımlarını sağladığı ve Φ_k, H_k, Q_k, R_k matrislerinin bilindiği varsayılr. Bu varsayımlar ve

$$\hat{x}_{0/0} = E[x_0]$$

$$P_{0/0} = E[(x_0 - \hat{x}_{0/0})(x_0 - \hat{x}_{0/0})']$$

$$\hat{x}_{k/k-1} = E[x_k | y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_0]$$

$$\hat{x}_k = E[x_k | y_k, y_{k-1}, \dots, y_0]$$

$$P_{k/k-1} = E[(x_k - \hat{x}_{k/k-1})(x_k - \hat{x}_{k/k-1})' | y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_0]$$

$$P_k = E[(x_k - \hat{x}_{k/k})(x_k - \hat{x}_{k/k})' | y_k, y_{k-1}, \dots, y_0]$$

gösterimleri altında Kalman Filtresi,

$$\hat{x}_{k/k-1} = \Phi_k \hat{x}_{k-1} \quad (2.12)$$

$$P_{k/k-1} = \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' + Q_{k-1} \quad (2.13)$$

$$K_k = P_{k/k-1} H_k' (H_k P_{k/k-1} H_k' + R_k)^{-1} \quad (2.14)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k/k-1} + K_k (y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1}) \quad (2.15)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k/k-1} \quad (2.16)$$

eşitlikleri ile verilir. Burada $\hat{x}_{k|k-1}$ durum vektörünün bir öngörüsünü, $P_{k|k-1}$ durum öngörüsüne ait hata kovaryans matrisini, K_k Kalman kazancını, \hat{x}_k durum tahminini ve P_k tahmine ait hata kovaryans matrisini göstermektedir. Ayrıca inovasyon süreci

$$z_k = y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} \quad (2.17)$$

biçiminde tanımlanır (Anderson ve Moore 1979, Grewal ve Andrews 2008).

2.2 Lineer Olmayan Durum-Uzay Modeli ve İlerletilmiş Kalman Filtresi

Bir sistem ile ilgili durum değişkeni n boyutlu x rasgele vektörü ve gözlem değişkeni m boyutlu y rasgele vektörü olsun. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonları sürekli türevlere sahip olmak üzere bu sistem için durum-uzay modeli,

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k \quad (2.18)$$

$$y_k = h(x_k) + v_k \quad (2.19)$$

biçiminde olsun ve

$$E[v_k] = 0 \quad (2.20)$$

$$E[w_k] = 0 \quad (2.21)$$

$$E[v_k v_j'] = \begin{cases} R_k, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (2.22)$$

$$E[w_k w_j'] = \begin{cases} Q_k, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (2.23)$$

$$E[v_k w_j'] = 0 \quad (2.24)$$

$$E[x_0] = \bar{x}_0 \quad (2.25)$$

$$Cov(x_0) = P_0 \quad (2.26)$$

$$E[x_0 w'_k] = 0 \quad (2.27)$$

$$E[x_0 v'_k] = 0 \quad (2.28)$$

varsayımlarının sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda İlerletilmiş Kalman Filtresi,

$$\hat{x}_{k/k-1} = f(\hat{x}_{k-1}) \quad (2.29)$$

$$P_{k/k-1} = \left[\frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_{k-1}}(\hat{x}_{k-1}) \right] P_{k-1} \left[\frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_{k-1}}(\hat{x}_{k-1}) \right]' + Q_{k-1} \quad (2.30)$$

$$K_k = P_{k/k-1} \left[\frac{\partial h_k}{\partial x_k}(\hat{x}_{k/k-1}) \right] \left[\left[\frac{\partial h_k}{\partial x_k}(\hat{x}_{k/k-1}) \right] P_{k/k-1} \left[\frac{\partial h_k}{\partial x_k}(\hat{x}_{k/k-1}) \right]' + R_k \right]^{-1} \quad (2.31)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k/k-1} + K_k [y_k - h_k(\hat{x}_{k/k-1})] \quad (2.32)$$

$$P_k = \left(I - K_k \left[\frac{\partial h_k}{\partial x_k}(\hat{x}_{k/k-1}) \right] \right) P_{k/k-1} \quad (2.33)$$

eşitlikleri ile verilir (Chen 1993, Grewal ve Andrews 2008). Bu gösterimden farklı olarak

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \quad (2.34)$$

$$y_k = h(x_k) \quad (2.35)$$

eşitlikleri ile verilen lineer olmayan kesikli-zaman deterministik durum-uzay modeli göz önüne alınsın. Burada $k \in N_0$ kesikli zaman noktasını, $x_k \in \mathbb{R}^n$ durum vektörünü, $u_k \in \mathbb{R}^n$ girdi vektörünü, $y_k \in \mathbb{R}^m$ çıktı vektörünü göstermektedir.

$f(.,.)$ ve $h(.)$ fonksiyonlarının her ikisinin de sürekli türevlere sahip olduğu varsayılsın. Bu sistem için deterministik durum İlerletilmiş Kalman Filtresi,

Zaman Yinelemesi:

$$\hat{x}_{k/k-1} = f(\hat{x}_k, u_k) \quad (2.36)$$

$$P_{k/k-1} = A_k P_{k-1} A_k' + Q_k \quad (2.37)$$

Lineerleştirme:

$$A_k = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_k, u_k) \quad (2.38)$$

Ölçüm Yinelemesi:

$$\hat{x}_k = f(\hat{x}_{k/k-1}, u_k) + K_n (y_n - h(\hat{x}_{k/k-1})) \quad (2.39)$$

$$P_k = (I - K_n C_k) P_{k/k-1} \quad (2.40)$$

Kalman Kazancı:

$$K_k = P_{k/k-1} C_k' (C_k P_{k/k-1} C_k' + R_k)^{-1} \quad (2.41)$$

Lineerleştirme:

$$C_k = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_{k/k-1}) \quad (2.42)$$

eşitlikleri ile verilir (Reif ve Unbehauen 1999). Burada Q_k ve R_k sırası ile $n \times n$ ve $m \times m$ boyutlu simetrik pozitif tanımlı kovaryans matrisleridir.

3. UYARLI KALMAN FİLTRESİ

Bu bölümde literatürde önerilen bazı uyarlı Kalman Filtreleri açıklanmıştır. Bunun yanı sıra açıklanan uyarlı Kalman Filtrelerinden farklı olarak iki değişik yeni uyarlı Kalman Filtresi önerilmiştir.

3.1 Skaler Unutma Faktörü ile Kalman Filtresinin Uyarlanması

Bu kısımda, Xia vd. (1994) tarafından yapılan çalışma temel alınarak, skaler bir unutma faktörüyle Kalman Filtresinin uyarlanması açıklanmıştır.

Kalman Filtresinin bir skaler unutma faktörüyle uyarlanabilmesi için (2.1) - (2.2) ile verilen durum-uzay modeli göz önüne alınsın. (2.3) - (2.11) ile verilen varsayımların sağlandığı ve Φ_k, H_k, Q_k, R_k matrislerinin bilindiği varsayımı altında, Kalman Filtresi (2.12) - (2.16) eşitlikleri ile verildiği gibidir. Kurulan model sistem dinamiğini tam olarak temsil ediyorsa, Kalman Filtresi durumun en iyi tahminini verir (Jazwinski 1970). (2.14) eşitliği Kalman kazancı olarak adlandırılır ve en iyi filtre kazancı kullanıldığında (2.17) ile verilen inovasyon süreci beyaz gürültü süreci özelliğini sağlar. Ayrıca (2.17) eşitliği ile tanımlanan inovasyon süreci z_k 'nin kovaryans matrisi

$$C_{z_k} = E[z_k z_k'] = H_k P_{k/k-1} H_k' + R_k \quad (3.1)$$

dır. Otokovaryans matrisi ise

$$C_{z_{j,k}} = E[z_{k+j} z_k'] = H_k \Phi_{k+j} \left(I - K_{k+j-1} H_{k+j-1}' \right) \dots \Phi_{k+2} \left(I - K_{k+1} H_{k+1}' \right) \Phi_{k+2} \left(P_{k/k-1} H_k' - K_k C_{z_k} \right), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2)$$

dır (Xia vd. 1994, Özbek 2000b).

(2.14) ve (3.1) eşitlikleri (3.2) eşitliğinde kullanılırsa $C_{z_j,k}$ sifıra eşit olur. Bu ise inovasyon sürecinin en iyi kazanç kullanıldığında ilişkisiz olduğunu gösterir. Modelin gerçek sistemi tam olarak yansıtmadığı durumlarda (modelin hatalı-eksik-yanlış kurulması durumunda) ise inovasyon sürecine ait kovaryans matrisi (3.1) ile verilen kovaryans matrisinden farklılık gösterir. Bu nedenle $C_{z_j,k}$ sıfırdan farklı olabilir, yani inovasyon süreci beyaz gürültü süreci özelliğini sağlamayabilir. Skaler bir unutma faktörü ile Kalman Filtresinin uyarlanması temelde inovasyon sürecine ait $C_{z_j,k}$ otokovaryans matrisinin sıfırdan farklı olduğu anlarda $C_{z_j,k}$ 'yı sıfır yapacak şekilde skaler bir unutma faktörünün kullanılması olarak ifade edilebilir. Modelleme aşamasında eğer sistem dinamiği iyi temsil edilememişse filtre yanlış çalışacaktır. Bunu önlemek amacıyla Fagin (1964), yeni gözlemlerin eski gözlemlere göre daha çok bilgi içerebileceğini ve bu nedenle de gözlemlerin üstel olarak ağırlıklandırılabilirliğini önermiştir. Fagin (1964) tarafından geliştirilen bu yöntem Xia vd. (1994) tarafından durum-uzay modeline uygulanmış ve öngörü hatasına ait kovaryans matrisinin

$$P_{k/k-1} = \lambda_k \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi'_{k-1} + Q_{k-1} \quad (3.3)$$

biçiminde olması gerektiği önerilmiştir. Burada $\lambda_k \geq 1$ özelliğini sağlayan skaler bir unutma faktörüdür. Öngörü hatasına ait kovaryans matrisinin (3.3) eşitliğinde verildiği biçimde kullanılması durumunda, λ_k 'nın (3.2) ile verilen inovasyon sürecine ait otokovaryans eşitliğinin sadece son teriminde etkili olduğu görülür ve unutma faktörü bu son terim göz önüne alınarak belirlenebilir. Bu durumda (3.2) eşitliği sifıra eşit olur. Bu ise K_k kazancının en iyi olması durumunda,

$$P_{k/k-1} H'_k - K_k C_{z_k} = 0 \quad (3.4)$$

eşitliğinin sağlanması demektir. Yani kazanç en iyi ise (3.4) eşitliği sağlanır. Bu düşünce uyarlı filtrenin temelini oluşturur. (3.4) eşitliğindeki C_{z_k} kovaryans matrisi ise gözlemler üstel olarak ağırlıklandırılacak biçimde,

$$C_{z_k} = D_{1,k} / D_{2,k} \quad (3.5)$$

$$D_{1,k} = D_{1,k-1} / \lambda_{k-1} + z_k z_k' \quad (3.6)$$

$$D_{2,k} = D_{2,k-1} / \lambda_{k-1} + 1 \quad (3.7)$$

$$D_{1,0} = 0, \quad D_{2,0} = 0$$

eşitlikleri kullanılarak hesaplanır (Xia vd. 1994). Burada C_{z_k} , $D_{1,k}$ ve $D_{2,k}$ reel değerli skalerdir. Xia vd. (1994), gözlem matrisinin tam ranklı olup olmaması durumunu göz önünde bulundurarak, en iyi skaler unutma faktörünün hesaplanabilmesi için üç farklı algoritma önermişlerdir.

Algoritma 1: Eşitlik (2.2)'de verilen H_k gözlem matrisinin tam ranklı olmaması durumunda en iyi skaler unutma faktörünün hesaplanabilmesi için ilk olarak

$$S_k = P_{k/k-1} H_k' - K_k C_{z_k} \quad (3.8)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda Kalman Filtresinin başarımı

$$f(\lambda, k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m S_{ij,k}^2 \quad (3.9)$$

fonksiyonu göz önüne alınarak değerlendirilebilir. Burada $S_{ij,k}$, S_k matrisinin (i, j) elemanıdır. $f(\lambda, k)$ fonksiyonunun değeri ne kadar küçük olursa filtre en iyi tahmine okadar yaklaşır. $f(\lambda, k)$ 'nin mutlak minimumunda ise filtre en iyi tahmini verir. Böylece en iyi skaler unutma faktörü λ_k , $f(\lambda, k)$ fonksiyonunu minimize edecek biçimde,

$$\lambda_k^{l+1} = \lambda_k^l - \tau \left. \frac{\partial f(\lambda, k)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_k^l}, \quad \forall l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

iteratif yöntemi kullanılarak hesaplanabilir. Burada l her k anındaki iterasyon indisi, τ ($0 < \tau < 1$) ise iteratif yöntemdeki adım uzunluğudur. Bu yöntem literatürde Gradient Descent olarak bilinir (Hendrix ve Toth 2010). Ayrıca (3.10) eşitliğindeki gradiyent terimi

$$\frac{\partial f^l(\lambda, k)}{\partial \lambda_k^l} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m S_{ij,k}^l \left(\frac{\partial S_k^l}{\partial \lambda_k^l} \right) \quad (3.11)$$

dır. Burada

$$S_k^l = P_{k|k-1}^l H_k' - K_k^l C_{z_k}, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_k^l}{\partial \lambda_k^l} &= \Phi_k P_{k-1|k-1} \Phi_k' H_k' \\ &\quad \times \left\{ I - [T_k^l]^{-1} C_{z_k} \right\} + K_k^l H_k \\ &\quad \times \Phi_k P_{k-1|k-1} \Phi_k' H_k' \\ &\quad \times \left\{ I + [T_k^l]^{-1} C_{z_k} \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} P_{k+1/k}^l &= \lambda_{k+1}^l \Phi_{k+1} P_{k/k} \Phi_{k+1}' + Q_k \\ K_k^l &= P_{k|k-1}^l H_k' [T_k^l]^{-1} \\ T_k^l &= H_k P_{k|k-1}^l H_k' + R_k \\ P_{k/k}^l &= [I - K_k^l H_k] P_{k|k-1}^l \end{aligned}$$

dir.

Algoritma 2: Q_k, R_k, P_0 matrisleri pozitif tanımlı ve H_k gözlem matrisi tam ranklı olmak üzere, en iyi skaler unutma faktörü

$$\lambda_k = \max \left\{ 1, \frac{1}{n} \text{trace} [N_k M_k^{-1}] \right\} \quad (3.13)$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada,

$$M_k = H_k \Phi_{k-1} P_{k-1/k-1} \Phi_{k-1}' H_k' \quad (3.14)$$

$$N_k = C_{z_k} - H_k Q_{k-1} H_k' - R_k \quad (3.15)$$

dır (Xia vd. 1994).

Algoritma 3: Q_k, R_k, P_0 matrisleri pozitif tanımlı ve H_k gözlem matrisi tam ranklı olmak üzere, en iyi skaler unutma faktörü (3.14)-(3.15) eşitlikleri alınarak

$$\lambda_k = \max \left\{ 1, \frac{\text{trace} [N_k]}{\text{trace} [M_k]} \right\} \quad (3.16)$$

biçiminde hesaplanır (Xia vd. 1994).

Xia vd. (1994) tarafından geliştirilen skaler unutma faktörü ile Kalman Filtresinin uyarlanması, Özbek ve Aliev (1998) tarafından yeniden ele alınmış ve (3.3) ile verilen hata kovaryans matrisinin, Kalman Filtresi eşitliklerinde

$$P_{k/k-1} = \lambda_k (\Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' + Q_{k-1}) \quad (3.17)$$

biçiminde olması gerektiği belirtilmiştir.

3.2 Matris Unutma Faktörü ile Kalman Filtresinin Uyarlanması

Bu kısımda, Özbek vd. (1996) tarafından yapılan çalışma temel alınarak, simetrik bir matris unutma faktörüyle Kalman Filtresinin uyarlanması ve Kalman Filtresinin köşegen bir matris unutma faktörü ile yeni bir uyarlaması verilmiştir.

Kalman Filtresinin skaler bir unutma faktörüyle uyarlanması tek değişkenli sistemler için bir başarımlı artış sağlasa da, çok değişkenli sistemlerde modelleme hatası her değişken için farklı oranlarda olabileceğinden dolayı, skaler unutma faktörü yerine bir matris unutma faktörü kullanılmalıdır (Xia vd. 1994). Bu durum, Özbek vd. (1996) tarafından ele alınmış ve Kalman Filtresinin simetrik bir matris unutma faktörü ile uyarlanması önerilmiştir.

Kalman Filtresinin simetrik bir matris unutma faktörü ile uyarlanması aşamasında Özbek vd. (1996) tarafından ilk olarak (2.1) - (2.2) eşitlikleri ile verilen lineer stokastik durum-uzay modeli alınmış ve öngörü hatasına ait kovaryans matrisinin

$$P_{k/k-1} = \Phi_{k-1} \Lambda_{k-1} P_{k-1} \Lambda'_{k-1} \Phi'_{k-1} + Q_{k-1} \quad (3.18)$$

biçiminde alınmasıyla Kalman Filtresinin uyarlanabileceği belirtilmiştir. Burada Λ_k $n \times n$ boyutlu simetrik bir matristir. Bu şekilde kurulan Kalman Filtresi için en iyi matris unutma faktörünün seçimi; H_k gözlem matrisi tam ranklı olmak üzere,

$$\Lambda_k P_{k-1/k-1} \Lambda_k = L_k \quad (3.19)$$

lineer olmayan denklem sisteminin çözümünden elde edilebilir. Burada

$$N_k = C_{z_k} - H_k Q_k H'_k - R_k \quad (3.20)$$

olmak üzere

$$L_k = \Phi_k^{-1} (H'_k H_k)^{-1} H_k N_k H'_k (H'_k H_k)^{-1} (\Phi_k^{-1})' \quad (3.21)$$

dir. C_{z_k} kovaryans matrisi ise gözlenmiş verilerden (3.5) - (3.7) eşitlikleri kullanılarak hesaplanabilir (Özbek vd. 1996).

Özbek vd. (1996) tarafından yapılan çalışmadan farklı olarak, matris unutma faktörü, öngörü hatasına ait kovaryans matrisinde yer alan Q_k kovaryans matrisinde üstel olarak ağırlıklandırılacak biçimde, köşegen bir matris olarak düşünülebilir. Bu düşünce ile Kalman Filtresinin köşegen bir matris unutma faktörüyle uyarlanması, (3.18) eşitliği ile verilen öngörü hatasına ait kovaryans matrisinin yerine

$$P_{k/k-1} = \Phi_{k-1} \Lambda_{k-1} P_{k-1} \Lambda'_{k-1} \Phi'_{k-1} + \Lambda_{k-1} Q_{k-1} \Lambda'_{k-1} \quad (3.22)$$

eşitliğinin alınmasıyla yapılabilir. Burada Λ_k , $(n \times n)$ boyutlu köşegen matristir. Bu şekilde kurulan Kalman Filtresinin başarımı Λ_k köşegen matris unutma faktörüne bağlıdır ve Kalman Filtresi en iyi olacak şekilde Λ_k matris unutma faktörünün belirlenmesi gerekir. En iyi unutma faktörü Λ_k ise gözlem matrisi H_k 'nın tam ranklı olup olmaması durumuna göre Algoritma 4 veya Algoritma 5 kullanılarak hesaplanabilir.

Algoritma 4: Q_k, R_k matrisleri pozitif tanımlı ve H_k tam ranklı olmak üzere; en iyi matris unutma faktörü Λ_k ,

$$\Phi_{k-1} \Lambda_{k-1} P_{k-1} \Lambda'_{k-1} \Phi'_{k-1} + \Lambda_{k-1} Q_{k-1} \Lambda'_{k-1} = (H'_k H_k)^{-1} H'_k (C_{z_k} - R_k) H_k (H'_k H_k)^{-1}$$

lineer olmayan denklem sisteminin çözümünden elde edilir. Bunu açıklığa kavuşturmak için (2.14) eşitliği, (3.4) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} P_{k/k-1} H'_k - \left(P_{k/k-1} H'_k (H_k P_{k/k-1} H'_k + R_k)^{-1} \right) C_{z_k} &= 0 \\ P_{k/k-1} H'_k \left(I - (H_k P_{k/k-1} H'_k + R_k)^{-1} C_{z_k} \right) &= 0 \\ \left(I - (H_k P_{k/k-1} H'_k + R_k)^{-1} C_{z_k} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(H_k P_{k/k-1} H_k' + R_k)^{-1} C_{z_k} &= I \\
(H_k P_{k/k-1} H_k' + R_k)^{-1} &= (C_{z_k})^{-1} \\
H_k P_{k/k-1} H_k' + R_k &= C_{z_k} \\
H_k P_{k/k-1} H_k' &= C_{z_k} - R_k \\
P_{k/k-1} &= (H_k' H_k)^{-1} H_k' (C_{z_k} - R_k) H_k (H_k' H_k)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

elde edilir. (3.22) ve (3.23) eşitliklerinin denkleğinden,

$$\Phi_{k-1} \Lambda_{k-1} P_{k-1} \Lambda_{k-1}' \Phi_{k-1}' + \Lambda_{k-1} Q_{k-1} \Lambda_{k-1}' = (H_k' H_k)^{-1} H_k' (C_{z_k} - R_k) H_k (H_k' H_k)^{-1} \tag{3.24}$$

yazılabilir. (3.24) eşitliğinin sağ tarafındaki C_{z_k} kovaryans matrisi ise, gözlenmiş verilerden ardışık olarak,

$$C_{z_k} = D_{1,k} D_{2,k}^{-1} \tag{3.25}$$

$$D_{1,k} = D_{1,k-1} \bar{\Lambda}_{k-1}^{-2} + z_k z_k' \tag{3.26}$$

$$D_{2,k} = D_{2,k-1} \bar{\Lambda}_{k-1}^{-2} + I \tag{3.27}$$

$$D_{1,0} = \underline{0}, \quad D_{2,0} = \underline{0}$$

eşitliklerinin kullanılmasıyla hesaplanabilir. Burada $\bar{\Lambda}_{k-1}$, $k-1$ anında hesaplanmış olan ve üzerinden gözlem alınabilen durum değişkenlerine karşılık gelen unutm faktörlerinden oluşan köşegen bir matristir. Bu haliyle (3.24) eşitliği lineer olmayan bir denklem sistemidir ve Λ_k matrisinin elemanları bu denklem sisteminden örneğin Newton-Raphson yöntemi gibi iteratif bir yöntem kullanılarak elde edilebilir.

Algoritma 5: H_k gözlem matrisinin tam ranklı olmaması durumunda, en iyi matris unutm faktörü Λ_k , Q_k ve R_k matrisleri pozitif tanımlı olmak üzere;

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m S_{ij,k}^2 \quad (3.28)$$

olarak tanımlanan fonksiyonu minimize edecek biçimde seçilebilir. Burada $S_{ij,k}$ (3.22) eşitliğinin (3.4) eşitliğinde kullanılmasıyla elde edilen ve

$$S_k = (\Phi_{k-1} \Lambda_{k-1} P_{k-1} \Lambda'_{k-1} \Phi'_{k-1} + \Lambda_{k-1} Q_{k-1} \Lambda'_{k-1}) H'_k - K_k C_{z_k} \quad (3.29)$$

biçiminde tanımlanan S_k matrisinin (i, j) . elemanıdır. Ayrıca (3.28) eşitliğindeki $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, Λ_k matrisinin köşegen elemanlarını göstermektedir. (3.28) eşitliği ile tanımlanan $F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, k)$ fonksiyonunun değeri ne kadar küçük olursa filtre en iyi tahmine okadar yaklaşır. $F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, k)$ 'nın mutlak minimumunda ise filtre en iyi tahmini verir. Böylece en iyi matris unutma faktörü Λ_k , $F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, k)$ fonksiyonunu minimize edecek biçimde,

$$\tilde{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]'$$

ve

$$\nabla F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, k)}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, k)}{\partial \lambda_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, k)}{\partial \lambda_n} \end{bmatrix}$$

olmak üzere;

$$\tilde{\lambda}_k^{l+1} = \tilde{\lambda}_k^l - \epsilon \nabla F \quad \forall l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.30)$$

iteratif yöntemi kullanılarak hesaplanabilir. Burada l , k anındaki iterasyon indisi, τ ($0 < \tau < 1$) ise gradiyent metodundaki adım uzunluğudur. Ayrıca her k anındaki başlangıç değeri olarak $\hat{\lambda}_k^0 = [1, 1, \dots, 1]'$ değeri seçilebilir. İterasyon işlemi yeterince küçük bir $\varepsilon > 0$ değeri için,

$$\left| F(\hat{\lambda}_k^{l+1}) - F(\hat{\lambda}_k^l) \right| \leq \varepsilon \quad (3.31)$$

şartı sağlandığında durdurulur. Böylece k anındaki i . ($i = 1, 2, \dots, n$) unutm faktörü $\lambda_{i,k}$,

$$\lambda_{i,k} = \max(1, \hat{\lambda}_{i,k}^{l+1}) \quad (3.32)$$

olarak seçilebilir. Burada $\hat{\lambda}_{i,k}^{l+1}$, k anındaki $(l+1)$. iterasyon sonucunda elde edilen i . unutm faktörünün tahminidir. k anındaki en iyi matris unutm faktörü ise (3.32) eşitliğinden

$$\Lambda_k = \begin{bmatrix} \lambda_{1,k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{2,k} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{q,k} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

olarak elde edilir.

3.3 Sistem ve Gözlem Gürültü Süreçlerinin Kovaryans Matrislerinin Tahmin Edilmesi ile Kalman Filtresinin Uyarlanması

Sistem ve gözlem gürültü süreçlerine ait kovaryans matrislerinin tahmin edilmesi ile Kalman Filtresinin uyarlanması ilk olarak Mehra (1972)'nin çalışmasına dayanır. Mehra (1972)'nin çalışmasından farklı olarak Mohamed ve Schwarz (1999) tarafından sistem ve gözlem gürültü süreçlerine ait kovaryans matrisleri için farklı tahmin ediciler

önerilmiştir. Bu kısımda, Mohamed ve Schwarz (1999) tarafından yapılan çalışma temel alınarak Kalman Filtresinin uyarlanması açıklanmıştır.

Sistem gürültü sürecine ait Q_k kovaryans matrisi ve gözlem gürültü sürecine ait R_k kovaryans matrisinin en çok olabilirlik tahmin edicilerini elde etmek için ilk olarak (2.1) ve (2.2) eşitlikleri ile verilen lineer stokastik durum-uzay modeli göz önüne alınsın. Ayrıca gürültü süreçlerine ait Q_k ve R_k kovaryans matrisleri

$$Vec(Q) = \begin{bmatrix} Q_{11} \\ \vdots \\ Q_{1n} \\ Q_{21} \\ \vdots \\ Q_{2n} \\ \vdots \\ Q_{n1} \\ \vdots \\ Q_{nn} \end{bmatrix}, \quad Vec(R) = \begin{bmatrix} R_{11} \\ \vdots \\ R_{1m} \\ R_{21} \\ \vdots \\ R_{2m} \\ \vdots \\ R_{m1} \\ \vdots \\ R_{mm} \end{bmatrix}$$

gösterimleri altında,

$$\alpha = \begin{bmatrix} Vec(Q_k) \\ Vec(R_k) \end{bmatrix}$$

biçiminde tahmin edilecek parametrelerin bir vektörü olarak tanımlansın. Bu durumda α parametre vektörünün en çok olabilirlik tahmin edicisi, inovasyon sürecinin α parametre vektörüne göre koşullu dağılımından elde edilebilir. (2.3) - (2.11) ile verilen başlangıç varsayımları sağlansın ve

- i) x durum değişkenleri α parametre vektöründen bağımsız,
- ii) Durum geçiş matrisi Φ_k ve gözlem tasarım matrisi H_k , α parametre vektöründen bağımsız ve sabit

olsun. Bu durumda inovasyon sürecinin α parametre vektörüne göre koşullu dağılımı,

$$g(y|\alpha)_k = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |C_{z_k}|}} e^{-\frac{1}{2} z'_k C_{z_k}^{-1} z_k} \quad (3.34)$$

dır. Burada m gözlenebilen değişken sayısını, $|\cdot|$ matris determinantını, C_{z_k} inovasyon sürecinin kovaryans matrisini göstermektedir ve

$$C_{z_k} = R_k + H_k P_{k/k-1} H'_k \quad (3.35)$$

dır (Anderson ve Moore 1979). Diğer taraftan inovasyon sürecine ait kovaryans matrisi ($j = j_0, \dots, k$) örnekleme aralığında gözlenmiş olan verilerden

$$\hat{C}_{z_k} = \frac{1}{(k - j_0)} \sum_{j=j_0}^k z_j z'_j \quad (3.36)$$

biçiminde tahmin edilebilir. Böylece (3.34) eşitliği kullanılarak olabilirlik fonksiyonunun logaritması

$$\ln g(y|\alpha)_k = -\frac{1}{2} \left\{ m \ln(2\pi) + \ln(|C_{z_k}|) + z'_k C_{z_k}^{-1} z_k \right\} \quad (3.37)$$

olarak elde edilir. Örnekleme aralığı üzerinden katsayı ve sabit terimler ihmal edilerek (3.37) eşitliğinin sağ tarafının toplamı alındığında

$$\sum_{j=j_0}^k \ln(|C_{z_j}|) + \sum_{j=j_0}^k z'_j C_{z_j}^{-1} z_j \quad (3.38)$$

olur. Buradan parametrelere ait en çok olabilirlik tahmin edicilerini elde etmek için (3.38) ifadesinin α 'ya göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenirse

$$\sum_{j=j_0}^k \left[tr \left\{ C_{z_j}^{-1} \frac{\partial C_{z_j}}{\partial \alpha_k} \right\} - z_j' C_{z_j}^{-1} \frac{\partial C_{z_j}}{\partial \alpha_k} C_{z_j}^{-1} z_j \right] = 0 \quad (3.39)$$

olarak elde edilir. Burada, matris türevleri

$$\frac{\partial \ln |A|}{\partial x} = \frac{I}{|A|} \frac{\partial |A|}{\partial x} = tr \left(A^{-1} \frac{\partial A}{\partial x} \right)$$

ve

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial x} = -A^{-1} \frac{\partial A}{\partial x} A^{-1}$$

özellikleri kullanılarak hesaplanmıştır (Rogers 1980, Golub ve Loan 1989). Diğer taraftan (3.35) eşitliğinin α 'ya göre kısmi türevi alınırsa,

$$\frac{\partial C_{z_k}}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial R_k}{\partial \alpha_k} + H_k \frac{\partial P_{k/k-1}}{\partial \alpha_k} H_k' \quad (3.40)$$

olur. Ayrıca,

$$P_{k/k-1} = \Phi_k P_{k-1} \Phi_k' + Q_k \quad (3.41)$$

eşitliği ile ifade edilen öngörü hata kovaryans matrisinin α 'ya göre kısmi türevi

$$\frac{\partial P_{k/k-1}}{\partial \alpha_k} = \Phi_k \frac{\partial P_{k-1}}{\partial \alpha_k} \Phi_k' + \frac{\partial Q_k}{\partial \alpha_k} \quad (3.42)$$

dır. Tahmin süreci içerisinde sistemin kararlı halde olduğu, yani hatanın sabit bir değere yakınsadığı varsayılırsa (3.42) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terim ihmal edilebilir ve

$$\frac{\partial P_{k/k-1}}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial \alpha_k} \quad (3.43)$$

olarak yazılabilir. (3.43) eşitliğinin (3.40) eşitliğinde yerinde kullanılması ile

$$\frac{\partial C_{z_k}}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial R_k}{\partial \alpha_k} + H_k \frac{\partial Q_k}{\partial \alpha_k} H_k' \quad (3.44)$$

olarak elde edilir. (3.44) eşitliği (3.39) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{j=j_0}^k \left[\text{tr} \left\{ C_{z_j}^{-1} \left(\frac{\partial R_k}{\partial \alpha_k} + H_k \frac{\partial Q_k}{\partial \alpha_k} H_k' \right) \right\} - z_j' C_{z_j}^{-1} \left(\frac{\partial R_k}{\partial \alpha_k} + H_k \frac{\partial Q_k}{\partial \alpha_k} H_k' \right) C_{z_j}^{-1} z_j \right] = 0 \\ & \sum_{j=j_0}^k \left[\text{tr} \left\{ C_{z_j}^{-1} \left(\frac{\partial R_k}{\partial \alpha_k} + H_k \frac{\partial Q_k}{\partial \alpha_k} H_k' \right) - z_j' C_{z_j}^{-1} \left(\frac{\partial R_k}{\partial \alpha_k} + H_k \frac{\partial Q_k}{\partial \alpha_k} H_k' \right) C_{z_j}^{-1} z_j \right\} \right] = 0 \\ & \sum_{j=j_0}^k \left[\text{tr} \left\{ C_{z_j}^{-1} \left(\frac{\partial R_k}{\partial \alpha_k} + H_k \frac{\partial Q_k}{\partial \alpha_k} H_k' \right) - C_{z_j}^{-1} z_j' z_j C_{z_j}^{-1} \left(\frac{\partial R_k}{\partial \alpha_k} + H_k \frac{\partial Q_k}{\partial \alpha_k} H_k' \right) \right\} \right] = 0 \\ & \sum_{j=j_0}^k \left[\text{tr} \left\{ \left[C_{z_j}^{-1} - C_{z_j}^{-1} z_j' z_j C_{z_j}^{-1} \right] \left(\frac{\partial R_k}{\partial \alpha_k} + H_k \frac{\partial Q_k}{\partial \alpha_k} H_k' \right) \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

elde edilir. Böylece (3.45) eşitliği ile hem R_k hem de Q_k için en çok olabilirlik tahmin edicilerinin elde edilebileceği görülür.

R_k gözlem kovaryans matrisinin en çok olabilirlik tahmin edicisini elde etmek için öncelikle Q_k 'nin tamamen bilindiği ve α dan bağımsız olduğu varsayalım. Ayrıca i satır ve sütun indislerini göstermek üzere, $\alpha_i = R_{k(ii)}$ olarak göz önüne alınsın. Bu durumda (3.45) eşitliği,

$$\sum_{j=j_0}^k \left[\text{tr} \left\{ \left[C_{z_j}^{-1} - C_{z_j}^{-1} z_j' z_j C_{z_j}^{-1} \right] [I + 0] \right\} \right] = 0$$

veya

$$\sum_{j=j_0}^k \left[\text{tr} \left\{ \left[C_{z_j}^{-1} - C_{z_j}^{-1} z_j' z_j C_{z_j}^{-1} \right] \right\} \right] = 0 \quad (3.46)$$

olarak yazılabilir. Kalman Filtresinde

$$C_z^{-1} z = R^{-1} z \quad (3.47)$$

olduğundan (3.46) eşitliği

$$\sum_{j=j_0}^k \left[\text{tr} \left\{ \left[R_j^{-1} \left[R_j C_{z_j}^{-1} R_j - z_j' z_j \right] R_j^{-1} \right] \right\} \right] = 0 \quad (3.48)$$

olarak elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} P_{k/k-1} H_k' C_{z_k}^{-1} &= (\Phi_k P_{k/k-1} \Phi_k' + Q_k) H_k' (H_k P_{k/k-1} H_k' + R_k)^{-1} \\ P_{k/k-1} H_k' C_{z_k}^{-1} &= K_k \\ P_{k/k-1} H_k' C_{z_k}^{-1} &= P_k H_k' R_k^{-1} \end{aligned} \quad (3.49)$$

olarak yazılabilir. (3.49) eşitliğinin her iki tarafının H_k ile çarpılmasıyla ve (3.35) eşitliğinin kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} H_k P_{k/k-1} H_k' C_{z_k}^{-1} &= H_k P_k H_k' R_k^{-1} \\ H_k P_{k/k-1} H_k' C_{z_k}^{-1} &= H_k P_k H_k' R_k^{-1} \\ (C_{z_k} - R_k) C_{z_k}^{-1} &= H_k P_k H_k' R_k^{-1} \end{aligned} \quad (3.50)$$

elde edilir. Elde edilen (3.50) eşitliğinin her iki tarafı sağdan R_k ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} (C_{z_k} - R_k) C_{z_k}^{-1} R_k &= H_k P_k H_k' R_k^{-1} R_k \\ (R_k - R_k C_{z_k}^{-1} R_k) &= H_k P_k H_k' \\ R_k C_{z_k}^{-1} R_k &= R_k - H_k P_k H_k' \end{aligned} \quad (3.51)$$

olur. (3.51) eşitliğinin (3.48) eşitliğinde kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \sum_{j=j_0}^k \left[\text{tr} \left\{ \left[R_j^{-1} \left[R_j C_{z_j}^{-1} R_j - z_j' z_j \right] R_j^{-1} \right] \right\} \right] &= 0 \\ \sum_{j=j_0}^k \left[\text{tr} \left\{ \left[R_j^{-1} \left[R_j - H_j P_j H_j' - z_j' z_j \right] R_j^{-1} \right] \right\} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

yazılabilir. Böylece (3.52) eşitliğinin çözümünden R_k kovaryans matrisi için bir tahmin edici

$$\hat{R}_k = \hat{C}_{z_k} + H_k P_k H_k' \quad (3.53)$$

olarak bulunur. R_k gözlem gürültü kovaryans matrisinin en çok olabilirlik tahmin edicisini elde etmede kullanılan yöntem, Q_k sistem gürültü kovaryans matrisinin en çok olabilirlik tahmin edicisini elde etmek için de kullanılabilir. Tahmin edicinin elde edilmesi aşamasında ilk olarak R_k gözlem gürültü kovaryans matrisinin tamamen bilindiği ve α 'dan bağımsız olduğu varsayalım. Ayrıca $\alpha_i = Q_{k(ii)}$ olarak alınsın. Bu durumda (3.45) eşitliğinden

$$\sum_{j=j_0}^k \left[\text{tr} \left\{ H_j' \left[C_{z_j}^{-1} - C_{z_j}^{-1} z_j' z_j C_{z_j}^{-1} \right] H_j I \right\} \right] = 0 \quad (3.54)$$

yazılabilir. k anındaki K_k Kalman kazancı,

$$K_k = P_{k/k-1} H_k' C_{z_k}^{-1} \quad (3.55)$$

olmak üzere; (3.55) eşitliğinin her iki tarafı soldan $P_{k/k-1}^{-1}$ ile çarpılırsa

$$P_{k/k-1}^{-1} K_k = P_{k/k-1}^{-1} P_{k/k-1} H_k' C_{z_k}^{-1}$$

$$H'_k C_{z_k}^{-1} = P_{k/k-1}^{-1} K_k \quad (3.56)$$

elde edilir. (3.56) eşitliğinin her iki tarafının transpozunun alınmasıyla

$$C_{z_k}^{-1} H_k = K'_k P_{k/k-1}^{-1} \quad (3.57)$$

olur. Böylece (3.54) eşitliği

$$\sum_{j=j_0}^k tr \left\{ H'_j C_{z_j}^{-1} H_j - H'_j C_{z_j}^{-1} z'_j z_j C_{z_j}^{-1} H_j \right\} = 0 \quad (3.58)$$

biçiminde yazılabilir. (3.56) ve (3.57) eşitliklerinin (3.58) eşitliğinde yerinde kullanılmasıyla

$$\sum_{j=j_0}^k tr \left\{ P_{j/j-1}^{-1} K_j H_j - P_{j/j-1}^{-1} K_j z_j z'_j K'_j P_{j/j-1}^{-1} \right\} = 0 \quad (3.59)$$

elde edilir ve (3.59) eşitliğinin yeniden düzenlenmesi ile

$$\begin{aligned} \sum_{j=j_0}^k tr \left\{ P_{j/j-1}^{-1} K_j H_j - P_{j/j-1}^{-1} K_j z_j z'_j K'_j P_{j/j-1}^{-1} \right\} &= 0 \\ \sum_{j=j_0}^k tr \left\{ P_{j/j-1}^{-1} \left(K_j H_j P_{j/j-1} - K_j z_j z'_j K'_j \right) P_{j/j-1}^{-1} \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

olarak bulunur. $P_{k/k-1}$ kovaryans matrisi pozitif tanımlı olduğundan dolayı (3.60) eşitliği

$$\sum_{j=j_0}^k tr \left\{ \left(K_j H_j P_{j/j-1} - K_j z_j z'_j K'_j \right) \right\} = 0 \quad (3.61)$$

biçiminde yazılabilir. Diğer taraftan

$$\Delta x_k = \hat{x}_k - \hat{x}_{k/k-1} \quad (3.62)$$

olarak tanımlansın. (3.62) eşitliğiyle tanımlanan hata vektörü Kalman Filtresi eşitliklerinin kullanmasıyla

$$\begin{aligned}\Delta x_k &= (\hat{x}_{k/k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_{k/k-1})) - \hat{x}_{k/k-1} \\ \Delta x_k &= K_k z_k\end{aligned}\quad (3.63)$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca (2.16) eşitliğinden

$$P_{k/k} = P_{k/k-1} - K_k H_k P_{k/k-1} \quad (3.64)$$

dir. Böylece (3.64) eşitliğinden

$$K_k H_k P_{k/k-1} = P_{k/k} - P_{k/k-1} \quad (3.65)$$

yazılabilir. (3.63) ve (3.65) eşitliklerinin (3.61) eşitliğinde yerlerinde kullanılmasıyla

$$\sum_{j=j_0}^k tr \{ (P_{j/j} - P_{j/j-1} - \Delta x_j \Delta x_j') \} = 0 \quad (3.66)$$

eşitliği elde edilir. (3.41) eşitliği (3.66) eşitliğinde yerinde kullanılırsa,

$$\sum_{j=j_0}^k tr \{ (P_{j/j} - (\Phi_j P_{j-1} \Phi_j' + Q_j) - \Delta x_j \Delta x_j') \} = 0 \quad (3.67)$$

olarak bulunur. Böylece (3.67) eşitliğinin çözümünden Q_k kovaryans matrisi için bir tahmin edici

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=j_0}^k \Delta x_j \Delta x_j' + P_k - \Phi_k P_{k-1} \Phi_k' \quad (3.68)$$

olarak elde edilir.

Böylece (3.53) ve (3.68) eşitlikleri ile elde edilen tahmin edicilerin filtre eşitliklerinde yerlerinde kullanılmalarıyla Kalman Filtresinin uyarlanması sağlanır. Bu şekilde kurulan Kalman Filtresi tahminlerinde bir güçlenmenin olacağı Mohamed ve Schwarz (1999) tarafından belirtilmiştir.

3.4 Tahmin Hatasına Ait Kovaryans Matrisinin ve Gözlem Gürültü Kovaryans Matrisinin Ölçeklendirilmesi ile Kalman Filtresinin Uyarlanması

Kurulan model sistem karakteristiklerini iyi temsil ediyor ve (2.3) – (2.11) ile verilen başlangıç şartları sağlanıyorsa, inovasyon sürecine ait teorik kovaryans matrisi ile gözlenmiş verilerden elde edilen tahmin matrisinin eşit olması gerekir. Aksi takdirde filtre tahminlerinde ıraksama meydana gelebilir ve uyarlanması gerekir. Jwo ve Weng (2008) bu düşünce ile inovasyon sürecine ait teorik kovaryans matrisi ile gözlenmiş olan verilerden elde edilen tahmin değerinin eşleştirilmesi temeline dayalı bir uyarlama yöntemi önermişlerdir. Bu kısımda, Jwo ve Weng (2008) tarafından yapılan çalışma temel alınarak, öngörü tahmin hatasına ait kovaryans matrisinin ve gözlem gürültü sürecine ait kovaryans matrisinin iki ayrı ölçek faktörü kullanılarak ölçeklendirilmesi ile Kalman Filtresinin uyarlanması açıklanmıştır. Burada kullanılan ölçek faktörü ile Xia vd. (1994), Özbek (1996) ve Özbek ve Aliev (1998) tarafından önerilen unutma faktörü arasında önemli bir fark vardır. Unutma faktörü inovasyon sürecine ait kovaryans matrisi hesaplanırken geçmiş gözlemleri üstel olarak ağırlıklandırırken, ölçek faktörü geçmiş gözlemler üzerinde herhangi bir ağırlıklandırma yapmaz.

Jwo ve Weng (2008) tarafından önerildiği biçimde Kalman filtresinin uyarlanması için ilk olarak (2.1)-(2.2) eşitlikleri ile verilen model ve (2.17) ile verilen inovasyon süreci göz önüne alınsın. Bu durumda inovasyon sürecine ait teorik kovaryans matrisi (3.35) eşitliğinde verildiği gibidir. Diğer taraftan inovasyon sürecine ait kovaryans matrisi (3.36) eşitliği kullanılarak gelen verilerden ardışık olarak tahmin edilebilir. Böylece (3.35) ve (3.36) eşitlikleri kullanılarak gözlem gürültü sürecine ait R_k kovaryans matrisi için bir tahmin edici olarak

$$\hat{R}_k = \hat{C}_{z_k} - H_k P_{k/k-1} H_k' \quad (3.69)$$

yazılabilir (Mehra 1972).

Jwo ve Weng (2008) yaptıkları çalışmada, Kalman Filtresinin uyarlanması; (2.13) ile verilen $P_{k/k-1}$ öngörü hata kovaryans matrisinin bir λ_p ölçek faktörü kullanılarak

$$\bar{P}_{k/k-1} = \lambda_p P_{k/k-1} \quad (3.70)$$

biçiminde ölçeklendirilmesiyle ve R_k gözlem gürültü süreci kovaryans matrisinin de λ_p 'den farklı bir λ_R ölçek faktörü kullanılarak

$$\bar{R}_k = \lambda_R R_k \quad (3.71)$$

biçiminde ölçeklendirilmesiyle yapılabileceğini belirtmişlerdir. Bu durumda (3.70) eşitliği ile verilen öngörü hata kovaryans matrisi, (2.14) ile verilen Kalman kazancı eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\bar{K}_k = \bar{P}_{k/k-1} H_k' (H_k \bar{P}_{k/k-1} H_k' + R_k)^{-1} \quad (3.72)$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.71) ile verilen gözlem gürültü kovaryans matrisinin (3.72) eşitliğinde kullanılmasıyla

$$\bar{K}_k = \bar{P}_{k/k-1} H_k' (H_k \bar{P}_{k/k-1} H_k' + \lambda_R R_k)^{-1} \quad (3.73)$$

$$\bar{K}_k = \bar{P}_{k/k-1} H_k' (H_k \bar{P}_{k/k-1} H_k' + \bar{R}_k)^{-1} \quad (3.74)$$

olur. (3.74) eşitliğinden Kalman kazancındaki değişimin $\bar{P}_{k/k-1}$ ve \bar{R}_k kovaryans matrislerinden kaynaklandığı görülmektedir. Böylece ölçüm yinelemesi aşamasında tahmin hatasına ait kovaryans matrisi, (2.16) eşitliğinden

$$\bar{P}_k = (I - \bar{K}_k H_k) \bar{P}_{k/k-1} \quad (3.75)$$

biçiminde veya

$$\bar{P}_k = \lambda_p (I - \bar{K}_k H_k) P_{k/k-1} \quad (3.76)$$

olarak yazılabilir. Bu şekilde kurulan Kalman Filtresi için λ_p ölçek faktörünün seçimi, filtrenin tahmin kapasitesini geliştirecek biçimde,

$$\lambda_p = \max \left\{ 1, \frac{\text{tr}(\hat{C}_{z_k})}{\text{tr}(C_{z_k})} \right\} \quad (3.77)$$

inovasyon sürecine ait kovaryans matrisinin tahmin değerinin izinin inovasyon sürecine ait teorik kovaryans matrisinin izine oranlanmasıyla elde edilebilir. Diğer taraftan λ_r ölçek faktörü ise

$$\lambda_r = \frac{\text{tr}(\hat{C}_{z_k})}{\text{tr}(C_{z_k})} \quad (3.78)$$

eşitliği kullanılarak hesaplanabilir.

3.5 Sistem Gürültü Sürecine ait Kovaryans Matrisinin Bir Ölçek Faktörü Kullanılarak Ölçeklendirilmesi ile Kalman Filtresinin Uyarlanması

Bu kısımda Ding vd. (2007) tarafından yapılan çalışma temel alınarak; (2.3) –(2.11) ile verilen başlangıç varsayımlarının sağlanmamasından veya modeldeki hatalardan kaynaklanabilecek iraksama probleminin üstesinden gelebilmek için, sistem gürültü sürecine ait kovaryans matrisinin ölçeklendirilmesi ile Kalman Filtresinin uyarlanması açıklanmıştır.

Kalman Filtresinin sistem gürültü sürecine ait kovaryans matrisinin ölçeklendirilmesi ile uyarlanması aşamasında ilk olarak (2.1) - (2.2) eşitlikleri ile verilen model alınsın. Ayrıca (2.17) ile verilen inovasyon sürecine ait kovaryans matrisinin teorik değeri

olarak (3.35), inovasyon sürecine ait kovaryans matrisinin gözlenmiş verilerden elde edilen tahmin değeri olarak (3.36) ve gözlem gürültü sürecine ait R_k kovaryans matrisi için bir tahmin edici olarak da (3.69) göz önünde bulundursun.

Optimal filtre için (3.35) eşitliğinin kullanılması ile elde edilen kovaryans matrisi, (3.36) eşitliği kullanılarak tahmin edilen kovaryans matrisine eşit olması gerekir. İki kovaryans matrisi arasındaki herhangi bir farklılık $P_{k/k-1}$ ve/veya R_k kovaryans matrislerindeki yanlışlıklardan kaynaklanır. Eğer uyarılma aşamasında gözlem gürültü sürecine ait kovaryans matrisinin tam olarak bilindiği varsayımı yapılırsa, (3.35) ve (3.36) eşitliklerinden

$$\frac{1}{(k-j_0)} \sum_{j=j_0}^k z_j z_j' = H_k \tilde{P}_{k/k-1} H_k' + R_k \quad (3.79)$$

yazılabilir. Burada $\tilde{P}_{k/k-1}$, öngörü hatasına ait kovaryans matrisinin tahmini anlamındadır. (3.79) eşitliğindeki $\tilde{P}_{k/k-1}$ kovaryans matrisinin tahmininin hesaplanması kolay değildir. $\tilde{P}_{k/k-1}$ kovaryans matrisinin tahmin değerinin hesaplanmasını kolaylaştırmak için (3.69) ve (3.79) eşitliklerinin kullanılması ile

$$\alpha = \frac{tr\{H_k \tilde{P}_{k/k-1} H_k'\}}{tr\{H_k P_{k/k-1} H_k'\}} = \frac{tr\left\{\frac{1}{(k-j_0)} \sum_{j=j_0}^k z_j z_j' - R_k\right\}}{tr\{H_k P_{k/k-1} H_k'\}} \quad (3.80)$$

biçiminde bir ölçek faktörü tanımlanabilir. Ayrıca (2.13) eşitliğinin (3.80) eşitliğinde yerinde kullanılmasıyla,

$$\alpha = \frac{tr\{H_k (\Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' + \tilde{Q}_{k-1}) H_k'\}}{tr\{H_k (\Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' + Q_{k-1}) H_k'\}} \quad (3.81)$$

yazılabilir. Böylece (3.80) ve (3.81) eşitliklerinin göz önüne alınması ile bir uyarılama kuralı;

$$\hat{Q}_k = Q_k \sqrt{\alpha} \quad (3.82)$$

biçiminde yazılabilir. Burada, α ölçek faktörü katkı sağlayıcı düzgünleştirme etkisi olarak adlandırılır. Ayrıca α ölçek faktörü (3.80) eşitliğinin ikinci kısmından doğrudan elde edilebilir.

3.6 Çoklu Ölçek Faktörü Kullanılması ile Kalman Filtresinin Uyarlanması

Bu kısımda Geng ve Wang (2008) tarafından yapılan çalışma temel alınarak; çoklu ölçek faktörü kullanılması ile Kalman Filtresinin uyarlanması açıklanmıştır. Ayrıca Geng ve Wang (2008) tarafından önerilen yöntem ile hesaplanamayan ölçek faktörlerinin hesaplanabilmesi için bir yöntem ve öngörü hata kovaryans matrisinin Yang vd. (2006)'da verildiği biçimde alınması ile Kalman Filtresinin çoklu ölçek faktörü kullanılarak uyarlanması verilmiştir.

Uyarılama işleminin ilk aşamasında (2.1) ve (2.2) ile verilen model göz önüne alınsın ve (2.3) – (2.11) ile verilen başlangıç varsayımları sağlansın. Bu durumda (2.17) ile tanımlanan inovasyon süreci sıfır ortalamalı ve $H_k P_{k/k-1} H_k' + R_k$ kovaryans matrisi ile Normal dağılıma sahiptir, yani;

$$z_k \sim N(0, H_k P_{k/k-1} H_k' + R_k) \quad (3.83)$$

dir. Diğer taraftan (3.35) eşitliğinde (2.13) eşitliğinin yerinde kullanılması ile inovasyon sürecine ait kovaryans matrisi,

$$Cov(z_k) = C_{z_k} = H_k (\Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' + Q_{k-1}) H_k' + R_k \quad (3.84)$$

biçiminde yazılabilir. İnovasyon sürecinin (3.83) ifadesi ile verilen Normal dağılıma sahip olması durumunda filtrenin uyarlanmasına gerek yoktur. Ancak inovasyon süreci

(3.83) ifadesi ile verilen Normal dağılıma uymuyor ise Kalman Filtresinin uyarlanması gerekir. Yani uyarlama işleminden önce

$$\begin{aligned} H_0 : & \text{İnnovasyon süreci (3.83) ifadesi ile verilen Normal dağılıma uygundur} \\ H_1 : & \text{İnnovasyon süreci Normal dağılıma uygun değildir.} \end{aligned} \quad (3.85)$$

hipotezinin test edilmesi gerekir. (3.85) ile verilen hipotezi test etmek için ise

$$\gamma_k = z_k' (C_{z_k})^{-1} z_k \quad (3.86)$$

karesel formundan faydalanılabilir. H_0 hipotezinin doğruluğu altında (3.86) ile verilen karesel formun dağılımı,

$$\gamma_k = z_k' (H_k (\Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' + Q_{k-1}) H_k' + R_k)^{-1} z_k \sim \chi_{(m)}^2 \quad (3.87)$$

dır. Burada $\chi_{(m)}^2$, m serbestlik dereceli Ki-kare dağılımıdır. m ise gözlemlenmiş olan durum değişkenlerinin sayısıdır. Böylece (3.85) ile verilen hipotez için bir test istatistiği olarak (3.87) kullanılabilir. Karar kuralı ise verilen bir ε anlam düzeyi için

$$\gamma_k \leq \chi_{(m,\varepsilon)}^2, H_0 \text{ Hipotezi Reddedilemez.} \quad (3.88)$$

$$\gamma_k > \chi_{(m,\varepsilon)}^2, H_0 \text{ Hipotezi Rededilir.} \quad (3.89)$$

biçimindedir. Burada $\chi_{(m,\varepsilon)}^2$, m serbestlik dereceli Ki-kare dağılımının ε anlam düzeyli tablo değeridir. Eğer (3.85) ile verilen hipotezde H_0 hipotezi reddedilememiş ise (3.83) eşitliği ile verilen varsayım doğrudur, aksi takdirde (3.83) varsayımı sağlanmamış demektir. Bu durumda (3.83) varsayımının sağlanabilmesi için Geng ve Wang (2008), (2.13) ile verilen öngörü hata kovaryans matrisinin yerine

$$P_{k|k-1} = \Lambda_k \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' \Lambda_k' + Q_{k-1} \quad (3.90)$$

alınması ile Kalman Filtresinin bir uyarlamasını önermiştir. Burada $\Lambda_k = \text{köşegen}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ biçiminde çoklu ölçek faktörüdür ve filtre en iyi tahminleri üretecek şekilde Λ_k çoklu ölçek faktörünün belirlenmesi gerekir.

Geng ve Wang (2008) tarafından sadece ölçek faktörlerinin hesaplanmasında kullanılacak ve

$$\bar{H}_k = \begin{bmatrix} D_{m \times m} & 0_{m \times (n-m)} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad m \leq n \quad (3.91)$$

koşulunu sağlayacak şekilde yeni bir gözlem matrisi göz önüne alınmıştır. Burada $D_{m \times m} = \text{köşegen}(d_1, d_2, \dots, d_m)$ dir. (3.90) ve (3.91) eşitliklerinden (3.86) ile verilen karesel form,

$$\gamma_k = z_k' \left(\bar{H}_k (\Lambda_k \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' \Lambda_k' + Q_{k-1}) \bar{H}_k' + R_k \right)^{-1} z_k \sim \chi_{(m)}^2 \quad (3.92)$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca

$$A_k = \bar{H}_k \Lambda_k \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' \Lambda_k' \bar{H}_k' \quad (3.93)$$

$$B_k = H_k \Phi_{k-1} H_k' + R_k \quad (3.94)$$

$$J_k = \Phi_{k/k-1} P_{k-1} \Phi_{k/k-1}' \quad (3.95)$$

biçiminde tanımlansın. $A_{ii(k)}$, (3.93) ile tanımlanan A_k matrisinin i . köşegen elemanı olmak üzere,

$$A_{ii(k)} = \lambda_{i(k)}^2 d_i^2 J_{ii(k)} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.96)$$

dir. Burada $J_{ii(k)}$, (3.95) ile tanımlanan J_k matrisinin i . köşegen elemanı ve $\lambda_{i(k)}$, k anındaki i . ölçek faktörüdür. Eğer filtre en iyi tahminleri ürettiyor ise inovasyon süreci z_k (3.83) ile verilen dağılıma uyar ve

$$\gamma_{i(k)} = \frac{(z_{i(k)})^2}{A_{ii(k)} + B_{ii(k)}} \sim \chi_{(1)}^2 \quad (3.97)$$

özelliği sağlanır. Burada $z_{i(k)}$ inovasyon sürecinin i . elemanı, $B_{ii(k)}$, (3.94) ile tanımlanan B_k matrisinin i . köşegen elemanıdır. (3.97)'nin sağlanması durumunda $\eta = \chi_{(1,\varepsilon)}^2$ olmak üzere;

$$\frac{(z_{i(k)})^2}{A_{ii(k)} + B_{ii(k)}} / \eta < 1 \quad (3.98)$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece (3.96) ve (3.98) ifadelerinin kullanılmasıyla $\lambda_{i(k)}$ ölçek faktörleri

$$\begin{aligned} \frac{(z_{i(k)})^2}{A_{ii(k)} + B_{ii(k)}} &< \eta \\ \frac{(z_{i(k)})^2}{\eta} &< A_{ii(k)} + B_{ii(k)} \\ \frac{(z_{i(k)})^2}{\eta} - B_{ii(k)} &< A_{ii(k)} \\ \frac{(z_{i(k)})^2}{\eta} - B_{ii(k)} &< \lambda_{i(k)}^2 d_i^2 J_{ii(k)} \\ \frac{(z_{i(k)})^2}{\eta d_i^2 J_{ii(k)}} - \frac{B_{ii(k)}}{d_i^2 J_{ii(k)}} &< \lambda_{i(k)}^2 \quad (i=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (3.99)$$

eşitsizliğini sağlar ve

$$\hat{\lambda}_{i(k)} = \begin{cases} \max \left(1, \sqrt{\frac{(z_{i(k)})^2}{\eta d_i^2 J_{ii(k)}} - \frac{B_{ii(k)}}{d_i^2 J_{ii(k)}}} \right), & \frac{(z_{i(k)})^2}{\eta d_i^2 J_{ii(k)}} - \frac{B_{ii(k)}}{d_i^2 J_{ii(k)}} > 0 \\ 1 & \frac{(z_{i(k)})^2}{\eta d_i^2 J_{ii(k)}} - \frac{B_{ii(k)}}{d_i^2 J_{ii(k)}} \leq 0 \end{cases} \quad (3.100)$$

olarak hesaplanabilir. Geng ve Wang (2008) tarafından geliştirilen bu yaklaşım ile sadece üzerinden gözlem alınabilen durum değişkenlerine karşılık gelen ölçek faktörleri elde edilebilir. Üzerinden gözlem alınamayan durumlara karşılık gelen ölçek faktörleri ise 1 olarak ayarlanır. Böylece çoklu ölçek faktörü

$$\Lambda_k = \text{köşegen}(\hat{\lambda}_{1(k)}, \hat{\lambda}_{2(k)} \dots \hat{\lambda}_{m(k)}, 1, \dots, 1) \quad (3.101)$$

olarak elde edilir (Geng ve Wang 2008, Weixi vd. 2011).

3.6.1 Belirlenemeyen ölçek faktörlerinin belirlenebilmesi için bir yöntem

Geng ve Wang (2008) tarafından geliştirilen yöntemde belirlenemeyen ölçek faktörlerinin belirlenebilmesi için optimal filtrenin önemli özelliklerinden biri olan inovasyon sürecinin beyaz gürültü süreci olması özelliği kullanılabilir. Bu amaç ile (2.17) eşitliği ile verilen inovasyon süreci göz önüne alınsın. İnovasyon sürecine ait kovaryans matrisi (3.1) ile verildiği gibi, otokovaryansı ise (3.2) de verildiği gibidir. İnovasyon sürecinin bir beyaz gürültü süreci olabilmesi ise (3.4) eşitliğinin sağlanmasına bağlıdır (Xia vd. 1994).

Belirlenemeyen ölçek faktörlerini belirlemek amacıyla ilk olarak belirlenen ölçek faktörleri ile birlikte

$$\Lambda_k = \text{köşegen}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n) \quad (3.102)$$

olarak alınsın. Burada $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_m$, (3.100) eşitliğinden elde edilen ölçek faktörleri; $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$ ise belirlenmemiş ölçek faktörleridir ve $n - m$ tane bilinmeyen ölçek faktörü vardır. (3.90) eşitliği (3.102) ile birlikte (3.4) eşitliğinde yerinde kullanılırsa;

$$(\Lambda_k \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi'_{k-1} \Lambda'_k + Q_{k-1}) \bar{H}'_k - K_k C_{z_k} = 0 \quad (3.103)$$

olur. Burada C_{z_k} kovaryans matrisi gözlenmiş verilerden ardışık biçimde (3.36) eşitliği kullanılarak tahmin edilebilir. Λ_k matrisinin bilinmeyen $n - m$ tane elemanı ise (3.103) eşitliğinden

$$F_k = (\Lambda_k \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi'_{k-1} \Lambda'_k + Q_{k-1}) \bar{H}'_k - K_k C_{z_k}$$

olarak tanımlanıp, Algoritma 5'in kullanılmasıyla belirlenebilir. Böylece k anındaki çoklu ölçek faktörü ise (3.100)'den elde edilen m tane ölçek faktörü ile birlikte

$$\Lambda_k = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{1,k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_{2,k} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{\lambda}_{n,k} \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

olarak bulunur.

3.6.2 Çoklu ölçek faktörü kullanılması ile Kalman Filtresinin uyarlanması yeni bir düzenlemesi

Bu kısımda, Geng ve Wang (2008) tarafından yapılan çalışmadan farklı olarak, (3.85) ile verilen hipotez testinde H_0 hipotezinin reddedilmesi halinde, (3.90) eşitliği ile verilen $P_{k/k-1}$ öngörü hatasına ait kovaryans matrisinin yerine, çoklu ölçek faktörünün, sistem gürültü kovaryans matrisini de kapsayacağı şekilde,

$$P_{k|k-1} = \Lambda_k (\Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi'_{k-1} + Q_{k-1}) \Lambda'_k \quad (3.105)$$

olarak alınmasıyla Kalman Filtresinin uyarlanması sağlanabilir. Bu durumda (3.87) ile verilen karesel form, (3.105) eşitliğinin (3.87)'de yerine yazılmasıyla

$$\gamma_k = z'_k \left(\bar{H}_k \Lambda_k (\Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi'_{k-1} + Q_{k-1}) \Lambda'_k \bar{H}'_k + R_k \right)^{-1} z_k \sim \chi^2_{(m)} \quad (3.106)$$

biçiminde elde edilir. k anındaki i . ölçek faktörü ise

$$A_k = \bar{H}_k \Lambda_k (\Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi'_{k-1} + Q_{k-1}) \Lambda'_k \bar{H}'_k \quad (3.107)$$

$$B_k = R_k \quad (3.108)$$

$$J_k = \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi'_{k-1} + Q_{k-1} \quad (3.109)$$

olarak alınmasıyla (3.100) eşitliğinden elde edilebilir. Geng ve Wang (2008) tarafından yapılan çalışmada olduğu gibi, bu yaklaşımda da sadece üzerinden gözlem alınabilen durum değişkenlerine karşılık gelen ölçek faktörleri elde edilebilir. Üzerinden gözlem alınamayan durumlara karşılık gelen ölçek faktörleri ise 1 olarak ayarlanır. Böylece çoklu ölçek faktörü, $\Lambda_k = köşegen(\lambda_{1(k)}, \lambda_{2(k)}, \dots, \lambda_{m(k)}, 1, \dots, 1)$ olarak elde edilir. Gözlem alınamayan durum değişkenlerine karşılık gelen ölçek faktörlerinin belirlenebilmesi için ise kısım 3.6.1 de verilen yöntem kullanılabilir.

3.7 İnovasyon Sürecine Dayalı Yeni Bir Uyarlı Kalman Filtresi

Bu kısımda tahmin hatasına ait kovaryans matrisinin çoklu ölçek faktörü kullanarak ölçeklendirilmesiyle uyarlanmış, yeni bir uyarlı Kalman Filtresi önerilmiştir.

Kalman Filtresinin gelen gözlemler ile uyumlu bir şekilde çalışmasını sağlamak ve ıraksama sorununun üstesinden gelmek amacıyla ilk olarak (2.1) - (2.2) ile verilen lineer kesikli zaman stokastik durum-uzay modeli alınsın. Ayrıca (2.17) ile verilen inovasyon süreci, (3.1) ile verilen inovasyon sürecine ait kovaryans matrisi ve (3.2) ile verilen

inovasyon sürecine ait oto kovaryans göz önüne alınsın. İnovasyon sürecinin bir beyaz gürültü süreci olabilmesi (3.2) eşitliği ile verilen oto kovaryans fonksiyonunun sıfır olmasıyla, bir diğer ifadeyle (3.4) eşitliğinin gerçekleşmesiyle sağlanır (Xia vd. 1994). Eğer inovasyon süreci beyaz gürültü süreci özelliğini sağlıyor ise (3.4) eşitliğinden

$$P_{k/k-1}H_k' = K_k C_{z_k} \quad (3.110)$$

yazılabilir. Diğer taraftan $P_{k/k-1}$ ve C_{z_k} kovaryans matrisleri simetrik ve pozitif tanımlı matrisler olduğu için (3.110) eşitliğinden

$$H_k P_{k/k-1} = C_{z_k} K_k' \quad (3.111)$$

yazılabilir. (3.111) eşitliğinin (2.16) eşitliğinde yerine yazılması ile

$$\bar{P}_{k/k} = (P_{k/k-1} - K_k C_{z_k} K_k') \quad (3.112)$$

elde edilir. Burada C_{z_k} kovaryans matrisi gözlemlerden (3.36) eşitliği kullanılarak hesaplanabilir. (3.112) eşitliği kullanılarak elde edilen $\bar{P}_{k/k}$ tahmin değeri; kurulan model sistem dinamiklerini tam olarak temsil ediyorsa, (2.16) eşitliği ile hesaplanan $P_{k/k}$ hata kovaryans matrisine eşittir. Yani

$$P_{k/k} = \bar{P}_{k/k} \quad (3.113)$$

yazılabilir. Ancak inovasyon süreci beyaz gürültü süreci özelliğini sağlamıyorsa (3.113) eşitliği sağlanmayacaktır. Bu ise güncellenmiş durum tahminine ait hata kovaryansının yanlış hesaplandığını göstermektedir. Güncellenmiş durum tahminine ait hata kovaryans matrisinin yanlış hesaplanması ise bir sonraki andaki tahminlerin yanlış hesaplanmasına neden olacak ve durum tahminlerinde iraksama problemi ortaya çıkacaktır. Bu durumda Kalman Filtresi eşitliklerinde güncellenmiş durum tahmin hatasına ait $P_{k/k}$ kovaryans matrisi yerine (3.112) ile hesaplanan $\bar{P}_{k/k}$ kovaryans matrisinin alınması ile iraksama

probleminin önüne geçilebilir. Diğer taraftan Λ_k ($n \times n$) boyutlu bir ölçek faktörü olmak üzere,

$$\Lambda_k P_{k/k} \Lambda_k' = \bar{P}_{k/k} \quad (3.114)$$

biçiminde düşünülebilir. Bu haliyle (3.114) eşitliği lineer olmayan bir denklem sistemidir ve Λ_k matrisinin elemanları bu denklem sisteminden örneğin Newton-Raphson yöntemi kullanılarak elde edilebilir. Böylece (3.114) ile verilen ilişki çerçevesinde uyarlı Kalman Filtresi,

$$\hat{x}_{k/k-1} = \Phi_k \hat{x}_{k-1} \quad (3.115)$$

$$P_{k/k-1} = \Phi_{k-1} \Lambda_{k-1} P_{k-1} \Lambda_{k-1}' \Phi_{k-1}' + Q_{k-1} \quad (3.116)$$

$$K_k = P_{k/k-1} H_k' (H_k P_{k/k-1} H_k' + R_k)^{-1} \quad (3.117)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k/k-1} + K_k (y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1}) \quad (3.118)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k/k-1} \quad (3.119)$$

eşitlikleri ile verilir.

4. İLERLETİLMİŞ KALMAN FİLTRESİNİN YAKINSAMASI

Lineer kesikli zaman durum-uzay modellerinde Kalman Filtresi en iyi durum tahminlerini verir. Ancak lineer olmayan kesikli zaman durum-uzay modellerinde yapılan tahminler için böyle bir şey söylenemese de, uygulamada genelde iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Boutayeb vd. (1997) deterministik lineer olmayan kesikli zaman sistemlerde İlerletilmiş Kalman Filtresi tahminlerinin gerçek değerlere yakınsamasını Lyapunov yaklaşımını kullanarak incelemişlerdir. Reif ve Unbehauen (1999) lineer olmayan deterministik sistemler için İlerletilmiş Kalman Filtresinin üstel gözlemci olduğunu Lyapunov tekniğini kullanarak göstermişlerdir. Ayrıca Boutayeb vd. (1999), Reif vd. (1999) kesikli zaman İlerletilmiş Kalman Filtresinin stokastik durağan olduğunu göstermişlerdir. Kim vd. (2007, 2009) uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresinin durağanlığını incelemişlerdir. Babacan vd. (2008) kısıtlı durumda İlerletilmiş Kalman Filtresinin durağanlığı üzerine bir çalışma yapmışlardır.

Bu bölümde, kısım 3.2 de önerilen matris uyarlı Kalman Filtresinin yakınsama analizi ve kısım 3.7 de önerilen uyarlı Kalman Filtresinin yakınsama analizi verilmiştir.

4.1 Kesikli Zaman Deterministik Durum-Uzay Modellerinde Unutma Faktörü ile Uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresinin Yakınsaması

Bu kısımda kesikli zaman deterministik lineer olmayan durum-uzay modeli çerçevesinde kısım 3.2’de önerilen matris unutma faktörünün kullanılması ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresinin yakınsaması durumu, Reif ve Unbehauen (1999)’un ve Babacan (2009)’un yaptığı çalışmalar temel alınarak benzer şekilde aynı yöntem kullanılarak verilmiştir.

(2.34)-(2.35) eşitlikleri ile verilen lineer olmayan kesikli-zaman durum-uzay modeli göz önüne alınsın ve varsayımları sağlansın. Bu model için deterministik durum kesikli zaman İlerletilmiş Kalman Filtresi (2.36)-(2.42) eşitliklerinde verildiği gibidir. (2.41)

eşitliği ile verilen K_k zamanla değişen $n \times m$ boyutlu gözlemci kazancı, (2.36) eşitliği ile verilen $\hat{x}_{k|k-1}$ ve (2.39) eşitliği ile verilen \hat{x}_k sırasıyla önsel ve sonsal tahminler olarak adlandırılır. $f(.,.)$ ve $h(.)$ fonksiyonları birinci dereceden sürekli türeve sahip fonksiyonlar ve

$$A_k = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_k, u_k)$$

$$C_k = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_{k|k-1})$$

olduklarından,

$$f(x_k, u_k) - f(\hat{x}_k, u_k) = A_k (x_k - \hat{x}_k) + \varphi(x_k, \hat{x}_k, u_k) \quad (4.1)$$

$$h(x_k) - h(\hat{x}_{k|k-1}) = C_k (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) + \chi(x_k, \hat{x}_{k|k-1}) \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilirler.

k zamanındaki tahmin hatası ζ_n ile gösterilmek üzere,

$$\zeta_k = (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) \quad (4.3)$$

dir ve (2.36) dan (2.34)'ün çıkarılması ve (2.35) ile (2.39), (4.1), (4.2) eşitliklerinin göz önüne alınmasıyla,

$$\zeta_{k+1} = A_k (I - K_k C_k) \zeta_k + r_k \quad (4.4)$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$r_k = \varphi(x_k, \hat{x}_k, u_k) - A_k K_k \chi(x_k, \hat{x}_{k|k-1}) \quad (4.5)$$

dir. (4.4) ile verilen hata dinamiğini analiz etmek için kesikli-zaman sistemlerinin üstel durağanlığı kavramı kullanılabilir.

Tanım 4.1 Verilen $\varepsilon, \eta > 0$ ve $\theta > 1$ pozitif reel sayıları için $\beta_\varepsilon = \{v \in R^n \mid \|v\| < \varepsilon\}$ olmak üzere, $\zeta_0 \in \beta_\varepsilon$ olacak şekilde (4.8) eşitliğinin her ζ_n çözümü için

$$\|\zeta_k\| < \eta \|\zeta_0\| \theta^{-k} \quad (4.6)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa (4.4) ile verilen fark denklemi 0 noktasında denge durağanlık noktasına sahiptir (Lakshmikantham ve Trigiante 1998).

Tanım 4.2 Eğer (4.4) fark denklemi 0 noktasında denge durağanlık noktasına sahipse (2.36) ve (2.39) ile verilen gözlemci üstel gözlemcidir (Reif ve Unbehauen 1999).

Deterministik durum kesikli-zaman İlerletilmiş Kalman Filtresi eşitlikleri (2.36)-(2.42) eşitliklerinde verildiği gibidir. Ancak burada matris unutma faktörü ile uyarlanmış Kalman Filtresinin yakınsama analizi üzerinde durulacağından (2.36) eşitliği yerine (3.22) eşitliği ile verilen,

$$P_{k+1/k} = A_k \Lambda_k P_k \Lambda_k' A_k' + \Lambda_k Q_k \Lambda_k' \quad (4.7)$$

eşitliği göz önüne alınacaktır. Burada, Λ $n \times n$ boyutlu köşegen ve $\|\Lambda\| \geq 1$ özelliğini sağlayan bir matristir. Ayrıca $\|\cdot\|$ matris normu anlamındadır.

Notlar:

- (1) $\Lambda = I$ alınmasıyla, bilinen İlerletilmiş Kalman Filtresi elde edilir. $\|\Lambda\| > 1$ için Kalman Filtresi üstel ağırlıklandırılmıştır.
- (2) Kalman Filtresi lineer stokastik sistemler için optimal filtre olarak kullanıldığında, Q_k ve R_k , gürültü terimlerinin kovaryans matrisleridir. Lineer olmayan deterministik gözlemci olarak uygulamaları için Q_k ve R_k keyfi, simetrik, pozitif tanımlı matrisler

olarak seçilebilirler. Bu gözlemcinin durağanlığını etkilememesine rağmen performansı üzerinde önemli etkileri vardır. Benzer şekilde, eğer lineer olmayan deterministik sistemlerin gözlemcisi olarak kullanılıyorsa, P_0 simetrik pozitif tanımlı matris olarak seçilebilir.

(3) P_k matrisi için (2.40) ölçüm yinelemesi

$$P_k = (I - K_k C_k) P_{k/k-1} (I - K_k C_k)' + K_k R_k K_k' \quad (4.8)$$

(4) (2.41) eşitliğindeki Kalman Kazanç matrisi

$$K_k = P_k C_k' R_k^{-1} \quad (4.9)$$

biçiminde yazılabilir. Reif ve Unbehauen (1999) kesikli-zaman iletmiş Kalman Filtresinin üstel gözlemci olduğunun gösterilmesi için 3 tane lemma kullanılmıştır. Burada da benzer olarak yine 3 lemma kullanılacaktır. Bu lemmalardan birincisi r_k artık teriminin sınırlılığını saptamak için kullanılır. İkincisi bilinen matris tersi lemması ve üçüncüsü de $P_{k+1/k}$ ve P_k kovaryans matrislerinin çözümünde kullanılacak matris eşitsizliği lemmasıdır.

Lemma 4.1 $x, \hat{x}^-, \hat{x}^+ \in R^n$ reel vektörleri, $u \in R^n$ ve $A_{n \times n}$, $C_{m \times n}$ ve $K_{n \times m}$ matrisleri ile $\varphi(\dots)$ ve $\chi(\dots)$ lineer olmayan fonksiyonları göz önüne alınsın ve aşağıdaki varsayımlar sağlansın:

(1) $\bar{a}, \bar{c}, \bar{k} > 0$ ve $\bar{\lambda} \geq 1$ pozitif sayıları

$$\|A_k\| \leq \bar{a} \quad (4.10.a)$$

$$\|C_k\| \leq \bar{c} \quad (4.10.b)$$

$$\|K_k\| \leq \bar{k} \quad (4.10.c)$$

şartlarını sağlayacak şekilde mevcut olsun.

(2) $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\chi, \kappa_\varphi, \kappa_\chi > 0$ pozitif reel sayıları mevcut olsun öyleki;

$$\|\varphi(x, \hat{x}^+, u)\| \leq \kappa_\varphi \|x - \hat{x}^+\|^2 \quad (4.11.a)$$

$$\|\chi(x, \hat{x}^+)\| \leq \kappa_\chi \|x - \hat{x}^+\|^2 \quad (4.11.b)$$

$\|x - \hat{x}^+\| \leq \varepsilon_\varphi$ ve $\|x - \hat{x}^-\| \leq \varepsilon_\chi$ için sağlansın.

(3) \hat{x}^+ ,

$$\hat{x}^+ = \hat{x}^- + KC(x - \hat{x}^-) + K\chi(x, \hat{x}^-) \quad (4.12)$$

eşitliği sağlansın. r ,

$$r = \varphi(x, \hat{x}^+, u) - AK\chi(x, \hat{x}^-) \quad (4.13)$$

olarak tanımlansın.

Bu durumda $\varepsilon, \kappa > 0$ pozitif reel sayıları mevcuttur öyleki $\|x - \hat{x}^-\| \leq \varepsilon$ olduğunda

$$\|r\| \leq \kappa \|x - \hat{x}^-\|^2 \quad (4.14)$$

olur.

İspat: (4.12) eşitliğinden, üçgen eşitsizliği kullanılarak ve (4.10.b), (4.10.c) ve (4.11.b) eşitsizlikleri kullanılarak,

$$\hat{x}^+ = \hat{x}^- + KC(x - \hat{x}^-) + K\chi(x, \hat{x}^-)$$

$$\begin{aligned}
x - \hat{x}^+ &= x - \left[\hat{x}^- + KC(x - \hat{x}^-) + K\chi(x, \hat{x}^-) \right] \\
\|x - \hat{x}^+\| &= \left\| \left[(I + KC) \right] (x - \hat{x}^-) + K\chi(x, \hat{x}^-) \right\| \\
\|x - \hat{x}^+\| &\leq \left\| (I + KC)(x - \hat{x}^-) \right\| + \left\| K\chi(x, \hat{x}^-) \right\| \\
\|x - \hat{x}^+\| &\leq \|x - \hat{x}^-\| \cdot \|I + KC\| + \|K\| \cdot \left\| \chi(x, \hat{x}^-) \right\| \\
\|x - \hat{x}^+\| &\leq \|x - \hat{x}^-\| \left((1 + \bar{k}c) + \bar{k}\kappa_\chi \right) \|x - \hat{x}^-\|^2 \\
\|x - \hat{x}^+\| &\leq (1 + \bar{k}c + \bar{k}\kappa_\chi \varepsilon_\chi) \|x - \hat{x}^-\| \tag{4.15}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.13) eşitsizliğinin göz önüne alınıp üçgen eşitsizliğinin uygulanması ve (4.10.a) eşitsizliği ile (4.10.c) eşitsizliğinin kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}
r &= \varphi(x, \hat{x}^+, u) - AK\chi(x, \hat{x}^-) \\
\|r\| &= \left\| \varphi(x, \hat{x}^+, u) - AK\chi(x, \hat{x}^-) \right\| \\
\|r\| &\leq \left\| \varphi(x, \hat{x}^+, u) \right\| + \left\| AK\chi(x, \hat{x}^-) \right\| \\
\|r\| &\leq \left\| \varphi(x, \hat{x}^+, u) \right\| + \bar{a}\bar{k} \left\| \chi(x, \hat{x}^-) \right\| \tag{4.16}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\varepsilon = \min \left(\varepsilon_\chi, \frac{\varepsilon_\varphi}{1 + \bar{k}c + \bar{k}\kappa_\chi \varepsilon_\chi} \right) \tag{4.17}$$

olarak seçilirse lemma 4.1'in 2. varsayımından ve (4.15) eşitsizliğinde (4.17) eşitliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\|r\| &\leq \kappa_\varphi \|x - \hat{x}^+\|^2 + \bar{a}\bar{k}\kappa_\chi \|x - \hat{x}^-\|^2 \\
\|r\| &\leq \kappa_\varphi (1 + \bar{k}c + \bar{k}\kappa_\chi \varepsilon_\chi)^2 \|x - \hat{x}^-\|^2 + \bar{a}\bar{k}\kappa_\chi \|x - \hat{x}^-\|^2 \tag{4.18}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\kappa = \kappa_\varphi \left(1 + \bar{k}c + \bar{k}\kappa_\chi \varepsilon_\chi\right)^2 + \bar{a}\bar{k}\kappa_\chi$$

olarak seçilirse,

$$\|r\| \leq \kappa \|x - \hat{x}^-\|^2 \quad (4.19)$$

olur.

Lemma 4.2 Tersin alinabilen $q \times q$ boyutlu Γ , Δ matrisleri göz önüne alınsın ve $\Gamma^{-1} + \Delta$ 'nın da tersinin olduğu varsayılsın. Bu durumda

$$\left(\Gamma^{-1} + \Delta\right)^{-1} = \Gamma - \Gamma\left(\Gamma + \Delta^{-1}\right)^{-1} \Gamma \quad (4.20)$$

sağlanır (Anderson ve Moore 1979, Lewis 1986).

Lemma 4.3 $n \geq 0$ için (4.7) ile verilen $P_{k/k-1}$ ve (2.40) ile verilen P_k simetrik pozitif tanımlı matrisleri göz önüne alınsın. Π_n^- ve Π_n^+

$$\Pi_k^- = \left(P_{k/k-1}\right)^{-1} \quad (4.21)$$

$$\Pi_k^+ = \left(P_k\right)^{-1} \quad (4.22)$$

ile gösterilsin ve

$$1 \leq \|\Lambda_k\| \leq \bar{\lambda} \quad (4.23)$$

olduğu varsayalım. Ayrıca A_k^{-1} ve $(I - K_k C_k)^{-1}$ her $k \geq 0$ için mevcut olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \Pi_{k+1}^- \leq & \left\{ A_k^{-T} (I - K_k C_k)^{-T} \right. \\ & \left[\Pi_k^- - \Pi_k^- \left(\Pi_k^+ + \Lambda_k' A_k' \Lambda_k^{-T} Q_k^{-1} \Lambda_k^{-1} A_k \Lambda_k \right)^{-1} \Pi_k^- \right] \\ & \left. (I - K_k C_k)^{-1} A_k^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

eşitsizliği yazılabilir.

İspat : (4.8) eşitliğinden

$$P_k \geq (I - K_k C_k) P_{k/k-1} (I - K_k C_k)' \quad (4.25)$$

yazılabilir. (4.25) eşitsizliğinin her iki tarafının tersi alınırsa

$$(P_k)^{-1} \leq (I - K_k C_k)^{-T} (P_{k/k-1})^{-1} (I - K_k C_k)^{-1} \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.7) eşitliği düzenlenir ve tersi alınırsa

$$(P_{k+1/k}) = A_k (\Lambda_k P_k \Lambda_k' + A_k^{-1} \Lambda_k Q_k \Lambda_k' A_k^{-T}) A_k' \quad (4.27)$$

$$(P_{k+1/k})^{-1} = A_k^{-T} (\Lambda_k P_k \Lambda_k' + A_k^{-1} \Lambda_k Q_k \Lambda_k' A_k^{-T})^{-1} A_k^{-1} \quad (4.28)$$

$$= A_k^{-T} \Lambda_k^{-T} (P_k + \Lambda_k^{-1} A_k^{-1} \Lambda_k Q_k \Lambda_k' A_k^{-T} \Lambda_k^{-T})^{-1} \Lambda_k^{-1} A_k^{-1} \quad (4.29)$$

elde edilir. (4.29) eşitliğine matris tersi lemmasının uygulanması ile

$$\Pi_{k+1}^- = A_k^{-T} \Lambda_k^{-T} \left[\Pi_k^+ - \Pi_k^+ \left(\Pi_k^+ + \Lambda_k' A_k' \Lambda_k^{-T} Q_k^{-1} \Lambda_k^{-1} A_k \Lambda_k \right)^{-1} \Pi_k^+ \right] \Lambda_k^{-1} A_k^{-1} \quad (4.30)$$

bulunur. P_k ve $P_{k/k-1}$ matrislerinin simetrik pozitif tanımlı matrisler olduğu göz önüne alınarak (2.40) eşitliğinden

$$\Pi_k^+ = \Pi_k^- (I - K_k C_k)^{-1} \quad (4.31.a)$$

$$\Pi_k^+ = (I - K_k C_k)^{-T} \Pi_k^- \quad (4.31.b)$$

yazılabilir. (4.29) eşitliğinde (4.26) eşitsizliğinin ve (4.31.a)-(4.31.b) eşitliklerinin kullanılmasıyla,

$$\Pi_{k+1}^- = A_k^{-T} \Lambda_k^{-T} \left[\Pi_k^+ - \Pi_k^+ (\Pi_k^+ + \Lambda_k' A_k' \Lambda_k^{-T} Q_k^{-1} \Lambda_k^{-1} A_k \Lambda_k)^{-1} \Pi_k^+ \right] \Lambda_k^{-1} A_k^{-1} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{k+1}^- \leq & \left\{ A_k^{-T} \Lambda_k^{-T} \right. \\ & \left[(I - K_k C_k)^{-T} \Pi_k^- (I - K_k C_k)^{-1} \right. \\ & \left. - (I - K_k C_k)^{-T} \Pi_k^- (\Pi_k^+ + \Lambda_k' A_k' \Lambda_k^{-T} Q_k^{-1} \Lambda_k^{-1} A_k \Lambda_k)^{-1} \Pi_k^- (I - K_k C_k)^{-1} \right] \\ & \left. \Lambda_k^{-1} A_k^{-1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{k+1}^- \leq & \left\{ A_k^{-T} \Lambda_k^{-T} (I - K_k C_k)^{-T} \right. \\ & \left[\Pi_k^- - \Pi_k^- (\Pi_k^+ + \Lambda_k' A_k' \Lambda_k^{-T} Q_k^{-1} \Lambda_k^{-1} A_k \Lambda_k)^{-1} \Pi_k^- \right] \\ & \left. (I - K_k C_k)^{-1} \Lambda_k^{-1} A_k^{-1} \right\} \quad (4.33) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.33) eşitsizliğinde (4.23) eşitsizliğinin kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} \Pi_{k+1}^- \leq & \left\{ A_k^{-T} \left\| \Lambda_k^{-T} \right\| (I - K_k C_k)^{-T} \right. \\ & \left[\Pi_k^- - \Pi_k^- (\Pi_k^+ + \Lambda_k' A_k' \Lambda_k^{-T} Q_k^{-1} \Lambda_k^{-1} A_k \Lambda_k)^{-1} \Pi_k^- \right] \\ & \left. (I - K_k C_k)^{-1} \left\| \Lambda_k^{-1} \right\| A_k^{-1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{k+1}^- \leq & \left\{ A_k^{-T} (I - K_k C_k)^{-T} \right. \\ & \left[\Pi_k^- - \Pi_k^- \left(\Pi_k^+ + \Lambda_k' A_k' \Lambda_k^{-T} Q_k^{-1} \Lambda_k^{-1} A_k \Lambda_k \right)^{-1} \Pi_k^- \right] \\ & \left. (I - K_k C_k)^{-1} A_k^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.1 (2.36)-(2.42) ile verilen kesikli zaman İlerletilmiş Kalman Filtresi göz önüne alınsın ancak (2.37) eşitliği yerine (4.7) eşitliği alınsın ve

$$1) \quad \|A_k\| \leq \bar{a} \quad (4.35.a)$$

$$\|C_k\| \leq \bar{c} \quad (4.35.b)$$

$$\underline{p}I \leq P_{k/k-1} \leq \bar{p}I \quad (4.35.c)$$

$$\underline{p}I \leq P_k \leq \bar{p}I \quad (4.35.d)$$

$$1 \leq \|\Lambda_k\| \leq \bar{\lambda} \quad (4.35.e)$$

olacak şekilde $\bar{a}, \bar{c}, \underline{p}, \bar{p} > 0$ ve $\bar{\lambda} \geq 1$ pozitif reel sayıları var olsun.

2) $k \geq 0$ için A_k tersinir olsun.

3) (4.5) eşitliğindeki $\varphi(.,.,.)$, $\chi(.,.)$ fonksiyonları sınırlı olacak şekilde $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\chi, \kappa_\varphi, \kappa_\chi > 0$ pozitif reel sayıları mevcut olsun öyle ki ;

$$\|\varphi(x, \hat{x}^+, u)\| \leq \kappa_\varphi \|x - \hat{x}^+\|^2 \quad (4.36)$$

$$\|\chi(x, \hat{x}^+)\| \leq \kappa_\chi \|x - \hat{x}^+\|^2 \quad (4.37)$$

$x, \hat{x}^-, \hat{x}^+ \in R^n$ ve $u_k \in R^n$, $\|x - \hat{x}^+\| \leq \varepsilon_\varphi$ ve $\|x - \hat{x}^-\| \leq \varepsilon_\chi$

koşulları sağlansın. Bu koşullar altında verilen İlerletilmiş Kalman Filtresi bir üstel gözlemcidir.

İspat: Tahmin hatası ζ_k için (4.4) ile verilen fark denklemini göz önüne alınsın. Bunun üstel durağanlığını ispatlamak için $\Pi_k^- = (P_{k/k-1})^{-1}$ olmak üzere,

$$V_k = \zeta_k' \Pi_k^- \zeta_k \quad (4.38)$$

Lyapunov fonksiyonu seçilsin. (4.35.c) den dolayı bu Lyapunov fonksiyonu

$$\frac{1}{p} \|\zeta_k\|^2 \leq V_k(\zeta_k) \leq \frac{1}{\underline{p}} \|\zeta_k\|^2 \quad (4.39)$$

sınırlarında yazılabilir. (4.35.c)-(4.35.d) kısıtları ile birlikte $P_{k/k-1}$ ve P_k kovaryans matrislerinin tersinir oldukları göz önünde bulundurulursa (2.40) dan,

$$(I - K_k C_k)^{-1} = P_{k/k-1} \Pi_k^+$$

yazılabilir. Teorem 4.1'in 2.varsayımı ile birlikte lemma 4.3'ün varsayımları sağlanır.

(4.4) ve (4.24) ile birlikte

$$\begin{aligned} V_{k+1}(\zeta_{k+1}) &= \zeta_{k+1}' \Pi_{k+1}^- \zeta_{k+1} \leq \zeta_k' \left[\Pi_k^- - \Pi_k^- (\Pi_k^+ + \Lambda_k' A_k' \Lambda_k^{-T} Q_k^{-1} \Lambda_k^{-1} A_k \Lambda_k) \Pi_k^- \right] \zeta_k \\ &\quad + 2r_k' \Pi_{k+1}^- A_n (I - K_k C_k) \zeta_k + r_k' \Pi_{k+1}^- r_k \end{aligned} \quad (4.40)$$

olarak yazılabilir. R_k 'nın en küçük özdeğeri \underline{r} ile gösterilirse (4.9) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \|K_k\| &= \|P_k^+ C_k R_k^{-1}\| \\ \|K_k\| &\leq \|P_k^+\| \cdot \|C_k\| \cdot \|R_k^{-1}\| \leq \bar{k} \end{aligned}$$

yazılabilir. (4.35.b), (4.35.c) den

$$\|K_k\| \leq \bar{p}c/\underline{r} \leq \bar{k} \quad (4.41)$$

elde edilir, burada $\bar{k} = \bar{p}c/\underline{r}$ dir. (4.35.a), (4.35.b) (4.35.e),(4.41) (4.36) ve (4.37) ile yukarıdaki eşitsizliğe lemma 4.1 uygulanabilir.(4.35.a)-(4.35.e) ve (4.41) ile birlikte $\|\zeta_k\| \leq \varepsilon$ için ve $\underline{q} > 0$ pozitif tanımlı Q_k matrisinin en küçük özdeğeri olmak üzere,

$$\begin{aligned} V_{k+1}(\zeta_{k+1}) &\leq \zeta_k' \Pi_k^- \zeta_k - \frac{1}{\bar{p}^2 \left(\bar{p} + a \frac{\bar{\lambda}^2}{\underline{q}} \right)} \|\zeta_k\|^2 + 2\kappa \|\zeta_k\|^2 \frac{\bar{a}(1+\bar{k}c)}{\underline{p}} \|\zeta_k\| \\ &\quad + \kappa \|\zeta_k\|^2 \frac{1}{\underline{p}} \kappa \varepsilon \|\zeta_k\| \end{aligned} \quad (4.42)$$

olarak yazılabilir.

$$\kappa' = \frac{\kappa}{\underline{p}} \left(2\bar{a}(1+\bar{k}c) + \kappa \varepsilon \right) \quad (4.43)$$

şeklinde gösterilmek üzere;

$$V_{k+1}(\zeta_{k+1}) \leq V_k(\zeta_k) - \left(\frac{1}{\bar{p}^2 \left(\bar{p} + a \frac{\bar{\lambda}^2}{\underline{q}} \right)} - \kappa' \|\zeta_k\| \right) \|\zeta_k\|^2 \quad (4.44)$$

olur.

$$\varepsilon' = \min \left(\varepsilon, \frac{1}{2\kappa' \bar{p}^2 \left(\bar{p} + a \frac{\bar{\lambda}^2}{\underline{q}} \right)} \right) \quad (4.45)$$

olarak alınmasıyla $\|\zeta_n\| \leq \varepsilon'$ için,

$$V_{k+1}(\varsigma_{k+1}) \leq V_k(\varsigma_k) - \left(\frac{1}{2\bar{p}^2 \left(\bar{p} + \bar{a} \frac{\bar{\lambda}^2}{\bar{q}} \right)} \|\varsigma_k\|^2 \right) \quad (4.46)$$

$$V_{k+1}(\varsigma_{k+1}) - V_k(\varsigma_k) \leq - \left(\frac{1}{2\bar{p}^2 \left(\bar{p} + \bar{a} \frac{\bar{\lambda}^2}{\bar{q}} \right)} \|\varsigma_k\|^2 \right) \quad (4.47)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (4.39) dan dolayı (4.47) ifadesinin sağ tarafı negatiftir. Bu nedenle $V_{k+1}(\varsigma_{k+1}) - V_k(\varsigma_k)$ farkı negatif tanımlı olur. Fark denklemleri için Lyapunov fonksiyonlarının standart sonucunun uygulanmasından (Lakshmikantham V. ve Trigiante D. 1988) (4.4) ile verilen fark denkleminin asimptotik olarak 0 noktasında denge durağanlık noktasına sahip olduğu sonucu çıkar. (4.39) ve (4.47)'den

$$\begin{aligned} V_{k+1}(\varsigma_{k+1}) - V_k(\varsigma_k) &\leq - \left(\frac{1}{2\bar{p}^2 \left(\bar{p} + \bar{a} \frac{\bar{\lambda}^2}{\bar{q}} \right)} \|\varsigma_k\|^2 \right) \\ V_{k+1}(\varsigma_{k+1}) &\leq - \left(\frac{1}{2\bar{p}^2 \left(\bar{p} + \bar{a} \frac{\bar{\lambda}^2}{\bar{q}} \right)} \|\varsigma_k\|^2 \right) + V_k(\varsigma_k) \\ V_{k+1}(\varsigma_{k+1}) &\leq V_k(\varsigma_k) \left(1 - \frac{1}{2\bar{p}^2 \left(\bar{p} + \bar{a} \frac{\bar{\lambda}^2}{\bar{q}} \right)} \|\varsigma_k\|^2 \frac{1}{V_k(\varsigma_k)} \right) \\ V_{k+1}(\varsigma_{k+1}) &\leq V_k(\varsigma_k) \left(1 - \frac{1}{2\bar{p}^2 \left(\bar{p} + \bar{a} \frac{\bar{\lambda}^2}{\bar{q}} \right)} \|\varsigma_k\|^2 \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}} \|\varsigma_k\|^2} \right) \\ V_{k+1}(\varsigma_{k+1}) &\leq V_k(\varsigma_k) \left(1 - \frac{\bar{p}}{2\bar{p}^2 \left(\bar{p} + \bar{a} \frac{\bar{\lambda}^2}{\bar{q}} \right)} \right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

yazılabilir. Buradan da,

$$V_k(\zeta_k) \leq V_0(\zeta_0) \left(-\frac{p}{2\bar{p}^2 \left(\bar{p} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 / \underline{q} \right)} \right)^k \quad (4.49)$$

elde edilir. Genelliği bozmadan $\bar{p} > 1$ olarak varsayılabilir, böylece

$$1 - \frac{p}{2\bar{p}^2 \left(\bar{p} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 / \underline{q} \right)} > 0 \quad (4.50)$$

yazılabilir. (4.39)'un kullanılmasıyla (4.49) dan

$$\|\zeta_k\| \leq \sqrt{\bar{p}/\underline{p}} \|\zeta_0\| \left(\frac{1}{1 - \frac{p}{2\bar{p}^2 \left(\bar{p} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 / \underline{q} \right)}} \right)^{-k} \quad (4.51)$$

olarak yazılabilir. Yani,

$$\eta = \sqrt{\bar{p}/\underline{p}} > 0 \quad (4.52)$$

ve

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p}{2\bar{p}^2 \left(\bar{p} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 / \underline{q} \right)}}} \quad (4.53)$$

dir. Reif ve Unbehauen (1999) da (4.7) eşitliği yerine

$$P_{k+1/k} = \alpha^2 A_k P_k A_k' + Q_k$$

alınmış ve $\alpha > 1$ olmak üzere,

$$\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{p}{2p^2 \left(\bar{p} + \bar{a}^2 \alpha^2 / \underline{q} \right)}}} > \alpha$$

olarak bulunmuştur. Babacan (2009) da ise (4.7) eşitliği yerine

$$P_{k+1/k} = \alpha^2 (A_k P_k^+ A_k' + Q_k)$$

alınmış ve $\alpha > 1$ olmak üzere,

$$\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{p}{2p^2 \left(\bar{p} + \bar{a}^2 / \underline{q} \right)}}} > \alpha$$

olarak bulunmuştur. (4.53) ile bulunan θ değeri ise bu iki ifadeden daha küçüktür. θ değerinin küçük olması ise yakınsamanın daha hızlı olduğunu göstermektedir.

4.2 Kesikli Zaman Stokastik Durum-Uzay Modellerinde Matris Unutma Faktörü ile Uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresinin Yakınsaması

Bu kısımda kesikli zaman stokastik durum matris uyarlı Kalman Filtresinin yakınsaması Reif vd. (1999), Özbek vd. (2010), Babacan vd. (2008) ve Babacan (2009) çalışmaları temel alınarak incelenecektir. Bu kısımda $\|\cdot\|$ gösterimi bir vektörün Euclide normu veya bir matrisin spektral normu anlamında kullanılmıştır.

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n) + G_n w_n \quad (4.54)$$

$$y_n = h(x_n) + D_n v_n \quad (4.55)$$

lineer olmayan kesikli zaman stokastik durum-uzay modeli göz önüne alınsın. Burada $n \in N_0$ kesikli zaman noktasını, $x_n \in R^q$ durum vektörünü, $u_n \in R^q$ girdi vektörünü, $y_n \in R^m$ çıktı vektörünü, $v_n \in R^k, w_n \in R^l$ birbiriyle ilişkisiz sıfır ortalamalı, birim kovaryanslı gürültü süreçlerini ve D_n, G_n zamanla değişen $m \times k$ ve $q \times l$ boyutlu matrisleri göstermektedir. x_0 başlangıç koşulu sabit, $f(\cdot, \cdot)$ ve $h(\cdot)$ fonksiyonlarının her ikisinin de sürekli türevlere sahip oldukları varsayılınsın. Bu model için bir durum tahmin edicisi

$$\hat{x}_{n+1} = f(\hat{x}_n, u_n) + K_n (y_n - h(\hat{x}_n)) \quad (4.56)$$

ile verilir (Reif vd. 1999). Burada K_n zamanla değişen $q \times m$ boyutlu gözlemci kazanç matrisidir. Durum tahmini \hat{x}_n ile gösterilmek üzere $f(\cdot, \cdot)$ ve $h(\cdot)$ fonksiyonları birinci dereceden sürekli türevlere sahip olduklarından

$$A_n = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_n, u_n) \quad (4.57)$$

$$C_n = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_n) \quad (4.58)$$

olmak üzere

$$f(x_n, u_n) - f(\hat{x}_n, u_n) = A_n (x_n - \hat{x}_n) + \varphi(x_n, \hat{x}_n, u_n) \quad (4.59)$$

$$h(x_n) - h(\hat{x}_n) = C_n (x_n - \hat{x}_n) + \chi(x_n, \hat{x}_n) \quad (4.60)$$

biçiminde yazılabilirler.

n zamanındaki tahmin hatası ζ_n ile gösterilmek üzere,

$$\zeta_n = x_n - \hat{x}_n \quad (4.61)$$

dir ve (4.54) den (4.56)'nın çıkarılması ve (4.55) ile (4.57)-(4.60)'ın göz önüne alınmasıyla,

$$\begin{aligned}
\zeta_{n+1} &= f(x_n, u_n) + G_n w_n - [f(\hat{x}_n, u_n) + K_n (y_n - h(\hat{x}_n))] \\
&= f(x_n, u_n) - f(\hat{x}_n, u_n) - K_n (y_n - h(\hat{x}_n)) + G_n w_n \\
&= A_n (x_n - \hat{x}_n) + \varphi(x_n, \hat{x}_n, u_n) - K_n (h(x_n) + D_n v_n - h(\hat{x}_n)) + G_n w_n \\
&= A_n (x_n - \hat{x}_n) + \varphi(x_n, \hat{x}_n, u_n) - K_n [C_n (x_n - \hat{x}_n) + \mathcal{X}(x_n, \hat{x}_n) + D_n v_n] + G_n w_n \\
&= (A_n - K_n C_n) \zeta_n + r_n + s_n
\end{aligned} \tag{4.62}$$

yazılır. Burada

$$r_n = \varphi(x_n, \hat{x}_n, u_n) - K_n \mathcal{X}(x_n, \hat{x}_n) \tag{4.63}$$

$$s_n = G_n w_n - K_n D_n v_n \tag{4.64}$$

dir. (4.62) eşitliği ile verilen hata dinamiğini incelemek için stokastik süreçlerde sınırlılık için verilen iki tanım kullanılabilir.

Tanım 4.3 Eğer $\eta, \nu > 0$ ve $0 < \varphi < 1$ reel sayıları,

$$E\{\|\zeta_n\|^2\} \leq \eta \|\zeta_0\|^2 \varphi^n + \nu \tag{4.65}$$

eşitsizliğini her $n \geq 0$ değeri için sağlayacak şekilde mevcut ise ζ_n stokastik sürecine ortalama kareler anlamında sınırlıdır denir (Agniel ve Jury 1971, Tarn ve Rasis 1976).

Tanım 4.4 Eğer

$$\sup \|\zeta_n\| < \infty \tag{4.66}$$

eşitsizliği 1 olasılığı ile sağlanır ise stokastik süreç 1 olasılık ile sınırlıdır denir (Agniel ve Jury 1971, Tarn ve Rasis 1976).

Lemma 4.4 $V_n(\zeta_n)$ stokastik süreci ve $\underline{v}, \bar{v}, \mu > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ reel sayıları mevcut olsun öyle ki;

$$\underline{v} \|\zeta_n\|^2 \leq V_n(\zeta_n) \leq \bar{v} \|\zeta_n\|^2 \quad (4.67)$$

ve

$$E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\} - V_n(\zeta_n) \leq \mu - \alpha V_n(\zeta_n) \quad (4.68)$$

(4.62)'nin her çözümü için sağlansın. Bu durumda stokastik süreç ortalama kareler anlamında üstel sınırlıdır denir ve

$$E\{\|\zeta_n\|^2\} \leq \frac{\bar{v}}{\underline{v}} E\{\|\zeta_0\|^2\} (1-\alpha)^n + \frac{\mu}{\underline{v}} \sum_{i=1}^{n-1} (1-\alpha)^i \quad (4.69)$$

$\forall n \geq 0$ için gerçekleşmiş olur, üstelik süreç 1 olasılık ile sınırlıdır (Reif vd. 1999).

4.2.1 Matris uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi için hata sınırları

Tanım 4.5 Bir kesikli zaman matris uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi, Λ_n zamanla değişen $q \times q$ boyutlu köşegen bir matris olmak üzere;

Durum Tahmini İçin Fark Denklemleri:

$$\hat{x}_{n+1} = f(\hat{x}_n, u_n) + K_n (y_n - h(\hat{x}_n)) \quad (4.70)$$

Riccati Fark Denklemleri:

$$P_{n+1} = A_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' A_n' + \Lambda_n Q_n \Lambda_n' - K_n (C_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' + R_n) K_n' \quad (4.71)$$

Lineerleştirme:

$$A_n = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_n, u_n) \quad (4.72)$$

$$C_n = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_n) \quad (4.73)$$

Kalman Kazancı:

$$K_n = A_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' (C_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' + R_n)^{-1} \quad (4.74)$$

eşitlikleri ile verildiği gibidir. Burada Q_n ve R_n (4.54)-(4.55) ile verilen sistemdeki gürültü süreçlerinin kovaryans matrisleridir ve sırasıyla $q \times q$ ve $m \times m$ boyutlu pozitif tanımlı simetrik matrislerdir.

Uyarlı olmayan filtreler de Q_n ve R_n matrisleri alışıldık olarak

$$Q_n = G_n G_n'$$

$$R_n = D_n D_n'$$

biçiminde seçilir. Deterministik tahmin probleminde ise bu seçim, $G_n G_n' = 0$, $D_n D_n' = 0$ şeklindedir (Reif vd. 1996, Reif vd. 1997). Ancak burada sistem gürültü kovaryansının $Q_n = \Lambda_n Q_n \Lambda_n'$ ağırlıklandırması göz önünde bulundurularak

$$Q_n = G_n \Lambda_n \Lambda_n' G_n'$$

$$R_n = D_n D_n'$$

biçiminde alınabilir.

Teorem 4.2 (4.54), (4.55) ile verilen sistem ve Tanım 4.5 ile verilen matris uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi göz önüne alınsın. Ayrıca,

1) $\forall n \geq 0$ için $\bar{a}, \bar{c}, \underline{p}, \bar{p} > 0$ ve $\underline{\lambda}, \bar{\lambda} \geq 1$, reel sayıları

$$\|A_n\| \leq \bar{a} \quad (4.75.a)$$

$$\|C_n\| \leq \bar{c} \quad (4.75.b)$$

$$\underline{p}I \leq P_n \leq \bar{p}I \quad (4.75.c)$$

$$\underline{q}I \leq Q_n \quad (4.75.d)$$

$$\underline{r}I \leq R_n \quad (4.75.e)$$

$$\underline{\lambda}I \leq \Lambda_n \leq \bar{\lambda}I \quad (4.75.f)$$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde mevcut olsun. Burada \underline{q}, Q_n matrisinin en küçük özdeğeri, \underline{r}, R_n matrisinin en küçük özdeğeri, $\underline{\lambda}, \Lambda_n$ matrisinin köşegen elemanlarının en küçüğü ve $\bar{\lambda}, \Lambda_n$ matrisinin köşegen elemanlarının en büyüğüdür. Ayrıca J, B aynı boyutlu matrisler olmak üzere $J > B$ gösterimi $l'(J - B)l > 0$ olması anlamında yani pozitif tanımlı olması anlamında kullanılmıştır. Burada l uygun boyutlu bir vektördür.

2) $\forall n \geq 0$ için A_n tersinir olsun.

3) $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\chi, \kappa_\varphi, \kappa_\chi > 0$ reel sayıları mevcut olsun öyleki $x, \hat{x} \in R^q$, $\|x - \hat{x}\| \leq \varepsilon_\varphi$ ve $\|x - \hat{x}\| \leq \varepsilon_\chi$ için (4.63) ile verilen φ, χ lineer olmayan fonksiyonları

$$\|\varphi(x, \hat{x}, u)\| \leq \kappa_\varphi \|x - \hat{x}\|^2 \quad (4.76.a)$$

$$\|\chi(x, \hat{x})\| \leq \kappa_\chi \|x - \hat{x}\|^2 \quad (4.76.b)$$

eşitsizliklerini sağlasın. Böylece başlangıç tahmin hatası için,

$$\|\zeta_0\| < \varepsilon \quad (4.77)$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde $\varepsilon > 0$ sayısı ve gürültü terimlerinin kovaryansları,

$$G_n \Lambda_n \Lambda_n' G_n' \leq \delta I \quad (4.78)$$

$$D_n D_n' \leq \delta I \quad (4.79)$$

sınırlarında olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, (4.61) ile verilen ζ_n tahmin hatası ortalama kareler anlamında üstel sınırlı ve 1 olasılık ile sınırlıdır.

Reif vd. (1999)'da olduğu gibi burada da Teorem 4.2'nin ispatı birkaç lemmaya bölünmüştür.

Lemma 4.5 Teorem 4.2 in koşulları altında; $n \geq 0$, K_n gözlemci kazancı ve

$$\Pi_n = (\Lambda_n P_n \Lambda_n')^{-1}$$

olmak üzere,

$$(A_n - K_n C_n)' \Pi_{n+1} (A_n - K_n C_n) \leq (1 - \alpha) \Pi_n$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $0 < \alpha < 1$ reel sayısı mevcuttur öyle ki;

$$(1 - \alpha) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda^2 q}{\bar{\lambda}^2 \bar{p} \left(\bar{a} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{r} \right)^2} \right)}$$

olarak bulunur.

İspat: (4.71)'de (4.74)'ün yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= A_n \Lambda_n P_n \Lambda'_n A'_n + \Lambda_n Q_n \Lambda'_n \\
&\quad - A_n \Lambda_n P_n \Lambda'_n C'_n (C_n \Lambda_n P_n \Lambda'_n C'_n + R_n)^{-1} (C_n \Lambda_n P_n \Lambda'_n C'_n + R_n) K'_n \\
&= A_n \Lambda_n P_n \Lambda'_n A'_n + \Lambda_n Q_n \Lambda'_n - A_n \Lambda_n P_n \Lambda'_n C'_n K'_n \\
&= (A_n - K_n C_n) \Lambda_n P_n \Lambda'_n (A_n - K_n C_n)' + \Lambda_n Q_n \Lambda'_n + K_n C_n \Lambda_n P_n \Lambda'_n (A_n - K_n C_n)' \quad (4.80)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.74) eşitliğinden faydalanarak $A_n^{-1} (A_n - K_n C_n) \Lambda_n P_n \Lambda'_n$ ifadesi

$$\begin{aligned}
A_n^{-1} (A_n - K_n C_n) \Lambda_n P_n \Lambda'_n &= A_n^{-1} \left(A_n - A_n \Lambda_n P_n \Lambda'_n C'_n (C_n \Lambda_n P_n \Lambda'_n C'_n + R_n)^{-1} C_n \right) \Lambda_n P_n \Lambda'_n \\
&= \Lambda_n P_n \Lambda'_n - \Lambda_n P_n \Lambda'_n C'_n (C_n \Lambda_n P_n \Lambda'_n C'_n + R_n)^{-1} C_n \Lambda_n P_n \Lambda'_n \quad (4.81)
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. (4.81) ifadesi simetrik bir matristir ve matris tersi lemması (Anderson ve Moore 1979, Lewis 1986) uygulanırsa

$$A_n^{-1} (A_n - K_n C_n) \Lambda_n P_n \Lambda'_n = \left(\Lambda_n P_n \Lambda'_n + C_n R_n^{-1} C'_n \right)^{-1} \geq 0 \quad (4.82)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
A_n^{-1} K_n C_n &= A_n^{-1} A_n \Lambda_n P_n \Lambda'_n C'_n (C_n \Lambda_n P_n \Lambda'_n C'_n + R_n)^{-1} C_n \\
&= \Lambda_n P_n \Lambda'_n C'_n (C_n \Lambda_n P_n \Lambda'_n C'_n + R_n)^{-1} C_n \geq 0 \quad (4.83)
\end{aligned}$$

yazılabilir. (4.82), (4.83) ifadelerinden ve $(\Lambda_n P_n \Lambda'_n) = (\Lambda_n P_n \Lambda'_n)'$ olmasından dolayı

$$K_n C_n \Lambda_n P_n \Lambda'_n (A_n - K_n C_n)' = A_n \left[A_n^{-1} K_n C_n \right] \left[A_n^{-1} (A_n - K_n C_n) \Lambda_n P_n \Lambda'_n \right]' A'_n \geq 0 \quad (4.84)$$

elde edilir. (4.83) eşitliği göz önünde bulundurularak (4.80) eşitliğinden

$$P_{n+1} \geq (A_n - K_n C_n) \Lambda_n P_n \Lambda_n' (A_n - K_n C_n)' + \Lambda_n Q_n \Lambda_n' \quad (4.85)$$

yazılabilir. Ayrıca (4.82) ifadesinden $(A_n - K_n C_n)^{-1}$ ifadesinin mevcut olduğu anlaşılır.

Böylece

$$P_{n+1} \geq (A_n - K_n C_n) \left[\Lambda_n P_n \Lambda_n' + (A_n - K_n C_n)^{-1} \Lambda_n Q_n \Lambda_n' \left((A_n - K_n C_n)' \right)^{-1} \right] (A_n - K_n C_n)' \quad (4.86)$$

yazılabilir.

(4.74) eşitliği ile (4.75) eşitsizliklerinin göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned} \|K_n\| &\leq \|A_n\| \|\Lambda_n\| \|P_n\| \|\Lambda_n'\| \|C_n'\| \left\| (C_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' + R_n)^{-1} \right\| \\ &\leq \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{\underline{r}} \end{aligned} \quad (4.87)$$

elde edilir. (4.75) ile verilen eşitsizlikler (4.86) eşitsizliğinde yerine yazılması ile

$$P_{n+1} \geq (A_n - K_n C_n) \left[\Lambda_n P_n \Lambda_n' + \frac{\underline{\lambda}^2 \underline{q}}{\left(\bar{a} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{\underline{r}} \right)^2} I \right] (A_n - K_n C_n)' \quad (4.88)$$

elde edilir. Buradan (4.88) eşitsizliğinin her iki tarafı soldan Λ_{n+1} ve sağdan Λ_{n+1}' ile çarpılırsa

$$\Lambda_{n+1} P_{n+1} \Lambda_{n+1}' \geq \Lambda_{n+1} (A_n - K_n C_n) \left[\Lambda_n P_n \Lambda_n' + \frac{\underline{\lambda}^2 \underline{q}}{\left(\bar{a} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{\underline{r}} \right)^2} I \right] (A_n - K_n C_n)' \Lambda_{n+1}' \quad (4.89)$$

bulunur. (4.75.f) eşitsizliğinin göz önünde bulundurulmasıyla (4.89) eşitsizliği

$$\Lambda_{n+1} P_{n+1} \Lambda'_{n+1} \geq \underline{\lambda}^2 (A_n - K_n C_n) \left[\Lambda_n P_n \Lambda'_n + \frac{\underline{\lambda}^2 \underline{q}}{\left(\bar{a} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{\underline{r}} \right)^2} I \right] (A_n - K_n C_n)' \quad (4.90)$$

elde edilir. (4.90) eşitliğinin her iki tarafının tersinin alınması ve soldan $(A_n - K_n C_n)'$ ile sağdan da $(A_n - K_n C_n)$ ifadesi ile çarpılması sonucu

$$\begin{aligned} (A_n - K_n C_n)' \Pi_{n+1} (A_n - K_n C_n) &\leq \frac{1}{\underline{\lambda}^2} \left[\Lambda_n P_n \Lambda'_n + \frac{\underline{\lambda}^2 \underline{q}}{\left(\bar{a} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{\underline{r}} \right)^2} I \right]^{-1} \\ (A_n - K_n C_n)' \Pi_{n+1} (A_n - K_n C_n) &\leq \frac{1}{\underline{\lambda}^2} \left[I + \frac{\underline{\lambda}^2 \underline{q}}{\left(\bar{a} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{\underline{r}} \right)^2} I (\Lambda_n P_n \Lambda'_n)^{-1} \right]^{-1} (\Lambda_n P_n \Lambda'_n)^{-1} \\ (A_n - K_n C_n)' \Pi_{n+1} (A_n - K_n C_n) &\leq \frac{1}{\underline{\lambda}^2} \left[I + \frac{\underline{\lambda}^2 \underline{q}}{\left(\bar{a} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{\underline{r}} \right)^2} I (\Lambda_n P_n \Lambda'_n)^{-1} \right]^{-1} \Pi_n \\ (A_n - K_n C_n)' \Pi_{n+1} (A_n - K_n C_n) &\leq \frac{1}{\underline{\lambda}^2} \left(1 + \frac{\underline{\lambda}^2 \underline{q}}{\bar{\lambda}^2 \bar{p} \left(\bar{a} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{\underline{r}} \right)^2} \right)^{-1} \Pi_n \end{aligned} \quad (4.91)$$

elde edilir. Böylece

$$(1-\alpha) = \frac{1}{\underline{\lambda}^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\underline{\lambda}^2 \underline{q}}{\bar{\lambda}^2 \bar{p} \left(\bar{a} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{\underline{r}} \right)^2} \right)} \quad (4.92)$$

olarak elde edilir.

Lemma 4.6 Teorem 4.2 in koşulları altında, $\Pi_n = (\Lambda_n P_n \Lambda'_n)^{-1}$ ve K_n , r_n (4.74) ve (4.63) da verildiği gibi olsun. Bu durumda, ε' , $\kappa_{nont} > 0$ pozitif reel sayıları mevcuttur öyle ki;

$$r'_n \Pi_n \left[2(A_n - K_n C_n)(x_n - \hat{x}_n) + r_n \right] \leq \kappa_{nont} \|x_n - \hat{x}_n\|^3 \quad (4.93)$$

sağlanacak şekilde $\|x_n - \hat{x}_n\| \leq \varepsilon'_n$ vardır.

İspat: (4.74) eşitliğinin ve (4.75) eşitsizliklerinin göz önünde bulundurulmasından ve $C_n \Lambda_n P_n \Lambda'_n C'_n > 0$ olmasından dolayı

$$\|K_n\| \leq \bar{a} \bar{p} \bar{c} \bar{\lambda}^2 / \underline{r} \quad (4.94)$$

dir. (4.94) ifadesi (4.63) de yerine yazılırsa

$$\|r_n\| \leq \|\varphi(x_n, \hat{x}_n, u_n)\| + \left(\bar{a} \bar{p} \bar{c} \bar{\lambda}^2 / \underline{r} \right) \|\chi(x_n, \hat{x}_n)\| \quad (4.95)$$

elde edilir.

$$\varepsilon' = \min(\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\chi)$$

seçilmesi ve (4.76.a), (4.76.b) eşitsizliklerinin göz önüne alınmasıyla

$$\|r_n\| \leq \kappa_\varphi \|x_n - \hat{x}_n\|^2 + (\bar{a} \bar{p} \bar{c} \bar{\lambda}^2 / \underline{r}) \kappa_\chi \|(x_n, \hat{x}_n)\|^2 \quad (4.96)$$

yazılır. $\|x_n - \hat{x}_n\| \leq \varepsilon'_n$ olduğundan

$$\|r_n\| \leq \kappa' \|x_n - \hat{x}_n\|^2 \quad (4.97)$$

dir. Burada

$$\kappa' = \kappa_\varphi + (\bar{a} \bar{p} \bar{c} \bar{\lambda}^2 / \underline{r}) \kappa_\chi \quad (4.98)$$

dir. $\|x_n - \hat{x}_n\| \leq \varepsilon'$ olmak üzere ve $\Pi_n = (\Lambda_n P_n \Lambda'_n)^{-1}$ nin ve (4.75) eşitsizliklerinin göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned} & r'_n \Pi_n [2(A_n - K_n C_n)(x_n - \hat{x}_n) + r_n] \\ & \leq \kappa' \|x_n - \hat{x}_n\|^2 \frac{1}{\underline{\lambda}^2 \underline{p}} \left[2 \left(\bar{a} + \bar{a} \bar{p} \bar{c} \bar{\lambda}^2 \frac{1}{\underline{r}} \bar{c} \right) \|x_n - \hat{x}_n\| + \kappa' \varepsilon' \|x_n - \hat{x}_n\| \right] \end{aligned} \quad (4.99)$$

yazılabilir. (4.99) ifadesi yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} & r'_n \Pi_n [2(A_n - K_n C_n)(x_n - \hat{x}_n) + r_n] \\ & \leq \kappa' \frac{1}{\underline{\lambda}^2 \underline{p}} \left[2 \left(\bar{a} + \bar{a} \bar{p} \bar{c} \bar{\lambda}^2 \frac{1}{\underline{r}} \bar{c} \right) + \kappa' \varepsilon' \right] \|x_n - \hat{x}_n\|^3 \\ & = \kappa_{nonl} \|x_n - \hat{x}_n\|^3 \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\kappa_{nonl} = \kappa' \frac{1}{\underline{\lambda}^2 \underline{p}} \left[2 \left(\bar{a} + \bar{a} \bar{p} \bar{c} \bar{\lambda}^2 \frac{1}{\underline{r}} \bar{c} \right) + \kappa' \varepsilon' \right] \quad (4.100)$$

dir.

Lemma 4.7 Teorem 4.2'nin koşulları altında, $\Pi_n = (\Lambda_n P_n \Lambda_n')^{-1}$ ve K_n, s_n (4.74) ve (4.64)'de verildiği gibi olsun. Bu durumda; δ dan bağımsız

$$\kappa_{noise} > 0$$

ve

$$E\{s_n' \Pi_{n+1} s_n\} \leq \kappa_{noise} \delta$$

koşullarını sağlayan

$$\kappa_{noise} = \frac{q}{p\underline{\lambda}^2} + \frac{\bar{a}^2 \bar{c}^2 \bar{p}^2 \bar{\lambda}^4 m}{p\underline{r}^2} \quad (4.101)$$

sayısı vardır.

İspat :

$$\begin{aligned} s_n' \Pi_{n+1} s_n &= \left\{ (G_n w_n - K_n D_n v_n)' \Pi_{n+1} (G_n w_n - K_n D_n v_n) \right\} \\ &= \left\{ (G_n w_n)' \Pi_{n+1} (G_n w_n) - (G_n w_n)' \Pi_{n+1} (K_n D_n v_n) \right. \\ &\quad \left. - (K_n D_n v_n)' \Pi_{n+1} (G_n w_n) + (K_n D_n v_n)' \Pi_{n+1} (K_n D_n v_n) \right\} \end{aligned}$$

dir. Buradan w_n ile v_n ilişkisiz olduklarından dolayı sadece diğer terimlere odaklanılması yeterli olacaktır. Böylece

$$s_n' \Pi_{n+1} s_n = \left\{ (G_n w_n)' \Pi_{n+1} (G_n w_n) + (K_n D_n v_n)' \Pi_{n+1} (K_n D_n v_n) \right\} \quad (4.102)$$

yazılabilir. (4.74) eşitliği ile (4.75) eşitsizliklerinin göz önüne alınmasıyla ve $C_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' > 0$ olmasından dolayı

$$\|K_n\| \leq \bar{a} \bar{p} \bar{c} \bar{\lambda}^2 / \underline{r} \quad (4.103)$$

yazılır. Ayrıca (4.75c) ve (4.75f) eşitsizlikleri göz önünde bulundurularak

$$s'_n \Pi_{n+1} s_n \leq \frac{1}{\underline{\lambda}^2 \underline{p}} w'_n G'_n G_n w_n + \frac{\bar{a}^2 \bar{p}^2 \bar{c}^2 \bar{\lambda}^2}{\underline{p} \underline{r}^2} v'_n D'_n D_n v_n \quad (4.104)$$

(4.104) eşitsizliğinin her iki tarafı da skaler olduğundan dolayı (4.104) eşitsizliğinin sağ tarafının izi alınabilir.

$$s'_n \Pi_{n+1} s_n \leq \frac{1}{\underline{\lambda}^2 \underline{p}} tr(w'_n G'_n G_n w_n) + \frac{\bar{a}^2 \bar{p}^2 \bar{c}^2 \bar{\lambda}^2}{\underline{p} \underline{r}^2} tr(v'_n D'_n D_n v_n) \quad (4.105)$$

yazılabilir. $tr(\Gamma \Delta) = tr(\Delta \Gamma)$ olduğundan dolayı (4.105) ifadesi

$$s'_n \Pi_{n+1} s_n \leq \frac{1}{\underline{\lambda}^2 \underline{p}} tr(G_n w_n w'_n G'_n) + \frac{\bar{a}^2 \bar{p}^2 \bar{c}^2 \bar{\lambda}^2}{\underline{p} \underline{r}^2} tr(D_n v_n v'_n D'_n) \quad (4.106)$$

olur. Burada D_n ve G_n deterministik matrisler olarak alınsın ve w_n ile v_n birim kovaryans matrisli beyaz gürültü süreci olduğunda

$$E\{v_n v'_n\} = I \quad (4.107)$$

$$E\{w_n w'_n\} = I \quad (4.108)$$

dır. Ancak modelde sistem gürültü sürecinin kovaryans matrisi soldan Λ_n ve sağdan Λ'_n ile ağırlıklandırıldığından dolayı I yerine $\Lambda_n \Lambda'_n$ alınabilir. Böylece

$$E\{s'_n \Pi_{n+1} s_n\} \leq \frac{1}{\underline{\lambda}^2 \underline{p}} tr(G_n \Lambda_n \Lambda'_n G'_n) + \frac{\bar{a}^2 \bar{p}^2 \bar{c}^2 \bar{\lambda}^2}{\underline{p} \underline{r}^2} tr(D_n v_n v'_n D'_n) \quad (4.109)$$

yazılır. (4.78) ve (4.79) eşitsizliklerinden

$$\text{tr}(G_n \Lambda_n \Lambda_n' G_n') \leq \delta \text{tr}(I) = q\delta \quad (4.110)$$

$$\text{tr}(D_n D_n') \leq \delta \text{tr}(I) = m\delta \quad (4.111)$$

dır. Burada q ve m sırasıyla G_n ve D_n matrislerinin satırlarının sayısıdır. Böylece

$$\kappa_{\text{noise}} = \frac{q}{\underline{\lambda}^2 \underline{p}} + \frac{\bar{a}^2 \bar{c}^2 \bar{p}^2 \bar{\lambda}^2 m}{\underline{p} \underline{r}^2} \quad (4.112)$$

alınırsa

$$E\{s_n' \Pi_{n+1} s_n\} \leq \kappa_{\text{noise}} \delta \quad (4.113)$$

elde edilir.

Teorem 4.2'nin İspatı: Tahmin hatasının bir fonksiyonu olarak

$$V_n(\zeta_n) = \zeta_n' \Pi_n \zeta_n \quad (4.114)$$

fonksiyonu seçilsin $\Pi_n = (\Lambda_n P_n \Lambda_n')^{-1}$ ve P_n pozitif tanımlı olduğundan bu fonksiyon mevcuttur. Ayrıca (4.75c) ve (4.75f) eşitsizliklerinden

$$\frac{1}{\bar{p} \bar{\lambda}^2} \|\zeta_n\|^2 \leq V_n(\zeta_n) \leq \frac{1}{\underline{p} \underline{\lambda}^2} \|\zeta_n\|^2 \quad (4.115)$$

yazılabilir. (4.67) eşitliğinde bu $\underline{v} = \frac{1}{\bar{p} \bar{\lambda}^2}$ ve $\bar{v} = \frac{1}{\underline{p} \underline{\lambda}^2}$ ye karşılık gelmektedir. Lemma

4.4'ün gereksinimlerinin sağlanması için (4.68) de verildiği gibi $E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\}$ için bir üst sınıra ihtiyaç vardır. (4.62) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
V_{n+1}(\zeta_{n+1}) &= \zeta'_{n+1} \Pi_{n+1} \zeta_{n+1} \\
V_{n+1}(\zeta_{n+1}) &= \left[(A_n - K_n C_n) \zeta_n + r_n + s_n \right]' \Pi_{n+1} \left[(A_n - K_n C_n) \zeta_n + r_n + s_n \right] \quad (4.116)
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 4.5'in uygulanması ile

$$\begin{aligned}
V_{n+1}(\zeta_{n+1}) &\leq (1-\alpha)V_n(\zeta_n) + r'_n \Pi_{n+1} (2(A_n - K_n C_n) \zeta_n + r_n) \\
&\quad + 2s'_n \Pi_{n+1} ((A_n - K_n C_n) \zeta_n + r_n) + s'_n \Pi_{n+1} s_n \quad (4.117)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\}$ koşullu beklenen değeri alınsın. Beklenen değer hesaplanırken $E\{s'_n \Pi_{n+1} ((A_n - K_n C_n) \zeta_n + r_n)|\zeta_n\}$ koşullu beklenen değeri beyaz gürültü özelliğinden dolayı ihmal edilebilir çünkü ne Π_{n+1} ne de $A_n, K_n, C_n, r_n, s_n, \zeta_n$, terimleri v_n ya da w_n 'e bağlı değildir. Kalan terimler ise Lemma 4.5 ve Lemma 4.7 ile tahmin edilebilirler;

$$E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\} - V_n(\zeta_n) \leq -\alpha V_n(\zeta_n) + \kappa_{nonl} \|\zeta_n\|^3 + \kappa_{noise} \delta \quad (4.118)$$

$\|\zeta_n\| \leq \varepsilon'$ için

$$\varepsilon = \min \left(\varepsilon', \frac{\alpha}{2\bar{p}\bar{\lambda}^2 \kappa_{nonl}} \right)$$

olarak tanımlanmasıyla, $\|\zeta_n\| \leq \varepsilon$ için (4.83),(4.84) ile birlikte

$$\kappa_{nonl} \|\zeta_n\| \|\zeta_n\|^2 \leq \frac{\alpha}{2\bar{p}\bar{\lambda}^2} \|\zeta_n\|^2 \leq \frac{\alpha}{2} V_n(\zeta_n) \quad (4.119)$$

elde edilir. Bunun (4.87) de yerine konulmasıyla, $\|\zeta_n\| \leq \varepsilon$ için

$$\begin{aligned}
E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\} - V_n(\zeta_n) &\leq -\alpha V_n(\zeta_n) + \underbrace{\kappa_{nonl} \|\zeta_n\|^3}_{\leq \frac{\alpha}{2} V_n(\zeta_n)} + \kappa_{noise} \delta \\
E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\} - V_n(\zeta_n) &\leq -\frac{\alpha}{2} V_n(\zeta_n) + \kappa_{noise} \delta
\end{aligned} \tag{4.120}$$

elde edilir. $\|\zeta_0\| \leq \varepsilon$, $\underline{v} = \frac{1}{\bar{p}\bar{\lambda}^2}$, $\bar{v} = \frac{1}{\underline{p}\underline{\lambda}^2}$ ve $\mu = \kappa_{noise} \delta$ olmak üzere Lemma 4.4 uygulanabilir. Bununla birlikte, $\tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon$ olduğu durum göz önüne alınmak üzere $\tilde{\varepsilon} \leq \|\zeta_n\| \leq \varepsilon$ için,

$$E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\} - V_n(\zeta_n) \leq -\frac{\alpha}{2} V_n(\zeta_n) + \kappa_{noise} \delta \leq 0 \tag{4.121.a}$$

eşitsizliği tahmin hatasının sınırlılığının garanti edilmesini sağlar.

$$\delta = \frac{\alpha \tilde{\varepsilon}^2}{2 \bar{p} \bar{\lambda}^2 \kappa_{noise}} \tag{4.121.b}$$

olarak seçilmesiyle; $\|\zeta_n\| \geq \tilde{\varepsilon}$ olmak üzere bir $\tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon$ için

$$\kappa_{noise} \leq \frac{\alpha}{2 \bar{p} \bar{\lambda}^2} \|\zeta_n\|^2 \leq \frac{\alpha}{2} V_n(\zeta_n) \tag{4.122}$$

olup (4.121.a) eşitsizliği sağlanır.

Böylece; başlangıç hatası ve gürültü terimlerinin (4.77)-(4.79) ile verildiği biçimde sınırlandırılması ile matris uyarlı Kalman Filtresinde yapılan tahmin hatasının sınırlı kaldığı sonucuna ulaşılır. Ayrıca uyarlı olmayan stokastik durum İlerletilmiş Kalman Filtresinin yakınsaması incelendiğinde

$$\delta = \frac{\alpha \tilde{\varepsilon}^2}{2 \bar{p} \kappa_{noise}} \quad (4.123)$$

dır.

4.3 Kesikli Zaman Deterministik Durum-Uzay Modellerinde İnovasyon Sürecine Dayalı Yeni Uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresinin Yakınsaması

Bu kısımda kesikli zaman deterministik lineer olmayan durum-uzay modeli çerçevesinde, kısım 3.7 de önerilen uyarılama yönteminin kullanılmasıyla oluşturulacak Uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresinin yakınsaması, Bautayeb (1997)'nin yaptığı çalışma temel alınarak benzer şekilde verilmiştir.

Linner olmayan kesikli zaman deterministik bir durum-uzay modeli

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n) \quad (4.124.a)$$

$$y_n = h(x_n) \quad (4.124.b)$$

olarak göz önüne alınsın. Burada, $n \in N_0$ kesikli zaman noktasını, $x_n \in R^p$ durum vektörünü, $u_n \in R^p$ girdi vektörünü, $y_n \in R^m$ çıktı vektörünü göstermektedir.

$f(.,.)$ ve $h(.)$ fonksiyonlarının her ikisinin de x_n 'e göre sürekli türevlere sahip olduğu varsayılsın. Bu sistem için deterministik durum Uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi,

Ölçüm Yinelemesi:

$$\hat{x}_n = f(\hat{x}_n^-, u_n) + K_n e_n \quad (4.125)$$

$$K_n = P_n^- C_n' (C_n P_n^- C_n + R_n)^{-1} \quad (4.126)$$

$$P_n^+ = (I - K_n C_n) P_n^- \quad (4.127)$$

Zaman Yinelemesi:

$$\hat{x}_{n+1}^- = f(\hat{x}_n, u_n) \quad (4.128)$$

$$P_{n+1}^- = A_n \Lambda_n P_n^+ \Lambda_n' A_n' + Q_n \quad (4.129)$$

eşitlikleri ile verildiği gibidir. Burada

$$e_n = y_n - h(\hat{x}_n^-, u_n) \quad (4.130)$$

$$A_n = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_n, u_n) \quad (4.131)$$

$$C_n = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_n^-) \quad (4.132)$$

dir.

(4.124.a)-(4.124.b) ile verilen lineer olmayan deterministik model için bir gözlemci olarak kullanılacak olan uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresinin yakınsama analizi için Bautayeb (1997) tarafından önerilen basit bir yöntem kullanılacaktır. (4.124.a) ve (4.124.b) ile verilen sistem deterministik bir sistem olduğundan, $Q_n = 0$ olarak seçilebilir. Böylece R_n 'in keyfi pozitif tanımlı simetrik bir matris olarak seçimi için Uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi tahminlerinin yakınsak olduğu gösterilebilir.

Durum tahmin ve durum öngörü hataları sırası ile

$$\tilde{x}_{n+1} = x_{n+1} - \hat{x}_{n+1} \quad (4.139)$$

ve

$$\tilde{x}_{n+1}^- = x_{n+1} - \hat{x}_{n+1}^- \quad (4.140)$$

olarak tanımlansın. Ayrıca Lyapunov fonksiyonu olarak

$$V_{n+1} = \tilde{x}_{n+1}' (P_{n+1}^+)^{-1} \tilde{x}_{n+1} \quad (4.141)$$

fonksiyonu seçilsin.

Teorem 4.3 (4.125)-(4.129) eşitlikleri ile verilen Uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi, (4.124.a)-(4.124.b) ile verilen sistem için bir gözlemci olarak kullanıldığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = 0$$

dır.

Teoremin ispatının yapılabilmesi için önce $\{V_{n+1}\}_{n=1,2,\dots}$ dizisinin azalan bir dizi olabilmesi için gereken şartların belirlenmesi gerekmektedir. Lineerleştirilmiş durum varsayımı altında

$$e_{n+1} \approx C_{n+1} \tilde{x}_{n+1}^- \quad (4.142)$$

ve

$$\tilde{x}_{n+1}^- = A_n \tilde{x}_n \quad (4.143)$$

yazılabilir (Bautayeb 1997). Uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi tahminlerinin gerçek durumlara yakınsadığının gösterilebilmesi için herhangi bir varsayım yapılmadan $\{V_{n+1}\}_{n=1,2,\dots}$ dizisinin azalan olduğunun gösterilmesi gerekir. Ayrıca burada birinci dereceden lineerleştirme tekniğinden dolayı daima artık terimlerin olduğu unutulmamalıdır. Her k için e_{in+1} ($i=1,2,\dots,p$), e_{n+1} 'in her bir bileşenini ve \hat{x}_{jn+1}^- ($j=1,2,\dots$) de \hat{x}_{n+1}^- 'in her bir bileşenini göstermek üzere; artık terimleride hesaba katacak biçimde

$$C_{in+1} \tilde{x}_n^- = \alpha_{in+1} e_{in+1} \quad (4.144)$$

$$\tilde{x}_{n+1}^- = \beta_{jn} A_{jn} \tilde{x}_n \quad (4.145)$$

eşitlikleri tanımlanabilir (Bautayeb 1997). Burada α_{in+1} ve β_{jn} bilinmeyen ve zamanla değişen reel değerli skalerlerdir. Ayrıca C_{in+1} ve A_{jn} sırasıyla C_{n+1} ve A_n 'in i . ve j . satırlarıdır. Eşitlik (4.144) ve (4.145) birinci dereceden lineerleştirme varsayımı altında yakınsama analizinde kullanılacak kesin eşitliklerdir. Böylece (4.144) ve (4.145) eşitliklerinden

$$\alpha_{n+1}e_{n+1} = C_{n+1}\tilde{x}_n^- \quad (4.146)$$

$$\tilde{x}_{n+1}^- = \beta_n A_n \tilde{x}_n \quad (4.147)$$

yazılabilir. Burada $\alpha_n \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ve $\beta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bilinmeyen ve zamanla değişen reel değerlere sahip

$$\alpha_{n+1} = \text{köşegen}\{\alpha_{1,n+1}, \alpha_{2,n+1}, \dots, \alpha_{p,n+1}\} \quad (4.148)$$

$$\beta_n = \text{köşegen}\{\beta_{1,n}, \beta_{2,n}, \dots, \beta_{n,n}\} \quad (4.149)$$

köşegen matrislerdir.

Eğer (4.134) eşitliğinin her iki tarafı x_{n+1} den çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \hat{x}_n &= x_{n+1} - (\hat{x}_{n+1}^- + K_n e_{n+1}) \\ \tilde{x}_{n+1} &= \tilde{x}_{n+1}^- - P_{n+1}^- C_{n+1}' (C_{n+1} P_{n+1}^- C_{n+1}' + R_{n+1})^{-1} e_{n+1} \end{aligned} \quad (4.150)$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.135) ve (4.136) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= P_{n+1}^- C_{n+1}' (C_{n+1} P_{n+1}^- C_{n+1}' + R_{n+1})^{-1} \\ &= P_{n+1}^- C_{n+1}' R_{n+1}^{-1} \end{aligned} \quad (4.151)$$

yazılabilir ve

$$P_{n+1}^{-1} = (P_{n+1}^-)^{-1} + C_{n+1} R_{n+1}^{-1} C_{n+1}' \quad (4.152)$$

elde edilir. (4.151) eşitliğinin (4.150) de yerine yazılması ile

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_{n+1}^- - P_{n+1} C_{n+1}' R_{n+1}^{-1} e_{n+1} \quad (4.153.a)$$

elde edilir. (4.153.a) eşitliği (4.141) eşitliğinde yerinde kullanılırsa

$$V_{n+1} = (\tilde{x}_{n+1}^- - P_{n+1} C_{n+1}' R_{n+1}^{-1} e_{n+1})' P_{n+1}^{-1} (\tilde{x}_{n+1}^- - P_{n+1} C_{n+1}' R_{n+1}^{-1} e_{n+1}) \quad (4.153.b)$$

elde edilir.(4.153.b) eşitliğinin düzenlenmesi ile

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \tilde{x}_{n+1}'^- P_{n+1}^{-1} \tilde{x}_{n+1}^- - \tilde{x}_{n+1}'^- C_{n+1}' R_{n+1}^{-1} e_{n+1} - e_{n+1}' R_{n+1}^{-1} C_{n+1}' \tilde{x}_{n+1}^- \\ &\quad + e_{n+1}' R_{n+1}^{-1} C_{n+1} P_{n+1} C_{n+1}' R_{n+1}^{-1} \tilde{x}_{n+1}^- e_{n+1} \end{aligned} \quad (4.154)$$

olarak bulunur. Eğer (4.152) eşitliği (4.154) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= V_{n+1}^- + \tilde{x}_{n+1}'^- C_{n+1}' R_{n+1}^{-1} C_{n+1} \tilde{x}_{n+1}^- - \tilde{x}_{n+1}'^- C_{n+1}' R_{n+1}^{-1} e_{n+1} - e_{n+1}' R_{n+1}^{-1} C_{n+1}' \tilde{x}_{n+1}^- \\ &\quad + e_{n+1}' R_{n+1}^{-1} C_{n+1} P_{n+1} C_{n+1}' R_{n+1}^{-1} \tilde{x}_{n+1}^- e_{n+1} \end{aligned} \quad (4.155)$$

olarak elde edilir. Burada

$$V_{n+1}^- = (\tilde{x}_{n+1}^-)' (P_{n+1}^-)^{-1} (\tilde{x}_{n+1}^-) \quad (4.156)$$

dir. (4.146) ve (4.147) eşitliklerinin kullanılması ile (4.155) eşitliği

$$V_{n+1} = V_{n+1}^- + e_{n+1}' (\alpha_{n+1} R_{n+1}^{-1} \alpha_{n+1} - \alpha_{n+1} R_{n+1}^{-1} - R_{n+1}^{-1} \alpha_{n+1} + R_{n+1}^{-1} C_{n+1} P_{n+1} C_{n+1}' R_{n+1}^{-1}) e_{n+1} \quad (4.157)$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan (4.147) eşitliğinin (4.156) eşitliğinde kullanılması ile

$$\begin{aligned}
V_{n+1}^- &= (\beta_n A_n \tilde{x}_n)' (P_{n+1}^-)^{-1} (\beta_n A_n \tilde{x}_n) \\
&= \tilde{x}_n' A_n' \beta_n (A_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' A_n')^{-1} \beta_n A_n \tilde{x}_n
\end{aligned} \tag{4.158}$$

olarak yazılabilir. $\{V_n\}_{n=1,2,\dots}$ dizisinin azalan bir dizi olması;

$$V_{n+1} - V_n = V_{n+1} - V_{n+1}^- + V_{n+1}^- - V_n \leq 0 \tag{4.159}$$

olmasını veya

$$\begin{aligned}
V_{n+1} - V_n &= e_{n+1}' \left(\alpha_{n+1} R_{n+1}^{-1} \alpha_{n+1} - \alpha_{n+1} R_{n+1}^{-1} - R_{n+1}^{-1} \alpha_{n+1} + R_{n+1}^{-1} C_{n+1} P_{n+1} C_{n+1}' R_{n+1}^{-1} \right) e_{n+1} \\
&\quad + \tilde{x}_n' \left(A_n' \beta_n (A_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' A_n')^{-1} \beta_n A_n - P_n \right) \tilde{x}_n \leq 0
\end{aligned} \tag{4.160}$$

olmasını gerektirir. (4.160) eşitliğinin sağlanması için yeterli bir koşul,

$$\alpha_{n+1} R_{n+1}^{-1} \alpha_{n+1} - \alpha_{n+1} R_{n+1}^{-1} - R_{n+1}^{-1} \alpha_{n+1} + R_{n+1}^{-1} C_{n+1} P_{n+1} C_{n+1}' R_{n+1}^{-1} \leq 0 \tag{4.161}$$

ve

$$A_n' \beta_n (A_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' A_n')^{-1} \beta_n A_n - P_n \leq 0 \tag{4.162}$$

olmasıdır. (4.161) ve (4.162) koşullarının sağlandığının gösterilmesi için iki lemma verilsin.

Lemma 4.8 Eğer α_{in+1} 'lerin

$$1 - \sqrt{1 - \Delta_{n+1}} < \alpha_{in+1} < 1 + \sqrt{1 - \Delta_{n+1}} \quad i = 1, 2, \dots, p \tag{4.163}$$

$$\delta_{n+1} = d_{\max}(R_{n+1}) d_{\max}(R_{n+1}^{-1} C_{n+1} P_{n+1|n} C_{n+1}') (C_{n+1} P_{n+1|n} C_{n+1}' + R_{n+1})^{-1} \tag{4.164}$$

koşullarını sağladığı varsayılsa (4.161) eşitsizliği gerçekleşir. Burada $d_{\max}(\cdot)$ ilgili matrisin en büyük özdeğerini ifade etmektedir ve $R_{n+1}, \Delta_{n+1} \leq 1$ olarak seçilmiştir.

İspat: α_{n+1} köşegen matris olduğundan, α_{n+1} 'in özdeğerleri α_{in+1} terimleridir. Böylece

$$\alpha_{n+1}S_i = \alpha_{in+1}S_i \quad (4.165)$$

ve

$$S'_i\alpha_{n+1} = \alpha_{in+1}S'_i \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (4.166)$$

sağlanır. Burada S_i ilgili özvektördür. Diğer taraftan (4.161) eşitsizliğinin sol tarafı soldan S'_i ve sağdan S_i ile çarpılırsa,

$$S'_i(\alpha_{n+1}R_{n+1}^{-1}\alpha_{n+1} - \alpha_{n+1}R_{n+1}^{-1} - R_{n+1}^{-1}\alpha_{n+1} + R_{n+1}^{-1}C_{n+1}P_{n+1}C'_{n+1}R_{n+1}^{-1})S_i \leq 0 \quad (4.167)$$

elde edilir. (4.165) ve (4.166)'nın (4.137)'de yerlerinde kullanılmasıyla,

$$S'_i(\alpha_{in+1}^2R_{n+1}^{-1} - 2\alpha_{in+1}R_{n+1}^{-1} + R_{n+1}^{-1}C_{n+1}P_{n+1}C'_{n+1}R_{n+1}^{-1})S_i \leq 0 \quad (4.168)$$

veya

$$\alpha_{in+1}^2R_{n+1}^{-1} - 2\alpha_{in+1}R_{n+1}^{-1} + R_{n+1}^{-1}C_{n+1}P_{n+1}C'_{n+1}R_{n+1}^{-1} \leq 0 \quad (4.169)$$

elde edilir.

$$\mu(A) = d_{\max}\left(\frac{A + A^T}{2}\right)$$

biçiminde tanımlanmış matris ölçüsü olmak üzere; (4.169)'un sol tarafı

$$\begin{aligned} \mu((\alpha_{in+1}^2 - 2\alpha_{in+1})R_{n+1}^{-1} + R_{n+1}^{-1}C_{n+1}P_{n+1}C'_{n+1}R_{n+1}^{-1}) &\leq \mu((\alpha_{in+1}^2 - 2\alpha_{in+1})R_{n+1}^{-1}) \\ &+ \mu(R_{n+1}^{-1}C_{n+1}P_{n+1}C'_{n+1}R_{n+1}^{-1}) \end{aligned} \quad (4.170)$$

olarak sınırlandırılabilir. R_{n+1}^{-1} ve $R_{n+1}^{-1}C_{n+1}P_{n+1}C'_{n+1}R_{n+1}^{-1}$ simetrik matrisler olduğundan ve $\alpha_{in+1}^2 - 2\alpha_{in+1} < 0$ olmasını gerektirdiğinden (4.170) eşitsizliği,

$$\begin{aligned} d_{\max}((\alpha_{in+1}^2 - 2\alpha_{in+1})R_{n+1}^{-1} + R_{n+1}^{-1}C_{n+1}P_{n+1}C'_{n+1}R_{n+1}^{-1}) &\leq -(\alpha_{in+1}^2 - 2\alpha_{in+1})d_{\max}(R_{n+1}^{-1}) \\ &+ d_{\max}(R_{n+1}^{-1}C_{n+1}P_{n+1}C'_{n+1}R_{n+1}^{-1}) \end{aligned} \quad (4.171)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$R_{n+1}^{-1}C_{n+1}P_{n+1}C'_{n+1}R_{n+1}^{-1} = R_{n+1}^{-1}C_{n+1}P_{n+1|n}C'_{n+1}(C_{n+1}P_{n+1|n}C'_{n+1} + R_{n+1})^{-1} \quad (4.172)$$

dir.

Böylece (4.163) altında (4.171) ve (4.172)'nin kullanılmasıyla (4.161) sağlanır.

Lemma 4.9 Varsayalım ki,

$$A_n \quad \text{sınırlı, singüler olmayan bir matris} \quad (4.173.a)$$

$$\Lambda_n \quad \text{sınırlı, singüler olmayan bir matris} \quad (4.173.b)$$

olsunlar. Bu durumda β_{jn} ,

$$-1 \leq \beta_{jn} \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.174)$$

koşulunu sağlar.

İspat: β_n köşegen matris olduğundan

$$\beta_n m_j = \beta_{jn} m_j \quad (4.175)$$

ve

$$m'_j \beta_n = \beta_{jn} m'_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.176)$$

dir. Burada m_j ilgili özvektörlerdir. (4.173) varsayımları altında (4.162) eşitsizliği

$$\beta_n A_n^{-T} \Lambda_n^{-T} P_n^{-1} \Lambda_n^{-1} A_n^{-1} \beta_n - A_n^{-T} P_n^{-1} A_n^{-1} \leq 0 \quad (4.177)$$

ifadesine denktir. (4.177)'nin sol tarafı soldan m'_j ve sağdan m_j ile çarpılırsa

$$m'_j (\beta_n A_n^{-T} \Lambda_n^{-T} P_n^{-1} \Lambda_n^{-1} A_n^{-1} \beta_n - A_n^{-T} P_n^{-1} A_n^{-1}) m_j \leq 0 \quad (4.178)$$

olarak elde edilir. (4.175) ve (4.176) eşitlikleri (4.178)'de yerlerinde kullanılırsa,

$$\begin{aligned} m'_j \beta_n A_n^{-T} \Lambda_n^{-T} P_n^{-1} \Lambda_n^{-1} A_n^{-1} \beta_n m_j - m'_j A_n^{-T} P_n^{-1} A_n^{-1} m_j &\leq 0 \\ \beta_{jn}^2 A_n^{-T} \Lambda_n^{-T} P_n^{-1} \Lambda_n^{-1} A_n^{-1} \beta_{jn} - A_n^{-T} P_n^{-1} A_n^{-1} &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.179)$$

elde edilir. Böylece (4.174) varsayımı altında (4.179) eşitsizliğinden görülmektedir ki (4.162) varsayımı sağlanmaktadır.

$\{V_n\}_{n=1,2,\dots}$ dizisi azalan bir dizi olsa bile Uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi yakınsamayabilir. Uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresinin kesin yakınsak olduğunun söylenebilmesi için bazı ek koşullara ihtiyaç vardır. Lineer sistemler için yerel yeniden oluşturulabilirlik kavramının Uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi için araştırılması gerekir. Bu amaç ile (4.173) koşulları altında bazı sonlu $M \geq 0$ ($n \geq M$) reel sayısı için öyle η_1 ve η_2 sayıları vardır ki;

$$\eta_1 I_n \leq O'_e(n-M, n) \mathfrak{R}(n-M, n) O_e(n-M, n) \leq \eta_2 I_n \quad (4.180)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$O_e(n-M, n) = \begin{bmatrix} C_{n-M} A_{n-M}^{-1} A_{n-M+1}^{-1} \cdots A_{n-1}^{-1} \\ C_{n-M+1} A_{n-M+1}^{-1} \cdots A_{n-1}^{-1} \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} \quad (4.181)$$

ve

$$\mathfrak{R}(n-M, n) = \text{diag}(R_{n-M}^{-1} \cdots R_n^{-1}) \quad (4.182)$$

dır. Ayrıca A_n ve C_n sırasıyla (4.131) ve (4.132) eşitliklerinde tanımlandığı gibidir. (4.180) eşitliğini sağlayan sistemlere yeniden oluşturulabilir sistemler denir.

Lemma 4.10 Eğer (4.124.a)-(4.124.b) ile verilen sistem yeniden oluşturulabilir bir sistem ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\min}(P_n^{-1}) = \infty \quad (4.183)$$

ve

$$\sup \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{\max}(P_n^{-1})}{d_{\min}(P_n^{-1})} < \infty \quad (4.184)$$

dur.

İspat: (4.173) varsayımları altında ve (4.152) eşitliğinden görülmektedir ki

$$P_{n+1}^{-1} = O'_e(1, n+1) \mathfrak{R}(1, n+1) O_e(1, n+1) + \Psi(0, n) \quad (4.185)$$

dir. Burada

$$\Psi(0, n) = A_n'^{-1} A_{n-1}'^{-1} \dots A_0'^{-1} P_0^{-1} A_0^{-1} A_1^{-1} \dots A_n^{-1} \quad (4.186)$$

dır ve $O_e(1, n+1)$, $\mathfrak{R}(1, n+1)$ sırasıyla (4.181) ve (4.182) de tanımlandığı gibidir. M bir ufuk zamanı olarak göz önüne alınırsa (4.185) eşitliğinden

$$P_{nM}^{-1} = \sum_{i=1}^n \left[O'_e((i-1)M+1, iM) \mathfrak{R}((i-1)M+1, iM) O_e((i-1)M+1, iM) \right] + \Psi(0, nM-1)$$

ve

$$P_{nM}^{-1} - \Psi(0, nM-1) = \sum_{i=1}^n \left[O'_e((i-1)M+1, iM) \mathfrak{R}((i-1)M+1, iM) O_e((i-1)M+1, iM) \right] \quad (4.187)$$

yazılabilir. Böylece (4.180) eşitliğinin göz önünde bulundurulması ile (4.187) eşitliğinden

$$0 < n\eta_1 \leq d(P_{nM}^{-1} - \Psi(0, nM-1)) \leq n\eta_2 \quad (4.188)$$

yazılabilir. (4.188) eşitliği göstermektedir ki; $d(P_{nM}^{-1} - \Psi(0, nM-1))$, $n\eta_1$ ve $n\eta_2$ sayıları tarafından sınırlandırılmaktadır.

Teorem 4.3'ün İspatı: (4.163) ve (4.174) koşulları altında $\{V_n\}_{n=1,2,\dots}$ V gibi pozitif bir sayıya yakınsayan bir dizidir, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V$$

dir. Diğer taraftan

$$\frac{V_n}{tr(P_n^{-1})} \geq \frac{d_{\min}(P_n^{-1}) \tilde{x}'_n \tilde{x}_n}{nd_{\max}(P_n^{-1})} \geq 0 \quad (4.189)$$

dır. Ayrıca (4.183) eşitliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} tr(P_n^{-1}) = \infty \quad (4.190)$$

yazılabilir. O zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{\min}(P_n^{-1}) \tilde{x}'_n \tilde{x}_n}{nd_{\max}(P_n^{-1})} = 0 \quad (4.191)$$

dır. (4.184) eşitsizliği ve (4.191) eşitliğinden görülmektedir ki;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = 0 \quad (4.192)$$

dır. Bu ise ispatı tamamlar. Böylece önerilen Uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi tahminlerinin gerçek durumlara yakınsadığı söylenebilir.

4.4 Kesikli Zaman Stokastik Durum-Uzay Modellerinde İnovasyon Sürecine Dayalı Yeni Uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresinin Yakınsaması

Bu kısımda, 3. bölüm 7. kısımda önerilen uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresinin lineer olmayan kesikli zaman stokastik durum-uzay modelleri için bir durum tahmin edicisi olarak kullanıldığında tahmin hatasının sınırlılığı kısım 4.2'deki yöntem kullanılarak araştırılmış ve tahmin hatasının belirli koşullar altında sınırlı kaldığı gösterilmiştir.

(3.115) – (3.119) eşitlikleri ile verilen uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresinin tahmin hatasının sınırlı kaldığının gösterilebilmesi için (4.54) - (4.55) eşitlikleri ile verilen

lineer olmayan kesikli zaman stokastik durum-uzay modeli göz önüne alınsın. Kısım 4.2.'de de verildiği gibi burada da $n \in N_0$ kesikli zaman noktası, $x_n \in R^q$ durum vektörü, $u_n \in R^q$ girdi vektörü, $y_n \in R^m$ çıktı vektörü, $v_n \in R^k$ ile $w_n \in R^l$ birbiriyle ilişkisiz sıfır ortalamalı, birim kovaryans matrisli beyaz gürültü süreçleri ve D_n, G_n zamanla değişen $m \times k$ ve $q \times l$ boyutlu matrisler olsun. Ayrıca x_0 başlangıç koşulunun sabit ve $f(.,.)$ ve $h(.)$ fonksiyonlarının her ikisinin de sürekli türevlere sahip oldukları varsaylınsın. Bu sistem için bir durum tahmin edicisi (4.56) eşitliği ile verildiği gibidir. Burada K_n zamanla değişen $q \times m$ boyutlu kazanç matrisidir. Durum tahmini \hat{x}_n ile gösterilmek üzere $f(.,.)$ ve $h(.)$ fonksiyonları birinci dereceden sürekli türevlere sahip olduklarından sırasıyla (4.59) ve (4.60) eşitliklerinde verildiği biçimiyle yazılabilirler. n zamanındaki tahmin hatası ise ζ_n ile gösterilmek üzere, (4.61) eşitliğinde verildiği gibi yazılabilir. Bu durumda $n+1$ anındaki tahmin hatası ise (4.62) eşitliğinde verildiği gibidir. (4.62) eşitliği ile verilen $n+1$ anındaki tahmin hatasına ait eşitlikte bulunan r_n ve s_n terimleri ise sırasıyla (4.63) ve (4.64) eşitliklerinde verildiği gibidir.

4.4.1 İnovasyon sürecine dayalı yeni uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi için hata sınırları

Tanım 4.6: Kesikli zaman uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi, tanım 4.5 ile verilen fark denklemlerinden sadece Riccati fark denkleminin

$$P_{n+1} = A_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' A_n' + Q_n - K_n (C_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' + R_n) K_n' \quad (4.193)$$

biçiminde değiştirilmesi ile verilir. Burada Λ_n zamanla değişen $q \times q$ boyutlu simetrik bir matristir ve kısım 3.7'de verilen yöntem ile hesaplanabilir.

Teorem 4.4: (4.54), (4.55) ile verilen lineer olmayan kesikli zaman stokastik durum-uzay modeli ve Tanım 4.6 ile verilen uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi göz önüne alınsın. Ayrıca Teorem 4.2'nin 2. ve 3. şartı sağlansın ve

1) $\forall n \geq 0$ için $\bar{a}, \bar{c}, \bar{\lambda}, \underline{p}, \bar{p} > 0$ reel sayıları

$$\|A_n\| \leq \bar{a} \quad (4.194.a)$$

$$\|C_n\| \leq \bar{c} \quad (4.194.b)$$

$$\underline{p}I \leq P_n \leq \bar{p}I \quad (4.194.c)$$

$$\underline{q}I \leq Q_n \quad (4.194.d)$$

$$\underline{r}I \leq R_n \quad (4.194.e)$$

$$\|\Lambda_n\| \leq \bar{\lambda} \quad (4.194.f)$$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde mevcut olsun. Burada \underline{q} , Q_n matrisinin en küçük özdeğeri, \underline{r} , R_n matrisinin en küçük özdeğeri. Bu durumda eğer, başlangıç tahmin hatası için,

$$\|\zeta_0\| < \varepsilon \quad (4.195)$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde $\varepsilon > 0$ sayısı ve gürültü terimlerinin kovaryans matrisleri,

$$G_n G_n' \leq \delta I \quad (4.196)$$

$$D_n D_n' \leq \delta I \quad (4.197)$$

sınırlarında olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse (4.61) ile verilen ζ_n tahmin hatası ortalama kareler anlamında üstel sınırlıdır ve 1 olasılık ile sınırlıdır.

Teoremin ispatında Teorem 4.2'nin ispatında kullanılan yöntem ve benzer lemmalar kullanılacaktır.

Lemma 4.11 Teorem 4.4'ün koşulları altında; $n \geq 0$, K_n gözlemci kazancı ve

$$\Pi_n = (\Lambda_n P_n \Lambda_n')^{-1}$$

olmak üzere,

$$(A_n - K_n C_n)' \Pi_{n+1} (A_n - K_n C_n) \leq (1 - \alpha) \Pi_n$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $0 < \alpha < 1$ reel sayısı mevcuttur öyle ki;

$$(1 - \alpha) = \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{q}{\bar{\lambda}^2 \bar{p} \left(\bar{a} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{r} \right)^2} \right)}$$

olarak bulunur.

İspat: (4.193)'de (4.74)'ün yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= A_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' A_n' + Q_n \\ &\quad - A_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' (C_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' + R_n)^{-1} (C_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' + R_n) K_n' \\ &= A_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' A_n' + Q_n - A_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' K_n' \\ &= (A_n - K_n C_n) \Lambda_n P_n \Lambda_n' (A_n - K_n C_n)' + Q_n + K_n C_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' (A_n - K_n C_n)' \end{aligned} \quad (4.198)$$

elde edilir. (4.74) eşitliğinden faydalanarak $A_n^{-1} (A_n - K_n C_n) \Lambda_n P_n \Lambda_n'$ ifadesi

$$\begin{aligned} A_n^{-1} (A_n - K_n C_n) \Lambda_n P_n \Lambda_n' &= A_n^{-1} \left(A_n - A_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' (C_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' + R_n)^{-1} C_n \right) \Lambda_n P_n \Lambda_n' \\ &= \Lambda_n P_n \Lambda_n' - \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' (C_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' + R_n)^{-1} C_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' \end{aligned} \quad (4.199)$$

biçiminde yazılabilir. (4.199) ifadesi simetrik bir matristir ve matris tersi lemması (Anderson ve Moore 1979, Lewis 1986) uygulanırsa

$$A_n^{-1}(A_n - K_n C_n) \Lambda_n P_n \Lambda_n' = (\Lambda_n P_n \Lambda_n' + C_n R_n^{-1} C_n')^{-1} \geq 0 \quad (4.200)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} A_n^{-1} K_n C_n &= A_n^{-1} A_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' (C_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' + R_n)^{-1} C_n \\ &= \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' (C_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' + R_n)^{-1} C_n \geq 0 \end{aligned} \quad (4.201)$$

yazılabilir. (4.200), (4.201) ifadelerinden ve $(\Lambda_n P_n \Lambda_n') = (\Lambda_n P_n \Lambda_n')'$ olmasından dolayı

$$K_n C_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' (A_n - K_n C_n)' = A_n [A_n^{-1} K_n C_n] [A_n^{-1} (A_n - K_n C_n) \Lambda_n P_n \Lambda_n']' A_n' \geq 0 \quad (4.202)$$

elde edilir. (4.201) eşitliği göz önünde bulundurularak (4.199) eşitliğinden

$$P_{n+1} \geq (A_n - K_n C_n) \Lambda_n P_n \Lambda_n' (A_n - K_n C_n)' + Q_n \quad (4.203)$$

yazılabilir. Ayrıca (4.200) ifadesinden $(A_n - K_n C_n)^{-1}$ ifadesinin mevcut olduğu anlaşılır. Böylece

$$P_{n+1} \geq (A_n - K_n C_n) \left[\Lambda_n P_n \Lambda_n' + (A_n - K_n C_n)^{-1} Q_n \left((A_n - K_n C_n)' \right)^{-1} \right] (A_n - K_n C_n)' \quad (4.204)$$

yazılabilir.

(4.74) eşitliği ile birlikte (4.194) eşitsizliklerinin göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned} \|K_n\| &\leq \|A_n\| \| \Lambda_n \| \| P_n \| \| \Lambda'_n \| \| C'_n \| \| (C_n \Lambda_n P_n \Lambda'_n C'_n + R_n)^{-1} \| \\ &\leq \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{\underline{r}} \end{aligned} \quad (4.205)$$

elde edilir. (4.194) ile verilen eşitsizlikler (4.204) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$P_{n+1} \geq (A_n - K_n C_n) \left[\Lambda_n P_n \Lambda'_n + \frac{q}{\left(\bar{a} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{\underline{r}} \right)^2} I \right] (A_n - K_n C_n)' \quad (4.206)$$

olarak elde edilir. Buradan (4.206) eşitsizliğinin her iki tarafı soldan Λ_{n+1} ve sağdan Λ'_{n+1} ile çarpılırsa

$$\Lambda_{n+1} P_{n+1} \Lambda'_{n+1} \geq \Lambda_{n+1} (A_n - K_n C_n) \left[\Lambda_n P_n \Lambda'_n + \frac{q}{\left(\bar{a} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{\underline{r}} \right)^2} I \right] (A_n - K_n C_n)' \Lambda'_{n+1} \quad (4.207)$$

bulunur. (4.194f) eşitsizliğinin göz önünde bulundurulmasıyla (4.207) eşitsizliği

$$\Lambda_{n+1} P_{n+1} \Lambda'_{n+1} \geq \bar{\lambda}^2 (A_n - K_n C_n) \left[\Lambda_n P_n \Lambda'_n + \frac{q}{\left(\bar{a} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{\underline{r}} \right)^2} I \right] (A_n - K_n C_n)' \quad (4.208)$$

elde edilir. Her iki tarafın tersinin alınması ve soldan $(A_n - K_n C_n)'$ ile sağdan da $(A_n - K_n C_n)$ ifadesi ile çarpılması sonucu

$$\begin{aligned}
(A_n - K_n C_n)' \Pi_{n+1} (A_n - K_n C_n) &\leq \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \left[\Lambda_n P_n \Lambda_n' + \frac{q}{\left(\bar{a} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{r} \right)^2} I \right] \\
(A_n - K_n C_n)' \Pi_{n+1} (A_n - K_n C_n) &\leq \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \left[I + \frac{q}{\left(\bar{a} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{r} \right)^2} I (\Lambda_n P_n \Lambda_n')^{-1} \right]^{-1} (\Lambda_n P_n \Lambda_n')^{-1} \\
(A_n - K_n C_n)' \Pi_{n+1} (A_n - K_n C_n) &\leq \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \left[I + \frac{q}{\left(\bar{a} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{r} \right)^2} I (\Lambda_n P_n \Lambda_n')^{-1} \right]^{-1} \Pi_n \\
(A_n - K_n C_n)' \Pi_{n+1} (A_n - K_n C_n) &\leq \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \left(1 + \frac{q}{\bar{\lambda}^2 \bar{p} \left(\bar{a} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{r} \right)^2} \right)^{-1} \Pi_n \tag{4.209}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$(1 - \alpha) = \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{q}{\bar{\lambda}^2 \bar{p} \left(\bar{a} + \bar{a} \bar{\lambda}^2 \bar{p} \bar{c} \frac{1}{r} \right)^2}} \right) \tag{4.210}$$

olarak elde edilir.

Lemma 4.12 Teorem 4.4'ün koşulları altında, $\Pi_n = (\Lambda_n P_n \Lambda_n')^{-1}$ ve K_n , r_n sırasıyla (4.74) ve (4.63) de verildiği gibi olsun. Böyle ise, $\varepsilon', \kappa_{nonl} > 0$ pozitif reel sayıları mevcuttur öyle ki;

$$r'_n \Pi_n \left[2(A_n - K_n C_n)(x_n - \hat{x}_n) + r_n \right] \leq \kappa_{nonl} \|x_n - \hat{x}_n\|^3 \quad (4.211)$$

sağlanacak şekilde $\|x_n - \hat{x}_n\| \leq \varepsilon'_n$ vardır.

İspat: (4.74) eşitliğinin ve (4.194) eşitsizliklerinin göz önünde bulundurulmasından ve $C_n \Lambda_n P_n \Lambda'_n C'_n > 0$ olmasından dolayı

$$\|K_n\| \leq \bar{a} \bar{p} \bar{c} \bar{\lambda}^2 / \underline{r} \quad (4.212)$$

dir. (4.212) ifadesi (4.63) de yerine yazılırsa

$$\|r_n\| \leq \|\varphi(x_n, \hat{x}_n, u_n)\| + (\bar{a} \bar{p} \bar{c} \bar{\lambda}^2 / \underline{r}) \|\mathcal{X}(x_n, \hat{x}_n)\| \quad (4.213)$$

elde edilir.

$$\varepsilon' = \min(\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\chi)$$

seçilmesi ve (4.76.a), (4.76.b) eşitsizliklerinin göz önüne alınmasıyla

$$\|r_n\| \leq \kappa_\varphi \|x_n - \hat{x}_n\|^2 + (\bar{a} \bar{p} \bar{c} \bar{\lambda}^2 / \underline{r}) \kappa_\chi \|(x_n, \hat{x}_n)\|^2 \quad (4.214)$$

yazılır. $\|x_n - \hat{x}_n\| \leq \varepsilon'_n$ olduğundan

$$\|r_n\| \leq \kappa' \|x_n - \hat{x}_n\|^2 \quad (4.215)$$

dir. Burada

$$\kappa' = \kappa_\varphi + (\bar{a} \bar{p} \bar{c} \bar{\lambda}^2 / \underline{r}) \kappa_\chi \quad (4.216)$$

dir. $\|x_n - \hat{x}_n\| \leq \varepsilon'$ olmak üzere ve $\Pi_n = (\Lambda_n P_n \Lambda_n')^{-1}$ nin ve (4.194) eşitsizliklerinin göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned} & r_n' \Pi_n \left[2(A_n - K_n C_n)(x_n - \hat{x}_n) + r_n \right] \\ & \leq \kappa' \|x_n - \hat{x}_n\|^2 \frac{1}{\bar{\lambda}^2 \underline{p}} \left[2 \left(\bar{a} + \bar{a} \bar{p} \bar{c} \bar{\lambda}^2 \frac{1}{\underline{r}} \bar{c} \right) \|x_n - \hat{x}_n\| + \kappa' \varepsilon' \|x_n - \hat{x}_n\| \right] \end{aligned} \quad (4.217)$$

yazılabilir. (4.217) ifadesi yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} & r_n' \Pi_n \left[2(A_n - K_n C_n)(x_n - \hat{x}_n) + r_n \right] \\ & \leq \kappa' \frac{1}{\bar{\lambda}^2 \underline{p}} \left[2 \left(\bar{a} + \bar{a} \bar{p} \bar{c} \bar{\lambda}^2 \frac{1}{\underline{r}} \bar{c} \right) + \kappa' \varepsilon' \right] \|x_n - \hat{x}_n\|^3 \\ & = \kappa_{nonl} \|x_n - \hat{x}_n\|^3 \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\kappa_{nonl} = \kappa' \frac{1}{\bar{\lambda}^2 \underline{p}} \left[2 \left(\bar{a} + \bar{a} \bar{p} \bar{c} \bar{\lambda}^2 \frac{1}{\underline{r}} \bar{c} \right) + \kappa' \varepsilon' \right] \quad (4.218)$$

dir.

Lemma 4.12 Teorem 4.4'ün koşulları altında, $\Pi_n = (\Lambda_n P_n \Lambda_n')^{-1}$ ve K_n , s_n (4.74) ve (4.64)'de verildiği gibi olsun. Bu durumda; δ dan bağımsız olarak pozitif reel bir $\kappa_{noise} > 0$ sayısı vardır ki;

$$E \{ s_n' \Pi_{n+1} s_n \} \leq \kappa_{noise} \delta$$

sağlanır ve

$$\kappa_{noise} = \frac{q}{\underline{p}\bar{\lambda}^2} + \frac{\bar{a}^2\bar{c}^2\bar{p}^2\bar{\lambda}^2 m}{\underline{p}\underline{r}^2} \quad (4.219)$$

olarak bulunur.

İspat :

$$\begin{aligned} s'_n \Pi_{n+1} s_n &= \left\{ (G_n w_n - K_n D_n v_n)' \Pi_{n+1} (G_n w_n - K_n D_n v_n) \right\} \\ &= \left\{ (G_n w_n)' \Pi_{n+1} (G_n w_n) - (G_n w_n)' \Pi_{n+1} (K_n D_n v_n) \right. \\ &\quad \left. - (K_n D_n v_n)' \Pi_{n+1} (G_n w_n) + (K_n D_n v_n)' \Pi_{n+1} (K_n D_n v_n) \right\} \end{aligned}$$

buradan w_n ile v_n ilişkisiz olduklarından dolayı sadece diğer terimlere odaklanılması yeterli olacaktır. Böylece

$$s'_n \Pi_{n+1} s_n = \left\{ (G_n w_n)' \Pi_{n+1} (G_n w_n) + (K_n D_n v_n)' \Pi_{n+1} (K_n D_n v_n) \right\} \quad (4.220)$$

yazılabilir. (4.74) eşitliği ile (4.194) eşitsizliklerinin göz önüne alınmasıyla ve $C_n \Lambda_n P_n \Lambda_n' C_n' > 0$ olmasından dolayı

$$\|K_n\| \leq \bar{a} \bar{p} \bar{c} \bar{\lambda}^2 / \underline{r} \quad (4.221)$$

yazılır. Ayrıca (4.194.c) ve (4.194.f) eşitsizlikleri göz önünde bulundurularak

$$s'_n \Pi_{n+1} s_n \leq \frac{1}{\bar{\lambda}^2 \underline{p}} w_n' G_n' G_n w_n + \frac{\bar{a}^2 \bar{p}^2 \bar{c}^2 \bar{\lambda}^2}{\underline{p} \underline{r}^2} v_n' D_n' D_n v_n \quad (4.222)$$

(4.222) eşitsizliğinin her iki tarafıda skaler olduğundan dolayı (4.222) eşitsizliğinin sağ tarafının izi alınabilir.

$$s'_n \Pi_{n+1} s_n \leq \frac{1}{\bar{\lambda}^2 \underline{p}} \text{tr}(w'_n G'_n G_n w_n) + \frac{\bar{a}^2 \bar{p}^2 \bar{c}^2 \bar{\lambda}^2}{\underline{p} \underline{r}^2} \text{tr}(v'_n D'_n D_n v_n) \quad (4.223)$$

yazılabilir. $\text{tr}(\Gamma \Delta) = \text{tr}(\Delta \Gamma)$ olduğundan dolayı (4.223) ifadesi

$$s'_n \Pi_{n+1} s_n \leq \frac{1}{\bar{\lambda}^2 \underline{p}} \text{tr}(G_n w_n w'_n G'_n) + \frac{\bar{a}^2 \bar{p}^2 \bar{c}^2 \bar{\lambda}^2}{\underline{p} \underline{r}^2} \text{tr}(D_n v_n v'_n D'_n) \quad (4.224)$$

olur. Burada D_n ve G_n 'i deterministik matrisler olarak alalım w_n ve v_n birim kovaryans matrisli beyaz gürültü süreçleri olarak alındığında

$$E\{v_n v'_n\} = I \quad (4.225)$$

$$E\{w_n w'_n\} = I \quad (4.226)$$

yazılabilir. Buradan

$$E\{s'_n \Pi_{n+1} s_n\} \leq \frac{1}{\bar{\lambda}^2 \underline{p}} \text{tr}(G_n G'_n) + \frac{\bar{a}^2 \bar{p}^2 \bar{c}^2 \bar{\lambda}^2}{\underline{p} \underline{r}^2} \text{tr}(D_n D'_n) \quad (4.227)$$

yazılır. (4.196) ve (4.197) eşitsizliklerinden

$$\text{tr}(G_n G'_n) \leq \delta \text{tr}(I) = q\delta \quad (4.228)$$

$$\text{tr}(D_n D'_n) \leq \delta \text{tr}(I) = m\delta \quad (4.229)$$

dır. Burada q ve m sırasıyla G_n ve D_n matrislerinin satırlarının sayısıdır. Böylece

$$\kappa_{noise} = \frac{q}{\bar{\lambda}^2 \underline{p}} + \frac{\bar{a}^2 \bar{c}^2 \bar{p}^2 \bar{\lambda}^2 m}{\underline{p} \underline{r}^2} \quad (4.230)$$

alınırsa

$$E\{s'_n \Pi_{n+1} s_n\} \leq \kappa_{noise} \delta \quad (4.231)$$

elde edilir.

Teorem 4.4'ün İspatı:

$$V_n(\zeta_n) = \zeta'_n \Pi_n \zeta_n \quad (4.232)$$

fonksiyonu seçilsin $\Pi_n = (\Lambda_n P_n \Lambda'_n)^{-1}$ ve P_n pozitif tanımlı olduğundan bu fonksiyon mevcuttur. (4. 194.c) ve (4. 194.f) eşitsizliklerinden

$$\frac{1}{\bar{p}\bar{\lambda}^2} \|\zeta_n\|^2 \leq V_n(\zeta_n) \leq \frac{1}{\underline{p}\underline{\lambda}^2} \|\zeta_n\|^2 \quad (4.233)$$

yazılabilir, (4.67) eşitliğinde bu $\underline{v} = \frac{1}{\bar{p}\bar{\lambda}^2}$ ve $\bar{v} = \frac{1}{\underline{p}\underline{\lambda}^2}$ ye karşılık gelmektedir. Lemma

4.4'ün gereksinimlerinin sağlanması için (4.68) de verildiği gibi $E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\}$ için bir üst sınıra ihtiyaç vardır. (4.62) eşitliğinden

$$\begin{aligned} V_{n+1}(\zeta_{n+1}) &= \zeta'_{n+1} \Pi_{n+1} \zeta_{n+1} \\ V_{n+1}(\zeta_{n+1}) &= \left[(A_n - K_n C_n) \zeta_n + r_n + s_n \right]' \Pi_{n+1} \left[(A_n - K_n C_n) \zeta_n + r_n + s_n \right] \end{aligned} \quad (4.234)$$

elde edilir. Lemma 4.11'in uygulanması ile

$$V_{n+1}(\zeta_{n+1}) \leq (1-\alpha)V_n(\zeta_n) + r'_n \Pi_{n+1} (2(A_n - K_n C_n) \zeta_n + r_n) + 2s'_n \Pi_{n+1} ((A_n - K_n C_n) \zeta_n + r_n) + s'_n \Pi_{n+1} s_n \quad (4.235)$$

olarak bulunur. $E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\}$ koşullu beklenen değeri alınsın. Beklenen değer alınırken beyaz gürültü süreci özelliğinden dolayı $E\{s'_n \Pi_{n+1}((A_n - K_n C_n)\zeta_n + r_n)|\zeta_n\}$ koşullu beklenen değeri ihmal edilebilir çünkü ne Π_{n+1} ne de $A_n, K_n, C_n, r_n, s_n, \zeta_n$ terimleri v_n yada w_n 'e bağlı değildir. Kalan terimler ise Lemma 4.11 ve Lemma 4.13 ile tahmin edilebilirler.

$$E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\} - V_n(\zeta_n) \leq -\alpha V_n(\zeta_n) + \kappa_{nonl} \|\zeta_n\|^3 + \kappa_{noise} \delta \quad (4.236)$$

$\|\zeta_n\| \leq \varepsilon'$ için

$$\varepsilon = \min\left(\varepsilon', \frac{\alpha}{2\bar{p}\bar{\lambda}^2 \kappa_{nonl}}\right)$$

olarak tanımlanmasıyla, $\|\zeta_n\| \leq \varepsilon$ için (4.201) ve (4.202) ile birlikte

$$\kappa_{nonl} \|\zeta_n\| \|\zeta_n\|^2 \leq \frac{\alpha}{2\bar{p}\bar{\lambda}^2} \|\zeta_n\|^2 \leq \frac{\alpha}{2} V_n(\zeta_n) \quad (4.237)$$

elde edilir. Bunun (4.205) de yerine konulmasıyla, $\|\zeta_n\| \leq \varepsilon$ için

$$\begin{aligned} E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\} - V_n(\zeta_n) &\leq -\alpha V_n(\zeta_n) + \underbrace{\kappa_{nonl} \|\zeta_n\|^3}_{\leq \frac{\alpha}{2} V_n(\zeta_n)} + \kappa_{noise} \delta \\ E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\} - V_n(\zeta_n) &\leq -\frac{\alpha}{2} V_n(\zeta_n) + \kappa_{noise} \delta \end{aligned} \quad (4.238)$$

elde edilir. $\|\zeta_0\| \leq \varepsilon$, $\underline{v} = \frac{1}{\bar{p}\bar{\lambda}^2}$, $\bar{v} = \frac{1}{\underline{p}\bar{\lambda}^2}$ ve $\mu = \kappa_{noise} \delta$ olmak üzere Lemma 4.4

uygulanabilir. Bununla birlikte, $\tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon$ olduğu durum göz önüne alınmak üzere $\tilde{\varepsilon} \leq \|\zeta_n\| \leq \varepsilon$ için,

$$E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\} - V_n(\zeta_n) \leq -\frac{\alpha}{2}V_n(\zeta_n) + \kappa_{noise}\delta \leq 0 \quad (4.239.a)$$

eşitsizliği tahmin hatasının sınırlılığını garanti edilmesini sağlar.

$$\delta = \frac{\alpha\tilde{\varepsilon}^2}{2\bar{p}\bar{\lambda}^2\kappa_{noise}} \quad (4.239.b)$$

olarak seçilmesiyle; $\|\zeta_n\| \geq \tilde{\varepsilon}$ olmak üzere bir $\tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon$ için

$$\kappa_{noise} \leq \frac{\alpha}{2\bar{p}\bar{\lambda}^2}\|\zeta_n\|^2 \leq \frac{\alpha}{2}V_n(\zeta_n) \quad (4.240)$$

olup (4.239.a) eşitsizliği sağlanır.

Böylece; Tanım 4.6 ile verilen Uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi tahmin hatasının, başlangıç hatası ve gürültü terimlerinin (4.195)-(4.197) ile verildiği biçimde sınırlandırılması durumu altında, sınırlı kaldığı sonucuna ulaşılır.

5. UYGULAMA ve SİMÜLASYON ÇALIŞMALARI

Bu bölümde 3. bölümde önerilen uyarlı filtrelerin performanslarını değerlendirebilmek amacıyla çeşitli simülasyon çalışmaları ile birlikte bir uygulama çalışması verilmiştir.

5.1 Matris Unutma Faktörü ile Uyarlanmış Kalman Filtresinin Başarımı

5.1.1 Gözlem Matrisinin Tam Ranklı Olmaması Durumunda Matris Unutma Faktörü ile Uyarlanmış Kalman Filtresinin Başarımı

Gözlem matrisinin tam ranklı olmaması durumunda matris unutma faktörü ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresinin başarımını, İlerletilmiş Kalman Filtresi, Xia vd. (1994) tarafından önerilen skaler unutma faktörü ile uyarlanmış Kalman Filtresi ve Özbek ve Efe (2004) tarafından önerilen sabit skaler unutma faktörü ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresinin başarımlarına göre değerlendirebilmek amacıyla,

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - c_1 \Delta_t & 0 \\ c_1 \Delta_t & 1 - c_2 \Delta_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + w_k \quad (5.1.a)$$

$$y_k = [0 \quad 1] x_k + v_k \quad (5.1.b)$$

biçiminde verilen kompartman modeli üzerinde bir simülasyon çalışması tasarlanmıştır. (5.1.a)-(5.1.b) eşitlikleri ile verilen Kompartman modelinde x_1 ve x_2 sırasıyla bir ilacın sindirim sistemindeki miktarı ve kan dolaşım sistemindeki miktarı olarak tanımlansın. Sindirim sistemine verilen ilaç belli bir oranda azalarak kan dolaşım sistemine geçer. Aynı şekilde kan dolaşım sistemine geçen ilaç miktarı da belli oranda metabolizmaya geçer veya boşaltım süreci yoluyla kaybolur. Burada c_1 sindirim sistemini karakterize eden, c_2 ise metabolik ve boşaltım sürecini karakterize eden pozitif sabitlerdir. Çıktı değişkeni y bireyin kan dolaşım sistemindeki ilaç miktarıdır. Ayrıca $c_1 > c_2$ olduğu varsayılmıştır. Δ_t örnekleme zaman aralığı olmak üzere simülasyon çalışması boyunca $\Delta_t = 0.1$ olarak alınmıştır. Bu simülasyon çalışmasında amaç, $x_{1,k}$ ve $x_{2,k}$ durum

değişkenlerini belirlemenin yanı sıra c_1 ve c_2 ile verilen sistem parametrelerini de belirlemek olsun. Buna göre, $\theta = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}'$ alınması ile θ parametresi rasgele yürüyüş süreci olarak düşünülebilir. Yani;

$$\left| \begin{array}{l} \theta_{k+1} = \theta_k + \delta_k \end{array} \right. \quad (5.2)$$

olarak alınabilir. Burada δ_k sıfır ortalamalı, gözlem gürültü süreci v_k dan bağımsız ve $Var(\delta_k) = S_k$ olan bir beyaz gürültü süreci olsun. Uygulamalarda genellikle $\forall k = 1, 2, \dots$ için $S_k = S > 0$ biçiminde seçilir. Bu durumda (5.1) ile verilen lineer durum-uzay modeli durum vektörüne göre lineer olmayan durum-uzay modeline dönüşecektir. Buna göre model

$$\left| \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_k(\theta_k) x_k \\ \theta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_k \\ \delta_k \end{bmatrix} \\ y_k = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_k \\ \theta_k \end{bmatrix} + v_k \end{array} \right. \quad (5.3)$$

biçiminde ifade edilebilir (Özbek ve Efe 2004, Özbek vd. 2010). Simülasyon çalışması için üç ayrı senaryo düşünülmüştür.

Senaryo 1: (5.3) ile verilen sistemde bilinmeyen parametrelerin sabit olduğu durum göz önüne alınmıştır. Böylesi bir durum için çizelge 5.1 de verilen başlangıç değerleri kullanılarak ilgili modelden sayı üretilmiştir. Ayrıca başlangıç durumu tahminlerinin gerçek değerlere yakın olması durumunda; İlerletilmiş Kalman Filtresi, matris unutmaya faktörü ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresi, skaler unutmaya faktörü ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresi ve sabit bir skaler unutmaya faktörü ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresinin başarımlarını değerlendirmek amacıyla çizelge 5.2 ile verilen başlangıç değerleri kullanılarak filtreler çalıştırılmıştır. Sabit skaler uyarlı Kalman Filtresinde unutmaya faktörü olarak simülasyon çalışması boyunca $\alpha = 1.1$ olarak

seçilmiştir. 250 tekrarlı simülasyon sonucunda elde edilen sonuçlar şekil 5.1 – 5.7 ile verildiği gibidir. Simülasyon çalışmasında

$$HKT = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q (x_{i,j} - \hat{x}_{i,j})^2$$

biçiminde hesaplanmıştır. Burada q durum sayısını göstermektedir. Ayrıca Simülasyon çalışması boyunca verilen şekillerde ifade edilen

EKF: İlerletilmiş Kalman Filtresi,

MEKF: Kısım 3.2’de önerilen matris unutma faktörü ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresi,

SDU-EKF: Xia vd. (1994) tarafından önerilen skaler unutma faktörü ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresi,

SSU-EKF: Özbek ve Efe (2004) tarafından önerilen sabit skaler unutma faktörü ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresi,

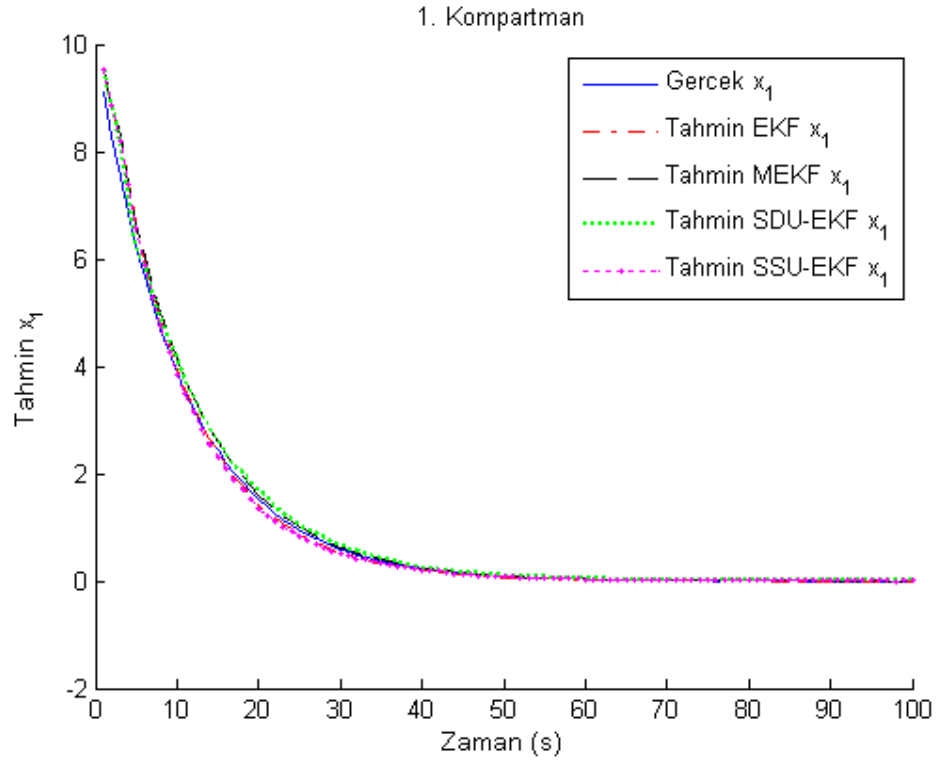
anlamındadır.

Çizelge 5.1 Simülasyon çalışmasında kullanılacak sayıların üretilmesinde kullanılan başlangıç değerleri

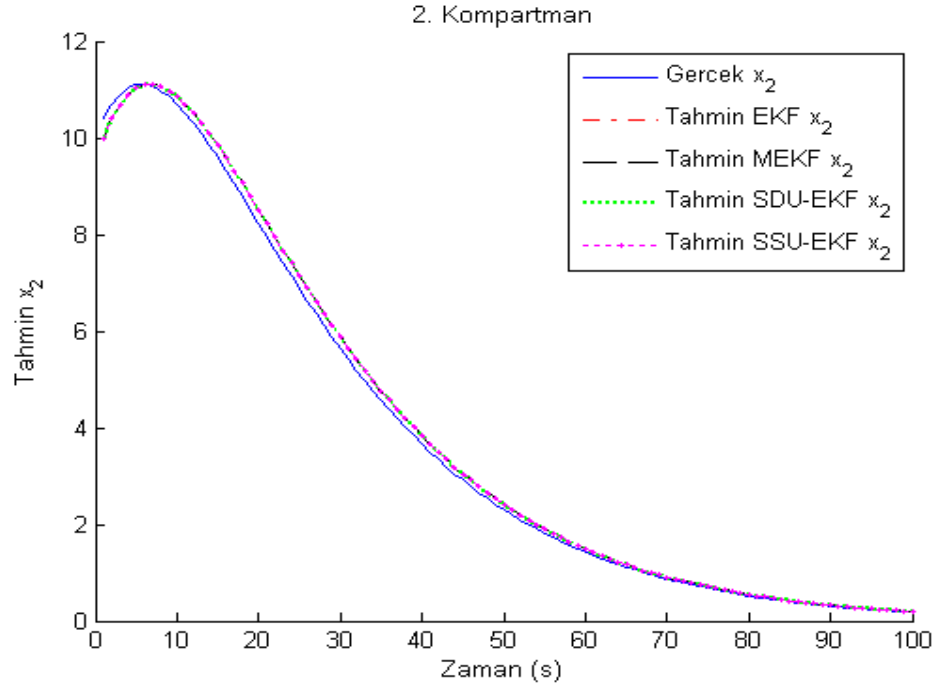
Değişkenler	Başlangıç değerleri
$x_{1,0}$	10
$x_{2,0}$	10
c_1	0.9
c_2	0.5
Q	$\begin{bmatrix} 1.225 \times 10e-5 & 0 \\ 0 & 1.225 \times 10e-5 \end{bmatrix}$
S	$\begin{bmatrix} 2.5 \times 10e-5 & 0 \\ 0 & 1 \times 10e-6 \end{bmatrix}$
R	$6.25 \times 10e-6$

Çizelge 5.2 Filtrelerin çalıştırılmasında kullanılan başlangıç değerleri

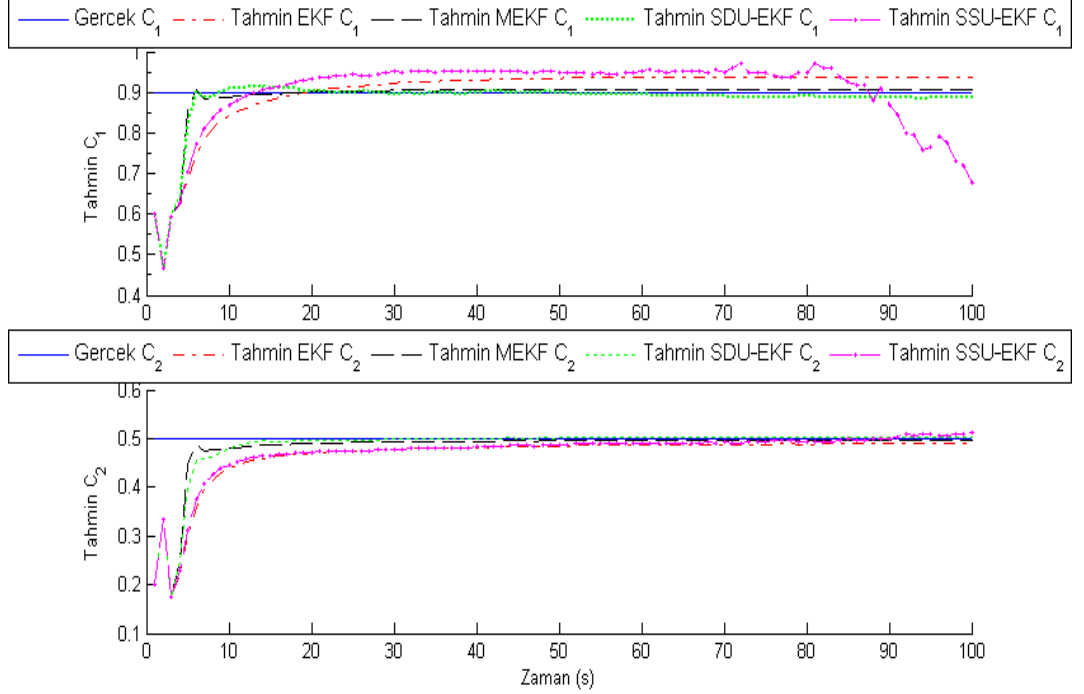
Değişkenler	Başlangıç değerleri
$\hat{x}_{1,0}$	10
$\hat{x}_{2,0}$	10
$\hat{c}_{1,0}$	0.6
$\hat{c}_{2,0}$	0.2
Q	$\begin{bmatrix} 1.225 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 1.225 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$
S	$\begin{bmatrix} 2.5 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$
R	6.25×10^{-6}



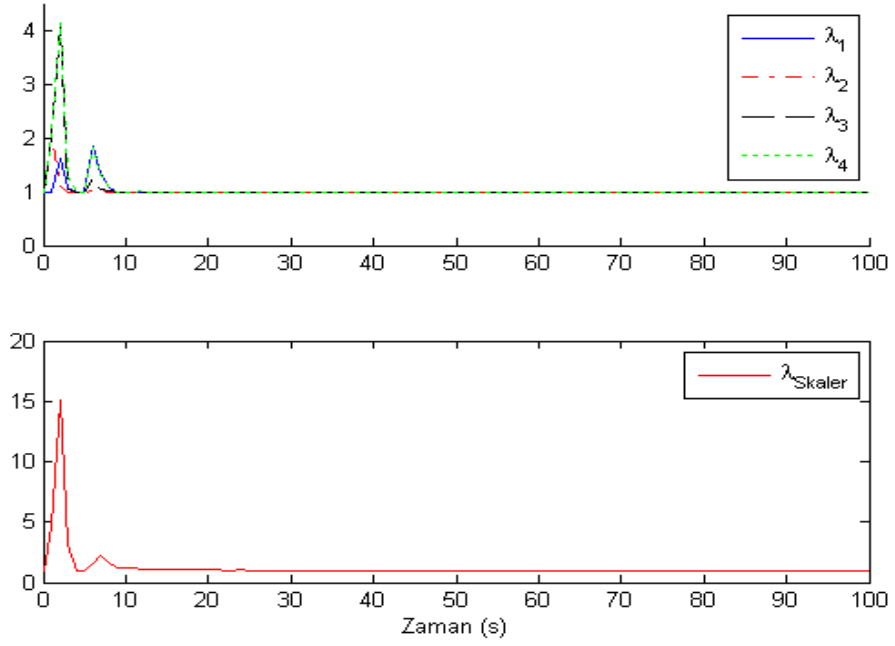
Şekil 5.1 x_1 durumuna ait filtre tahminleri (Senaryo 1)



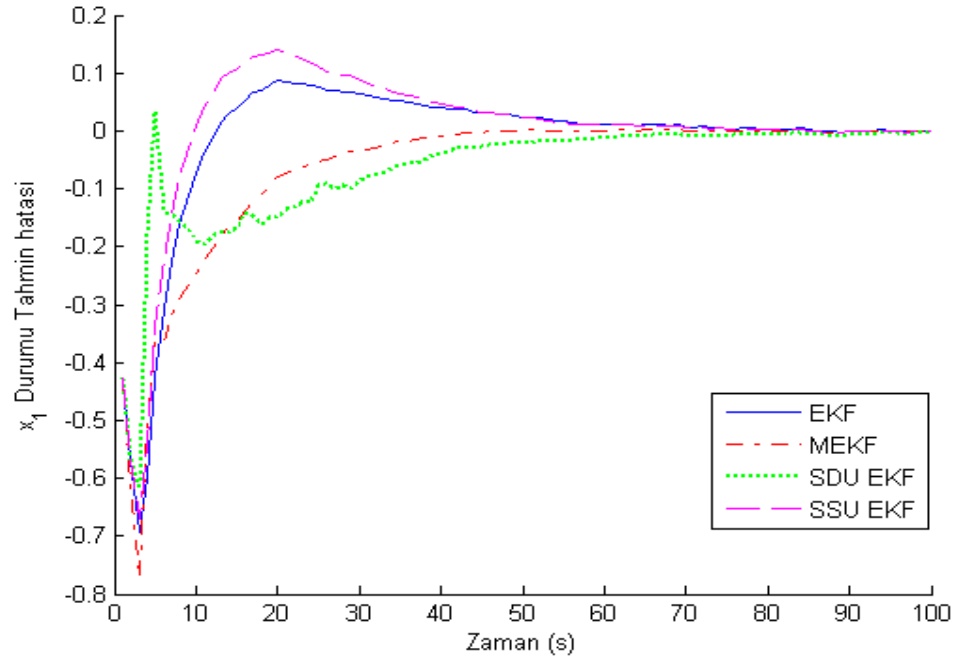
Şekil 5.2 x_2 durumuna ait filtre tahminleri (Senaryo 1)



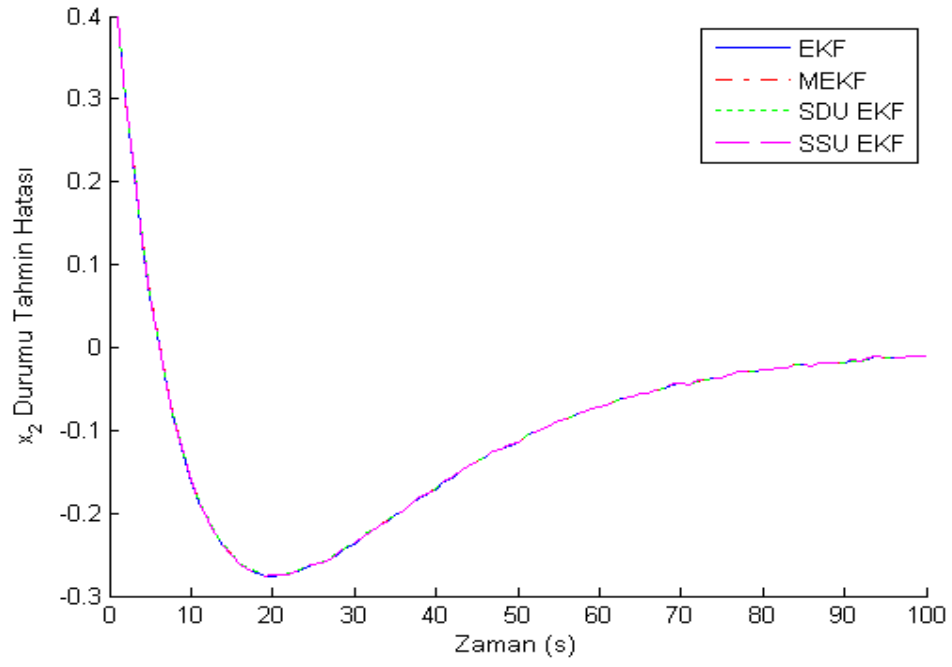
Şekil 5.3 c_1 ve c_2 parametrelerine ait filtre tahminleri (Senaryo 1)



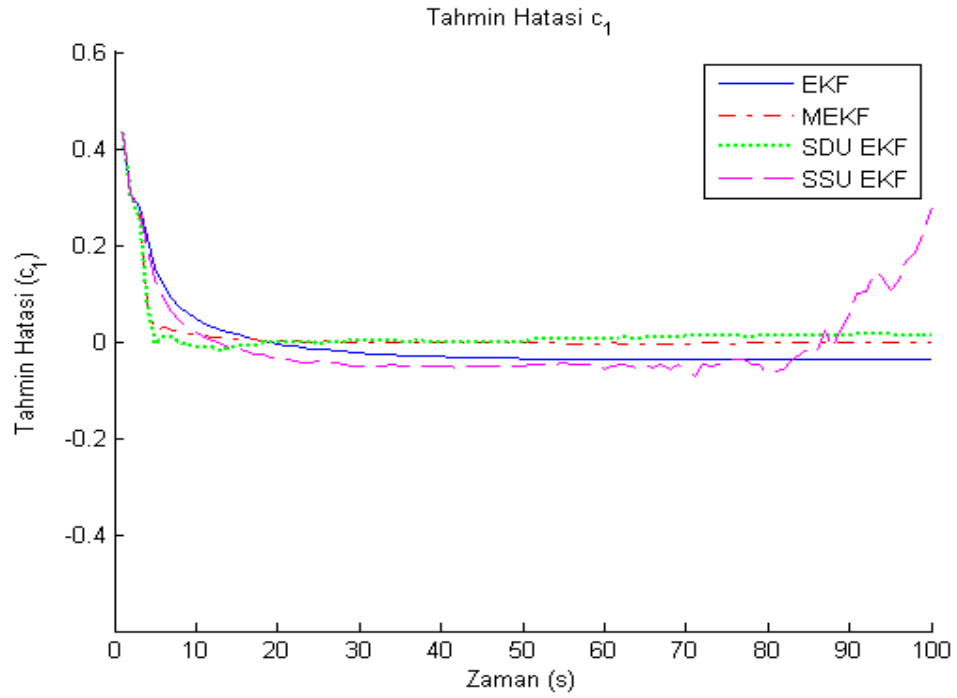
Şekil 5.4 Unutma faktörlerinin aldığı değerler. (Senaryo 1)



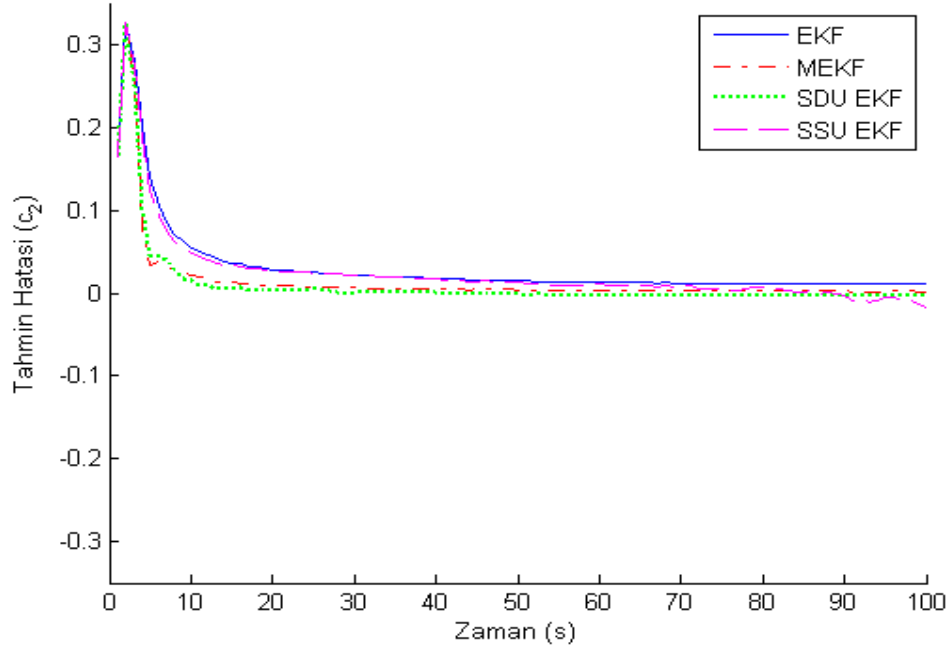
Şekil 5.5 Filtrelerin x_1 durumu tahmin hataları (Senaryo 1)



Şekil 5.6 Filtrelerin x_2 durumu tahmin hataları (Senaryo 1)



Şekil 5.7 Filtrelerin c_1 parametresinin tahmininde yaptıkları tahmin hataları (Senaryo 1)

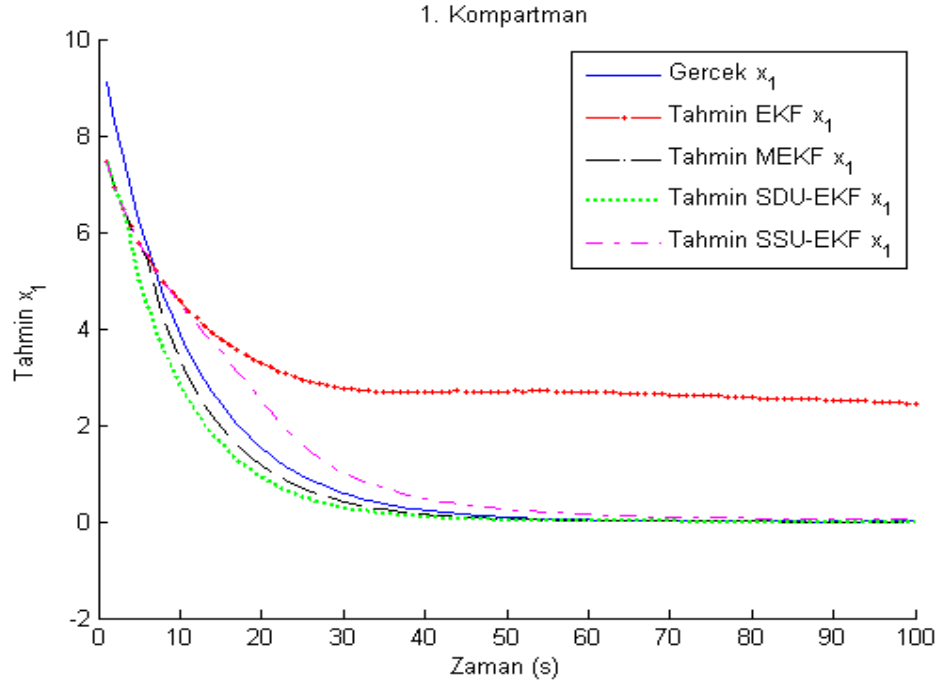


Şekil 5.8 Filtrelerin c_2 parametresinin tahmininde yaptıkları tahmin hataları (Senaryo1)

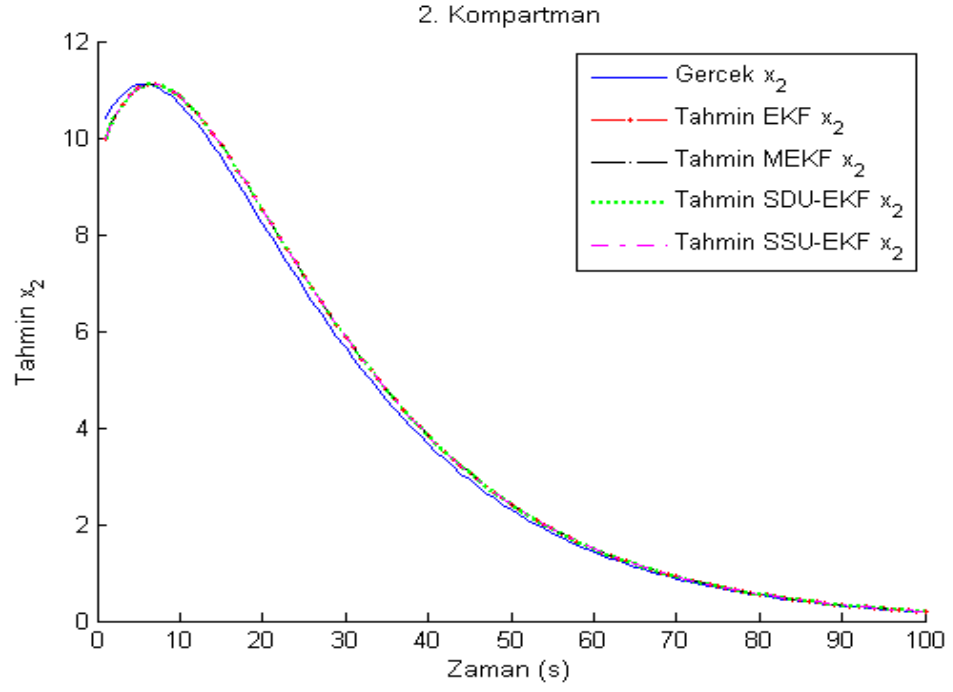
Senaryo 2: Burada birinci senaryodan farklı olarak başlangıç durumu tahminlerinin gerçek değerlerden uzak olması durumu göz önüne alınmıştır. Bu amaç doğrultusunda (5.3) ile verilen sistemden çizelge 5.1 ile verilen değerler kullanılarak sayı üretilmiş ve çizelge 5.3 ile verilen başlangıç değerleri kullanılarak da İlerletilmiş Kalman Filtresi, matris unutma faktörü ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresi, skaler unutma faktörü ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresi ve sabit bir skaler unutma faktörü ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresi çalıştırılmıştır. 250 tekrarlı simülasyon çalışmasına ait sonuçlar şekil 5.9 – 5.16’da verilmiştir.

Çizelge 5.3 Filtrelerin çalıştırılmasında kullanılan büyük hataya sahip başlangıç değerleri

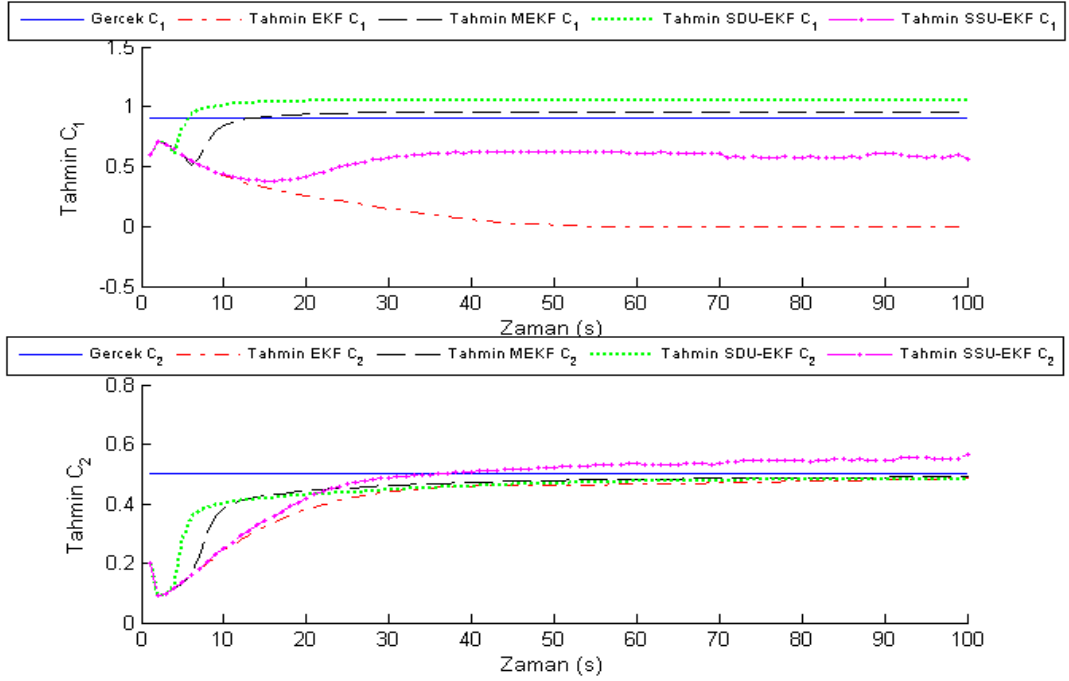
Değişkenler	Başlangıç değerleri
$\hat{x}_{1,0}$	8
$\hat{x}_{2,0}$	8
$\hat{c}_{1,0}$	0.6
$\hat{c}_{2,0}$	0.2
Q	$\begin{bmatrix} \sqrt{1.225 \times 10^{-5}} & 0 \\ 0 & \sqrt{1.225 \times 10^{-5}} \end{bmatrix}$
S	$\begin{bmatrix} \sqrt{2.5 \times 10^{-5}} & 0 \\ 0 & \sqrt{1 \times 10^{-6}} \end{bmatrix}$
R	6.25×10^{-6}



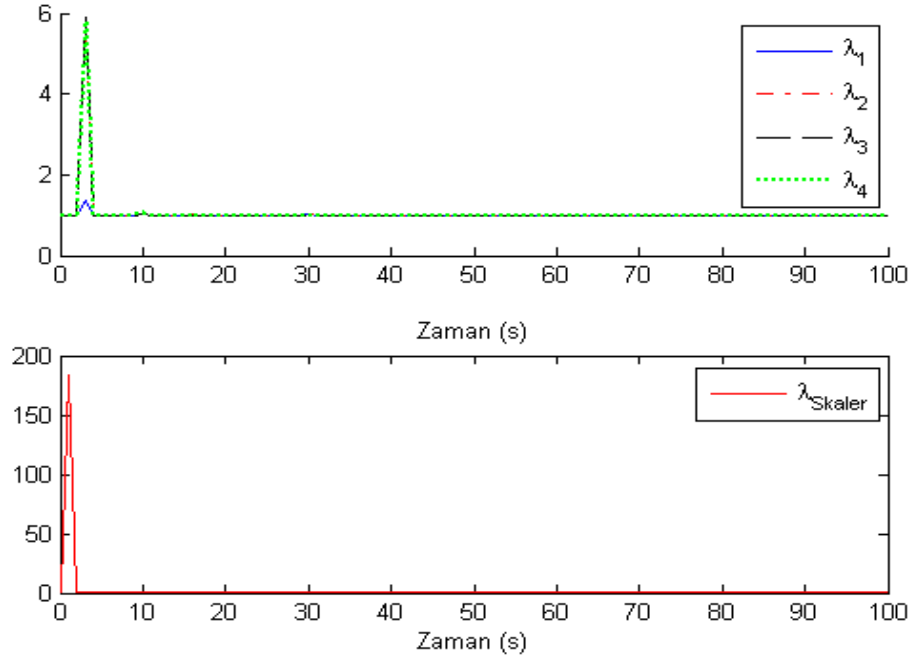
Şekil 5.9 x_1 durumuna ait filtre tahminleri (Senaryo 2)



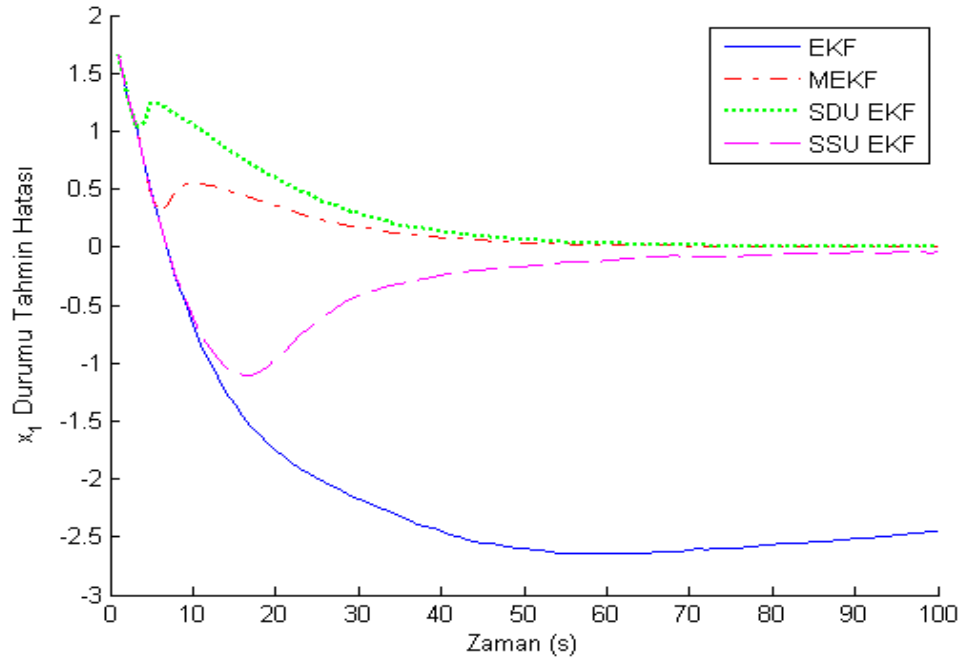
Şekil 5.10 x_2 durumuna ait filtre tahminleri (Senaryo 2)



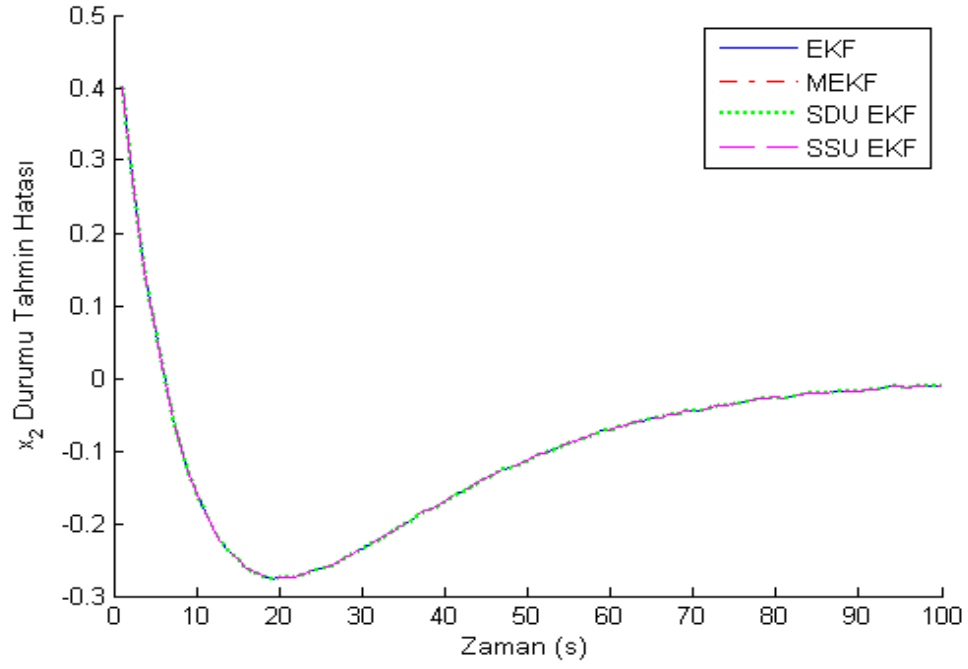
Şekil 5.11 c_1 ve c_2 parametrelerine ait filtre tahminleri (Senaryo 2)



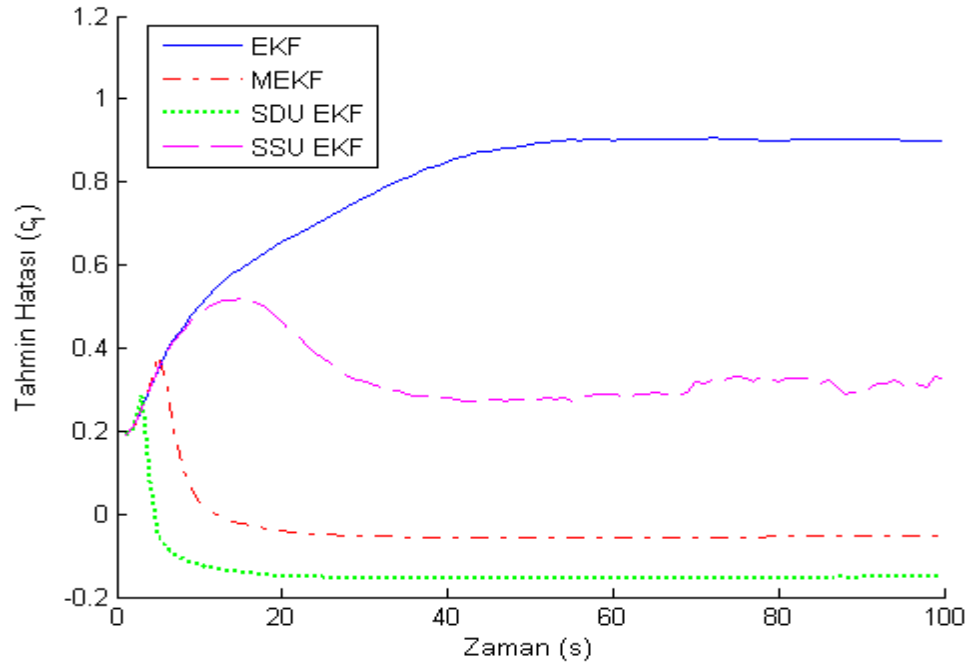
Şekil 5.12 Unutma faktörlerinin aldığı değerler (Senaryo 2)



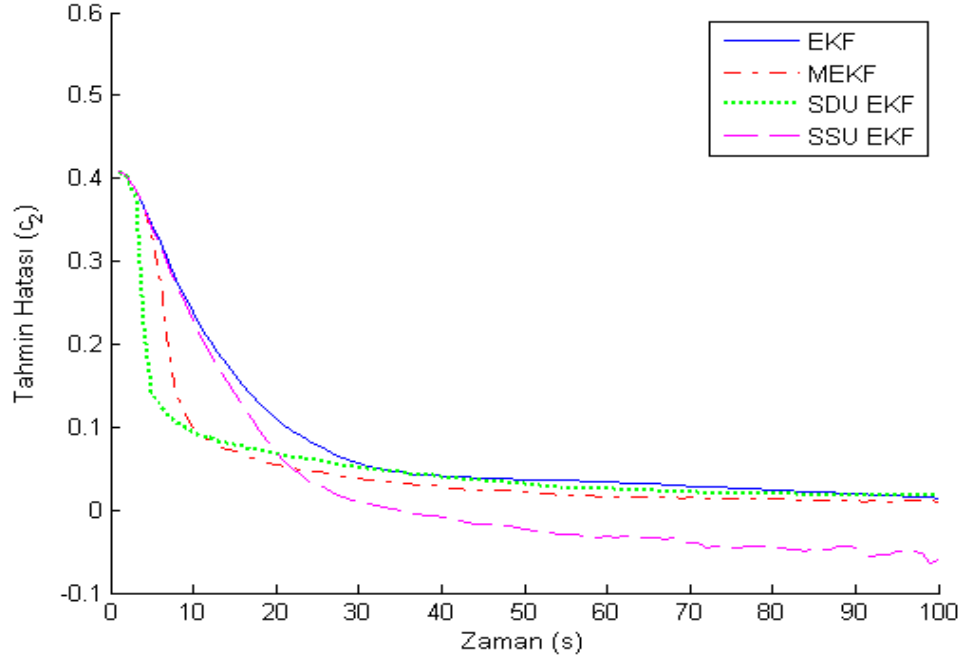
Şekil 5.13 Filtrelerin x_1 durumu tahmin hataları (Senaryo 2)



Şekil 5.14 Filtrelerin x_2 durumu tahmin hataları (Senaryo 2)



Şekil 5.15 Filtrelerin c_1 parametresinin tahmininde yaptıkları tahmin hataları (Senaryo 2)



Şekil 5.16 Filtrelerin c_2 parametresinin tahmininde yaptıkları tahmin hataları (Senaryo 2)

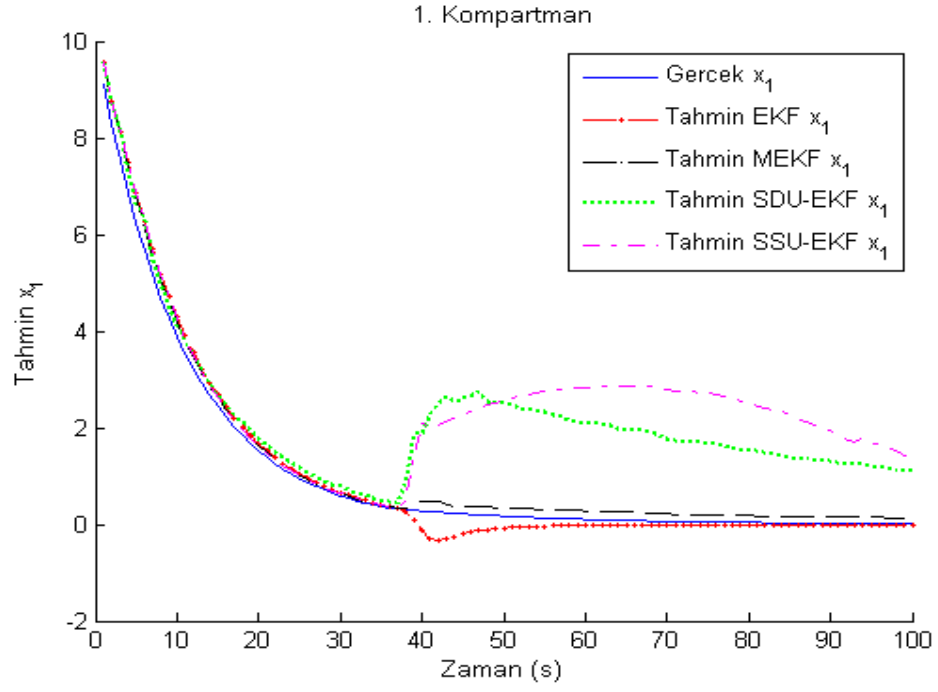
Senaryo 3: Senaryo 1 ve senaryo 2'den farklı olarak burada bilinmeyen parametrelerin belirli bir k anında değiştiği durum göz önüne alınmıştır. Bu durumda (5.3) ile verilen sistemden çizelge 5.4 de verilen başlangıç değerleri kullanılarak sayı üretilmiş ve çizelge 5.5 ile verilen başlangıç değerleri kullanılarak filtreler çalıştırılmıştır. Yapılan simülasyon çalışması sonuçları şekil 5.17 – 5.24 ile verildiği gibidir.

Çizelge 5.4 c_1 ve c_2 bilinmeyen parametre değerlerinin değiştiği durum için simülasyon çalışmasında kullanılacak sayıların üretilmesinde kullanılan başlangıç değerleri

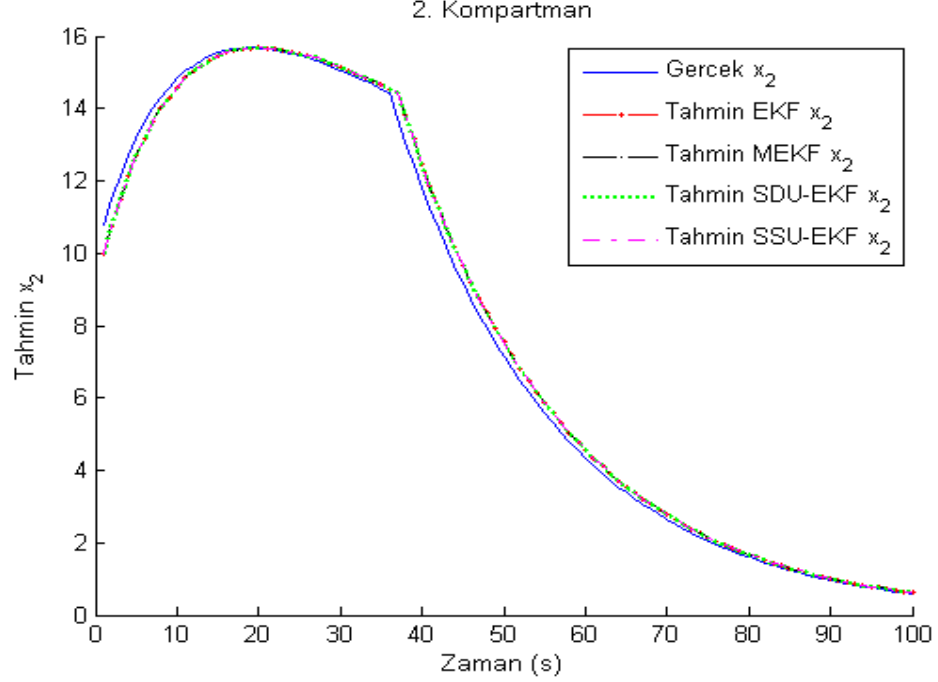
Değişkenler	Başlangıç değerleri
$x_{1,0}$	10
$x_{2,0}$	10
c_1	$k \leq 37 \Rightarrow c_1 = 0.9$ $k > 37 \Rightarrow c_1 = 0.5$
c_2	$k \leq 37 \Rightarrow c_2 = 0.1$ $k > 37 \Rightarrow c_2 = 0.5$
Q	$\begin{bmatrix} 1.225 \times 10e-5 & 0 \\ 0 & 1.225 \times 10e-5 \end{bmatrix}$
S	$\begin{bmatrix} 2.5 \times 10e-5 & 0 \\ 0 & 1 \times 10e-6 \end{bmatrix}$
R	$6.25 \times 10e-6$

Çizelge 5.5 c_1 ve c_2 bilinmeyen parametre değerlerinin değiştiği durum için filtrelerin çalıştırılmasında kullanılan başlangıç değerleri

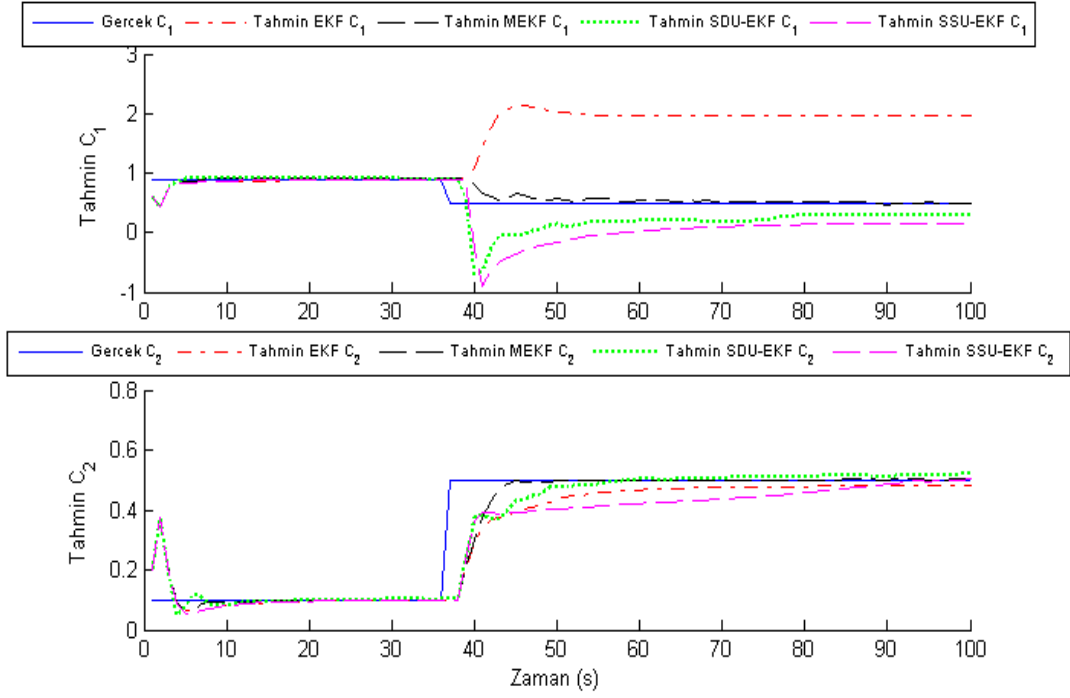
Değişkenler	Başlangıç değerleri
$\hat{x}_{1,0}$	10
$\hat{x}_{2,0}$	10
$\hat{c}_{1,0}$	0.6
$\hat{c}_{2,0}$	0.2
Q	$\begin{bmatrix} 1.225 \times 10e-5 & 0 \\ 0 & 1.225 \times 10e-5 \end{bmatrix}$
S	$\begin{bmatrix} 2.5 \times 10e-5 & 0 \\ 0 & 1 \times 10e-6 \end{bmatrix}$
R	$6.25 \times 10e-6$



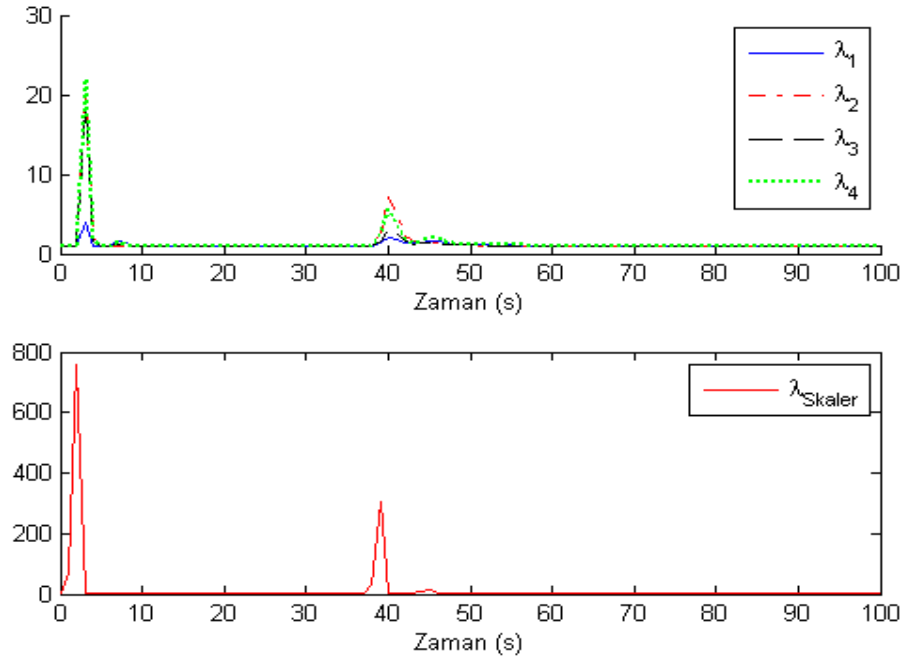
Şekil 5.17 x_1 durumuna ait filtre tahminleri (Senaryo 3)



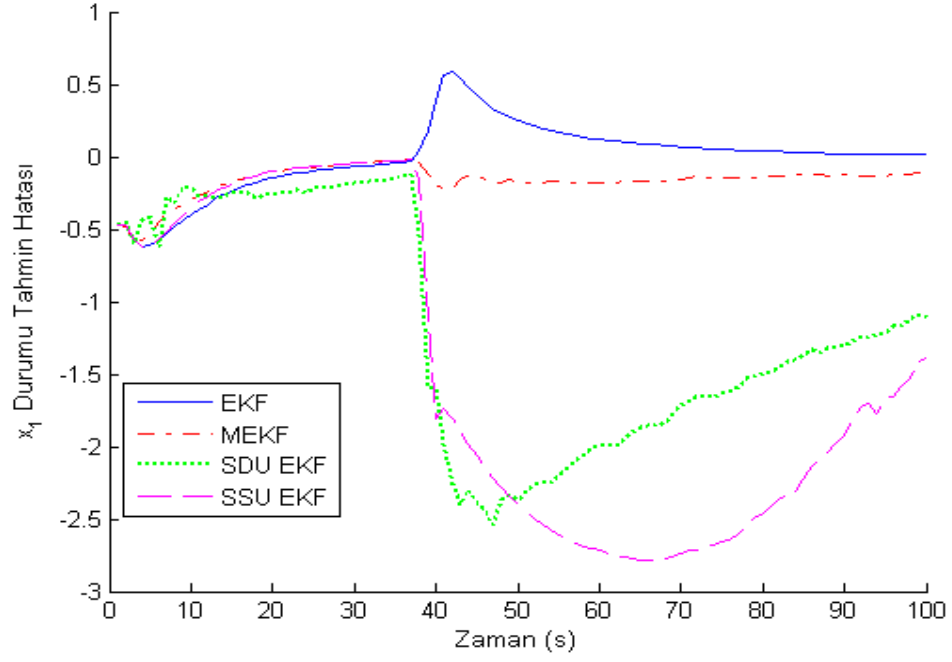
Şekil 5.18 x_2 durumuna ait filtre tahminleri (Senaryo 3)



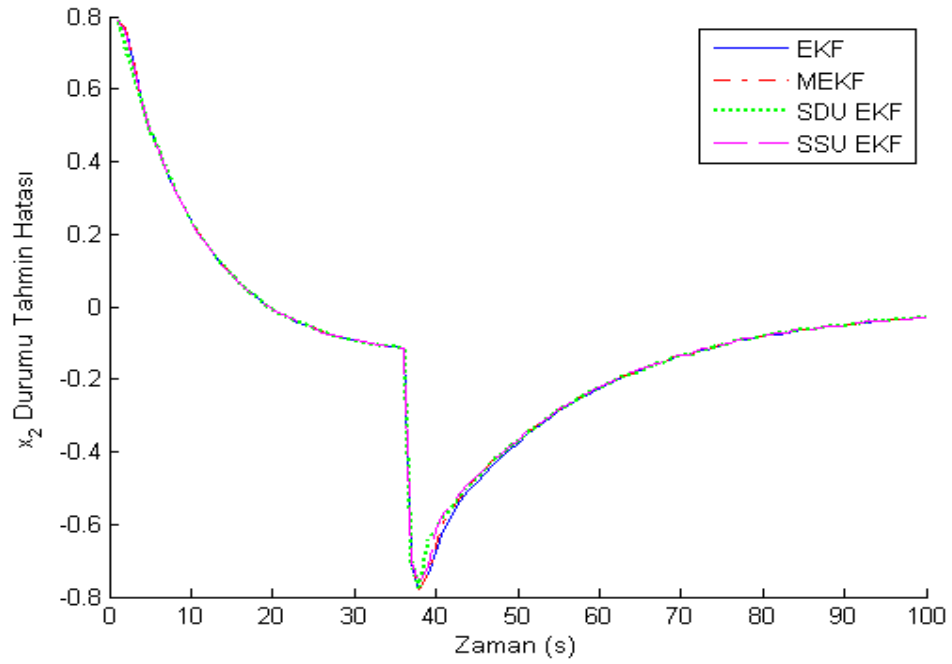
Şekil 5.19 c_1 ve c_2 parametrelerine ait filtre tahminleri (Senaryo 3)



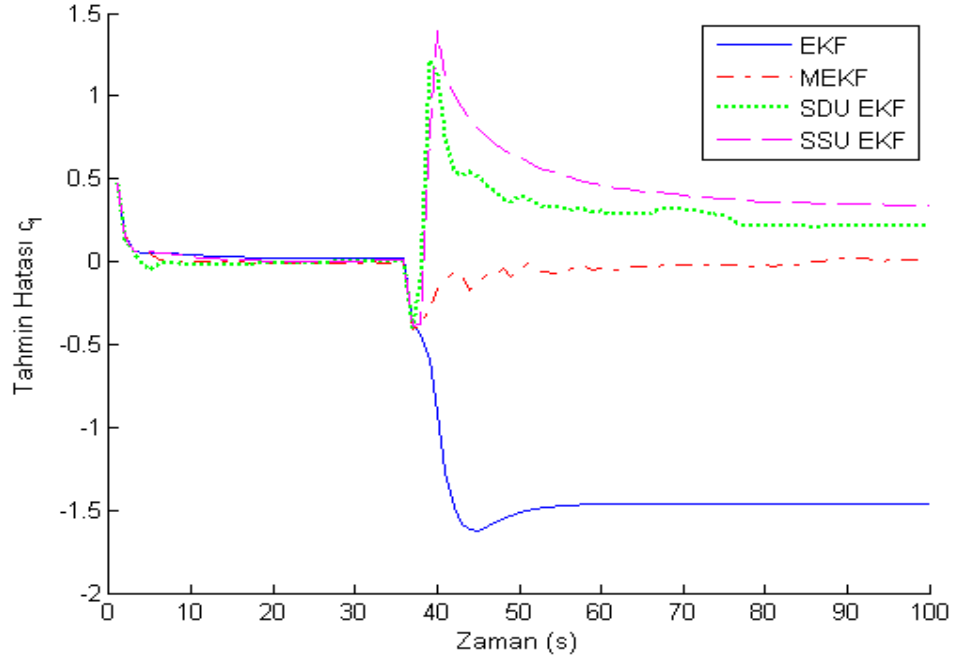
Şekil 5.20 Unutma faktörlerinin aldığı değerler. (Senaryo 3)



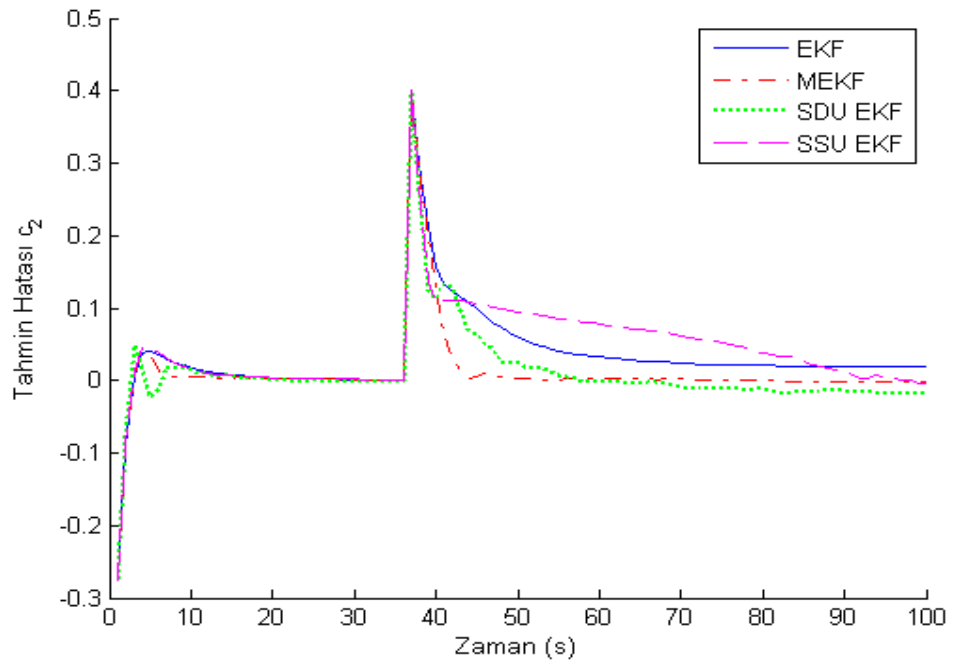
Şekil 5.21 Filtrelerin x_1 durumu tahmin hataları (Senaryo 3)



Şekil 5.22 Filtrelerin x_2 durumu tahmin hataları (Senaryo 3)



Şekil 5.23 Filtrelerin c_1 parametresinin tahmininde yaptıkları tahmin hataları (Senaryo 3)



Şekil 5.24 Filtrelerin c_2 parametresinin tahmininde yaptıkları tahmin hataları (Senaryo 3)

Yapılan simülasyon çalışması sonuçlarına göre başlangıç durumu bilgilerinde hata olmadığı veya çok küçük hatanın olduğu durumda filtreler arasında çok az bir performans farkı gözlenmiştir. Ancak başlangıç bilgilerindeki hatanın yüksek olduğu durumda veya bilinmeyen parametrelerin zamanla değiştiği durumda ise uyarlı filtrelerin daha düşük hataya sahip oldukları ve gerçek değerlere daha hızlı yakınsadıkları gözlemlenmiştir. Özellikle üzerinden gözlem alınamayan x_1 durumu ve bilinmeyen c_1, c_2 parametrelerinin gerçek değerlerine en hızlı yakınsayan filtre yapılan bütün simülasyon çalışmalarında matris uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi olarak gözlemlenmiştir.

5.1.2 Gözlem matrisinin tam ranklı olması durumunda matris uyarlı Kalman Filtresinin başarımı

Gözlem matrisinin tam ranklı olması durumunda matris unutma faktörü ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresinin performansını, İlerletilmiş Kalman Filtresine göre değerlendirebilmek amacıyla Lotka-Volterra modeli olarak bilinen ve etkileşimli iki tür canlı topluluğu için çoğalma modeli olan model üzerinde bir simülasyon çalışması yapılmıştır. İlgili model,

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) \quad (5.4)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -mx_2(t) + rx_1(t)x_2(t) \quad (5.5)$$

$$x_1(0) = x_{1(0)}, \quad x_2(0) = x_{2(0)}$$

biçimindedir. Burada,

$x_1(t)$: t anındaki av miktarını,

$x_2(t)$: t anındaki avcı miktarını,

$a(a > 0)$ avcı yokken avın çoğalma oranını,

$b(b > 0)$ olmak üzere $a - bx_2(t)$ avcı varken avın çoğalma oranını,

$m(m > 0)$ av yokken avcının çoğalma oranını,

$r(r > 0)$ olmak üzere $-m + rx_1(t)$ av varken avcının çoğalma oranını

göstermektedir (Öztürk ve Özbek 2004).

(5.4)-(5.5) eşitlikleri ile verilen ve diferansiyel biçiminde olan modelin fark denklemi karşılığı

$$x_1(t + \Delta t) = x_1(t) + (a - bx_2(t))x_1(t)\Delta t \quad (5.6)$$

$$x_2(t + \Delta t) = x_2(t) + (-m + rx_1(t))x_2(t)\Delta t \quad (5.7)$$

olup, İlerletilmiş Kalman Filtresini Lotka-Volterra modelinde kullanmak için (5.6)-(5.7) eşitlikleri ile verilen fark denklemlerinin durum-uzay modeli karşılığı olarak,

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1(k) - bx_1(k)x_2(k) \\ -mx_2(k) + rx_1(k)x_2(k) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + v(k) \quad (5.9)$$

modeli göz önüne alınacaktır. Simülasyon çalışmasında kullanılan modelde,

$$a = 0.2$$

$$b = 0.06$$

$$m = 0.10$$

$$r = 0.01$$

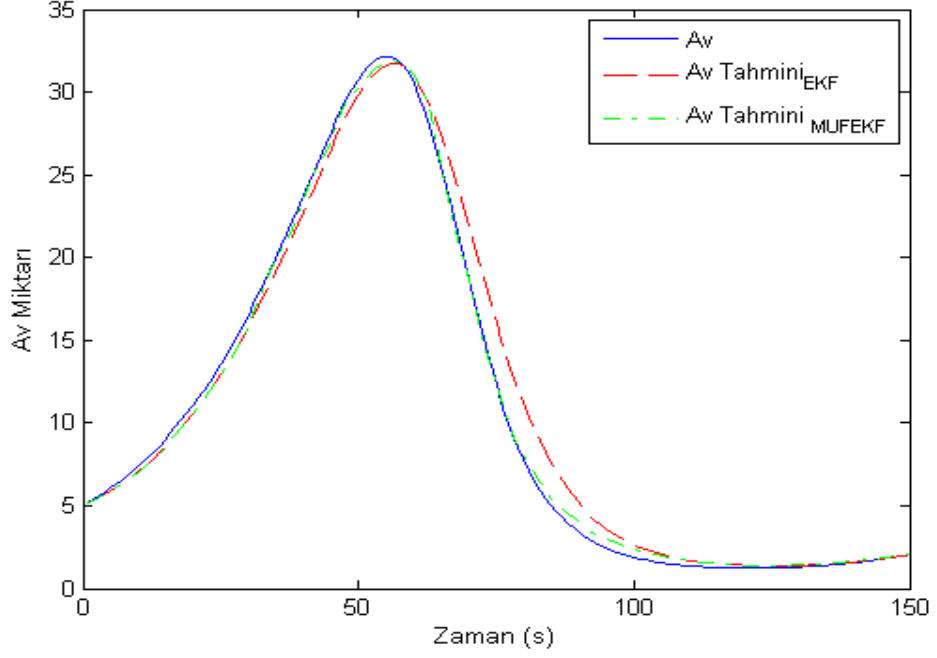
$v(k) \sim N(0, I \times 0.01)$, $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = 1.2$, $\Delta t = 0.3$ ve $Q = I$ olarak alınmıştır.

Diğerleri aynı kalmak üzere hatalı modelde,

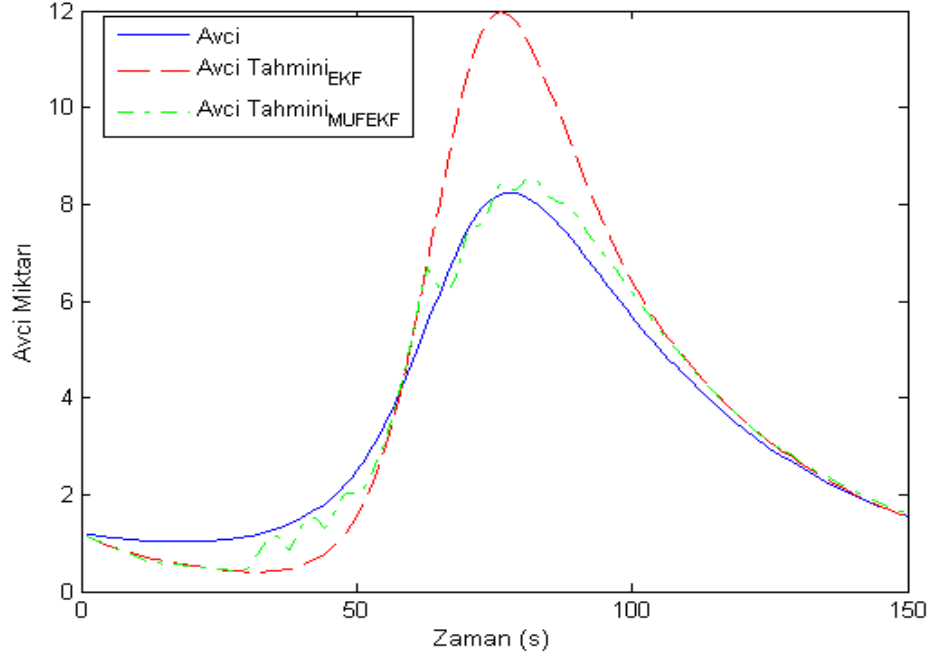
$$b = 0.16$$

$$r = 0.03$$

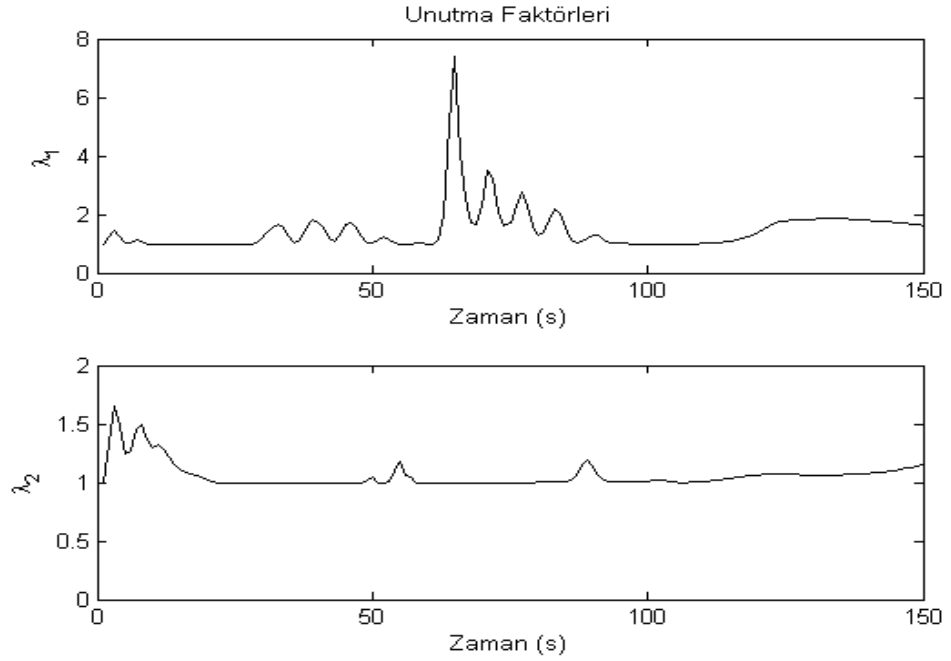
olarak alınarak İlerletilmiş Kalman Filtresi ve matris unutma faktörüyle uyarlanmış Kalman Filtresi ile yapılmış olan simülasyona ait grafikler şekil 5.25 – 5.28 ile verilmiştir.



Şekil 5.25 Filtrelerin av tahminleri

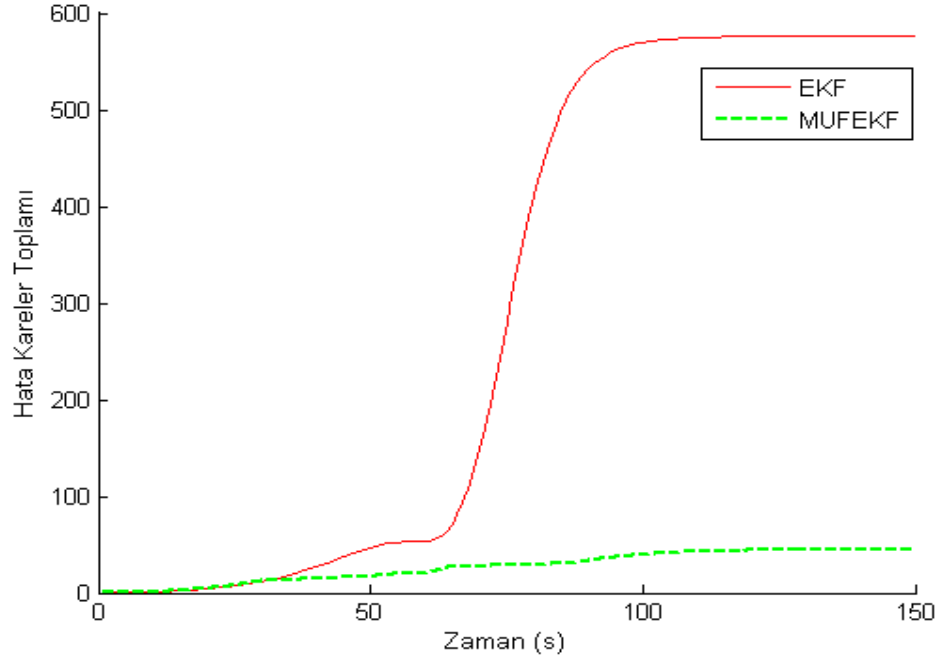


Şekil 5.26 Filtrelerin avcı tahminleri



Şekil 5.27 Matris unutma faktörü ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresinde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere hesaplanan } \lambda_1 \text{ ve } \lambda_2 \text{ unutma faktörleri}$$



Şekil 5.28 İlerletilmiş Kalman Filtresi ve matris unutmaya faktörü ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresine ait hata kareler toplamı

Yapılan simülasyon çalışması sonuçlarına göre başlangıç durumu bilgilerinin hatalı olarak bilindiği durumda, önerilen matris uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi tahminlerinde daha düşük tahmin hatası yapıldığı gözlemlenmiştir.

5.2 Çoklu Ölçek Faktörü ile Uyarlanmış Kalman Filtresinin Başarımı

Bu kısımda, 3.6.1 ve 3.6.2 de önerilen yöntemlerin başarımını 3. bölüm altıncı kısımda incelenen Geng ve Wang (2008) tarafından önerilen çoklu ölçek faktörü ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresine karşı değerlendirebilmek amacı ile bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Bu amaç doğrultusunda (5.1.a)-(5.1.b) eşitliği ile verilen kompartman modeli göz önüne alınsın. Ancak burada kısım 5.1.1.'de yapılan çalışmadan farklı olarak; sindirim sistemini karakterize eden pozitif sabitin (c_1) ve metabolik ve boşaltım sürecini karakterize eden pozitif sabitin (c_2) bilindiği varsayımı altında, sadece bir ilacın sindirim sistemindeki miktarı (x_1) ile kan dolaşım sistemindeki miktarının (x_2) tahmini üzerinde durulmuştur. 250 tekrarlı bir simülasyon çalışması için

(5.1.a)-(5.1.b) ile verilen sistemden çizelge 5.6 da verilen başlangıç değerleri kullanılarak sayı üretilmiş ve çizelge 5.7 ile verilen başlangıç değerleri kullanılarak filtreler çalıştırılmıştır. Ayrıca simülasyon çalışmasında örnekleme zaman aralığı $\Delta_t = 0.1$ ve

$$HKT = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q (x_{i,j} - \hat{x}_{i,j})^2$$

olarak alınmıştır. Burada q durum sayısını göstermektedir. Simülasyon çalışmasına ait sonuçlar şekil 5.29 – 5.34’de verildiği gibidir. Şekillerde ifade edilen

EKF: İlerletilmiş Kalman Filtresi,

Filtre 1: Kısım 3.6.2’de önerilen uyarlama yöntemi ve Algoritma 6’nın birlikte kullanılmasıyla oluşturulan uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi,

Filtre 2: Geng ve Wang (2008) tarafından önerilen çoklu ölçek faktörü ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresi,

Filtre 3: Geng ve Wang (2008) tarafından önerilen yöntem ile Algoritma 6’nın birlikte kullanılması ile uyarlanmış İlerletilmiş Kalman Filtresi

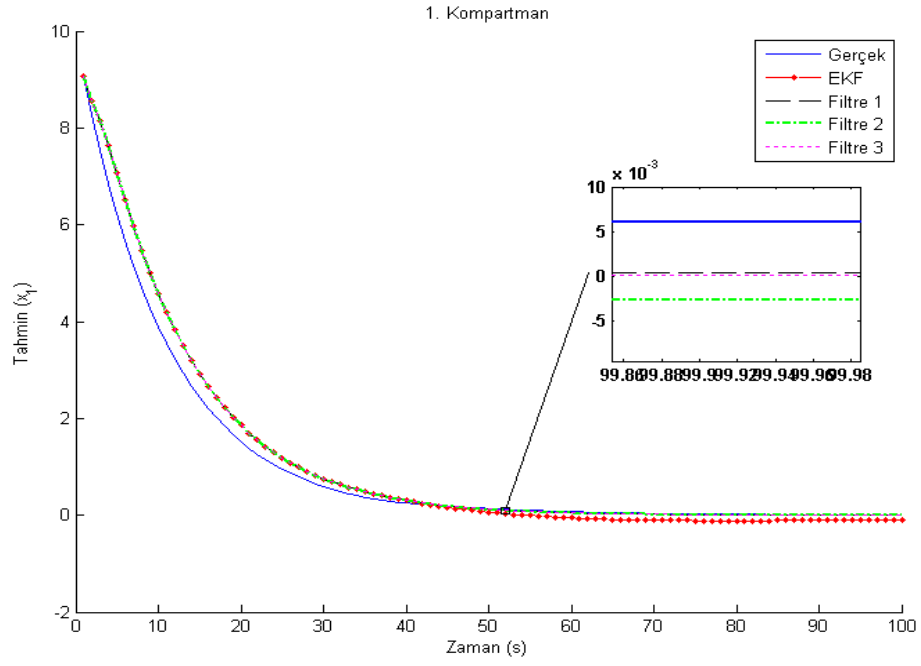
anlamındadır.

Çizelge 5.6 Simülasyon çalışmasında kullanılacak sayıların üretilmesinde kullanılan başlangıç değerleri

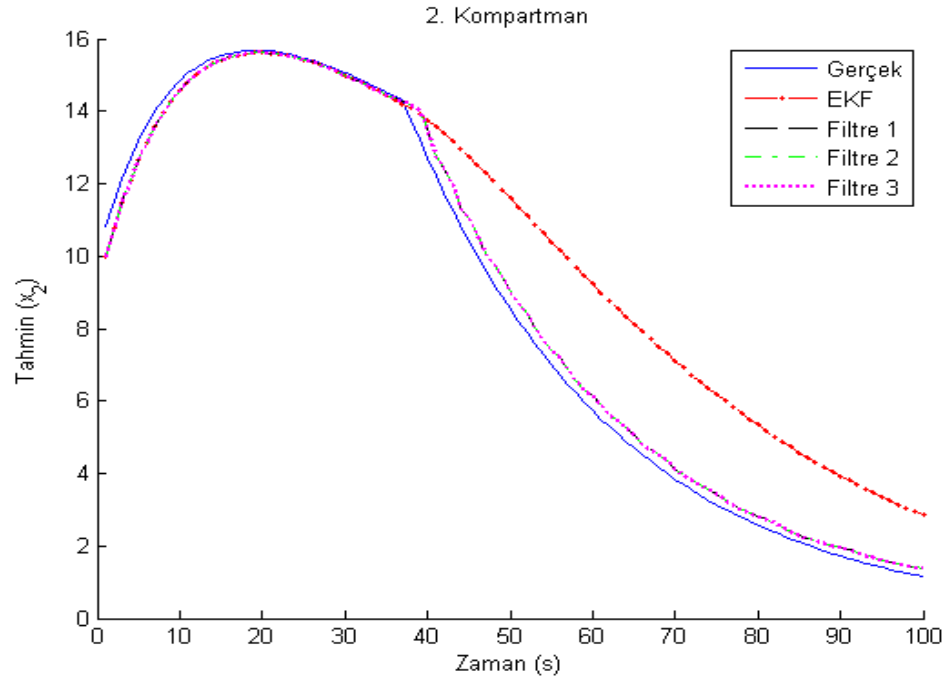
	Başlangıç değerleri
$x_{1,0}$	10
$x_{2,0}$	10
c_1	$k \leq 37 \Rightarrow c_1 = 0.9$ $k > 37 \Rightarrow c_1 = 0.6$
c_2	$k \leq 37 \Rightarrow c_2 = 0.1$ $k > 37 \Rightarrow c_2 = 0.4$
Q	$10^{-9} I_{(2 \times 2)}$
R	$10^{-6} I_{(1 \times 1)}$

Çizelge 5.7 Filtrelerin çalıştırılmasında kullanılacak başlangıç tahminleri

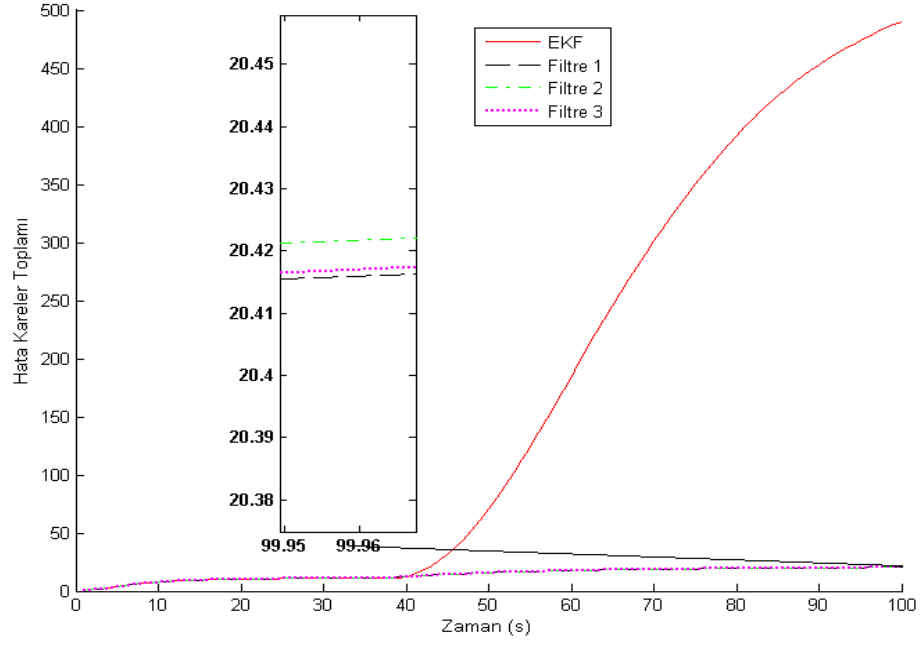
Değişkenler	Düşük Başlangıç Tahmin Hatası	Büyük Başlangıç Tahmin Hatası
$\hat{x}_{1,0}$	10	7
$\hat{x}_{2,0}$	10	7
$\hat{c}_{1,0}$	0.88	0.7
$\hat{c}_{2,0}$	0.12	0.3
Q	$10^{-9} I_{(2 \times 2)}$	$10^{-5} I_{(2 \times 2)}$
R	$10^{-6} I_{(1 \times 1)}$	$10^{-2} I_{(1 \times 1)}$



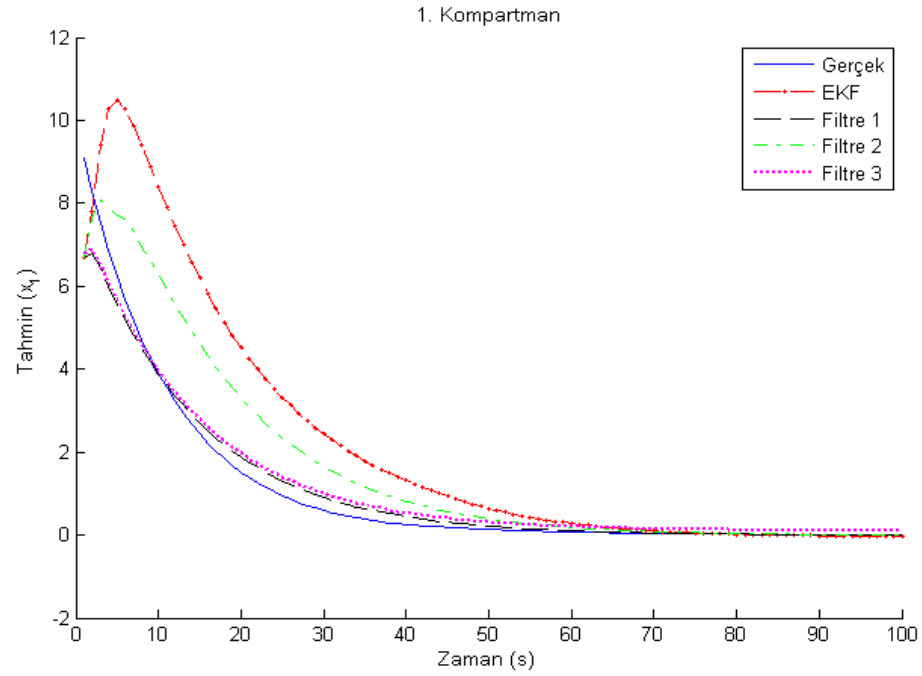
Şekil 5.29 Küçük başlangıç hatası ile 1. kompartman için filtrelere ait tahminler



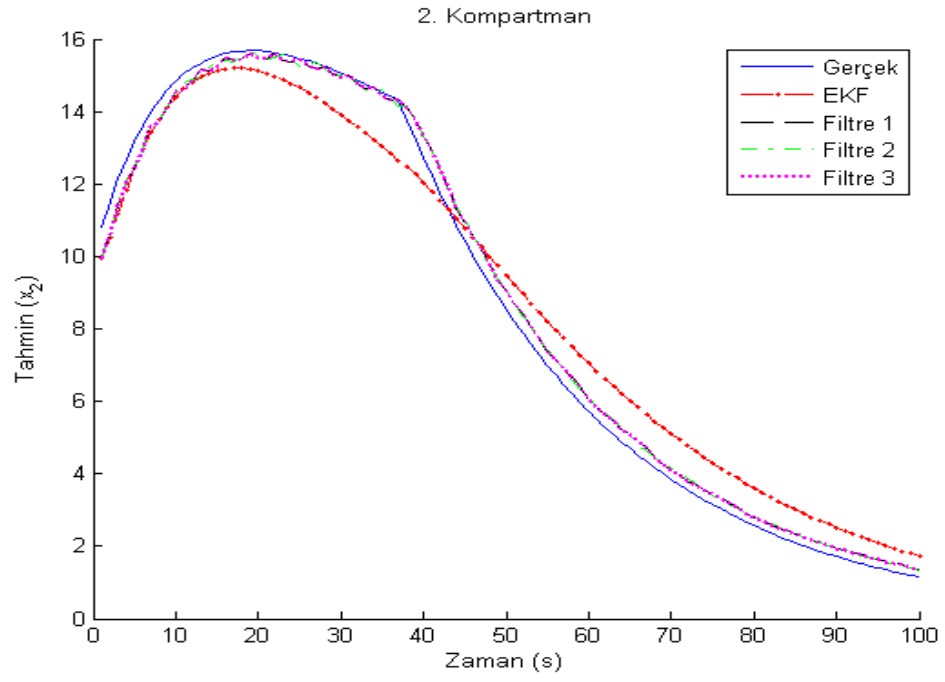
Şekil 5.30 Küçük başlangıç hatası ile 2. kompartman için filtrelere ait tahminler



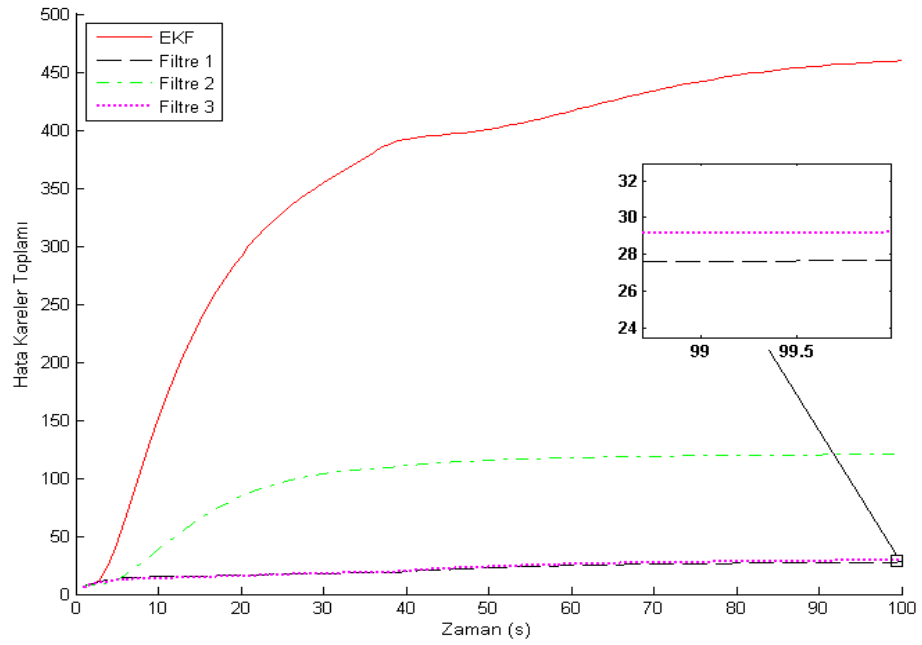
Şekil 5.31 Küçük başlangıç hatası olduğu durumda Filtreler tarafından yapılan genel hata kareler toplamı



Şekil 5.32 Büyük başlangıç hatası ile 1. kompartman için filtreleme tahminleri



Şekil 5.33 Büyük başlangıç hatası ile 2. kompartman için filtrelere ait tahminler



Şekil 5.34 Büyük başlangıç hatası olduğu durumda Filtreler tarafından yapılan hata kareler toplamı

Yapılan simülasyon çalışması sonuçlarına göre başlangıç durumu bilgilerinde hata olmadığı veya çok küçük hatanın olduğu durumda filtreler arasında çok az bir performans farkı gözlenmiştir. Ancak başlangıç bilgilerindeki hatanın yüksek olduğu durumda ise uyarlı filtrelerin daha az hata yaptığı gözlemlenmiştir. En küçük hata kareler toplamının ise yapılan bütün simülasyon çalışmalarında Filtre 1 ve Filtre 3 de olduğu gözlenmiştir.

5.3 Küresel Konumlama Sistemi ile Navigasyon Uygulaması

Bu kısımda, kısım 3.7 de önerilen uyarlı Kalman Filtresinin başarımını diğer uyarlı filtrelerle göre değerlendirebilmek amacıyla, hareketli bir aracın anlık konumunun belirlenmesi üzerine, bir simülasyon çalışması ve gerçek veriler kullanılarak bir uygulama çalışması verilmiştir. Bu amaç doğrultusunda ilk olarak Küresel Konumlama Sistemi hakkında temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

5.3.1 Küresel konumlama sistemi (GPS)

GPS (Global Positioning System), Amerika savunma bakanlığınca geliştirilen uydu bazlı navigasyon sistemleridir ve NAVSTAR (Navigation and Satellite Timing and Ranging) olarak da adlandırılmaktadır. GPS anında ve sürekli konum, hız ve zaman belirlemesine olanak veren, hem askeri hem de sivil kullanıma açık olan bir radyo navigasyon sistemidir.

5.3.2 Küresel konumlama sisteminin bölümleri

Uydu tabanlı radyo navigasyon sistemi olan GPS, uzay bölümü, kontrol bölümü ve kullanıcı bölümü olmak üzere üç bölümden oluşmaktadır.

Uzay bölümü: Ekvator ile 55° eğim yapan 6 yörünge düzlemi üzerine yerleştirilmiş 32 uydudan oluşmaktadır. Uydular yer merkezinden 26560 km. (yeryüzünden yaklaşık 20200 km.) uzaklıkta olup 11 saat 58 dakikada bir tam devir yapmaktadırlar.

Yeryüzünün herhangi bir noktasından herhangi bir anda gözlenebilecek en az uydu sayısı dördür ve her bir uydu yaklaşık olarak beş saat ufuk hattı üzerinde kalmaktadır.

Kontrol bölümü: Ana kontrol istasyonu ile yer antenleri ve izleme istasyonlarını içeren bir bölümdür. Dünya üzerinde 5 sabit izleme istasyonundan GPS uyduları sürekli olarak izlenmektedir. Ana kontrol istasyonu tüm sistemin kontrolünü, her bir uydu için uydu konumu ve uydu saat bilgilerinin düzeltmelerinin hesabını ve güncellemelerini yapmaktadır. Diğer dört istasyon ise sürekli izleme istasyonu olarak görev yapmakta ve uydu konumlarının belirlenmesi için gerekli bilgileri toplamaktadır.

Kullanıcı bölümü: Bütün GPS alıcılar kullanıcı bölümü olarak tanımlanmaktadır.

5.3.3 Küresel konumlama sistemi ile konum belirlemenin temel prensibi

GPS sinyalleri kullanılarak konum belirleme temel olarak alıcı ile görünür durumdaki GPS uydularının arasındaki mesafenin ölçülmesine dayanır. Dünya üzerindeki bir noktanın üç boyutlu konum bilgisinin belirlenebilmesi için, konumu bilinen 3 farklı uydunun alıcıya olan uzaklığının bilinmesi yeterlidir. Ancak, dünyanın herhangi bir noktasında sürekli bir konumlanmanın yapılabilmesi, en az 4 uydunun alıcı tarafından algılanmasını gerektirmektedir.

GPS' de kullanılan iki ana konum belirleme yöntemi vardır. Bunlar mutlak konum belirleme ve bağıl konum belirleme yöntemleridir. Bir noktanın dünya üzerindeki konumu enlem, boylam, yükseklik olarak belirleniyorsa buna mutlak konum belirleme denilmektedir. Birden fazla noktanın birbirine göre konumlarının belirlenmesine ise bağıl konum belirleme adı verilmektedir.

Konum belirleme işleminde eğer dünya üzerinde sabit bir noktanın konumunun belirlenmesi üzerinde duruluyor ise bu statik konum belirleme olarak adlandırılır. Eğer konum belirleme işleminde, yeryüzüne göre hareketli bir aracın ya da bir platformun konumunun belirlenmesi üzerinde duruluyor ise bu da kinematik konum belirleme

olarak adlandırılır. Kinematik konum belirleme aynı zamanda anlık konum belirleme (real-time positioning) olarak ta adlandırılmaktadır.

5.3.4 Küresel konumlama sistemi gözlemleri

Küresel konumlama sistemi ile konum belirlemede kullanılan gözlemler; n tane görünür uydu için

$$\rho_i = r_i + c\Delta t + w_i = \varphi_i + w_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.10)$$

eşitliği ile tanımlanan sözde uzaklıktır (pseudorange). Burada,

ρ_i : i . uydu ile GPS alıcısı arasındaki sözde uzaklık,

$r_i = \sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2}$, olmak üzere i . uydunun alıcıya olan gerçek uzaklığı,

$\varphi_i = r_i + c\Delta t$ olmak üzere i . uydunun alıcıya olan gürültüsüz sözde uzaklığı,

(X_i, Y_i, Z_i) : i . uydunun koordinatları,

(x, y, z) : GPS alıcısının koordinatları,

Δt : zamanlama hatası

c : ışık hızı (3×10^8 m/s)

w_i : i . uydu için gözlem hataları

dır.

Küresel konum belirleme sistemi ile konum belirlemede karşılaşılan gözlem hatalarının büyük bir kısmı tahmin edilmesi zor atmosferik etkenlerden (İyonosfer hatası, Troposfer hatası) kaynaklanmaktadır (Özçelik 2009, Derelioğlu 2009).

5.3.5 Küresel konumlama sistemi için Durum-uzay modeli

5.3.5.1 GPS alıcısındaki saatin modellenmesi

Bilinmeyen zaman hatası, iki durum değişkeni ile modellenebilir. Bunlar; faz hatasını gösteren saat eğilimi (bias) $b = Dt$ ve frekans hatasını gösteren saat sürüklenmesi (drift) d . Buna göre,

$$\begin{aligned}\dot{b}(t) &= d(t) + \tilde{v}_b(t) \\ \dot{d}(t) &= \tilde{v}_d(t)\end{aligned}\tag{5.11}$$

Burada $\tilde{v}_b(t)$ ve $\tilde{v}_d(t)$, karşılıklı bağımsız, sıfır ortalamalı, sırasıyla S_b ve S_d kovaryans matrisli beyaz gürültü süreçleridir. (5.11) eşitliği ile verilen modelin kesikli hali ise,

$$x_{(k+1)}^c = F_2 x_{(k)}^c + v_{(k)}^c\tag{5.12}$$

dir. Burada $F_2 = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x^c = [b \quad d]'$ ve v_k^c sıfır ortalamalı ve

$$Q^c = S_b T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + S_d V_2\tag{5.13}$$

kovaryans matrisli beyaz gürültü sürecidir. Burada T örnekleme aralığı,

$$V_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}T^3 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^2 & T \end{bmatrix}\tag{5.14}$$

dir (Bar-Shalom vd. 2001).

5.3.5.2 Hareket modeli

Her bir koordinattaki hızı sabit kabul edilebilecek hareket için, kesikli zaman sabit hızlı hareket denklemi

$$\mathbf{x}_{k+1} = F\mathbf{x}_k + w_k$$

eşitliği ile verilir. Durum vektörü $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & \dot{x} & y & \dot{y} & z & \dot{z} & (x^c)' \end{bmatrix}$ 'dır. Burada

- x : cismin x koordinatındaki konumu
- \dot{x} : cismin x koordinatındaki hızı
- y : cismin y koordinatındaki konumu
- \dot{y} : cismin y koordinatındaki hızı
- z : cismin z koordinatındaki konumu
- \dot{z} : cismin z koordinatındaki hızı
- x^c : alıcıya ait saat durum değişkenleri

olmak üzere sekiz durum değişkeni vardır. Ayrıca w_k sıfır ortalamalı beyaz gürültü sürecidir ve sabit hızlı model için w_k gürültü sürecine ait kovaryans matrisi ;

$$Q_k = \begin{bmatrix} Q_x & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & Q_y & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & Q_z & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & Q_c \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

dir. Burada $Q_x = Q_y = Q_z = \begin{bmatrix} S_p \frac{T^3}{3} & S_p \frac{T^2}{2} \\ S_p \frac{T^2}{2} & S_p T \end{bmatrix}$ ve Q_c (5.13) eşitliğinde verildiği gibidir.

Durum geçiş matrisi ise,

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

dir (Brown ve Hwang 1997, Farrell ve Barth 1999).

5.3.5.3 Lineerleştirilmiş gözlem modeli

Küresel konumlama sisteminde uydulardan elde edilen gözlemler (5.10) eşitliğinden de görülebileceği gibi lineer değildir. Her hangi bir k anındaki gözlenebilir n tane uydudan elde edilen gözlemler için lineerleştirilmiş gözlem modeli, (5.10) eşitliğinin $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$ öngörüsü civarında Taylor serisine açılması ile

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_x^{(1)} & 0 & h_y^{(1)} & 0 & h_z^{(1)} & 0 & c & 0 \\ h_x^{(2)} & 0 & h_y^{(2)} & 0 & h_z^{(2)} & 0 & c & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_x^{(n)} & 0 & h_y^{(n)} & 0 & h_z^{(n)} & 0 & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ z \\ \dot{z} \\ x_1^c \\ x_2^c \end{bmatrix} + v \quad (5.17)$$

biçiminde yazılabilir. Burada v sıfır ortalamalı R_k kovaryans matrisli gözlem gürültü süreci,

$$\begin{aligned}
h_x^{(i)} &= \frac{\delta \rho_i}{\delta x} = -\left(X_{(i)} - \hat{x}_{k/k-1}\right) / PR \\
h_y^{(i)} &= \frac{\delta \rho_i}{\delta y} = -\left(Y_{(i)} - \hat{y}_{k/k-1}\right) / PR \\
h_z^{(i)} &= \frac{\delta \rho_i}{\delta z} = -\left(Z_{(i)} - \hat{z}_{k/k-1}\right) / PR
\end{aligned} \tag{5.18}$$

ve

$$PR = \sqrt{\left(X_{(i)} - \hat{x}_{k/k-1}\right)^2 + \left(Y_{(i)} - \hat{y}_{k/k-1}\right)^2 + \left(Z_{(i)} - \hat{z}_{k/k-1}\right)^2} \tag{5.19}$$

dir. Gözlem gürültü sürecine ait kovaryans matrisi ise $R_k = \text{diag}[\sigma_\rho^2, \sigma_\rho^2, \dots, \sigma_\rho^2]$ olarak düşünülebilir (Farrell ve Barth 1999, Cooper ve Durrant-Whyte 1994).

5.3.6 Küresel konumlama sistemi ile anlık konum belirleme için simülasyon çalışması

Simülasyon çalışması için aracın hareket senaryosu:

Aracın başlangıçta (0,0,0) konumunda bulunduğu ve her koordinattaki hızının ve ivmesinin sıfır olduğu varsayılmıştır.

- i) Araç ilk 100 saniye sadece X koordinatında 30 m/s sabit hız ile hareket etmektedir
- ii) 100. saniye ile 200. saniye arasında X koordinatında -5 m/s² ivme ile ve Z koordinatında ise 5 m/s² ivme ile hareket etmektedir.
- iii) 200. saniyeden itibaren ise X koordinatındaki ivmesi -5 m/s² ve Z koordinatındaki hızı ve ivmesi sıfır, Y koordinatındaki hızı 5 m/s, ivmesi ise 5 m/s²

olacak şekilde hareket etmektedir. Simülasyon çalışmasında GPS uydularının konumunun sabit olduğu varsayılmış ve (X,Y,Z) koordinat sistemindeki konumları:

1. uydu için (19000000,1700000,15000000)
2. uydu için (10000000,1700000,15000000)

3. uydu için (15000000,1900000,10000000)
4. uydu için (19000000,1700000,10000000)

olarak alınmıştır.

Çalışma boyunca zaman hatası göz ardı edilmiştir. Bu nedenle filtre tahminleri sadece 3 uydu kullanılarak yapılmış, zaman hatası ise sisteme rasgele gürültü olarak eklenmiştir. çizelge 5.8 de verilen başlangıç değerleri kullanılarak, incelenen uyarlı filtreler ile birlikte kısım 3.7 de önerilen uyarlı filtre çalıştırılmış ve sonuçlar şekil 5.35 – 5.44’de verilmiştir.

Çizelge 5.8 Filtrelerin çalıştırılmasında kullanılacak başlangıç değerleri

Başlangıç durum tahmini	$[0 \ 30 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
Süreç Gürültüsü	$\sim N(0, 0.0001 \times I_8)$
Gözlem Gürültüsü	$\sim N(0, 0.001 \times I_3)$

Simülasyon çalışması boyunca verilen şekillerde ifade edilen

KF: İlerletilmiş Kalman Filtresi,

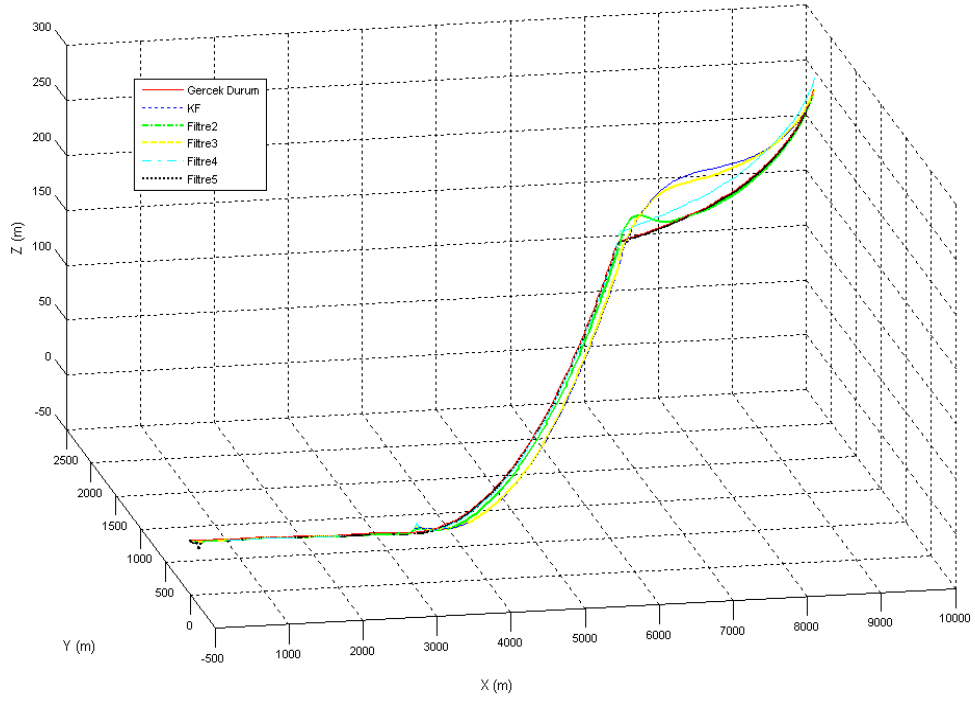
Filtre 2: Jwo ve Weng (2008) tarafından önerilen,

Filtre 3: Ding vd. (2007) tarafından önerilen,

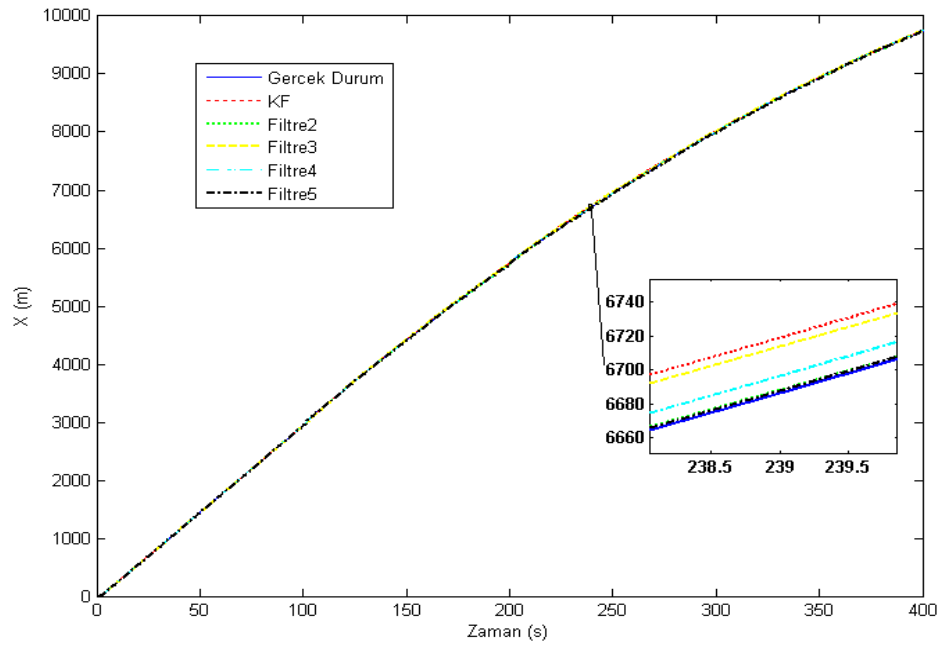
Filtre 4: Geng ve Wang (2008) tarafından önerilen,

Filtre 5: Kısım 3.7 de önerilen yeni uyarlı filtre

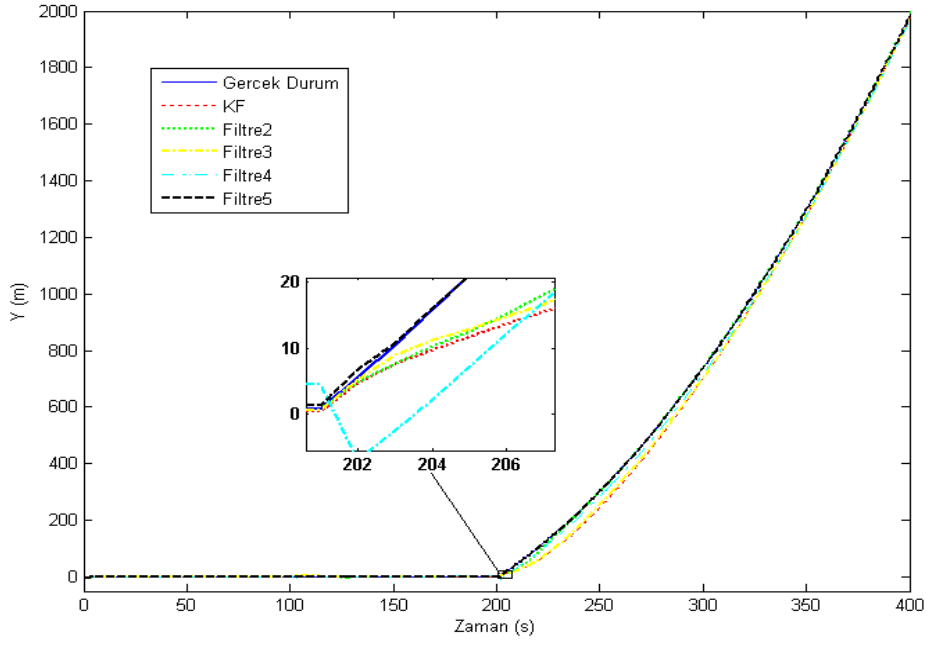
dir.



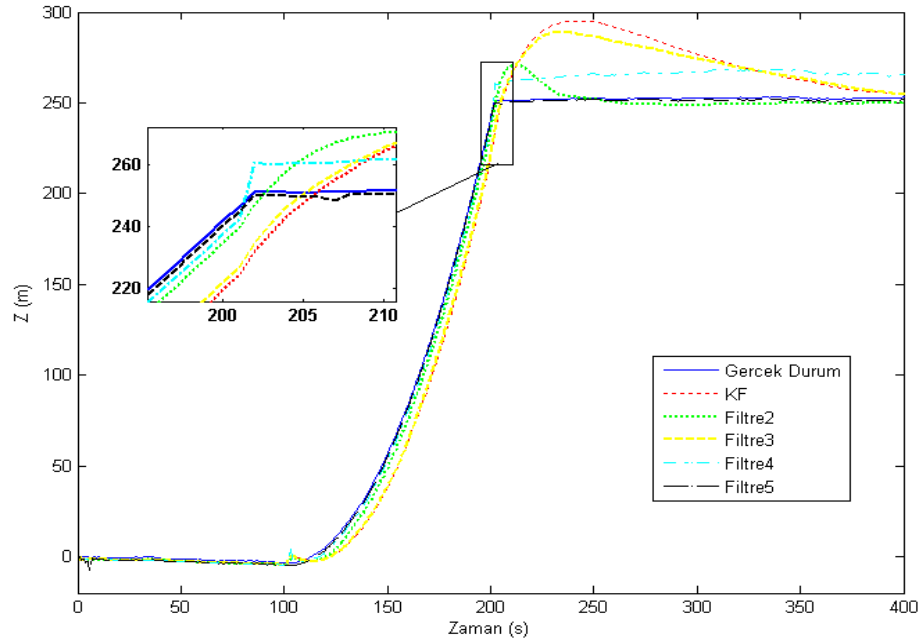
Şekil 5.35 Aracın 3 boyutlu koordinat sistemindeki hareketi ve filtrelerin konum tahminleri



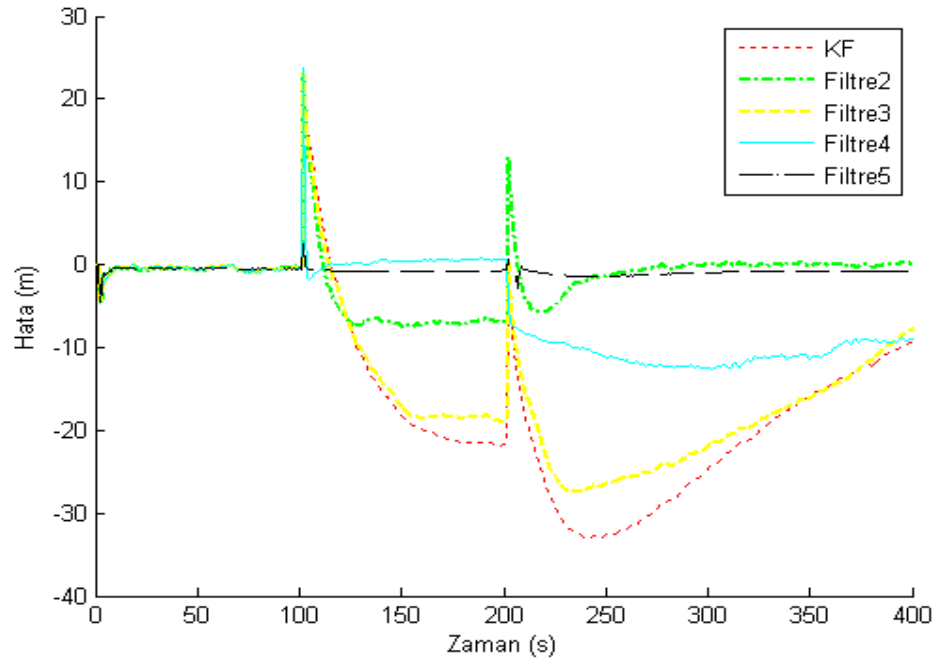
Şekil 5.36 Aracın X koordinatındaki hareketi ve filtrelerin konum tahminleri



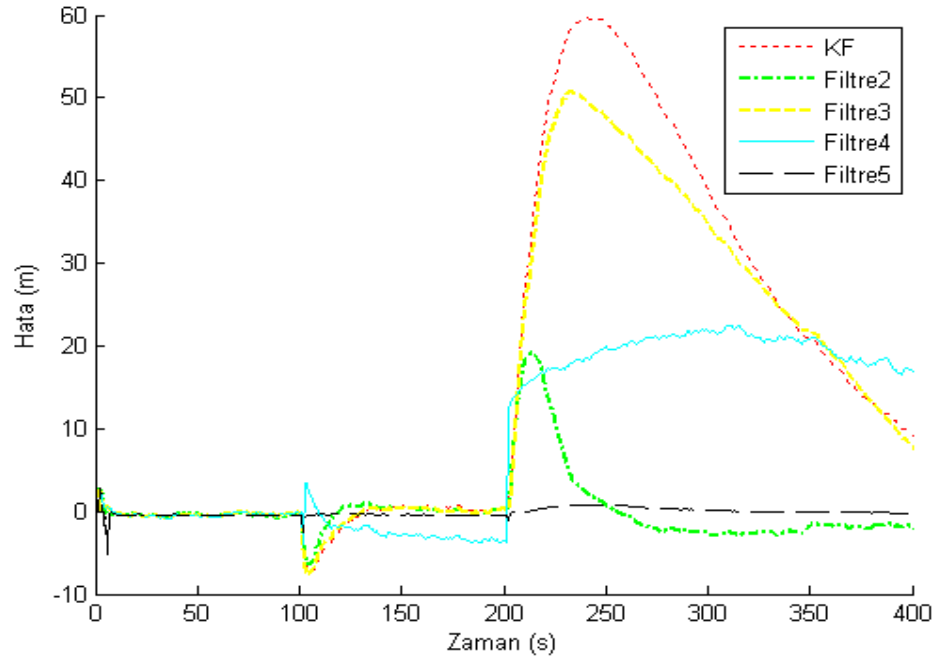
Şekil 5.37 Aracın Y koordinatındaki hareketi ve filtrelerin konum tahminleri



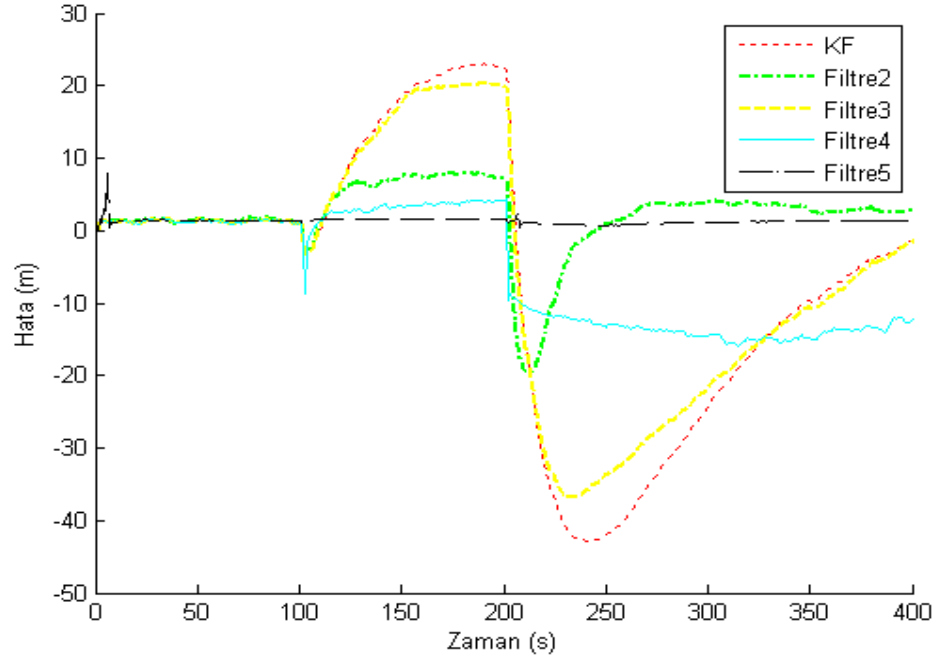
Şekil 5.38 Aracın Z koordinatındaki hareketi ve filtrelerin konum tahminleri



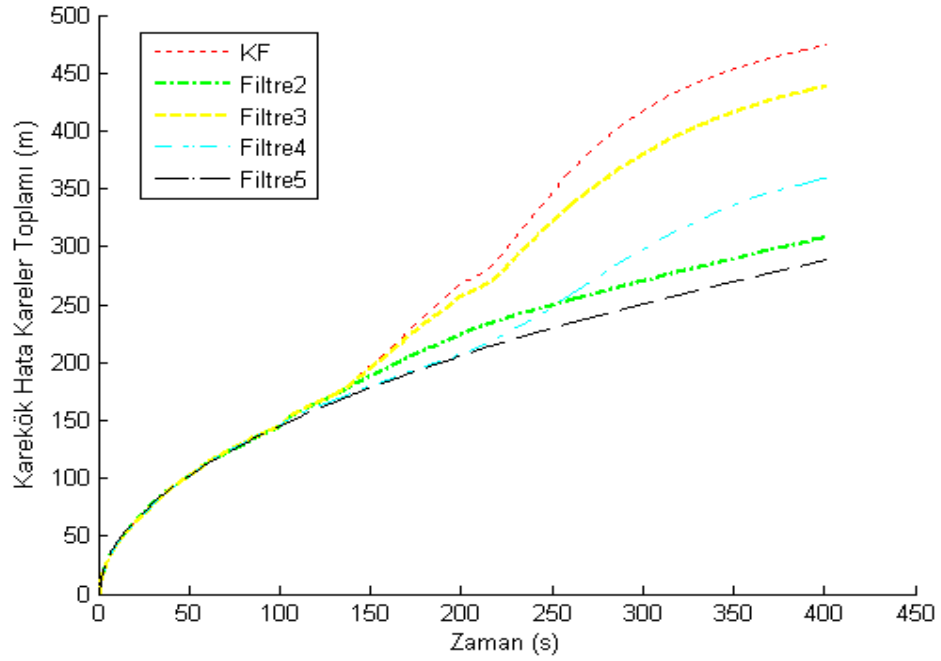
Şekil 5.39 Filtreler tarafından X koordinatında yapılan tahmin hatası



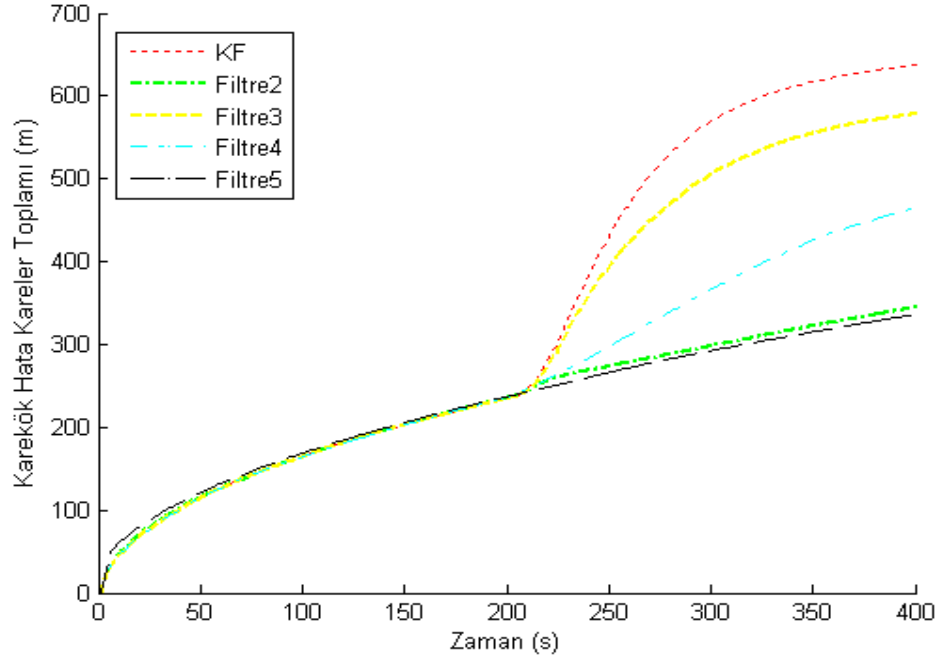
Şekil 5.40 Filtreler tarafından Y koordinatında yapılan tahmin hatası



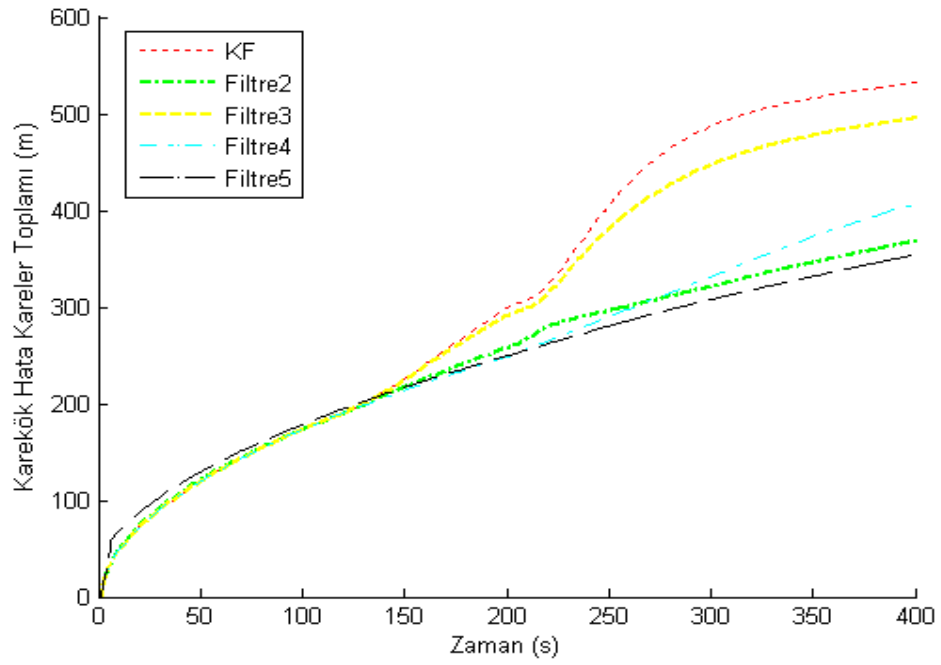
Şekil 5.41 Filtreler tarafından Z koordinatında yapılan tahmin hatası



Şekil 5.42 X koordinatında yapılan konum tahmin hatasına ait karekök hata kareler toplamı



Şekil 5.43 Y koordinatında yapılan konum tahmin hatasına ait karekök hata kareler toplamı



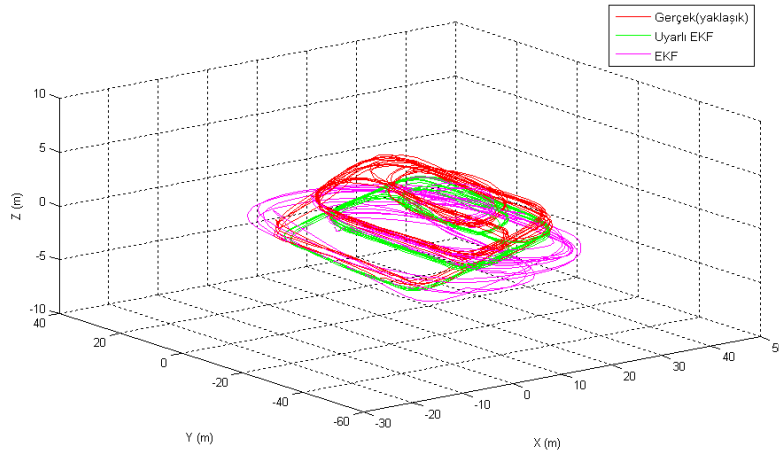
Şekil 5.44 Z koordinatında yapılan konum tahmin hatasına ait karekök hata kareler toplamı

Yapılan simülasyon çalışması sonuçlarına göre bölüm 3.7’de önerilen yeni uyarlı filtrenin pozisyon tahmin performansının İlerletilmiş Kalman Filtresinden ve şu ana kadar önerilen diğer filtrelerden daha iyi olduğu söylenebilir.

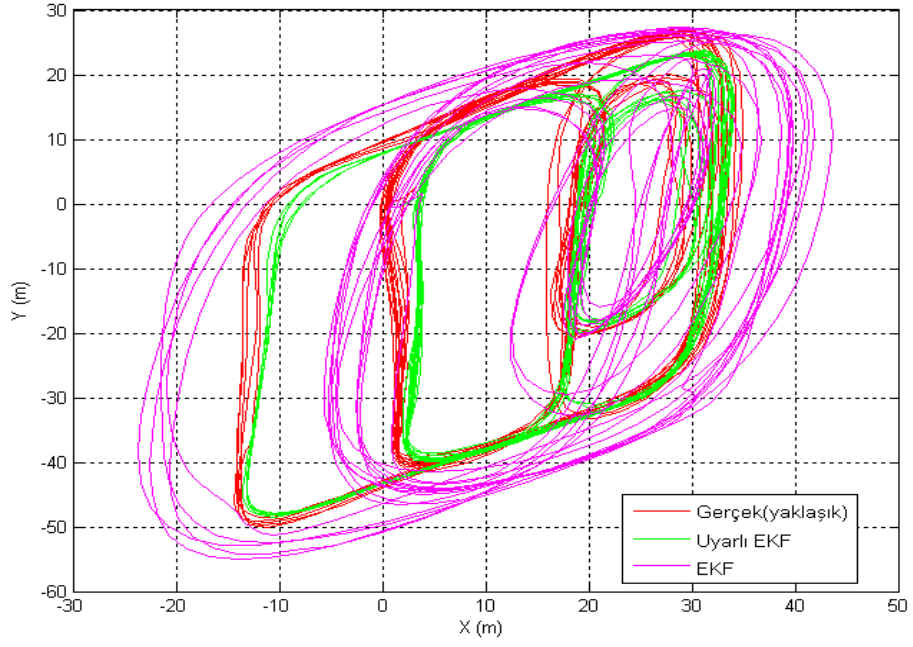
5.3.7 Küresel konumlama sistemi ile navigasyon için uygulama çalışması

Uygulama çalışmasında kullanılacak veriler bir kara taşıtına monte edilen Leica 500 GPS alıcısı kullanılarak 2010 yılında Prof. Dr. Jinling Wang (School of Surveying and Spatial Information Systems, University of New South Wales, Sydney) tarafından kaydedilmiştir. Veriler 1 Hz aralıklarla kaydedilmiş C/A kod, P-kod sözde uzaklıklar, L1 ve L2 taşıyıcı faz ve dopler ölçümleridir.

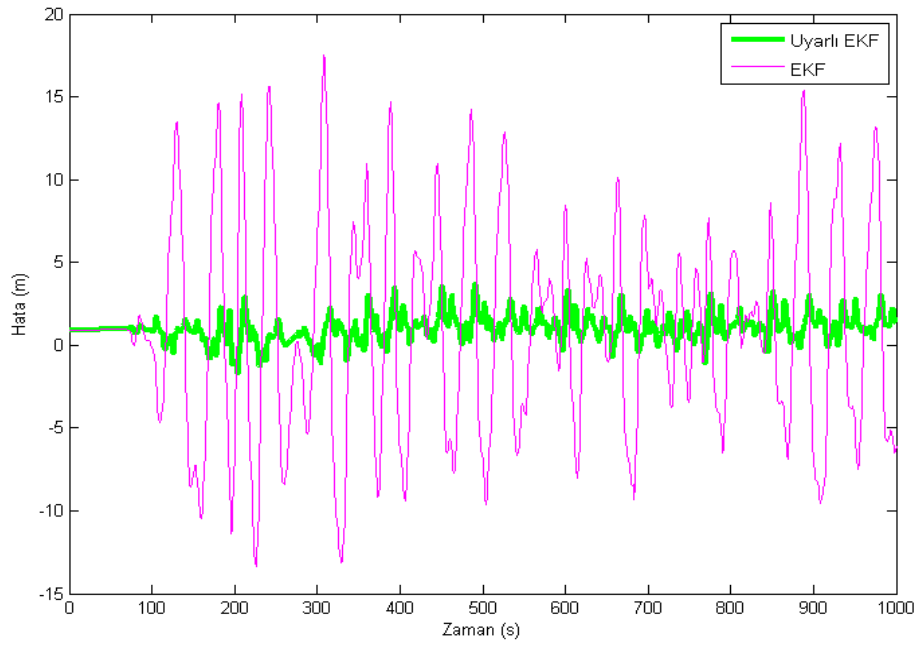
Elde edilen verilerden kod GPS ölçümlerine İlerletilmiş Kalman Filtresi ve kısım 3.7’de önerilen uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi uygulanarak tahminler elde edilmiştir. Tahmin aşamasında gözlem gürültü sürecine ait kovaryans matrisi; S , k anındaki görünür uydu sayısı olmak üzere, sırasıyla $Q_k = 0.01 \times I_8$ ve $Q_k = 0.1 \times I_8$ olarak alınmıştır. Gözlem gürültü sürecine ait kovaryans matrisi ise $R_k = 0.03 \times I_s$ olarak alınmıştır. Elde edilen tahminler yüksek doğrulukta pozisyon tahmini sağlayan diferansiyel GPS ölçümlerine göre karşılaştırılmış ve sonuçlar şekil 5.45 – 5.60 da verildiği gibi elde edilmiştir.



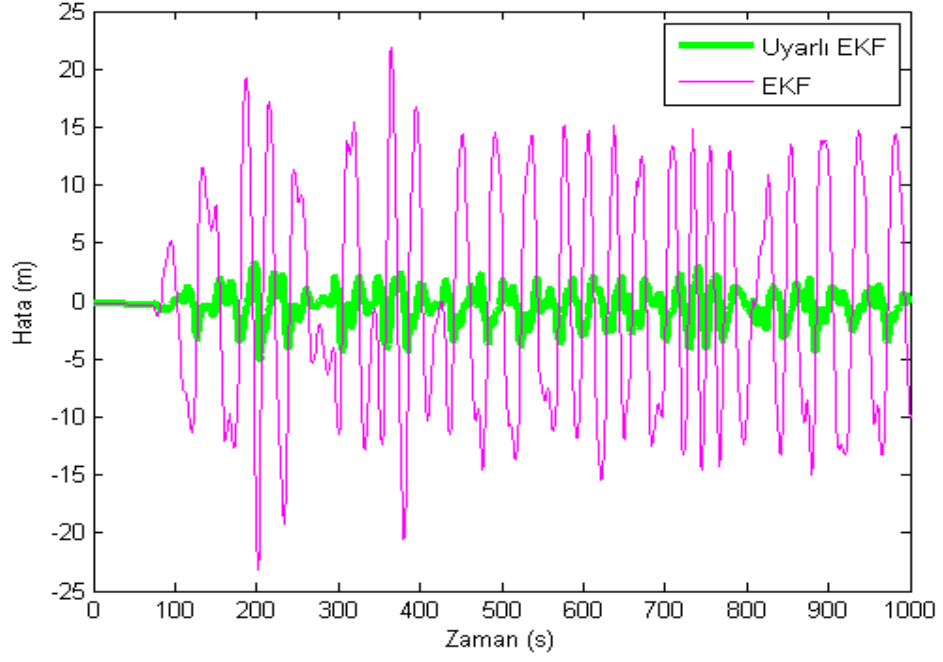
Şekil 5.45 Aracın 3 boyutlu koordinat sistemindeki hareketi ve filtrelerin konum tahminleri ($Q_k = 0.01 \times I_8$)



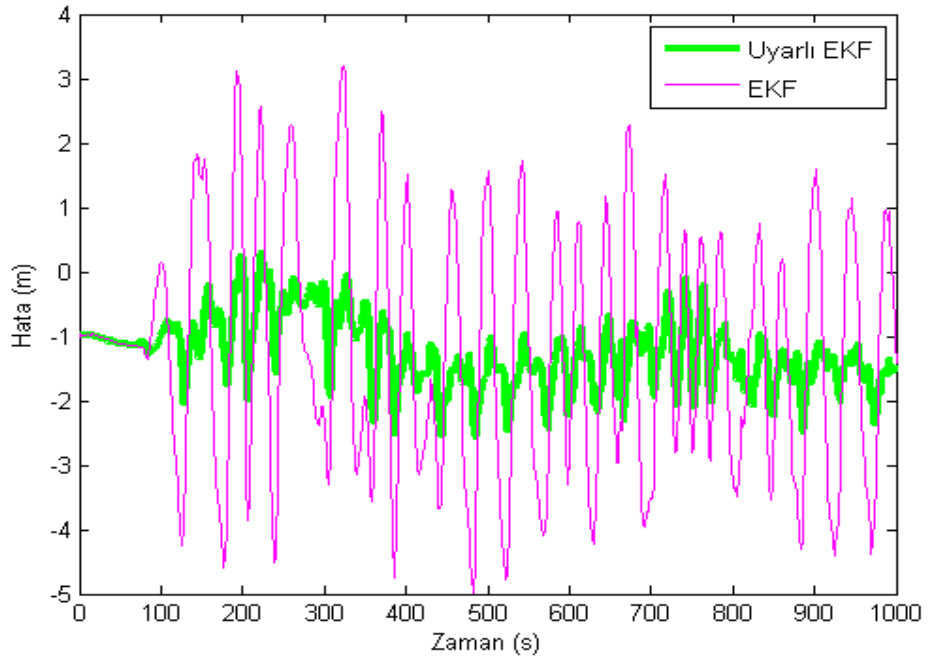
Şekil 5.46 Aracın X-Y koordinat sistemindeki hareketi ve filtrelerin konum tahminleri
 $(Q_k = 0.01 \times I_8)$



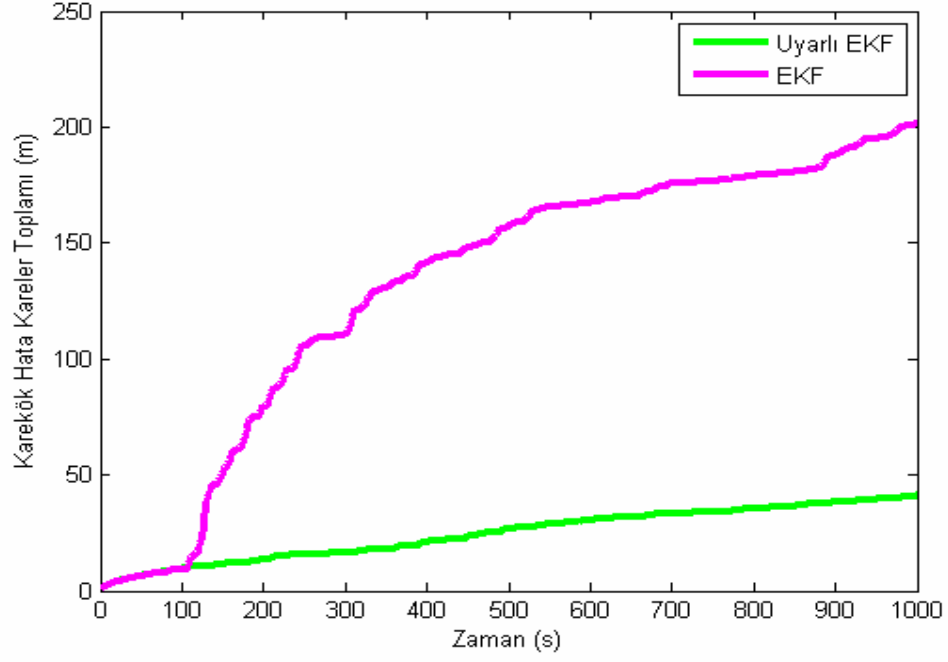
Şekil 5.47 Filtrelerin X koordinatında yaptıkları tahmin hataları $(Q_k = 0.01 \times I_8)$



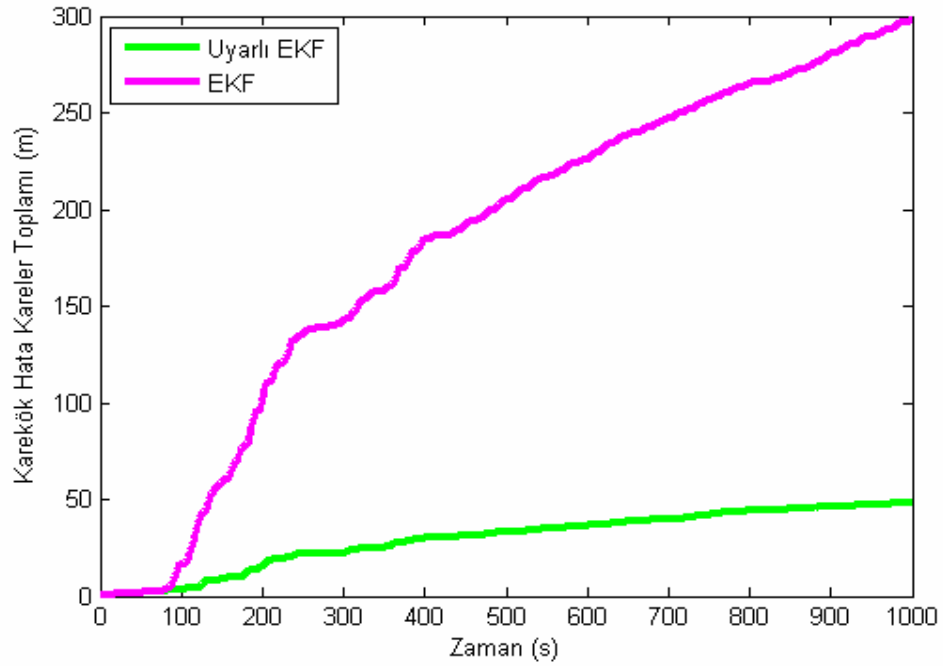
Şekil 5.48 Filtrelerin Y koordinatında yaptıkları tahmin hataları ($Q_k = 0.01 \times I_8$)



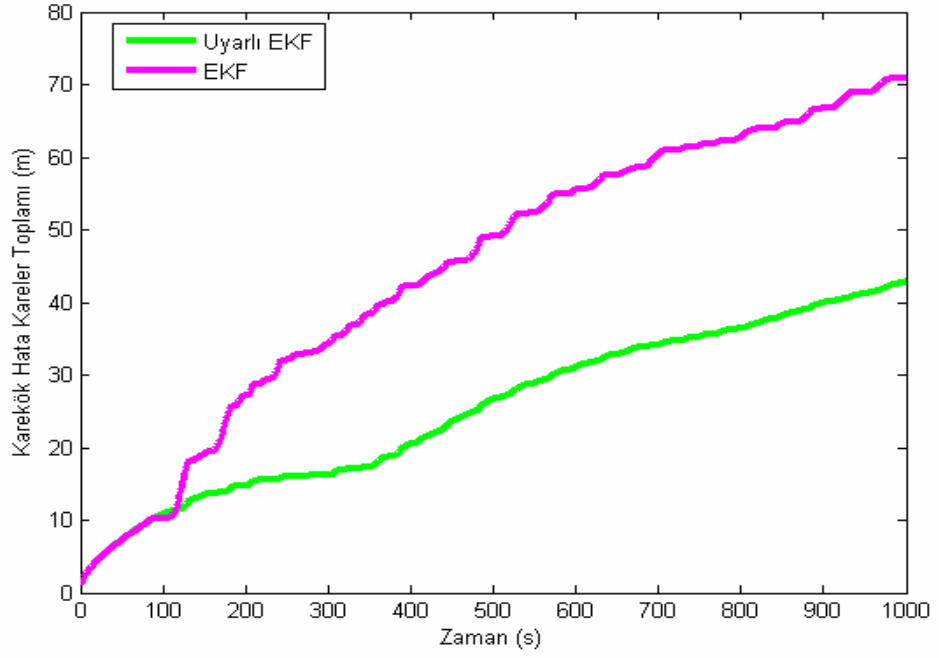
Şekil 5.49 Filtrelerin Z koordinatında yaptıkları tahmin hataları ($Q_k = 0.01 \times I_8$)



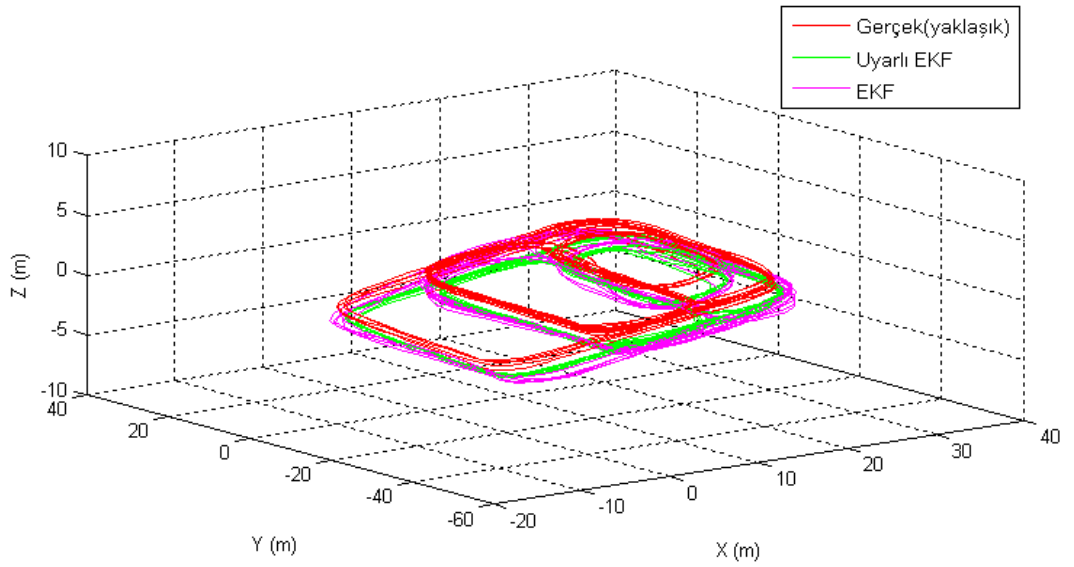
Şekil 5.50 Filtrelerin X koordinatında yaptıkları tahmin hatalarına ait karekök hata kareler toplamları ($Q_k = 0.01 \times I_8$)



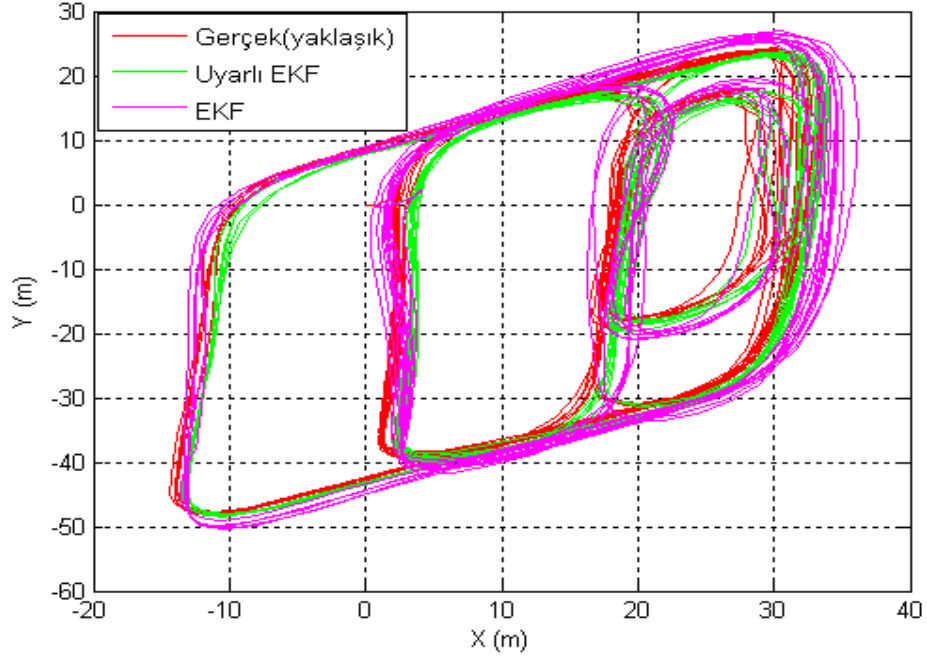
Şekil 5.51 Filtrelerin Y koordinatında yaptıkları tahmin hatalarına ait kare kök hata kareler toplamları ($Q_k = 0.01 \times I_8$)



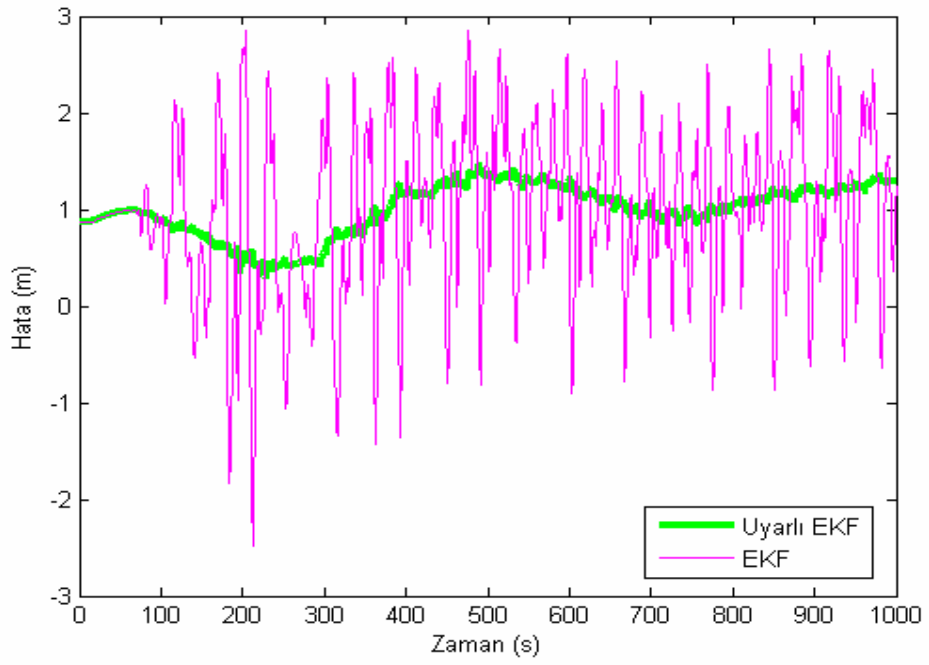
Şekil 5.52 Filtrelerin Z koordinatında yaptıkları tahmin hatalarına ait karekök hata kareler toplamları ($Q_k = 0.01 \times I_8$)



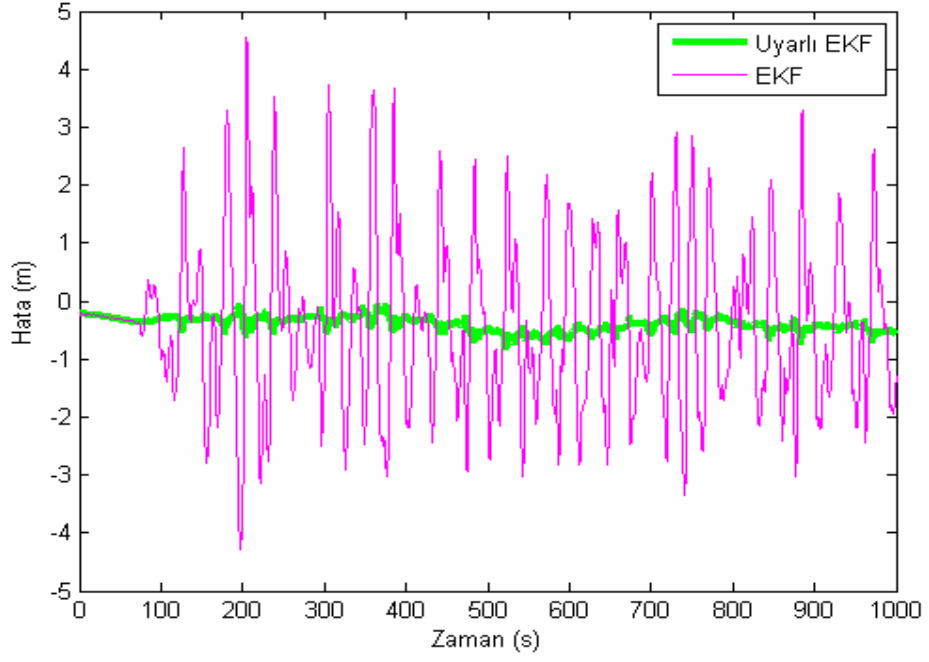
Şekil 5.53 Aracın 3 boyutlu koordinat sistemindeki hareketi ve filtrelerin konum tahminleri ($Q_k = 0.1 \times I_8$)



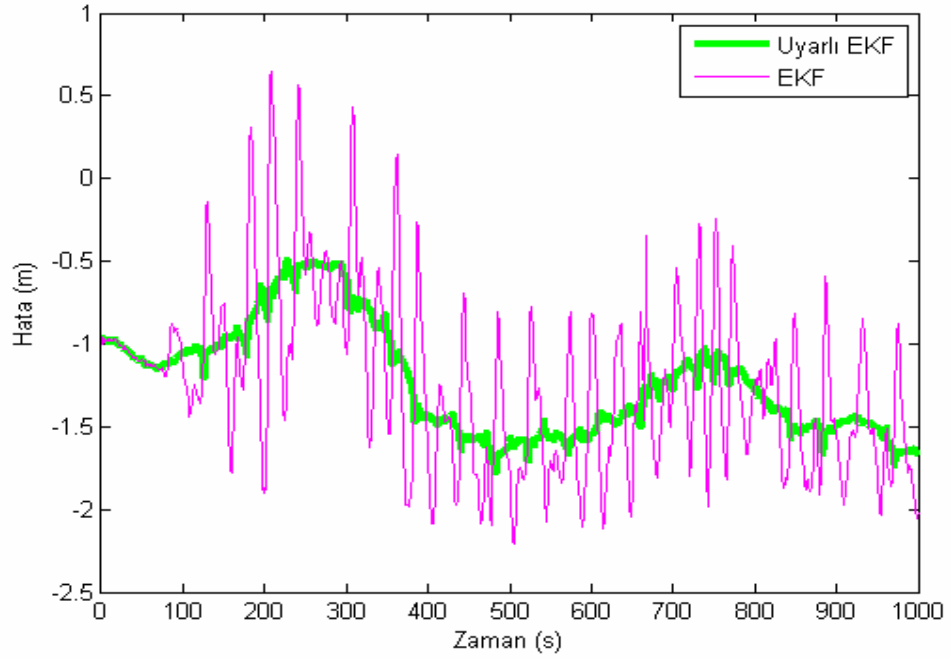
Şekil 5.54 Aracın X-Y koordinat sistemindeki hareketi ve filtrelerin konum tahminleri ($Q_k = 0.1 \times I_8$)



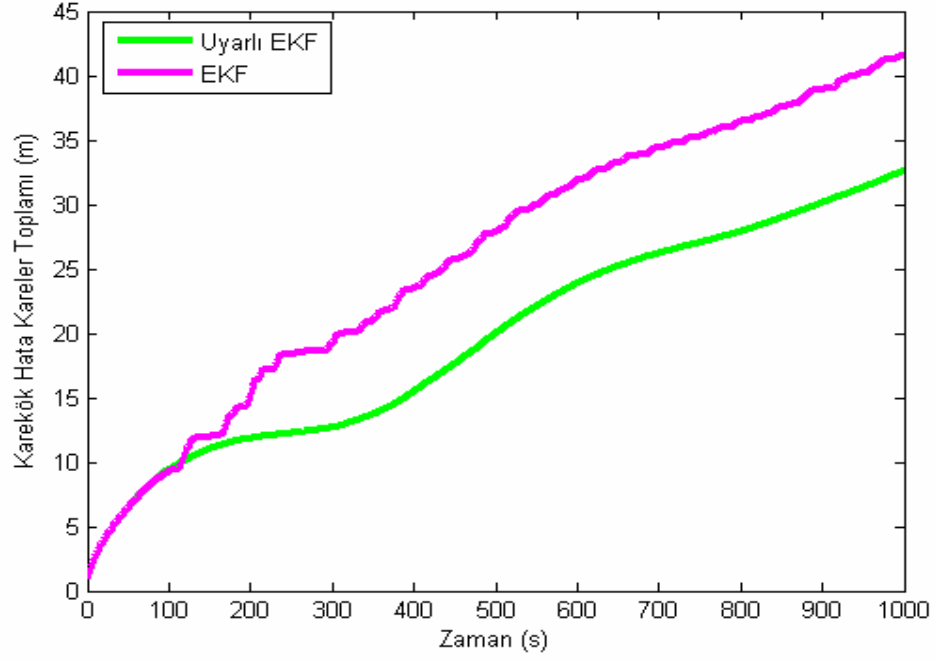
Şekil 5.55 Filtrelerin X koordinatında yaptıkları tahmin hataları ($Q_k = 0.1 \times I_8$)



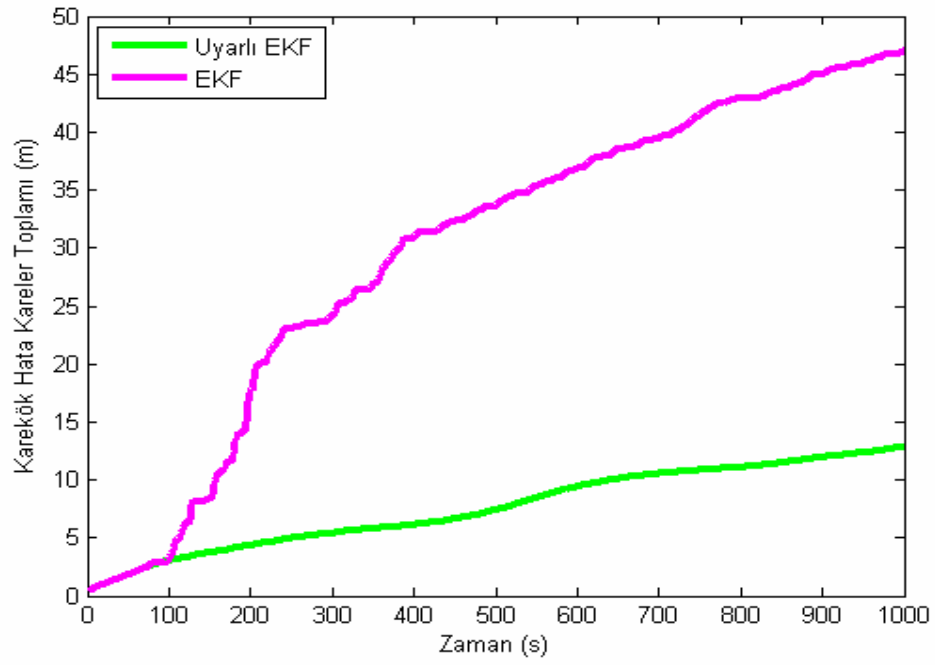
Şekil 5.56 Filtrelerin Y koordinatında yaptıkları tahmin hataları ($Q_k = 0.1 \times I_8$)



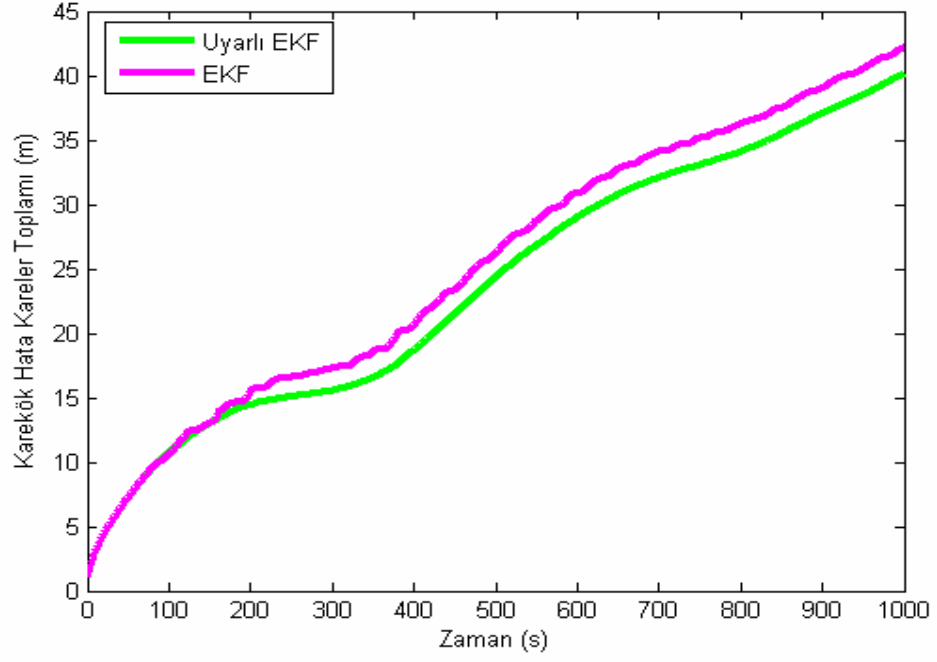
Şekil 5.57 Filtrelerin Z koordinatında yaptıkları tahmin hataları ($Q_k = 0.1 \times I_8$)



Şekil 5.58 Filtrelerin X koordinatında yaptıkları tahmin hatalarına ait karekök hata kareler toplamları ($Q_k = 0.1 \times I_8$)



Şekil 5.59 Filtrelerin Y koordinatında yaptıkları tahmin hatalarına ait karekök hata kareler toplamları ($Q_k = 0.1 \times I_8$)



Şekil 5.60 Filtrelerin Z koordinatında yaptıkları tahmin hatalarına ait karekök hata kareler toplamları ($Q_k = 0.1 \times I_8$)

Yapılan uygulama çalışması sonuçlarına göre bölüm 3.7’de önerilen yeni uyarlı filtrenin pozisyon tahmin performansının İlerletilmiş Kalman Filtresine göre daha iyi olduğu söylenebilir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada lineer kesikli zaman durum-uzay modeli ve Kalman Filtresi ile lineer olmayan kesikli zaman durum-uzay modeli ve İlerletilmiş Kalman Filtresine yer verilmiştir.

Başlangıç tahminlerinde veya modelleme aşamasında olabilecek hatalardan dolayı Kalman Filtresi tahminlerinde gerçekleşebilecek ıraksama probleminin giderilmesi ve filtre performansının artırılabilmesi için önerilen Kalman Filtresinin uyarlama yöntemleri incelenmiştir. Bunun yanı sıra Kalman Filtresinin uyarlanabilmesi için yeni yöntemler önerilmiştir.

Lineer olmayan kesikli zaman deterministik durum-uzay modellerinde İlerletilmiş Kalman Filtresinin yakınsama problemi ele alınmış, Reif ve Unbehauen (1999) ve Babacan (2009)'da İlerletilmiş Kalman Filtresi algoritmasında verilen hata kovaryansı yerine kısım 3.2'de önerilen matris unutmama faktörü ile Kalman Filtresinin uyarlanması için önerilen hata kovaryansının alınmasıyla yakınsama hızının arttığı gösterilmiştir. Ayrıca kısım 3.7'de önerilen uyarlı filtrenin kullanılması durumunda uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresinin yakınsama problemi kesikli zaman deterministik durum-uzay modeli çerçevesinde ele alınmış ve filtre tahminlerinin gerçek durumlara yakınsadığı Bautayeb vd. (1997)' de verilen yöntem kullanılarak gösterilmiştir.

Lineer olmayan kesikli zaman stokastik durum-uzay modelleri için İlerletilmiş Kalman Filtresinin üstel gözlemci olması ile ilgili bilgi verilmiştir. Bu bilgi kullanılarak, lineer olmayan stokastik durum-uzay modelleri için, önerilen hem matris uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresinin, hem de kısım 3.7'de önerilen uyarlı İlerletilmiş Kalman filtresinin yakınsaması incelenmiş ve uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtrelerinin üstel gözlemci oldukları gösterilmiştir.

Çalışmanın son bölümü önerilen uyarlama yöntemlerinin başarımlarını ortaya koymak için simülasyon ve uygulama çalışmasına ayrılmıştır. İlk çalışmada, tıp alanında yaygın bir uygulama alanına sahip olan kompartman modeli kullanılmıştır. Simülasyon

çalışması İlerletilmiş Kalman Filtresi kullanılarak, sindirim sistemine verilen bir ilacın sindirim sisteminden kan dolaşım sistemine geçişini modelleyen kompartman modeli üzerinde yapılmıştır. İkinci çalışma etkileşimli iki tür canlı için büyüme modeli olarak bilinen Lotka-Volterra modeli üzerinde yapılmıştır. Üçüncü çalışma ise son yıllarda hem askeri hem de sivil alanlarda oldukça yaygın olarak kullanılan Küresel Konumlama sistemi üzerinde yapılmıştır. Kalman Filtresinin çeşitli sebeplerden kaynaklanan ırsama problemini gidermek için önerilen yeni uyarlama yöntemlerinin, İlerletilmiş Kalman Filtresine ve diğer uyarlama yöntemlerine göre tahmin hatasını azalttığı yapılan çalışmalarla gözlenmiştir.

KAYNAKLAR

- Aliev, F.A. and Özbek L. 1999. Evaluation of convergence rate in the central limit theorem for the kalman filter. IEEE Trans. Auto.Control, Vol. 44:10, pp. 1905-1909.
- Anderson, B.D.O. and Moore, J.B. 1979. Optimal Filtering. Prentice Hall, USA.
- Agniel, R.G. and Jury, E.I. 1971. Almost Sure Boundedness of Randomly Sampled Systems. SIAM J. Contr., Vol. 9, pp. 372–384
- Babacan, E.K. 2009. Kısıtlı durum Kalman Filtresi ve Bazı Uygulamaları. Ankara Üniversitesi Fenbilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 162 sayfa, Ankara.
- Babacan, E.K., Özbek, L. and Efe, M. 2008. Stability of the Extended Kalman Filter When the States are Constrained. IEEE Transactions On Automatic Control Vol. 53:11, pp. 2707-2711.
- Bar-Shalom, Y., Li, X.R. and Kirubarajan, T. 2001. Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory Algorithms and Software. John Wiley & Sons Inc., USA.
- Boutayeb, M., Rafaralahy, H. and Darouach, M. 1997. Convergence Analysis of the Extended Kalman Filter Used as an Observer for Nonlinear Deterministic Discrete-Time Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 42:4, pp. 581–586.
- Boutayeb, M., Rafaralahy, H. and Darouach, M. 1999. A strong tracking extended Kalman observer for nonlinear discrete-time systems. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44: 8, pp. 1550–1556.

- Brown, R.G. and Hwang, P.Y.C. 1997. Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering. John Willey & Sons, New York.
- Chen, G. 1993. Approximate Kalman Filtering. World Scientific, USA.
- Cooper, S. and Durrant-Whyte, H. 1994. A Kalman Filter Model for GPS Navigation of Land Vehicles. 1994 IEEE Int. Conf. on Intelligent Robot and Systems pp. 157–163.
- Davis, M.H.A. and Vinter, R.B. 1985. Stochastic Modeling and Control. Chapman and Hall., USA.
- Derelioğlu, B. 2009. Gps Nedir?, www.elektronikmagazin.com, Erişim Tarihi: 06/05/2010.
- Ding, W., Wang, J. and Rizos, C. 2006. Improving Adaptive Kalman Estimation in GPS/INS Integration. The Journal of Navigation, Vol. 60, pp. 517–529
- Fagin, S.L. 1964. Recursive Linear Regression Theory, Optimal Filter Theory and Error Analysis Optimal Systems IEEE int. Conv. Rec., Vol. 12, pp. 216–240.
- Farrell, J. and Barth, M. 1999. The Global Positioning System and Inertial Navigation. McGraw-Hill Professional, USA.
- Fitzgerald, R.J. 1971. Divergence Of The Kalman Filter. IEEE Trans. Auto. Control. Vol. AC-16, pp. 736–747.
- Geng, Y. and Wang, J. 2008. Adaptive estimation of multiple fading factors in Kalman filter for navigation applications. GPS Solution, Vol. 12, pp. 273–279.
- Golub, G. H. and Loan, C.F.V. 1989. Matrix Computations 2nd edition. The John Hopkins University Press, Baltimore.

- Grewal, S. and Andrews, A.P. 2008. Kalman Filtering Theory and Practice Using Matlab. John Wiley & Sons Inc. USA.
- Gustafsson, F. 1992. Estimation Of Discrete Parameter In Linear Systems. Ph.D. Thesis. Department Of Electrical Engineering, Linkoping University, Sweden.
- Hendrix, E.M.T. and Toth, B.G. 2010. Introduction to Nonlinear and Global Optimization. Springer Science+Business Media, USA.
- Jazwinski, A.H. 1970. Stochastic Processes and Filtering Theory. Academic Press, Inc., 376 pages, New York.
- Jwo, D. and Weng, T. 2008. An Adaptive Sensor Fusion Method with Applications in Integrated Navigation. The Journal of Navigation, Vol. 61, pp. 705–721.
- Kalman, R.E. 1960. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. Journal of Basic Engineering, Vol. 82, pp. 35–45.
- Kim, K.H., Lee, J.G. and Park, C.G. 2006. Adaptive Two Stage Kalman Filter in the Presence of Unknown Random Bias. Int. J. Adapt. Control Signal Process, Vol. 20, pp. 305–319.
- Kim, K.H., Lee, J.G., Park, C.G. and Jee, G.I. 2007. The Stability Analysis of the Adaptive Fading Extended Kalman Filter. 16th IEEE International Conference on Control, 1–3 October 2007, Singapore.
- Kim, K.H., Jee, G.I., Park, C.G. and Lee, J.G. 2009. The Stability Analysis of the Adaptive Fading Extended Kalman Filter Using the Innovation Covariance. International Journal of Control, Automation and Systems, Vol. 7:1, pp. 49–56.
- Lakshmikantham, V. and Trigiante, D. 1988. Theory of Difference Equations Numerical Methods and Applications. Academic Press, Inc., London.

- Lewis, F.L. 1986. Optimal Estimation. John Wiley & Sons Inc, New York.
- Mehra, R.K. 1972. Approaches to Adaptive Filtering. IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-17, pp. 693–698.
- Mohamed, A.H. and Schwarz, K.P. 1999. Adaptive Kalman Filtering for INS/GPS. Journal of Geodesy, Vol. 73, pp. 193–203
- Özbek, L. 1998. Kesikli Zaman Durum-Uzay Modelleri ve İndirgemeli Tahmin ve Yakınsama Problemleri. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara.
- Özbek, L. 2000a. Durum-Uzay Modelleri ve Kalman Filtresi. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, Vol. 13:1, pp. 113–126.
- Özbek, L. 2000b. Uyarlı Kalman Filtresi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, Vol. 13:2, pp. 369–380.
- Özbek, L. and Aliev, F.A. 1998. Comments on “Adaptive Fading Kalman Filter with an Applications”, Automatica, Vol. 34:12, pp. 1163–1164.
- Özbek, L., Babacan, E.K. and Efe, M. 2010. Stochastic stability of the discrete-time constrained extended Kalman filter. Turk J Elec Eng & Comp Sci, Vol.18:2, pp. 211–223.
- Özbek, L. and Efe, M. 2004. An Adaptive Extended Kalman Filter with Application to Compartment Models. Communication in Statistics, Simulation and Computation, Vol. 3, pp. 145–158.
- Özbek, L., Öztürk, F. and Aliev, F. 1996. Kalman Filtresinde Kayıpları Önlemek İçin Bir Yöntem. Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı, İstanbul, Boğaziçi Üniversitesi Yayını, No: 588, sayfa 31–38.

- Özçelik, A.E. 2009. Kalman Filtreleme Yöntemi Kullanılarak Gps/Ins Veri Entegrasyonu. Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Kayseri.
- Öztürk, F. ve Özbek, L. 2004. Matematiksel Modelleme ve Simülasyon, Gazi Kitabevi, Ankara.
- Reif, K., Günther, S., Yaz, E. and Unbehauen, R. 1996. Modification of the Extended Kalman Filter with an Additive Term of Instability. in Proc. 35 th IEEE Conf. Dec. Contr., pp. 4058–4059.
- Reif, K., Günther, S., Yaz, E. and Unbehauen, R. 1997. An Observer for Nonlinear Systems Based on H_{∞} - Filtering Techniques, in Proc. American Control Conf. pp. 2379–2380.
- Reif, K. and Unbehauen, R. 1999. The Extended Kalman Filter as an Exponential Observer for Nonlinear Systems. IEEE Trans. Signal Processing, Vol. 47:8, pp. 2324–2328.
- Reif, K., Günther, S., Yaz, E. and Unbehauen, R. 1999. Stochastic Stability of the Discrete-Time Extended Kalman Filter. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44:4, pp. 714–728.
- Rogers, G.S. 1980. Matrix Derivatives, Lecture Notes in Statistics, Vol. 2, Marcel Dekker, New York.
- Saab, S.S. and Nasr, G.E. 1999. Sensitivity of Discrete-Time Kalman Filter to Statistical Modeling Errors. Optimum Control Application Methods, Vol. 20, pp. 249–259.
- Tarn, T.J. and Rasis, Y. 1976. Observers for Nonlinear Stochastic Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-21, pp. 441–448.

- Weixi, G., Lingjuan, M. and Maolin, N. 2011. Multiple Fading Factors Kalman Filter for SINS Static Alignment Application. Chinese Journal of Aeronautics, Vol. 24, pp. 476–483.
- Xia, Q., Rao, M., Ying, Y. and Shen X., 1994. Adaptive Fading Kalman Filter with an Application, Automatica, Vol. 30:8, pp.1333–1338.
- Yang, J.N., Lin, S., Huang, H. and Zhou, L. 2006. An Adaptive Extended Kalman Filter for Structural Damage Identification. Struct. Control and Health Monit., Vol. 13, pp.849–867.
- Yang, J.N., Pan, S. and Huang, H. 2007. An Adaptive Extended Kalman Filter for Structural Damage Identification II: Unknown Inputs. Struct. Control and Health Monit., Vol. 14, pp. 497–521.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Cenker BİÇER

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 30/01/1977

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Kırıkkale Lisesi (1994)

Lisans : On Dokuz Mayıs Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü (2000)

Yüksek Lisans : Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı (2006)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Kırıkkale Üniversitesi İstatistik Bölümü Araştırma Görevlisi (2001–2006)

Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü Araştırma Görevlisi (2006–2011)

Yayınları (SCI ve diğer)

1. Açıkgöz İ., **Biçer, C.** ve Öztürk, F. 2007. Gamma Dağılımlarının Karmalarında Parametre Tahmini. 5. İstatistik Kongresi. Antalya
2. **Biçer, C.** ve Öztürk, F. 2008. İki Bileşenli Karma Normal Dağılımlarda Momentler Yöntemiyle Parametre Tahmini. 6. İstatistik Günleri Sempozyumu. Samsun.
3. Başkır, M. B., **Biçer, C.** ve Öztürk, F. 2010. İstatistik Laboratuvarı-II. Ankara.
4. **Biçer, C.** ve Köksal Babacan, E. 2011. Kesintili Gözlemler İle Uyarlı Kalman Filtresi, Uluslararası 7. İstatistik Kongresi. Antalya.
5. Köksal Babacan, E. ve **Biçer, C.** 2011, Uyarlı İki Aşamalı Kalman Filtresi, Uluslararası 7. İstatistik Kongresi. Antalya.
6. **Biçer, C.**, Özbek, L. ve Köksal Babacan, E. 2011. Uyarlı Kalman Filtresi İle Gps Tabanlı Navigasyon, Uluslararası 7. İstatistik Kongresi. Antalya.

7. Köksal Babacan, E., Özbek, L. ve **Biçer, C.** 2011. Uyarlı Kokusuz Kalman Filtresi, Uluslararası 7. İstatistik Kongresi. Antalya.
8. Başkır, M. B., **Biçer, C.** ve Öztürk, F. 2011. İstatistik Laboratuvarı-I. Ankara.
9. Demirci Biçer, H., Atakan, C. ve **Biçer C.** 2010. İki Parametrelili Weibull Dağılımına Sahip Kitlelerde Diskriminant Analizi, 6-4, NWSA.
10. **Biçer, C.**, Köksal Babacan, E. ve Özbek, L. (Yayın aşamasında, DOI: 10, 3906/elk-1008-673) Stability of the Adaptive Fading Extended Kalman Filter with the Matrix Forgetting Factor, Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences (SCI).