YARI DOĞRUSAL LEVHA DENKLEMİNİN UZUN ZAMAN DİNAMİĞİ

LONG-TIME DYNAMICS OF SEMILINEAR PLATE EQUATION

SEMA YAYLA

PROF. DR. AZER HANMEHMETLİ
TEZ DANIŞMANI

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Ögretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
DOKTORA TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2016

SEMA YAYLA'nın hazırladığı "**Yarı Doğrusal Levha Denklemlerinin Uzun Zaman Dinamiği**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Meryem KAYA
Başkan ....

Prof. Dr. Azer HANMEHMETLİ
Danışman ....

Doç. Dr. İsmet YURDUŞEN
Üye ....

Doç. Dr. Abdullah ÖZBEKLER
Üye ....

Doç. Dr. Aslı YILDIZ
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından DOKTORA TEZİ olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Salih Bülent ALTEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yaralanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunuğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

27/10/2016

SEMA YAYLA

ÖZET

YARI DOĞRUSAL LEVHA DENKLEMİNİN UZUN ZAMAN DİNAMİĞİ

Sema YAYLA
Doktora, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Azer HANMEHMETLİ
Ekim 2016, 88 sayfa

Bu tezde; dissipatif terime sahip

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \alpha(x) u_t + \lambda u + \mathcal{F}(u) = h(x)$$

yarı doğrusal levha denkleminin $\mathbb{R}^n$'de uzun zaman davranışı incelenmiştir. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde hiperbolik denklemlerin uzun zaman dinamikleriyle ilgili yapılmış başlıca çalışmalar hakkında bilgi verilmiş ve bu çalışmanın literatüre katkısından bahsedilmiştir. İkinci bölümde tez içerisinde kullanılacak temel teoremler ve tanımlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde; $\mathcal{F}(u) := f\left(\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\Delta u$ şeklindeki yerel olmayan, doğrusal olmayan terime sahip levha denklemi için yerel olmayan çekicinin varlığı, düzgünlüğü ve fraktal boyutunun sonlu olduğu gösterilmiştir. Dördüncü bölümde; üçüncü bölümdeki dissipatif terim üzerine konulan koşullar zayıflatılarak; $\mathcal{F}(u) := f\left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|u|^{p-2} u$ şeklinde yerel olmayan, doğrusal olmayan terime sahip levha denklemi için yerel olmayan çekicinin varlığı ve düzgünlüğü gösterilmiştir. Son bölümde ise; $\mathcal{F}(u) := f(u)$ ve $h(x) \equiv 0$ alınarak, homojen levha denklemi için $f(\cdot)$ fonksiyonu ve dissipatif terim katsayısı $\alpha(x)$ üzerine konulan uygun koşullar altında başlangıç değer probleminin çözümlerinin üstel enerji sönümüne sahip olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Levha Denklemi, Yerel Olmayan Çekici, Fraktal Boyut, Üstel Sönüm, Çarpma Teknikleri.

ABSTRACT

LONG-TIME DYNAMICS OF SEMILINEAR PLATE EQUATION

Sema YAYLA
Doctor of Philosophy, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Azer HANMEHMETLI

October 2016, 88 pages

In this thesis, we investigate the long-time behaviour of the semilinear plate equation

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \alpha(x) u_t + \lambda u + \mathcal{F}(u) = h(x)$$

in $\mathbb{R}^n$. This work consists of five sections. In the first section, we give some information about the primary studies related with the long-time dynamics of hyperbolic equations and mention the contribution of this work to the literature. In the second section, some fundamental definitions and theorems which will be used in the thesis are given. In the third chapter, for the plate equation with nonlocal nonlinear term $\mathcal{F}(u) := f\left(\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \Delta u$, we show the existence, regularity and finite fractal dimensionality of the global attractor. In the fourth section, by weakening the conditions of the dissipative term assumed in the third chapter, for the plate equation with nonlocal nonlinearity $\mathcal{F}(u) := f\left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right) |u|^{p-2} u$, we show the existence and regularity of the global attractor. In the last section, by assuming $\mathcal{F}(u) = f(u)$ and $h(x) \equiv 0$, we prove the exponential decay of the solutions of the initial value problem for the homogeneous plate equation under suitable conditions on the function $f(\cdot)$ and the damping term coefficient $\alpha(x)$.

Keywords:Plate Equation, Global Attractor, Fractal Dimension, Exponential Decay, Multiplier Techniques.

TEŞEKKÜR

Akademik çalışmalarım süresince, engin bilgi ve tecrübesini esirgemeyerek yolumu aydınlatan, saygıdeğer hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Azer HANMEHMETLİ'ye doktora tezimin oluşumundaki desteğinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Doktora süresince, vermiş olduğu beş yıllık doktora bursu ile maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Ayrıca, tez çalışmamın her satırında sevgi ve hoşgörüsü olan sevgili eşim, annem, babam, kardeşlerim ve biricik kızıma sonsuz teşekkür ederim.

Son olarak, tez yazım aşamasında yardımlarını esirgemeyen Arş. Gör. Berke KURU'ya da teşekkürlerimi sunarım.

İçindekiler

1 GİRİŞ

Bu çalışmadaki amacımız,

$$u_{tt}+\Delta^2 u+\alpha(x)\,u_t+\lambda u+\mathcal{F}(u)=h(x) \tag{1.1}$$

yarı doğrusal sönümlü (damped) levha (plate) denkleminin uzun zaman davranışını incelemektir. Bu denklemin uzun zaman davranışı $\alpha(x)$ dissipatif terim katsayısı, $\mathcal{F}(u)$ kaynak fonksiyonu ve $h(x)$ fonksiyonu üzerine konulan koşullarca belirlenen üç farklı durum için incelenmiştir. İlk iki durumda; yerel olmayan, doğrusal olmayan $\mathcal{F}(u):=f\left(\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\Delta u$ ve $\mathcal{F}(u):=f\left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|u|^{p-2}u$ terimine sahip levha denklemlerinin uzun zaman davranışı, yerel olmayan çekiciler vasıtasıyla incelenmiştir. Üçüncü durumda ise; $\mathcal{F}(u):=f(u)$ şeklinde yerel, doğrusal olmayan terime sahip homojen $(h\equiv 0)$ levha denkleminin çözümlerinin enerjisinin üstel olarak söndüğü gösterilmiştir. Burada üstel enerji sönümü ile kastedilen $F(s)=\int\limits_0^s f(\tau)\,d\tau$ olmak üzere

$$E(t)=\frac{1}{2}\left(\|u_t(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|\Delta u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\lambda\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)+\int\limits_{\mathbb{R}^n}F(u(x,t))\,dx$$

enerji fonksiyoneli için $E(t)\le Me^{-\gamma t}$ sağlanacak şekilde $\gamma>0$ ve $M>0$ sabitlerinin bulunmasıdır.

Evrimsel denklemlerin uzun zaman dinamikleri, zamana bağlı süreçleri incelemedeki önemlerinden dolayı uzun yıllardır matematikçilerin ilgisini çekmektedir. Evrimsel denklemlerin uzun zaman davranışı ya da başka bir deyişle asimptotik davranışı çekiciler vasıtasıyla veya sönüm özellikleri incelenerek yapılabilir. Bu bağlamda, hiperbolik denklemler 1980'lerden itibaren incelenmektedir. E. Zuazua yarı doğrusal dalga denklemlerinin üstel enerji sönümleriyle ilgili önemli çalışmalara imza atmıştır. Sınırlı bölgede yaptığı [1] çalışmasında

$$u_{tt}-\Delta u+a(x)\,u_t+f(u)=0,\qquad x\in\Omega$$

dalga denklemini, $\omega\subset\Omega$ bölgesi Ω'nın sınırının komşuluğunda bulunan bir bölge olmak üzere,

$$a(.)\in L^\infty(\Omega),\ \ a(x)\ge 0 \text{ h. h .y. } \Omega\text{'da},\ \ a(x)\ge a_0>0 \ \text{ h. h. y. } \omega\text{'da}$$

ve

$$\begin{cases} f \in C^1(\mathbb{R}), \ f(s)\, s \geq 0 \ \forall s \in \mathbb{R} \text{ ve } (n-2)\, p \leq n \\ \text{olmak kaydıyla öyle } C > 0 \text{ ve } p > 1 \text{ sabitleri vardır ki} \\ |f(s_1) - f(s_2)| \leq C \left(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1}\right) |s_1 - s_2| \quad \forall s \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.2}$$

koşulları altında incelemiştir. Yazar, bu makalesinde; f fonksiyonunu iki farklı durumda ele alarak üstel sönümü ispatlamıştır. Birinci durumda; $f^{\,'} \in L^\infty(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\lim_{s\to-\infty} f'(s) = f'(-\infty), \quad \lim_{s\to+\infty} f'(s) = f'(+\infty)$$

kabul edilmiştir. İkinci durumda ise;

$$f(s)\, s \geq (2+\delta) \int_0^s f(\tau)\, d\tau, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

koşulu sağlanacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Daha sonra yazar, bu çalışmasını sınırlı olmayan bölgeye genişletmiştir.Zuazua, [2] makalesinde

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)\, u_t + \lambda u + f(u) = 0, \quad x \in \Omega$$

yarı doğrusal sönümlü dalga denklemini, $\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq R\}$ olmak üzere

$$a(.) \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \ a(x) \geq 0 \ \text{ h. h. y. } \mathbb{R}^n\text{'de}, \quad a(x) \geq a_0 > 0 \text{ h. h. y. } \Omega_R\text{'de}$$

ve (1.2) koşulları altında inceleyerek üstel enerji sönümünü elde etmiştir. Yazarın bu çalışmalarında A. Ruiz'in tek-devam (unique continuation) üzerine yaptığı [3] çalışması çok önemli bir yere sahiptir. Çünkü, yazar çarpma tekniklerini ve kompaktlık-teklik *(compactness-uniqueness)* argümanını kullanarak bu problemleri tek-devam problemine indirgemiştir. Aynı zamanda, yazar bu çalışmasında $\mathcal{F}(u) := f(u)$ yerel doğrusal olmayan terime sahip (1.1) levha denklemi için geçerli tek-devam sonucu olmadığından, bu denklem için üstel enerji sönümü probleminin açık olduğunu belirtmiştir.

Bu tezde, E. Zuazua'nın bahsettiği levha denkleminin enerji sönümüyle ilgili açık problem çözülmüştür (bkz 5. Bölüm). Öncelikle, dizisel limit geçiş tekniği [bkz [4], [5]] kullanılarak yarı grup ailesinin düzgün asimptotik kompaktlığı ispatlanmıştır (Lemma 5.3). Daha sonra, [6]'da yarı doğrusal levha denklemi için elde edilen noktasal dissipatiflik özelliği ve süper lineer durumunda [2]'de elde edilen enerji eşitsizlikleri kullanılarak, uygun koşullar altında (1.1) levha denkleminin üstel enerji sönümüne sahip olduğu gösterilmiştir (bkz [7]).

Bu çalışmada ele alınan levha denklemleriyle köprü yüzeyleri, damar çeperleri, uçak kanatları gibi yüzeylerin hareketi modellenebildiğinden, uzun zaman davranışları hakkında bilgi sahibi olabilmek fizik, biyoloji gibi birçok bilim dalı için önem arzetmektedir. Örneğin; $\mathcal{F}(u) := f\left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|u|^{p-2}u$ ve f'in sabit olması durumunda (1.1) denklemi aeroelastik bir süreci modellemektedir (bkz [8], [9]). Bu nedenle birçok yazar tarafından hem sınırlı hem de sınırlı olmayan bölgelerde çalışılmıştır.

Sınırlı olan bölgelerde yapılan çalışmalara [10]-[20] çalışmalarını örnek olarak verebiliriz. Bu çalışmalardan, [12]'de, L. Yang otonom olmayan, kritik doğrusal olmayan terime sahip yarı doğrusal levha denklemi için

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + \alpha(x) u_t + \lambda u + f(u) = h(x,t), \quad x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(x,\tau) = u_\tau^0(x), \quad u_t(x,\tau) = u_\tau^1(x) \end{cases} \tag{1.3}$$

problemini ele almıştır. Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yeterince düzgün sınıra sahip sınırlı bölgedir. Ek olarak $\lambda > 0$ ve

$$\begin{cases} \alpha(x) \in L^\infty(\Omega), \qquad \alpha(x) \geq \alpha_0 > 0 \ \Omega\text{'da}, \\ f \in C^1(\mathbb{R}), \ |f'(s)| \leq (1 + |s|^p), \ 0 < p \leq \frac{4}{n-4}, \\ \liminf_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{s} > -\lambda_1^2, \\ g(x,t) \in L^\infty(\mathbb{R}; L^2(\Omega)), \quad g_t \in L_b^r(\mathbb{R}; L^r(\Omega)), \quad r > \frac{2n}{n+4} \end{cases}$$

koşulları sağlanmaktadır. Yukarıdaki koşullarda λ_1 değeri Dirichlet sınır koşuluna sahip $-\Delta$ operatörünün ilk öz değeridir. Yazar belirtilen koşullar altında (1.3) probleminin $H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ uzayında yerel olmayan çekiciye sahip olduğunu göstermiştir.

S. Kolbasin, [13] makalesinde ise aşağıdaki kuazilineer kısmi diferansiyel denklemini için aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemini ele almıştır:

$$\begin{cases} u_{tt} + \sigma(u) u_t + \Delta^2 u + f(u) = h(x) \\ u(0) = u_0, \ u_t(0) = u_1 \\ u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \leq 3)$ sınırlı bölgedir ve sınırı $\partial\Omega$ düzgündür. Ayrıca, $h \in L^2(\Omega)$'dır ve aşağıdaki koşullar sağlanmaktadır:

$$f \in C^1(\mathbb{R}), \quad f(0) = 0, \quad \lim \inf_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{s} > -\lambda_1^2, \quad f' \geq -l,$$

$$\sigma(\cdot) > 0, \quad \sigma \in C^1(\mathbb{R}).$$

Burada da λ_1 değeri Dirichlet sınır koşuluna sahip $-\Delta$ operatörünün ilk öz değeridir ve $l > 0$ reel sayıdır. Kolbasin, yukarıdaki koşullar altında (1.4) probleminin yerel olmayan çekiciye sahip olduğunu göstermiştir.

J. Y. Park, J. R. Kang [15] çalışmalarında, (1.3) ve (1.4) problemlerinden farklı olarak, dejenere olmuş yerel olmayan doğrusal olmayan terime sahip,

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \alpha \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right) \Delta u + a(x) u_t = 0, \quad x \in \Omega$$

levha denklemini ele almıştır. Belli bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için

$$\Gamma(x_0) = \{x \in \Gamma : (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\}$$

olmak üzere ω bölgesi $\overline{\Omega}$ ile $\Gamma(x_0)$ sınır parçasının komşuluğunun kesişimi olarak seçilmiştir. Burada,

$$\begin{cases} 0 < p < 1, & 1 \leq n < 4 \text{ ise} \\ (n-4) \leq 2p, & 4 \leq n \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$a(x) > 0 \text{ h. h. y. } \omega\text{'da ve } \int\limits_{\omega} \frac{1}{a(x)^p} dx < \infty$$

koşulu sağlanmaktadır ve α pozitif bir sabittir. Yazarlar, yukarıdaki koşullar altında, bu denklemin çözümünün polinomsal enerji sönümüne sahip olduğunu göstermişlerdir.

Potomkin [16] çalışmasında, yerel olmayan doğrusal olmayan terime sahip Berger denklemi için,

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} + \beta_1 \Delta^2 u + \mu \Delta \theta + F_1(u, v) = 0, \quad \Omega_1 \times (0, T)\text{'de} \\ \rho_0 \theta_t - \beta_0 \Delta \theta - \mu \Delta u_t = 0, \quad \Omega_1 \times (0, T)\text{'de} \\ \rho_2 v_{tt} + \beta_2 \Delta^2 v + F_2(u, v) = 0, \quad \Omega_2 \times (0, T)\text{'de} \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \Gamma_1 \times (0, T)\text{'de} \\ \theta = 0, \quad \Gamma_0 \times (0, T)\text{'de}; \ \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + \lambda \theta = 0, \quad \Gamma_1 \times (0, T)\text{'de} \\ u = v, \ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu}, \ \beta_1 \Delta u = \beta_2 \Delta v, \ \beta_1 \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + \mu \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = \beta_2 \frac{\partial \Delta v}{\partial \nu} \quad \Gamma_0 \times (0, T)\text{'de} \end{cases} \tag{1.5}$$

problemini incelemiştir. Burada Ω, Ω_1, Ω_2 bölgeleri $\mathbb{R}^2$'de

$$\Omega = \Omega_1 \cup \overline{\Omega_2}, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$$

özelliklerine sahip sınırlı açık kümeler, sırasıyla sınırları Γ_1, $\Gamma_1 \cup \Gamma_0$ ve Γ_0'dır. Aynı zamanda Ω_2 yıldız şekilli bir bölgedir ve ν vektörü Γ_1 ve Γ_0 sınırları üzerindeki dış normal vektör olmak üzere bir $x_0 \in \mathbb{R}^2$ için

$$(x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0, \;\; \Gamma_0\text{'da}$$

sağlanır. Ayrıca ρ_i, β_i ve μ sayıları

$$\rho_1 \geq \rho_2 \text{ ve } \beta_1 \leq \beta_2$$

özelliğine sahip kesin pozitif reel parametrelerdir. Doğrusal olmayan terimler ise $M(s) = s^{1+\alpha}$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere,

$$F_1(u,v) = -M\left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_1)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega_2)}\right)\Delta u + a_1(x)\,u\,|u|^{p-1} + g_1(x,u)$$

$$F_2(u,v) = -M\left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_1)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega_2)}\right)\Delta v + a_2(x)\,v\,|v|^{p-1} + g_2(x,v)$$

şeklindedir. Burada,

$$a_1(x) \in L^\infty(\Omega_1), \;\; a_2(x) \in L^\infty(\Omega_2),$$

$$a_1(x) \geq c_0 \text{ ve } a_2(x) \geq c_0, \; \forall x \in \Omega \text{ veya } 2(\alpha+2) > p+1, \;\; p \geq 1.$$

Ek olarak, $g_1(x,u)$ ve $g_2(x,v)$ fonksiyonları skalerdir ve bir $\varepsilon_0 > 0$ için,

$$\left|\frac{\partial}{\partial u} g_1(x_1,u)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial v} g_2(x_2,v)\right| \leq C\left(1 + |u|^{\max\{0,p-1-\varepsilon_0\}} + |v|^{\max\{0,p-1-\varepsilon_0\}}\right), \;\; \forall x_i \in \Omega_i,$$

$$g_2(x,0) = 0$$

özelliklerine sahiptir. Bu koşullar altında, yazar (1.5) probleminin uygun Hilbert uzayında dinamik sistem oluşturduğunu ve yerel olmayan çekiciye sahip olduğunu ispatlamıştır.

Sınırlı olmayan bölgelerde Sobolev kompakt gömülme teoremleri geçerli olmadığından, sınırlı bölgelerde kullanılan tekniklerin kullanılmasının bazı zorlukları vardır. Düzgün kuyruk değerlenmeleriyle bu zorlukların üstesinden gelinebilir. Düzgün kuyruk değerlenmeleri elde etmenin bir yolu, reaksiyon difüzyon denklemi için [21] çalışmasında olduğu gibi ağırlık fonksiyonları kullanmaktır. Bununla birlikte, levha denkleminin özelliklerinden dolayı [21]'deki metod levha denklemine uygulanamamaktadır. Bu nedenle, [6], [22]-[24], çalışmalarında, yerel doğrusal olmayan terime sahip levha denklemleri için zamana göre ortalama değer formunda düzgün kuyruk değerlenmeleri elde edilip, enerji metodu kullanarak Sobolev kompakt gömülme teoremlerinin eksikliğinin doğurduğu problemler giderilmiştir. Örneğin, [6] çalışmasında, A. Khanmamedov

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + \alpha(x)\,u_t + \lambda u + f(u) = g(x), & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x), \;\; u_t(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

yarı doğrusal levha denklemini incelemiştir. Burada $\lambda > 0$, $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, α ve f fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

$$\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \alpha(\cdot) \geq 0,$$

$$\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0 \text{ her } |x| \geq r_0 > 0,$$

$$f \in C^1(\mathbb{R}), \quad |f'(u)| \leq c(1+|u|^p), \; p > 0, \; (n-4)p \leq 4,$$

$$f(u) \cdot u \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Yazar, bu koşullar altında $H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayında yerel olmayan çekicinin varlığını, düzgünlüğünü ve sonlu boyutluluğunu göstermiştir.

A. Khanmamedov [24] çalışmasında ise yer değiştirmeye bağlı dissipatif terime sahip

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + \sigma(u) u_t + \lambda u + f(u) = g(x), & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

levha denkleminin yerel olmayan çekicisinin varlığını,

$$\lambda > 0 \text{ ve } g \in H^{-2}\left(\mathbb{R}^3\right),$$

$$f \in C^1(\mathbb{R}), \; f(u) \cdot u \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

$$\sigma \in C(\mathbb{R}), \sigma(0) > 0, \sigma(u) \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

$$\text{bir } \alpha \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}) \text{ için } |f'(u)| \leq \alpha(u)\sigma(u), \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

$$\text{bir } l > 0 \text{ için } \sigma(u) = \sigma(0), \; \forall u \in [-l, l]$$

koşulları altında ispatlamıştır.

Sınırlı olmayan bölgelerde denklem yerel olmayan doğrusal olmayan terim içerdiğinde zorluklar daha da artmaktadır. Örneğin, $\mathcal{F}(u) := f\left(\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\Delta u$ ve $f(s) = s^2$ olarak alındığında (1.1) denklemi bilinen Berger denklemine dönüşür (bkz [25]). Sınırlı olmayan bölgelerde, $\mathcal{F}(u) := f\left(\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\Delta u$ ve $\mathcal{F}(u) := f\left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|u|^{p-2}u$ operatörleri hem kompakt değildir hem de $H^2(\mathbb{R}^n)$'den $L^2(\mathbb{R}^n)$'e zayıf sürekli değildir. Bu nedenle asimptotik kompaktlığı ispatlamak için standart ayrıştırma yöntemi ya da [26]'da verilen enerji metodunu kullanamayız.

Bu tezde , [4] çalışmasında verilen telafi edici kompaktlık tekniğini kullanarak öncelikle yerel olmayan çekicinin varlığı için gerekli olan asimptotik kompaktlığı ispatlanmıştır. Daha sonra kesin Lyapunov fonksiyonunun varlığı da göstererek yerel olmayan çekicinin varlığını elde edilmiştir. Bahsi geçen teknik kullanılarak, ilk olarak yerel olmayan doğrusal olmayan $\mathcal{F}(u) := f\left(\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\Delta u$ terimine sahip (1.1) levha denklemi ele alınmıştır (bkz 3. bölüm). Dissipatif terim katsayısı $\alpha(\cdot)$ üzerine kesin pozitif olma şartı koyarak, uygun koşullar altında yerel olmayan çekicinin varlığını, düzgünlüğünü ve sonlu boyutluluğunu ispatladık (bkz [27]). Daha sonra, (1.1) denklemi yerel olmayan doğrusal olmayan $\mathcal{F}(u) := f\left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|u|^{p-2}u$ terimi ile ele alınmıştır (bkz 4. bölüm). Bu durumda dissipatif terim katsayısı üzerindeki kesin pozitiflik koşulu zayıflatılarak yerel olmayan çekicinin varlığı ve düzgünlüğü elde edilmiştir (bkz [28], [29]).

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan giriş bölümünde, hiperbolik denklemlerin uzun zaman davranışını, çekiciler ya da sönüm özellikleri vasıtasıyla ele alan çalışmalardan bahsedilmiş ve bu tezde elde ettiğimiz sonuçlar hakkında kısaca bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, tez içerisinde kullanılacak temel teoremler ve tanımlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde, $\mathcal{F}(u) := f\left(\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\Delta u$ yerel olmayan doğrusal olmayan terime sahip (1.1) denklemi incelenerek, yerel olmayan çekicinin varlığı, düzgünlüğü ve sonlu boyutluluğu gösterilmiştir. Dördüncü bölümde, $\mathcal{F}(u) := f\left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|u|^{p-2}u$ yerel olmayan doğrusal olmayan terimine sahip (1.1) denklemi ele alınmış, yerel olmayan olmayan çekicinin varlığı ve düzgünlüğü gösterilmiştir. Son bölümde ise $\mathcal{F}(u) := f(u)$ yerel olan, doğrusal olmayan terime sahip (1.1) denkleminin çözümlerinin üstel enerji sönümüne sahip olduğu gösterilmiştir.

2 ÖN BİLGİLER VE TEMEL TEOREMLER

Bu bölümde ilerideki bölümlerde kullanılacak bazı uzaylar, tanımlar, teoremler, gösterimler ve eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 2.0.1 *$p \geq 1$ gerçel sayı olmak üzere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde*

$$\int\limits_{\Omega} |u\,(x)|^p \, dx < \infty, \quad x \in \Omega$$

koşulunu sağlayan, ölçülebilir u fonksiyonlar uzayına, $L^p(\Omega)$ uzayı denir. Bu uzay lineer normlu olmakla birlikte üzerindeki norm,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır. $L^p(\Omega)$ uzayı Banach ve $1 < p < \infty$ durumunda yansımalı uzaydır.

Tanım 2.0.2 *$p = \infty$ olmak üzere, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde hemen hemen her yerde sınırlı ölçülebilir fonksiyonlar uzayına $L^\infty(\Omega)$ uzayı denir ve üzerindeki norm,*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \underset{x \in \Omega}{ess\sup} |u(x)|$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzay bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.0.3 *X lineer normlu uzay, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer*

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\|_X = 0$$

ise $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi x_0 elemanına kuvvetli yakınsar denir ve $x_n \to x_0$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.0.4 *X lineer normlu uzay, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ ve $x_0 \in X$ olsun. X^* uzayı X'in dual uzayı olmak üzere her $f \in X^*$ için*

$$\lim_{n \to \infty} \langle f, x_n \rangle = \langle f, x_0 \rangle$$

ise $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi x_0 elemanına zayıf yakınsar denir ve $x_n \xrightarrow{w} x_0$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.0.5 *X lineer normlu uzay, $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$ ve $f_0 \in X^*$ olsun. Eğer her $x \in X$ için*

$$\lim_{n \to \infty} \langle f_n, x \rangle = \langle f_0, x \rangle$$

ise $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi f_0 elemanına zayıf$-*$ (zayıf yıldız) yakınsar denir ve $f_n \xrightarrow{w^*} f_0$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.0.6 *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$'de bir bölge, $m > 0$ tam sayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, kendisi ve m. mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L^p(\Omega)$ sınıfına ait olan fonksiyonlar uzayına $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı denir. Bu uzay üzerindeki norm, $1 \leq p < \infty$ için*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq \ |\alpha| \leq m} \| \ D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{0 \leq \ |\alpha| \leq m} \| \ D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

şeklindedir. Bu uzaylar Banach uzaylarıdır. $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega)$ uzayı Hilbert uzayıdır ve $H^m(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzay üzerindeki iç çarpım

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u(x) \ \ D^\alpha v(x)\, dx$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.0.7 *$C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{m,p}(\Omega)$ uzayının normuyla kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir. $p = 2$ ise $W_0^{m,2}(\Omega)$ uzayı $H_0^m(\Omega)$ ile gösterilir.*

Tanım 2.0.8 *$1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ uzayının duali $W^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir ve üzerindeki norm,*

$$\|u\|_{W^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\|v\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq 1} |\langle u, v \rangle|$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayının duali $W^{-m,p'}(\Omega)$ ile gösterilir ve üzerindeki norm,

$$\|u\|_{W^{-m,p'}(\Omega)} = \sup_{\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq 1} |\langle u, v \rangle|$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.0.9 *([30]) $m \geq 1$ tam sayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere aşağıdaki sürekli gömülmeler geçerlidir.*
i) $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ ise $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ için $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L_q(\mathbb{R}^n)$,
ii) $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ ise her $q \in [p, \ \infty)$ için $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L_q(\mathbb{R}^n)$,
iii) $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ ise $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Son durumda,

$$k = \left[\left| m - \frac{n}{p} \right| \right]$$

ve

$$\theta = (m - \frac{n}{p}) - k$$

olmak üzere

$$|D^\alpha u|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)^n}, \quad \forall |\alpha| \le k$$

ve ayrıca $|\alpha| = k$ *için,*

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \le C |x-y|^\theta \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \qquad h.h.\ x, y \in \mathbb{R}^n,$$

olur. Dolayısıyla $\|u\|_{C^k(R^n)} \le C_1 \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}$ *sağlanır.*

Teorem 2.0.10 (Rellich-Kondrasov) *([30])* Ω, $\mathbb{R}^n$*'de sınırlı bölge ve* Ω*'nın sınırı* C^1 *sınıfından olmak üzere aşağıdaki kompakt gömülmeler geçerlidir.*
i) $p < n$ *ise* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$, $1 \le q < p^*$, $p^* = \frac{np}{n-p}$,
ii) $p = n$ *ise* $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$, $1 \le q < \infty$,
iii) $p > n$ *ise* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

Teorem 2.0.11 (İnterpolasyon) *([31])* Ω, $\mathbb{R}^n$*'de sınırlı ve sınırı* C^∞ *sınıfından olan bir bölge olmak üzere,* Ω *bölgesi sınırının bir tarafında bulunsun. Yani* $\mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ *ile* Ω*'nın sınırı aynı olsun. Bu durumda* $s_1 < s_2$, $s = \theta s_1 + (1-\theta) s_2$ *ve* $\theta \in (0,1)$ *olmak üzere* $u \in H^{s_2}(\Omega)$ *ise*

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \le \|u\|^\theta_{H^{s_2}(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{H^{s_1}(\Omega)}.$$

Tanım 2.0.12 *([32])* X *Banach uzayı olmak üzere* $1 \le p < \infty$ *ve* $-\infty \le a < b \le +\infty$ *olacak şekilde* (a,b) *den* X*'e tanımlanmış olan ölçülebilir ve* $\int\limits_a^b \|f(t)\|_X^p \, dt < \infty$ *koşulunu sağlayan* f *fonksiyonlarının uzayı,* $L^p(a,b;X)$ *ile gösterilir ve üzerindeki norm*

$$\|f\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int\limits_a^b \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır. $p = \infty$ *olduğunda* $L^\infty(a,b;X)$ *uzayı* (a,b) *den* X*' e tanımlanmış olan hemen hemen her yerde sınırlı ölçülebilir fonksiyonlar uzayıdır. Üzerindeki norm ise*

$$\|f\|_{L^\infty(a,b;X)} = \underset{t \in (a,b)}{ess \sup} \|f(t)\|_X$$

şeklinde tanımlanır. $p = 2$ *için,* X *Hilbert uzayı olduğunda,* $L^2(a,b;X)$ *uzayı*

$$(u,v)_2 = \int\limits_0^T (u(t), v(t))_X \, dt$$

iç çarpımı ile Hilbert uzayıdır. Burada $(.,.)_X$ ile X uzayındaki iç çarpım gösterilmektedir.

Önerme 2.0.13 *([32]) X Banach uzayı, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. X^*, X uzayının dual uzayı olmak üzere $L^p(a, b; X)$ uzayının dual uzayı $L^q(a, b; X^*)$'dır.*

Tanım 2.0.14 *([32]) X Banach uzayı ve $0 < T < \infty$ olsun. $u^{(i)}$, u fonksiyonunun i. mertebeden türevi olmak üzere*

$$C^m([0,T]; X) = \left\{ u : [0,T] \longrightarrow X \mid i = 1, ..., m \text{ olmak üzere } u^{(i)} \text{ süreklidir} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzay $\|u\| = \sum_{i=0}^{m} \max_{0 \le t \le T} \left\| u^{(i)}(t) \right\|_X$ normu ile Banach uzayıdır.

Tanım 2.0.15 *([32]) X Banach uzayı, $m > 0$ bir tam sayı ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere*

$$W^{m,p}(0,T; X) = \left\{ u : (0,T) \longrightarrow X \mid u^{(n)} \in L^p(0, T : X),\ 0 \le\ n \le m \ \right\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya Banach değerli Sobolev uzayı denir. Bu lineer uzay üzerindeki norm, $1 \le p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{0 \le\ n\ \le m} \|\ u^{(n)} \|^p_{L^p(0,T;X)} \right)^{1/p}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(0,T;X)} = \max_{0 \le\ n\ \le m} \left\|\ u^{(n)} \right\|_{L^\infty(0,T;X)}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaylar Banach uzaylarıdır. $p = 2$ ve X Hilbert uzayı ise $W^{m,p}(0,T; X)$ uzayı Hilbert uzayıdır ve $H^m(0,T; X)$ ile gösterilir. Bu uzay üzerindeki iç çarpım

$$(u \mid v)_m = \int_0^T \sum_{n \le m} \left(u^{(n)}(t), v^{(n)}(t) \right)_X dt$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.0.16 *X uzayı ρ metriği ile tanımlı metrik uzay olsun. Bu durumda X üzerinde tanımlı, sürekli $\{S(t)\}_{t \ge 0}$ operatörler ailesi aşağıdaki koşulları sağlarsa X üzerinde kuvvetli sürekli yarı grup olur.*

(i) $S(0) = I$ *(birim operatör),*

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t,\ s \ge 0$,

(iii) Her $x \in X$ *için* $\lim_{t \to 0^+} \rho(S(t)x, x) = 0$.

Tanım 2.0.17 *X uzayında tanımlı $\{T(t,s)\}_{t\geq s}$ sürekli dönüşümler ailesi aşağıdaki özellikleri sağlasın:*

(i) Her $t\in\mathbb{R}$ için $T(t,t)=I,$

(ii) Her $t\geq\tau\geq s$ için $T(t,s)=T(t,\tau)\,T(\tau,s)\,,$

(iii) $t\geq s$ ve $x\in X$ olmak üzere, $(t,s,x)\to T(t,s)\,x$ dönüşümü süreklidir.

Bu durumda $\{T(t,s)\}_{t\geq s}$ dönüşümler ailesine X'te bir süreç (process) denir.

Tanım 2.0.18 *$(X,S(t))$ dinamik sistem ve $D\subset X$ olsun.*

• *$B\subset X$ kapalı küme olsun. Eğer keyfi sınırlı D kümesi için*

$$S(t)\,D\subset B,\quad \forall t\geq t_0(D)$$

olacak şekilde $t_0(D)$ zamanı varsa B kümesine yutan küme denir.

• *Eğer $(X,S(t))$ dinamik sistemi sınırlı, yutan kümeye sahipse $(X,S(t))$'ye dissipatif dinamik sistem denir.*

• *$(X,S(t))$ dinamik sistemi çeken kompakt K kümesine sahipse yani, her D sınırlı kümesi için*

$$\lim_{t\to\infty} d_X\{S(t)\,D|K\}=0 \tag{2.1}$$

olacak şekilde K kompakt kümesi varsa $(X,S(t))$ dinamik sistemine asimptotik kompakt denir. Burada $d_X\{A|B\}=dist_X(x,B)=\sup\limits_{x\in A}\inf\limits_{y\in B} d(x,y)$.

• *Her $t>0$ için $S(t)\,D\subset D$ olan her D sınırlı kümesi için (2.1) sağlanacak şekilde, D kümesinin kapanışının içinde kalan bir K kompakt kümesi varsa $(X,S(t))$ dinamik sistemine asimptotik düzgün denir.*

Tanım 2.0.19 *Her $t\geq 0$ için, $S(t)\,D\subseteq D$ ise D kümesine $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarıgrubuna göre ileri değişmez denir.*

Tanım 2.0.20 *Her $t\geq 0$ için, $S(t)\,D=D$ ise D kümesine $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarıgrubuna göre değişmez denir.*

Tanım 2.0.21 *Her $\tau\in\mathbb{R}$ ve $t\geq 0$ için $S(t)\,u(\tau)=u(t+\tau)$ ise X uzayı içindeki sürekli $\gamma=\{u(t):t\in R\}$ eğrisine tam yörünge denir.*

Tanım 2.0.22 *$D\subset X$ olsun. Bu durumda*

$$\omega(D)=\bigcap_{t>0}\overline{\bigcup_{\tau\geq t} S(\tau)\,D}$$

kümesine D kümesinden doğan yörüngelerin ω limit kümesi denir.

Önerme 2.0.23 *([5]) $x \in X$ olsun. Aşağıdakiler denktir.*
(i) $x \in \omega(D)$.
(ii) Öyle $t_n \to \infty$ ve $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ dizileri vardır ki $\lim_{n\to\infty} S(t_n)\, x_n = x$'tir.

Önerme 2.0.24 *([5]) Kabul edelim ki $(X, S(t))$; çeken, kompakt K kümesine sahip, asimptotik kompakt dinamik sistem olsun. Bu durumda keyfi, sınırlı D kümesi için $\omega(D)$ kümesi boştan farklı, kompakt ve değişmez kümedir. Ayrıca, eğer $(X, S(t))$ asimptotik düzgün ve $\gamma_D^t = \cup_{\tau \geq t} S(\tau)\, D$ sınırlı ise $\omega(D)$ kümesi yine boştan farklı, kompakt ve değişmez kümedir.*

Önerme 2.0.25 *([5]) X Banach uzayı ve $(X, S(t))$ dissipatif dinamik sistem olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*
•$(X, S(t))$ asimptotik kompakttır.
• $(X, S(t))$ asimptotik düzgündür.
• $S_1(t)$ operatörü büyük t'ler için düzgün kompakt yani; keyfi, sınırlı D kümesi için $\gamma_1(D; t_0) := \cup_{\tau \geq t_0} S_1(\tau)\, D$ kümesi X uzayında prekompakt olacak şekilde bir $t_0 = t_0(D)$ vardır ve $S_2(t)$ operatörü ise her sınırlı D kümesi için,

$$\lim_{t\to\infty} r_D(t) = \lim_{t\to\infty} sup\left\{\|S_2(t)\, x\|_X : x \in D\right\} = 0$$

özelliğini sağlayan, X'de sürekli operatör olmak üzere; $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ şeklinde ayrışım vardır.
• Ladyzhenskaya koşulu sağlanır: Her sınırlı $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ dizisi ve $t_n \to \infty$ dizisi için $\{S(t_n x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi X uzayında prekompakttır.

Önerme 2.0.26 *([5]) X Banach uzayı ve $(X, S(t))$ dinamik sistem olsun. Kabul edelim ki Ladyzhenskaya koşulu sağlansın. Bu durumda $(X, S(t))$ asimptotik düzgündür.*

Önerme 2.0.27 *([5]) X uzayı d metriğine sahip tam metrik uzay ve $(X, S(t))$ dinamik sistem olsun. Kabul edelim ki keyfi, sınırlı, ileri değişmez $B \subset X$ kümesi ve $\varepsilon > 0$ için,*

$$d(S(T)\, y_1, S(T)\, y_2) \leq \varepsilon + \Psi_{\varepsilon,B,T}(y_1, y_2), \quad y_i \in B, \quad i = 1, 2$$

olacak şekilde $T = T(\varepsilon, B)$ vardır. Burada $\Psi_{\varepsilon,B,T}(y_1, y_2)$ fonksiyoneli $B \times B$ üzerinde tanımlı ve her $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ için,

$$\liminf_{m\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \Psi_{\varepsilon,B,T}(y_n, y_m) = 0.$$

Bu durumda, $(X, S(t))$ asimptotik düzgün dinamik sistem olur.

Önerme 2.0.28 *([5]) X uzayı d metriğine sahip tam metrik uzay ve $(X, S(t))$ dinamik sistem olsun. Kabul edelim ki keyfi, sınırlı, ileri değişmez $B \subset X$ kümesi ve keyfi $\varepsilon > 0$ için, öyle $T = T(\varepsilon, B)$ vardır ki, her $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ için,*

$$\liminf_{m\to\infty} \liminf_{n\to\infty} d(S(T)\, y_n, S(T)\, y_m) \leq \varepsilon.$$

Bu durumda $(X, S(t))$ asimptotik düzgün dinamik sistem olur.

Tanım 2.0.29 *Bir sınırlı kapalı $\mathcal{A} \subset X$ kümesine aşağıdaki özellikleri sağlaması durumunda $(X, S(t))$ dinamik sisteminin yerel olmayan çekicisi denir.*

(i) $\mathcal{A}$ kümesi $S(t)$ yarı grubuna göre değişmezdir.

(ii) $\mathcal{A}$ kümesi düzgün çekendir; keyfi, sınırlı $D \subset X$ kümesi için

$$\lim_{t\to\infty} d_X\{S(t)\, D|\mathcal{A}\} = 0.$$

Önerme 2.0.30 *([5]) Kabul edelim ki X Banach uzayı ve $(X, S(t))$ çeken, kompakt K kümesine sahip, asimptotik kompakt dinamik sistem olsun. Bu durumda $(X, S(t))$ dinamik sistemi tek, kompakt, yerel olmayan $\mathcal{A}$ çekicisine sahiptir ve $\mathcal{A} \subset K$. Bu çekici bağlantılı kümedir ve*

$$\mathcal{A} = \omega(K) = \cap_{t>0}\overline{\cup_{\tau\geq t} S(\tau)\, K}$$

formuna sahiptir.

Önerme 2.0.31 *([5]) X uzayı tam metrik uzay ve $(X, S(t))$ dinamik sistem olsun. Bu durumda $(X, S(t))$ dinamik sistemi tek, kompakt, yerel olmayan $\mathcal{A}$ çekicisine sahiptir ancak ve ancak*

(i) $(X, S(t))$ asimptotik düzgündür,

(ii) $(X, S(t))$ noktasal dissipatiftir,

(iii) Her sınırlı $B \subset X$ için öyle t_0 vardır ki $\gamma_B^{t_0}$ kuyruğu sınırlıdır.

Ek olarak, $\mathcal{A}$ yerel olmayan çekicisi $\mathcal{A} = \cup\{\omega(B) :\ B \subset X$ sınırlı altküme$\}$ şeklinde gösterilebilir.

Tanım 2.0.32 *M kümesi, X metrik uzayında kompakt küme olsun. M kümesinin fraktal boyutu $\dim_f M$ ile gösterilir ve*

$$\dim_f M = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln n(M, \varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $n(M, \varepsilon)$, M kümesini örten ε yarıçaplı kapalı yuvarların minimum sayısıdır.

Teorem 2.0.33 *([5]) H ayrılabilir Hilbert uzayı ve M kümesi H uzayında kapalı sınırlı olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki gibi bir $V : M \to H$ fonksiyonu var olsun.*
(i) $M \subseteq VM$.
(ii) V fonksiyonu M'de Lipschitz'dir, yani;

$$\|Vv_1 - Vv_2\| \leq L \|v_1 - v_2\|, \quad v_1, v_2 \in M$$

olacak şekilde $L > 0$ vardır.
(iii) Keyfi $v_1, v_2 \in M$ için, $0 < \eta < 1$ ve $K > 0$ sabit olmak üzere,

$$\|Vv_1 - Vv_2\| \leq \eta \|v_1 - v_2\| + K [n_1 (v_1 - v_2) + n_2 (Vv_1 - Vv_2)]$$

olacak şekilde $n_1(x)$ ve $n_2(x)$ kompakt yarı normları vardır. (H uzayında tanımlı bir yarı norm kompakttır ancak ve ancak $\{x_m\} \subset H$ ve $x_m \overset{w}{\to} 0$ olacak şekildeki bir dizi için $n(x_m) \to 0$'dır.). Bu durumda M kümesi, H'de sonlu fraktal boyuta sahip kompakt kümedir.

Tanım 2.0.34 *$\mathcal{N}$ kümesi $(X, S(t))$ dinamik sisteminin sabit noktalar kümesi olsun; yani:*

$$\mathcal{N} = \{v \in X : \text{ her } t \geq 0 \text{ için } S(t)v = v\}$$

Sabit noktalar kümesi $\mathcal{N}$'den doğan kararsız $\mathcal{M}^u(\mathcal{N})$ manifoldu,

$$\begin{cases} u(0) = y \text{ ve} \\ \lim_{t\to-\infty} dist_X (u(t), \mathcal{N}) = 0 \text{ olacak şekilde } \gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\} \text{ tam yörüngesi vardır,} \end{cases}$$

özelliğine sahip tüm $y \in X$ elemanlarının oluşturduğu kümedir.

Tanım 2.0.35 *Kabul edelim ki $Y \subseteq X$ kümesi $(X, S(t))$ dinamik sisteminde ileri değişmez olsun.*

• *$\Phi(y)$ fonksiyoneli Y kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli olmak üzere, eğer $t \to \Phi(S(t)y)$ fonksiyonu keyfi $y \in Y$ için artmayan fonksiyon ise $\Phi(y)$ fonksiyoneline Y üzerinde, $(X, S(t))$ dinamik sistemi için Lyapunov fonksiyonu denir.*

• *Eğer, $y \in Y$ olmak üzere,*

$$\text{her } t > 0 \text{ için } \Phi(S(t)y) = \Phi(y) \Longrightarrow \text{ her } t > 0 \text{ için } S(t)y = y$$

yani y elemanı $(X, S(t))$ dinamik sisteminin sabit noktası ise $\Phi(y)$ Lyapunov fonksiyonu Y'de kesindir denir.

• *Tüm X uzayında $(X, S(t))$ dinamik sistemi için kesin Lyapunov fonksiyonu varsa $(X, S(t))$ dinamik sistemi gradyenttir denir.*

Teorem 2.0.36 *([5]) Kabul edelim ki $(X, S(t))$ dinamik sistemi kompakt, yerel olmayan $\mathcal{A}$ çekicisine sahip olsun ve $\mathcal{A}$ üzerinde kesin Lyapunov fonksiyonu var olsun. Bu durumda $\mathcal{A} = \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$. Ayrıca, yerel olmayan çekici $\mathcal{A}$*

$$\lim_{t\to-\infty} dist_X(u(t), \mathcal{N}) = 0 \text{ ve } \lim_{t\to\infty} dist_X(u(t), \mathcal{N}) = 0$$

özelliğini sağlayan $\gamma = \{u(t) : \ t \in \mathbb{R}\}$ tam yörüngelerinden oluşur.

Teorem 2.0.37 *([5]) $(X, S(t))$ gradyent, asimptotik düzgün dinamik sistem olsun. Kabul edelim ki bu sistemin $\Phi(x)$ Lyapunov fonksiyonu, X'in keyfi sınırlı alt kümesi üzerinde üstten sınırlıdır ve her R için $\Phi_R = \{x : \Phi(x) \leq R\}$ kümesi sınırlıdır. Eğer $(X, S(t))$ dinamik sisteminin, sabit noktalar kümesi $\mathcal{N}$ sınırlı ise $(X, S(t))$ dinamik sistemi yerel olmayan çekiciye sahiptir ve $\mathcal{A} = \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$.*

Teorem 2.0.38 (Banach-Alaoglu) *X ayrılabilir lineer normlu uzay, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ olmak üzere her n için $\|f_n\|_{X^*} \leq M$ ise öyle $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ ve $f_0 \in X^*$ vardır ki $f_{n_k} \xrightarrow{w^*} f_0$.*

Lemma 2.0.39 (Young Eşitsizliği) *$1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0)$$

ve her $\varepsilon > 0$ için;

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

olacak şekilde $C(\varepsilon) > 0$ vardır.

Teorem 2.0.40 (Genel Hölder Eşitsizliği) *$1 \leq p_1, ..., p_m \leq \infty$, $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = 1$ olsun. $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$, $k = 1, ..., m$ ise*

$$\int_{\Omega} |u_1 ... u_m| \, dx \leq \prod_{k=1}^{m} \|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}$$

sağlanır.

Lemma 2.0.41 (Gronwall Eşitsizliği) *x, ψ ve χ, reel değerli ve $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda $\chi(t) \geq 0$ olmak üzere*

$$x(t) \leq \psi(t) + C \int_a^t \chi(s) x(s) \, ds, \quad \forall t \in [a, b]$$

ise

$$x(t) \leq \psi(t) + \int\limits_a^t \chi(s)\,\psi(s)\, e^{\int_s^t \chi(u)du} ds, \quad \forall t \in [a,b]\,.$$

Lemma 2.0.42 (Ters Fatou) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ölçülebilir fonksiyonlar ailesi ve bir integrallenebilir* g *fonksiyonu için* $f_n \leq g$ *ise*

$$\int \limsup_{n\to\infty} f_n \geq \limsup_{n\to\infty} \int f_n.$$

3 SINIRLI OLMAYAN BÖLGEDE, $f(\|\nabla u\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})\Delta u$ TERİMİNİ İÇEREN LEVHA DENKLEMİNİN ÇEKİCİSİ

Bu bölümde, yarı doğrusal levha denklemi için,

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \alpha(x)u_t + \lambda u - f(\|\nabla u\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})\Delta u = h\,(x)\,, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \;\; u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.2)$$

başlangıç değer probleminin çözümlerinin uzun zaman davranışını çekiciler vasıtasıyla inceleyeceğiz. Burada $\lambda > 0$, $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$'dir. Ayrıca, $\alpha(\cdot)$ ve $f(\cdot)$ fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

$$\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \;\; \alpha(\cdot) \geq \alpha_0 > 0 \text{ h.h.y. } \mathbb{R}^n\text{'de}, \quad (3.3)$$

$$f \in C^1(\mathbb{R}^+), \quad f\,(z) \geq 0, \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^+. \quad (3.4)$$

Yarı grup teorisi kullanılarak, (3.3) ve (3.4) koşulları altında, (3.1)-(3.2) probleminin, $(u_0, u_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ başlangıç verilerine uygun,

$$u \in C\left([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n)\right)$$

olan zayıf çözümünün varlığını ve tekliğini kolayca görebiliriz.
Gerçekten, $A(w_1, w_2) = (w_2, -\Delta^2 w_1 - \lambda w_1 - \alpha(\cdot)w_2)$ şeklinde, tanım kümesi $D(A) = H^4(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$ olan bir operatör tanımlayalım. Ek olarak,

$$\Phi(w_1, w_2) = (0, f\left(\|\nabla w_1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\Delta w_1 + h)$$

şeklinde tanımlarsak, (3.1)-(3.2) problemini $H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$'de aşağıdaki soyut probleme indirgeyebiliriz.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u, u_t) = A(u, u_t) + \Phi(u, u_t), \\ \quad (u(0), u_t(0)) = (u_0, u_1). \end{cases} \quad (3.5)$$

$H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$'de uygun denk normlar tanımlayarak, A operatörünün maksimal dissipatif olduğu kolayca görülebilir ve böylece A operatörü $H^4(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$'de ve $H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$'de lineer sürekli $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ yarı grubu oluşturur. Diğer taraftan, (3.4) koşulundan, doğrusal olmayan $\Phi : H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) \to H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ operatörü

$H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$'de sınırlı kümeler üzerinde Lipschitz sürekli olduğundan, yarı grup teorisinden, (3.5) probleminin, $(u_0, u_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ başlangıç verilerine uygun, $C([0, T_{\max}); H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n))$ sınıfında tek, zayıf yerel çözümü olduğu görülür. (bkz [33], syf. 56-58)

Ayrıca, eğer $(u_0, u_1) \in H^4(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$ ise $(u, u_t) \in C([0, T_{\max}); H^4(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n))$ fonksiyonu (3.5) probleminin kuvvetli çözümüdür.

Şimdi, varsayalım ki $u \in C([0, T_{\max}); H^4(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T_{\max}); H^2(\mathbb{R}^n))$ fonksiyonu (3.1)-(3.2) probleminin yerel kuvvetli çözümü olsun. (3.1) denklemini u_t ile çarpıp $(s, t) \times \mathbb{R}^n$ üzerinde integrallersek

$$E(u(t)) + \frac{1}{2} F\left(\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, u(t, x)\, dx + \int_s^t \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x)\, |u_t(\tau, x)|^2\, dx d\tau$$

$$= E(u(s)) + \frac{1}{2} F\left(\|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, u(s, x)\, dx, \quad \forall t \geq s \geq 0 \tag{3.6}$$

elde ederiz. Burada $F(z) = \int_0^z f(\sqrt{s})\, ds$, $\forall\, z \in \mathbb{R}^+$ ve

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|u_t(t, x)|^2 + |\Delta u(t, x)|^2 + \lambda\, |u(t, x)|^2) dx\text{'dir.}$$

(3.3) ve (3.4) koşulları (3.6)'da göz önüne alınırsa, c azalmayan fonksiyon olmak üzere,

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c\left(\|(u_0), u_1)\|_{H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)}\right), \ t \geq 0, \tag{3.7}$$

alınır. Son eşitsizlik sayesinde, u yerel çözümü $[0, \infty)$ aralığına genişletilebilir.

Şimdi de, varsayalım ki $v^{(i)} \in C([0, \infty); H^4(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, \infty); H^2(\mathbb{R}^n))$ $\cap\ C^2([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^n))$ fonksiyonları, (3.1)-(3.2) probleminin $\left(v_0^{(i)}, v_1^{(i)}\right) \in H^4(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$ başlangıç verilerine uygun kuvvetli çözümleri olsun. (3.1) denkleminde u yerine sırasıyla $v^{(1)}$ ve $v^{(2)}$ yazıp, denklemleri birbirinden çıkarıp, elde ettiğimiz denklemi $v_t^{(1)} - v_t^{(2)}$ ile çarpıp $(0, t) \times \mathbb{R}^n$'de integrallersek,

$$\left\|v^{(1)}(t) - v^{(2)}(t)\right\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \left\|v_t^{(1)}(t) - v_t^{(2)}(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \widetilde{c}(T, \widetilde{r})\left(\left\|v_0^{(1)} - v_0^{(2)}\right\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \left\|v_1^{(1)}(t) - v_1^{(2)}(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right), \ \forall t \in [0, T]$$

olur. Burada $\widetilde{c} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her bir değişkene göre artmayandır ve $\widetilde{r} = \max\left(\left\|\left(v_0^{(1)}, v_1^{(1)}\right)\right\|_{H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)}, \left\|\left(v_0^{(2)}, v_1^{(2)}\right)\right\|_{H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)}\right)$. Son eşitsizliği (3.7) ile birlikte değerlendirdiğimizde, (3.1)-(3.2) probleminin, $(u(t), u_t(t)) = S(t)(u_0, u_1)$ formülüyle, $H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı, kuvvetli sürekli $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarı grubunu ürettiğini elde ederiz.

Bu bölümde ispatlayacağımız ana teorem şu şekildedir:

Teorem 3.0.1 *(3.3) ve (3.4) koşulları altında, (3.1)-(3.2) problemi tarafından üretilen $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarı grubu, $H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$'de $\mathcal{A}$ yerel olmayan çekicisine sahiptir ve $\mathcal{A} = \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$'dir. Ayrıca, $\mathcal{A}$ yerel olmayan çekicisi $H^4(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$'de sınırlıdır ve sonlu fraktal boyuta sahiptir.*

3.1 Yerel Olmayan Çekicinin Varlığı

Bu bölümde yerel olmayan çekicinin varlığını göstereceğiz. Bunun için, öncelikle aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 3.1.1 *(3.3) ve (3.4) koşulları sağlansın. Aynı zamanda, $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi $L^\infty(0,T;H^2(\mathbb{R}^n)) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$ uzayında sınırlı ve her $t \in [0,T]$ için $\left\{\|\nabla v_m(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi yakınsak olsun. Bu durumda, her $\gamma > 0$ için,*

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \tau \left(f\left(\|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \Delta v_m(\tau,x) - f\left(\|\nabla v_l(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \Delta v_l(\tau,x)\right)$$

$$\times \left(v_{mt}(\tau,x) - v_{lt}(\tau,x)\right) dx d\tau$$

$$\leq \gamma \int_0^t \tau E\left(v_m(\tau) - v_l(\tau)\right) d\tau + c_\gamma \int_0^t E\left(v_m(\tau) - v_l(\tau)\right) d\tau$$

$$+ c_\gamma \int_0^t \tau E\left(v_m(\tau) - v_l(\tau)\right) \|v_{mt}(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\tau + K^{m,l}(t),\ \forall t \in [0,T],$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $c_\gamma > 0$ sabiti vardır. Burada $K^{m,l} \in C[0,T]$ ve

$$\limsup_{m\to\infty} \limsup_{l\to\infty} \left\|K^{m,l}\right\|_{C[0,T]} = 0.$$

İspat. İlk olarak

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \tau \left(f\left(\|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \Delta v_m(\tau,x) - f\left(\|\nabla v_l(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \Delta v_l(\tau,x)\right)$$

$$\times \left(v_{mt}(\tau,x) - v_{lt}(\tau,x)\right) dx d\tau$$

$$= -\int_0^t \tau f\left(\|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \frac{d}{d\tau}\left(\|\nabla v_m(\tau) - \nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) d\tau + K^{m,l}(t) \tag{3.8}$$

alınır ve burada

$$K^{m,l}(t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \tau \left(f\left(\|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) - f\left(\|\nabla v_l(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\right) \Delta v_l(\tau, x)$$

$$\times \left(v_{mt}(\tau, x) - v_{lt}(\tau, x)\right) dx d\tau.$$

Lemmanın koşullarından

$$\limsup_{m\to\infty} \limsup_{l\to\infty} \left\|K^{m,l}\right\|_{C[0,T]} = 0 \tag{3.9}$$

elde ederiz. Şimdi, (3.8) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terimi değerlendirelim. Kısmi integrasyon yaparak, keyfi $\varepsilon > 0$ için,

$$\int_0^t \tau f\left(\|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \frac{d}{d\tau}\left(\|\nabla v_m(\tau) - \nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) d\tau$$

$$= \int_0^t \tau \left(f\left(\|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) - f(\varepsilon)\right) \frac{d}{d\tau}\left(\|\nabla v_m(\tau) - \nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) d\tau$$

$$+ f(\varepsilon) \int_0^t \tau \frac{d}{d\tau}\left(\|\nabla v_m(\tau) - \nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) d\tau$$

$$= \int_{A^m_{1,\varepsilon}(t)} \tau \left(f\left(\|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) - f(\varepsilon)\right) \frac{d}{d\tau}\left(\|\nabla v_m(\tau) - \nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) d\tau$$

$$+ \int_{A^m_{2,\varepsilon}(t)} \tau \left(f\left(\|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) - f(\varepsilon)\right) \frac{d}{d\tau}\left(\|\nabla v_m(\tau) - \nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) d\tau$$

$$+ t f(\varepsilon) \|\nabla v_m(t) - \nabla v_l(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} - f(\varepsilon) \int_0^t \|\nabla v_m(\tau) - \nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\tau \tag{3.10}$$

buluruz. Bu eşitlikte

$$A^m_{1,\varepsilon}(t) := \left\{\tau \in (0,t) : \|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \varepsilon\right\}$$

ve

$$A^m_{2,\varepsilon}(t) := \left\{\tau \in (0,t) : \|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} > \varepsilon\right\}.$$

Şimdi, (3.10) eşitliğinin sağındaki

$$\int\limits_{A_{2,\varepsilon}^m(t)} \tau\left(f\left(\|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)-f(\varepsilon)\right)\frac{d}{d\tau}\left(\|\nabla v_m(\tau)-\nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)d\tau$$

terimini değerlendirelim. $A_{2,\varepsilon}^m(t)$ kümesinin boştan farklı olduğu durumu incelemek yeterlidir. Burada $v_m\in C([0,T];H^1(\mathbb{R}^n))$ olması sayesinde $A_{2,\varepsilon}^m(t)$ kümesi açık olduğundan, $A_{2,\varepsilon}^m(t)$ kümesi kesişmeyen, açık $\left\{\left(t_k,\widetilde{t}_k\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ aralıklarının sayılabilir birleşimi şeklinde gösterilebilir. (bkz. [34], syf. 39). Buradan,

$$\int\limits_{A_{2,\varepsilon}^m(t)} \tau\left(f\left(\|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)-f(\varepsilon)\right)\frac{d}{d\tau}\left(\|\nabla v_m(\tau)-\nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)d\tau$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{t_k}^{\widetilde{t}_k} \tau\left(f\left(\|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)-f(\varepsilon)\right)\frac{d}{d\tau}\left(\|\nabla v_m(\tau)-\nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)d\tau$$

olur. Eğer $\|\nabla v_m(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leq\varepsilon$ ise f fonksiyonu sürekli olduğundan,

$$f\left(\|\nabla v_m(t_k)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)=f(\varepsilon),\quad k=1,2,\ldots,$$

$$f\left(\left\|\nabla v_m\left(\widetilde{t}_k\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)=f(\varepsilon),\quad k=1,2,...,$$

alırız. Böylece, kısmi integrasyon yaparak,

$$\int\limits_{A_{2,\varepsilon}^m(t)} \tau\left(f\left(\|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)-f(\varepsilon)\right)\frac{d}{d\tau}\left(\|\nabla v_m(\tau)-\nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)d\tau$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{t}_k\left(f\left(\left\|\nabla v_m\left(\widetilde{t}_k\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)-f(\varepsilon)\right)\left\|\nabla v_m(\widetilde{t}_k)-\nabla v_l(\widetilde{t}_k)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}t_k\left(f\left(\|\nabla v_m(t_k)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)-f(\varepsilon)\right)\|\nabla v_m(t_k)-\nabla v_l(t_k)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{t_k}^{\widetilde{t}_k}\left(f\left(\|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)-f(\varepsilon)\right)\|\nabla v_m(\tau)-\nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{t_k}^{\widetilde{t}_k}\tau\frac{f'\left(\|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)}{\|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\langle\Delta v_m(\tau),v_{mt}(\tau)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|\nabla v_m(\tau)-\nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau$$

$$=-\int\limits_{A_{2,\varepsilon}^m(t)}\left(f\left(\|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)-f(\varepsilon)\right)\|\nabla v_m(\tau)-\nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau$$

$$+\int\limits_{A_{2,\varepsilon}^{m}(t)} \tau \frac{f'\left(\left\|\nabla v_m\left(\tau\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)}{\left\|\nabla v_m\left(\tau\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}} \left\langle \Delta v_m\left(\tau\right), v_{mt}\left(\tau\right)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\nabla v_m(\tau)-\nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,d\tau \tag{3.11}$$

elde ederiz. Burada $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ simgesi $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ uzayındaki iç çarpımı göstermektedir. Eğer $\left\|\nabla v_m\left(t\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} > \varepsilon$ ise $\left\{\widetilde{t}_k : k=1,2,...\right\}$ kümesinin maksimal elemanı t'ye eşittir ve sonuç olarak,

$$\int\limits_{A_{2,\varepsilon}^{m}(t)} \tau\left(f\left(\left\|\nabla v_m\left(\tau\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)-f\left(\varepsilon\right)\right)\frac{d}{d\tau}\left(\|\nabla v_m(\tau)-\nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)d\tau$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{t}_k\left(f\left(\left\|\nabla v_m\left(\widetilde{t}_k\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)-f\left(\varepsilon\right)\right)\|\nabla v_m(\widetilde{t}_k)-\nabla v_l(\widetilde{t}_k)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}t_k\left(f\left(\left\|\nabla v_m\left(t_k\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)-f\left(\varepsilon\right)\right)\|\nabla v_m(t_k)-\nabla v_l(t_k)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{t_k}^{\widetilde{t}_k}\left(f\left(\left\|\nabla v_m\left(\tau\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)-f\left(\varepsilon\right)\right)\|\nabla v_m(\tau)-\nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,d\tau$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{t_k}^{\widetilde{t}_k}\tau\frac{f'\left(\left\|\nabla v_m\left(\tau\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)}{\left\|\nabla v_m\left(\tau\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\left\langle \Delta v_m\left(\tau\right), v_{mt}\left(\tau\right)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|\nabla v_m(\tau)-\nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,d\tau$$

$$=t\left(f\left(\left\|\nabla v_m\left(t\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)-f\left(\varepsilon\right)\right)\|\nabla v_m(t)-\nabla v_l(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$-\int\limits_{A_{2,\varepsilon}^{m}(t)}\left(f\left(\left\|\nabla v_m\left(\tau\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)-f\left(\varepsilon\right)\right)\|\nabla v_m(\tau)-\nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,d\tau$$

$$+\int\limits_{A_{2,\varepsilon}^{m}(t)}\tau\frac{f'\left(\left\|\nabla v_m\left(\tau\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)}{\left\|\nabla v_m\left(\tau\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\left\langle \Delta v_m\left(\tau\right), v_{mt}\left(\tau\right)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|\nabla v_m(\tau)-\nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,d\tau \tag{3.12}$$

elde ederiz. Böylece, (3.4), (3.11) ve (3.12)'yi (3.10)'da göz önüne alırsak,

$$-\int\limits_0^t\tau f\left(\left\|\nabla v_m\left(\tau\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\frac{d}{d\tau}\left(\|\nabla v_m(\tau)-\nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)d\tau$$

$$\leq f\left(\varepsilon\right)\int\limits_0^t\|\nabla v_m(\tau)-\nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,d\tau+\widehat{c}_1\int\limits_0^t\|\nabla v_m(\tau)-\nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,d\tau$$

$$+2\max_{s_1,s_2\epsilon[0,\varepsilon]}\left|f\left(s_1\right)-f\left(s_2\right)\right|\int\limits_0^t\tau E\left(v_m\left(\tau\right)-v_l\left(\tau\right)\right)d\tau$$

$$+\frac{\widehat{c}_1}{\varepsilon}\int_0^t \tau E\left(v_m(\tau)-v_l(\tau)\right)\|v_{mt}(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,d\tau$$

$$\leq \left(f(\varepsilon)+\widehat{c}_1\right)\int_0^t \|\nabla v_m(\tau)-\nabla v_l(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,d\tau$$

$$+\left(2\max_{s_1,s_2\epsilon[0,\varepsilon]}|f(s_1)-f(s_2)|+\widehat{c}_1\varepsilon\right)\int_0^t \tau E\left(v_m(\tau)-v_l(\tau)\right)d\tau$$

$$+\frac{\widehat{c}_1}{\varepsilon^3}\int_0^t \tau E\left(v_m(\tau)-v_l(\tau)\right)\|v_{mt}(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,d\tau,\ \ \forall t\in[0,T] \tag{3.13}$$

buluruz. Sonuç olarak, $\gamma = 2\max\limits_{s_1,s_2\epsilon[0,\varepsilon]}|f(s_1)-f(s_2)|+\widehat{c}_1\varepsilon$ ve $c_\gamma=\max\left\{\frac{\widehat{c}_1}{\varepsilon^3},\ f(\varepsilon)+\widehat{c}_1\right\}$ şeklinde belirlersek, (3.8), (3.9) ve (3.13)'ü kullanarak lemmanın iddasını ispatlarız. ■

Şimdi, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarı grubunun $H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$'de asimptotik kompakt olduğunu ispatlayalım.

Lemma 3.1.2 *Varsayalım ki (3.3)-(3.4) koşulları sağlansın ve B kümesi $H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$'nin sınırlı alt kümesi olsun. Bu durumda $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty\subset B$ ve $t_k\to\infty$ olmak üzere $\{S(t_k)\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ şeklindeki her dizi $H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$'de yakınsak alt diziye sahiptir.*

İspat. Öncelikle, $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ dizisi $H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$'de sınırlı olduğundan, (3.7)'den $\{S(.)\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ dizisi $C_b(0,\infty;H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n))$ uzayında sınırlıdır. Burada, $C_b(0,\infty;H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n))$ ile $[0,\infty)$'dan $H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayına tanımlı sürekli sınırlı fonksiyonlar uzayı gösterilmektedir. Böylece,

$$(v_m(t),v_{mt}(t))=S(t+t_{k_m}-T)\varphi_{k_m}$$

olmak üzere, her $T\geq 0$ için, $t_{k_m}\geq T$ ve bir $q\in W^{1,\infty}(0,\infty)$ için

$$\|\nabla v_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\overset{w^*}{\to} q(t)\quad W^{1,\infty}(0,\infty)\text{'da} \tag{3.14}$$

olacak şekilde bir $\{k_m\}_{m=1}^\infty$ alt dizisi vardır. (3.3) ve (3.4)'ü ve (3.6)'da göz önüne alırsak,

$$\int_0^T \|v_{mt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,dt\leq c_1,\quad \forall T\geq 0, \tag{3.15}$$

buluruz. $(3.1)_1$'den,

$$v_{mtt}-v_{ltt}+\Delta^2(v_m-v_l)+\alpha(x)(v_{mt}-v_{lt})+\lambda(v_m-v_l)$$

$$-f(\|\nabla v_m(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})\Delta v_m + f(\|\nabla v_l(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})\Delta v_l = 0 \tag{3.16}$$

alırız. (3.16) denklemini $(v_m - v_l)$ ile çarpıp, $(0,T)\times\mathbb{R}^n$ üzerinde integrallersek,

$$\int_0^T \|\Delta(v_m(t)-v_l(t))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,dt + \lambda\int_0^T \|v_m(t)-v_l(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,dt$$

$$+\int_0^T f(\|\nabla v_m(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})\,\|\nabla v_m(t)-\nabla v_l(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,dt \le c_2 + c_2\int_0^T \|v_{mt}(t)-v_{lt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,dt$$

$$+\int_0^T \Big|f(\|\nabla v_m(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}) - f(\|\nabla v_l(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})\Big|\,\|\nabla v_l(t,x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,\|\nabla v_m(t)-\nabla v_l(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,dt$$

elde ederiz. Son eşitsizlikte, (3.4), (3.14) ve (3.15)'i kullanırsak ve ardından limite geçersek,

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{l\to\infty}\int_0^T E(v_m(t)-v_l(t))\,dt \le c_3, \qquad \forall T\ge 0 \tag{3.17}$$

olur.

(3.16) denklemini $t(v_{mt}-v_{lt})$ ile çarpıp elde edilen denklemi $(0,T)\times\mathbb{R}^n$'de integrallersek, kısmi integrasyon yaparak, (3.3) sayesinde,

$$T\ E(v_m(T)-v_l(T)) + \alpha_0\int_0^T t\,\|v_{mt}(T)-v_{lt}(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,dt \le \int_0^T E(v_m(t)-v_l(t))\,dt$$

$$+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} t\Big(f(\|\nabla v_m(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})\Delta v_m(t,x) - f(\|\nabla v_l(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})\Delta v_l(t,x)\Big)$$
$$\times(v_{mt}(t,x)-v_{lt}(t,x))\,dxdt$$

buluruz. Üstteki eşitsizliği Lemma 3.1.1 ile birlikte değerlendirdiğimizde, her $\gamma > 0$ için,

$$T\ E(v_m(T)-v_l(T)) + \alpha_0\int_0^T t\,\|v_{mt}(T)-v_{lt}(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,dt$$

$$\le \int_0^T E(v_m(t)-v_l(t))\,dt + \gamma\int_0^T tE(v_m(t)-v_l(t))\,dt + c_\gamma\int_0^T E(v_m(t)-v_l(t))\,dt$$

$$+c_\gamma\int_0^T tE(v_m(t)-v_l(t))\,\|v_{mt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,dt + K^{m,l}(T) \tag{3.18}$$

elde ederiz. (3.16) denklemini $\varepsilon t\left(v_m - v_l\right)$ ile çarpıp elde ettiğimiz denklemi $(0,T)\times\mathbb{R}^n$'de integrallediğimizde ise

$$\varepsilon\int_0^T t\left\|\Delta\left(v_m(t)-v_l(t)\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt+\varepsilon\lambda\int_0^T t\left\|v_m(t)-v_l(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt$$

$$\leq \varepsilon c_3 T E\left(v_m(T)-v_l(T)\right)+\varepsilon\int_0^T t\left\|v_{mt}(t)-v_{lt}(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt$$

$$+\varepsilon c_3\int_0^T \left\|v_m(t)-v_l(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt+\varepsilon\widetilde{K}^{m,l}(T) \tag{3.19}$$

alırız. Burada

$$\widetilde{K}^{m,l}(t):=$$

$$\int_0^t \tau\left(f(\|\nabla v_m(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}-f(\|\nabla v_l(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\|\nabla v_l(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|v_m(\tau)-v_l(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau$$

ve (3.4), (3.14)'ten,

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{l\to\infty}\left\|\widetilde{K}^{m,l}\right\|_{C[0,T]}=0$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. (3.18)'i (3.19)'a ekleyip, γ ve ε sayılarını yeterince küçük seçersek,

$$T\ E\left(v_m(T)-v_l(T)\right)\leq c_4\int_0^T tE\left(v_m(t)-v_l(t)\right)\|v_{mt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt$$

$$+c_4\int_0^T E\left(v_m(t)-v_l(t)\right)dt+c_4\left|K^{m,l}(T)\right|+c_4\left|\widetilde{K}^{m,l}(T)\right|,\qquad \forall T\geq 0$$

elde ederiz. Şimdi, $y_{m,l}(t):=tE\left(v_m(t)-v_l(t)\right)$ şeklinde gösterip, Gronwall eşitsizliğini uygularsak,

$$y_{m,l}(T)$$

$$\leq c_4\left(\int_0^T E\left(v_m(t)-v_l(t)\right)dt+\left\|K^{m,l}\right\|_{C[0,T]}+\left\|\widetilde{K}^{m,l}\right\|_{C[0,T]}\right)e^{\int_0^T\|v_{mt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt}$$

olur. Üstteki eşitsizliği, (3.15) ile birlikte değerlendirirsek, her $T\geq 0$ için,

$$T\ E\left(v_m(T)-v_l(T)\right)\leq c_5\left(\int_0^T E\left(v_m(t)-v_l(t)\right)dt+\left\|K^{m,l}\right\|_{C[0,T]}+\left\|\widetilde{K}^{m,l}\right\|_{C[0,T]}\right)$$

buluruz. Son eşitsizlikte limite geçip (3.17)'yi göz önüne alırsak,

$$\limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{l\to\infty} T\ E\left(v_m\left(T\right)-v_l\left(T\right)\right)\leq c_6, \quad \forall T\geq 0$$

alırız, ve buradan da

$$\limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{l\to\infty}\|S(t_{k_m})\varphi_{k_m}-S(t_{k_l})\varphi_{k_l}\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)}\leq\frac{c_7}{\sqrt{T}}, \qquad \forall T>0$$

olur. Sonuç olarak,

$$\liminf_{l\to\infty}\ \liminf_{m\to\infty}\|S(t_k)\varphi_k-S(t_m)\varphi_m\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)}=0$$

elde ederiz. Böylece [35, Lemma 3.4]'ün ispatının sonundaki argümanları kullanarak, lemmanın ispatını tamamlarız. ■

Artık yerel olmayan çekicinin varlığının ispatını tamamlayabiliriz. (3.3) ve (3.6) koşullarından, (3.1)-(3.2) problemi aşağıdaki kesin Lyapunov fonksiyonuna sahiptir.

$$\Phi\left(u\left(t\right)\right)=E\left(u\left(t\right)\right)+\frac{1}{2}F\left(\|\nabla u\left(t\right)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)-\int\limits_{\mathbb{R}^n}h\left(x\right)u\left(t,x\right)dx.$$

Böylece, Teorem 2.0.37'yi kullanarak, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 3.1.3 *(3.3) ve (3.4) koşulları altında (3.1)-(3.2) probleminin ürettiği* $\{S\left(t\right)\}_{t\geq 0}$ *yarı grubu* $H^2\left(\mathbb{R}^n\right)\times L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$*'de* $\mathcal{A}$ *yerel olmayan çekicisine sahiptir ve* $\mathcal{A}=\mathcal{M}^u\left(\mathcal{N}\right)$.

3.2 Yerel Olmayan Çekicinin Düzgünlüğü

Yerel olmayan çekicinin düzgünlüğünü ispatlamaya aşağıdaki lemmayla başlayalım.

Lemma 3.2.1 *Varsayalım ki (3.3) ve (3.4) koşulları sağlansın ve* B *kümesi* $H^4\left(\mathbb{R}^n\right)\times H^2\left(\mathbb{R}^n\right)$*'nin sınırlı altkümesi olsun. Bu durumda,*

$$\sup_{\varphi\in B}\|S\left(t\right)\varphi\|_{H^4(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)}\leq C, \quad \forall t\geq 0$$

olacak şekilde $C>0$ *sabiti vardır.*

İspat. $(u_0,u_1)\in B$ ve $\left(u\left(t\right),u_t\left(t\right)\right):=S\left(t\right)\left(u_0,u_1\right)$ olsun. Buradan, $u\in C\left([0,\infty);H^4\left(\mathbb{R}^n\right)\right)\cap C^1\left([0,\infty);H^2\left(\mathbb{R}^n\right)\right)\cap C^2\left([0,\infty);L^2\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ olur. Aşağıdaki gibi v fonksiyonu tanımlayalım:

$$v\left(t,x\right):=\frac{u\left(t+\tau,x\right)-u\left(t,x\right)}{\tau},\ \tau>0.$$

(3.1)'den,

$$v_{tt}(t,x)+\Delta^2 v(t,x)+\alpha(x)v_t(t,x)+\lambda v(t,x)-f\left(\|\nabla u\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\Delta v\,(t,x)$$

$$-\frac{f(\|\nabla u\,(t+\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})-f\left(\|\nabla u\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)}{\tau}\Delta u(t+\tau,x)=0,\quad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n \tag{3.20}$$

alırız. (3.20) denklemini v_t ile çarpıp, $\mathbb{R}^n$'de integrallersek,

$$\frac{d}{dt}E(v(t))+\int_{\mathbb{R}^n}\alpha\,(x)\,|v_t\,(t,x)|^2\,dx+\frac{1}{2}f\left(\|\nabla u\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\frac{d}{dt}\left(\|\nabla v\,(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)$$

$$-\frac{f(\|\nabla u\,(t+\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})-f\left(\|\nabla u\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)}{\tau}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta u(t+\tau,x)v_t\,(t,x)\,dx=0 \tag{3.21}$$

buluruz. Diğer taraftan,

$$\left|\frac{d}{dt}f\left(\|\nabla u\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\right|=\left|\frac{f'\left(\|\nabla u\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)}{\|\nabla u\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\langle\nabla u\,(t)\,,\nabla u_t\,(t)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right|$$

$$\leq\left|f'\left(\|\nabla u\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\right|\|\nabla u_t\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,,\ \text{h.h.y. }(0,\infty)\text{'da}$$

olduğundan, (3.3) ve (3.7)'yi (3.21)'de göz önüne alırsak,

$$\frac{d}{dt}\left(E(v(t))+\frac{1}{2}f\left(\|\nabla u\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\|\nabla v\,(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)+\alpha_0\,\|v_t\,(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq c_1\left(\|\nabla u_t\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|\nabla v\,(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|\nabla v\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta u(t+\tau,x)v_t\,(t,x)\,dx\right)$$

$$\leq c_2\left(\|\nabla u_t\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|v\,(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}\|v\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|v\,(t)\|^{\frac{1}{2}}_{H^2(\mathbb{R}^n)}\|v\,(t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|v_t\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)$$

elde ederiz. Ek olarak, (3.7)'den,

$$\|v\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\left\|\frac{u\,(t+\tau,x)-u\,(t,x)}{\tau}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leq\sup_{0\leq t<\infty}\|u_t\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}<\widehat{C}$$

alırız ve bunu bir önceki eşitsizlikte kullanırsak,

$$\frac{d}{dt}\left(E(v(t))+\frac{1}{2}f\left(\|\nabla u\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\|\nabla v\,(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)+\alpha_0\,\|v_t\,(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq c_3\left(\|\nabla u_t\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|v\,(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}+\|v\,(t)\|^{1/2}_{H^2(\mathbb{R}^n)}\|v_t\,(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \tag{3.22}$$

olur. (3.20) denklemini εv ile çarpıp $\mathbb{R}^n$'de integrallersek,

$$\varepsilon\frac{d}{dt}\left(\langle v(t), v_t(t)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\alpha(x)\, v(t,x)^2\,dx\right)+\varepsilon\|\Delta v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$+\varepsilon\lambda\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\le\varepsilon\|v_t(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\varepsilon c_4\|v(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \tag{3.23}$$

alırız. (3.22) ve (3.23)'ü göz önüne alırsak, yeterince küçük $\varepsilon>0$ için, Young eşitsizliğini uygulayarak,

$$\frac{d}{dt}\Psi(t)+c_5E(v(t))\le c_6+c_6\|\nabla u_t(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{3.24}$$

buluruz. Burada $c_5>0$ ve

$$\Psi(t):=E(v(t))+\frac{1}{2}f(\|\nabla u(t)\|)\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\varepsilon\langle v(t), v_t(t)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\alpha(x)|v(t,x)|^2\,dx.$$

Diğer taraftan, $\varepsilon>0$ yeterince küçük olduğundan,

$$cE(v(t))\le\Psi(t)\le\widetilde{c}E(v(t)) \tag{3.25}$$

olacak şekilde $c>0$, $\widetilde{c}>0$ sabitleri vardır. Öyleyse, (3.24) ve (3.25)'ten,

$$\frac{d}{dt}\Psi(t)+c_7\Psi(t)\le c_6+c_6\|\nabla u_t(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

alırız ve bu eşitsizlikten de

$$\Psi(t)\le c_8+e^{-c_7t}c_8\int_0^t\|\nabla u_t(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}e^{c_7s}ds$$
$$\le c_8+c_8\sup_{t\in[0,T]}\left(\|u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|u_t(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}\right),\quad\forall T\ge0$$

elde ederiz. Son eşitsizlikte, (3.7) ve (3.25)'i göz önüne alırsak, her $T\ge0$ için,

$$E(v(t))\le c_9+c_9\sup_{t\in[0,T]}\|u_t(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)},\quad\forall t\in[0,T]$$

olur. Üstteki eşitsizlikte v fonksiyonunun tanımını kullanarak, $\tau\to0$ iken limite geçersek, her $T\ge0$ için,

$$E(u_t(t))\le c_9+c_9\sup_{t\in[0,T]}\|u_t(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)},\quad\forall t\in[0,T]$$

buluruz. Böylece, $[0,T]$ üzerinde supremum aldıktan ve Young eşitsizliği uyguladıktan sonra,

$$E(u_t(t))\le c_{10},\quad\forall t\ge0$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği (3.1)'de göz önüne alırsak,

$$\|u(t)\|_{H^4(\mathbb{R}^n)} \leq c_{11}$$

olur ve bu eşitsizliği bir önceki eşitsizlikle birlikte ele alırsak, bir $C > 0$ sabiti için,

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{H^4(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)} \leq C,$$

buluruz ve böylelikle ispat tamamlanır. ■

Şimdi çekicinin düzgün olduğunu gösterebiliriz.

Teorem 3.2.2 *Teorem 3.1.3'ün koşulları altında, (3.1)-(3.2) probleminin, $\mathcal{A}$ yerel olmayan çekicisi $H^4(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$'de sınırlıdır.*

İspat. $\theta \in \mathcal{A}$ olsun. $\mathcal{A}$'nın değişmezliğinden, $U(0) = \theta$ olacak şekilde değişmez $\gamma = \{U(t) = (u(t), u_t(t)) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{A}$ yörüngesi vardır (bkz. [36], syf. 159). Değişmez yörünge ile $S(t)U(\tau) = U(t+\tau)$, $\forall\, t \geq 0$ ve $\tau \in \mathbb{R}$ olacak şekilde $\gamma = \{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$ eğrisini ifade ediyoruz (bkz. [36], syf. 157).

(3.1) dekleminde $h \equiv 0$ olduğu durumda, (3.4)'ten, sabit noktalar kümesi $\mathcal{N} = \{(0,0)\}$'dır. Teorem 3.1.3'ten ve kararsız manifoldun tanımından,

$$\lim_{t\to-\infty} \inf_{w\in\mathcal{N}} \|U(t) - w\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} = 0 \tag{3.26}$$

olur. Buradan, Lyapunov fonksiyonu $\Phi(\cdot)$'nin monotonluğundan, $\mathcal{A} = \{(0,0)\}$ alırız. Bu nedenle, $h \neq 0$ durumunu inceleyeceğiz. Bu durumda, $\mathcal{N}$ sabit noktalar kümesinin $(0,0)$ noktasını içermediği açıktır. $\mathcal{N}$ kompakt olduğundan, (çünkü $\mathcal{A}$'nın kapalı alt kümesidir), bir $c_0 > 0$ için,

$$\min_{(\varphi,0)\in\mathcal{N}} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq c_0$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği, (3.26) ile birlikte ele alırsak,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} > \frac{c_0}{2}, \quad \forall t \leq t_0 \tag{3.27}$$

olacak şekilde $t_0 \in (-\infty, 0)$ vardır. Şimdi, tekrar

$$v(t,x) := \frac{u(t+\tau, x) - u(t,x)}{\tau}$$

şeklinde tanımlarsak, (3.20) denklemini alırız. (3.20) denklemini v_t ile çarpıp $\mathbb{R}^n$ üzerinde integrallersek, (3.27)'yi kullanarak,

$$\frac{d}{dt}\left(E(v(t)) + \frac{1}{2}f(\|\nabla u(t)\|)\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) + \alpha_0 \|v_t(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \frac{f'(\|\nabla u(t)\|)}{\|\nabla u(t)\|}\|\Delta u(t)\|\|u_t(t)\|\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$+\widehat{c}_1\|\nabla v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta u(t+\tau,x)v_t(t,x)\,dx$$
$$\leq \widehat{c}_2\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\widehat{c}_2\|\nabla v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|v_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leq \widehat{c}_3\|v(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}+\widehat{c}_3\|v(t)\|^{1/2}_{H^2(\mathbb{R}^n)}\|v_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{3.28}$$

elde ederiz. (3.23), (3.25) ve (3.28)'i kullanarak,

$$\frac{d}{dt}\Psi(t)+\widehat{c}_4\Psi(t)\leq\widehat{c}_5\ ,\ \ \forall t\leq t_0$$

buluruz, buradan da, $\widehat{c}_4>0$ olmak üzere,

$$\Psi(t)\leq\widehat{c}_6+e^{\widehat{c}_4(s-t)}\Psi(s)\,,\qquad s\leq t\leq t_0$$

alırız. Böylece, $s\to-\infty$ iken limite geçersek ve $\cup_{t\in\mathbb{R}}U(t)\subset\mathcal{A}$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$\Psi(t)\leq\widehat{c}_6$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği (3.25) ile birlikte değerlendirirsek,

$$E(v(t))\leq\widehat{c}_7$$

olur. Son eşitsizlikte, v fonksiyonunun tanımını dikkate alıp, $\tau\to0$ iken limite geçersek,

$$E(u_t(t))\leq\widehat{c}_7,\quad\forall t\leq t_0 \tag{3.29}$$

alırız. (3.29)'u (3.1)'de göz önüne alırsak,

$$\|u(t)\|_{H^4(\mathbb{R}^n)}\leq\widehat{c}_8,\ \ \forall t\leq t_0$$

buluruz. Bu eşitsizliği (3.29) ile birlikte ele aldığımızda ise

$$\|(u(t)\,,u_t(t))\|_{H^4(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)}\leq\widehat{c}_9,\ \ \forall t\leq t_0$$

olur. Böylece, Lemma 3.2.1'i $B=\{(u(t)\,,u_t(t)):t\in(-\infty,t_0]\}$ kümesine uygularsak, $C>0$ sabiti θ'dan bağımsız olmak üzere,

$$\|\theta\|_{H^4(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)}\leq C$$

elde ederiz ve teoremin ispatı biter. ■

3.3 Yerel Olmayan Çekicinin Sonlu Boyutluluğu

Bu bölümde, sonlu boyutluluğu elde etmek için [6]'daki yöntemi kullanacağız. Aşağıdaki lemmalarla başlayalım.

Lemma 3.3.1 *Varsayalım ki (3.3) ve (3.4) koşulları sağlansın ve bir $c>0$ sabiti için,*

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(0,\infty;H^2(\mathbb{R}^n))}+\int_0^\infty \|u_t(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,dt<c \tag{3.30}$$

olmak üzere $u\in W^{1,\infty}\left(0,\infty;H^2\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ olsun. Ayrıca, $\{T\left(t,\tau\right)\}_{t\geq\tau}$ süreci, $H^2\left(\mathbb{R}^n\right)\times L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$'de aşağıdaki problemin ürettiği süreç olsun.

$$\begin{cases} v_{tt}(t,x)+\Delta^2 v(t,x)+\alpha(x)v_t(t,x)+\lambda v(t,x) \\ -f\left(\|\nabla u\left(t\right)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\Delta v\left(t,x\right)=0, \quad t\geq\tau, \ \ x\in\mathbb{R}^n \\ v\left(\tau\right)=v_0, \ \ v_t\left(\tau\right)=v_1, \qquad \tau\geq 0. \end{cases} \tag{3.31}$$

Bu durumda, $i=0,1$ ve $L\left(X\right)$ uzayı X üzerinde lineer sınırlı operatörler uzayı olmak üzere,

$$\|T\left(t,\tau\right)\|_{L\left(H^{2(1+i)}(\mathbb{R}^n)\times H^{2i}(\mathbb{R}^n)\right)}\leq Me^{-\omega(t-\tau)}, \ \ \forall t\geq\tau$$

olacak şekilde $M=M\left(c\right)>1$ and $w=w\left(c\right)>0$ sabitleri vardır.

İspat. Lemma 3.2.1'deki gibi yeterince küçük $\varepsilon>0$ için $(v_t+\varepsilon v)$ çarpanını kullanırsak, ve Young eşitsizliğini uygularsak, bir $\gamma>0$ için,

$$\frac{d}{dt}\Psi\left(t\right)+\gamma E\left(v\left(t\right)\right)\leq c_1\left\|\nabla u_t\left(t\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\left\|\nabla v\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

olur. İnterpolasyon kullanarak, (3.25) ve (3.30)'dan,

$$\frac{d}{dt}\Psi\left(t\right)+\gamma\Psi\left(t\right)\leq c_2\left\|u_t\left(t\right)\right\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\Psi\left(t\right)$$

buluruz. Böylece, Gronwall eşitsizliği ve (3.25)'ten,

$$E\left(v\left(t\right)\right)\leq c_3 E\left(v\left(\tau\right)\right)e^{c_2\int_\tau^t\|u_t(\sigma)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\sigma-\gamma(t-\tau)} \tag{3.32}$$

alırız. Hölder eşitsizliği ve (3.30)'dan,

$$\int_\tau^t\left\|u_t\left(\sigma\right)\right\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\sigma\leq c_4\left(t-\tau\right)^{\frac{3}{4}}$$

olduğundan, (3.32)'den, bir $M_1>1$ ve $\omega>0$ için,

$$\|T\left(t,\tau\right)\|_{L(H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n))}\leq M_1 e^{-\omega(t-\tau)}, \ \ \forall t\geq\tau \tag{3.33}$$

elde ederiz.

Şimdi, $w := v_t$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda, w fonksiyonu,

$$w_{tt}(t,x) + \Delta^2 w(t,x) + \alpha(x) w_t(t,x) + \lambda w(t,x) - f\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\Delta w(t,x)$$

$$-\frac{f'\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)}{\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\left\langle \nabla u_t(t), \nabla u(t)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \Delta v(t,x) = 0, \quad t \geq \tau,\ x \in \mathbb{R}^n$$

denkleminin çözümüdür. Değişkenlerin varyasyonu formülünden,

$$W(t) = T(t,\tau) W(\tau) + \int_\tau^t T(t,s) G(s)\, ds$$

olur. Burada

$$W(t) := (w(t), w_t(t))$$

ve

$$G(t) := \left(0, \frac{f'\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)}{\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\left\langle \nabla u_t(t), \nabla u(t)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \Delta v(t)\right).$$

Böylece, (3.33)'ü kullanarak,

$$\|W(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|T(t,\tau) W(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_\tau^t \|T(t,s) G(s)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)}\, ds$$

$$\leq M_1 e^{-\omega(t-\tau)} \|W(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} + c_5 \int_\tau^t e^{-\omega(t-s)} \|G(s)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)}\, ds$$

$$\leq M_1 e^{-\omega(t-\tau)} \|W(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} + c_6 \int_\tau^t e^{-\omega(t-s)} \|v(s)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}\, ds$$

$$\leq M_1 e^{-\omega(t-\tau)} \|W(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} + c_7 \int_\tau^t e^{-\omega(t-s)} e^{-\omega(s-\tau)} \|(v(\tau), v_t(\tau))\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)}\, ds$$

$$\leq c_8 e^{-\omega(t-\tau)}\left(\|W(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} + \|(v(\tau), v_t(\tau))\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)}\right), \quad \forall t \geq \tau$$

buluruz. Sonuç olarak, son eşitsizliği $(3.31)_1$ ile birlikte değerlendirirsek, bir $M_2 > 1$ sabiti için,

$$\|T(t,\tau)\|_{L(H^4(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n))} \leq M_2 e^{-\omega(t-\tau)}, \ \ \forall t \geq \tau,$$

elde ederiz. ■

Şimdi, yerel olmayan çekicinin sonlu boyutluluğuyla ilgili teoremi verebiliriz.

Teorem 3.3.2 *Teorem 3.1.3'ün koşulları altında, yerel olmayan çekici $\mathcal{A}$'nın fraktal boyutu sonludur.*

İspat. Kabul edelim ki $\theta_1,\ \theta_2 \in \mathcal{A}$ ve $(u(t), u_t(t)) = S(t)\theta_1,\ (v(t), v_t(t)) = S(t)\theta_2$ olsun ve $w(t) := v(t) - u(t)$ şeklinde tanımlayalım. Buradan,

$$w_{tt}(t,x) + \Delta^2 w(t,x) + \alpha(x) w_t(t,x) + \lambda w(t,x) - f\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\Delta w(t,x)$$
$$-\left(f\left(\|\nabla v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) - f\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\right)\Delta v(t,x) = 0 \qquad (3.34)$$

buluruz. Böylece, değişkenlerin varyasyonu formülünden,

$$(w(t), w_t(t)) = T(t,0)(w(0), w_t(0)) + \int_0^t T(t,\tau)\widehat{G}(\tau)\,d\tau,$$

alırız. Burada $\widehat{G}(t) = \left(0, \left(f\left(\|\nabla v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) - f\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\right)\Delta v(t)\right)$'dir. Lemma 3.3.1'den,

$$\|S(t)\theta_2 - S(t)\theta_1\|_{H^4(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)} \leq M e^{-\omega t}\|\theta_2 - \theta_1\|_{H^4(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$+\widetilde{c}_1 \int_0^t e^{-\omega(t-\tau)}\|S(\tau)\theta_2 - S(\tau)\theta_1\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)}\,d\tau \qquad (3.35)$$

olur. Gronwall eşitsizliğini (3.35)'e uygularsak,

$$\|S(t)\theta_2 - S(t)\theta_1\|_{H^4(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)} \leq M e^{(\widetilde{c}_2-\omega)t}\|\theta_2 - \theta_1\|_{H^4(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)},\ \ \forall t \geq 0 \quad (3.36)$$

elde deriz. Ayrıca, (3.35)'ten, her $r > 0$ için

$$\|S(t)\theta_2 - S(t)\theta_1\|_{H^4(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leq M e^{-\omega t}\|\theta_2 - \theta_1\|_{H^4(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{\widetilde{c}_1}{\omega}\sup_{0\leq\tau\leq t}\|S(\tau)\theta_2 - S(\tau)\theta_1\|_{H^2(B(0,r))\times L^2(B(0,r))}$$
$$+\widetilde{c}_1\int_0^t e^{-\omega(t-\tau)}\|S(\tau)\theta_2 - S(\tau)\theta_1\|_{H^2(\mathbb{R}^n\backslash B(0,r))\times L^2(\mathbb{R}^n\backslash B(0,r))}\,d\tau,\ \forall t \geq 0 \qquad (3.37)$$

olur. Burada $B(0,r) = \{x : x \in \mathbb{R}^n, |x| < r\}$'dir.

Şimdi, (3.37) eşitsizliğinin sağ tarafındaki integral terimi değerlendirelim. Aşağıdaki gibi bir kesme fonksiyonu tanımlayalım:

$$\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ 0 \leq \eta(x) \leq 1,\ \eta(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| \geq 2 \end{cases} \ \text{ ve } \eta_r(x) = \eta\left(\frac{x}{r}\right).$$

(3.34) denklemini η_r ile çarpıp, $w_r(t) = \eta_r w(t)$ şeklinde gösterirsek,

$$w_{rtt}(t,x) + \Delta^2 w_r(t,x) + \alpha(x) w_{rt}(t,x) + \lambda w_r(t,x) - f\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \Delta w_r(t,x)$$
$$-\eta_r \left(f\left(\|\nabla v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) - f\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\right) \Delta v(t,x) = f_1(t)$$

elde ederiz. Burada

$$f_1(t) = \Delta^2 \eta_r w + 2\Delta\eta_r \Delta w + 2\sum_{i=1}^{n} (\Delta\eta_r)_{x_i} w_{x_i} + 2\sum_{i=1}^{n} (\eta_r)_{x_i} \Delta w_{x_i} + 4\sum_{i,j=1}^{n} (\eta_r)_{x_i x_j} w_{x_i x_j}$$
$$-\Delta\eta_r f\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) w - 2f\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \sum_{i=1}^{n} (\eta_r)_{x_i} w_{x_i}.$$

Öyleyse,

$$G_r(t) := \left(0, \eta_r \left(f\left(\|\nabla v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) - f\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\right) \Delta v(t) + f_1(t)\right)$$

olmak üzere, değişkenlerin varyasyonu formülünden

$$(w_r(t), w_{rt}(t)) = T(t,0)(w_r(0), w_{rt}(0)) + \int_0^t T(t,\tau) G_r(\tau)\, d\tau \tag{3.38}$$

alırız. Böylece, Lemma 3.3.1'i (3.38)'e uygularsak ve (3.36)'yı göz önüne alırsak, $\Pi_r := \sup\limits_{t\geq 0} \|\Delta v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0,r))} + \frac{1}{r}$ olmak üzere

$$\|(w_r(t), w_{rt}(t))\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} \leq M e^{-\omega t} \|\theta_2 - \theta_1\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$+\widetilde{c}_3 e^{-\omega t} \int_0^t e^{\omega\tau} \|\Delta v(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus B(0,r))} \|w(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}\, d\tau + \frac{\widetilde{c}_3}{r} e^{-\omega t} \int_0^t e^{\omega\tau} \|w(\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^n)}\, d\tau$$
$$\leq \widetilde{c}_4 \left(e^{-\omega t} + \Pi_r e^{(\widetilde{c}_1 - \omega)t}\right) \|\theta_2 - \theta_1\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t \geq 0, \ \forall r \geq 1$$

buluruz. Böylelikle, son eşitsizliği (3.36) ile birlikte değerlendirirsek

$$\int_0^t e^{-\omega(t-\tau)} \|S(\tau)\theta_2 - S(\tau)\theta_1\|_{H^2(\mathbb{R}^n\setminus B(0,r))\times L^2(\mathbb{R}^n\setminus B(0,r))}\, d\tau$$
$$\leq \widetilde{c}_5 \left(e^{-\omega t} + \Pi_r e^{(\widetilde{c}_2 - \omega)t}\right) t \|\theta_2 - \theta_1\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t \geq 0, \ \forall r \geq 1 \tag{3.39}$$

olur. Sonuç olarak, (3.37) ve (3.39)'dan,

$$\|S(t)\theta_2 - S(t)\theta_1\|_{H^4(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)} \leq \widetilde{c}_6 \left(e^{-\omega t} + e^{-\omega t} t + \Pi_r e^{(\widetilde{c}_2 - \omega)t} t\right) \|\theta_2 - \theta_1\|_{H^4(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$+\widetilde{c}_6 \sup_{0\leq\tau\leq t} \|S(\tau)\theta_2 - S(\tau)\theta_1\|_{H^2(B(0,r))\times L^2(B(0,r))}, \quad \forall t \geq 0, \ \forall r \geq 1 \tag{3.40}$$

elde ederiz. $\mathcal{A}$ çekicisi kompakt olduğundan, $r \to \infty$ iken $\Pi_r \to 0$ olur ve bu yakınsama $\mathcal{A}$'dan başlayan yörüngelere göre düzgündür. Böylece, Teorem 2.0.33'ü uygulayarak, (3.36) ve (3.40)'tan, $\mathcal{A}$ yerel olmayan çekicisinin sonlu boyutlu olduğunu elde ederiz. ■

4 SINIRLI OLMAYAN BÖLGEDE, $f(\|u\,(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\,|u|^{p-2}\,u$ TERİMİNİ İÇEREN LEVHA DENKLEMİNİN ÇEKİCİSİ

Tezimizin bu bölümünde, yerel dissipatif terime ve yerel olmayan, doğrusal olmayan terime sahip yarı doğrusal levha denklemi için aşağıdaki Cauchy probleminin çözümlerinin uzun zaman davranışını, yerel olmayan çekiciler vasıtasıyla inceledik.

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \alpha(x)u_t + \lambda u + f(\|u\,(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\,|u|^{p-2}\,u = h\,(x)\,, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \tag{4.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \ \ u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2}$$

Burada $\lambda > 0$, $h \in L^2\,(\mathbb{R}^n)\,$, $p \geq 2$, $p\,(n-4) \leq 2n-4$'dir. Ayrıca, $\alpha\,(\cdot)$ ve $f\,(\cdot)$ fonksiyonları

$$\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\ \alpha(\cdot) > 0 \ \text{ h.h.y. } \mathbb{R}^n\text{'de}, \tag{4.3}$$

$$\text{bir } r_0 > 0 \text{ için; } \alpha(\cdot) \geq \alpha_0 > 0 \text{ h.h.y. } \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq r_0\}\text{'de}, \tag{4.4}$$

$$f \in C^1(\mathbb{R}^+), \ \ f\,(\cdot) \geq 0, \tag{4.5}$$

koşullarını sağlamaktadır.

Yarı grup teorisini uygulayarak (bkz [33, syf.56-58]) ve 3. bölümün başındaki argümanları tekrarlayarak, aşağıdaki varlık-teklik teoremi kolayca ispatlanabilir.

Teorem 4.0.1 *(4.3)-(4.5) koşulları sağlansın. Bu durumda, her $T > 0$ ve $(u_0, u_1) \in H^2\,(\mathbb{R}^n) \times L^2\,(\mathbb{R}^n)$ için, (4.1)-(4.2) probleminin tek $u \in C\,([0,T]; H^2\,(\mathbb{R}^n)) \cap C^1\,([0,T]; L^2\,(\mathbb{R}^n))$ zayıf çözümü vardır ve bu çözüm*

$$E_{\mathbb{R}^n}\,(u\,(t)) + \frac{1}{p}F\left(\|u\,(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} h\,(x)\,u\,(t,x)\,dx + \int\limits_s^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha\,(x)\,|u_t\,(\tau,x)|^2\,dxd\tau$$

$$= E_{\mathbb{R}^n}\,(u\,(s)) + \frac{1}{p}F\left(\|u\,(s)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} h\,(x)\,u\,(s,x)\,dx, \quad \forall t \geq s \geq 0, \tag{4.6}$$

enerji eşitliğini sağlar. Burada her $z \in \mathbb{R}^+$ için; $F\,(z) = \int\limits_0^z f\,(\sqrt[p]{s})\,ds$, ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ altkümesi için $E_\Omega\,(u\,(t)) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (|u_t\,(t,x)|^2 + |\Delta u\,(t,x)|^2 + \lambda\,|u\,(t,x)|^2)dx$. Ayrıca, eğer $(u_0, u_1) \in H^4\,(\mathbb{R}^n) \times H^2\,(\mathbb{R}^n)$ ise $u \in C\,([0,T]; H^4\,(\mathbb{R}^n)) \cap C^1\,([0,T]; H^2\,(\mathbb{R}^n))$ olur.

Ek olarak, eğer $v, w \in C([0,T]; H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T]; L^2(\mathbb{R}^n))$ fonksiyonları (4.1)-(4.2) probleminin $(v_0, v_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ ve $(w_0, w_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ başlangıç koşullarına uygun çözümü ise

$$\|v(t) - w(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|v_t(t) - w_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq c(T, \widetilde{r}) \left(\|v_0 - w_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|v_1 - w_1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right), \quad \forall t \in [0,T],$$

olur. Burada $c : R_+ \times R_+ \to R_+$ fonksiyonu her bir değişkene göre azalmayandır ve $\widetilde{r} = \max \left\{ \|(v_0, v_1)\|_{H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)}, \|(w_0, w_1)\|_{H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)} \right\}$'dir.

Böylece, Teorem 4.0.1'e göre, $u(t, \cdot)$ fonksiyonu (4.1)-(4.2) probleminin, (u_0, u_1) başlangıç koşuluna uygun zayıf çözümü olmak üzere, (4.1)-(4.2) problemi, $(u(t), u_t(t)) = S(t)(u_0, u_1)$ formülüyle, $H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$'de kuvvetli sürekli $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ yarıgrubu üretir.

Şimdi, elde ettiğimiz esas sonucu verebiliriz.

Teorem 4.0.2 *(4.3)-(4.5) koşulları altında, (4.1)-(4.2) probleminin ürettiği $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ yarıgrubu $H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$'de $\mathcal{A}$ yerel olmayan çekicisine sahiptir ve $\mathcal{A} = \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$. Ayrıca, $\mathcal{A}$ yerel olmayan çekicisi $H^4(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$'de sınırlıdır.*

4.1 Yerel Olmayan Çekicinin Varlığı

Aşağıdaki lemmanın ispatıyla başlayalım.

Lemma 4.1.1 *(4.5) koşulu sağlansın. Aynı zamanda, kabul edelim ki $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi $L^\infty(0, \infty; H^2(\mathbb{R}^n))$'de zayıf $-*$ yakınsak, $\{v_{mt}\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi $L^\infty(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^n))$'de sınırlı ve her $t \geq 0$ için $\left\{ \|v_m(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi yakınsak olsun. Bu durumda, her $r > 0$ için*

$$\lim_{m \to \infty} \limsup_{l \to \infty} \left| \int_0^t \int_{B(0,r)} \tau \left(f\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) |v_m(\tau, x)|^{p-2} v_m(\tau, x) \right. \right.$$

$$\left. \left. - f\left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) |v_l(\tau, x)|^{p-2} v_l(\tau, x) \right) (v_{mt}(\tau, x) - v_{lt}(\tau, x)) \, dx d\tau \right| = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

İspat. Keyfi $\varepsilon > 0$ için, $f_\varepsilon(u) = \begin{cases} f(u), & u \geq \varepsilon, \\ f(\varepsilon), & 0 \leq u < \varepsilon, \end{cases}$ şeklinde tanımlayalım. Buradan,

$$\left| f\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) - f_\varepsilon\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \right| \leq \max_{0 \leq s_1, s_2 \leq \varepsilon} |f(s_1) - f(s_2)|,$$

alırız ve ardından

$$\left|\int_0^t \int_{B(0,r)} \tau \left(f\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) |v_m(\tau,x)|^{p-2} v_m(\tau,x) \right.\right.$$

$$\left.\left. - f\left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) |v_l(\tau,x)|^{p-2} v_l(\tau,x) \right) \left(v_{mt}(\tau,x) - v_{lt}(\tau,x) \right) dx d\tau \right|$$

$$\leq \left|\int_0^t \int_{B(0,r)} \tau \left(f_\varepsilon\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) |v_m(\tau,x)|^{p-2} v_m(\tau,x) \right.\right.$$

$$\left.\left. - f_\varepsilon\left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) |v_l(\tau,x)|^{p-2} v_l(\tau,x) \right) \left(v_{mt}(\tau,x) - v_{lt}(\tau,x) \right) dx d\tau \right|$$

$$+ c\, t \max_{0 \leq s_1, s_2 \leq \varepsilon} |f(s_1) - f(s_2)|, \quad \forall t \geq 0, \tag{4.7}$$

elde ederiz.

(4.7)'nin sağ tarafındaki ilk terimi değerlendirelim:

$$\left|\int_0^t \int_{B(0,r)} \tau \left(f_\varepsilon\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) |v_m(\tau,x)|^{p-2} v_m(\tau,x) \right.\right.$$

$$\left.\left. - f_\varepsilon\left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) |v_l(\tau,x)|^{p-2} v_l(\tau,x) \right) \left(v_{mt}(\tau,x) - v_{lt}(\tau,x) \right) dx d\tau \right|$$

$$= \int_0^t \tau f_\varepsilon\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \int_{B(0,r)} |v_m(\tau,x)|^{p-2} v_m(\tau,x) v_{mt}(\tau,x)\, dx d\tau$$

$$+ \int_0^t \tau f_\varepsilon\left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \int_{B(0,r)} |v_l(\tau,x)|^{p-2} v_l(\tau,x) v_{lt}(\tau,x)\, dx d\tau.$$

$$- \int_0^t \tau f_\varepsilon\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \int_{B(0,r)} |v_m(\tau,x)|^{p-2} v_m(\tau,x) v_{lt}(\tau,x)\, dx d\tau$$

$$- \int_0^t \tau f_\varepsilon\left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \int_{B(0,r)} |v_l(\tau,x)|^{p-2} v_l(\tau,x) v_{mt}(\tau,x)\, dx d\tau. \tag{4.8}$$

(4.8)'in sağ tarafındaki ilk iki terim için,

$$\int_0^t \tau f_\varepsilon\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \int_{B(0,r)} |v_m(\tau,x)|^{p-2} v_m(\tau,x) v_{mt}(\tau,x)\, dx d\tau$$

$$+ \int_0^t \tau f_\varepsilon\left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \int_{B(0,r)} |v_l(\tau,x)|^{p-2} v_l(\tau,x) v_{lt}(\tau,x)\, dx d\tau.$$

$$= \frac{1}{p} t f_\varepsilon \left(\|v_m(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \|v_m(t)\|^p_{L^p(B(0,r))} + \frac{1}{p} t f_\varepsilon \left(\|v_l(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \|v_l(t)\|^p_{L^p(B(0,r))}$$

$$- \frac{1}{p} \int_0^t f_\varepsilon \left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \|v_m(\tau)\|^p_{L^p(B(0,r))} d\tau - \frac{1}{p} \int_0^t f_\varepsilon \left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \|v_l(\tau)\|^p_{L^p(B(0,r))} d\tau$$

$$- \frac{1}{p} \int_0^t \tau \frac{d}{dt} \left(f_\varepsilon \left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \right) \|v_m(\tau)\|^p_{L^p(B(0,r))} d\tau$$

$$- \frac{1}{p} \int_0^t \tau \frac{d}{dt} \left(f_\varepsilon \left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \right) \|v_l(\tau)\|^p_{L^p(B(0,r))} d\tau,$$

alırız. $\left\{ \|v_m(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\}_{m=1}^\infty$ dizisi yakınsak olduğundan, f_ε fonksiyonunun sürekliliğinden, $\left\{ f_\varepsilon \left(\|v_m(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \right\}_{m=1}^\infty$ dizisi de her $t \in [0, \infty)$ için yakınsaktır. Ayrıca, lemmanın koşullarından ve f_ε fonksiyonunun tanımından, $\left\{ f_\varepsilon \left(\|v_m(.)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)_{m=1}^\infty \right\}$ dizisinin $W^{1,\infty}(0, \infty)$'da sınırlı olduğunu elde ederiz. Böylece, $\left\{ f_\varepsilon \left(\|v_m(.)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \right\}_{m=1}^\infty$ dizisi $W^{1,\infty}(0, \infty)$'de zayıf$-*$ yakınsak olur ve bir $Q \in W^{1,\infty}(0, \infty)$ ve $v \in L^\infty(0, \infty; H^2(\mathbb{R}^n))$ $\cap W^{1,\infty}(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^n))$ için

$$\begin{cases} f_\varepsilon \left(\|v_m(.)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \overset{w^*}{\to} Q \quad W^{1,\infty}(0, \infty)\text{'da}, \\ v_m \overset{w^*}{\to} v \quad L^\infty(0, \infty; H^2(\mathbb{R}^n))\text{'de}, \\ v_{mt} \overset{w^*}{\to} v_t \quad L^\infty(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^n))\text{'de} \end{cases} \tag{4.9}$$

olur. Aubin–Lions–Simon lemmasını uygularsak (bkz [37]), $(4.9)_2$ ve $(4.9)_3$'ten, $q < \frac{2n}{(n-4)^+}$ olmak üzere,

$$v_m \to v \quad C([0, T]; L^q(B(0, r)))\text{'de}, \quad \forall T \geq 0, \tag{4.10}$$

alırız. Ardından, (4.9) ve (4.10)'ü göz önüne alırsak,

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^t \tau f_\varepsilon \left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \int_{B(0,r)} |v_m(\tau, x)|^{p-2} v_m(\tau, x) v_{mt}(\tau, x) \, dx d\tau$$

$$+ \lim_{l \to \infty} \int_0^t \tau f_\varepsilon \left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \int_{B(0,r)} |v_l(\tau, x)|^{p-2} v_l(\tau, x) v_{lt}(\tau, x) \, dx d\tau$$

$$= \frac{2}{p} t Q(t) \|v(t)\|^p_{L^p(B(0,r))} - \frac{2}{p} \int_0^t Q(\tau) \|v(\tau)\|^p_{L^p(B(0,r))} d\tau$$

$$- \frac{2}{p} \int_0^t \tau \frac{d}{dt} (Q(\tau)) \|v(\tau)\|^p_{L^p(B(0,r))} d\tau, \tag{4.11}$$

olur. Diğer taraftan, (4.8)'nin sağındaki son iki terim için, (4.9)'u kullanarak,

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{l\to\infty}\int_0^t \tau f_\varepsilon\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)\int_{B(0,r)}|v_m(\tau,x)|^{p-2}v_m(\tau,x)v_{lt}(\tau,x)\,dxd\tau$$

$$+\lim_{m\to\infty}\lim_{l\to\infty}\int_0^t \tau f_\varepsilon\left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)\int_{B(0,r)}|v_l(\tau,x)|^{p-2}v_l(\tau,x)v_{mt}(\tau,x)\,dxd\tau$$

$$=2\int_0^t \tau Q(\tau)\int_{B(0,r)}|v(\tau,x)|^{p-2}v(\tau,x)v_t(\tau,x)\,dxd\tau$$

$$=\frac{2}{p}tQ(t)\|v(t)\|^p_{L^p(B(0,r))}-\frac{2}{p}\int_0^t Q(\tau)\|v(\tau)\|^p_{L^p(B(0,r))}d\tau$$

$$-\frac{2}{p}\int_0^t \tau\frac{d}{dt}(Q(\tau))\|v(\tau)\|^p_{L^p(B(0,r))}d\tau, \tag{4.12}$$

buluruz. Böylece, (4.11)-(4.12)'yi göz önüne alarak (4.8)'de limite geçersek,

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{l\to\infty}\int_0^t\int_{B(0,r)}\tau\Big(f_\varepsilon\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|v_m(\tau,x)|^{p-2}v_m(\tau,x)$$

$$-f_\varepsilon\left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|v_l(\tau,x)|^{p-2}v_l(\tau,x)\Big)(v_{mt}(\tau,x)-v_{lt}(\tau,x))\,dxd\tau=0, \tag{4.13}$$

elde ederiz. Öyleyse, (4.7) ve (4.13)'ten, keyfi $r>0$ için,

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{l\to\infty}\Bigg|\int_0^t\int_{B(0,r)}\tau\Big(f\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|v_m(\tau,x)|^{p-2}v_m(\tau,x)$$

$$-f\left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|v_l(\tau,x)|^{p-2}v_l(\tau,x)\Big)(v_{mt}(\tau,x)-v_{lt}(\tau,x))\,dxd\tau\Bigg|$$

$$\le c\,t\max_{0\le s_1,s_2\le\varepsilon}|f(s_1)-f(s_2)|,\ \forall t\ge 0,$$

alırız. Böylece, üstteki eşitsizlikte $\varepsilon\to 0$ iken limite geçersek, lemmanın iddiasını elde ederiz. ■

Lemma 4.1.2 *Kabul edelim ki Lemma 4.1.1'in koşullarına ek olarak, (4.3) ve (4.4) koşulları da sağlansın. Bu durumda, her $\gamma>0$ için;*

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\tau\Big(f\left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|v_l(\tau,x)|^{p-2}v_l(\tau,x)-f\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|v_m(\tau,x)|^{p-2}v_m(\tau,x)\Big)$$

$$\times \left(v_{mt}(\tau,x)-v_{lt}(\tau,x)\right)dxd\tau$$

$$\leq \gamma \int_0^t \tau E_{\mathbb{R}^n\backslash(B(0,r))}\left(v_m(\tau)-v_l(\tau)\right)d\tau + c_\gamma \int_0^t E_{\mathbb{R}^n\backslash(B(0,r))}\left(v_m(\tau)-v_l(\tau)\right)d\tau$$

$$+c_\gamma \int_0^t \tau\left(\left\|\sqrt{a}v_{mt}(\tau)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\left\|\sqrt{a}v_{lt}(\tau)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)E_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,r)}\left(v_m(\tau)-v_l(\tau)\right)d\tau$$

$$+K_r^{m,l}(t),\ \forall t\geq 0,\quad \forall r\geq r_0,$$

olacak şekilde $c_\gamma > 0$ *vardır. Burada her* $t\geq 0$ *için;* $K_r^{m,l}\in C[0,t]$, $\sup\limits_{m,l}\left\|K_r^{m,l}\right\|_{C[0,t]} < \infty$ *ve* $\lim\limits_{m\to\infty}\limsup\limits_{l\to\infty}\left|K_r^{m,l}(t)\right| = 0$.

İspat. Öncelikle, her $r>0$ için

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\tau\left(f\left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|v_l(\tau,x)|^{p-2}v_l(\tau,x)-f\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|v_m(\tau,x)|^{p-2}v_m(\tau,x)\right)$$

$$\times\left(v_{mt}(\tau,x)-v_{lt}(\tau,x)\right)dxd\tau$$

$$=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,r)}\tau\left(f\left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|v_l(\tau,x)|^{p-2}v_l(\tau,x)\right.$$

$$\left.-f\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|v_m(\tau,x)|^{p-2}v_m(\tau,x)\right)\left(v_{mt}(\tau,x)-v_{lt}(\tau,x)\right)dxd\tau+K_{1,r}^{m,l}(t),\tag{4.14}$$

olur. Burada

$$K_{1,r}^{m,l}(t):=\int_0^t\int_{B(0,r)}\tau\left(f\left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|v_l(\tau,x)|^{p-2}v_l(\tau,x)\right.$$

$$\left.-f\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|v_m(\tau,x)|^{p-2}v_m(\tau,x)\right)\left(v_{mt}(\tau,x)-v_{lt}(\tau,x)\right)dxd\tau$$

ve Lemma 4.1.1'den,

$$\sup_{m,l}\left\|K_{1,r}^{m,l}\right\|_{C[0,t]}<\infty \text{ ve } \lim_{m\to\infty}\limsup_{l\to\infty}\left|K_{1,r}^{m,l}(t)\right|=0,\quad \forall t\geq 0,$$

buluruz. Diğer taraftan, (4.14)'in sağ tarafındaki ilk terim için,

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,r)}\tau\left(f\left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|v_l(\tau,x)|^{p-2}v_l(\tau,x)\right.$$

$$\left.-f\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|v_m(\tau,x)|^{p-2}v_m(\tau,x)\right)\left(v_{mt}(\tau,x)-v_{lt}(\tau,x)\right)dxd\tau$$

$$= -\frac{(p-1)}{2}\int\limits_0^t \tau f\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,r)}\int_0^1 |v_m(\tau,x)+\sigma(v_l(\tau,x)-v_m(\tau,x))|^{p-2}\,d\sigma$$

$$\times\frac{d}{d\tau}|v_m(\tau,x)-v_l(\tau,x)|^2\,dxd\tau + K_{2,r}^{m,l}(t), \tag{4.15}$$

alırız. Burada ise

$$K_{2,r}^{m,l}(t) := \int\limits_0^t \tau\left(f\left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right) - f\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,r)} |v_l(\tau,x)|^{p-2}\,v_l(\tau,x)$$

$$\times\left(v_{mt}(\tau,x)-v_{lt}(\tau,x)\right)dxd\tau.$$

Lemmanın koşullarından,

$$\sup_{m,l}\left\|K_{2,r}^{m,l}\right\|_{C[0,t]} < \infty \text{ ve her } t\geq 0 \text{ için } \lim_{m\to\infty}\limsup_{l\to\infty}\left|K_{2,r}^{m,l}(t)\right| = 0,$$

olur. Bu nedenle, $K_r^{m,l}(t) := K_{1,r}^{m,l}(t)+K_{2,r}^{m,l}(t)$ şeklinde gösterirsek, (4.14) ve (4.15)'ten,

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\tau\left(f\left(\|v_l(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|v_l(\tau,x)|^{p-2}\,v_l(\tau,x) - f\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)|v_m(\tau,x)|^{p-2}\,v_m(\tau,x)\right)$$

$$\times\left(v_{mt}(\tau,x)-v_{lt}(\tau,x)\right)dxd\tau$$

$$= -\frac{(p-1)}{2}\int\limits_0^t \tau f\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,r)}\int_0^1 |v_m(\tau,x)+\sigma(v_l(\tau,x)-v_m(\tau,x))|^{p-2}\,d\sigma$$

$$\times\frac{d}{d\tau}|v_m(\tau,x)-v_l(\tau,x)|^2\,dxd\tau + K_r^{m,l}(t), \tag{4.16}$$

alırız.

Şimdi, (4.16)'nın sağ tarafındaki ilk terimi değerlendirelim. Bunun için

$$\varphi_M(u) = \begin{cases} u, & |u|\leq M, \\ M, & |u|>M, \end{cases} \quad \text{ve } \Psi_\varepsilon(u) = \begin{cases} \varepsilon^{p-2}, & |u|\leq\varepsilon, \\ |u|^{p-2}, & |u|>\varepsilon \end{cases}$$

şeklinde fonksiyonlar tanımlayalım. Buradan, $\beta\in\left(0,\frac{2n}{(n-4)^+}-p\right)$ olmak üzere

$$\left|\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} - \|\varphi_M(v_m(\tau))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right| \leq 2\left(\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n:|v_m(\tau,x)|>M\}} |v_m(\tau,x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{2}{M^\beta}\left(\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n:|v_m(\tau,x)|>M\}} |v_m(\tau,x)|^{p+\beta}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{2}{M^\beta}\|v(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p+\beta}{p}}, \tag{4.17}$$

elde ederiz. Aynı zamanda, $\omega(\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon^{p-2}, & p>2,\\ 0, & p=2\end{cases}$ olmak üzere,

$$\left||w|^{p-2}-\Psi_{\varepsilon}(w)\right|\leq\omega(\varepsilon), \tag{4.18}$$

olduğu açıktır.

(4.17) ve (4.18)'den,

$$\int\limits_0^t \tau f\left(\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,r)}\int_0^1 |v_m(\tau,x)+\sigma(v_l(\tau,x)-v_m(\tau,x))|^{p-2}\,d\sigma$$
$$\times\frac{d}{d\tau}|v_m(\tau,x)-v_l(\tau,x)|^2\,dxd\tau$$
$$\geq\int\limits_0^t \tau f_{\varepsilon}\left(\|\varphi_M(v_m(\tau))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,r)}\int_0^1 \Psi_{\varepsilon}(v_m(\tau,x)+\sigma(v_l(\tau,x)-v_m(\tau,x)))\,d\sigma$$
$$\times\frac{d}{d\tau}|v_m(\tau,x)-v_l(\tau,x)|^2\,dxd\tau$$
$$-c_1\left(\max_{0<s_1,s_2<\varepsilon}|f(s_1)-f(s_2)|+\frac{1}{M^{\beta}}+\omega(\varepsilon)\right)\int\limits_0^t \tau E_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,r)}(v_m(\tau)-v_l(\tau))\,d\tau, \tag{4.19}$$

olduğunu kolaylıkla görebiliriz. Buradaki $f_{\varepsilon}(\cdot)$ fonksiyonu Lemma 4.1.1'deki gibidir.

Şimdi de, (4.19)'ün sağ tarafındaki ilk terimi değerlendirelim:

$$\int\limits_0^t \tau f_{\varepsilon}\left(\|\varphi_M(v_m(\tau))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,r)}\int_0^1 \Psi_{\varepsilon}(v_m(\tau,x)+\sigma(v_l(\tau,x)-v_m(\tau,x)))\,d\sigma$$
$$\times\frac{d}{d\tau}|v_m(\tau,x)-v_l(\tau,x)|^2\,dxd\tau$$
$$\geq-\int\limits_0^t f_{\varepsilon}\left(\|\varphi_M(v_m(\tau))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,r)}\int_0^1 \Psi_{\varepsilon}(v_m(\tau,x)+\sigma(v_l(\tau,x)-v_m(\tau,x)))\,d\sigma$$
$$\times|v_m(\tau,x)-v_l(\tau,x)|^2\,dxd\tau$$
$$-\int\limits_0^t \tau\frac{d}{d\tau}\left(f_{\varepsilon}\left(\|\varphi_M(v_m(\tau))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,r)}\int_0^1 \Psi_{\varepsilon}(v_m(\tau,x)+\sigma(v_l(\tau,x)-v_m(\tau,x)))\,d\sigma$$
$$\times|v_m(\tau,x)-v_l(\tau,x)|^2\,dxd\tau$$
$$-\int\limits_0^t \tau f_{\varepsilon}\left(\|\varphi_M(v_m(\tau))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,r)}\int_0^1 \frac{d}{d\tau}(\Psi_{\varepsilon}(v_m(\tau,x)+\sigma(v_l(\tau,x)-v_m(\tau,x))))\,d\sigma$$

$$\times \left| v_m(\tau,x) - v_l(\tau,x) \right|^2 dxd\tau, \tag{4.20}$$

olur.

Ayrıca,

$$\frac{d}{d\tau}\left(f_\varepsilon \left(\left\| \varphi_M(v_m(\tau)) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \right)$$

$$= \frac{f'_\varepsilon \left(\left\| \varphi_M(v_m(\tau)) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)}{\left\| \varphi_M(v_m(\tau)) \right\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^n)}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \varphi_M(v_m(\tau,x)) \right|^{p-1} \varphi'_M(v_m(\tau,x))\, v_{mt}(\tau,x)\, dx$$

$$\le \frac{c_2}{\varepsilon^{p-1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r_0)} \left| v_m(\tau,x) \right|^{p-1} \left| v_{mt}(\tau,x) \right| dx + M^{p-1} \int\limits_{B(0,r_0)} \left| v_{mt}(\tau,x) \right| dx \right)$$

$$\le \frac{c_3}{\varepsilon^{p-1}} \left(\left\| v_{mt}(\tau) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0,r_0))} + M^{p-1} \left\| v_{mt}(\tau) \right\|_{L^1(B(0,r_0))} \right)$$

ve

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \int_0^1 \frac{d}{d\tau} \left(\Psi_\varepsilon \left(v_l(\tau,x) + \sigma\left(v_m(\tau,x) - v_l(\tau,x) \right) \right) \right) d\sigma \left| v_m(\tau,x) - v_l(\tau,x) \right|^2 dx$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \int_0^1 \Psi'_\varepsilon \left(v_l(\tau,x) + \sigma\left(v_m(\tau,x) - v_l(\tau,x) \right) \right) d\sigma \left| v_m(\tau,x) - v_l(\tau,x) \right|^2 dx$$

$$\times \left(\left\| v_{mt}(\tau) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0,r))} + \left\| v_{lt}(\tau) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0,r))} \right)$$

$$\le \frac{c_4}{\varepsilon^{\max\{0,3-p\}}} \left\| v_m(\tau) - v_l(\tau) \right\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0,r))}$$

$$\times \left(\left\| v_{mt}(\tau) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0,r))} + \left\| v_{lt}(\tau) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0,r))} \right)$$

olduğundan, (4.20)'den,

$$\int\limits_0^t \tau f_\varepsilon \left(\left\| \varphi_M(v_m(\tau)) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \int_0^1 \Psi_\varepsilon \left(v_l(\tau,x) + \sigma\left(v_m(\tau,x) - v_l(\tau,x) \right) \right) d\sigma$$

$$\times \frac{d}{d\tau} \left| v_m(\tau,x) - v_l(\tau,x) \right|^2 dxd\tau$$

$$\ge -c_5 \int\limits_0^t E_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \left(v_m(\tau) - v_l(\tau) \right) d\tau$$

$$-\frac{c_5}{\varepsilon^{p-1}} \int\limits_0^t \tau E_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \left(v_m(\tau) - v_l(\tau) \right) \left\| v_{mt}(\tau) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0,r_0))} d\tau$$

$$-\frac{c_5 M^{p-1}}{\varepsilon^{p-1}} \int\limits_0^t \tau E_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,r)} \left(v_m(\tau) - v_l(\tau)\right) \left\| v_{mt}(\tau) \right\|_{L^1(B(0,r_0))} d\tau$$

$$-\frac{c_5}{\varepsilon^{\max\{0,3-p\}}} \int\limits_0^t \tau E_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,r)} \left(v_m(\tau) - v_l(\tau)\right) \left(\left\| v_{mt}(\tau) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n \backslash B(0,r))} + \left\| v_{lt}(\tau) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n \backslash B(0,r))} \right) d\tau$$

alırız. Üstteki eşitsizlikte, Young eşitsizliğini uygularsak,

$$\int\limits_0^t \tau f_\varepsilon \left(\left\| \varphi_M\left(v_m(\tau)\right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \int\limits_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,r)} \int_0^1 \Psi_\varepsilon \left(v_l(\tau,x) + \sigma\left(v_m(\tau,x) - v_l(\tau,x)\right)\right) d\sigma$$

$$\times \frac{d}{d\tau} \left| v_m(\tau,x) - v_l(\tau,x) \right|^2 dx d\tau$$

$$\geq -c_5 \int\limits_0^t E_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,r)} \left(v_m(\tau) - v_l(\tau)\right) d\tau - \frac{c_5}{\varepsilon^{p-1}} \mu \int\limits_0^t \tau E_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,r)} \left(v_m(\tau) - v_l(\tau)\right) d\tau$$

$$-\frac{c_5}{\varepsilon^{p-1}\mu^2} \int\limits_0^t \tau E_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,r)} \left(v_m(\tau) - v_l(\tau)\right) \left\| v_{mt}(\tau) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n \backslash B(0,r_0))} d\tau$$

$$-\frac{c_5 M^{p-1}}{\varepsilon^{p-1}} \mu \int\limits_0^t \tau E_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,r)} \left(v_m(\tau) - v_l(\tau)\right) d\tau$$

$$-\frac{c_5 M^{p-1}}{\varepsilon^{p-1}\mu^2} \int\limits_0^t \tau E_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,r)} \left(v_m(\tau) - v_l(\tau)\right) \left\| v_{mt}(\tau) \right\|^2_{L^1(B(0,r_0))} d\tau$$

$$-\frac{c_5}{\varepsilon^{\max\{0,3-p\}}} \mu \int\limits_0^t \tau E_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,r)} \left(v_m(\tau) - v_l(\tau)\right) d\tau$$

$$-\frac{c_5}{\varepsilon^{\max\{0,3-p\}}\mu^2} \int\limits_0^t \tau E_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,r)} \left(v_m(\tau) - v_l(\tau)\right)$$

$$\times \left(\left\| v_{mt}(\tau) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n \backslash B(0,r))} + \left\| v_{lt}(\tau) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n \backslash B(0,r))} \right) d\tau, \tag{4.21}$$

elde ederiz. (4.19) ve (4.21)'den,

$$\int\limits_0^t \tau f\left(\left\| v_m(\tau) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \int\limits_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,r)} \int_0^1 \left| v_m(\tau,x) + \sigma\left(v_l(\tau,x) - v_m(\tau,x)\right) \right|^{p-2} d\sigma$$

$$\times \frac{d}{d\tau} \left| v_m(\tau,x) - v_l(\tau,x) \right|^2 dx d\tau$$

$$\geq -c_6 \int\limits_0^t E_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,r)} \left(v_m(\tau) - v_l(\tau)\right) d\tau$$

$$-c_6\left(\frac{\mu}{\varepsilon^{p-1}}+\frac{\mu}{\varepsilon^{\max\{0,3-p\}}}+\max_{0\le s_1,s_2\le\varepsilon}|f(s_1)-f(s_2)|+\frac{M^{p-1}}{\varepsilon^{p-1}}\mu\right.$$

$$\left.+\frac{1}{M^{\beta}}+\omega(\varepsilon)\right)\int_0^t \tau E_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,r)}(v_m(\tau)-v_l(\tau))\,d\tau$$

$$-c_6\left(\frac{1}{\varepsilon^{p-1}\mu^2}+\frac{1}{\varepsilon^{\max\{0,3-p\}}\mu^2}\right)\int_0^t \tau E_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,r)}(v_m(\tau)-v_l(\tau))$$

$$\times\left(\|v_{mt}(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus B(0,r_0))}+\|v_{lt}(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus B(0,r_0))}\right)d\tau$$

$$-c_6\frac{M^{p-1}}{\varepsilon^{p-1}\mu^2}\int_0^t \tau E_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,r)}(v_m(\tau)-v_l(\tau))\|v_{mt}(\tau)\|^2_{L^1(B(0,r_0))}\,d\tau,\quad \forall r\ge r_0, \tag{4.22}$$

olur. Şimdi, ispatı tamamlamak için, $\|v_{mt}(\tau)\|^2_{L^1(B(0,r_0))}$ terimini değerlendirelim. Lemmanın koşullarından,

$$\|v_{mt}(\tau)\|^2_{L^1(B(0,r_0))}=\left(\int_{B(0,r_0)}|v_{mt}(\tau,x)|\,dx\right)^2$$

$$=\left(\int_{B(0,r_0)}\frac{a(x)+\lambda}{a(x)+\lambda}|v_{mt}(\tau,x)|\,dx\right)^2$$

$$\le\left(\frac{1}{\lambda}\int_{B(0,r_0)}a(x)|v_{mt}(\tau,x)|\,dx+\int_{B(0,r_0)}\frac{\lambda}{a(x)+\lambda}|v_{mt}(\tau,x)|\,dx\right)^2$$

$$\le\frac{c_7}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}^n}a(x)|v_{mt}(\tau,x)|^2\,dx+c_7\int_{B(0,r_0)}\left(\frac{\lambda}{a(x)+\lambda}\right)^2dx, \tag{4.23}$$

buluruz. Lebesgue yakınsaklık teoreminden, $\lim_{\lambda\to 0^+}\int_{B(0,r_0)}\left(\frac{\lambda}{a(x)+\lambda}\right)^2dx=0$ olduğundan,

$$c_6\left(\frac{\mu}{\varepsilon^{p-1}}+\frac{\mu}{\varepsilon^{\max\{0,3-p\}}}+\max_{0\le s_1,s_2\le\varepsilon}|f(s_1)-f(s_2)|+\frac{M^{p-1}}{\varepsilon^{p-1}}\mu\right.$$

$$\left.+\frac{1}{M^{\beta}}+\omega(\varepsilon)\right)+c_6c_7\frac{M^{p-1}}{\varepsilon^{p-1}\mu^2}\int_{B(0,r_0)}\left(\frac{\lambda}{a(x)+\lambda}\right)^2dx\le\gamma,$$

olacak şekilde ε, M, μ ve λ pozitif parametrelerini seçebiliriz. Böylece, (4.16), (4.22) ve (4.23)'ü kullanarak ispat tamamlanır. ■

Şimdi yerel olmayan çekicinin varlığında anahtar konumunda olan asimptotik kompaktlık hakkındaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 4.1.3 *(4.3)-(4.5) koşulları sağlansın ve B kümesi $H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$'nin sınırlı altkümesi olsun. Bu duruda, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B$ ve $t_k \to \infty$ olmak üzere $\{S(t_k)\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ şeklindeki her dizi $H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$'de yakınsak alt diziye sahiptir.*

İspat. Teoremin iddiasını elde etmek için, bir önceki bölümde olduğu gibi, her $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B$ ve $t_k \to \infty$ için aşağıdaki dizisel limit değerlenmesini ispatlamak yeterlidir.

$$\liminf_{k\to\infty} \liminf_{m\to\infty} \|S(t_k)\varphi_k - S(t_m)\varphi_m\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{4.24}$$

Gerçekten, (4.24)'ü elde edip, [35, Lemma 3.4]'ün ispatının sonundaki argümanları kullanırsak, istenen sonucu elde ederiz.
(4.3), (4.5) ve (4.6)'dan,

$$\sup_{t\geq 0} \sup_{\varphi\in B} \|S(t)\varphi\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty, \tag{4.25}$$

olur. Ayrıca, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$'de sınırlı olduğundan, (4.25)'ten, $\{S(.)\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $C_b(0,\infty; H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n))$'de sınırlıdır. Buradan, keyfi $T_0 \geq 0$ için $(v_m(t), v_{mt}(t)) = S(t+t_{k_m}-T_0)\varphi_{k_m}$ olmak üzere, $t_{k_m} \geq T_0$ ve bir $q \in W^{1,\infty}(0,\infty)$ ve $v \in L^\infty(0,\infty; H^2(\mathbb{R}^n)) \cap W^{1,\infty}(0,\infty; L^2(\mathbb{R}^n))$ için

$$\begin{cases} v_m \overset{w^*}{\to} v \quad L^\infty(0,\infty; H^2(\mathbb{R}^n))\text{'de}, \\ v_{mt} \overset{w^*}{\to} v_t \quad L^\infty(0,\infty; L^2(\mathbb{R}^n))\text{'de}, \\ \|v_m(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \overset{w^*}{\to} q(t) \quad W^{1,\infty}(0,\infty)\text{'da}, \\ v_m(t) \overset{w}{\to} v(t) \quad H^2(\mathbb{R}^n)\text{'de}, \forall t \geq 0, \end{cases} \tag{4.26}$$

olacak şekilde $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. (4.1)'den, aynı zamanda

$$v_{mtt} - v_{ltt} + \Delta^2(v_m - v_l) + \alpha(x)(v_{mt} - v_{lt}) + \lambda(v_m - v_l)$$

$$= f(\|v_l(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}) |v_l|^{p-2} v_l - f(\|v_m(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}) |v_m|^{p-2} v_m, \tag{4.27}$$

alırız. (4.24) eşitliğini $v_m - v_l$ fonksiyonunun enerji fonksiyoneli için elde edilen dizisel limit değerlenmeleri vasıtasıyla ispatlayacağız. Bu ispat üç adımda yapılacak. İlk adımda, dissipatif terimin etkisini kullanarak kuyruk değerlenmesi elde edeceğiz. İkinci adımda, iç değerlenme elde edeceğiz. Son adımda ise ilk iki adımı kullanarak $\mathbb{R}^n$'deki enerjinin dizisel limit değerlenmesini elde edeceğiz. Belirtelim ki, bahsettiğimiz bu değerlenmeleri öncelikle (4.1)-(4.2) probleminin $H^4(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$'den olan başlangıç verisine uygun düzgün çözümleri için doğrulayıp daha sonra standart yoğunluk teoremlerini kullanarak $H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$'den olan başlangıç verisine uygun zayıf çözümlere genişletebiliriz.

1. Adım (Kuyruk Değerlenmesi): İlk olarak (4.3), (4.4), (4.5) ve (4.6)'yı göz önüne alırsak,

$$\int_0^T \|v_{mt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0,r_0))}\,dt \le c_1, \quad \forall T \ge 0, \tag{4.28}$$

buluruz. Burada c_1 sabiti, B kümesine bağlıdır, T ve m değerlerinden bağımsızdır. Şimdi, (4.1)'de v yerine v_m yazarsak,

$$v_{mtt} + \Delta^2 v_m + \alpha(x)v_{mt} + \lambda v_m + f(\|v_m(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\,|v_m|^{p-2}\,v_m = h\,(x)\,,$$

olur. Kesme fonksiyonu η_r üçüncü bölümdeki gibi olsun. Üstteki denklemi $\eta_r^2 v_m$ ile çarpıp, $(0,T)\times\mathbb{R}^n$'de integrallersek,

$$\int_0^T \left(\|\eta_r \Delta v_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \lambda\,\|\eta_r v_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) dt$$

$$= \int_0^T \|\eta_r v_{mt}\,(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,dt - \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_r^2\,(x)\,v_{mt}\,(t,x)\,v_m(t,x)dx\right)\Bigg|_0^T$$

$$-\frac{4}{r}\sum_{i=1}^n \int_0^T \eta_r\,(x)\,\eta_{x_i}\left(\frac{x}{r}\right)\Delta v_m(t,x)v_{mx_i}(t,x)dxdt - \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\left(\eta_r^2\,(x)\right)\Delta v_m(t,x)v_m(t,x)dxdt$$

$$-\frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_r^2\,(x)\,\alpha\,(x)\,(v_m(t,x))^2\,dx\right)\Bigg|_0^T$$

$$-\int_0^T f(\|v_m(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}) \int_{\mathbb{R}^n} |v_m(t,x)|^p\,\eta_r^2\,(x)\,dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} h\,(x)\,\eta_r^2\,(x)\,v_m\,(t,x)\,dxdt,$$

buluruz. (4.3), (4.5), (4.25) ve (4.28)'i kullanarak,

$$\int_0^T \left(\|\Delta\,(v_m(t))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0,2r))} + \lambda\,\|v_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0,2r))}\right) dt$$

$$\le c_2\left(1 + \frac{T}{r} + T\,\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0,r))}\right), \ \forall T \ge 0, \ \ \forall r \ge r_0. \tag{4.29}$$

elde ederiz. Burada c_2 sabiti, B kümesine bağlı olmakla birlikte, T, r ve m değerlerinden bağımsızdır.

2. Adım (İç Değerlenme): Şimdi de, (4.27) denklemini

$$\sum\nolimits_{i=1}^n x_i\,(1-\eta_{2r})\,(v_m - v_l)_{x_i} + \frac{1}{2}\,(n-1)\,(1-\eta_{2r})\,(v_m - v_l)$$

ile çarpıp, $(0,T)\times\mathbb{R}^n$ üzerinde integrallersek, (4.5) ve (4.25)'ten,

$$\left\| f(\|v_m(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\,|v_m(t)|^{p-2}\,v_m(t) - f(\|v_l(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\,|v_l(t)|^{p-2}\,v_l(t)\right\|_{L^2(B(0,4r))} \leq \widetilde{c},$$

olduğundan

$$\frac{3}{2}\int_0^T \|\Delta(v_m(t)-v_l(t))\|^2_{L^2(B(0,2r))}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \|v_{mt}(t)-v_{lt}(t)\|^2_{L^2(B(0,2r))}\,dt$$

$$\leq \left|\sum\nolimits_{i=1}^n \left(\int_{B(0,4r)} (1-\eta_{2r}(x))\,x_i\,(v_m(T,x)-v_l(T,x))_{x_i}\,(v_{mt}(T,x)-v_{lt}(T,x))\,dx\right)\right|$$

$$+\left|\sum\nolimits_{i=1}^n \left(\int_{B(0,4r)} (1-\eta_{2r}(x))\,x_i\,(v_m(0,x)-v_l(0,x))_{x_i}\,(v_{mt}(0,x)-v_{lt}(0,x))\,dx\right)\right|$$

$$+\frac{1}{2}(n-1)\left|\int_{B(0,4r)} (1-\eta_{2r}(x))\,(v_{mt}(T,x)-v_{lt}(T,x))\,(v_m(T,x)-v_l(T,x))\,dx\right|$$

$$+\frac{1}{2}(n-1)\left|\int_{B(0,4r)} (1-\eta_{2r}(x))\,(v_{mt}(0,x)-v_{lt}(0,x))\,(v_m(0,x)-v_l(0,x))\,dx\right|$$

$$+\frac{1}{4r}\left|\sum\nolimits_{i=1}^n \int_0^T \int_{B(0,4r)\setminus B(0,2r)} \eta_{x_i}\left(\frac{x}{2r}\right) x_i\,(v_{mt}(t,x)-v_{lt}(t,x))^2\,dxdt\right|$$

$$+\frac{1}{4r}\left|\sum\nolimits_{i=1}^n \int_0^T \int_{B(0,4r)\setminus B(0,2r)} \eta_{x_i}\left(\frac{x}{2r}\right) x_i\,(\Delta v_m(t,x)-\Delta v_l(t,x))^2\,dxdt\right|$$

$$+\left|\sum\nolimits_{i=1}^n \int_0^T \int_{B(0,4r)} \Delta((1-\eta_{2r}(x))\,x_i)\,(v_m(t,x)-v_l(t,x))_{x_i}\,\Delta(v_m(t,x)-v_l(t,x))\,dxdt\right|$$

$$+\frac{1}{r}\left|\sum\nolimits_{i,j=1}^n \int_0^T \int_{B(0,4r)\setminus B(0,2r)} \eta_{x_j}\left(\frac{x}{2r}\right) x_i\,(v_m(t,x)-v_l(t,x))_{x_i x_j}\,\Delta(v_m(t,x)-v_l(t,x))\,dxdt\right|$$

$$+\frac{(n-1)}{2}\left|\int_0^T \int_{B(0,4r)\setminus B(0,2r)} \Delta((1-\eta_{2r}(x)))\,(v_m(t,x)-v_l(t,x))\,\Delta(v_m(t,x)-v_l(t,x))\,dxdt\right|$$

$$+\frac{(n-1)}{2r}\left|\sum\nolimits_{i=1}^n \int_0^T \int_{B(0,4r)\setminus B(0,2r)} \eta_{x_i}\left(\frac{x}{2r}\right) (v_m(t,x)-v_l(t,x))_{x_i}\,\Delta(v_m(t,x)-v_l(t,x))\,dxdt\right|$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{T}\int_{B(0,4r)}(1-\eta_{2r}(x))\,x_i\,(v_m(t,x)-v_l(t,x))_{x_i}\,a(x)\,(v_{mt}(t,x)-v_{lt}(t,x))\,dxdt\right|$$

$$+\frac{1}{2}(n-1)\left|\int_{0}^{T}\int_{B(0,4r)}(1-\eta_{2r}(x))\,(v_m(t,x)-v_l(t,x))\,a(x)\,(v_{mt}(t,x)-v_{lt}(t,x))\,dxdt\right|$$

$$+\lambda\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{T}\int_{B(0,4r)}(1-\eta_{2r}(x))\,x_i\,(v_m(t,x)-v_l(t,x))_{x_i}\,(v_m(t,x)-v_l(t,x))\,dxdt\right|$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{T}\int_{B(0,4r)}(1-\eta_{2r}(x))\,x_i\,(v_m(t,x)-v_l(t,x))_{x_i}\right.$$

$$\left.\times\left(f(\|v_m(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\,|v_m(t,x)|^{p-2}\,v_m(t,x)-f(\|v_l(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\,|v_l(t,x)|^{p-2}\,v_l(t,x)\right)dxdt\right|$$

$$+\frac{1}{2}(n-1)\left|\int_{0}^{T}\int_{B(0,4r)}(1-\eta_{2r}(x))\,(v_m(t,x)-v_l(t,x))\right.$$

$$\left.\times\left(f(\|v_m(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\,|v_m(t,x)|^{p-2}\,v_m(t,x)-f(\|v_l(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\,|v_l(t,x)|^{p-2}\,v_l(t,x)\right)dxdt\right|$$

$$\leq c_3 r\left(\|\nabla v_m(T)-\nabla v_l(T)\|_{L^2(B(0,4r))}+\|\nabla v_m(0)-\nabla v_l(0)\|_{L^2(B(0,4r))}\right)$$

$$c_3\|v_{mt}-v_{lt}\|^2_{L^2(0,T;L^2(B(0,4r)\backslash B(0,2r)))}+c_3\|v_m-v_l\|^2_{L^2(0,T;H^2(B(0,4r)\backslash B(0,2r)))}$$

$$+c_3 r\sqrt{T}\,\|\nabla v_m-\nabla v_l\|_{L^2((0,T)\times B(0,4r))}\,, \tag{4.30}$$

alırız. Diğer taraftan, $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi $C([0,T];H^2(\mathbb{R}^n))$'de sınırlı ve $\{v_{mt}\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi $C([0,T];L^2(\mathbb{R}^n))$'de sınırlı olduğundan, genelleştirilmiş Arzela-Ascoli teoreminden, $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi her $r>0$ için $C([0,T];H^1(B(0,r)))$'de prekompakttır. Bu nedenle, $(4.26)_1$-$(4.26)_2$'ye göre, $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi $C([0,T];H^1(B(0,r)))$'de v'ye kuvvetli yakınsar. Buradan, (4.28) ve (4.29)'u (4.30)'da kullanarak,

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{l\to\infty}\int_{0}^{T}\left[\|\Delta(v_m(t)-v_l(t))\|^2_{L^2(B(0,2r))}+\|v_{mt}(t)-v_{lt}(t)\|^2_{L^2(B(0,2r))}\right]dt$$

$$\leq c_4\left(1+\frac{T}{r}+T\,\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^n\backslash B(0,r))}\right),\ \forall T\geq 0,\ \ \forall r\geq r_0,$$

elde ederiz.

3. Adım ($\mathbb{R}^n$'deki değerlenmeler**):** (4.28) ve (4.29)'u ve bir önceki adımın son değerlenmesini kullanırsak,

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{l\to\infty}\int\limits_0^T\left[\|v_m(t)-v_l(t)\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)}+\|v_{mt}(t)-v_{lt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right]dt$$

$$\le c_4\left(1+\frac{T}{r}+T\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus B(0,r))}\right),\ \forall T\ge 0,\ \ \forall r\ge r_0,$$

buluruz. Son eşitsizlikte $r\to\infty$ iken limite geçersek, her $T\ge 0$ için,

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{l\to\infty}\int\limits_0^T\left[\|v_m(t)-v_l(t)\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)}+\|v_{mt}(t)-v_{lt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right]dt\le c_5,\quad (4.31)$$

olur. (4.27) denklemini $2t(v_{mt}-v_{lt})$ ile çarpıp, $(0,T)\times\mathbb{R}^n$'de integrallersek, kısmi integrasyon kullanarak ve (4.4)'ü de göz önünde bulundurarak,

$$T\|\Delta(v_m(T)-v_l(T))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+T\|v_{mt}(T)-v_{lt}(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+T\lambda\|v_m(T)-v_l(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$+2\alpha_0\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,r)}t\left(v_{mt}(t)-v_{lt}(t)\right)^2dxdt$$

$$\le\int\limits_0^T\|v_{mt}(t)-v_{lt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt+\int\limits_0^T\|\Delta(v_m(t)-v_l(t))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt$$

$$+\lambda\int\limits_0^T\|v_m(t)-v_l(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt$$

$$+2\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^n}t\left(f(\|v_l(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})|v_l(t,x)|^{p-2}v_l(t,x)-f(\|v_m(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})|v_m(t,x)|^{p-2}v_m(t,x)\right)$$

$$\times\left(v_{mt}(t,x)-v_{lt}(t,x)\right)dxdt,\quad (4.32)$$

alırız. (4.27) denklemini $t\eta_r(v_m-v_l)$ ile çarpıp, $(0,T)\times\mathbb{R}^n$'de integrallediğimizde ise yine kısmi integrasyon kullanarak,

$$T\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(v_{mt}(T,x)-v_{lt}(T,x)\right)\eta_r(x)\left(v_m(T,x)-v_l(T,x)\right)dx$$

$$-\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^n}t\eta_r(x)\left(v_{mt}(t,x)-v_{lt}(t,x)\right)^2dxdt$$

$$-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\eta_r(x)(v_{mt}(t,x)-v_{lt}(t,x))(v_m(t,x)-v_l(t,x))\,dxdt$$

$$+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}t(\Delta(v_m(t,x)-v_l(t,x)))^2\eta_r(x)\,dxdt$$

$$+2\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}(\Delta(v_m(t,x)-v_l(t,x)))\,t(\eta_r(x))_{x_i}(v_m(t,x)-v_l(t,x))_{x_i}\,dxdt$$

$$+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}(\Delta(v_m(t,x)-v_l(t,x)))\,t\Delta(\eta_r(x))(v_m(t,x)-v_l(t,x))\,dxdt$$

$$+\frac{T}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\alpha(x)(v_m(T,x)-v_l(T,x))^2\eta_r(x)\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\alpha(x)\eta_r(x)(v_m(t,x)-v_l(t,x))^2\,dxdt$$

$$+\lambda\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}t(v_m(t,x)-v_l(t,x))^2\eta_r(x)\,dxdt$$

$$+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}t\Big(f(\|v_m(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\,|v_m(t,x)|^{p-2}v_m(t,x)-f(\|v_l(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\,|v_l(t,x)|^{p-2}v_l(t,x)\Big)$$

$$\times\eta_r(x)(v_m(t,x)-v_l(t,x))\,dxdt=0,$$

elde ederiz. Böylece, (4.3)'ü göz önüne alırsak,

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}t(\Delta(v_m(t,x)-v_l(t,x)))^2\eta_r(x)\,dxdt+\lambda\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}t(v_m(t,x)-v_l(t,x))^2\eta_r(x)\,dxdt$$

$$\leq -T\int_{\mathbb{R}^n}(v_{mt}(T,x)-v_{lt}(T,x))\eta_r(x)(v_m(T,x)-v_l(T,x))\,dx$$

$$+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}t\eta_r(x)(v_{mt}(t,x)-v_{lt}(t,x))^2\,dxdt$$

$$+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\eta_r(x)(v_{mt}(t,x)-v_{lt}(t,x))(v_m(t,x)-v_l(t,x))\,dxdt$$

$$-2\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}(\Delta(v_m(t,x)-v_l(t,x)))\,t(\eta_r(x))_{x_i}(v_m(t,x)-v_l(t,x))\,dxdt$$

$$-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\left(\Delta\left(v_m\left(t,x\right)-v_l\left(t,x\right)\right)\right)t\Delta\left(\eta_r\left(x\right)\right)\left(v_m\left(t,x\right)-v_l\left(t,x\right)\right)dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\alpha\left(x\right)\eta_r\left(x\right)\left(v_m\left(t,x\right)-v_l\left(t,x\right)\right)^2dxdt$$

$$-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}t\left(f(\|v_m\left(t\right)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\left|v_m(t,x)\right|^{p-2}v_m(t,x)-f(\|v_l\left(t\right)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\left|v_l(t,x)\right|^{p-2}v_l(t,x)\right)$$

$$\times\eta_r\left(x\right)\left(v_m\left(t,x\right)-v_l\left(t,x\right)\right)dxdt,\quad\forall T\geq 0,\,\forall r\geq r_0,$$

olur. Üstteki eşitsizlikte (4.5) ve (4.25)'i kullanırsak,

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}t\left(\Delta\left(v_m\left(t,x\right)-v_l\left(t,x\right)\right)\right)^2\eta_r\left(x\right)dxdt+\lambda\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}t\left(v_m\left(t,x\right)-v_l\left(t,x\right)\right)^2\eta_r\left(x\right)dxdt$$

$$\leq T\left(\left\|v_{mt}\left(T,x\right)-v_{lt}\left(T,x\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\left\|v_m\left(T,x\right)-v_l\left(T,x\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)$$

$$+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}t\eta_r\left(x\right)\left(v_{mt}\left(t,x\right)-v_{lt}\left(t,x\right)\right)^2dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\eta_r\left(x\right)\left(v_{mt}\left(t,x\right)-v_{lt}\left(t,x\right)\right)^2dxdt$$

$$+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\eta_r\left(x\right)\left(v_m\left(t,x\right)-v_l\left(t,x\right)\right)^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\alpha\left(x\right)\eta_r\left(x\right)\left(v_m\left(t,x\right)-v_l\left(t,x\right)\right)^2dxdt$$

$$+c_6\frac{T}{r}+\widetilde{K_r}^{m,l}\left(T\right),\quad\forall T\geq 0,\;\;\forall r\geq r_0,\tag{4.33}$$

elde ederiz. Burada

$$\widetilde{K_r}^{m,l}\left(T\right):=\int_0^T t\left(f(\|v_l\left(t\right)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}-f(\|v_m\left(t\right)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)\int_{\mathbb{R}^n}\left|v_l(t,x)\right|^{p-2}v_l(t,x)\eta_r\left(x\right)$$

$$\times\left(v_m\left(t,x\right)-v_l\left(t,x\right)\right)dxdt$$

ve (4.25) -$(4.26)_3$'ten,

$$\sup_{m,l}\left\|\widetilde{K_r}^{m,l}\right\|_{C[0,T]}<\infty\;\;\text{ve}\;\lim_{m\to\infty}\limsup_{l\to\infty}\left|\widetilde{K_r}^{m,l}\left(T\right)\right|=0,\;\forall T\geq 0$$

olduğu kolayca görülebilir.

Şimdi, (4.33) eşitsizliğini $\delta>0$ ile çarpıp elde edilen eşitsizliği (4.32)'ye eklersek,

$$T\left\|\Delta\left(v_m\left(T\right)-v_l\left(T\right)\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+T\left\|v_{mt}\left(T\right)-v_{lt}\left(T\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+T\lambda\left\|v_m\left(T\right)-v_l\left(T\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$+2\alpha_0\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,r)}t\left(v_{mt}\left(t\right)-v_{lt}\left(t\right)\right)^2dxdt$$

$$+\delta\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} t\left(\Delta\left(v_m\left(t,x\right)-v_l\left(t,x\right)\right)\right)^2\eta_r\left(x\right)dxdt$$

$$+\delta\lambda\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} t\left(v_m\left(t,x\right)-v_l\left(t,x\right)\right)^2\eta_r\left(x\right)dxdt$$

$$\leq\int_0^T\left\|v_{mt}\left(T\right)-v_{lt}\left(T\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt+\int_0^T\left\|\Delta\left(v_m(t)-v_l(t)\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt$$

$$+\lambda\int_0^T\left\|v_m(t)-v_l(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt$$

$$+2\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} t\Big(f(\left\|v_l\left(t\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\left|v_l(t,x)\right|^{p-2}v_l(t,x)-f(\left\|v_m\left(t\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\left|v_m(t,x)\right|^{p-2}v_m(t,x)\Big)$$

$$\times\left(v_{mt}\left(t,x\right)-v_{lt}\left(t,x\right)\right)dxdt$$

$$+\delta T\Big(\left\|v_{mt}\left(T,x\right)-v_{lt}\left(T,x\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\left\|v_m\left(T,x\right)-v_l\left(T,x\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\Big)$$

$$+\delta\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} t\eta_r\left(x\right)\left(v_{mt}\left(t,x\right)-v_{lt}\left(t,x\right)\right)^2dxdt+\delta\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\eta_r\left(x\right)\left(v_{mt}\left(t,x\right)-v_{lt}\left(t,x\right)\right)^2dxdt$$

$$+\delta\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\eta_r\left(x\right)\left(v_m\left(t,x\right)-v_l\left(t,x\right)\right)^2dxdt+\frac{\delta}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\alpha\left(x\right)\eta_r\left(x\right)\left(v_m\left(t,x\right)-v_l\left(t,x\right)\right)^2dxdt$$

$$+c_6\delta\frac{T}{r}+\delta\widetilde{K_r}^{m,l}\left(T\right),\ \forall T\geq 0,\ \ \forall r\geq r_0, \tag{4.34}$$

alırız.

Lemma 4.1.2'yi (4.34)'te göz önüne alırsak, keyfi $\gamma>0$ için,

$$T\left\|\Delta\left(v_m\left(T\right)-v_l\left(T\right)\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+T\left\|v_{mt}\left(T\right)-v_{lt}\left(T\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+T\lambda\left\|v_m\left(T\right)-v_l\left(T\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$+2\alpha_0\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,r)} t\left(v_{mt}\left(t\right)-v_{lt}\left(t\right)\right)^2dxdt$$

$$+\delta\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} t\left(\Delta\left(v_m\left(t,x\right)-v_l\left(t,x\right)\right)\right)^2\eta_r\left(x\right)dxdt+\delta\lambda\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} t\left(v_m\left(t,x\right)-v_l\left(t,x\right)\right)^2\eta_r\left(x\right)dxdt$$

$$\leq\int_0^T\left\|v_{mt}\left(t\right)-v_{lt}\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt+\int_0^T\left\|\Delta\left(v_m(t)-v_l(t)\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt+\lambda\int_0^T\left\|v_m(t)-v_l(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt$$

$$+\gamma\int\limits_0^T \tau E_{\mathbb{R}^n\setminus(B(0,2r))}\left(v_m(t)-v_l(t)\right)dt+c_\gamma\int\limits_0^T E_{\mathbb{R}^n\setminus(B(0,2r))}\left(v_m(t)-v_l(t)\right)dt$$

$$+c_\gamma\int\limits_0^T t\left(\left\|\sqrt{a}v_{mt}(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\left\|\sqrt{a}v_{lt}(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)E_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,2r)}\left(v_m(t)-v_l(t)\right)dt+\left|K_r^{m,l}(T)\right|$$

$$+\delta T\left(\left\|v_{mt}(T,x)-v_{lt}(T,x)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\left\|v_m(T,x)-v_l(T,x)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)$$

$$+\delta\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^n} t\eta_r(x)\left(v_{mt}(t,x)-v_{lt}(t,x)\right)^2dxdt+\delta\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_r(x)\left(v_{mt}(t,x)-v_{lt}(t,x)\right)^2dxdt$$

$$+\delta\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_r(x)\left(v_m(t,x)-v_l(t,x)\right)^2dxdt+\frac{\delta}{2}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^n}\alpha(x)\eta_r(x)\left(v_m(t,x)-v_l(t,x)\right)^2dxdt$$

$$+c_6\delta\frac{T}{r}+\delta\widetilde{K_r}^{m,l}(T),\ \forall T\geq 0,\ \ \forall r\geq r_0,$$

buluruz. Buradan, yeterince küçük γ ve δ değerleri için,

$$TE_{\mathbb{R}^n}\left(v_m(T)-v_l(T)\right)\leq c_7\int\limits_0^T E_{\mathbb{R}^n}\left(v_m(t)-v_l(t)\right)dt$$

$$+c_\gamma\int\limits_0^T t\left(\left\|\sqrt{a}v_{mt}(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\left\|\sqrt{a}v_{lt}(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)E_{\mathbb{R}^n}\left(v_m(t)-v_l(t)\right)dt$$

$$+c_7\left(\frac{T}{r}+\left|K_r^{m,l}(T)\right|+\left|\widetilde{K_r}^{m,l}(T)\right|\right),\ \forall T\geq 0,\ \ \forall r\geq r_0,$$

elde ederiz. Şimdi, $y_{m,l}(t):=tE_{\mathbb{R}^n}\left(v_m(t)-v_l(t)\right)$ şeklinde tanımlayalım. Bir önceki eşitsizlikten,

$$y_{m,l}(T)\leq c_\gamma\int\limits_0^T\left(\left\|\sqrt{a}v_{mt}(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\left\|\sqrt{a}v_{lt}(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)y_{m,l}(t)\,dt$$

$$+c_7\int\limits_0^T E_{\mathbb{R}^n}\left(v_m(t)-v_l(t)\right)dt+c_7\left(\frac{T}{r}+\left|K_r^{m,l}(T)\right|+\left|\widetilde{K_r}^{m,l}(T)\right|\right),\ \ \forall T\geq 0,\forall r\geq r_0,$$

olur. Üstteki eşitsizlikte Gronwall eşitsizliğini uygulayıp, (4.6) ve (4.25)'i göz önüne alırsak,

$$TE_{\mathbb{R}^n}\left(v_m(T)-v_l(T)\right)$$

$$\leq c_7\int\limits_0^T E_{\mathbb{R}^n}\left(v_m(t)-v_l(t)\right)dt+c_7\left(\frac{T}{r}+\left|K_r^{m,l}(T)\right|+\left|\widetilde{K_r}^{m,l}(T)\right|\right)$$

$$+c_7\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^t E_{\mathbb{R}^n}\left(v_m\left(s\right)-v_l\left(s\right)\right)ds+\frac{t}{r}+\left|K_r^{m,l}\left(t\right)\right|+\left|\widetilde{K_r}^{m,l}\left(t\right)\right|\right)$$

$$\times\left(\left\|\sqrt{a}v_{mt}\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\left\|\sqrt{a}v_{lt}\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)e^{c_\gamma\int_t^T\left(\left\|\sqrt{a}v_{mt}(\tau)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\left\|\sqrt{a}v_{lt}(\tau)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)d\tau}ds$$

$$\le c_7\int\limits_0^T E_{\mathbb{R}^n}\left(v_m\left(t\right)-v_l\left(t\right)\right)dt+c_7\left(\frac{T}{r}+\left|K_r^{m,l}\left(T\right)\right|+\left|\widetilde{K_r}^{m,l}\left(T\right)\right|\right)$$

$$+c_8\int\limits_0^T E_{\mathbb{R}^n}\left(v_m\left(t\right)-v_l\left(t\right)\right)dt\int\limits_0^T\left(\left\|\sqrt{a}v_{mt}\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\left\|\sqrt{a}v_{lt}\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)$$

$$+c_8\frac{T}{r}\int\limits_0^T\left(\left\|\sqrt{a}v_{mt}\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\left\|\sqrt{a}v_{lt}\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)dt$$

$$+c_8\int\limits_0^T\left(\left|K_r^{m,l}\left(t\right)\right|+\left|\widetilde{K_r}^{m,l}\left(t\right)\right|\right)\left(\left\|\sqrt{a}v_{mt}\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\left\|\sqrt{a}v_{lt}\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)dt$$

$$\le c_7\left(\left|K_r^{m,l}\left(T\right)\right|+\left|\widetilde{K_r}^{m,l}\left(T\right)\right|\right)+c_9\int\limits_0^T E_{\mathbb{R}^n}\left(v_m\left(t\right)-v_l\left(t\right)\right)dt+c_9\frac{T}{r}$$

$$+c_9\int\limits_0^T\left(\left|K_r^{m,l}\left(t\right)\right|+\left|\widetilde{K_r}^{m,l}\left(t\right)\right|\right)dt,\ \ \forall T\ge 0,\ \ \forall r\ge r_0,$$

buluruz. Son eşitsizlikte (4.31)'i göz önüne alarak ve Lebesgue yakınsaklık teoremini kullanarak,

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{l\to\infty}TE_{\mathbb{R}^n}\left(v_m\left(T\right)-v_l\left(T\right)\right)\le c_{10}(1+\frac{T}{r}),\quad\forall T\ge 0,\forall r\ge r_0,$$

alırız. Burada c_{10} sabiti önceki $c_i\left(i=\overline{1,9}\right)$ sabitleri gibi T ve r'den bağımsızdır. Yukarıdaki eşitsizlikte $r\to\infty$ iken limite geçersek,

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{l\to\infty}TE_{\mathbb{R}^n}\left(v_m\left(T\right)-v_l\left(T\right)\right)\le c_{10},\ \ \forall T\ge 0,$$

olur. Buradan ise

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{l\to\infty}\|S(T+t_{k_m}-T_0)\varphi_{k_m}-S(t+t_{k_l}-T_0)\varphi_{k_l}\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)}\le\frac{c_{11}}{\sqrt{T}},\quad\forall T>0,$$

olduğunu çıkarırız. Bir önceki eşitsizlikte $T=T_0$ seçersek,

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{l\to\infty}\|S(t_{k_m})\varphi_{k_m}-S(t_{k_l})\varphi_{k_l}\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)}\le\frac{c_{11}}{\sqrt{T_0}},\quad\forall T_0>0,$$

alırız. Sonuç olarak, üstteki dizisel limit eşitsizliğinde, $T_0 \to \infty$ iken limite geçersek, (4.24)'ü elde ederiz ve böylece ispatı tamamlarız. ■

Şimdi yerel olmayan çekicinin varlığının ispatını tamamlayabiliriz. (4.3) ve (4.6)'dan, (4.1)-(4.2) problemi aşağıdaki kesin Lyapunov fonksiyonuna sahiptir:

$$\Phi(u(t)) = E_{\mathbb{R}^n}(u(t)) + \frac{1}{p}F\left(\|u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x)\,u(t,x)\,dx.$$

Böylece Teorem 2.0.37'yi kullanarak, yerel olmayan çekicinin varlığını elde ederiz.

4.2 Yerel Olmayan Çekicinin Düzgünlüğü

Teorem 4.2.1 *Teorem 4.0.2'nin koşulları altında, (4.1)-(4.2) probleminin $\mathcal{A}$ yerel olmayan çekicisi $H^4(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$'de sınırlıdır.*

İspat. $(u_0, u_1) \in \mathcal{A}$ olsun. $\mathcal{A}$ çekicisi değişmez olduğundan, $(u(0), u_t(0)) = (u_0, u_1)$ olacak şekilde $\gamma = \{(u(t), u_t(t)) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{A}$ değişmez yörüngesi vardır. Şimdi,

$$v(t,x) := \frac{u(t+\tau,x) - u(t,x)}{\tau},\ \tau > 0,$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece, (4.1)'den,

$$\begin{aligned} &v_{tt}(t,x) + \Delta^2 v(t,x) + \alpha(x)v_t(t,x) + \lambda v(t,x) \\ &+(p-1)f(\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\int\limits_0^1 |u(t,x) + \sigma(u(t+\tau,x) - u(t,x))|^{p-2}\,d\sigma v(t,x) \\ &+\frac{f(\|u(t+\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}) - f\left(\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)}{\tau}|u(t+\tau,x)|^{p-2} \\ &\times u(t+\tau,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{4.35}$$

alırız. (4.35) denklemini v_t ile çarpıp $\mathbb{R}^n$'de integrallersek,

$$\frac{d}{dt}E_{\mathbb{R}^n}(v(t)) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha(x)|v_t(t,x)|^2\,dx$$

$$+\frac{p-1}{2}f(\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_0^1 |u(t,x) + \sigma(u(t+\tau,x) - u(t,x))|^{p-2}\,d\sigma\right)\frac{d}{dt}(v(t,x))^2\,dx$$

$$+\frac{f(\|u(t+\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}) - f\left(\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)}{\tau}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u(t+\tau,x)|^{p-2}\,u(t+\tau,x)v_t(t,x)\,dx = 0,$$

buluruz. f_ε fonksiyonu Lemma 4.1.1'deki gibi Ψ_ε ve $\omega(\varepsilon)$ fonksiyonları Lemma 4.1.2'deki gibi olsun. Buradan, Hölder eşitsizliği kullanarak,

$$\frac{d}{dt}E_{\mathbb{R}^n}(v(t)) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha(x)\left|v_t(t,x)\right|^2 dx$$

$$+\frac{p-1}{2}f_\varepsilon(\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_0^1 \Psi_\varepsilon\left(u(t,x)+\sigma\left(u(t+\tau,x)-u(t,x)\right)\right)d\sigma\right)\frac{d}{dt}\left(v(t,x)\right)^2 dx$$

$$\le c_1 \max_{0\le s_1,s_2\le\varepsilon}\left|f(s_1)-f(s_2)\right|\|u(t)\|^{p-2}_{L^{2(p-1)}(\mathbb{R}^n)}\|v(t)\|_{L^{2(p-1)}(\mathbb{R}^n)}\|v_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$+c_2\omega(\varepsilon)\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|v_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$+c_3\|v(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|u(t+\tau)\|^{p-1}_{L^{2(p-1)}(\mathbb{R}^n)}\|v_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.36}$$

elde ederiz. Ayrıca, f_ε fonksiyonunun tanımını ve yine Hölder eşitsizliğini kullanarak,

$$\left|\frac{d}{dt}f_\varepsilon\left(\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)\right| = \left|\frac{f'_\varepsilon\left(\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)}{\|u(t)\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^n)}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|^{p-1}u_t(t,x)\,dx\right|$$

$$\le \frac{c_4}{\varepsilon^{p-1}}\|u(t)\|^{p-1}_{L^{2(p-1)}(\mathbb{R}^n)}\|u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \frac{c_5}{\varepsilon^{p-1}},\ \text{h.h.y. } (0,\infty)\text{'da}, \tag{4.37}$$

alırız. Diğer taraftan $p(n-4)\le 2n-4$ olduğundan, Ψ_ε fonksiyonunun tanımını ve Sobolev gömülme teoremlerini kullanarak,

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^1 \Psi_\varepsilon\left(u(t,x)+\sigma\left(u(t+\tau,x)-u(t,x)\right)\right)d\sigma\right)\left(v(t,x)\right)^2 dx\right|$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^1 \Psi'_\varepsilon\left(u(t,x)+\sigma\left(u(t+\tau,x)-u(t,x)\right)\right)$$

$$\times\left(u_t(t,x)+\sigma\left(u_t(t+\tau,x)-u_t(t,x)\right)\right)d\sigma\left(v(t,x)\right)^2 dx$$

$$\le \frac{c_6}{\varepsilon^{\max\{0,3-p\}}}\left(\|u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|u_t(t+\tau)\|_{L^2(\mathbb{R})}\right)\|v(t)\|^2_{L^4(\mathbb{R})}$$

$$\le \frac{c_7}{\varepsilon^{\max\{0,3-p\}}}\|v(t)\|^2_{L^4(\mathbb{R})} \tag{4.38}$$

elde ederiz. Böylece, (4.4), (4.7), (4.37) ve (4.38)'i (4.36)'da göz önüne alıp, Sobolev gömülme teoremlerini uygularsak,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p-1}{2}f_\varepsilon(\|u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)})\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_0^1 \Psi_\varepsilon\left(u(t,x)+\sigma\left(u(t+\tau,x)-u(t,x)\right)\right)d\sigma\right)\left(v(t,x)\right)^2 dx\right)$$

$$+\frac{d}{dt}\left(E_{\mathbb{R}^n}(v(t))\right)+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\alpha(x)\left|v_t(t,x)\right|^2 dx$$

$$\leq c_8 \max_{0\leq s_1,s_2\leq\varepsilon} |f(s_1)-f(s_2)| \|v(t)\|_{L^{2(p-1)}(\mathbb{R}^n)} \|v_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$+c_2\omega(\varepsilon)\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|v_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$+c_8\|v(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|v_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$+\frac{c_8}{\varepsilon^{p-1}}\left(\|u(t)\|^{p-2}_{L^{p-1}(\mathbb{R}^n)}+\|u(t+\tau)\|^{p-2}_{L^{p-1}(\mathbb{R}^n)}\right)\|v(t)\|_{L^{2(p-1)}(\mathbb{R}^n)}$$
$$+\frac{c_9}{\varepsilon^{\max\{0,3-p\}}}\|v(t)\|^2_{L^4(\mathbb{R}^n)}\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

alırız. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafında interpolasyon teoremlerini uygulayarak,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p-1}{2}f_\varepsilon(\|u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)})\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^1\Psi_\varepsilon(u(t,x)+\sigma(u(t+\tau,x)-u(t,x)))\,d\sigma\right)(v(t,x))^2\,dx\right)$$
$$+\frac{d}{dt}(E_{\mathbb{R}^n}(v(t)))+\int_{\mathbb{R}^n}\alpha(x)|v_t(t,x)|^2\,dx$$
$$\leq c_9\max_{0\leq s_1,s_2\leq\varepsilon}|f(s_1)-f(s_2)|\|v(t)\|^{\frac{1}{2(p-1)}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|v(t)\|^{\frac{2p-3}{2(p-1)}}_{H^2(\mathbb{R}^n)}\|v_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$+c_2\omega(\varepsilon)\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|v_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}+c_9\|v(t)\|^{\frac{1}{p}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|v(t)\|^{\frac{(p-1)}{p}}_{H^2(\mathbb{R}^n)}\|v_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$+\frac{c_9}{\varepsilon^{p-1}}\|v(t)\|^{\frac{1}{2(p-1)}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|v(t)\|^{\frac{2p-3}{2(p-1)}}_{H^2(\mathbb{R}^n)}+\frac{c_9}{\varepsilon^{\max\{0,3-p\}}}\|v(t)\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|v(t)\|^{\frac{3}{4}}_{H^2(\mathbb{R}^n)}\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

buluruz. Diğer taraftan, (4.6)'dan,

$$\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\left\|\frac{u(t+\tau,x)-u(t,x)}{\tau}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leq\sup_{0\leq t<\infty}\|u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}<\widehat{C},$$

olduğundan, (4.4) ve (4.6)'yı göz önüne alarak, bir önceki eşitsizlikten,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p-1}{2}f_\varepsilon(\|u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)})\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^1\Psi_\varepsilon(u(t,x)+\sigma(u(t+\tau,x)-u(t,x)))\,d\sigma\right)(v(t,x))^2\,dx\right)$$
$$+\frac{d}{dt}(E_{\mathbb{R}^n}(v(t)))+\alpha_0\|v_t(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\backslash B(0,r))}$$
$$\leq c_{10}\max_{0\leq s_1,s_2\leq\varepsilon}|f(s_1)-f(s_2)|\|v(t)\|^{\frac{2p-3}{2(p-1)}}_{H^2(\mathbb{R}^n)}\|v_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$+c_{10}\omega(\varepsilon)\|v_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}+c_{10}\|v(t)\|^{\frac{(p-1)}{p}}_{H^2(\mathbb{R}^n)}\|v_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$+\frac{c_{10}}{\varepsilon^{p-1}}\|v(t)\|^{\frac{2p-3}{2(p-1)}}_{H^2(\mathbb{R}^n)}+\frac{c_{10}}{\varepsilon^{\max\{0,3-p\}}}\|v(t)\|^{\frac{3}{4}}_{H^2(\mathbb{R}^n)} \tag{4.39}$$

alırız. Kesme fonksiyonu η_r, 3. bölümdeki gibi tanımlansın. (4.35) denklemini $\sum_{i=1}^n\gamma x_i(1-\eta_{2r})v_{x_i}+\frac{\gamma}{2}(n-1)(1-\eta_{2r})v$ ile çarpıp, $\mathbb{R}^n$ üzerinde integrallersek, (4.5) ve (4.6)'dan,

$$\frac{3\gamma}{2}\|\Delta(v(t))\|^2_{L^2(B(0,2r))}+\frac{\gamma}{2}\|v_t(t)\|^2_{L^2(B(0,2r))}$$

$$+\gamma \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} x_i\left(1-\eta_{2r}\left(x\right)\right)v_{x_i}\left(t,x\right)v_t\left(t,x\right)dx\right)$$

$$+\gamma \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(n-1\right)\int_{\mathbb{R}^n}\left(1-\eta_{2r}\left(x\right)\right)v_t\left(t,x\right)v\left(t,x\right)dx\right)$$

$$\leq \frac{\gamma}{4r}\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{B(0,4r)\backslash B(0,2r)}\eta_{x_i}\left(\frac{x}{2r}\right)x_i\left|v_t\left(t,x\right)\right|^2 dx\right|$$

$$+\frac{\gamma}{4r}\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{B(0,4r)\backslash B(0,2r)}\eta_{x_i}\left(\frac{x}{2r}\right)x_i\left|\Delta v\left(t,x\right)\right|^2 dx\right|$$

$$+\gamma\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{B(0,4r)\backslash B(0,2r)}\Delta\left(\left(1-\eta_{2r}\left(x\right)\right)x_i\right)v_{x_i}\left(t,x\right)\Delta v\left(t,x\right)dx\right|$$

$$+\frac{\gamma}{r}\left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{B(0,4r)\backslash B(0,2r)}\eta_{x_j}\left(\frac{x}{2r}\right)x_i v_{x_i x_j}\left(t,x\right)\Delta v\left(t,x\right)dx\right|$$

$$+\frac{\gamma}{2}\left(n-1\right)\left|\int_{B(0,4r)\backslash B(0,2r)}\Delta\left(\left(1-\eta_{2r}\left(x\right)\right)\right)v\left(t,x\right)\Delta v\left(t,x\right)dx\right|$$

$$+\frac{\gamma}{2r}\left(n-1\right)\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{B(0,4r)\backslash B(0,2r)}\eta_{x_i}\left(\frac{x}{2r}\right)v_{x_i}\left(t,x\right)\Delta v\left(t,x\right)dx\right|$$

$$+\gamma\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{B(0,4r)}\left(1-\eta_{2r}\left(x\right)\right)x_i v_{x_i}\left(t,x\right)a\left(x\right)v_t\left(t,x\right)dx\right|$$

$$+\frac{\gamma}{2}\left(n-1\right)\left|\int_{B(0,4r)}\left(1-\eta_{2r}\left(x\right)\right)v\left(t,x\right)a\left(x\right)v_t\left(t,x\right)dx\right|$$

$$+\gamma\lambda\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{B(0,4r)}\left(1-\eta_{2r}\left(x\right)\right)x_i v_{x_i}\left(t,x\right)v\left(t,x\right)dx\right|$$

$$+\gamma(p-1)f(\|u\left(t\right)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})\sum_{i=1}^{n}\int_{B(0,4r)}\left(1-\eta_{2r}\left(x\right)\right)x_i v_{x_i}\left(t,x\right)$$

$$\times\int_0^1\left|u\left(t,x\right)+\sigma\left(u\left(t+\tau,x\right)-u\left(t,x\right)\right)\right|^{p-2}d\sigma v\left(t,x\right)dx$$

$$+\gamma c\left\|v\left(t\right)\right\|_{L^{p}(\mathbb{R}^{n})}\left|\sum\nolimits_{i=1}^{n}\int\limits_{B(0,4r)}\left(1-\eta_{2r}\left(x\right)\right)x_{i}v_{x_{i}}\left(t,x\right)\left|u(t+\tau,x)\right|^{p-2}u(t+\tau,x)dx\right|$$

$$+\frac{\gamma}{2}\left(n-1\right)\left(p-1\right)f(\left\|u\left(t\right)\right\|_{L^{p}(\mathbb{R}^{n})})\int\limits_{B(0,4r)}\left(1-\eta_{2r}\left(x\right)\right)\left|v\left(t,x\right)\right|^{2}$$

$$\times\int\limits_{0}^{1}\left|u\left(t,x\right)+\sigma\left(u\left(t+\tau,x\right)-u\left(t,x\right)\right)\right|^{p-2}d\sigma dx$$

$$+\frac{\gamma}{2}\left(n-1\right)\left\|v\left(t\right)\right\|_{L^{p}(\mathbb{R}^{n})}\left|\int\limits_{B(0,4r)}\left(1-\eta_{2r}\left(x\right)\right)v\left(t,x\right)\left|u(t+\tau,x)\right|^{p-2}u(t+\tau,x)dx\right|$$

$$\leq\gamma c_{11}\left\|v_{t}\left(t\right)\right\|_{L^{2}(B(0,4r)\backslash B(0,2r))}^{2}+\gamma c_{11}\left\|\Delta v\left(t\right)\right\|_{L^{2}(B(0,4r)\backslash B(0,2r))}^{2}$$

$$+\gamma c_{11}r\left\|\nabla v\left(t\right)\right\|_{L^{2}(B(0,4r))}\tag{4.40}$$

elde ederiz. (4.35) denklemini $\beta\eta_r^2 v$ ile çarpıp, $\mathbb{R}^n$'de integrallersek,

$$\beta\left\|\eta_{r}\Delta v(t)\right\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{n})}^{2}+\beta\lambda\left\|\eta_{r}v(t)\right\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{n})}^{2}$$

$$+\beta\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}\eta_{r}^{2}\left(x\right)v_{t}\left(t,x\right)v(t,x)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}\eta_{r}^{2}\left(x\right)\alpha\left(x\right)\left(v(t,x)\right)^{2}dx\right)$$

$$=\beta\left\|\eta_{r}v_{t}\left(t\right)\right\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{n})}^{2}-\frac{4\beta}{r}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}\eta_{r}\left(x\right)\eta_{x_{i}}\left(\frac{x}{r}\right)\Delta v(t,x)v_{x_{i}}(t,x)dx$$

$$-\beta\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}\Delta\left(\eta_{r}^{2}\left(x\right)\right)\Delta v(t,x)v(t,x)dx+\beta(p-1)f(\left\|u\left(t\right)\right\|_{L^{p}(\mathbb{R}^{n})}^{p})$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}\left(\int\limits_{0}^{1}\left|u\left(t,x\right)+\sigma\left(u\left(t+\tau,x\right)-u\left(t,x\right)\right)\right|^{p-2}d\sigma\right)\left(\eta_{r}\left(x\right)v\left(t,x\right)\right)^{2}dx$$

$$+\beta\frac{f(\left\|u\left(t+\tau\right)\right\|_{L^{p}(\mathbb{R}^{n})}^{p})-f\left(\left\|u\left(t\right)\right\|_{L^{p}(\mathbb{R}^{n})}^{p}\right)}{\tau}$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}\left|u(t+\tau,x)\right|^{p-2}u(t+\tau,x)\eta_{r}^{2}vdx=0,\quad(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^{n},$$

alırız. Bir önceki eşitsizlikte (4.3), (4.5) ve (4.6)'yı göz önüne alarak,

$$\beta\left\|\Delta\left(v(t)\right)\right\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{n}\backslash B(0,2r))}^{2}+\beta\lambda\left\|v(t)\right\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{n}\backslash B(0,2r))}^{2}$$

$$+\beta\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}\eta_{r}^{2}\left(x\right)v_{t}\left(t,x\right)v(t,x)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}\eta_{r}^{2}\left(x\right)\alpha\left(x\right)\left(v(t,x)\right)^{2}dx\right)$$

$$\leq \beta \left\| \eta_r v_t(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0,r))} + c_{12}\beta + \frac{c_{12}\beta}{r} \left\| v(t) \right\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)}, \ \ \forall t \geq 0, \forall r \geq r_0. \tag{4.41}$$

buluruz. (4.39), (4.40) ve (4.41)'i toplarsak,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p-1}{2} f_\varepsilon(\|u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}) \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 \Psi_\varepsilon \left(u(t,x) + \sigma\left(u(t+\tau,x) - u(t,x)\right)\right) d\sigma \right) (v(t,x))^2 \, dx \right)$$

$$+\frac{d}{dt}\left(E_{\mathbb{R}^n}(v(t))\right) + \alpha_0 \left\| v_t(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0,r))} + \frac{3\varepsilon}{2} \left\| \Delta\left(v(t)\right) \right\|^2_{L^2(B(0,2r))} + \frac{\varepsilon}{2} \left\| v_t(t) \right\|^2_{L^2(B(0,2r))}$$

$$+\varepsilon \frac{d}{dt}\left(\sum\nolimits_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} x_i \left(1 - \eta_{2r}(x)\right) v_{x_i}(t,x)\, v_t(t,x)\, dx \right)$$

$$+\varepsilon \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(n-1) \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 - \eta_{2r}(x)\right) v_t(t,x)\, v(t,x)\, dx \right)$$

$$+\beta \frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_r^2(x)\, v_t(t,x)\, v(t,x) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_r^2(x)\, \alpha(x) \left(v(t,x)\right)^2 dx \right)$$

$$+\beta \left\| \Delta v(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0,2r))} + \beta\lambda \left\| v(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0,2r))}$$

$$\leq c_{10} \max_{0 \leq s_1, s_2 \leq \varepsilon} \left| f(s_1) - f(s_2) \right| \left\| v(t) \right\|^{\frac{2p-3}{2(p-1)}}_{H^2(\mathbb{R}^n)} \left\| v_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$+c_{10}\omega(\varepsilon) \left\| v_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + c_{10} \left\| v(t) \right\|^{\frac{(p-1)}{p}}_{H^2(\mathbb{R}^n)} \left\| v_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\frac{c_{10}}{\varepsilon^{p-1}} \left\| v(t) \right\|^{\frac{2p-3}{2(p-1)}}_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{c_{10}}{\varepsilon^{\max\{0,3-p\}}} \left\| v(t) \right\|^{\frac{3}{4}}_{H^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\gamma c_{11} \left\| v_t(t) \right\|^2_{L^2(B(0,4r) \setminus B(0,2r))} + \gamma c_{11} \left\| \Delta v(t) \right\|^2_{L^2(B(0,4r) \setminus B(0,2r))}$$

$$+\gamma c_{11} r \left\| \nabla v(t) \right\|_{L^2(B(0,4r))} + \beta \left\| \eta_r v_t(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0,r))} + c_{12}\beta + \frac{c_{12}\beta}{r} \left\| v(t) \right\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)}$$

alırız. Buradan, yeterince küçük $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$ ve $\beta > 0$ için Young eşitsizliği uygulayarak,

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) + c_{13} E_{\mathbb{R}^n}\left(v(t)\right) \leq c_{14} + \frac{c_{15}}{r} \left\| v(t) \right\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.42}$$

elde ederiz. Burada $c_{13} > 0$ ve

$$\Psi(t) = \frac{p-1}{2} f_\varepsilon(\|u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}) \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 \Psi_\varepsilon \left(u(t,x) + \sigma\left(u(t+\tau,x) - u(t,x)\right)\right) d\sigma \right) (v(t,x))^2 \, dx$$

$$+E_{\mathbb{R}^n}(v(t)) + \gamma \sum\nolimits_{i=1}^n \int_{B(0,4r)} x_i \left(1 - \eta_{2r}(x)\right) v_{x_i}(t,x)\, v_t(t,x)\, dx$$

$$+\frac{\gamma}{2}(n-1) \int_{B(0,4r)} \left(1 - \eta_{2r}(x)\right) v_t(t,x)\, v(t,x)\, dx$$

$$+\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_r^2(x)\,v_t(t,x)\,v(t,x)dx+\frac{\beta}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_r^2(x)\,\alpha(x)\,(v(t,x))^2\,dx.$$

Ayrıca, $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$ ve $\beta > 0$ değerleri yeterince küçük olduğu için,

$$cE_{\mathbb{R}^n}(v(t)) \leq \Psi(t) \leq \widetilde{c}E_{\mathbb{R}^n}(v(t)) \tag{4.43}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $c > 0$, $\widetilde{c} > 0$ vardır. Böylece, (4.42) ve (4.43)'ten, $r \to \infty$ iken limite geçerek,

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) + c_{15}\Psi(t) \leq c_{14}$$

buluruz. Buradan ise keyfi $T \geq 0$ için,

$$\Psi(t) \leq e^{c_{11}(s-t)}(\Psi(s)-1) + c_{13}, \quad \forall t \in [0,T],$$

olur. Son eşitsizlikte $s \to -\infty$ iken limite geçersek, keyfi $T \geq 0$ için,

$$\Psi(t) \leq c_{13}, \quad \forall t \in [0,T],$$

alırız ve (4.43)'ü kullanırsak,

$$E_{\mathbb{R}^n}(v(t)) \leq c_{14}, \quad \forall t \in [0,T],$$

olur. Üstteki eşitsizlikte, $\tau \to 0$ iken limite geçersek, v fonksiyonunun tanımından,

$$E_{\mathbb{R}^n}(u_t(t)) \leq c_{14}, \quad \forall t \geq 0,$$

elde ederiz. Bu değerlemeyi (4.1)'de göz önüne alırsak,

$$\|u(t)\|_{H^4(\mathbb{R}^n)} \leq c_{15}$$

buluruz ve bunu bir önceki eşitsizlikle birlikte değerlendirirsek, $C > 0$ olmak üzere,

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{H^4(\mathbb{R}^n)\times H^2(\mathbb{R}^n)} \leq C,$$

alırız ve ispat tamamlanır. ■

5 YARI DOĞRUSAL LEVHA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ENERJİ SÖNÜMÜ

Bu bölümde, yarı doğrusal levha denklemi için,

$$u_{tt} + \Delta^2 u + a(x)u_t + \alpha u + f(u) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \tag{5.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \ \ u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.2}$$

başlangıç-değer probleminin çözümlerinin üstel enerji sönümünü inceledik. Burada $\alpha > 0$, olmakla birlikte $a(\cdot)$ ve $f(\cdot)$ fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

$$a \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \ \ a(\cdot) \geq 0, \text{ h.h.y. } \mathbb{R}^n\text{'de}, \tag{5.3}$$

$$\text{her hangi bir } r_0 > 0 \text{ için, } a(\cdot) \geq a_0 > 0 \text{ h.h.y. } \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq r_0\}\text{'da}, \tag{5.4}$$

$$f \in C^1(\mathbb{R}), \ |f'(s)| \leq C\left(1 + |s|^{p-1}\right), \ p > 1, \ (n-4)p \leq n, \tag{5.5}$$

$$f(s)s \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{5.6}$$

Yarı grup teorisi kullanarak, (5.3), (5.5) ve (5.6) koşulları altında, her $(u_0, u_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ başlangıç verisi için, (5.1)-(5.2) probleminin, $C([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n))$ sınıfından olan zayıf çözümünün var ve tek olduğu kolayca görülebilir (bkz [33], 3.bölüm). (5.1)-(5.2) probleminin enerji fonksiyonelini

$$E(t, u_0, u_1) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(|u_t(t,x)|^2 + |\Delta u(t,x)|^2 + \alpha |u(t,x)|^2\right) dx + \int_{\mathbb{R}^n} F(u(t,x))\, dx,$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $u(t,x)$ fonksiyonu (5.1)-(5.2) probleminin $(u_0, u_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ başlangıç verisine uygun zayıf çözümüdür ve her $z \in \mathbb{R}$ için $F(z) = \int_0^z f(s)\, ds$.

(5.1)-(5.2) probleminin çözümünün üstel enerji sönümüne sahip olması ile, her $(u_0, u_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ başlangıç verisi için

$$E(t, u_0, u_1) \leq C\ E(0, u_0, u_1)\, e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0,$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $C > 1$, $\gamma > 0$ sabitlerinin bulunmasını kastedeceğiz.

Bu bölümde elde ettiğimiz esas sonuç şu şekildedir:

Teorem 5.0.1 *(5.3)-(5.6) koşulları sağlansın. Ek olarak,*
(i) (Yerel olmayan Lipschitz durumu) $f' \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ ve

$$\lim_{s\to-\infty}\frac{f(s)}{s}=\alpha_1\in[0,\infty),\ \lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s}=\alpha_2\in[0,\infty), \tag{5.7}$$

ya da
(ii) (Süper lineer durumu)

$$f(s)\,s\geq(2+\delta)\,F(s)\,,\ \forall s\in\mathbb{R}, \tag{5.8}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $\delta>0$ vardır, koşullarından biri sağlansın.
Bu durumda (5.1)-(5.2) probleminin $(u_0,u_1)\in H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$ başlangıç değerine sahip her $u(t,x)$ zayıf çözümü için,

$$E(t,u_0,u_1)\leq C\ E(0\,,u_0,u_1)\,e^{-\gamma t}\ ,\quad \forall t\geq 0,$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $C>1$ ve $\gamma>0$ sabitleri vardır .

5.1 ÇÖZÜMLERİN ÜSTEL ENERJİ SÖNÜMÜ

İspata aşağıdaki lemma ile başlayalım.

Lemma 5.1.1 *(5.5) koşulu sağlansın . Eğer $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $H^2(\mathbb{R}^n)$'de zayıf yakınsaksa ve pozitif $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi yakınsaksa,*

$$\limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{k\to\infty}\left\|\frac{1}{\lambda_k}f(\lambda_k u_k)-\frac{1}{\lambda_m}f(\lambda_m u_m)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leq C\ \limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{k\to\infty}\|u_k-u_m\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \tag{5.9}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $C=C(f,\sup_k\lambda_k,\ \sup_k\|u_k\|_{H^2(\mathbb{R}^n)})>0$ vardır. Ayrıca, ek olarak (i) koşulu sağlanırsa, (5.9) eşitsizliği, C sabiti sadece f fonksiyonuna bağlı olmak üzere, aynı zamanda $\lambda_k\to\infty$ durumunda da sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki $u_k\overset{w}{\to}u\ \ H^2(\mathbb{R}^n)$'de ve $\lambda_k\to\lambda_0\in[0,\infty]$ olsun. Üçgen eşitsizliği kullanarak,

$$\left\|\frac{1}{\lambda_k}f(\lambda_k u_k)-\frac{1}{\lambda_m}f(\lambda_m u_m)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leq\left\|\frac{1}{\lambda_k}f(\lambda_k u_k)-\frac{1}{\lambda_k}f(\lambda_k u)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\left\|\frac{1}{\lambda_k}f(\lambda_k u)-\frac{1}{\lambda_m}f(\lambda_m u)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\left\|\frac{1}{\lambda_m}f(\lambda_m u)-\frac{1}{\lambda_m}f(\lambda_m u_m)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{5.10}$$

eşitsizliğini alırız. (5.10) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk terimi değerlendirelim. Sobolev gömülme teoremlerine göre, $H^2(\mathbb{R}^n)\subset L^{\frac{2n}{(n-4)^+}}(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ olduğundan, (5.5) ve Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{\lambda_k}f(\lambda_k u_k)-\frac{1}{\lambda_k}f(\lambda_k u)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\le C_1\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u_k-u|^2\left(1+(\lambda_k u_k)^{2(p-1)}+(\lambda_k u)^{2(p-1)}\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C_2\left(\|u_k-u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|u_k-u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}\left(\|\lambda_k u_k\|^{p-1}_{H^2(\mathbb{R}^n)}+\|\lambda_k u\|^{p-1}_{H^2(\mathbb{R}^n)}\right)\right)\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $\lambda_0\in[0,\infty)$ için, pozitif C_3 sabiti $\sup\limits_k \lambda_k$ ve $\sup\limits_k \|u_k\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}$ değerlerine bağlı olmak üzere

$$\left\|\frac{1}{\lambda_k}f(\lambda_k u_k)-\frac{1}{\lambda_k}f(\lambda_k u)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\le C_3\|u_k-u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{5.11}$$

olur. Ek olarak, (i) koşulu sağlanırsa, her $\lambda_0\in[0,\infty]$ için (5.11) elde edilir. Bu durumda (5.11)'in sağındaki sabit sadece $\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ değerine bağlıdır. (5.10) eşitsizliğinin sağ tarafındaki üçüncü terim için aynı argümanlar göz önüne alınırsa

$$\left\|\frac{1}{\lambda_m}f(\lambda_m u)-\frac{1}{\lambda_m}f(\lambda_m u_m)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\le C_4\|u_m-u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \tag{5.12}$$

sağlanır. (5.10) eşitsizliğinin sağ tarafındaki $\left\|\frac{1}{\lambda_k}f(\lambda_k u)-\frac{1}{\lambda_m}f(\lambda_m u)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ terimini ise üç farklı durum altında değerlendireceğiz.

1. Durum: $\lambda_0\in(0,\infty)$.

f fonksiyonunun sürekliliğinden,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda_k}f(\lambda_k u)=\frac{1}{\lambda_0}f(\lambda_0 u)\ \text{h.h.y. } \mathbb{R}^n\text{'de},$$

alırız. $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ dizisi yakınsak olduğundan,

$$\left|\frac{1}{\lambda_k}f(\lambda_k u)\right|\le C_5\left(|u|+|u|^p\right)$$

olur ve

$$\left|\frac{1}{\lambda_k}f(\lambda_k u)-\frac{1}{\lambda_m}f(\lambda_m u)\right|^2\le C_6\ (|u|^2+|u|^{2p}),$$

elde ederiz. Sobolev gömülme teoremine göre $H^2(\mathbb{R}^n)\subset L^{2p}(\mathbb{R}^n)$ olduğundan, Lebesgue yakınsaklık teoreminden,

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{1}{\lambda_k}f(\lambda_k u)-\frac{1}{\lambda_m}f(\lambda_m u)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}=0, \tag{5.13}$$

buluruz.

2. Durum: $\lambda_0 = 0$.

$Q_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \neq 0\}$ ve $Q_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. Böylece,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_k} f(\lambda_k u) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(\lambda_k u)}{\lambda_k u} u = f'(0)u, \text{ h.h.y. } Q_1\text{'de,}$$

elde ederiz ve (5.6)'dan

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_k} f(\lambda_k u) = 0 = f'(0)u,\ Q_2\text{'de,}$$

olur. 1. duruma benzer olarak, Lebesgue yakınsaklık teoreminden,

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{k\to\infty} \left\| \frac{1}{\lambda_k} f(\lambda_k u) - \frac{1}{\lambda_m} f(\lambda_m u) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0, \tag{5.14}$$

alırız.

3. Durum: $\lambda_0 = \infty$ olsun ve ek olarak, (i) koşulu sağlansın.

Şu şekilde kümeler tanımlayalım: $\widehat{Q}_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) < 0\}$, $\widehat{Q}_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > 0\}$ ve $\widehat{Q}_3 := \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = 0\}$. (5.6) ve (5.7)'yi göz önüne alırsak,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_k} f(\lambda_k u) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(\lambda_k u)}{\lambda_k u} u = \alpha_1 u, \text{ h.h.y. } \widehat{Q}_1\text{'de,}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_k} f(\lambda_k u) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(\lambda_k u)}{\lambda_k u} u = \alpha_2 u, \text{ h.h.y. } \widehat{Q}_2\text{'de,}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_k} f(\lambda_k u) = 0,\ \widehat{Q}_3\text{'de,}$$

elde ederiz. Böylece,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_k} f(\lambda_k u) = (\alpha_1 \chi_{Q_1} + \alpha_2 \chi_{Q_2})\, u, \text{ h.h.y. } \mathbb{R}^n\text{'de,}$$

alırız. Aşağıdaki

$$\left| \frac{1}{\lambda_k} f(\lambda_k u) - \frac{1}{\lambda_m} f(\lambda_m u) \right|^2 \leq 2 \left(\left| \frac{f(\lambda_k u)}{\lambda_k} \right|^2 + \left| \frac{f(\lambda_m u)}{\lambda_m} \right|^2 \right) \leq C_7\ u^2, \text{ h.h.y. } \mathbb{R}^n\text{'de,}$$

eşitsizliğini ve tekrar Lebesgue yakınsaklık teoremi kullanırsak,

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{k\to\infty} \left\| \frac{1}{\lambda_k} f(\lambda_k u) - \frac{1}{\lambda_m} f(\lambda_m u) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0, \tag{5.15}$$

olur. (5.10)-(5.15)'ten,

$$\limsup_{m\to\infty} \limsup_{k\to\infty} \left\| \frac{1}{\lambda_k} f(\lambda_k u_k) - \frac{1}{\lambda_m} f(\lambda_m u_m) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq C_8 \left(\limsup_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \limsup_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \right), \tag{5.16}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca, $u_k \overset{w}{\to} u \quad H^2(\mathbb{R}^n)$'de olduğundan

$$\begin{aligned}
& \limsup_{m\to\infty} \limsup_{k\to\infty} \|u_k - u_m\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)} \\
= & \limsup_{m\to\infty} \limsup_{k\to\infty} \left(\|u_k\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)} - 2\langle u_k, u_m\rangle_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|u_m\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)} \right) \\
= & \ 2 \limsup_{k\to\infty} \|u_k\|^2 - 2 \limsup_{k\to\infty} \langle u_k, u\rangle_{H^2(\mathbb{R}^n)} \\
= & \ 2 \limsup_{k\to\infty} \|u_k - u\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

alırız. Bu eşitliği ve (5.16)'yı kullanarak, (5.9)'u elde ederiz ve ispat tamamlanır. ■

Şimdi de aşağıdaki problemi inceleyelim:

$$\begin{cases} u_{\lambda tt} + \Delta^2 u_\lambda + a(x)u_{\lambda t} + \alpha u_\lambda + \Phi_\lambda(u_\lambda) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u_\lambda(0,\cdot) = u_{0\lambda} \in H^2(\mathbb{R}^n), \quad u_{\lambda t}(0,\cdot) = u_{1\lambda} \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{5.17}$$

Burada $\Phi_\lambda(u) = \begin{cases} f'(0)u, & \lambda = 0, \\ \frac{1}{\lambda} f(\lambda u), & \lambda \in (0,\infty), \\ \begin{cases} \alpha_1 u, & u \leq 0 \\ \alpha_2 u, & u > 0 \end{cases}, & \lambda = \infty. \end{cases}$

Yarı grup teorisi kullanarak, (5.3), (5.5) ve (5.6) koşulları altında (5.17) probleminin, her $\lambda \in [0,\infty]$ için, $H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayında kuvvetli sürekli $\left\{S^\lambda(t)\right\}_{t\geq 0}$ yarıgrubu oluşturduğunu kolayca görebiliriz.

Lemma 5.1.2 *Kabul edelim ki (5.3), (5.5) ve (5.6) koşulları sağlansın. Eğer* $0 < \lambda_k \to \lambda_0 \in [0,\infty)$ *ve* $(u_{0k}, u_{1k}) \to (u_0, u_1) \quad H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$*'de ise*

$$S^{\lambda_k}(t)(u_{0k}, u_{1k}) \to S^{\lambda_0}(t)(u_0, u_1) \quad H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)\text{'de}, \tag{5.18}$$

olur. Ek olarak (i) koşulu sağlanırsa (5.18), $\lambda_0 = \infty$ *durumunda da geçerlidir.*

İspat. Bu ispattaki değerlendirmeler, öncelikle $H^4(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$ uzayından olan başlangıç verilerine uygun kuvvetli çözümler için elde edildikten sonra standart yoğunluk argümanları kullanılarak, $H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayından olan başlangıç verilerine uygun zayıf çözümler için de doğrulanabilir.

$(u_k(t), u_{kt}(t)) = S^{\lambda_k}(t)(u_{0k}, u_{1k})$ şeklinde tanımlayalım. $(5.17)_1$ denkleminde, $u_\lambda(t)$ ve λ yerine sırasıyla, $u_k(t)$ ve λ_k yazarsak ve elde ettiğimiz denklemi $2u_{kt}$ ile çarpıp,

$(0,t)\times\mathbb{R}^n$ üzerinde integrallersek, (5.5)'ten

$$\|u_{kt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|\Delta u_k(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\alpha\|u_k(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\frac{2}{\lambda_k^2}\int_{\mathbb{R}^n}F(\lambda_k u_k(t,x))\,dx+$$

$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}a(x)|u_{kt}(t,x)|^2\,dx=\|u_{kt}(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\ +\|\Delta u_k(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\alpha\|u_k(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\frac{2}{\lambda_k^2}\int_{\mathbb{R}^n}F(\lambda_k u_k(0,x))\,dx\le C\left(\|u_{1k}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|u_{0k}\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)}+\|u_{0k}\|^{p+1}_{H^2(\mathbb{R}^n)}\right),\quad (5.19)$$

alırız. Burada pozitif C sabiti $\sup\limits_k\lambda_k$ değerine bağlıdır. Ek olarak (i) koşulu sağlanırsa C sabiti sadece $\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ değerine bağlıdır. (5.3) ve (5.6)'yı kullanarak, (5.19)'dan

$$\|u_{kt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|u_k(t)\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)}\le C\left(\|u_{1k}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|u_{0k}\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)}+\|u_{0k}\|^{p+1}_{H^2(\mathbb{R}^n)}\right),\ (5.20)$$

elde ederiz. $\{(u_{0k},u_{1k})\}_{k=1}^\infty$ dizisi yakınsak olduğundan aynı zamanda sınırlıdır. Bu nedenle, $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ dizisi $L^\infty(0,\infty;H^2(\mathbb{R}^n))$ uzayında ve $\{u_{kt}\}_{k=1}^\infty$ dizisi ise $L^\infty(0,\infty;L^2(\mathbb{R}^n))$ uzayında sınırlıdır. Böylece, Banach-Alaoglu teoreminden,

$$\begin{cases} u_{k_m}\overset{w^*}{\to}u & L^\infty(0,\infty;H^2(\mathbb{R}^n))\text{'de},\\ u_{k_mt}\overset{w^*}{\to}u_t & L^\infty(0,\infty;L^2(\mathbb{R}^n))\text{'de}\end{cases}\quad (5.21)$$

yakınsamaları sağlanacak şekilde $\{u_{k_m}\}_{m=1}^\infty$ alt dizisi vardır. Buradan $\{u_{k_m}\}_{m=1}^\infty$ dizisinin $H^1((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$'de sınırlı olduğunu elde ederiz. Ardından, $H^1((0,T)\times B(0,r))\hookrightarrow L^2((0,T)\times B(0,r))$ kompakt gömülmesini kullanarak, keyfi $r>0$ ve $T>0$ için,

$$u_{k_m}\to u\quad L^2((0,T)\times B(0,r))\text{'de},$$

buluruz. Böylece, $u_{k_{m_l}}(t,x)\to u(t,x)$ h.h.y. $(0,T)\times B(0,r)$'de olacak şekilde $\left\{u_{k_{m_l}}\right\}_{l=1}^\infty\subset\{u_{k_m}\}_{m=1}^\infty$ alt dizisinin varlığını elde ederiz. Böylelikle, bir önceki lemmadaki argümanların aynılarını kullanarak

$$\frac{1}{\lambda_{k_{m_l}}}f(\lambda_{k_{m_l}}u_{k_{m_l}}(t,x))\to\Phi_{\lambda_0}(u(t,x))\text{ h.h.y. }(0,T)\times B(0,r)\text{'de}$$

alırız. Diğer taraftan, (5.5)'ten, $\left\{\frac{1}{\lambda_{k_m}}f(\lambda_{k_m}u_{k_m})\right\}_{m=1}^\infty$ dizisi $L^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$'de sınırlı olduğundan,

$$\frac{1}{\lambda_{k_{m_l}}}f(\lambda_{k_{m_l}}u_{k_{m_l}})\overset{w}{\to}\Phi_{\lambda_0}(u)\quad L^2((0,T)\times B(0,r))\text{'de},\quad (5.22)$$

olacak şekilde $\{k_{ml}\}$ alt dizisi vardır. Dahası, $(5.17)_1$ ve (5.20)-(5.22)'den, $\left\{u_{k_{m_l}tt}\right\}_{l=1}^\infty$ dizisi $L^\infty(0,\infty;H^{-2}(\mathbb{R}^n))$'de sınırlıdır. Böylece

$$u_{k_{m_l}tt}\overset{w^*}{\to}u_{tt}\ \ L^\infty(0,\infty;H^{-2}(\mathbb{R}^n))\text{'de},\quad (5.23)$$

elde ederiz. (5.20)-(5.23)'ten, $u(t,x)$ fonksiyonunun, (5.17) probleminin çözümü olduğunu elde ederiz. Çözümün tekliğini kullanarak

$$S^{\lambda_{k_{m_l}}}(t)(u_{0k_{m_l}}, u_{1k_{m_l}}) \xrightarrow{w} S^{\lambda_0}(t)(u_0,u_1) \quad H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)\text{'de},$$

alırız. Benzer şekilde, $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin her alt dizisinin, u fonksiyonuna yakınsayan başka bir alt dizisinin var olduğunu söyleyebiliriz. Bu ise bize

$$S^{\lambda_k}(t)(u_{0k}, u_{1k}) \xrightarrow{w} S^{\lambda_0}(t)(u_0,u_1) \quad H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)\text{'de}, \tag{5.24}$$

yakınsamasını verir. Aşağıdaki

$$u_{ktt}-u_{mtt}+\Delta^2(u_k-u_m)+a(x)(u_{kt}-u_{mt})+\alpha(u_k-u_m)+\frac{1}{\lambda_k}f(\lambda_k u_k)-\frac{1}{\lambda_m}f(\lambda_m u_m)=0,$$

denklemini $2(u_{kt}-u_{mt})$ ile çarpıp, $(0,t)\times\mathbb{R}^n$'de integrallersek ve (5.3)'ü göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned}
&\|u_{kt}(t)-u_{mt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|\Delta u_k(t)-\Delta u_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\alpha\|u_k(t)-u_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
\le\ &\|u_{1k}-u_{1m}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|\Delta u_{0k}-\Delta u_{0m}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\alpha\|u_{0k}-u_{0m}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&+\int_0^t\left(\|u_{kt}(s)-u_{mt}(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\left\|\frac{1}{\lambda_k}f(\lambda_k u_k(s))-\frac{1}{\lambda_m}f(\lambda_m u_m(s))\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)ds,
\end{aligned}$$

buluruz. Üstteki eşitsizliği ve Lemma 5.1.1'i kullanarak,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{k\to\infty}\left(\|u_{kt}(t)-u_{mt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|u_k(t)-u_m(t)\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)}\right)\\
\le\ &C\limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{k\to\infty}\int_0^t\left(\|u_{kt}(s)-u_{mt}(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|u_k(s)-u_m(s)\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)}\right)ds,
\end{aligned}$$

elde ederiz. $\{(u_k,u_{kt})\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $L^{\infty}(0,\infty;H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n))$'de sınırlı olduğundan, ters Fatou eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{k\to\infty}\left(\|u_{kt}(t)-u_{mt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|u_k(t)-u_m(t)\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)}\right)\\
\le\ &C\int_0^t\limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{k\to\infty}\left(\|u_{kt}(s)-u_{mt}(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|u_k(s)-u_m(s)\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)}\right)ds,
\end{aligned}$$

olur. Böylelikle, Gronwall eşitsizliği kullanarak,

$$\limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{k\to\infty}\left(\|u_{kt}(t)-u_{mt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|u_k(t)-u_m(t)\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)}\right)=0,$$

alırız. Böylece, $\{(u_k(t),u_{kt}(t))\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$'de Cauchy dizisi olur ve (5.24)'ü de dikkate alırsak (5.18)'i elde edip, ispatı tamamlarız. ■

Lemma 5.1.3 *(5.3)-(5.6) koşulları sağlansın ve B kümesi $H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$'de sınırlı küme olsun. Bu durumda, her $M>0$ için, $\left\{S^{\lambda_k}(t_k)\varphi_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}\subset B$, $t_k\to\infty$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}\subset(0,M]$ şeklindeki dizi $H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$'de prekompakttır. Ek olarak, (i) koşulu sağlansın, bu durumda $\left\{S^{\lambda_k}(t_k)\varphi_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}\subset B$, $t_k\to\infty$, $\lambda_k\to\infty$ şeklindeki dizi de $H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$'de prekompakttır.*

İspat. $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$'de sınırlı olduğundan, lemmanın koşulları altında, (5.20)'den $\left\{S^{\lambda_k}(.)\,\varphi_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $C_b(0,\infty;H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n))$ uzayında sınırlı olur. Böylece, keyfi $T_0\geq 0$ için, $t_{k_m}\geq T_0$, ve

$$\begin{cases} \lambda_{k_m}\to\lambda_0 \quad \overline{\mathbb{R}}\text{'de}, \\ S^{\lambda_{k_m}}(t_{k_m}-T_0)\varphi_{k_m}\overset{w}{\to}\varphi_0 \quad H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)\text{'de}, \\ v_m\overset{w^*}{\to}v \quad L^\infty(0,\infty;H^2(\mathbb{R}^n))\text{'de}, \\ v_{mt}\overset{w^*}{\to}v_t \quad L^\infty(0,\infty;L^2(\mathbb{R}^n))\text{'de}, \\ v_m(t)\overset{w}{\to}v(t) \quad H^2(\mathbb{R}^n)\text{'de } \forall t\geq 0, \end{cases} \tag{5.25}$$

olacak şekilde $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi ve $\lambda_0\in[0,\infty]$, $\varphi_0\in H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$ ve $v\in L^\infty(0,\infty;H^2(\mathbb{R}^n))\cap W^{1,\infty}(0,\infty;L^2(\mathbb{R}^n))$ vardır. Burada $(v_m(t),v_{mt}(t))=S^{\lambda_{k_m}}(t+t_{k_m}-T_0)\varphi_{k_m}$ olmakla birlikte $\overline{\mathbb{R}}$ ile genişletilmiş reel sayılar kümesi gösterilmektedir. (5.19)'u göz önüne alırsak,

$$\int_0^T\|v_{mt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus B(0,r_0))}\,dt\leq c_1,\ \forall T\geq 0, \tag{5.26}$$

olur. $(5.17)_1$'den,

$$v_{mtt}+\Delta^2v_m+a(x)v_{mt}+\alpha v_m+\frac{1}{\lambda_{k_m}}f(\lambda_{k_m}v_m)=0,$$

alırız. $\eta\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ kesme fonksiyonu Teorem 3.3.2'deki gibi tanımlansın. Üstteki denklemi $\eta_r^2v_m$ ile çarpıp, $(0,T)\times\mathbb{R}^n$ üzerinde integrallersek, (5.6)'yı dikkate alarak,

$$\int_0^T\left(\|\eta_r\Delta v_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\alpha\|\eta_rv_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)dt$$

$$\leq\int_0^T\|\eta_rv_{mt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,dt-\left.\left(\int_{\mathbb{R}^n}\eta_r^2(x)\,v_{mt}(t,x)\,v_m(t,x)\,dx\right)\right|_0^T$$

$$-\frac{4}{r}\sum\nolimits_{i=1}^n\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\eta_r(x)\,\eta_{x_i}(\frac{x}{r})\Delta v_m(t,x)\,v_{mx_i}(t,x)\,dxdt$$

$$-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\Delta\left(\eta_r^2(x)\right)\Delta v_m(t,x)\,v_m(t,x)\,dxdt-\frac{1}{2}\left.\left(\int_{\mathbb{R}^n}\eta_r^2(x)\,a(x)\,v_m^2(t,x)\,dx\right)\right|_0^T,$$

elde ederiz. (5.25) ve (5.26)'dan,

$$\limsup_{m\to\infty}\int_0^T\left(\|\eta_r\Delta v_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\alpha\|\eta_r v_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)dt$$

$$\le c_2\left(1+\frac{T}{r}\right),\ \forall T\ge 0,\ \forall r\ge r_0, \tag{5.27}$$

buluruz. Diğer taraftan, $(5.17)_1$'den aynı zamanda,

$$v_{mtt}-v_{ltt}+\Delta^2(v_m-v_l)+a(x)(v_{mt}-v_{lt})+\alpha(v_m-v_l)$$

$$+\frac{1}{\lambda_{k_m}}f(\lambda_{k_m}v_m)-\frac{1}{\lambda_{k_l}}f(\lambda_{k_l}v_l)=0, \tag{5.28}$$

denklemini buluruz. (5.28) denklemini

$$\sum\nolimits_{i=1}^n x_i(1-\eta_{2r})(v_m-v_l)_{x_i}+\frac{1}{2}(n-1)(1-\eta_{2r})(v_m-v_l)$$

ile çarpıp, $(0,T)\times\mathbb{R}^n$ üzerinde integrallersek, $\{\lambda_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}\subset(0,M]$ için,

$$\frac{3}{2}\int_0^T\|\Delta(v_m(t)-v_l(t))\|^2_{L^2(B(0,2r))}dt+\frac{1}{2}\int_0^T\|v_{mt}(t)-v_{lt}(t)\|^2_{L^2(B(0,2r))}dt$$

$$\le\left|\sum_{i=1}^n\left(\int_{B(0,4r)}(1-\eta_{2r}(x))x_i(v_m(T,x)-v_l(T,x))_{x_i}(v_{mt}(T,x)-v_{lt}(T,x))dx\right)\right|$$

$$+\left|\sum_{i=1}^n\left(\int_{B(0,4r)}(1-\eta_{2r}(x))x_i(v_m(0,x)-v_l(0,x))_{x_i}(v_{mt}(0,x)-v_{lt}(0,x))dx\right)\right|$$

$$+\frac{(n-1)}{2}\left|\left(\int_{B(0,4r)}(1-\eta_{2r}(x))(v_{mt}(T,x)-v_{lt}(T,x))(v_m(T,x)-v_l(T,x))dx\right)\right|$$

$$+\frac{(n-1)}{2}\left|\left(\int_{B(0,4r)}(1-\eta_{2r}(x))(v_{mt}(0,x)-v_{lt}(0,x))(v_m(0,x)-v_l(0,x))dx\right)\right|$$

$$+\frac{1}{4r}\left|\sum\nolimits_{i=1}^n\int_0^T\int_{B(0,4r)\backslash B(0,2r)}\eta_{x_i}\left(\frac{x}{2r}\right)x_i(v_{mt}(t,x)-v_{lt}(t,x))^2dxdt\right|$$

$$+\frac{1}{4r}\left|\sum\nolimits_{i=1}^n\int_0^T\int_{B(0,4r)\backslash B(0,2r)}\eta_{x_i}\left(\frac{x}{2r}\right)x_i(\Delta v_m(t,x)-\Delta v_l(t,x))^2dxdt\right|$$

$$+\left|\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_{B(0,4r)}\Delta((1-\eta_{2r}(x))x_i)(v_m(t,x)-v_l(t,x))_{x_i}\Delta(v_m(t,x)-v_l(t,x))dxdt\right|$$

$$+\frac{1}{r}\left|\sum_{i,j=1}^n\int_0^T\int_{B(0,4r)\backslash B(0,2r)}\eta_{x_j}\left(\frac{x}{2r}\right)x_i(v_m(t,x)-v_l(t,x))_{x_ix_j}\Delta(v_m(t,x)-v_l(t,x))dxdt\right|$$

$$+\frac{(n-1)}{2}\left|\int_0^T\int_{B(0,4r)}\Delta(1-\eta_{2r}(x))(v_m(t,x)-v_l(t,x))\Delta(v_m(t,x)-v_l(t,x))dxdt\right|$$

$$+\frac{(n-1)}{2r}\left|\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_{B(0,4r)}\eta_{x_i}\left(\frac{x}{2r}\right)(v_m(t,x)-v_l(t,x))_{x_i}\Delta(v_m(t,x)-v_l(t,x))\,dxdt\right|$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_{B(0,4r)}(1-\eta_{2r}(x))\,x_i\,(v_m(t,x)-v_l(t,x))_{x_i}\,a(x)(v_{mt}(t,x)-v_{lt}(t,x))\,dxdt\right|$$

$$+\frac{(n-1)}{2}\left|\int_0^T\int_{B(0,4r)}(1-\eta_{2r}(x))(v_m(t,x)-v_l(t,x))\,a(x)(v_{mt}(t,x)-v_{lt}(t,x))\,dxdt\right|$$

$$+\alpha\left|\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_{B(0,4r)}(1-\eta_{2r}(x))\,x_i\,(v_m(t,x)-v_l(t,x))_{x_i}(v_m(t,x)-v_l(t,x))\,dxdt\right|$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_{B(0,4r)}(1-\eta_{2r}(x))\,x_i\,(v_m(t,x)-v_l(t,x))_{x_i}\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{\lambda_{k_m}}f(\lambda_{k_m}v_m(t,x))-\frac{1}{\lambda_{k_l}}f(\lambda_{k_l}v_l(t,x))\right)dxdt\right|$$

$$+\frac{1}{2}(n-1)\left|\int_0^T\int_{B(0,4r)}(1-\eta_{2r}(x))(v_m(t,x)-v_l(t,x))\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{\lambda_{k_m}}f(\lambda_{k_m}v_m(t,x))-\frac{1}{\lambda_{k_l}}f(\lambda_{k_l}v_l(t,x))\right)dxdt\right|$$

$$\leq c_3r\left(\|\nabla v_m(T)-\nabla v_l(T)\|_{L^2(B(0,4r))}+\|\nabla v_m(0)-\nabla v_l(0)\|_{L^2(B(0,4r))}\right)$$

$$+c_3\|v_{mt}-v_{lt}\|^2_{L^2(0,T;L^2(B(0,4r)\backslash B(0,2r)))}+c_3\|v_m-v_l\|^2_{L^2(0,T;H^2(B(0,4r)\backslash B(0,2r)))}$$

$$+c_3r\sqrt{T}\,\|\nabla v_m-\nabla v_l\|_{L^2((0,T)\times B(0,4r))},$$

elde ederiz. Burada c_3 sabiti $\sup\limits_m\|v_{mt}\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\mathbb{R}^n))}$, $\sup\limits_m\|v_m\|_{L^\infty(0,\infty;H^2(\mathbb{R}^n))}$, $\|\eta\|_{C^2(\overline{B(0,2)})}$ ve M değerlerine bağlıdır. Ek olarak, (i) koşulu sağlanırsa, üstteki eşitsizlik $\{\lambda_{k_m}\}_{m=1}^\infty\subset(0,\infty)$ durumunda da sağlanır. Bu durumda, c_3 sabiti $\sup\limits_m\|v_{mt}\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\mathbb{R}^n))}$, $\sup\limits_m\|v_m\|_{L^\infty(0,\infty;H^2(\mathbb{R}^n))}$, $\|\eta\|_{C^2(\overline{B(0,2)})}$ ve $\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ değerlerine bağlıdır. $\{v_m\}_{m=1}^\infty$ dizisi $C([0,T];H^2(\mathbb{R}^n))$'de sınırlı ve $\{v_{mt}\}_{m=1}^\infty$ dizisi $C([0,T];L^2(\mathbb{R}^n))$'de sınırlı olduğundan, genelleştirilmiş Arzela-Ascoli teoreminden, $\{v_m\}_{m=1}^\infty$ dizisi, her $r>0$ için, $C([0,T];H^1(B(0,r)))$'de prekompakttır. Böylece, (5.25)'e göre, $\{v_m\}_{m=1}^\infty$ dizisi v fonksiyonuna, her $r>0$ için, $C([0,T];H^1(B(0,r)))$'de kuvvetli yakınsaktır. Ardından, son eşitsizlikte (5.25)-(5.27)'yi göz önüne alırsak,

$$\limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{l\to\infty}\int_0^T\left[\|\Delta(v_m(t)-v_l(t))\|^2_{L^2(B(0,2r))}+\|v_{mt}(t)-v_{lt}(t)\|^2_{L^2(B(0,2r))}\right]dt$$

$$\leq c_3r\ \limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{l\to\infty}\left(\|\nabla v_m(T)-\nabla v_l(T)\|_{L^2(B(0,4r))}+\|\nabla v_m(0)-\nabla v_l(0)\|_{L^2(B(0,4r))}\right)$$

$$+c_3r\sqrt{T}\ \limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{l\to\infty}\|\nabla v_m-\nabla v_l\|_{L^2((0,T)\times B(0,4r))}+c_4\left(1+\frac{T}{r}\right)$$

$$= c_4 \left(1 + \frac{T}{r}\right), \forall T \geq 0,\ \forall r \geq r_0,$$

buluruz. Bu eşitsizliği ise tekrar (5.25)-(5.27) ile birlikte değerlendirirsek,

$$\limsup_{m\to\infty} \limsup_{l\to\infty} \int_0^T \left[\|v_m(t) - v_l(t)\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|v_{mt}(t) - v_{lt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right] dt$$

$$\leq c_5 \left(1 + \frac{T}{r}\right), \forall\ T \geq 0, \forall\ r \geq r_0$$

elde ederiz. Üstteki eşitsizlikte $r \to \infty$ iken limite geçtiğimizde, her$T \geq 0$ için

$$\limsup_{m\to\infty} \limsup_{l\to\infty} \int_0^T \left[\|v_m(t) - v_l(t)\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|v_{mt}(t) - v_{lt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right] dt \leq c_5, \quad (5.29)$$

olur. Ardından, (5.28) denklemini $2(v_{mt} - v_{lt})$ ile çarpıp, $(t,T) \times \mathbb{R}^n$ üzerinde integrallersek, (5.3)'ten,

$$\|v_{mt}(T) - v_{lt}(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\Delta(v_m(T) - v_l(T))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \alpha \|v_m(T) - v_l(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \|v_{mt}(t) - v_{lt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\Delta(v_m(t) - v_l(t))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \alpha \|v_m(t) - v_l(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$+2 \int_t^T \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\lambda_{k_l}} f(\lambda_{k_l} v_l(s,x)) - \frac{1}{\lambda_{k_m}} f(\lambda_{k_m} v_m(s,x)) \right) (v_{mt}(s,x) - v_{lt}(s,x))\, dxds,$$

alırız. Son eşitsizliği 0 dan T'ye kadar, t değişkenine göre integralleyip, (5.29)'u göz önüne alırsak, her $T \geq 1$ için,

$$\limsup_{m\to\infty} \limsup_{l\to\infty} \Big(\|v_{mt}(T) - v_{lt}(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\Delta(v_m(T) - v_l(T))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\alpha \|v_m(T) - v_l(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \Big) \leq \frac{c_6}{T}$$

$$+\frac{1}{T} \limsup_{m\to\infty} \limsup_{l\to\infty} \int_0^T \int_t^T \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\lambda_{k_l}} f(\lambda_{k_l} v_l(s,x)) - \frac{1}{\lambda_{k_m}} f(\lambda_{k_m} v_m(s,x)) \right)$$

$$\times (v_{mt}(s,x) - v_{lt}(s,x))\, dxdsdt, \quad (5.30)$$

buluruz. (5.30) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terimi değerlendirelim. (5.7) ve (5.25)'ten,

$$\frac{1}{\lambda^2_{k_m}} F(\lambda_{k_m} v_m(t,x)) \to\ \Psi_{\lambda_0}(v(t,x))\ \text{ h.h.y. } (0,T) \times B(0,r)\text{'de}, \forall\ r > 0,$$

elde ederiz. Burada $\Psi_\lambda(s) = \int_0^s \Phi_\lambda(\tau)\, d\tau$'dır. Diğer taraftan, $\left\{ \frac{1}{\lambda^2_{k_m}} F(\lambda_{k_m} v_m) \right\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi $W^{1,1}((0,T) \times \mathbb{R}^n)$'de sınırlı olduğundan,

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda^2_{k_m}} F(\lambda_{k_m} v_m) \to \Psi_{\lambda_0} & L^1((0,T) \times B(0,r))\text{'de}, \forall\ T > 0, \forall\ r > 0, \\ \frac{1}{\lambda^2_{k_m}} F(\lambda_{k_m} v_m) \xrightarrow{w} \Psi_{\lambda_0} & L^{\frac{n+1}{n}}((0,T) \times \mathbb{R}^n)\text{'de}, \end{cases} \quad (5.31)$$

olur. Buradan, (5.6), (5.27) ve (5.31)'i kullanarak,

$$\limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{l\to\infty}\int_0^T\int_t^T\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{\lambda_{k_l}}f\left(\lambda_{k_l}v_l\left(s,x\right)\right)-\frac{1}{\lambda_{k_m}}f\left(\lambda_{k_m}v_m\left(s,x\right)\right)\right)$$
$$\times\left(v_{mt}\left(s,x\right)-v_{lt}\left(s,x\right)\right)dxdsdt$$
$$=\limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{l\to\infty}\int_0^T\int_t^T\int_{\mathbb{R}^n}\left(-\frac{1}{\lambda_{k_l}}f\left(\lambda_{k_l}v_l\left(s,x\right)\right)v_{lt}\left(s,x\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\lambda_{k_m}}f\left(\lambda_{k_m}v_m\left(s,x\right)\right)v_{mt}\left(s,x\right)+2\frac{\partial}{\partial s}\Psi_{\lambda_0}\left(v(s,x)\right)\right)dxdsdt$$
$$\leq T\ \limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{l\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left(-\frac{1}{\lambda_{k_l}^2}F\left(\lambda_{k_l}v_l\left(T,x\right)\right)-\frac{1}{\lambda_{k_m}^2}F\left(\lambda_{k_m}v_m\left(T,x\right)\right)+2\Psi_{\lambda_0}\left(v(T,x)\right)\right)dx$$
$$+\limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{l\to\infty}\int_0^T\int_{B(0,r)}\left(\frac{1}{\lambda_{k_l}^2}F\left(\lambda_{k_l}v_l\left(t,x\right)\right)+\frac{1}{\lambda_{k_m}^2}F\left(\lambda_{k_m}v_m\left(t,x\right)\right)-2\Psi_{\lambda_0}\left(v(t,x)\right)\right)dxdt$$
$$+\limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{l\to\infty}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,r)}\left(\frac{1}{\lambda_{k_l}^2}F\left(\lambda_{k_l}v_l\left(t,x\right)\right)+\frac{1}{\lambda_{k_m}^2}F\left(\lambda_{k_m}v_m\left(t,x\right)\right)-2\Psi_{\lambda_0}\left(v(t,x)\right)\right)dxdt$$
$$=-T\ \liminf_{m\to\infty}\ \liminf_{l\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{\lambda_{k_l}^2}F\left(\lambda_{k_l}v_l\left(T,x\right)\right)+\frac{1}{\lambda_{k_m}^2}F\left(\lambda_{k_m}v_m\left(T,x\right)\right)-2\Psi_{\lambda_0}\left(v(T,x)\right)\right)dx$$
$$+\limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{l\to\infty}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,r)}\left(\frac{1}{\lambda_{k_l}^2}F\left(\lambda_{k_l}v_l\left(t,x\right)\right)+\frac{1}{\lambda_{k_m}^2}F\left(\lambda_{k_m}v_m\left(t,x\right)\right)-2\Psi_{\lambda_0}\left(v(t,x)\right)\right)dxdt$$
$$\leq\limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{l\to\infty}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,r)}\left(\frac{1}{\lambda_{k_l}^2}F\left(\lambda_{k_l}v_l\left(t,x\right)\right)+\frac{1}{\lambda_{k_m}^2}F\left(\lambda_{k_m}v_m\left(t,x\right)\right)\right)dxdt$$
$$\leq c_7\ \limsup_{m\to\infty}\int_0^T\left(\left\|v_m\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\backslash B(0,r))}+\left\|\Delta v_m\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\backslash B(0,r))}\right)dt$$
$$\leq c_8\left(1+\frac{T}{r}\right),\ \forall T\geq 0,\ \forall r\geq r_0,$$

buluruz ve sonuç olarak $r\to\infty$ iken limite geçersek, $\{\lambda_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}\subset(0,M]$ için,

$$\limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{l\to\infty}\int_0^T\int_t^T\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{\lambda_{k_l}}f\left(\lambda_{k_l}v_l\left(s,x\right)\right)-\frac{1}{\lambda_{k_m}}f\left(\lambda_{k_m}v_m\left(s,x\right)\right)\right)$$
$$\times\left(v_{mt}\left(s,x\right)-v_{lt}\left(s,x\right)\right)dxdsdt$$
$$\leq c_8,\quad\forall T\geq 0,\tag{5.32}$$

elde ederiz. Burada c_7 ve c_8 sabitleri M ve $\sup\limits_m\|v_m\|_{L^\infty(0,\infty;H^2(\mathbb{R}^n))}$ değerlerine bağlıdır. Ek olarak, (5.7) koşulu sağlanırsa, (5.32) değerlenmesi $\{\lambda_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}\subset(0,\infty)$, dizisi için de geçerlidir ve bu durumda c_7 ve c_8 sabitleri $\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ ve $\sup\limits_m\|v_m\|_{L^\infty(0,\infty;H^2(\mathbb{R}^n))}$ değerlerine bağlıdır. (5.32)'yi, (5.30)'da göz önüne alırsak,

$$\limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{l\to\infty}\left\|S^{\lambda_{k_m}}(T+t_{k_m}-T_0)\varphi_{k_m}-S^{\lambda_{k_l}}(T+t_{k_l}-T_0)\varphi_{k_l}\right\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \frac{c_9}{T}, \quad \forall T \geq 1,$$

alırız. Üstteki eşitsizlikte $T = T_0$ alırsak,

$$\limsup_{m\to\infty} \limsup_{l\to\infty} \left\| S^{\lambda_{k_m}}(t_{k_m})\varphi_{k_m} - S^{\lambda_{k_l}}(t_{k_l})\varphi_{k_l} \right\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c_9}{T_0}, \quad \forall T_0 \geq 1,$$

olur ve $T_0 \to \infty$ iken limite geçersek,

$$\liminf_{k\to\infty} \liminf_{m\to\infty} \left\| S^{\lambda_k}(t_k)\varphi_k - S^{\lambda_m}(t_m)\varphi_m \right\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

buluruz. Böylece, [35, Lemma 3.4] çalışmasının ispatının sonundaki argümanları kullanarak lemmanın ispatı tamamlanır. ■

Lemma 5.1.4 *(5.3)-(5.6) koşulları sağlansın ve $\lambda \in [0, \infty]$ olsun. Bu durumda, her $B \subset H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ için*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{(u_0,u_1)\in B} \left\| S^{\lambda}(t)(u_0, u_1) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

olur.

İspat. $B \subset H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ olsun. Lemma 5.1.3'ten, B kümesinin ω-limit kümesi, yani

$$\omega_\lambda(B) = \bigcap_{\tau\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq\tau} S^{\lambda}(t) B},$$

$H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$'de kompakttır, $S^{\lambda}(t)$'ye göre değişmezdir ve

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\varphi\in B} \inf_{\psi\in\omega_\lambda(B)} \left\| S^{\lambda}(t)\varphi - \psi \right\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

sağlanır. Amacımız $\omega_\lambda(B) \equiv \{(0,0)\}$ olduğunu göstermektir. $\omega_\lambda(B)$ kümesi değişmez olduğundan,

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{(u_0,u_1)\in\omega_\lambda(B)} \left\| S^{\lambda}(t)(u_0, u_1) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} = 0 \tag{5.33}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $(u_0, u_1) \in \omega_\lambda(B)$ ve $(u_\lambda(t), u_{\lambda t}(t)) = S^{\lambda}(t)(u_0, u_1)$ olsun. $(5.17)_1$ denklemini $u_{\lambda t}$ ile çarpıp, $(s,t) \times \mathbb{R}^n$'de integralleyelim. Bu durumda,

$$E_\lambda(t, u_0, u_1) = \frac{1}{2}\|u_{\lambda t}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\frac{1}{2}\|\Delta u_\lambda(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{\alpha}{2}\|u_\lambda(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\lambda(u_\lambda(t,x))\,dx,$$

enerji fonksiyoneli için,

$$E_\lambda(t, u_0, u_1) + \int_s^t \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,|u_{\lambda t}(t,x)|^2\,dxdt = E_\lambda(s, u_0, u_1), \;\; \forall t \geq s \tag{5.34}$$

elde ederiz. Böylelikle, $E_\lambda(t, u_0, u_1)$ enerji fonksiyoneli t'ye göre artmayandır. (5.33)'ü ispatlamak için,

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{(u_0,u_1)\in\omega_\lambda(B)} E_\lambda(t, u_0, u_1) = 0 \tag{5.35}$$

eşitliğini göstermek yeterlir. Aksini varsayalım, (5.35) doğru olmasın. Bu durumda,

$$E_\lambda(t_k, u_{0k}, u_{1k}) \geq \epsilon \tag{5.36}$$

sağlanacak şekilde $\epsilon > 0$, $t_k \to \infty$ ve $\{(u_{0k}, u_{1k})\}_{k=1}^{\infty} \subset \omega_\lambda(B)$ dizisi vardır. $\omega_\lambda(B)$ kümesi kompakt olduğundan, $\{(u_{0k}, u_{1k})\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin yakınsak alt dizisi vardır ve bu alt dizinin limiti $\omega_\lambda(B)$ kümesine aittir. Genelliği bozmadan bu alt diziyi yine $\{(u_{0k}, u_{1k})\}_{k=1}^{\infty}$ ile gösterelim. Buradan, $(v, w) \in \omega_\lambda(B)$ olmak üzere

$$(u_{0k}, u_{1k}) \to (v, w) \quad H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)\text{'de},$$

elde ederiz. Böylece, $E_\lambda(t, \cdot, \cdot)$ fonksiyoneli $H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$'de sürekli olduğundan, Lemma 5.1.2'yi kullanarak,

$$\lim_{k\to\infty} E_\lambda(t, u_{0k}, u_{1k}) = E_\lambda(t, v, w),\ \forall\ t \geq 0 \tag{5.37}$$

alırız. $(5.17)_1$'e uygun, durgun (stationary) denklem sadece "0" çözümüne sahip olduğu için, [6, Teorem 2] çalışmasını uygulayarak,

$$\lim_{t\to\infty} \left\| S^\lambda(t)\, x \right\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad \forall x \in H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n),$$

buluruz. Böylelikle, keyfi $\epsilon > 0$ için,

$$E_\lambda(t'_\epsilon, v, w) < \frac{\epsilon}{2},$$

olacak şekilde t'_ϵ vardır ve bu eşitsizliği (5.37) ile birlikte göz önüne alırsak, yeterince büyük k için,

$$E_\lambda(t'_\epsilon, u_{0k}, u_{1k}) < \epsilon$$

elde ederiz. $E_\lambda(t, u_0, u_1)$ fonksiyoneli t'ye göre artmayan olduğundan, son eşitsizlik (5.36) ile çelişir. Sonuç olarak, kabulümüz yanlıştır yani (5.35) doğrudur ve ispat tamamlanır. ■

Lemma 5.1.5 *(5.3)-(5.6) koşulları sağlansın. Bu durumda, her sınırlı $B \subset H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ kümesi ve $M > 0$ için,*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\lambda\in(0,M]} \sup_{(u_0,u_1)\in B} \left\| S^\lambda(t)(u_0, u_1) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

olur.

İspat. Keyfi $\lambda \in (0, M]$ ve $(u_0, u_1) \in B$ için, (5.20)'yi göz önüne alırsak,

$$\left\| S^{\lambda}(t)(u_0, u_1) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)} \leq r, \tag{5.38}$$

alırız. Burada r değeri M değerine ve B kümesine bağlıdır, $\lambda \in (0, M]$, t ve (u_0, u_1) değerlerinden ise bağımsızdır. Lemma 5.1.5'i çelişki metodu ile ispatlayacağız. Varsayalım ki Lemma 5.1.5 doğru olmasın. Bu durumda,

$$\left\| S^{\lambda_k}(t_k)(u_{0k}, u_{1k}) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)} \geq \epsilon \tag{5.39}$$

sağlanacak şekilde $\epsilon > 0$ ve $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0, M]$, $\{(u_{0k}, u_{1k})\}_{k=1}^{\infty} \subset B$ ve $t_k \to \infty$ dizileri vardır. Keyfi $t_k \geq t$ için, $\left\{ S^{\lambda_k}(t) S^{\lambda_k}(t_k - t)(u_{0k}, u_{1k}) \right\}_{k=1}^{\infty}$ dizisini ele alalım. Lemma 5.1.3'ten, $\left\{ S^{\lambda_k}(t_k - t)(u_{0k}, u_{1k}) \right\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$'de prekompakttır. Buradan, bu dizinin $\varphi_0 \in H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ limitine sahip, $\left\{ S^{\lambda_{k_m}}(t_{k_m} - t)(u_{0k_m}, u_{1k_m}) \right\}_{m=1}^{\infty}$ yakınsak alt dizisinin varlığını elde ederiz ve Lemma 5.1.2'den,

$$S^{\lambda_{k_m}}(t) S^{\lambda_{k_m}}(t_{k_m} - t)(u_{0k_m}, u_{1k_m}) \to S^{\lambda_0}(t)\varphi_0 \quad H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)\text{'de}, \tag{5.40}$$

olur. Burada $\lambda_0 \in [0, M]$ değeri $\{\lambda_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ dizisinin limitidir. Ek olarak, (5.38)'den $\left\{ S^{\lambda_{k_m}}(t_{k_m} - t)(u_{0k_m}, u_{1k_m}) \right\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(0, r)$ alırız. Burada

$$\mathcal{B}(0, r) = \left\{ \varphi \in H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)} \leq r \right\}.$$

Sonuç olarak, $\varphi_0 \in \mathcal{B}(0, r)$'dir ve bir önceki lemmadan, keyfi $\epsilon > 0$ için,

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{B}(0,r)} \left\| S^{\lambda_0}(t)\varphi \right\|_{H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall t \geq t_\epsilon$$

olacak şekilde t_ϵ vardır. (5.40) yakınsamasını $t_{k_m} \geq t_\epsilon$ için göz önüne alıp $t = t_\epsilon$ seçersek, yeterince büyük k değeri için

$$\left\| S^{\lambda_{k_m}}(t_{k_m})(u_{0k_m}, u_{1k_m}) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)} < \epsilon,$$

elde ederiz, bu ise (5.39) ile çelişir. Böylece kabulümüzün yanlış olduğunu elde ederiz ve ispatı tamamlarız. ■

Lemma 5.1.6 *Teorem 5.0.1'in koşulları sağlansın. Bu durumda, öyle $t_0 > 0$ ve $C \in (0, 1)$ vardır ki, $E_\lambda(0, u_0, u_1) = 1$ koşulunu sağlayacak şekildeki her $\lambda > 0$ ve $(u_0, u_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ için*

$$E_\lambda(t_0, u_0, u_1) \leq C. \tag{5.41}$$

İspat. Lemmayı çelişki metoduyla ispatlayacağız. Varsayalım ki (5.41) doğru olmasın. Bu durumda

$$E_{\lambda_k}(t_k, u_{0k}, u_{1k}) > C_k, \tag{5.42}$$

olacak şekilde, $E_{\lambda_k}(0, u_{0k}, u_{1k}) = 1$ koşulunu sağlayan $C_k \nearrow 1$, $t_k \to \infty$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$ ve $\{(u_{0k}, u_{1k})\}_{k=1}^{\infty} \subset H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ dizileri vardır. Kabul edelim ki bir $M > 0$ değeri için $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0, M]$ olsun. Böylece, Lemma 5.1.5'ten,

$$\lim_{t_k \to \infty} \sup_{(u_0, u_1) \in B_0} \left\| S^{\lambda_k}(t_k)(u_0, u_1) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)} = 0, \tag{5.43}$$

alırız. Burada $B_0 = \cup_{k=1}^{\infty} \{(u_0, u_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) : E_{\lambda_k}(0, u_0, u_1) \leq 1\}$. Diğer taraftan, (5.3), (5.6) ve (5.19)'dan,

$$E_{\lambda_k}(t_k, u_{0k}, u_{1k}) \leq \widetilde{c}(M) \left(\|u_{kt}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u_k(t)\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|u_k(t)\|^{p+1}_{H^2(\mathbb{R}^n)} \right),$$

elde ederiz, burada ise $(u_k(t), u_{kt}(t)) = S^{\lambda_k}(t)(u_{0k}, u_{1k})$. Buradan da, (5.43)'ü kullanarak,

$$\lim_{t_k \to \infty} \sup_{(u_0, u_1) \in B_0} E_{\lambda_k}(t_k, u_{0k}, u_{1k}) = 0,$$

buluruz. Bu ise (5.42) ile çelişir. Yani, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin sonsuza giden alt dizisi olmalıdır. Genelliği bozmadan $\lambda_k \to \infty$ kabul edelim. Şimdi yerel olmayan Lipschitz durumunu ve süper lineer durumunu ayrı ayrı inceleyelim.

(i) *Yerel olmayan Lipschitz durumu*: Doğrusal olmayan f foksiyonu, yerel olmayan Lipschitz ve $E_{\lambda_k}(0, u_{0k}, u_{1k}) = 1$ olduğundan

$$E_{\lambda_k}(t_k, u_{0k}, u_{1k}) \leq c_0 \left\| S^{\lambda_k}(t_k, u_{0k}, u_{1k}) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{5.44}$$

olur. Keyfi $t_k \geq t$ için $\left\{ S^{\lambda_k}(t) S^{\lambda_k}(t_k - t)(u_{0k}, u_{1k}) \right\}_{k=1}^{\infty}$ dizisini ele alalım. Lemma 5.1.3'ten, $t_k \to \infty$ ise; $\left\{ S^{\lambda_k}(t_k - t)(u_{0k}, u_{1k}) \right\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$'de prekompakttır. Böylece $\varphi_0 \in \overline{B_0}$ limitine sahip, $\left\{ S^{\lambda_{k_m}}(t_{k_m} - t)(u_{0k_m}, u_{1k_m}) \right\}_{m=1}^{\infty}$ yakınsak alt dizisi vardır ve Lemma 5.1.2'den, $\lambda_0 = \infty$ olmak üzere,

$$S^{\lambda_{k_m}}(t) S^{\lambda_{k_m}}(t_{k_m} - t)(u_{0k_m}, u_{1k_m}) \to S^{\lambda_0}(t) \varphi_0 \quad H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n), \tag{5.45}$$

elde ederiz. Diğer taraftan, Lemma 5.1.4'ten,

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{(u_0, u_1) \in \overline{B_0}} \left\| S^{\lambda_0}(t)(u_0, u_1) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$$

alırız ve keyfi $\epsilon > 0$ için

$$\sup_{(u_0,u_1)\in\overline{B_0}} \left\| S^{\lambda_0}(t)(u_0,u_1) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{2}, \ \ \forall\, t \geq t_\epsilon$$

olacak şekilde t_ϵ vardır. (5.45)'te $t = t_\epsilon$ seçersek, yeterince büyük m değeri için,

$$\left\| S^{\lambda_{k_m}}(t_{k_m})(u_{0k_m}, u_{1k_m}) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)} < \epsilon,$$

buluruz. Bu ise (5.44) ile birlikte ele alındığında, (5.42) ile çelişir. Böylelikle kabulümüzün yanlış olduğunu görürüz ve ispat yerel olmayan Lipschitz durumu için tamamlanır.

(ii) *Süper lineer durumu*: [2]'de belirtildiği gibi, bu makalenin tekniğini kullanarak,

$$E_{\lambda_k}(T, u_{0k}, u_{1k})$$
$$\leq C(T)\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\left|u_{\lambda_k t}(t,x)\right|^2 dxdt + \|u_{\lambda_k}\|^2_{L^2((0,T)\times B(0,4r_0))}\right), \ \forall T > T_1 \quad (5.46)$$

sağlanacak şekilde $T_1 > 0$ ve $C(T) > 0$ sabitinin varlığını elde ederiz. Burada $(u_{\lambda_k}(t), u_{\lambda_k t}(t)) = S^{\lambda_k}(t)(u_{0k}, u_{1k})$. (5.46)'daki $C(T)$ sabiti sadece f fonksiyonuna ve süper lineer durumundaki δ değerine bağlıdır. (ayrıntılar için bkz [2]).
(5.34)!ü ve $E_{\lambda_k}(0, u_{0k}, u_{1k}) = 1$ olduğunu göz önüne alırsak, $\{F_{\lambda_k}(u_{\lambda_k})\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin $L^1((0,T)\times B(0,4r_0))$'de sınırlı olduğunu elde ederiz. Burada

$$F_\lambda(z) = \frac{1}{\lambda}\int_0^z f(\lambda s)\,ds = \frac{1}{\lambda^2}F(\lambda z), \quad \forall\ \lambda > 0. \quad (5.47)$$

Diğer taraftan, (5.8) koşulundan, $c = \min\{F(1), F(-1)\}$ olmak üzere

$$F(s) \geq c\,|s|^{2+\delta}, \ \forall\,|s| \geq 1 \quad (5.48)$$

olur. (5.47)-(5.48)'i birlikte değerlendirirsek,

$$\lambda_k^\delta \int\int_{\left\{\left|u_{\lambda_k}\right|\geq\lambda_k^{-1}\right\}\cap\{(0,T)\times B(0,4r_0)\}} \left|u_{\lambda_k}\right|^{2+\delta} dxdt \leq \widehat{C}_2,$$

alırız ve buradan da

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \int_{B(0,4r_0)} \left|u_{\lambda_k}\right|^{2+\delta} dxdt = 0 \quad (5.49)$$

elde ederiz. Ayrıca, (5.34)'ten,

$$0 \leq \int_0^{t_k}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\left|u_{\lambda_k t}(t,x)\right|^2 dxdt = 1 - E_{\lambda_k}(t_k, u_{0k}, u_{1k}) \leq 1 - C_k$$

olur ve $t_k \to \infty$ ve $C_k \nearrow 1$ olduğundan, her $T > 0$ için,

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\left|u_{\lambda_k t}(t,x)\right|^2 dxdt = 0, \quad (5.50)$$

alırız. (5.49) ve (5.50)'yi, (5.46)'da göz önüne alırsak,

$$\lim_{k\to\infty} E_{\lambda_k}(T, u_{0k}, u_{1k}) = 0$$

buluruz ve $E_\lambda(t, u_0, u_1)$ enerji fonksiyoneli t değişkenine göre artmayan olduğundan,

$$\lim_{k\to\infty} E_{\lambda_k}(t_k, u_{0k}, u_{1k}) = 0$$

olur, bu ise (5.42) ile çelişir. Böylelikle, kabulümüzün yanlış olduğunu elde ederiz ve süper lineer durumu için de ispatı tamamlamış oluruz. ■

Şimdi esas teoremin ispatını tamalayabiliriz. Kabul edelim ki $u \in C([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n))$ fonksiyonu (5.1)-(5.2) probleminin $(u_0, u_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ başlangıç verisine uygun çözümü olsun ve (5.17) problemini $\lambda = \sqrt{E(0, u_0, u_1)} > 0$ seçerek ele alalım. Bu durumda $u_\lambda = \frac{u}{\lambda}$ fonksiyonunun (5.17) probleminin $(u_{0\lambda}, u_{1\lambda}) = \left(\frac{u_0}{\lambda}, \frac{u_1}{\lambda}\right) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ başlangıç verisine uygun çözümü olduğu ve

$$E_\lambda(t, u_{0\lambda}, u_{1\lambda}) = \frac{1}{2}\|u_{\lambda t}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\|\Delta u_\lambda(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{\alpha}{2}\|u_\lambda(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda(u_\lambda(t,x))\,dx = \frac{1}{2\lambda^2}\|u_t(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2\lambda^2}\|\Delta u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{\alpha}{2\lambda^2}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}^n} F(u(t,x))\,dx = \frac{1}{\lambda^2}\ E(t, u_0, u_1),$$

eşitliğini sağladığı kolayca görülebilir. Böylece, $E_\lambda(0, u_{0\lambda}, u_{1\lambda}) = \frac{1}{\lambda^2}E(0, u_0, u_1) = 1$ olduğundan, Lemma 5.1.6'yı kullanarak,

$$E_\lambda(t_0, u_{0\lambda}, u_{1\lambda}) \le \beta,$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $t_0 > 0$ ve bir $\beta \in (0,1)$ sabitinin var olduğunu elde ederiz. Buradan da,

$$E(t_0, u_0, u_1) \le \lambda^2\beta = E(0, u_0, u_1)\,\beta$$

olur ve ardışık iterasyon metodu kullanırsak, her $(u_{0,}u_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ için

$$E(nt_0, u_0, u_1) \le\ \beta^n\ E(0, u_{0,}u_1),\ \forall\ n \in \mathbb{N},$$

alırız. $E(t, u_0, u_1)$ enerji fonksiyoneli, t değişkenine göre artmayan olduğundan, $t = nt_0 + r$ ve $0 \le r < t_0$ için,

$$E(t, u_0, u_1) = E(nt_0 + r, u_0, u_1) \le E(nt_0, u_0, u_1) \le \beta^n\ E(0, u_0, u_1)$$

elde ederiz. Sonuç olarak, $\gamma = \frac{1}{t_0}\ln(\frac{1}{\beta})$ şeklinde gösterirsek, son eşitsizlikten, $C = e^{\gamma t_0}$ olmak üzere,

$$E\,(t, u_0, u_1) \leq e^{-\gamma t_0 n} E\,(0, u_0, u_1) = e^{-\gamma t} e^{\gamma r} E\,(0, u_0, u_1)$$

$$\leq e^{-\gamma t} e^{\gamma t_0} E\,(0, u_0, u_1) = C\ E\,(0, u_0, u_1)\, e^{-\gamma t},$$

alırız. Böylece, Teorem 5.0.1'in ispatı tamamlanır.

Kaynaklar

[1] Zuazua, E., Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping, *Communications in Partial Differential Equations,* 15, 205–235, **1990**.

[2] Zuazua, E., Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping in unbounded domains, *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees,* 70, 513–529, **1991**.

[3] Ruiz, A., Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential, *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees* 710, 455–467, **1992**.

[4] Khanmamedov, AK., Global attractors for von Karman equations with nonlinear interior dissipation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 318**,** 92–101, **2006**.

[5] Chueshov, I., Lasiecka, I., *Von Karman Evolution Equations:Well-posedness and long-time dynamics*, Springer: New York, **2010**.

[6] Khanmamedov, AK., Global attractors for the plate equation with localized damping and a critical exponent in an unbounded domain, *Journal of Differential Equations,* 225, 528-548, **2006**.

[7] Simsek, S., Khanmamedov, AK., Exponential decay of solutions for the plate equation with localized damping, *Mathematical Methods in the Applied Sciences, 38,* 1767–1780, **2015**.

[8] Dowell, E., *Aeroelasticity of Plates and Shells*, Nordhoff, Leyden, **1975**.

[9] Dowell, E., A *Modern Course in Aeroelasticity*, Springer, **2015**.

[10] Khanmamedov, AK., Finite dimensionality of the global attractors for von Karman equations with nonlinear interior dissipation, *Nonlinear Analysis*, 66, 204–213, **2007**.

[11] Bucci, F., Chueshov, I., Long-time dynamics of a coupled system of nonlinear wave and thermoelastic plate equations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 22, 557–586, **2008**.

[12] Yang, L., Uniform attractor for non-autonomous plate equation with a localized damping and a critical nonlinearity, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 338, 1243-1254, **2008**.

[13] Kolbasin, S., Attractors for Kirchoff's equation with a nonlinear damping coefficient, *Nonlinear Analysis*, 71, 2361-2371, **2009**.

[14] Ma, TF., Narciso, V., Global attractor for a model of extensible beam with nonlinear damping and source terms, *Nonlinear Analysis*, 73, 3402–3412, **2010**.

[15] Park, JY., Kang, JR., Energy decay estimates for the Bernoulli-Euler type equation with a local degenerate dissipation, *Applied Mathematics Letters,* 23, 1274–1279, **2010**.

[16] Potomkin, M., On transmission problem for Berger plates on an elastic base, *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 7, 96-102, **2011**.

[17] Potomkin, M., A nonlinear transmission problem for acompound plate with thermoelastic part, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 35, 530-546, **2012**.

[18] Chueshov, I., Kolbasin, S., Long-time dynamics in plate models with strong nonlinear damping, *Communications on Pure and Applied Analysis,* 11, 659–674, **2012**.

[19] Ma, TF., Narciso, V., Pelicer, ML., Long-time behavior of a model of extensible beams with nonlinear boundary dissipations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 396, 694–703, **2012**.

[20] Jorge Silva, MA., Narciso, V., Long-time behavior for a plate equation with nonlocal weak damping, *Differential and Integral Equations*, 27, 931–948, **2014**.

[21] Efendiev, M., Zelik, S., The attractor for a nonlinear reaction-diffusion system in an unbounded domain, *Communications on Pure and Applied Analysis*, 54, 625–688, **2001**.

[22] Khanmamedov,AK., Existence of a global attractor for the plate equation with a critical exponent in an unbounded domain, *Applied Mathematics Letters*, 18, 827-832, **2005**.

[23] Yue, G., Zhong, C., Global attractors for plate equations with critical exponent in locally uniform spaces, *Nonlinear Analysis*, 71, 4105–4114, **2009**.

[24] Khanmamedov, AK., A global attractor for plate equation with displacement-dependent damping, *Nonlinear Analysis*, 74, 1607–1615, **2011**.

[25] Berger, HM., A new approach to the analysis of large deflections of plates. *Journal of Applied Mechanics*, 22, 465-472, **1955**.

[26] Ball, J., Global attractors for semilinear wave equations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems,* 10, 31–52, **2004**.

[27] Arat Z., Khanmamedov, AK, Simsek, S., Global attractors for the plate equation with nonlocal nonlinearity in unbounded domains, *Dynamics of Partial Differential Equations*, 11, 361-379, **2014**.

[28] Khanmamedov, AK., Simsek, S., Existence of the global attractor for the plate equation with nonlocal nonlinearity in $\mathbb{R}^n$, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B, 21,* 151 - 172, **2016**.

[29] Yayla, S., Regularity of the Global Attractor for the Plate Equation with Nonlocal Nonlinearity in $\mathbb{R}^n$, AIP Conference Proceedings, pp.4, **2016**. (in press)

[30] Kesevan, S., *Topics in functional analysis and applications*, Wiley, **1989.**

[31] Lions, JL., Magenes, E., *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I,* Springer Berlin Heidelberg, **1972.**

[32] Zeidler, E., Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: II/ A: Linear Monotone Operators, Springer, **1989**.

[33] Cazenave, T., Haraux, A., *An introduction to semilinear evolution equations*, Oxford University Press, New York, **1998**.

[34] Royden, HL., *Real Analysis*, Macmillan, New York, **1968**.

[35] Khanmamedov, AK., Global attractors for 2-D wave equations with displacement dependent damping, *Mathematical Methods in the Applied Sciences,* 33, 177-187, **2010**.

[36] Babin, AV., Vishik, MI., *Attractors for evolution equations*, North-Holland, Amsterdam, **1992**.

[37] Simon, J., Compact sets in the space $L_p(0,T;B)$, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 146**,** 65–96, **1987**.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Sema YAYLA

Doğum Yeri : Sorgun

Medeni Hali : Evli

e-posta: semasimsek@hacettepe.edu.tr

Adresi: Bağlıca Mah. Bağpark Sitesi, Sezin Apt. No:14, Etimesgut \ ANKARA

Eğitim :

Lisans : 2004-2008 Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : 2008-2011 Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi: İngilizce
KPDS(Kamu Personeli Yabancı Dil Bilgisi Seviye Tespit Sınavı): 90

İş deneyimi:
2008-.. Hacettepe Üniversitesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi

Deneyim Alanları:

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi:

Tezden Üretilmiş Yayınlar:

1-Arat Z., Khanmamedov, AK, Simsek, S., Global attractors for the plate equation with nonlocal nonlinearity in unbounded domains, *Dynamics of Partial Differential Equations*, 11, 361-379, **2014**.

2-Simsek, S., Khanmamedov, AK., Exponential decay of solutions for the plate equation with localized damping, *Mathematical Methods in the Applied Sciences, 38,* 1767–1780, **2015**.

3-Khanmamedov, AK., Simsek, S., Existence of the global attractor for the plate equation with nonlocal nonlinearity in $\mathbb{R}^n$, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B, 21,* 151 - 172, **2016**.

4-Yayla, S., Regularity of the Global Attractor for the Plate Equation with Nonlocal Nonlinearity in $\mathbb{R}^n$, AIP Conference Proceedings, pp.4, **2016**. (in press)

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar:

1- 2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2013), Sarajevo, BOSNIA and HERZEGOVINA, , 26-29 August, 2013 (with presentation entitled "Energy Decay of Solutions of Semilinear Plate Equation on Unbounded Domain".)

2- 3nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2014), Wien, AUSTRIA, , 25-28 August, 2014 (with presentation entitled "Global attractor for the plate equation with localized damping".)

3- The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Orlando, Florida, USA, 1-5 July, 2016 (with presentation entitled "Long-Time Behaviour of the Plate Equation with Nonlocal Nonlinearity".)

4- 14th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mayhematics, Rhodes, GREECE, 19-25 September, 2016 (with presentation entitled "Regularity of the Global Attractor for the Plate Equation with Nonlocal Nonlinearity in $\mathbb{R}^n$".)

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 31/10/2016

Tez Başlığı / Konusu: **Yarı Doğrusal Levha Denkleminin Uzun Zaman Dinamiği**

Yukarıda başlığı gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç ve e)Kaynakça kısımlarından oluşan toplam 89 sayfalık kısmına ilişkin, 31/10/2016. tarihinde tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 6 dır.

Uygulanan filtrelemeler:

1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

31.10.2016

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Sema YAYLA

Öğrenci No: N10240275

Anabilim Dalı: MATEMATİK

Programı:

Statüsü: ☐ Y.Lisans ☒ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Prof. Dr. Azer HANMEHMETLİ

(Unvan, Ad Soyad, İmza)