ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA MAKSİMAL, POTANSİYEL VE SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI

Betül ATAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2011

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA MAKSİMAL, POTANSİYEL ve SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI

Betül ATAY

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmıdır. İkinci bölümde, temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ilk önce, klasik maksimal fonksiyon ve Riesz potansiyeli tanıtılmış ve bu operatörlerin varlık ve sınırlılığı $L_p(R^n)$ Lebesgue uzayında ispatsız olarak verilmiştir. Daha sonra, $0 \le \lambda \le n$ olmak üzere, $L_{p,\lambda}(R^n)$ Morrey uzayı tanıtılmış, bu uzayın yapısı hakkında bazı sonuçlar verilmiş ve bu uzayda M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün ve I_α Riesz potansiyelinin sınırlılığı Guliyev (2009) tarafından verilmiş olan teoremler yardımıyla gösterilmiştir. Dördüncü bölümde ise, $M_{p,w}(R^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayında Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılığı Guliyev (2009) tarafından verilmiş olan teorem yardımıyla gösterilmiştir. I_α Riesz potansiyelinin $M_{p,w}(R^n)$ uzayından $M_{q,w}(R^n)$ uzayına sınırlılığı iki farklı yönden Spanne ve Adams tipi sınırlılık olarak gösterilmiştir. Bunun için Guliyev (2009) tarafından verilmiş olan iki farklı teorem kullanılmıştır. Son olarak, T Calderon-Zygmund integral operatörleri tanıtılmış ve T operatörü için $M_{p,w}(R^n)$ uzayında sınırlılık koşulları belirlenmiştir.

Haziran, 2011, 56 sayfa

Anahtar Kelimeler: $L_p(R^n)$ uzayı, $L_{p,\lambda}(R^n)$ Morrey uzayı, $M_{p,w}(R^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayı, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu, Riesz potansiyeli, singüler integral operatörü, kuvvetli ve zayıf tip sınırlılık.

ABSTRACT

Master Thesis

THE BOUNDEDNESS OF MAXIMAL, POTENTIAL AND SINGULAR INTEGRAL OPERATORS IN THE GENERALIZED MORREY SPACES

Betül ATAY

Ankara University
Graduate Scholl of Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to introduction. In the second chapter, basic definitions and theorems are presented. In the third chapter firstly, classical maximal function and Riesz potential are introduced and the existence and boundedness of these operators are given without proof in the $L_p(R^n)$ Lebesgue space. Then, for $0 \le \lambda \le n$, $L_{p,\lambda}(R^n)$ Morrey space is introduced and some results are given about the structure of this space. The boundedness of M Hardy-Littlewood maximal operator and I_α Riesz potential in this space are shown with the help of the theorems which was given by Guliyev (2009). In the fourth chapter, the boundedness of Hardy-Littlewood maximal operator in the $M_{p,w}(R^n)$ spaces is shown with the help of the theorem which was given by Guliyev (2009) . The boundedness of I_α Riesz potential from the space $M_{p,w}(R^n)$ to $M_{q,w}(R^n)$ is shown as Spanne and Adams type boundedness with two different ways. For this aim two different theorems which were given by Guliyev (2009) are used. Finally, T Calderon-Zygmund singular integral operators are introduced and the boundedness conditions are determined for T in the $M_{p,w}(R^n)$ spaces.

June, 2011, 56 pages

Key Words: $L_p(R^n)$ space, $L_{p,\lambda}(R^n)$ Morrey space, $M_{p,w}(R^n)$ generalized Morrey space, Hardy-Littlewood maximal function, Riesz potential, singular integral operator, strongly and weakly type boundedness.

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma ve ilerleme imkanı veren, yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım sayın Prof.Dr. Ayhan ŞERBETÇİ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ye ve her türlü desteği ve yardımı esirgemeyen aileme saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Betül ATAY

Ankara, Haziran 2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$L_p(R^n)$	Lebesgue uzayı
$Suppf$	f fonksiyonunu desteği
$L^1_{loc}(R^n)$	lokal integrallenebilen fonksiyonların uzayı
S^{n-1}	R^n de birim küre
ω_{n-1}	Birim kürenin yüzey alanı
$f*g$	f ile g nin konvolüsyonu
χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
S	Schwarz uzayı
$B(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$B^c(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı açık yuvarın tümleyeni
α_f	f fonksiyonunun dağılım fonksiyonu
M	Maksimal operatör
M_α	Kesirli maksimal operatör
I_α	Riesz potansiyel operatörü
T	Singüler integral operatörü
$L_{p,\lambda}(R^n)$	Morrey uzayı
Γ	Gamma fonksiyonu
$w(x,r)$	Ağırlık fonksiyonu
$M_{p,w}(R^n)$	Genelleştirilmiş Morrey uzayı

1. GİRİŞ

$L_{p,\lambda}$ Morrey uzayı C. B. Morrey tarafından 1938 yılında eliptik kısmi diferensiyel denklemler ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkarılmıştır. Morrey uzayının kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin regülerlik özelliklerinin çalışması ve kesin ön eşitsizliklerin bulunması gibi konularda önemli uygulamaları vardır. Özellikle Riesz potansiyelleri ve singüler integrallerin özellikleri yardımıyla eliptik ve hipoeliptik (quazieliptik) kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri için ön eşitsizlikler elde edilebilmektedir. Daha sonra bu uzayın Navier-Stokes ve Schrödinger denklemleri, süreksiz katsayılı eliptik diferensiyel denklemler ve potansiyel teorisinde önemli uygulamaları ortaya çıkmıştır.

$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı, $0 < \lambda < n$, $p \geq 1$ ve $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\|f\|_{p,\lambda} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ r>0}} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ r>0}} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların tüm sınıflarının uzayıdır, burada $B(x,r)$, x merkezli r yarıçaplı yuvarı belirtmektedir. $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayı, $1 \leq p < \infty$ ve $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\|f\|_{M_{p,w}} = \sup_{\substack{x\in R^n \\ r>0}} \frac{r^{-n/p}}{w(x,r)} \|f\|_{L_p(B(x,r))}$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların uzayıdır, burada $w(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ da negatif olmayan, ölçülebilir fonksiyonları belirtmektedir.
Bu tanıma göre $w(x,r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ seçilirse klasik $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı elde edilir.

Maksimal fonksiyon ve Riesz potansiyeli harmonik analizin önemli konuları arasındadır. Özellikle kısmi türevli denklemler teorisi ve matematiksel fizikte birçok uygulamaları vardır. Maksimal fonksiyon $\mathbb{R}^n$ nin standart kümelerinde $n = 1$ için Hardy-Littlewood tarafından tanımlanmış ve Wiener tarafından n- boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayına genişletilmiştir. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 \leq \alpha < n$ ve $|B(x,r)| = \int\limits_{B(x,r)} dx$ olmak üzere

M_α kesirli maksimal operatörü

$$(M_\alpha f)(x) = \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1+\frac{\alpha}{n}} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

şeklindedir. $\alpha = 0$ alındığında Mf Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B\,(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

elde edilir.

$I_\alpha f$ Riesz potansiyeli de

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

olarak tanımlanır, burada,

$$\gamma(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

ile verilir. Morrey uzayında Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu ve Riesz potansiyelinin varlık ve sınırlılık koşulları, Adams (1975), Chiarenza ve Frasca (1987), Fazio ve Ragusa (1993), Fefferman ve Stein (1971), Morrey (1938), Peetre (1969), Guliyev (2009) gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

Singüler integraller en genel şekilde

$$Tf(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy$$

biçiminde ifade edilirler, burada K ya çekirdek denir ve K, $x = y$ de singülerliğe sahiptir. Bu yüzden yukarıdaki ifade limit durumunda anlamlı hale getirilebilir.(Stein 1993).

$f(x)$, R^n de ölçülebilir ve $t \in R^n$ için her bir $|x-t| > \epsilon > 0$ kümesi üzerinde mutlak integrallenebilir olsun. Eğer

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int\limits_{|x-t|>\epsilon} f(x) dx$$

var ve sonlu ise bu durumda $f(x)$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde esas değer anlamında integrallenebilirdir denir. Bu limitin değeri

$$P.V. \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$$

ile gösterilir.

T Calderon-Zygmund singüler integral operatörü kompakt destekli, sürekli, sonsuz kez diferansiyellenebilen bütün $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarını $L_2(\mathbb{R}^n)$'e götüren sınırlı, lineer bir operatördür. $Tf \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$,

$$Tf(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy \quad \text{h.h.} y \in \ Suppf$$

ile gösterilir.

Burada, $c_1 > 0$ ve $0 < \varepsilon \leq 1$ ve her $x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$ için

$$|K(x,y)| \leq c_1 \, |x-y|^{-n}$$

$2\,|x-x_1| \leq |x-y|$ olmak üzere,

$$|K(x,y) - K(x_1, y| + |K(y,x) - K(y, x_1| \leq c_1 \left(\frac{|x-x_1|}{|x-y|}\right)^{\varepsilon} |x-y|^{-n}$$

özelliklerini sağlar.

Tezin amacı Morrey–tipi norm tanımlanarak, $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayında M maksimal operatör ve T Calderon-Zygmund operatörlerinin $1 < p < \infty$ için $M_{p,w_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $M_{p,w_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p = 1$ için $M_{1,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayından zayıf $WM_{1,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığını garanti etmek için (w_1, w_2) ikilisi üzerine eklenmesi gereken koşulları araştırmak, ayrıca, I_α potansiyel operatörü için Sobolev-Adams tipi $M_{p,w}(R^n) \longrightarrow M_{q,w}(R^n)$ sınırlılık teoremi ve Spanne tipi $M_{p,w_1}(R^n) \longrightarrow M_{q,w_2}(R^n)$ sınırlılık teoremlerini vermektir. Tezin ikinci bölümünde, temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ilk önce, klasik maksimal fonksiyon ve Riesz potansiyeli tanıtılmış ve bu operatörlerin varlık ve sınırlılığı $L_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ Lebesgue uzayında ispatsız olarak verilmiştir. Daha sonra, $0 \leq \lambda \leq n$ olmak üzere, $L_{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^n\right)$ Morrey uzayı tanıtılmış, bu uzayın yapısı hakkında bazı sonuçlar verilmiş ve bu uzayda Hardy-Littlewood maksimal operatörünün ve I_α Riesz potansiyelinin sınırlılığı Guliyev (2009) tarafından verilmiş olan teoremler yardımıyla gösterilmiştir. Dördüncü bölümde ise, $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayında Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılığı Guliyev (2009) tarafından verilmiş olan teorem yardımıyla gösterilmiştir. I_α Riesz potansiyelinin $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $M_{q,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı iki farklı yönden Spanne ve Adams tipi sınırlılık olarak gösterilmiştir. Bunun için Guliyev (2009) tarafından verilmiş olan iki farklı teorem kullanılmıştır. Son olarak, T Calderon-Zygmund integral operatörleri tanıtılmış ve T operatörü için $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlılık koşulları belirlenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\|.\| : X \to R \qquad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için
$(N1)$ $\|x\| \geq 0$ $\;ve\;$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
$(N2)$ $\|ax\| = |a| \, \|x\|$
$(N3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde norm adı verilir. $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir. $(X, \|.\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir.

Tanım 2.2. X ve Y iki lineer uzay ve $T : D_T \subset X \to Y$ bir fonksiyon olsun. T fonksiyonuna operatör denir. Burada D_T, T nin tanım kümesi ve $T(D_T) \subset Y$ de T nin görüntü kümesidir. Eğer D_T, X in bir lineer alt uzayı ve T bir lineer dönüşüm ise her α, $\beta \in \mathbb{R}\,(veya\ \mathbb{C})$ ve x, $y \in X$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

dir. Eğer bir $f(x)$ fonksiyonu için hemen her yerde $Tf(x) \geq 0$ ise T operatörüne pozitif operatör denir.

Tanım 2.3. Herhangi bir μ ölçüsü $\mu(B(x, 2r)) \leq c\mu(B(x, r))$ şartını sağlıyorsa μ ölçüsü doubling şartını sağlıyor denir.

Tanım 2.4. X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer her $x \in D(T)$ için, $\|Tx\| \leq A\|x\|$ olacak şekilde bir A reel sayısı varsa, T operatörüne sınırlıdır denir.
Bir T operatörünün normu $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ ile tanımlanır.

Tanım 2.5. X ve Y normlu uzaylar, $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ bir operatör ve $x_0 \in D(T)$ olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - x_0\| < \delta$ koşulunu gerçekleyen her $x \in D(T)$ için, $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T ye x_0 da süreklidir denir.

Tanım 2.6. X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul T nin sınırlı olmasıdır.

Teorem 2.1. (**Diferensiyel Hesabın Ortalama Değer Teoremi**) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Bu taktirde (a, b) aralığında $f'(x_o) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ olacak şekilde en az bir x_o noktası vardır.

Tanım 2.7. (**Cebir ve σ- Cebir**) X bir küme olsun. Eğer X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir cebirdir denir:
(i) $X \in \mathcal{A}$
(ii) Her $E \in \mathcal{A}$ için $E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}$
(iii) $k = 1, 2, ..., n$ için $E_k \in \mathcal{A}$ ise $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$
Eğer (iii) şartı yerine

$$\text{"Her } n \in N \text{ için } E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}\text{"}$$

şartı konulursa $\mathcal{A}$ cebirine bir $\sigma-$ cebiri adı verilir.

Tanım 2.8. (**Borel Cebiri**) Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ-cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği (doğurduğu) σ-cebiri denir. $\mathbb{R}^n$ deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ-cebirine Borel cebiri denir ve $B(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $B(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $B(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $B(\mathbb{R})$ nin her bir elemanına Borel kümesi denir. X bir lokal kompakt Hausdorf uzayı ve $B(x)$, X in açık kümelerini içeren en küçük σ-cebir olsun.Bu durumda $B(x)$ Borel kümesinin σ-cebiri olarak ve Borel kümesinde tanımlı herhangi bir μ ölçüsü ise Borel ölçüsü olarak adlandırılır.

Tanım 2.9. X bir küme ve $\mathcal{A}$, X üzerinde bir $\sigma-$cebiri olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay, $\mathcal{A}$ daki her bir kümeye de $\mathcal{A}$-ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme adı verilir.

Tanım 2.10. $\left(\textbf{Ölçülebir Fonksiyon}\right)$ $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $f : X \to R$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \alpha \in R$ için

$$f^{-1}\left(]\alpha, +\infty[\right) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

oluyorsa f ye ölçülebilir fonksiyon denir. X üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $M(X, \mathcal{A})$ ile.gösterilir.

Tanım 2.11. $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona ölçü denir. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye sonlu ölçü adı verilir.

Tanım 2.12. $\left(\textbf{Ölçü Uzayı}\right)$ Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ σ-cebiri ve $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne bir ölçü uzayı adı verilir

Tanım 2.13. $\left(\textbf{Dış Ölçü}\right)$ X bir küme ve $P(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) Her $E \in P(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$

(iii) $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iv) Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in P(X)$ ise $\mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

şartlarını sağlarsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçüdür denir.

Tanım 2.14. $\left(\textbf{Lebesgue Dış Ölçüsü}\right)$ (I_k), $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi,

$$\tau_A = \left\{(I_k) : A \subset \bigcup I_k\right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A\right\}$$

biçiminde tanımlanan m^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü denir. Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir.
$n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlamak için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, ..., n\}$$

$n-$boyutlu kapalı aralıklarını göz önüne alalım. Bu aralıkların hacimleri

$$v(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

biçimindedir. Keyfi bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ bir aralık} \right\}$$

ile tanımlanır. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ için eğer

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (\mathbb{R}^n - E)) \qquad \textbf{(Caratheodary Ölçümü)}$$

ise E kümesine Lebesgue ölçülebilirdir denir.
$\mathbb{R}^n$ üzerindeki Lebesgue dış ölçüsü, her bir aralığa onun hacmini karşılık getirir.

Sonuç 2.1. A sayılabilir bir küme ise $m^*(A) = 0$ dır.

Sonuç 2.2. $[0, 1]$ kümesi sayılamayan bir kümedir.

Tanım 2.15. **(Lebesgue Ölçüsü)** $\mathcal{M}(\mathbb{R}, m^*)$, m^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin sınıfı olsun. m^* Lebesgue dış ölçüsünün $\mathcal{M}(\mathbb{R}, m^*)$ sınıfına da $B(\mathbb{R})$ sınıfına da olan kısıtlanmasına Lebesgue ölçüsü denir, m ile gösterilir.

Tanım 2.16. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme (veya özellik) ölçüsü sıfır olan bir küme dışında doğru ise, o önerme (veya özellik) hemen her yerde doğrudur denir.

Teorem 2.2. (**Chebyshev Eşitsizliği**) (X, A, μ) bir ölçü uzayı ve $f : X \to [0, \infty]$

fonksiyonu ölçülebilir olsun. $\alpha > 0$ için $A_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ denirse $\mu(A_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \int\limits_{A_\alpha} f d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int\limits_X f d\mu$ dır.

Tanım 2.17. (L_P **Uzayı**) (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L_p = \left\{ f \in M(X, \Sigma) : \int\limits_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

kümesine p-inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. $L_p$uzayında bir f fonksiyonunun normu

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int\limits_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty \\ ess \sup\limits_{x \in X} |f(x)|, \ p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır.

$$ess \sup\limits_{x \in X} |f(x)| = \inf \{\lambda : \mu(x \in X : |f(x)| > \lambda) = 0\}$$

dir.

Tanım 2.18. **(Örtü)** Birleşimleri A kümesini kapsayan U_i kümeler ailesine A kümesinin bir örtüsüdür denir. Bu U_i kümelerinin her biri açıksa bu halde U_i, A kümesinin açık örtüsüdür denir. Birleşimleri A kümesini kapsayan alt topluluklar ailesine verilen örtünün alt örtüsü ismi verilir. Eğer bu topluluklar ailesi sonlu sayıda kümelerden oluşuyorsa, bu örtüye sonlu alt örtü denir.

Tanım 2.19. X kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X kümesine "kompakttır" denir. Kapalı ve sınırlı bir kümenin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Yani, kapalı ve sınırlı her küme kompakttır.

Tanım 2.20. Bir f fonksiyonunun desteği $f(x) \neq 0$ şartını sağlayan x noktalarının kapanışıdır ve $Supp \ f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ ile gösterilir. Eğer f fonksiyonunun desteği kompakt bir küme ise bu durumda f kompakt destekli fonksiyon adını alır.

Tanım 2.21. f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her kompakt $K \subset X$ alt kümesi üzerinde

$$\int\limits_K |f| \, d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna lokal (yerel) integrallenebilirdir denir.

Tanım 2.22. (**Hölder eşitsizliği**) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L_p$, $g \in L_q$ olsun. Bu durumda $f\ g \in L^1$ ve

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

sağlanır (Neri 1971).

Tanım 2.23. (**Minkowski eşitsizliği**) $p \geq 1$ için eğer $f,\ g \in L_p$ ise $(f+g) \in L_p$ ve

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

dir (Neri 1971).

Tanım 2.24. (**Schwarz eşitsizliği**) $f(x) \in L_2$ ve $g(x) \in L_2$ olsun.

$$\left| \int_a^b f(x)\ g(x)\ dx \right| \leq \left\{ \int_a^b |f(x)|^2\ dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b |g(x)|^2\ dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğine Schwarz eşitsizliği denir.

Teorem 2.3. **(Fubini)** f, $\mathbb{R}^{m+n}$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x,y)|\, dxdy \\ I_2 &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|\, dx \right) dy \\ I_3 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|\, dy \right) dx \end{aligned}$$

integrallerinden en az biri mevcut ve sonlu olsun. I_2 için bu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir g integrallenebilen fonksiyonu vardır öyleki $g(y)$ hemen her y için içteki integrale eşittir anlamındadır ve I_3 için de aynısı geçerlidir. Bu durumda
(a) Hemen her $y \in \mathbb{R}^m$ için $f(.,y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dir.

(b) Hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x,.) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ dir.

(c) $\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(.,y)\,dy \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(d) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,.)\,dx \in L^1(\mathbb{R}^m)$

(e) $I_1 = I_2 = I_3$

elde edilir**.**

Tanım 2.25. $x = (x_1, \ ..., x_n)$ ve $y = (y_1, ..., \ y_n)$, $\mathbb{R}^n$ de vektörler olmak üzere $\mathbb{R}^n$,

n- boyutlu Öklidyen uzayı $(x, \ y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \ y_j$ iç çarpımı ile donatılmış $\mathbb{R}^n$, n- boyutlu reel uzaydır.

Burada x in mutlak değeri $|x| = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanır.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde $dx = dx_1...dx_n$ ile Lebesgue ölçüsünü göstereceğiz. $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde f fonksiyonunun (Lebesgue) integrali

$$\int f(x)dx = \int ... \int f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n$$

ile gösterilir. $E \subset R^n$ ölçülebilir bir küme olmak üzere E nin Lebesgue ölçüsü $|E| = \int\limits_E dx$ ile tanımlanır.

Çok katlı integrali kutupsal koordinatlarda ifade etmek çoğu kez kullanışlı olmaktadır. $r = |x|$ olsun ve $S^{n-1} = \{x : \ |x| = 1\}$ ile birim küreyi gösterilim.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)dx, \qquad dx = dx_1...dx_n$$

integralinin hesabı için;

$$0 \le r < \infty, \ 0 \le \theta_1, ..., \theta_{n-2} \le \pi, \ 0 \le \theta_{n-1} \le 2\pi$$

olmak üzere

$x_1 = r\cos\theta_1$

$x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$

$x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3$

...

$x_n = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 ... \sin\theta_{n-1}$

dönüşümü yapılır. Bu dönüşümün Jakobiyeni

$$J(r,\ \theta_1, ...,\ \theta_{n-1}) = r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (\sin\theta_j)^{n-1-j}$$

olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)dx &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi ... \int_0^{2\pi} f(r)J(r,\theta)drd\theta_1...d\theta_{n-1} \\
&= \int_0^\infty r^{n-1} f(r)dr \int_0^\pi \int_0^\pi ... \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{n-1} (\sin\theta_j)^{n-1-j}\, d\theta_1...d\theta_{n-1} \\
&= \omega_{n-1} \int_0^\infty f(r)r^{n-1}dr
\end{aligned}$$

elde edilir, burada ω_{n-1}, birim kürenin yüzey alanıdır.

Genel olarak

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)dx &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\sin\theta_1,\ ...,\ r\sin\theta_1 ... \sin\theta_{n-1})\, r^{n-1}drd\theta_1...d\theta_{n-1} \\
&= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r,\theta)r^{n-1}d\sigma dr
\end{aligned}$$

biçimde yazılır. Burada $d\sigma$, S^{n-1} üzerinde dx tarafından belirlenen yüzey ölçüsüdür.

Tanım 2.26. $x \in \mathbb{R}^n$ ve $f(x)$ ve $g(x)$ ölçülebilir fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda

$$h = f * g = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

ile tanımlı h fonksiyonuna f ile g nin konvolüsyonu denir.

Teorem 2.4. (Young) $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Eğer $f \in L_p$ ve $g \in L_1$ ise bu durumda $h = f * g$ hemen her yerde vardır ve L_p uzayına aittir. Ayrıca

$$\|h\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

eşitsizliği gerçeklenir (Neri 1971).

Teorem 2.5. (Young) $f \in L_p$ ve $g \in L_q$ olsun, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ ve $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ olsun. Bu durumda $h = f * g$ olmak üzere $h \in L_r$ dir ve

$$\|h\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

sağlanır (Neri 1971)

Tanım 2.27. (**Fourier Dönüşümü**) $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-i(x,y)} dy$$

ile verilen $\hat{f}$ fonksiyonu f fonksiyonunun Fourier dönüşümü olarak adlandırılır. Burada $(x,y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$ dir. Fourier dönüşümü

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-i(x,y)} dy$$

veya

$$\hat{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-2\pi i(x,y)} dy$$

olarak da alınabilir. Eğer $n = 1$ ve $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$ ise bu durumda

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-ixy} dy$$

olur.

Lemma 2.1. Eğer $f(x) = f_1(x_1) f_2(x_2) ... f_n(x_n)$ ise

$$\hat{f}(x) = \hat{f}_1(x_1) \hat{f}_2(x_2) ... \hat{f}_n(x_n)$$

sağlanır.

Teorem 2.6. (Riemann-Lebesgue) Eğer $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $\hat{f}$ sınırlı ve düzgün süreklidir. Ayrıca $|x| \to \infty$ iken $\widehat{f}(x) \to 0$ dır.

Teorem 2.7. $f, g \in L^1$ olsun. Eğer $h = f * g$ ise bu durumda $\widehat{h} = \widehat{f}\,\widehat{g}$ dır. (Neri 1971).

Teorem 2.8. $f, g \in L^1$ olsun. Bu durumda

$$\int \widehat{f}(x)g(x)dx = \int f(x)\widehat{g}(x)dx$$

dir (Neri 1971).

Teorem 2.9. (Parseval-Plancherel) $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ve $\hat{f}_R\,(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{|y| \le R} f(y)e^{-i(x,y)}dy$ olsun.Bu durumda

$$\widehat{f}(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i(x,y)}dy$$

Fourier dönüşümü $R \to \infty$ iken $\hat{f}_R\,(x)$ nin L^2 normunda bir limiti olarak vardır. Ayrıca

$$\left\| \widehat{f} \right\|_2 = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\| f \right\|_2$$

dir. Eğer Fourier dönüşümünü

$$\widehat{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi i(x,y)}dy$$

ile tanımlarsak bu durumda

$$\left\| \widehat{f} \right\|_2 = \left\| f \right\|_2 \qquad \text{(Parseval formülü)}$$

$$< \widehat{f}, \hat{g} > = < f, g > \text{ (Plancherel formülü)}$$

olur. Burada $< f, g >$, f ile g nin iç çarpımını göstermektedir ve $< f, g > = \int f\bar{g}dx$ dir.

Tanım 2.28. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve f nin Fourier dönüşümü

$$\widehat{f}(y) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i(x,y)}dx$$

şeklinde verilsin. Bu durumda

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{i(x,y)} dy$$

formülüne Fourier dönüşümleri için invers formülü denir.

Tanım 2.29. (**Karakteristik Fonksiyon**) $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlanan χ_A fonksiyonu A nın karakteristik fonksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 2.30. Bir s fonksiyonunun görüntü kümesi sonlu elemandan meydana geliyorsa s ye bir basit fonksiyondur denir.

$$\begin{aligned} s \quad &: \quad X \to \{a_1, a_{2,...,}a_n\} \subset \mathbb{R} \\ x \quad &\to \quad s(x) = a_k, \qquad 1 \leq k \leq n \end{aligned}$$

Tanım 2.31. Bir $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ negatif olmayan α_j tamsayılarının sıralı n-lisine katlı-indis denir.
$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ dir. Eğer α ve β iki katlı-indis ise $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$ dir. Benzer şekilde, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ olmak üzere

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_n^{\alpha_n}$$

$|\alpha|$. mertebeden bir diferensiyel operatördür. Özel olarak $D^{(0,...,0)} f = f$ dir. Bir boyutlu durumda D^α, $\frac{d}{dx}$ e indirgenir.
Örnek olarak $\mathbb{R}^3$ te $\alpha = (2, 0, 5)$ ise

$$D^\alpha = \frac{\partial^7}{\partial x_1^2 \partial x_3^5} = D_1^2 D_3^5$$

biçimindedir.

Tanım 2.32. (Schwarz Uzayı) $\mathbb{R}^n$ uzayında sonsuz kez diferensiyellenebilir ve istenilen α ve β katlı-indisleri için

$$\sup_{x\in IR^n}\left|x^\alpha D^\beta f(x)\right|<\infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfına Schwarz Uzayı denir. Schwarz Uzayı "S" ile gösterilir. Kısaca

$$S=\left\{f:\ \mathbb{R}^n\ \rightarrow\ \mathbb{C}\ ,\ f\ \in\ \mathbb{C}^\infty:\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\ \left|x^\alpha D^\beta f(x)\right|\ <\ \infty\right\}$$

dir. Diğer yandan α ve β katlı-indisler olduğundan $\alpha=(\alpha_1,\ ...,\ \alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\ ...,\ \beta_n)$ ve $\alpha_j,\ \beta_j\ \in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $j=1,\ 2,\ ...$ dir. Burada

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n},\quad x=(x_1,\ ...,\ x_n)\,,\quad \alpha=(\alpha_1,\ ...,\ \alpha_n)$$

$$D^\beta=\frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}}...\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}$$

dir.

Eğer $f\in S$ ise bu durumda f sınırlıdır, $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$, f sonsuz kez diferensiyellenebilirdir, $\hat{f}\ (x)\in S$, $\hat{f}\ (x)$ sonsuz kez diferensiyellenebilirdir.

Teorem 2.10. Eğer $1\leq p<\infty$ ise L_p deki basit fonksiyonların kümesi L_p de yoğundur**.**

Tanım 2.33. (**Kuvvetli ve Zayıf Tip Sınırlılık**) $1\leq p,\ q\leq\infty$ olmak üzere

$$T:L_p(\mathbb{R}^n)\rightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$$

bir operatör olsun. Eğer $\forall\ f\in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_q\ \leq A\,\|f\|_p$$

olacak biçimde f den bağımsız bir $A>0$ sabiti varsa T operatörüne kuvvetli (p,q) tipindedir denir.

Eğer $\forall\ \alpha>0$ için

$$|\{x:|Tf(x)|>\alpha\}|\leq\left(\frac{A\,\|f\|_p}{\alpha}\right)^q,q<\infty$$

olacak şekilde α ve f den bağımsız bir A sabiti varsa T dönüşümüne zayıf (p,q) tipindendir denir (Sadosky 1979).

Teorem 2.11. **(Riesz-Thorin)** $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ olmak üzere T, (p_0, q_0) ve (p_1, q_1) tipli bir operatör olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \qquad (0 < \theta < 1),$$

olmak üzere T, kuvvetli (p,q) tipli bir operatördür.

Teorem 2.12. **(Marcinkiewicz Ara Değer Teoremi)** $p_0 < q_0$, $p_1 \leq q_1$ ve $q_0 \neq q_1$ olmak üzere T operatörü zayıf (p_0, q_0) ve zayıf (p_1, q_1) tipli operatör olsun. Ayrıca p ve q

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda T operatörü (p,q) tipli operatördür.

Tanım 2.34. **(Vitali Örtü Lemması)** E, sınırlı çaplı olan $\{B_j\}$ küreler ailesinin birleşimi tarafından örtülen $\mathbb{R}^n$ nin ölçülebilir bir alt kümesi olsun.
O halde, $B_{1,}$ B_2, ..., B_k, ... (sonlu veya sonsuz) ayrık dizilerini seçtikten sonra öyle ki

$$\sum_k m(B_k) \geq C m(E_\alpha)$$

sağlanır, burada $m(E)$ bir E kümesinin ölçüsünü göstermektedir.
Buradaki C sadece n ye bağlı olan pozitif bir sabittir. $C = 5^{-n}$ olacaktır (Stein 1970).

Tanım 2.35. $(X,\, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f : X \to \mathbb{R}$ (*veya* $\mathbb{C}$) ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$\alpha_f\left(\lambda\right) = \mu\left(\left\{x \in X : \left|f\left(x\right)\right| > \lambda\right\}\right)$$

şeklinde tanımlanan

$$\alpha_f : (0,\, \infty) \to [0,\, \infty]$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun dağılım fonksiyonu denir.

3. $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ MORREY UZAYINDA MAKSİMAL OPERATÖR ve RIESZ POTANSİYELİ

3.1 $\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue Uzayında Maksimal Fonksiyon ve Riesz Potansiyeli

Maksimal fonksiyon ve Riesz potansiyeli harmonik analizin önemli konuları arasındadır. Özellikle kısmi türevli denklemler teorisi ve matematiksel fizikte birçok uygulamaları vardır.
Bu kesimde klasik Lebesgue uzayında maksimal fonksiyon ve Riesz potansiyeli tanımlanıp, bunların varlık ve sınırlılık özellikleri incelenecektir.

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Temel Lebesgue Teoremi'ne göre

$$\lim_{r \mapsto 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} f(y)dy = f(x)$$

ifadesi hemen her x için geçerlidir, burada

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$$

x merkezli r yarıçaplı açık yuvardır. Yukarıdaki limit yerine supremum ve f yerine $|f|$ alınarak f nin maksimal fonksiyonu tanımlanır.

Tanım 3.1.1.(Maksimal Fonksiyon) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. f nin maksimal fonksiyonu;

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

biçiminde tanımlanır.
Maksimal fonksiyon $\mathbb{R}^n$ nin standart kümelerinde $n = 1$ için Hardy Littlewood tarafından tanımlanmış ve Wiener tarafından n-boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayına genişletilmiştir.

Teorem 3.1.1. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan f fonksiyonu için

(i) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ ise Mf maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.
(ii) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise $\forall \alpha > 0$ için

$$|\{x : Mf(x) > \alpha\}| \leq \frac{A}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx$$

sağlanır, burada A sadece boyuta bağlı bir sabittir ve m Lebesgue ölçüsüdür.
(iii) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise $Mf \in L_P(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

eşitsizliği gerçeklenir (Stein 1970).

Tanım 3.1.2. (Riesz Potansiyeli)

f yeterince düzgün bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun Laplasyeni;

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

biçiminde tanımlanır.

$f \in S$ olmak üzere

$$F^{-1}\left(\hat{f}(x)\right) = f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(xy)} \hat{f}(y) dy$$

dir. $e^{i(xy)} = e^{i(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(-\Delta) f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(-\Delta e^{i(xy)}\right) \hat{f}(y) dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} e^{ix_1y_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} e^{ix_2y_2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} e^{ix_ny_n}\right) \hat{f}(y) dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |y|^2 \, e^{i(xy)} \hat{f}(y) dy
\end{aligned}$$

$$I_\alpha f = F^{-1} |y|^{-\alpha} Ff, \qquad f \in S \tag{3.1.1}$$

olduğundan

$$\Rightarrow (-\Delta) f = F^{-1} |y|^2 Ff$$

yazılabilir. Bilindiği gibi Laplace operatörü eliptik operatördür. P. Seeley göstermiştir ki, eğer bir eliptik L operatörü için

$$Lf = F^{-1}\phi(x)Ff$$

formülü mevcut ise o zaman onun istenilen kompleks kuvveti için

$$L^z f = F^{-1}\phi^z(x)Ff$$

geçerlidir. Dolayısıyla bu teoreme göre Laplace operatörü için

$$(-\Delta)^z f = F^{-1} |y|^{2z} Ff$$

yazılabilir. Dolayısıyla görünür ki $z = -\frac{\alpha}{2}$ için

$$(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f = F^{-1} |y|^{-\alpha} Ff \tag{3.1.2}$$

geçerlidir. Yani (3.1.1) ve (3.1.2) den görünür ki, Riesz potansiyelinin ve $-\Delta$ nın negatif kesir kuvvetinin genelleşmiş anlamda Fourier dönüşümleri aynıdır. Bu durumda

$$I_\alpha = (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} \quad , \quad 0 < \alpha < n \tag{3.1.3}$$

ifadesi yazılabilir, burada $0 < \alpha < n$ ve

$$\gamma(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

olmak üzere

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

I_α operatörüne Riesz potansiyeli denir.

Teorem 3.1.2. (Riesz Potansiyeli İçin Hardy-Littlewood-Sobolev Teoremi) $0 < \alpha < n$, $1 \le p < q < \infty$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun.

(i) Eğer $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ise

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

integrali hemen her x için mutlak yakınsaktır.
(ii) Eğer $p > 1$ ise bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_q \leq A_{p,q} \|f\|_p$$

eşitsizliği gerçeklenir.
(iii) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda her λ için

$$|\{x : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{A \|f\|_1}{\lambda} \right)^q$$

dir. Yani, $f \to I_\alpha f$ dönüşümü $(1,q)$ zayıf tiptentir $\left(\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n}\right)$ (Stein 1970).

3.2 $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey Uzayında Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü ve Riesz Potansiyelinin Sınırlılığı

Bu kesimde ilk önce $L_{p,\lambda} = L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayında Hardy-Littlewood maksimal operatörü için sınırlılık teoremi verilecektir. Daha sonra, Morrey uzayında I_α Riesz potansiyelinin sınırlılık koşulu incelenecek ve bu sınırlılık koşuluyla ilgili teorem verilecektir. Son olarak ise Spanne tarafından ispatlanmış olan Teorem 3.2.3. verilecektir.

Tanım 3.2.1. $0 \leq \lambda \leq n$, $1 \leq p < \infty$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}} = \|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ r>0}} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \leq C < \infty \tag{3.2.1}$$

olacak biçimdeki fonksiyonların uzayıdır, burada C sabiti sadece f ye bağlıdır ve $B(x,r)$, merkezi x ve yarıçapı r olan açık yuvarı göstermektedir. Böyle tanımlanan $\|f\|_{L_{p,\lambda}}$, $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayında bir yarı normdur (f sabit olduğunda kesin olarak

$\|f\|_{L_{p,\lambda}} = 0$ dır). $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarındaki fonksiyonlar bir sabit farkıyla eşit fonksiyonlar olarak alındığında (3.2.1) de verilen norm ile $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının yapıları hakkında bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir:
a) $\lambda = 0$ olduğunda $L_{p,0}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$, yani bilinen Lebesgue uzayıdır.

$$\int\limits_{B(x,r)} |f(x)|^p \, dx \leq C < \infty$$

dir.
b) $\lambda = n$ olduğunda $L_{p,n}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dir. Gerçekten,
$f \in L_{p,n}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$r^{-n/p} \left(\int\limits_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \omega_n^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_\infty}$$

olur. Böylece

$$\|f\|_{L_{p,n}} \leq \omega_n^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_\infty}$$

Temel Lebesgue Teoremi'ne göre

$$\lim_{r \to o} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy = |f(x)|^p$$

dir. Bu durumda

$$|f(x)| = \left(\lim_{r \to o} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \omega_n^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,n}}$$

elde edilir. Böylece $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dir ve

$$\|f\|_{L_\infty} \leq \omega_n^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,n}}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada ω_n, $\mathbb{R}^n$ de birim kürenin hacmini gösterir ve

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}$$

şeklindedir.

$c)$ $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ ise, o halde $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \theta$ olup burada θ, $\mathbb{R}^n$ de 0 a denk olan fonksiyonların kümesini belirtmektedir.

Ayrıca $1 \leq p < \infty,\ f \in WL^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $WL_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}} = \|f\|_{WL_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ r>0}} r^{\frac{-\lambda}{p}} \|f\|_{WL_{p(B(x,r))}}$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların uzayı belirtilmektedir.

Burada;

$$\begin{aligned} \|f\|_{WL_{p(B(x,r))}} &= \left\|f\chi_{B(x,r)}\right\|_{WL_{p(R^n)}} \\ &= \sup_{t>0} t(\alpha_{f\chi_{B(x,r)}})^{1/p}(t) \\ &= \sup_{t>0} t\left|\{y \in B(x,r) : |f(y)| > t\}\right|^{1/p} < \infty \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.1. $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda

$$\|Mf\|_{p,\lambda} \leq c\,\|f\|_{p,\lambda}$$

gerçeklenir, burada c, f den bağımsız bir sabittir.

$p = 1$ olsun. Bu durumda

$$t\left|\{Mf > t\} \cap B_r(x)\right| \leq cr^{\lambda}\,\|f\|_{1,\lambda}$$

gerçeklenir, burada c sabiti x, r, t ve f den bağımsızdır.

$1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_{p,\lambda}$, $0 < \lambda < n$ için Mf, $\mathbb{R}^n$ de h.h.y. sonludur (Chiarenza ve Frasca 1987).

Morrey uzayında M operatörünün sınırlılığını gösteren bu teoremi ispatlamak için öncelikle aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 3.2.1. $1 \leq p < \infty$ ve $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|Mf\|_{L_p(B(x,t))} \leq Ct^{\frac{n}{p}} \int_t^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1}\,\|f\|_{L_p(B(x,r))}\,dr \tag{3.2.2}$$

ve $p=1$ için

$$\|Mf\|_{WL_1(B(x,t))} \leq Ct^n \int\limits_t^{\infty} r^{-n-1} \|f\|_{L_1(B(x,r))} \, dr \tag{3.2.3}$$

sağlanır, burada C, f *ve* $x \in R^n$ e bağlı olmayan bir sabit ve $t > 0$ dır (Guliyev 1994).

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. f yi $f = f_1 + f_2$ ve

$$f_1(y) = f(y)\chi_{B(x,2t)}(y)$$

$$f_2(y) = f(y)\chi_{{}^cB(x,2t)}(y), \qquad t > 0 \tag{3.2.4}$$

şeklinde ayıralım.

$$\|Mf\|_{L_p(B(x,t))} \leq \|Mf_1\|_{L_p(B(x,t)} + \|Mf_2\|_{L_p(B(x,t)}$$

olmasından ve $1 < p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında M maksimal operatörünün sınırlılığından

$$\|Mf_1\|_{L_p(B(x,t))} \leq \|Mf_1\|_{L_p(R^n)} \leq C\|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|_{L_p(B(x,2t))} \tag{3.2.5}$$

elde edilir, burada C, f den bağımsız bir sabittir. (3.2.5) ten ve $\|f\|_{L_p(B(x,2t))}$ nin t ye göre azalmayan olması gerçeğinden kolayca

$$\|Mf_1\|_{L_p(B(x,t))} \leq Ct^{\frac{n}{p}} \int\limits_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \, dr$$

$$\leq t^{\frac{n}{p}} \int\limits_t^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \, dr \tag{3.2.6}$$

elde edilir.

Mf_2 yi belirlemek için öncelikle aşağıdaki yardımcı eşitsizliği ispatlayalım.

$$\int\limits_{B^c(x,t)} |x-y|^{-n} |f(y)| \, dy \leq C \int\limits_t^{\infty} s^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} \, ds, \;\; 0 < t < \infty \tag{3.2.7}$$

bu sonuca $\beta > \frac{n}{p}$ seçerek aşağıdaki gibi devam edelim;

$$\int\limits_{B^c(x,t)} |x-y|^{-n} |f(y)| \, dy \leq \beta \int\limits_{B^c(x,t)} |x-y|^{-n+\beta} |f(y)| \, dy \int\limits_{|x-y|}^{\infty} s^{-\beta-1} ds.$$

Fubini Teoreminden,

$$= \beta \int\limits_{t}^{\infty} s^{-\beta-1} ds \int\limits_{\{y \in R^n : t \leq |x-y \leq s|} |x-y|^{-n+\beta} |f(y)| \, dy$$

ve Hölder eşitsizliğinden,

$$\leq C \int\limits_{t}^{\infty} s^{-\beta-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} \left\| |x-y|^{-n+\beta} \right\|_{L_{p'(B(x,s))}} ds$$

elde edilir.

$z \in B(x,t)$ için

$$\begin{aligned} Mf_2(z) &= \sup_{r>0} |B(z,r)|^{-1} \int\limits_{B(z,r)} f_2(y) dy \\ &\leq C \sup_{r \geq 2t} \int\limits_{{}^cB(x,2t) \cap B(z,r)} |y-z|^{-n} |f(y)| \, dy \\ &\leq C \int\limits_{B^c(x,2t)} |x-y|^{-n} |f(y)| \, dy \end{aligned}$$

bulunur.

Böylece, C nin x ve r ye bağlı olmadığı durumda, (3.2.7) den

$$\begin{aligned} Mf_2(z) &\leq C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} ds \\ &\leq C \int\limits_{t}^{\infty} s^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} ds \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu ise $Mf_2(z)$ fonksiyonunun x ve t sabitleriyle, z ye bağlı olmayan bir ifadeyle açıklandığını gösterir. $\|1\|_{L_{p(B(x,t))}} = Ct^{\frac{n}{p}}$ olmasından dolayı

$$\|Mf_2\|_{L_p(B(x,t))} \leq C \int_t^{\infty} s^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_{p(B(x,s))}} ds \, \|1\|_{L_p(B(x,t))} \tag{3.2.8}$$

dır. (3.2.6) ve (3.2.8) den (3.2.2) elde edilir.

$p = 1$ ve herhangi $B = B(x, r)$ yuvarı için açıktır ki;

$$\|Mf\|_{WL_{1(B(x,t))}} \leq \|Mf_1\|_{WL_1(B(x,t))} + \|Mf_2\|_{WL_1(B(x,t))}$$

sağlanır.

M operatörünün $L_1(R^n)$ uzayından $WL_1(R^n)$ uzayına sınırlılığından,

$$\|Mf_1\|_{WL_1(B(x,t))} \leq C \|f\|_{L_1(B(x,2t))}$$

dir, burada, C, x ve t ye bağlı olmayan bir sabittir.

Dikkat edilecek olursa, (3.2.8) eşitsizliği $p = 1$ olması durumunda da doğrudur. Böylece (3.2.8) eşitsizliğinden, (3.2.3) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.2.1.in İspatı. Lemma 3.2.1. den

$$\begin{aligned}
\|Mf\|_{p,\lambda} &= \sup_{\substack{t>o \\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{p}} \|Mf\|_{L_P(B(x,t))} \\
&\leq C \sup_{\substack{t>o \\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{p}} t^{\frac{n}{p}} \int_t^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_P(B(x,r))} dr \\
&\leq C \sup_{\substack{t>o \\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{p,\lambda} \int_t^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} r^{\frac{\lambda}{p}} dr \\
&\leq C \sup_{\substack{t>o \\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{p,\lambda} \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\frac{\lambda}{p} - \frac{n}{q}} \left\{ r^{\frac{\lambda}{p}-\frac{n}{p}} \Big|_t^a \right\} \\
&\leq C \sup_{\substack{t>o \\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{p,\lambda} t^{\frac{\lambda}{p}-\frac{n}{p}} \\
&\leq C \|f\|_{p,\lambda}
\end{aligned}$$

elde edilir. $p=1$ için

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (Mf)\,\chi dx \leq c \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|\,(M_\chi)\,dx$$

dir (Feffermann ve Stein 1971).

$$\begin{aligned} B_{2r} &: \{x : |x-x_0| < 2r\} \\ \mathbb{R}\backslash B_{2r} &= \{x : |x-x_0| \geq 2r\} \\ &\Rightarrow |x-x_0| - r \geq r \\ &\Rightarrow (|x-x_0| - r)^n \geq r^n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{r^n}{(|x-x_0|-r)^n} \leq 1$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} M_{\chi_{B(x,r)}} &= \sup_{r>0} \tfrac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B_r B(x_0,r)} \chi_{B(x_0,r)}(y)\,dy \\ & \chi_{B(x_0,r)} = \begin{cases} 1 & , \quad x_0 \in B_r \\ 0 & , \quad x_0 \notin B_r \end{cases} \\ &= \sup_{r>0} \tfrac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)\cap B(x_0,r)} dy = c \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$M_{\chi_{B(x,r)}} \leq \frac{r^n}{(|x-x_o|-r)^n} \leq 1$$

dir. Diğer taraftan $|x-x_0| - r \geq 2^{k-1}r$ olduğundan

$$\frac{r^n}{(|x-x_0|-r)^n} \leq \frac{r^n}{(2^{k-1}r)^n} \leq 1$$

dir. Böylece, son olarak

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} (Mf)\,\chi_{B_r} dx &= \int\limits_{B_r} (Mf)\,dx \le c\left\{ \int\limits_{B_{2r}} |f|\,(M_\chi)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_{2^{k+1}r}\setminus B_{2^k r}} |f|\,(M_\chi)\,dx \right\} \\
&\le c\left\{ \int\limits_{B_{2r}} |f|\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_{2^{k+1}}\setminus B_{2^k r}} |f|\,\frac{r^n}{(|x-x_0|-r)^n} dx \right\} \\
&\le c\left\{ \int\limits_{B_{2r}} |f|\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^n}{(2^{k-1}r)^n} \int\limits_{B_{2^{k+1}r}} |f|\,dx \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan norma geçersek,

$$\begin{aligned}
r^\lambda \|Mf\|_{1,\lambda} &\le c\left\{ (2r)^\lambda \|f\|_{1,\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(2^{k+1}\right)^\lambda}{\left(2^{k-1}r\right)^n} \|f\|_{1,\lambda} \right\} \\
&= c\,\|f\|_{1,\lambda} \left\{ (2r)^\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(2^{k+1}\right)^\lambda}{\left(2^{k-1}r\right)^n} \right\} \\
&\le c\,\|f\|_{1,\lambda}\, r^\lambda
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\|Mf\|_{1,\lambda} \le\ c\,\|f\|_{1,\lambda} \Rightarrow\ \|Mf\|_{1,\lambda} \le\ c\,\|f\|_{1,\lambda} \Rightarrow t\,|\{Mf > t\} \cap B_r(x)| \le cr^\lambda \|f\|_{1,\lambda}$ olup buradan Mf nin $\mathbb{R}^n$ de h.h.y. de sonlu olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teorem ile Riesz potansiyelinin Morrey uzayındaki sınırlılığı verilecektir.

Teorem 3.2.2. $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $0 < \lambda < n - \alpha p$ alalım. Bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{q,\lambda} \le c\,\|f\|_{p,\lambda} \tag{3.2.9}$$

gerçeklenir, burada

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n-\lambda}$$

dir.

$p = 1$ için

$$t\,|\{|I_\alpha f| > t\} \cap B_r| \le cr^\lambda \|f\|_{1,\lambda} \tag{3.2.10}$$

elde edilir.
Teorem (3.2.1) ve (3.2.2) de c sadece n, λ, p, α ya bağlı bir sabittir (Adams 1975 Teorem 3.1).

Yukarıdaki teoremi ispatlamak için öncelikle aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.2.2. $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ ve $f \in L_{loc}^{p}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda C f, x ve t den bağımsız bir sabit olmak üzere

$$|I_\alpha f(x)| \leq Ct^\alpha Mf(x) + C\int_t^\infty r^{\alpha-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}\,dr \tag{3.2.11}$$

eşitsizliği gerçeklenir. (Guliyev 2009).

İspat. $1 < p < \infty$ alalım. f

$$f = f_1 + f_2,\ f_1(y) = f(y)\chi_{B(x,2t)}(y),\ f_2(y) = f(y)\chi_{B^c(x,2t)}(y),\ t > 0$$

olarak tanımlanırsa

$$I_\alpha f(x) = I_\alpha f_1(x) + I_\alpha f_2(x)$$

elde edilir. $|I_\alpha f_1(x)| \leq Ct^\alpha Mf(x)$ eşitsizliği Hedberg (1972) tarafından ispatlanmıştır. $p > 1$, $f \in L_{p,\lambda}$ olsun. Bu durumda $f \neq 0$ için, $I_\alpha f$ kümesi $\epsilon > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I_\alpha f(x) &= \int\limits_{|x-y|\leq t}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy + \int\limits_{|x-y|>t}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy \\ &\equiv I_1 + I_2 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $k \in \mathbb{Z}$ ve $a_k(x) = \left\{y : 2^{-k-1}t < |x-y| \leq 2^{-k}t\right\}$ olsun.
O zaman

$$I_1 = \int\limits_{|x-y|\leq t}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy = \sum_{k=o}^{\infty}\int\limits_{2^{-k-1}t<|x-y|\leq 2^{-k}t}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{2^{-k-1}t<|x-y|\leq 2^{-k}t} |x-y|^{\alpha-n}|f(y)|\,dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-k}t\right)^{\alpha}\left(2^{-k}t\right)^{-n} \int\limits_{|x-y|\leq 2^{-k}t} |f(y)|\,dy \\
&= t^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{-k}\right)^{\alpha} Mf(x), \qquad 0<\alpha<n \\
&= c_n t^{\alpha} Mf(x), \qquad 0<\alpha<n
\end{aligned}$$

$\Rightarrow |I_1| \leq c_n t^{\alpha} Mf(x)$ eşitsizliği elde edilir (Hedberg 1972).

$I_\alpha f_2$ için ise Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
|I_\alpha f_2(x)| &= \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f_2(y)(y)\,dy\right| \\
&= \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)\,\chi_{B^c(x,2t)}(y)\,dy\right| \\
&= \left|\int\limits_{B^c(x,2t)} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy\right| \\
&\leq \int\limits_{B^c(x,2t)} |x-y|^{\alpha-n}|f(y)|\,dy \\
&\leq C\int\limits_{B^c(x,2t)} |f(y)|\,dy \int\limits_{|x-y|}^{\infty} r^{\alpha-n-1}dr \\
&\leq C\int\limits_{2t}^{\infty}\left(\int\limits_{2t<|x-y|<r} |f(y)|\,dy\right) r^{\alpha-n-1}dr \\
&\leq C\int\limits_{t}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x,r))}\left(\int\limits_{t<|x-y|<r} 1dx\right)^{\frac{1}{p'}} r^{\alpha-n-1}dr
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C\int_t^\infty \|f\|_{L_p(B(x,r))}\left(\int_{S^{n-1}}\int_t^r \rho^{n-1}d\rho dx'\right)^{\frac{1}{p'}} r^{\alpha-n-1}dr \\
&\le C\int_t^\infty \|f\|_{L_p(B(x,r))}\, r^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} r^{\alpha-n-1}dr \\
&= C\int_t^\infty r^{\alpha-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}\,dr
\end{aligned}
$$

dir. Böylece istenen elde edilmiş olur.

Teorem 3.2.2. nin İspatı. $r^\alpha r^{\frac{\lambda-n}{p}} \le C\left(r^{\frac{\lambda-n}{p}}\right)^{\frac{p}{q}}$den, $r>0$ olmak üzere $r^{\frac{\lambda-n}{p}} = \frac{Mf(x)}{\|f\|_{p,\lambda}}$ seçilirse ve $B(x,t)$ x merkezli t yarıçaplı açık yuvar olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{q,\lambda} &= \sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}}\left(\frac{1}{t^\lambda}\int_{B(x,t)}|I_\alpha f(y)|^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{q}}\left(\int_{B(x,t)}|I_\alpha f(y)|^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{Lemma 3.2.2. den} \\
&\le \sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{q}}\left(\int_{B(x,t)}\left(Cr^\alpha Mf(y)+C\int_r^\infty t^{\alpha-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}\,dt\right)^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{q}}\left(\int_{B(x,t)}\left(Cr^\alpha Mf(y)+C\|f\|_{p,\lambda}\int_r^\infty t^\alpha t^{\frac{\lambda-n}{p}}\frac{dt}{t}\right)^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{q}}\left(\int_{B(x,t)}\left(C\left(r^{\frac{\lambda-n}{p}}\right)^{\frac{p}{q}-1}Mf(y)+C\left(r^{\frac{\lambda-n}{p}}\right)^{\frac{p}{q}}\|f\|_{p,\lambda}\right)^q dy\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\int\limits_{B(x,t)} \left(C \left(\frac{Mf(y)}{\|f\|_{p,\lambda}} \right)^{\frac{p}{q}-1} Mf(y) + C \left(\frac{Mf(y)}{\|f\|_{p,\lambda}} \right)^{\frac{p}{q}} \|f\|_{p,\lambda} \right)^{q} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\int\limits_{B(x,t)} \left(C\left(Mf(y)\right)^{\frac{p}{q}} \|f\|_{p,\lambda}^{1-\frac{p}{q}} \right)^{q} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C\|f\|_{p,\lambda}^{1-\frac{p}{q}} \sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{q}} \|Mf\|_{L_p(B(x,t))}^{\frac{p}{q}} \\
&= C\|f\|_{p,\lambda}^{1-\frac{p}{q}} \|Mf\|_{p,\lambda}^{\frac{p}{q}} \qquad \text{Teorem 3.2.2. den} \\
&\leq C\|f\|_{p,\lambda}^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_{p,\lambda}^{\frac{p}{q}} \\
&= C\|f\|_{p,\lambda}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.1. $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $0 < \lambda < n - \alpha p$ alalım. Bu durumda M_α kesirli maksimal operatörünün $L_{p,\lambda}$ Morrey uzayından $L_{q,\lambda}$ Morrey uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n-\lambda}$ olmasıdır.

İspat.

$$(M_\alpha f(x)) \leq \omega_n^{\frac{\alpha}{n}-1}(I_\alpha|f|)(x)$$

olduğundan,

$$\|M_\alpha f\|_{q,\lambda} \leq c\|f\|_{p,\lambda}$$

eşitsizliği kolayca elde edilir, burada c sadece n, λ, p, α ya bağlı bir sabittir.

Teorem 3.2.3. $0 < \alpha < n$, $0 < \lambda < n - \alpha p$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ olsun. $\mu = \frac{n\lambda}{(n-\lambda)}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$ olsun. Bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{q,\mu} \leq C\|f\|_{p,\lambda}$$

eşitsizliği gerçeklenir. (Spanne).

Yukarıdaki teoremi ispatlamak için öncelikle aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.2.3. $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ alalım. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|I_\alpha f\|_{L_q(B(x,t))} \leq Ct^{\frac{n}{q}} \int\limits_t^\infty r^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} dr \tag{3.2.12}$$

ve $p = 1$ için

$$\|I_\alpha f\|_{WL_q(B(x,t))} \leq Ct^{\frac{n}{q}} \int_t^\infty r^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_{1(B(x,r))}} dr \tag{3.2.13}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada C, f *ye* bağlı olmayan bir sabittir, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ dır (Guliyev 2009).

İspat. $1 < p < \infty$ alalım. f fonksiyonu $f = f_1 + f_2$, $f_1(y) = f(y)\chi_{B(x,2t)}(y)$, $f_2(y) = f(y)\chi_{B^c(x,2t)}(y)$, $t > 0$ olarak tanımlanırsa

$$I_\alpha f(x) = I_\alpha f_1(x) + I_\alpha f_2(x)$$

elde edilir. $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olmak üzere Teorem 3.1.2. deki (ii) özelliğinden

$$\begin{aligned} \|I_\alpha f_1\|_{L_q(B(x,t))} &\leq \|I_\alpha f_1\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C\|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &= C\|f\|_{L_p(B(x,2t))} \end{aligned}$$

elde edilir, burada C, f den bağımsız bir sabittir. Ayrıca,

$$\|I_\alpha f_1\|_{L_q(B(x,t))} \leq Ct^{\frac{n}{q}} \int\limits_{2t}^\infty r^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} dr \tag{3.2.14}$$

elde edilir. $|x - z| \leq t$, $|z - y| \geq 2t$ olduğunda $|x - z| \leq t \leq \frac{|z-y|}{2}$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |x - y| &= |x - z + z - y| \\ &\leq |x - z| + |z - y| \\ &\leq t + |z - y| \\ &\leq \frac{3}{2}|z - y| \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
|z-y| &= |z-x+x-y| \\
&\leq |z-x|+|x-y| \\
&\leq t+|x-y|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{|z-y|}{2}+|x-y| \\
&\Rightarrow \frac{|z-y|}{2} \leq |x-y|
\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak,

$$\frac{1}{2}|z-y| \leq |x-y| \leq \frac{3}{2}|z-y|$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f_2\|_{L_q(B(x,t))} &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_2(y)}{|z-y|^{n-\alpha}} dy \right\|_{L_q(B(x,t))} \\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)\,\chi_{(B(x,2t))}}{|z-y|^{n-\alpha}} dy \right\|_{L_q(B(x,t))} \\
&= \left\| \int_{B^c(x,2t)} \frac{f(y)}{|z-y|^{n-\alpha}} dy \right\|_{L_q(B(x,t))} \\
&\leq C \int_{B^c(x,2t)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \left\| \chi_{(B(x,t))} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\beta > \frac{n}{q}$ seçilerek, Hölder eşitsizliğinden

$$\int_{B^c(x,2t)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \beta \int\limits_{B^c(x,2t)} |x-y|^{\alpha-n+\beta} |f(y)| \left(\int\limits_{|x-y|}^{\infty} s^{-\beta-1} ds \right) dy \\
&= \beta \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} \left(\int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n : 2t\le|x-y|\le s\}} |x-y|^{\alpha-n+\beta} |f(y)|\, dy \right) ds \\
&\le C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} \left\| |x-y|^{\alpha-n+\beta} \right\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds \\
&= C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} \left(\int\limits_{2t\le|x-y|\le s} \frac{1}{\left(|x-y|^{n-\alpha-\beta}\right)^{p'}} dy \right)^{\frac{1}{p'}} ds \\
&= C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} \left(\int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{2t}^{s} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{(n-\alpha-\beta)p'}} d\rho dx' \right)^{\frac{1}{p'}} ds \\
&\le C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} \left(s^{n-(n-\alpha-\beta)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} ds \\
&= C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} s^{-\frac{n}{p}} s^{\alpha+\beta} \|f\|_{L_p(B(x,s))} ds
\end{aligned}
$$

$$
= C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{\alpha-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} ds \qquad (3.2.15)
$$

elde edilir. Diğer yandan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ise $\frac{n}{q} = \frac{n}{p} - \alpha$ dır. Bu değer (3.2.15) de yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
\|I_\alpha f_2\|_{L_q(B(x,t))} &\le C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{\alpha-\left(\frac{n}{q}+\alpha\right)-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} ds \\
&= C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} ds \\
&\le C t^{\frac{n}{q}} \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} ds \qquad (3.2.16)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Sonuç olarak, (3.2.14) ve (3.2.16) dan (3.2.12) ispatlanır. $p = 1$ ve herhangi $B = B(x,r)$ yuvarı için

$$\|I_\alpha f\|_{WL_1(B(x,t))} \leq \|I_\alpha f_1\|_{WL_1(B(x,t))} + \|I_\alpha f_2\|_{WL_1(B(x,t))}$$

eşitsizliğinin geçeklendiği açıktır. I_α operatörünün $L_1(R^n)$ uzayından $WL_q(R^n)$ uzayına sınırlılığından

$$\|I_\alpha f_1\|_{WL_q(B(x,t))} \leq C \, \|f\|_{L_1(B(x,2t))}$$

bulunur, burada C, x ve t ye bağlı olmayan bir sabittir.

Dikkat edilmelidir ki (3.2.16) eşitsizliği $p = 1$ durumu için de doğrudur. Dolayısıyla (3.2.16) dan (3.2.13) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.2.3. ün İspatı. Lemma 3.2.3. den ve $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{q,\mu} &= \sup_{\substack{t>0 \\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\mu}{q}} \, \|I_\alpha f\|_{L_q(B(x,t))} \\
&\leq C \sup_{\substack{t>0 \\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\mu}{q}} t^{\frac{n}{q}} \int_t^\infty r^{-\frac{n}{q}-1} \, \|f\|_{L_p(B(x,r))} \, dr \\
&\leq C \sup_{\substack{t>0 \\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{n-\mu}{q}} \, \|f\|_{p,\lambda} \int_t^\infty r^{-\frac{n}{q}-1} r^{\frac{\lambda}{p}} dr \\
&\leq C \sup_{\substack{t>0 \\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{n-\mu}{q}} \, \|f\|_{p,\lambda} \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\frac{\lambda}{p} - \frac{n}{q}} \left\{ r^{\frac{\lambda}{p}-\frac{n}{q}} \Big|_t^a \right\} \\
&\leq C \sup_{\substack{t>0 \\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{n-\mu}{q}} \, \|f\|_{p,\lambda} \, t^{\frac{\lambda}{p}-\frac{n}{q}} \\
&= C \sup_{\substack{t>0 \\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{n-\mu}{q}} \, \|f\|_{p,\lambda} \, t^{\frac{\mu}{q}-\frac{n}{q}} \\
&= C \, \|f\|_{p,\lambda}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4. $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYINDA MAKSİMAL OPERATÖR, RIESZ POTANSİYELİ VE CALDERON-ZYGMUND SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

4.1 $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayı

Çalışmamızın bu kısmında ilk önce $M_{p,w} = M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayını tanıtacak daha sonra M maksimal operatörü ve I_α Riesz potansiyeli için sınırlılık teoremlerini ispatlayacağız. Burada kullanılan $w(x,r)$, $w_1(x,r)$ ve $w_2(x,r)$ fonksiyonları $R^n \times (0,\infty)$ da negatif olmayan, ölçülebilir fonksiyonlardır.

Tanım 4.1.1. $M_{p,w}(R^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayı, $1 \leq p < \infty$ ve her $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$için

$$\|f\|_{M_{p,w}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{r^{-n/p}}{w(x,r)} \|f\|_{L_p(B(x,r))}$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların uzayıdır.
Bu tanıma göre $w(x,r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$seçilirse $L_{p,\lambda}(R^n)$ Morrey uzayı elde edilir.

$$L_{p,\lambda}(R^n) = M_{p,w}(R^n)\mid_{w(x,r)=r^{\frac{\lambda-n}{p}}}$$

Bu bölümde $r \leq t \leq 2r$ olmak üzere, $w(x,r)$ fonksionu $c \geq 1; t$ ve r ye bağlı olmayan bir sabit ve $x \in R^n$ olmak üzere

$$c^{-1}w(x,r) \leq w(x,t) \leq cw(x,r) \tag{4.1.1}$$

koşulunun sağlandığı, ve yine $C > 0$; r ve $x \in R^n$ ye bağlı olmayan bir sabit olmak üzere maksimal operatörler için

$$\int_r^\infty w(x,t)^p \frac{dt}{t} \leq Cw(x,r)^p \tag{4.1.2}$$

ve potansiyel operatörü için

$$\int_r^\infty t^{\alpha p} w(x,t)^p \frac{dt}{t} \leq Cr^{\alpha p} w(x,r)^p \tag{4.1.3}$$

koşullarının sağlandığı kabul edilecektir.

4.2 $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayında Maksimal Operatörün Sınırlılığı

Teorem 4.2.1. $1 \le p < \infty$ olsun ve $w_1(x,r)$ ve $w_2(x,r)$ fonksiyonları

$$\int_t^\infty w_1(x,r)\frac{dr}{r} \le C w_2(x,t) \tag{4.2.1}$$

koşulunu sağlasın, burada C, x ve t ye bağlı olmayan bir sabittir. Bu durumda, $p > 1$ için M maksimal operatörü $M_{p,w_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $M_{p,w_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p = 1$ için, $M_{1,w_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WM_{1,w_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Guliyev 1999).

İspat. $1 < p < \infty$ ve $f \in M_{p,w_1}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Lemma 3.2.1. den

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{M_{p,w_2}} &= \sup_{\substack{x\in R^n \\ t>0}} w_2^{-1}(x,t)t^{-\frac{n}{p}} \|Mf\|_{L_{p(B(x,t))}} \\ &\le C \sup_{\substack{x\in R^n \\ t>0}} w_2^{-1}(x,t) \int_t^\infty r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_{p(B(x,r))}} dr \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{M_{p,w_2}} &\le C \|f\|_{M_{p,w_1}} \sup_{x\in R^n, t>0} \frac{1}{w_2(x,t)} \int_t^\infty w_1(x,r)\frac{dr}{r} \\ &\le C \|f\|_{M_{p,w_1}} \end{aligned}$$

olup $1 < p < \infty$ için (4.2.1) den ispat tamamlanır.

$p = 1$ ve $f \in M_{1,w_1}(\mathbb{R}^n)$ için Lemma 3.2.1 den

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{WM_{1,w_2}} &= \sup_{x\in R^n, t>0} w_2^{-1}(x,t)t^{-n} \|Mf\|_{WL_1(B(x,t))} \\ &\le C \sup_{x\in R^n, t>0} w_2^{-1}(x,t) \int_t^\infty r^{-n-1} \|f\|_{L_{1(B(x,r))}} dr \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\|Mf\|_{WM_{1,w_2}} \le C\,\|f\|_{M_{1,w_1}(R^n)} \sup_{x\in R^n, t>0} \frac{1}{w_2(x,t)} \int_t^\infty w_1(x,r)\frac{dr}{r}$$

elde edilir. $p=1$ için (4.2.1) den ispat tamamlanır.

Uyarı 4.2.1. Teorem 4.2.1 de (4.1.1) ve (4.1.2) koşullarının noktasal doubling şartını (Tanım 2.3) sağlaması gerekmediğine dikkat edilmelidir.

$w_1(x,r) = w_2(x,r) = w(x,r)$ durumunda Teorem 4.2.1 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.2.1. $1 \le p < \infty$ ve $w(x,r)$, (4.1.1) ve (4.1.2) koşullarını sağlasın. Bu durumda $p>1$ için M operatörü $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayında sınırlı ve $p=1$ için $M_{1,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WM_{1,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

4.3 $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ Uzayında Riesz Potansiyelinin Sınırlılığı

4.3.1 Spanne tipi sınırlılık

Teorem 4.3.1. $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $w_1(x,r)$ ve $w_2(x,r)$ fonksiyonları

$$\int_r^\infty t^\alpha w_1(x,t)\frac{dt}{t} \le C w_2(x,r) \tag{4.3.1}$$

koşulunu sağlasın, burada, C, x ve r ye bağlı olmayan bir sabittir.
Bu durumda $p>1$ için M_α ve I_α operatörleri; $M_{p,w_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $M_{q,w_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p=1$ için M_α ve I_α operatörleri $M_{1,w_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WM_{q,w_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Guliyev 1999).

İspat. $1 < p < \infty$ ve $f \in M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Lemma 3.2.3 den

$$
\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{M_{q,w_2}} &= \sup_{x\in R^n, t>0} \frac{t^{-n/q}}{w_2(x,t)} \|I_\alpha f\|_{L_q(B(x,t))} \\
&\leq C \sup_{x\in R^n, t>0} \frac{1}{w_2(x,t)} \int\limits_t^\infty r^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))}\, dr \\
&\leq C \|f\|_{M_{p,w_1}} \sup_{x\in R^n, t>0} \frac{1}{w_2(x,t)} \int\limits_t^\infty r^\alpha w_1(x,r) \frac{dr}{r}
\end{aligned}
$$

(4.3.1) den $1 < p < \infty$ için ispat tamamlanır.

Şimdi $p = 1$ ve $f \in M_{1,w_1}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Lemma 3.2.3 den

$$
\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{WM_{q,w_2}} &= \sup_{x\in R^n, t>0} w_2^{-1}(x,t) t^{-\frac{n}{q}} \|I_\alpha f\|_{WL_q(B(x,t))} \\
&\leq C \sup_{x\in R^n, t>0} w_2^{-1}(x,t) \int\limits_t^\infty r^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_{1(B(x,r))}}\, dr
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Böylece,

$$
\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{WM_{q,w_2}} &\leq C \|f\|_{M_{1,w_1}(R^n)} \sup_{x\in R^n, t>0} \frac{1}{w_2(x,t)} \int\limits_t^\infty r^\alpha w_1(x,r) \frac{dr}{r} \\
&\leq C \|f\|_{M_{1,w_1}}
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan $p = 1$ için de (4.3.1) den ispat tamamlanır.

Uyarı 4.3.1. Teorem 4.3.1 de (4.1.1) ve (4.1.3) koşullarının noktasal doubling şartını sağlaması gerekmediğine dikkat edilmelidir.

$w_1(x,r) = w_2(x,r) = w(x,r)$ olması durumunda aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.3.1. $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $w(x,t)$, (4.1.1) ve (4.1.3) koşullarını sağlasın. Bu durumda M_α ve I_α operatörleri $p > 1$ için $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $M_{q,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p = 1$ için $M_{1,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WM_{q,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

4.3.2 Adams tipi sınırlılık

Teorem 4.3.2. $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $w(x,t)$ (4.2.1) koşulunu ve

$$t^\alpha w(x,t) + \int_t^\infty r^\alpha w(x,r) \frac{dr}{r} \leq C w(x,t)^{\frac{p}{q}} \tag{4.3.2}$$

koşulunu sağlasın, burada $q \geq p$ ve C, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$'a bağlı olmayan bir sabittir. Ayrıca kabul edelim ki, hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $w(x,r)$ için $w(x,.) : [0,\infty) \longrightarrow [a,\infty)$ koşulunu sağlayacak biçimde herhangi bir $a = a(x) > 0$ örten fonksiyonu vardır. Bu durumda, M_α ve I_α operatörleri, $p > 1$ için $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $M_{q,w^{p/q}}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p = 1$ için $M_{1,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WM_{q,w^{1/q}}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. $M_\alpha f(x) \leq C(I_\alpha |f|)(x)$ olduğunu biliyoruz. $1 \leq p < \infty$ ve $f \in M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Lemma 3.2.2 den

$$|I_\alpha f(x)| \leq C r^\alpha M f(x) + C \|f\|_{M_{p,w}} \int_r^\infty t^\alpha w(x,t) \frac{dt}{t}$$

dir. (4.3.2) den

$$r^\alpha w(x,r) \leq C w(x,r)^{\frac{p}{q}}$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca (4.3.2) şartını kullanarak

$$|I_\alpha f(x)| \leq C w(x,r)^{\frac{p}{q}-1} M f(x) + C w(x,r)^{\frac{p}{q}} \|f\|_{M_{p,w}}$$

elde edilir. $w(x,r)$ örten olduğundan

$$w(x,r) = M f(x) \|f\|^{-1}_{Mp,w(R^n)}$$

olacak biçimde bir $r > 0$ seçebiliriz, burada f nin 0 'a özdeş olmadığını varsayıyoruz. Böylece her $x \in R^n$ için

$$|I_\alpha f(x)| \le C(Mf(x))^{\frac{p}{q}} \|f\|_{M_{p,w}}^{1-\frac{p}{q}}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Teorem 4.2.1 deki (4.2.1) koşulu nedeniyle $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayında M maksimal operatörünün sınırlılığından teorem gerçeklenir. $1 < p < q < \infty$ için

$$\begin{aligned} \|I_\alpha f\|_{M_{q,w^{p/q}}} &= \sup_{x\in R^n, t>0} w(x,t)^{-\frac{p}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|I_\alpha f\|_{L_{q(B(x,t))}} \\ &\le C \|f\|_{M_{p,w}}^{1-\frac{p}{q}} \sup_{x\in R^n, t>0} w(x,t)^{-\frac{p}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|Mf\|_{L_{p(B(x,t))}}^{p/q} \\ &\le C \|f\|_{M_{p,w}} \end{aligned}$$

ve $p = 1 < q < \infty$ için

$$\begin{aligned} \|I_\alpha f\|_{WM_{q,w^{\frac{1}{q}}}} &= \sup_{x\in R^n, t>0} w(x,t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|I_\alpha f\|_{WL_{q(B(x,t))}} \\ &\le C \|f\|_{M_{1,w}}^{1-\frac{1}{q}} \sup_{x\in R^n, t>0} w(x,t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|Mf\|_{WL_{1(B(x,t))}}^{\frac{1}{q}} \\ &\le C \|f\|_{M_{1,w}} \end{aligned}$$

elde edilir.

4.4 $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayında Calderon-Zygmund Singüler İntegral Operatörlerinin Sınırlılığı

Bu kesimde T Calderon-Zygmund singüler integral operatörü tanımlanacak ve bu operatörün $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı olmasından yararlanılarak $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayında sınırlılığını gösteren teorem verilecektir.

Tanım 4.4.1. $K(x) \in L^1_{loc}(R^n \setminus \{0\})$ olmak üzere ve aşağıdaki koşulları sağlasın.

$$|K(x)| \leq B\,|x|^{-n}\,,\ \forall x \neq 0 \tag{4.4.1}$$

$$\int\limits_{r\leq|x\leq R|} K(x)dx = 0, \forall 0 < r < R < \infty \tag{4.4.2}$$

$$\int\limits_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\,dx \leq B, \forall y \neq 0 \tag{4.4.3}$$

Bu durumda K, Calderon-Zygmund çekirdeği olarak adlandırılır, burada B, x ve y den bağımsız bir sabittir ve (4.4.3) koşulu Hörmander koşulu olarak adlandırılır.

Teorem 4.4.1. $\forall \varepsilon > 0$ ve $1 < p < \infty$ için $f \in L^p(R^n)$ olmak üzere K Calderon-Zygmund çekirdeği olsun.

$$T_\varepsilon f(x) = \int\limits_{|y|\geq\varepsilon} f(x-y)K(y)dy$$

olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.
(i) $\|T_\varepsilon f\|_p \leq A_p \|f\|_p$ dir, burada A_p, ε ve f den bağımsızdır.
(ii) Herhangi bir $f \in L^p(R^n)$ olmak üzere L^p normundaki limit anlamında $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f$ mevcuttur ve

$$Tf(x) = p.v \int\limits_{R^n} f(x-y)K(y)dy$$

şeklindedir.
(iii) $\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$ dir.

Burada (ii) de tanımlanan T lineer operatörü Calderon-Zygmund singüler integral operatörü ve T_ε kesik operatör olarak isimlendirilir (Lu, Ding ve Yan 2007).

İspat. $\forall\varepsilon > 0$ ve $K_\varepsilon(x) = K(x)\chi_{\{|x|\geq\varepsilon\}}(x)$ olsun. Bu durumda $T_\varepsilon f(x) = K_\varepsilon * f(x)$ olur. Öncelikle T_ε un $(2,2)$ tipli olduğunu ve $\{T_\varepsilon\}$ dizisinin $L^2(R^n)$ uzayında sınırlı olduğunu göstereceğiz. K_ε un (4.4.1) ve (4.4.2) koşullarını sağladığı açıktır. K_ε un (4.4.3) koşulunu da sağladığını gösterelim. Aslında, herhangi $x, y \in R^n, y \neq 0$ ve $|x| \geq 2\,|y|$ için x ve $x-y$ nin her ikisi de $B(0,\varepsilon)$ yuvarında ise $K_\varepsilon(x) = K_\varepsilon(x-y) = 0$, eğer x ve $x-y$ nin her ikisi de $(B(0,\varepsilon))^c$ içinde ise $K_\varepsilon(x) = K(x)$, $K_\varepsilon(x-y) = K(x-y)$ olur. Bu durumda, K_ε, (4.4.3) koşulunu sağlar. $|x| > \varepsilon$ ve $|x-y| < \varepsilon$ olması durumunda ise $\frac{|x|}{2} \leq |x-y| < \varepsilon$ ve $\varepsilon < |x| < 2\varepsilon$ olur. Böylece,

$$\int\limits_{|x|\geq 2|y|} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x)|\,dx \leq \int\limits_{\varepsilon\leq|x|\leq 2\varepsilon} |K_\varepsilon(x)|\,dx \leq CB$$

elde edilir, burada, C, ε dan bağımsızdır.
Aynı şekilde, $|x| < \varepsilon$ ve $|x-y| > \varepsilon$ olduğunda da K_ε un (4.4.3) koşulunu sağladığını gösterebiliriz.

$$\int\limits_{|x|\geq 2|y|} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x)|\,dx \leq \int\limits_{\varepsilon\leq|x-y|\leq 2\varepsilon} |K_\varepsilon(x-y)|\,dx \leq CB$$

olur.

Şimdi $\{T_\varepsilon\}$ dizisinin $L^2(R^n)$ uzayında sınırlı olduğunu gösterelim. Plancherel teoreminden herhangi $\varepsilon > 0$, $K_\varepsilon \in L^2(R^n)$ için öyle bir $C > 0$ sabiti vardır ki herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_\zeta \left|\hat{K}_\varepsilon(\zeta\right| \leq CB \tag{4.4.4}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Aslında, $\zeta \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned}
\hat{K}_\varepsilon(\zeta) &= \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|x|\leq R} e^{-2\pi i x\zeta} K_\varepsilon(x)dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\int\limits_{|x|\leq\frac{\alpha}{|\zeta|}} e^{-2\pi i x\zeta} K_\varepsilon(x)dx + \int\limits_{\frac{\alpha}{|\zeta|}<|x|\leq R} e^{-2\pi i x\zeta} K_\varepsilon(x)dx \right) \\
: &= \lim_{R\to\infty} (I_1 + I_2)
\end{aligned}$$

(4.4.1) ve (4.4.2) den

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int\limits_{|x|\leq \frac{\alpha}{|\zeta|}} (e^{-2\pi i x\zeta} - 1) K_\varepsilon(x)dx \right| \\ &\leq C\,|\zeta| \int\limits_{|x|\leq \frac{\alpha}{|\zeta|}} |x|\,|K_\varepsilon(x)|\,dx \\ &\leq C\alpha B \end{aligned}$$

dir. Şimdi I_2 integralini ele alalım. $y = \frac{\zeta}{2|\zeta|^2}$alınırsa $e^{2\pi i y\zeta} = -1$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_{\frac{\alpha}{|\zeta|}<|x-y|\leq R} e^{-2\pi i(x-y)\zeta} K_\varepsilon(x-y)dx \\ &= -\int\limits_{\frac{\alpha}{|\zeta|}<|x-y|\leq R} e^{-2\pi i(x)\zeta} K_\varepsilon(x-y)dx \\ &= -\int\limits_{\frac{\alpha}{|\zeta|}<|x|\leq R} e^{-2\pi i(x)\zeta} K_\varepsilon(x-y)dx + J \end{aligned}$$

bulunur, burada, $J = \left(\int\limits_{\frac{\alpha}{|\zeta|}<|x|\leq R} - \int\limits_{\frac{\alpha}{|\zeta|}<|x-y|\leq R} \right) e^{-2\pi i x\zeta} K_\varepsilon(x-y)dx$ dir.

Böylece ,

$$I_2 = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\alpha}{|\zeta|}<|x|\leq R} \left[K_\varepsilon(x) - K_\varepsilon(x-y)\right] e^{-2\pi i x\zeta} dx + \frac{J}{2}$$

şeklinde yazılabilir ve $|y| = \frac{1}{2|\zeta|}$ ve $\alpha > 1$ olduğunda

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_{\frac{\alpha}{|\zeta|}<|x|\leq R} \left[K_\varepsilon(x) - K_\varepsilon(x-y)\right] e^{-2\pi i x\zeta} dx \right| &\leq \int\limits_{|x|>2|y|} |K_\varepsilon(x) - K_\varepsilon(x-y)|\,dx \\ &\leq CB \end{aligned}$$

elde edilir, burada C ve B, ε ve ζ dan bağımsızdır.

Diğer taraftan, E kümesi

$\{x : \frac{\alpha}{|\zeta|} < |x| \leq R\}$ ile $\{x : \frac{\alpha}{|\zeta|} < |x-y| \leq R\}$ kümelerinin simetrik farkı olarak alınırsa, bu durumda

$$|J| \leq \int_E |K_\varepsilon(x-y)|\, dx$$

olur.

$|y| = \frac{1}{2|\zeta|}$ ve $\alpha > 1$ için

$$E \subset \left\{ x : \frac{\alpha}{2|\zeta|} \leq |x| \leq \frac{2\alpha}{|\zeta|} \right\} \cup \left\{ x : \frac{R}{2} \leq |x| \leq 2R \right\}$$

dir. Böylece (4.4.1) den

$$\begin{aligned} |J| &\leq \int_{\frac{\alpha}{2|\zeta|} \leq |x| \leq \frac{2\alpha}{|\zeta|}} |K_\varepsilon(x-y)|\, dx + \int_{\frac{R}{2} \leq |x| \leq 2R} |K_\varepsilon(x-y)|\, dx \\ &\leq CB \end{aligned}$$

bulunur, burada C, B; ζ ve ε dan bağımsızdır. Böylece (4.4.4) gösterilmiş olup, bu da bize $\{T_\varepsilon\}$ dizisinin $L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı olduğunu gösterir.

Şimdi T_ε un zayıf $(1,1)$ tipli olduğunu ve bunun ε dan bağımsız olduğunu gösterelim. $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda > 0$ için f fonksiyonunun Calderon-Zygmund ayrışımından, çakışmayan küplerin serisi $\{Q_j\}$ olmak üzere $f = g + b$ olacak şekilde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(a) $\|g\|_2^2 \leq C\lambda \|f\|_1$, $|g(x)| \leq 2^n\lambda$ h.h.x $\in \mathbb{R}^n$

(b) $\lambda \leq \frac{1}{|Q_j|} \int\limits_{Q_j} |f(x)|\, dx \leq 2^n\lambda$, $\forall Q_j$

(c) $\sum\limits_j |Q_j| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$

(d) $b(x) = \sum\limits_j b_j(x)$, $\int\limits_{Q_j} b_j(x)dx = 0$, $supp\ b_j \subset Q_j$ ve $\|b_j\|_1 \leq 2 \int\limits_{Q_j} |f(x)|\, dx.$

Böylece $T_\varepsilon f(x) = T_\varepsilon g(x) + T_\varepsilon b(x)$ olduğundan

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : |T_\varepsilon f(x)| > \lambda| &\leq \left| \{x \in \mathbb{R}^n : |T_\varepsilon g(x)| > \frac{\lambda}{2} \right| + \left| \{x \in \mathbb{R}^n : |T_\varepsilon b(x)| > \frac{\lambda}{2} \right| \\ &: = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

I_1 için (a) dan

$$\begin{aligned} I_1 &\le \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |T_\varepsilon g(x)|^2 \, dx \\ &\le \frac{4c}{\lambda^2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 \, dx \\ &\le \frac{4c}{\lambda} \|f\|_1 \end{aligned}$$

I_2 integralini göstermek için Q_j ile aynı merkezli, Q_j nin $2\sqrt{n}$ kere genişletilmiş olan $Q_j^* = 2\sqrt{n}Q_j$ kübünü seçelim. $E^* = \underset{j}{\cup}\, Q_j^*$ olsun. Böylece (c) den

$$|E^*| \le \sum_j \left|Q_j^*\right| \le \frac{c_n}{\lambda} \|f\|_1$$

Böylece,

$$\begin{aligned} I_2 &\le |E^*| + \left| \{x \notin E^* : |T_\varepsilon b(x)| > \frac{\lambda}{2}\} \right| \\ &\le \frac{c_n}{\lambda} \|f\|_1 + \frac{2}{\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus E^*} |T_\varepsilon b(x)| \, dx \end{aligned}$$

dir. $|T_\varepsilon b(x)| \le \sum\limits_j |T_\varepsilon b_j(x)|$ olmasından

$$\sum_j \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus E^*} |T_\varepsilon b_j(x)| \, dx \le c \|f\|_1 \tag{4.4.5}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Q_j nin merkezi y_j ile gösterilmek üzere (4.4.3), (b) ve (c) den

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus E^*} |T_\varepsilon b_j(x)| \, dx &\le \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} \int\limits_{Q_j} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x-y_j| \; |b_j(y)| \, dydx \\ &\le \int\limits_{Q_j} |b_j(y)| \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x-y_j| \, dxdy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2CB\int\limits_{Q_j}|b_j(y)|\,dy \\
&\leq 2CB\int\limits_{Q_j}|f(y)|\,dy \\
&\leq 2CB2^n\lambda\,|Q_j| \\
&\leq C\,\|f\|_1
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu da bize T_ε un zayıf $(1,1)$ tipli olduğunu gösterir ve sınır ε ile f den bağımsızdır.

Şimdi $1 < p < \infty$ için T_ε un (p,p) tipli olduğunu gösterelim. $1 < p < 2$ için Marcinkiewiz interpolasyon teoreminden (p,p) tipli olduğunu ve sınırın ε ve f den bağımsız olduğunu biliyoruz.
$2 < p < \infty$ için $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow 1 < q < 2$ olur. $\tilde{T}_\varepsilon$, T_ε un dual operatörü ise $\tilde{T}_\varepsilon f(x) = \tilde{K}_\varepsilon f(x) * f(x)$, $\tilde{K}_\varepsilon f(x) = \bar{K}_\epsilon(-x)$ olmak üzere açıktır ki, $\tilde{K}_\varepsilon$, $K_\varepsilon^{'}$un sağladığı bütün durumları sağlar. Böylece $\tilde{T}_\varepsilon$, (q,q) tiplidir. Böylece herhangi bir $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$
\begin{aligned}
\|T_\epsilon f\|_p &= \sup_{\|g\|_q\leq 1}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} T_\varepsilon f(x)g(x)dx\right| \\
&= \sup_{\|g\|_q\leq 1}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\tilde{T}_\varepsilon g(x)dx\right| \\
&\leq \|f\|_p \sup_{\|g\|_q\leq 1}\left\|\tilde{T}_\varepsilon g\right\|_q \\
&\leq A_p\,\|f\|_p
\end{aligned}
$$

olup, A_p, ε ve f den bağımsızdır. Böylece (i) ispatlanmış olur.

Herhangi bir $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $(1 < p < \infty)$ için Tf, L^P uzayında $\{T_\varepsilon f\}$ nin limiti olarak vardır. Öncelikle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ olduğunu varsayalım. Herhangi bir $y \neq 0$ olmak üzere

$$
\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leq C\,|y| \tag{4.4.6}
$$

olduğunu elde etmeye çalışalım. Aslında,

$$\frac{d}{dt}f(x-ty)=\langle\nabla f,-y\rangle(x-ty)$$

olmasından

$$\begin{aligned}
f(x-y)-f(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}f(x-ty)dt \\
&= \int_0^1 \langle\nabla f,-y\rangle(x-ty)dt \\
&= \int_0^{|y|} \left\langle\nabla f,-y'\right\rangle(x-sy')ds
\end{aligned}$$

burada $y'=\frac{y}{|y|}$dir.Böylece,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_0^{|y|}\left\langle\nabla f,-y'\right\rangle(x-sy')ds\right|^p dx\right)^{1/p} \\
&\le \int_0^{|y|}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\left\langle\nabla f,-y'\right\rangle(x-sy')\right|^p dx\right)^{1/p} ds \\
&\le |y|\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_p
\end{aligned}$$

elde edilir.

$0<\eta<\varepsilon$ için (4.4.6) ve (4.4.1) den

$$\begin{aligned}
\|T_\eta f-T_\varepsilon f\|_p &\le \int_{\eta<|y|\le\varepsilon}|K(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}dy \\
&\le C\int_{\eta<|y|\le\varepsilon}|y|\,|K(y)|\,dy \\
&\le CB\varepsilon\to 0\quad(\eta,\varepsilon\to 0)
\end{aligned}$$

Bu da gösterir ki $\forall f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için $\{T_\varepsilon f\}$ dizisi $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayında bir

Cauchy dizisidir. Bu durumda L^p uzayında öyle bir $Tf \in L^p$ vardır ki

$$\lim_{\varepsilon \to o} \|T_\varepsilon f - Tf\|_p = 0$$

dır.

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p &\leq \|Tf - T_\varepsilon f\|_p + \|T_\varepsilon f\|_p \\
&\leq \|Tf - T_\varepsilon f\|_p + A_p \|f\|_p
\end{aligned}$$

olup,

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

bulunur. Herhangi bir $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $\delta > 0$ için $f = g + h$ olacak şekilde $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $\|h\|_p < \delta$ vardır. Böylece $0 < \eta < \varepsilon$ için

$$\begin{aligned}
\|T_\eta f - T_\varepsilon f\|_p &\leq \|T_\eta(f-g)\|_p + \|T_\eta g - T_\varepsilon g\|_p + \|T_\varepsilon(g-f)\|_p \\
&\leq A_p \|f-g\|_p + \|T_\eta g - T_\varepsilon g\|_p + A_p \|g-f\|_p \\
&\to 2A_p\delta \ , \quad (\eta, \varepsilon \to 0)
\end{aligned}$$

δ keyfi olduğu için $\{T_\varepsilon f\}$, herhangi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayında bir Cauchy dizisidir. Böylece $Tf \in L^p$ vardır ki ,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|Tf - T_\varepsilon f\|_p = 0$$

ve

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

dir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.4.2. $1 \leq p < \infty$ ve $w_1(x,t)$ ile $w_2(x,t)$ nin (4.2.1) koşulunu sağladığını kabul delim. Bu durumda, $p > 1$ için, T singüler integral operatörü $M_{p,w_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından, $M_{p,w_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır ve $p = 1$ için T operatörü $M_{1,w_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WM_{1,w_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Guliyev 1994).

Yukarıdaki teoremi ispatlamak için önce aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 4.4.1. $1 \leq p < \infty$ ve $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|Tf\|_{L_{p(B(x,t))}} \leq Ct^{\frac{n}{p}} \int\limits_t^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_{p(B(x,r))}} dr \tag{4.4.7}$$

ve $p = 1$ için

$$\|Tf\|_{WL_{1(B(x,t))}} \leq Ct^n \int\limits_t^{\infty} r^{-n-1} \|f\|_{L_{1(B(x,r))}} dr \tag{4.4.8}$$

elde edilir, burada $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ ve C, f'ye bağlı değildir.

İspat. $1 < p < \infty$ olmak üzere f fonksiyonunu

$$f = f_1 + f_2,\ f_1(y) = f(y)\,\chi_{B(x,2t)}(y)\,,\ f_2(y) = f(y)\,\chi_{B^c(x,2t)}(y)\,,\ t > 0$$

şeklinde gösterildiğinde,

$$\|Tf\|_{L_{p(B(x,t))}} \leq \|Tf_1\|_{L_{p(B(x,t))}} + \|Tf_2\|_{L_{p(B(x,t))}}$$

elde edilir. T operatörünün $L_{p(R^n)}$ de sınırlılığından, $1 < p < \infty$ için

$$\|Tf_1\|_{L_{p(B(x,t))}} \leq \|Tf_1\|_{L_{p(R^n)}} \leq C\,\|f_1\|_{L_{p(R^n)}}$$

elde ederiz.
Böylece

$$\|Tf_1\|_{L_{p(B(x,t))}} \leq C\,\|f\|_{L_{p(B(x,2t))}}$$

elde edilir.

$$\|f\|_{L_{p(B(x,t))}} \leq Ct^{\frac{n}{p}} \int\limits_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_{p(B(x,r))}} dr$$

eşitsizliği gözönüne alınırsa

$$\|Tf_1\|_{L_{p(B(x,t))}} \leq Ct^{\frac{n}{p}} \int\limits_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_{p(B(x,r))}} dr \tag{4.4.9}$$

elde edilir.

$\|Tf_2\|_{L_{p(B(x,t))}}$yi hesaplayabilmek için

$$|Tf_2(z)| \leq C \int\limits_{B^c(x,2t)} \frac{|f(y)|}{|y-z|^n} dy$$

eşitsizliği göz önüne alınır, burada, $z \in B(x,t)$; $|x-z| \leq t$, $|z-y| \geq 2t$ ve dolayısıyla $\frac{1}{2}|z-y| \leq |x-y| \leq \frac{3}{2}|z-y|$ eşitsizliklerinden

$$\|Tf_2\|_{L_{p(B(x,t))}} \leq C \int\limits_{B^c(x,2t)} |x-y|^{-n} |f(y)| \, dy \left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{L_{p(R^n)}} \tag{4.4.10}$$

elde edilir. Böylece (3.2.7) eşitsizliği sayesinde

$$\|Tf_2\|_{L_{p(B(x,t)}} \leq Ct^{\frac{n}{p}} \int\limits_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_{p(B(x,r)}} dr \tag{4.4.11}$$

elde edilir. (4.4.9) ve (4.4.11) den (4.4.7) elde edilir.

$p = 1$ olsun. Herhangi bir $B(x,r)$ yuvarı için açıktır ki

$$\|Tf\|_{WL_{1(B(x,t))}} \leq \|Tf_1\|_{WL_1(B(x,t)} + \|Tf_2\|_{WL_1(B(x,t)}$$

dir. T operatörünün $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığından

$$\|Tf_1\|_{WL_1(B(x,t)} \leq C \|f\|_{L_1(B(x,2t)}$$

elde edilir, burada C , x ve t ye bağlı değildir.
(4.4.11) eşitsizliği $p = 1$ durumu için de doğrudur. Böylece (3.2.8) eşitsizliğinden (4.4.8) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.4.2. nin İspatı. $1 < p < \infty$ ve $f \in M_{p,w_1}(R^n)$ olsun. Lemma 4.4.1 den

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{M_{p,w_2}} &= \sup_{\substack{x\in R^n\\ t>0}} w_2^{-1}(x,t) t^{-n/p} \|Tf\|_{L_{p(B(x,t))}} \\ &\leq C \sup_{\substack{x\in R^n\\ t>0}} w_2^{-1}(x,t) \int\limits_t^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_{p(B(x,r))}} dr\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{M_{p,w_2}} &\leq C\,\|f\|_{M_{p,w_1}} \sup_{\substack{x\in R^n\\ t>0}} \frac{1}{w_{2(x,t)}} \int\limits_t^\infty w_1(x,r)\frac{dr}{r} \\ &\leq C\,\|f\|_{M_{p,w_1}}\end{aligned}$$

olup, $1 < p < \infty$ için (4.2.1) den ispat tamamlanır.

$p = 1$ ve $f \in M_{1,w_1}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Lemma 4.4.1 den

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{WM_{1,w_2}} &= \sup_{\substack{x\in R^n\\ t>0}} w_2^{-1}(x,t)t^{-n}\,\|Tf\|_{WL_1(B(x,t)} \\ &\leq C\sup_{\substack{x\in R^n\\ t>0}} w_2^{-1}(x,t) \int\limits_t^\infty r^{-n-1}\,\|f\|_{L_{1(B(x,r))}}\,dr\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{WM_{1,w_2}} &\leq C\,\|f\|_{M_{1,w_1}(R^n)} \sup_{\substack{x\in R^n\\ t>0}} \frac{1}{w_2(x,t)} \int\limits_t^\infty w_1(x,r)\frac{dr}{r} \\ &\leq C\,\|f\|_{M_{1,w_1}}\end{aligned}$$

$p = 1$ için (4.2.1) den ispat tamamlanır.

Uyarı 4.4.1. Teorem 4.4.2. de (4.1.1) ve (4.1.2) koşullarının noktasal doubling şartını sağlaması gerekmez.

$w_1(x,r) = w_2(x,r) = w(x,r)$ olması durumunda aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.4.1. $1 \leq p < \infty$ ve $w(x,t)$, (4.1.1) ve (4.1.2) koşullarını sağlasın. Bu durumda T singüler integral operatörü $p > 1$ için $M_{p,w}(R^n)$ de sınırlıdır ve $p = 1$ için $M_{1,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WM_{1,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

Sonuç 4.4.2. $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayında $w(x,r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ seçilmesi durumunda $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı elde edildiği için $1 \leq p < \infty$ ve $0 < \lambda < n$ durumunda T Calderon-Zygmund singüler integral operatörü $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayında ve $p = 1$ durumunda da $L_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

KAYNAKLAR

Adams, D. R. 1975. A note on Riesz potentials, Duke Math. J. 42 , pp. 765-778.

Burenkov, V.I. and Guliyev, H.V. 2004. Nesessary and sufficient conditions for boundedness ofmaximal operator in the local Morrey-type spaces, Studia Mathematica vol. 163 (2), pp. 157-176.

Burenkov, V.I., Guliyev, H.V. and Guliyev, V.S. 2009. Nesessary and sufficient conditions for boundedness of the Riesz potential in the local Morrey-type spaces, Potential Anaysis, vol. 31, no 2, pp. 1-39.

Chiarenza, F. and Frasca, M. 1987. Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function, Rend. Math., vol. 7, pp. 273-279.

Duong, X.T. and Yan, L.X. 2004. On commutators of fractional integrals, Proc.Amer. Math.Soc., vol.132 12, pp. 3549-3557

Guliyev, V.S. 1994. Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in $\mathbb{R}^n$, Doctor's degree dissertation, Moscow, Mat.Inst.Steklov, pp. 1-329 , Russian.

Guliyev, V.S. 1999. Function spaces, integral operators and two weighted inequalities on homogeneous groups. Some applications, Baku. pp. 1-332, Russian.

Guliyev, V.S. and Mustafayev, R.Ch. 1997. Integral operators of potantial type in spaces of homogeneous type, Doklady Ross Akad Nauk, (354) no 6, pp. 730-732, Russian.

Guliyev, V.S. and Mustafayev, R.Ch. 1998. Fractional integrals in spaces of functions defined on spaces of homogeneous type, Anal Math vol.24, no.3, pp. 181-200, Russian.

Guliyev, V.S. 2009. Boundedness of the maximal, potansiyel and singular operators in generalized Morrey spaces. J. Inequal. Appl., Art. ID 503948, pp.20.

Hedberg, L.I. 1972. On certain convolution inequalies, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 36, pp. 505-510.

Fazio, G.D. and Ragusa, M.A. 1993. Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients, J. Funct. Anal. vol.112, pp. 241-256.

Feffermann, C. and Stein, E. M. 1971. Some maximal inequalities, Amer . J. Math.

vol.93, pp. 107-115.

Kurata, K., Nishigaki, S. and Sugano, S. 1999. Boundedness of integral operators on generalized Morrey spaces and its application to schrödinger operators, Proc AMS, vol.128(4), pp.1125-1134.

Lanzhe, L. 2000. Weighted inequalities in generalized Morrey spaces of maximal and singular integral operators on spaces of homogeneous type, Kyungpook Math J 40 , no 2, pp. 339-346.

Mizuhara, T. 1991. Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces, Harmonic Analysis (S.Igari, Editor), ICM 90 Satellite Proceedings, Springer - Verlag, Tokyo, pp. 183-189.

Morrey, C.B. 1938. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc.,vol. 43, pp. 126-166.

Nakai, E. 1994. Hardy- Littlewood maximal operator, singular integral operators and Riesz potentials on generalized Morrey spaces, Math Nachr vol.166, pp. 95-103.

Nakai, E. 2006. The Companato, Morrey and Holder spaces on spaces of homogeneous type, Studia Math., vol 176, pp. 1-19.

Neri, U. 1971. Singular Integrals, Springer Verlag, New York.

Peetre, J. 1966. On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant, Ann. Mat. Pura e Appl. (IV) vol.72, pp. 295-304.

Peetre, J. 1969. On the theory of $L_{p,\lambda}$ spaces, Jour. Funct. Anal. vol.4, pp. 71-87.

Stein, E.M. and Weiss, G. 1971. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press.

Stein, E.M. 1993. Harmonic Analysis. Princeton University Press.

Torchinsky, A. 1986. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis, Academic Press, Orlando.

Lu, S., Ding, Y and Yan, D. 2007. Singular integrals and related topics, pp. 40-46, China.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Betül ATAY
Doğum Yeri	:	Konya
Doğum Tarihi	:	26.02.1987
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Ankara Çankaya Milli Piyango Anadolu Lisesi (2005)
Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2009)
Yüksek Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2009 – Haziran 2011)