ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

SPİRAL VEKTÖR ALANLARI VE UYGULAMALARI

Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2012

ÖZET

Doktora Tezi

SPİRAL VEKTÖR ALANLARI VE UYGULAMALARI

Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu doktora tezi altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, tez için gerekli kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, lineer vektör alanları verilerek spiral vektör alanları tanıtılmıştır ve spiral vektör alanlarının integral eğrileri hesaplanmıştır. Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde yapılan çalışmalar Lorenz uzayında yapılmıştır. Beşinci bölümde, point-line operatörü tanımlanarak benzerlik dönüşümü yardımıyla bir point-line'nın başka bir point-line'a dönüştürülebileceği gösterilmiştir. Altıncı bölümde ise beşinci bölümde yapılan çalışma, Lorenz uzayı için incelenmiştir.

Şubat 2012, 78 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lie Grubu, Lie Cebiri, Lineer vektör alanı, Helisel Vektör Alanı, Point-line operatörü

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SPIRAL VECTOR FIELD AND ITS APPLICATIONS

Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of six chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. In the second chapter, some main concepts for this study have been given. In the third chapter, we gave the lineer vector fields and defined the spiral vector fields. In addition to this we calculate the integral curves of a spiral vector field. In the fourth chapter, we did the same work on Lorentzian space like chapter three. In the fifth chapter, we defined the point-line operator. With the help of Equiform motion a point-line is transformed to the another point-line. In the final chapter we did the same work on Lorentzian space like chapter five.

February 2012, 78 pages

Key Words : Lie gruops, Lie Algebras, Lineer Vector Field, Helical vector field, Point-line operatör

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamın yönetimini kabul ederek bana bu tezi hazırlama olanağı sağlayan, çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar beşeri ilişkilerde de engin fikirleriyle yetişmeme ve gelişmeme katkıda bulunan danışman hocam sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ya, çalışmalarım süresince desteklerini esirgemeyen değerli hocalarım sayın Prof. Dr. Baki KARLIĞA (Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi)'ya, Doç. Dr. Nejat EKMEKCİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ye ve sayın Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN (Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi)'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Çalışmalarım süresince birçok fedakarlıklar göstererek beni destekleyen ve yardımlarını esirgemeyen eşim Ufuk ÖZTÜRK'e, babam Ali KOÇ ve annem Fatma KOÇ'a derin duygularla teşekkür ederim.

Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK
Ankara, Şubat 2012

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$O(n)$	Ortogonal matrisler ailesi
D	Riemann koneksiyonu
g	Metrik tensör
$[,]$	Lie parantez operatörü
α	İntegral eğrisi
$\wedge$	Dış çarpma operatörü
$\tilde{D}$	Öklid anlamında koneksiyon
∇	Gradient fonksiyonu
Δ	Laplace operatörü
M	Diferensiyellenebilir reel manifold
$T_M(P)$	$P \in M$ noktasındaki tanjant uzay
E^n	n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu reel vektör uzayı
$GL(n+1,\mathbb{R})$	$(n+1)\times(n+1)$ tipindeki regüler matrislerin cümlesi
$O(n)$	Ortogonal Matrislerin cümlesi
R	Sabit Uzay
R_0	Hareketli Uzay
Ω	Darboux Matrisi
$SO(3)$	Özel ortogonal grup
$SE(3)$	Matris Lie grubu
$se(3)$	Matris Lie grubunun Lie cebiri
$SD(3)$	Homotetik hareketlerin matris Lie grubu
$sd(3)$	Homotetik hareketlerin matris Lie grubunun Lie cebiri

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Hareketlerin modellenmesi Kinematikte önemli bir yer tutmaktadır. Özellikle katı cisim hareketlerinin Lie grubu ve Lie cebiri yapısı yardımıyla ifade edilmesinde, lineer vektör alanları gündeme gelmektedir. Lineer vektör alanlarının özel hallerinden olan helisel vektör alanları ile ani hareketlerin yörüngeleri elde edilmektedir.
Lineer vektör alanlarının tanım ve uygulamaları Karger ve Novak (1985) tarafından verilmiş olup Öklid uzayı için lineer vektör alanlarının integral eğrilerini Acratalishian (1989) ve Lorenz uzayı için Helisel vektör alanlarının genellemesi ile helisel vektör alanlarının ani hareketlerle olan ilişkisini Zafer ÜNAL (2007) doktora tezinde incelemiştir.

Biz ise bu çalışmada, ilk önce lineer vektör alanlarını kullanarak spiral vektör alanlarını tanımladık ve spiral vektör alanlarının özel halinin helisel vektör alanları olduğunu gösterdik. Daha sonra, Spiral vektör alanlarının Lie grubu ve Lie cebiri yapılarını inceleyerek bu yapılar üzerinde çeşitli dönüşümler tanımlayarak bu dönüşümlerin özeliklerini inceledik.

Ayrıca, yönlendirilmiş bir doğru ve doğru üzerinde alınan bir referans noktası yardımıyla ifade edilebilen Point-line kavramını inceledik. Bir doğru Plücker koordinatları ile verilebilir. Eğri üzerinde bir nokta alırsak, bu nokta ile doğrunun ifade edilmesi de point-line ile verilebilir. Bir point-line'den başka bir point-line'ye geçiş bir operatörle yapılabilir. Bu operatör, point-line operatörü olarak adlandırılabilir. Biz gösterdik ki; point-line operatörü bir benzerlik dönüşümüdür. Bunlara ek olarak, bir point-line'den başka bir point-line'ye geçişin, kuaterniyonları kullanarak daha kolay yapılabileceğini gösterdik.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilerleyen bölümlerde sıkça kullanacağımız bazı temel tanım ve sembolleri tanıtacağız.

2.1 n-Boyutlu Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1 $A \neq \varnothing$ bir cümle ve V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\psi : A \times A \longrightarrow V$$

dönüşümü $P, Q \in A$ noktaları için

$$(P,Q) \longrightarrow \psi(P,Q)$$

şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A cümlesine V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir **Afin Uzay** denir:

i. $\forall\, P,Q,R \in A$ için $\psi(P,R) = \psi(P,Q) + \psi(Q,R)$ dir,

ii. $\forall\, P \in A$ ve $\forall\, \vec{\alpha} \in V$ için $\psi(P,Q) = \vec{\alpha}$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.2 n-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı $\mathbb{R}^n$ olsun. $\mathbb{R}^n$ ile birleşen $\mathbb{R}^n$ afin uzayına **n-boyutlu Öklid Uzay** denir ve E^n ile gösterilir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.3 E^n de bir nokta $P = (p_1, ..., p_n)$ olsun. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x_i : E^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longrightarrow x_i(P) = p_i \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı x_i fonksiyonuna E^n nin **i-yinci koordinat fonksiyonu** denir. Eğer P noktasının bileşenleri bir dik çatıya göre verilmişse $\{x_1, ..., x_n\}$ sistemine, E^n nin **Öklid koordinat sistemi** veya **dik koordinat sistemi** denir (Hacısalihoğlu 2000).

2.2 Riemann Manifoldu, Riemann Konneksiyonu, İkinci Temel Form

Tanım 2.2.1 $X \neq \varnothing$ ve X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyor ise τ koleksiyonu X üzerinde bir **topoloji** adını alır:

i. $X, \varnothing \in \tau$,

ii. $\forall A_i, A_j \in \tau \Rightarrow A_i \cap A_j \in \tau$,

iii. $\forall i \in I$ için $A_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

(Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.2 Boş olmayan bir X cümlesi ve üzerindeki τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir **topolojik uzay** denir ve kısaca X ile gösterilir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.3 X bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi faklı iki noktaları için, X de, sırası ile, P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \varnothing$ olacak biçimde bulunabilirse X topolojik uzayına bir **Hausdorff uzayı** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.4 X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir

$$f : X \longrightarrow Y$$

fonksiyonu sürekli, f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir **homeomorfizm (topolojik dönüşüm)** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.5 M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M ye bir **n-boyutlu topolojik manifold** veya kısaca **n-manifold** denir:

(M1) M bir Hausdorff uzayıdır,

(M2) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n in bir açık alt cümlesine homeomorftur,

(M3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir

(Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.6 M bir topolojik n-manifold olsun. Bir $P \in M$ noktasının M deki bir U açık komşuluğu,

$$\psi : U \longrightarrow V$$

tanımlı dönüşümü ile E^n in bir V açık alt cümlesine homeomorf ise (U, ψ) homeomorfizmine M nin P noktasındaki bir **haritası** veya **koordinat komşuluğu** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.7 M bir topolojik n-manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ yazılır. E^n de her bir U_α açığının bir ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan bir açık cümlesi V_α olsun. Böylece ortaya çıkan (ψ_α, U_α) haritalarının

$$\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

koleksiyonuna M bir **atlası (koordinat komşuluğu sistemi)** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.8 M bir topolojik n-manifold ve M nin bir atlası $S = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. Eğer S atlası için, $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall \alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler S ye $\boldsymbol{C^k}$ **sınıfından diferensiyellenebilir** denir. S atlası M üzerinde C^k sınıfından olduğu zaman S ye M **üzerinde** $\boldsymbol{C^k}$ **sınıfından diferensiyellenebilir yapı** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.9 M bir topolojik n-manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir atlas tanımlanabilirse M ye $\boldsymbol{C^k}$ **sınıfından diferensiyel-lenebilir manifold** denir. Ayrıca, her $k \in \mathbb{N}$ için M üzerindeki atlas diferensiyellenebilir ise, o zaman M manifolduna $\boldsymbol{C^\infty}$ **sınıfından diferensiyel-lenebilir manifold** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.10 M diferensiyellenebilir bir manifold ve M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ sınıfından fonksiyonların cümlesi de $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere, $\forall P \in M$ için

$$\begin{aligned} \vec{V}_P : C^\infty(M,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f \quad &\longrightarrow \vec{V}_P[f] \end{aligned}$$

dönüşümü

i. $\vec{V}_P[\lambda f + \mu g] = \lambda \vec{V}_P[f] + \mu \vec{V}_P[g], \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

ii. $\vec{V}_P[f,g] = \vec{V}_P[f]g(P) + f(P)\vec{V}_P[g]$

aksiyonlarını sağlıyor ise $\vec{V}_P$ fonksiyonuna M nin P noktasındaki bir **tanjant vektörü** denir (Hacısalihoğlu 2000).

M manifoldunun bir $P \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesini

$$T_M(P) = \left\{ \vec{V}_P \middle| \vec{V}_P : C^\infty(M,\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{tanjant uzay}} \mathbb{R} \right\}$$

ile gösterelim. Bu cümlede toplama işlemini $\forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için,

$$\begin{aligned} \oplus : T_M(P) \times T_M(P) &\longrightarrow T_M(P) \\ \left(\vec{V}_P, \vec{W}_P\right) &\longrightarrow \vec{V}_P \oplus \vec{W}_P : C^\infty(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad f \longrightarrow \left(\vec{V}_P \oplus \vec{W}_P\right)[f] = \vec{V}_P[f] + \vec{W}_P[f] \end{aligned}$$

olarak tanımlarsak $\left(T_M(P), \oplus\right)$ ikilisi bir Abel grubu olur. Ayrıca $\forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için,

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times T_M(P) &\longrightarrow T_M(P) \\ \left(\lambda, \vec{V}_P\right) &\longrightarrow \lambda \odot \vec{V}_P : C^\infty(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad f \longrightarrow \left(\lambda \odot \vec{V}_P\right)[f] = \lambda \vec{V}_P[f] \end{aligned}$$

dönüşümü ile tanımlı dış işlem ve $\left(T_M(P), \oplus\right)$ Abel grubu, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı oluşturur. Bu uzay $\left\{T_M(P), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\right\}$ sisteminden ibaret olup M nin $P \in M$ noktasındaki **tanjant uzayı** adını alır ve kısaca $T_M(P)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu 2000).

2.3 Eğriler Teorisi

Tanım 2.3.1 n-boyutlu bir reel vektör uzayı V olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle , \rangle &: V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u},\vec{v}) &\longrightarrow \langle \vec{u},\vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i \vec{v}_i \end{aligned} \tag{2.1}$$

ile tanımlı dönüşüm (reel değerli fonksiyon), aşağıdaki tanımlanan aksiyomları sağlıyor ise V üzerinde bir iç çarpım adını alır:

i. Simetri Aksiyomu: $\forall \vec{u},\vec{v} \in V$ için $\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = \langle \vec{v},\vec{u} \rangle$,

ii. Bilineerlik Aksiyomu: $\forall a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in V$ için

$$\langle a\vec{x} + b\vec{y},\vec{z} \rangle = a\langle \vec{x},\vec{z} \rangle + b\langle \vec{y},\vec{z} \rangle$$

$$\langle \vec{x}, a\vec{y} + b\vec{z} \rangle = a\langle \vec{x},\vec{y} \rangle + b\langle \vec{x},\vec{z} \rangle$$

iii. Pozitif Tanımlılık Aksiyomu: $\forall \vec{u} \in V$ için $\langle \vec{u},\vec{u} \rangle \geq 0$

$$\langle \vec{u},\vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

(Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.3.2 V bir reel vektör uzayı olsun. V deki bir $\vec{u}$ vektörünün **uzunluğu** veya **boyu**

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u},\vec{u} \rangle} \tag{2.2}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca bu değere $\vec{u}$ vektörünün **normu** da denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.3.3 $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha &: I \longrightarrow E^n \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

biçiminde düzgün(C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne, E^n uzayı içinde bir **eğri** denir

Buradaki $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığına α eğrisinin **parametre aralığı** ve $t \in I$ değişkenine de α **eğrisinin parametresi** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Şekil 2.1 E^n uzayı içinde bir eğri

Tanım 2.3.4 M bir C^∞ manifold ve $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere,

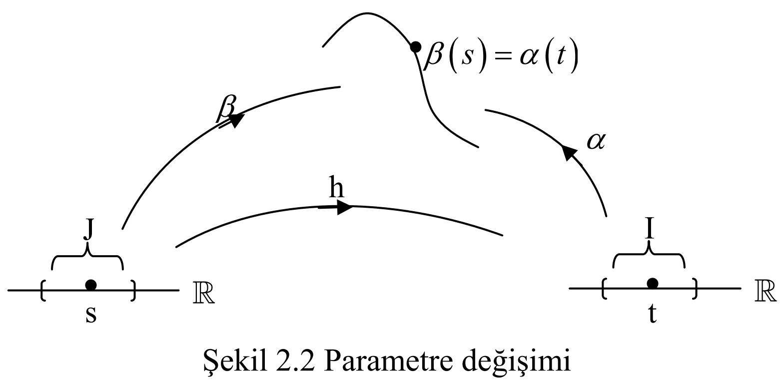
$$\alpha : I \longrightarrow M \subseteq E^n$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise α ya M **üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.3.5. E^n de bir M eğrisinin (I, α) ve (J, β) gibi iki koordinat komşuluğu verilsin.

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta : J \longrightarrow I$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna M nin bir **parametre değişimi** (daha doğrusu M nin I daki parameteresinin J deki parametre ile değişimi) denir (Hacısalihoğlu 2000).



Şekil 2.2 Parametre değişimi

Tanım 2.3.6 E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \longrightarrow E^n$ fonksiyonunun Öklidyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ olmak üzere,

$$\alpha(t) \in M$$

ve

$$\alpha'(t) = \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}, \cdots, \frac{\partial \alpha_n}{\partial t} \right) \tag{2.3}$$

dir. $\left(\alpha(t), \alpha'(t)\right) \in T_{E^n}\left(\alpha(t)\right)$ tanjant vektörüne , M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre **hız vektörü** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.3.7 Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye **regüler eğri** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.3.1 E^n de regüler her eğrinin, birim hızlı olacak şekilde bir koordinat komşuluğu vardır (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.3.8 $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık, E^n de bir eğri α ve E^n üzerinde bir vektör alanı X olmak üzere, $\forall t \epsilon I$ için,

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$$

ise, α eğrisine X **vektör alanının integral eğrisi** denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.3.9 V, bir K cismi üzerinde n-boyutlu bir vektör uzayı ve X, V üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer,

$$A : V \longrightarrow V$$

ile tanım lineer dönüşümü $\forall v \epsilon V$ için,

$$X_v = A(v)$$

olur ise, X vektör alanına **lineerdir** denir (Karger ve Novak 1979).

2.4 Lie Grubu ve Lie Cebiri

Tanım 2.4.1 Diferensiyellenebilir bir manifold M ve bir grub G olmak üzere

L_1 : M nin noktaları G nin elemanları ile çakışır,

L_2 : $\quad \bullet : M \longrightarrow M$

$\quad (a,b) \longrightarrow a \bullet b^{-1}$ işlemi her yerde diferensiyellenebilir,

aksiyomları sağlanırsa (M,G) ikilisine bir **Lie Grubu**, M ye **Lie Grubunun Temel Manifoldu** ve G ye de **Lie Grubunun Temel Grubu** denir (Hacısalihoğlu 1980a).

Tanım 2.4.2 V , bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere

$$\begin{aligned} [,] : V \times V &\longrightarrow V \\ (x,y) &\longrightarrow [x,y] \end{aligned}$$

ile tanımlı işlemi,

1. Bilineer,
2. Anti-simetrik,
3. $\big[[x,y],z\big]+\big[[y,z],x\big]+\big[[z,x],y\big]=0$

özelliklerine sahipse $(V,[,])$ ikilisine bir **Lie Cebiri** denir (Hacısalihoğlu 1980a).

Tanım 2.4.3 Matris uzayının bir alt manifoldu, matrislerin çarpma işlemine göre bir grup ise bu gruba **Matris Lie Grubu** denir (Hacısalihoğlu 1980a).

Tanım 2.4.4 $\mathbb{R}_3^3$ de

$$O(3) = \left\{ A \epsilon \mathbb{R}_3^3 : A^T A = A A^T = I, \det A = \mp 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanan cümleye **Ortogonal Matrislerin Cümlesi** denir ve matrislerde çarpma işlemine göre oluşturduğu gruba **Ortogonal Matris Lie Grubu** denir (Karger, Novak 1979).

Tanım 2.4.5 $\mathbb{R}_3^3$ de

$$SO(3) = \{ A \epsilon R_3^3 : A^T A = A A^T = I, \det A = 1 \}$$

şeklinde tanımlanan cümleye **Özel Ortogonal Matrislerin Cümlesi**, matrislerde çarpma işlemine göre oluşturduğu gruba **Özel Ortogonal Matris Lie Grubu** denir ve bu Lie grubuna karşılık gelen Lie cebiri

$$so(3)=\left\{\omega\epsilon\mathbb{R}_3^3:\omega=\begin{bmatrix}0&-\omega_3&\omega_2\\\omega_3&0&-\omega_1\\-\omega_2&\omega_1&0\end{bmatrix},\omega^T=-\omega\right\}$$

şekilde tanımlanır (Karger ve Novak 1979).

Teorem 2.4.1 E^3 de bir anti-simetrik matrise karşılık gelen bir lineer dönüşüm A olsun. A ya karşılık gelen matris,

$$A=\begin{bmatrix}0&\lambda&0\\-\lambda&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad (\lambda\neq 0)$$

olacak şekilde bir E^3 ün bir ortonormal bazı vardır (Karger ve Novak 1979).

2.5 Dual Uzay

Tanım 2.5.1 Her $a,a^*\in\mathbb{R}$ için $A=\left(a,a^*\right)$ ikilisine **bir sıralı reel sayı ikilisi** adı verilir. Böylece

$$\mathrm{ID}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\left\{\left(a,a^*\right):a,a^*\in\mathbb{R}\right\}$$

cümlesi üzerinde iki iç işlem (toplama ve çarpma) ve eşitlik aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\oplus:\mathrm{ID}\times\mathrm{ID}\longrightarrow\mathrm{ID}$$

iç işlemi $A=\left(a,a^*\right)\in\mathrm{ID}$ ve $B=\left(b,b^*\right)\in\mathrm{ID}$ olmak üzere

$$A\oplus B=\left(a,a^*\right)\oplus\left(b,b^*\right)=\left(a+b,a^*+b^*\right)$$

şeklinde tanımlanır ve ID deki **toplama** olarak isimlendirilir.

$$\odot:\mathrm{ID}\times\mathrm{ID}\longrightarrow\mathrm{ID}$$

iç işlemi $A=\left(a,a^*\right)\in\mathrm{ID}$ ve $B=\left(b,b^*\right)\in\mathrm{ID}$ olmak üzere

$$A\odot B=\left(a,a^*\right)\odot\left(b,b^*\right)=\left(ab,ab^*+a^*b\right)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ deki **çarpma** olarak isimlendirilir.

$A=\left(a,a^*\right)\in\mathbb{D}$ ve $B=\left(b,b^*\right)\in\mathbb{D}$ için

$$a=b \text{ ve } a^*=b^*$$

ise A ve B **eşittir** denir ve $A=B$ şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.5.2 $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi olmak üzere,

$$\mathbb{D}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise $\mathbb{D}$ cümlesine **dual sayılar sistemi** ve her $\left(a,a^*\right)\in\mathbb{D}$ elemanına da bir **dual sayı** denir (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 2.5.1 $\left(\mathbb{D},\oplus,\odot\right)$ üçlüsü birimli ve değişimli bir halkadır (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 2.5.2 $\left(\mathbb{D},\oplus,\odot\right)$ üçlüsü bir cisim değildir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.5.3 $A\oplus X=A$ denkleminin çözümü olarak tanımlanan X dual sayısına $\mathbb{D}$ nin **sıfırı** denir ve $0=\left(0,0\right)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 2.5.3 $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası, $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.5.4 Her $A=\left(a,a^*\right)\in\mathbb{D}$ dual sayısında “a” reel sayısına A nın **reel kısmı**, “a^*” reel sayısına da A nın **dual kısmı** denir ve sırasıyla $\operatorname{Re}A=a$, $DuA=a^*$ şeklinde yazılır (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.5.5 $\left(1,0\right)=1$ dual sayısına $\mathbb{D}$ deki çarpma işleminin birim elemanı veya $\mathbb{D}$ deki **reel birim** ve $\left(0,1\right)=\varepsilon$ dual sayısı da $\mathbb{D}$ deki **dual birim** olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.5.6 ID dual sayılar halkası olmak üzere,

$$\mathrm{ID}\times\mathrm{ID}\times\mathrm{ID}=\mathrm{ID}^3=\left\{\widetilde{A}=\left(A_1,A_2,A_3\right):A_1,A_2,A_3\in\mathrm{ID}\right\}$$

cümlesi üzerindeki, sırasıyla, **toplama**, **skalarla çarpma** ve **eşitlik** aşağıdaki şekilde tanımlanır. $1\le i\le 3$ için $\widetilde{A}=\left(A_i\right),\widetilde{B}=\left(B_i\right)\in\mathrm{ID}^3$ ve $\lambda\in\mathrm{ID}$ olmak üzere,

Toplama: $+:\mathrm{ID}^3\times\mathrm{ID}^3\longrightarrow\mathrm{ID}^3$

$$\left(\widetilde{A},\widetilde{B}\right)\longrightarrow\widetilde{A}+\widetilde{B}=\left(A_i+B_i\right)$$

Çarpma: $\odot:\mathrm{ID}\times\mathrm{ID}^3\longrightarrow\mathrm{ID}^3$

$$\left(\lambda,\widetilde{A}\right)\longrightarrow\lambda\odot\widetilde{A}=\left(\lambda A_i\right)$$

Eşitlik : $\widetilde{A}=\widetilde{B}\Leftrightarrow A_i=B_i$

(Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 2.5.4 $\left(\mathrm{ID}^3,+\right)$ bir abel grubudur (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 2.5.5 $\left(\mathrm{ID}^3,+,\mathrm{ID},\oplus,\bullet,\odot\right)$ sistemi ID dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.5.7 Dual sayılar halkası üzerinde modül olan $\mathrm{ID}^3=\mathrm{ID}\times\mathrm{ID}\times\mathrm{ID}$ cümlesi **ID-Modül** olarak isimlendirilir ve ID-Modül' ün elemanları olan sıralı dual sayı üçlülerine, **dual vektörler** adı verilir (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 2.5.6 $\vec{a},\overrightarrow{a^*}\in\mathbb{R}^3$ olmak üzere ID-Modül' de her bir $\overrightarrow{\widetilde{A}}$ dual vektörü

$$\overrightarrow{\widetilde{A}}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*},\qquad\left(\varepsilon=\left(0,1\right)\in\mathrm{ID}\right)$$

biçiminde yazılır (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 2.5.6 $\overrightarrow{\widetilde{A}}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}=\left(\vec{a},\overrightarrow{a^*}\right)$ dual vektörünün $\lambda\in\mathrm{ID}$ skaları ile çarpımı

$$\lambda\widetilde{A}=\left(\lambda\vec{a},\lambda\overrightarrow{a^*}\right)$$

dır (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 2.5.7 $\widetilde{A}=\left(\vec{a},\overrightarrow{a^*}\right)$, $\widetilde{B}=\left(\vec{b},\overrightarrow{b^*}\right)\in \mathrm{ID}^3$ için

$$\widetilde{A}=\widetilde{B}\Leftrightarrow \vec{a}=\vec{b} \text{ ve } \overrightarrow{a^*}=\overrightarrow{b^*}$$

dır (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 2.5.8 $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı, ID-Modül' ün elemanları $\left(\vec{a},\vec{0}\right)$ şeklinde olan bir alt cümlesine izomorftur (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.5.8 $\widetilde{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$, $\widetilde{B}=\vec{b}+\varepsilon\overrightarrow{b^*}\in \mathrm{ID}^3$ dual vektörlerinin **iç çarpımı**

$$f:\mathrm{ID}^3\times\mathrm{ID}^3\longrightarrow\mathrm{ID}$$

şeklinde bir dönüşümdür ve

$$\begin{aligned} f\left(\widetilde{A},\widetilde{B}\right)&=\left\langle\widetilde{A},\widetilde{B}\right\rangle \\ &=\left\langle\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*},\vec{b}+\varepsilon\overrightarrow{b^*}\right\rangle \\ &=\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle+\varepsilon\left[\left\langle\vec{a},\overrightarrow{b^*}\right\rangle+\left\langle\overrightarrow{a^*},\vec{b}\right\rangle\right] \end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.5.9 Bir $\widetilde{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}\in \mathrm{ID}^3$ dual vektörünün **normu**, $\vec{a}\neq\vec{0}$ olmak üzere

$$\left\|\widetilde{A}\right\|=\sqrt{\left\langle\widetilde{A},\widetilde{A}\right\rangle}=\left(\left\|\vec{a}\right\|,\frac{\left\langle\vec{a},\overrightarrow{a^*}\right\rangle}{\left\|\vec{a}\right\|}\right)$$

olarak tanımlanan bir dual sayıdır, burada

$$a=\left\|\vec{a}\right\| \text{ ve } a^*=\frac{\left\langle\vec{a},\overrightarrow{a^*}\right\rangle}{\left\|\vec{a}\right\|}$$

olmak üzere,

$$\left\|\widetilde{A}\right\|=a+\varepsilon a^*$$

olarak yazılabilir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.5.10 Normu $(1,0)$ reel birimine karşılık gelen dual vektöre **birim dual vektör** denir (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 2.5.9 $\vec{\tilde{A}} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*} = \left(\vec{a}, \vec{a^*}\right) \in \text{ID}^3$ dual vektörü, birim dual vektör ise,

$$\left\|\vec{a}\right\| = 1 \quad \text{ve} \quad \left\langle \vec{a}, \vec{a^*} \right\rangle = 0$$

dır (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 2.5.10 $\vec{\tilde{A}} = \left(\vec{a}, \vec{a^*}\right) \in \text{ID}^3$ olmak üzere

$$\vec{\tilde{U}} = \frac{\vec{\tilde{A}}}{\left\|\vec{\tilde{A}}\right\|}$$

bir birim dual vektördür (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.5.11 $\left\{\vec{\tilde{X}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x^*} : \vec{x}, \vec{x^*} \in \mathbb{R}^3, \left\|\vec{\tilde{X}}\right\| = (1,0)\right\}$ cümlesine ID-Modül' de **birim dual küre** adı verilir (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 2.5.11 $\vec{\tilde{A}} \neq \left(\vec{0}, \vec{a}\right) \in \text{ID}$ -Modül olmak üzere, ID -Modül' de denklemi

$$\left\|\vec{\tilde{A}}\right\| = (1,0)$$

olan birim dual kürenin dual noktaları, $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir (E. Study 1903).

2.6 E^n de Hareketler

Tanım 2.6.1 n-boyutlu V_1 ve V_2 iç çarpım uzayları ile birleşen Öklid uzayları, sırasıyla, E_1^n ve E_2^n olsun. Bir

$$f : E_1^n \longrightarrow E_2^n$$

afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in V_1$ için

$$\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

olacak şekilde bir

$$\psi : V_1 \longrightarrow V_2$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa f ye bir **izometri** denir (Hacısalihoğlu 1980a).

Tanım 2.6.2 n-boyutlu Öklid uzayı E^n olmak üzere

$$R : E^n \longrightarrow E^n$$

dönüşümü bir izometri ise f ye E^n de bir **katı hareket** denir. E^n nin bütün katı hareketlerinin cümlesi $R(n)$ ile gösterilir ve

$$R(n) = \left\{ R \middle| R : E^n \longrightarrow E^n, R \text{ izometri} \right\}$$

olup $R(n)$ cümlesi dönüşümlerin birleşimi işlemine göre bir grup'dur (Hacısalihoğlu 1980a).

Tanım 2.6.3 n-boyutlu Öklid uzayı E^n ve

$$R_0 : E^n \longrightarrow E^n$$

dönüşümü bir izometri olsun.

$$O \in E^n \text{ için } R_0(O) = O$$

olacak şekilde bir O noktası mevcut olsun. $x \neq 0$ olmak üzere $\forall x \in E^n$ için $x \longrightarrow R_0(x)$ biçiminde tanımlanan R_0 hareketine O etrafında E^n nin bir **dönme hareketi** denir (Hacısalihoğlu 1980a).

E^n de O etrafındaki bütün dönmelerin cümlesi $R_0(n)$, hareketlerin birleşimi (çarpımı) işlemine göre $R(n)$ in bir alt grubudur.

Teorem 2.6.1 n-boyutlu Öklid uzayı E^n ve $X = (x_1, ..., x_n), Y = (y_1, ..., y_n) \in E^n$ olmak üzere

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Öklid iç çarpımını koruyan ortogonal grup $O(n)$ ile $O=(0,...,0)$ noktasını sabit bırakan (dönme grubu) $R_0(n)$ ile eşlenebilir (Hacısalihoğlu 1980a).

Tanım 2.6.4 n-boyutlu Öklid uzayı E^n ve

$$T: E^n \longrightarrow E^n$$

dönüşümü bir izometri olsun. Eğer $\forall X=(x_1,...,x_n)\in E^n$ için

$$T(X)=(x_1+t_1,...,x_n+t_n),\quad t_i\in\mathbb{R},\ 1\le i\le n$$

oluyor ise T ye E^n deki bir **öteleme** denir (Hacısalihoğlu 1980a).

E^n deki bütün ötelemelerin cümlesi

$$T(n)=\left\{T \middle| T: E^n \longrightarrow E^n, T \text{ izometri}\right\}$$

ile gösterilir ve hareketlerin bileşimi işlemine göre bir Abel grubudur.

Teorem 2.6.2 $\forall R\in R(n)$ için E^{n+1} de R dönüşümünün matris formu

$$R=\begin{bmatrix} & & & c_1 \\ & a_{ij} & & \vdots \\ & & & c_n \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},\quad \left[a_{ij}\right]\in O(n),\quad 1\le i,j\le n$$

$(n+1)\times(n+1)$ tipinde reel ve regüler bir matristir (Hacısalihoğlu 1980a).

Teorem 2.6.2 ye göre, $R\in R(n)$ için

$$\begin{aligned} R: E^n &\longrightarrow E^n \\ x &\longrightarrow R(x)=y=ax+c \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Burada, $a\in O(n)$ ve $c\in T(n)$ dir. E^{n+1} de R dönüşümünün matris formu

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Burada ax, hareketin dönme kısmıdır.

Tanım 2.6.5 n-boyutlu Öklid uzayı E^n de bir izometri R olsun. E^n deki bir $\{x_1,...,x_n\}$ dik koordinat sistemine göre R nin matrisel formu,

$$\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a \in O(n), \quad c \in \mathbb{R}_1^n$$

dir. Eğer,

1. $\det a = 1$ ise R hareketine **direkt hareket**,
2. $\det a = -1$ ise R hareketine **karşıt hareket** denir

(Hacısalihoğlu 1980a).

Ayrıca $y = ax + c$ ile verilen hareketin parametresi t olmak üzere

$$y = ax \tag{2.6.1}$$

dönme kısmını ele alalım. Hareketli uzayın sabit x noktasının hız vektörü

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} \quad , \quad \dot{a} = \frac{da}{dt}$$

olmak üzere

$$\dot{y} = \dot{a}\, x \tag{2.6.2}$$

olur. $a \in O(n)$ olduğundan $a^{-1} = a^T$ olup (2.6.1) den

$$x = a^T y$$

olacağından (2.6.2) ifadesi

$$\dot{y} = \dot{a}\, a^T y$$

olur. Burada $\Omega = \dot{a}\, a^T$ olarak alınırsa

$$\dot{y} = \Omega y$$

yazılabilir. Burada Ω, bir anti-simetrik matris olup hareketin a ya karşılık gelen **Darboux matrisi** denir (Bottema ve Roth 1979).

Tanım 2.6.6 $\mathbb{R}_{n+1}^{n+1}$ de

$$SE(n) = \left\{ R : R = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a \in O(n), \det a = 1, c \in \mathbb{R}_1^n \right\}$$

şeklinde tanımlanan cümleye **Katı Cisimlerin Özel Ortogonal Matrislerin Cümlesi**, matrislerde çarpma işlemine göre oluşturduğu gruba **Katı Cisimlerin Özel Ortogonal Matris Lie Grubu** denir ve bu Lie grubuna karşılık gelen Lie cebiri

$$se(n) = \left\{ w \middle| w \epsilon \mathbb{R}_{n+1}^{n+1}, w^T = -w \right\}$$

şekilde tanımlanır (Karger ve Novak 1979).

2.7 3-Boyutlu Lorenz Uzayı

Tanım 2.7.1

$\mathbb{R}^3$ üzerinde

$$\langle , \rangle_L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \longrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

ile tanımlı $\langle , \rangle_L$ metrik tensörünü ele alalım. Bu durumda $\left(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_L\right)$ ikilisine 3-boyutlu Lorenz Uzayı adı verilir ve E_1^3 ile gösterilir (O'neill, 1983).

Tanım 2.7.2

V, sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere,

$$\langle \ , \ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

bilineer fonksiyonu $\forall v, w \in V$ için $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ özelliğini sağlıyor ise $\langle \ , \ \rangle$'ye V üzerinde bir **simetrik bilineer form** denir (O'neill 1983).

Tanım 2.7.3

V**,** vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\langle \ , \ \rangle$ olsun. Bu taktirde,

i-) $\forall v \in V$, $(v \neq 0)$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise $\langle \ , \ \rangle$ bilineer formuna pozitif tanımlı,

ii-) $\forall v \in V$, $(v \neq 0)$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise $\langle \ , \ \rangle$ bilineer formuna negatif tanımlı,

iii-) $\forall v \in V$, $(v \neq 0)$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise $\langle \ , \ \rangle$ bilineer formuna semi- pozitif tanımlı,

iv-) $\forall v \in V$, $(v \neq 0)$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise $\langle \ , \ \rangle$ bilineer formuna semi-negatif tanımlı,

v-) $\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ için $v = 0$ oluyorsa $\langle \ , \ \rangle$ bilineer formuna non-dejenere, $v \neq 0$ ise dejenere adı verilir (O'neill, 1983).

Tanım 2.7.4

$\mathbb{R}^3$ üzerinde Lorenz metriğinin tanımlanmasıyla meydana gelen $\{\mathbb{R}^3, \langle \ , \ \rangle\}$ ikilisine **3-boyutlu Lorenz uzayı** denir ve IL^3 İle gösterilir (O'neill 1983).

Tanım 2.7.5

$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3) \in IL^3$ olsun. Eğer

i-) $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle < 0$ ise $\vec{X}$ ' e time-like vektör,

ii-) $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle > 0$ ise $\vec{X}$ ' e space-like vektör,

iii-) $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle = 0$ ve $\vec{X} \neq \vec{0}$ ise $\vec{X}$ ' e null vektör adı verilir

(O'neill 1983).

Tanım 2.7.6

IL^3, 3-boyutlu Lorenz uzayı ve $\vec{X}, \vec{Y} \in IL^3$ olsun. $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = 0$ ise $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ vektörleri **Lorenz anlamında diktirler** denir (O'neill 1983).

Tanım 2.7.7

$\vec{X} \in IL^3$ için $\vec{X}$ ' in normu

$$\left\| \vec{X} \right\|_L = \sqrt{\left| \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle \right|}$$

olarak tanımlanır (O'neill 1983).

Tanım 2.7.8

$\vec{X} \in IL^3$ olmak üzere,

i-) $\left\| \vec{X} \right\|_L > 0$ dır,

ii-) $\left\|\vec{X}\right\|_L = 0 \Leftrightarrow \vec{X}$ bir null vektördür,

iii-) $\vec{X}$ bir time-like vektör ise $\left\|\vec{X}\right\|_L^2 = -\left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle$,

iv-) $\vec{X}$ bir space-like vektör ise $\left\|\vec{X}\right\|_L^2 = \left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle$ dir

(O'neill 1983).

Tanım 2.7.9

IL^3 Lorenz uzayında $A^{-1} = \varepsilon A^T \varepsilon$ eşitliğini sağlayan A matrisine **Lorenz anlamda ortogonal matris** denir. Burada ε işaret matrisidir, yani $\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir (O'neill 1983).

Tanım 2.7.10

$S^T = -\varepsilon S \varepsilon$ eşitliğini sağlayan S matrisine **Lorenz anlamda anti-simetrik matris** denir (O'neill 1983).

Tanım 2.7.11

IL^3 Lorenz uzayında iki vektör $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere

$$(v_3 w_2 - v_2 w_3, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

vektörüne v ve w nın **vektörel çarpımı** denir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\vec{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2} \delta_{i3})$$

olmak üzere

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \det \begin{bmatrix} -\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanır (O'neill 1983).

3. LİNEER VEKTÖR ALANLARI

Bu bölümde ilk önce; hareket, 1-parametreli hareket, homotetik hareket, 1-parametreli homotetik hareket kavramları verilmiştir. Daha sonra lineer vektör alanları verilerek spiral vektör alanları ve spiral vektör alanlarının integral eğrileri tanıtılmıştır. Bu integral eğrilerinin ani hareketler ve homotetik hareketler arasındaki ilişkisi verilmiştir. Spiral vektör alanlarının özel halinin helisel vektör alanları olduğu belirtilmiştir.

Tanım 3.1 E^n n-boyutlu Öklid uzayında bir sabit uzay H, hareketli uzay H_0 olmak üzere, H_0 ın H ye göre H_0 / H hareketi

$$\begin{aligned} y : E^n &\longrightarrow E^n \\ x &\longrightarrow y(x) = ax + c \end{aligned}$$

şeklindeki y izometrisi ile tanımlıdır ve bu hareketin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

olarak yazılabilir. Burada, $a \in SO(n)$ ve $c \in \mathbb{R}_1^n$ dir.

Tanım 3.2 E^n n-boyutlu Öklid uzayında $J \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $t \in J$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_t : E^n &\longrightarrow E^n \\ x &\longrightarrow f_t(x) = y(t) = a(t)x + c(t) \end{aligned}$$

ile tanımlı dönüşüme E^n de **bir parametreli hareket** denir ve bu hareketin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

dir. Burada, $a(t) \in SO(n)$ ve $c(t) \in \mathbb{R}_1^n$ dir.

Tanım 3.3 E^n n-boyutlu Öklid uzayında $h \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\begin{aligned} y : E^n &\longrightarrow E^n \\ x &\longrightarrow y(x) = (ha)x + c \end{aligned}$$

ile tanımlı dönüşüme E^n de bir **homotetik hareket** denir ve bu hareketin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ha & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

dir. Burada, $a \in SO(n)$ ve $c \in \mathbb{R}_1^n$ dir.

Tanım 3.4 E^n n-boyutlu Öklid uzayında $J \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $t \in J$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_t : E^n &\longrightarrow E^n \\ x &\longrightarrow f_t(x) = y(t) = h(t)a(t)x + c(t) \end{aligned}$$

ile tanımlı dönüşüme E^n de **bir parametreli homotetik hareket** denir ve bu hareketin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

dir. Burada, $h(t) \in \mathbb{R}^+$, $a(t) \in SO(n)$ ve $c(t) \in \mathbb{R}_1^n$ dir.

3.1 E^3 de Helisel Vektör Alanı

Bu bölümde 1-parametreli hareketlerin Lie grubu ve Lie cebirini inceleyerek helisel vektör alanını tanımlayacağız. Ayrıca aldığımız bir helisel vektör alanının integral eğrisini inceleyeceğiz

E^3 3-boyutlu Öklid uzayında $J \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $t \in J$ olmak üzere,

$$y(t) = a(t)x + c(t) \tag{3.5}$$

ile tanımlı E^3 de 1-parametreli hareketi alalım. Bu hareketin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A(t)} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada, $a(t) \in SO(3)$ ve $c(t) \in \mathbb{R}_1^3$ dir.

$A(t)$ formundaki 1-parametreli matrislerin cümlesi

$$SE(3) = \left\{ A(t) \middle| A(t) = \begin{bmatrix} a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a(t) \in SO(3), c(t) \in \mathbb{R}_1^3 \right\}$$

olup matrislerde çarpma işlemine göre bir Matris Lie grubunu oluşturur ve bu gruba karşılık gelen Lie cebirini $se(3)$ ile gösterirsek $A(t)=\begin{bmatrix} a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$ için

$$\begin{aligned} A^{-1}(t) &= \begin{bmatrix} a^{-1}(t) & -a^{-1}(t)c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a(t) \in SO(3) \\ &= \begin{bmatrix} a^{T}(t) & -a^{T}(t)c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\dot{A}(t) = \begin{bmatrix} \dot{a}(t) & \dot{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup

$$\begin{aligned} \dot{A}(t)A^{-1}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{a}(t)a^{T}(t) & -\dot{a}(t)a^{T}(t)c(t) + \dot{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Omega & \overline{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Burada $\Omega = \dot{a}(t)a^{T}(t)$ olup $\Omega^{T} = -\Omega$ olduğundan bir anti-simetrik matris ve $\overline{v} = \dot{c}(t) - \dot{a}(t)a^{T}(t)c(t)$ dir. Bu durumda, $se(3)$ Lie cebirini

$$se(3) = \left\{ \begin{bmatrix} \Omega & \overline{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \Omega \in \mathbb{R}^{3}_{3}, \Omega^{T} = -\Omega, \overline{v} \in \mathbb{R}^{3}_{1} \right\}$$

olarak yazabiliriz. Ayrıca $se(3)$ Lie cebirinin elemanları ile helisel vektör alanları birebir eşlenirler.

Tanım 3.1.1 $\mathbb{R}^{4}_{4}$ de

$$se(3) = \left\{ \begin{bmatrix} \Omega & \overline{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \Omega \in \mathbb{R}^{3}_{3}, \Omega^{T} = -\Omega, \overline{v} \in \mathbb{R}^{3}_{1} \right\}$$

ile tanımlı cümlesinin elemanlarının oluşturduğu lineer vektör alanına **helisel vektör alanı** denir.

Ani hareket altında bir noktanın yörüngesi, lineer vektör alanının integral eğrisidir.

$\begin{bmatrix} \Omega(t) & \overline{v}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3)$ matris kümesinde $t = t_0$ için $\Omega(t_0) = \Omega$ ve $\overline{v}(t_0) = \overline{v}$ olarak alırsak

$\begin{bmatrix} \Omega & \overline{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi yardımıyla lineer vektör alanını tanımlayabiliriz. Tanım 2.3.9 a göre

$A = \begin{bmatrix} \Omega & \overline{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $v = \mathbb{R}^3$ alınırsa X lineer vektör alanını

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ P &\to X(P) = AP \\ &= \begin{bmatrix} \Omega & \overline{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Omega P + \overline{v} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Şimdi bu lineer vektör alanının integral eğrisini $t = 0$ için $y(0) = P = x$ başlangıç şartı altında bulalım.

$$\overset{\bullet}{y} = \Omega y + \overline{v}$$

sabit katsayılı matris diferensiyel denkleminin $y(0) = P = x$ başlangıç koşulu altındaki çözümü

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\Omega t}x + \int_0^t e^{\Omega(t-s)}\overline{v}ds \\ &= e^{\Omega t}x - e^{\Omega t}\overline{v}\Omega^{-1}e^{-\Omega t} + e^{\Omega t}\overline{v}\Omega^{-1} \\ &= e^{\Omega t}x - \underbrace{(e^{\Omega t}\overline{v}e^{-\Omega t} + e^{\Omega t}\overline{v})}_{\lambda}\Omega^{-1} \\ &= e^{\Omega t}x - \lambda\Omega^{-1} \\ &= e^{\Omega t}x + \lambda\Omega \\ &= e^{\Omega t}x + S(t) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak x in yörüngesi olan $y(t)$ eğrisi bir helis belirtir. Çünkü x, Ω etrafında dönmüş ve Ω boyunca ötelenmiştir. Bu sonuçtan dolayı X vektör alanına **helisel vektör alanı** denir.

Helisel vektör alanları ile 1-parametreli hareketlerin Lie cebirinin elemanları eşleşebilir. Dolayısıyla bunlar yardımı ile 1-parametreli hareketleri elde ederiz. Bu 1-parametreli hareketlerin yörüngelerini şu teoremle verebiliriz.

Teorem 3.1.1 E^3 de bir lineer vektör alanı X, bir anti-simetrik matris $\Omega \in \mathbb{R}_3^3$ ve bir kolon matrisi $\overline{v} \in \mathbb{R}_1^3$ olsun. O halde X in E^3 de bir $\{O; u_1, u_2, u_3\}$ ortonormal çatısına göre matrisi

$$\begin{bmatrix} \Omega & \overline{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \Omega & \overline{v} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

1. $rank\begin{bmatrix} \Omega & \overline{v} \end{bmatrix} = 3$ ise X in integral eğrileri, ortak eksenli aynı parametreli, dairesel helis eğrileridir.
2. $rank\begin{bmatrix} \Omega & \overline{v} \end{bmatrix} = 2$ ise X in integral eğrileri, paralel düzlemlere dik olan bir eksen üzerinde bulunan çemberlerdir.
3. $rank\begin{bmatrix} \Omega & \overline{v} \end{bmatrix} = 1$ ise X in integral eğrileri paralel doğrulardır

(Abolfazl 1989).

İspat:

E^3 de bir lineer vektör alanı X, bir anti-simetrik matris $\Omega \in \mathbb{R}_3^3$ ve bir kolon matrisi $\overline{v} \in \mathbb{R}_1^3$ olsun. O halde X in E^3 de bir $\{O; u_1, u_2, u_3\}$ ortonormal çatısına göre matrisi

$$X = \begin{bmatrix} \Omega & \overline{v} \\ 0 & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 & a \\ \lambda & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

1. $rank\begin{bmatrix} \Omega & \overline{v} \end{bmatrix} = 3$ olmak üzere, X lineer vektör alanını $\forall P = (x, y, z) \in E^3$ için

$$\begin{bmatrix} X(P) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega & \overline{v} \\ 0 & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & a \\ -\lambda & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

yada

$$X(P) = (\lambda y + a, -\lambda x + b, c)$$

olarak yazılabilir. Diğer yandan, E^3 de

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow E^3 \\ \mathrm{t} &\longrightarrow \alpha(\mathrm{t}) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \end{aligned}$$

eğrisini ele alalım. α nın X lineer vektör alanının integral eğrisi olabilmesi için

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$$

diferensiyel denklemini sağlaması gerekir. Bu diferensiyel denkleminin $\forall \alpha(t) = P = (x, y, z) \in E^3$ için çözümünü $X(\mathrm{P}) = (\lambda y + a, -\lambda x + b, c)$ alarak aşağıdaki şekilde çözebiliriz.

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = \lambda \alpha_2 + a \\ \dfrac{d\alpha_2}{dt} = -\lambda \alpha_1 + b \\ \dfrac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_3 \end{cases}$$

diferensiyel denklem sistemidir. Bu denklem sistemini basitleştirmek amacıyla $\lambda = 1$ almamız genelliği bozmaz. Bu durumda X in integral eğrisi

$$\alpha(t) = (A \sin t - B \cos t + b, A \cos t + B \sin t - a, ct + d)$$

şeklinde elde edilir. Buradan, $\alpha(t)$ integral eğrileri $\forall A, B \in \mathbb{R}$ için ortak eksenli aynı parametreli, dairesel helis eğrileridir.

2. $rank\begin{bmatrix} \Omega & \overline{v} \end{bmatrix} = 2$ olduğunda $c = 0$ ve $\lambda \neq 0$ olmalıdır. Bu durumda X lineer vektör alanı

$$X(P) = (\lambda y + a, -\lambda x + b, 0)$$

yada X e karşılık gelen matris

$$\begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & a \\ -\lambda & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olmalıdır. Diğer yandan, E^3 de

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow E^3 \\ \mathrm{t} &\longrightarrow \alpha(\mathrm{t}) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \end{aligned}$$

eğrisini ele alalım. α nın X lineer vektör alanının integral eğrisi olabilmesi için

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$$

diferensiyel denklemini sağlaması gerekir. Bu diferensiyel denkleminin $\forall P = (x, y, z) \in E^3$ için $\alpha(t) = P$ ve $X(P) = (\lambda y + a, -\lambda x + b, 0)$ ise integral eğrisi

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(P)$$

diferensiyel denkleminin çözüm eğrisidir. Yani,

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = \lambda\alpha_2 + a \\ \dfrac{d\alpha_2}{dt} = -\lambda\alpha_1 + b \\ \dfrac{d\alpha_3}{dt} = 0 \end{cases}$$

diferensiyel denklem sistemidir. Bu denklem sistemini basitleştirmek amacıyla $\lambda = 1$ almamız genelliği bozmaz. Bu durumda X in integral eğrisi

$$\alpha(t) = (A\sin t - B\cos t + b, A\cos t + B\sin t - a, d)$$

şeklinde elde edilir. Buradan, $\alpha(t)$ integral eğrileri $\forall A, B \in \mathbb{R}$ için paralel düzlemlere dik olan bir eksen üzerinde bulunan çemberlerdir.

3. $rank\begin{bmatrix}\Omega & \overline{v}\end{bmatrix} = 1$ olduğunda $\lambda = 0$ olmalıdır. Bu durumda X lineer vektör alanı

$$X(P) = (a, b, c)$$

yada X e karşılık gelen matris

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olmalıdır. Diğer yandan, E^3 de

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow E^3 \\ \mathrm{t} &\longrightarrow \alpha(\mathrm{t}) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \end{aligned}$$

eğrisini ele alalım. α nın X lineer vektör alanının integral eğrisi olabilmesi için

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$$

diferensiyel denklemini sağlaması gerekir. Bu diferensiyel denkleminin $\forall P = (x, y, z) \in E^3$ için $\alpha(t) = P$ ve $X(P) = (a, b, c)$ ise integral eğrisi

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(P)$$

diferensiyel denkleminin çözüm eğrisidir. Yani,

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = a \\ \dfrac{d\alpha_2}{dt} = b \\ \dfrac{d\alpha_3}{dt} = 0 \end{cases}$$

diferensiyel denklem sistemidir. Böylece X in integral eğrisi

$$\alpha(t) = (at + d_1, bt + d_2, ct + d_3)$$

şeklinde elde edilir. Buradan, $\alpha(t)$ integral eğrileri paralel doğrulardır □

3.2 E^3 Öklid Uzayında Spiral Vektör Alanları

Bu bölümde bir parametreli homotetik hareketlerin Lie grubu ve Lie cebirini inceleyerek spiral vektör alanını tanımlayacağız. Ayrıca aldığımız bir spiral vektör alanının integral eğrisini inceleyeceğiz.

E^3 n-boyutlu Öklid uzayında $J \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $t \in J$ olmak üzere

$$f_t : E^3 \longrightarrow E^3$$
$$x \longrightarrow f_t(x) = y(t) = h(t)a(t)x + c(t) \tag{3.7}$$

ile tanımlı E^3 de bir parametreli homotetik hareketi ele alalım. Bu homotetik hareketin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B(t)} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada, $h(t) \in \mathbb{R}^+$, $a(t) \in SO(3)$ ve $c(t) \in \mathbb{R}_1^3$ dir.

$B(t)$ formundaki 1-parametreli matrislerin cümlesi

$$SD(3) = \left\{ B(t) : B(t) = \begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a(t) \epsilon SO(3), h(t) \epsilon \mathbb{R}^+, c(t) \epsilon \mathbb{R}_1^3 \right\}$$

olup matrislerde çarpma işlemine göre bir Matris Lie grubunu oluşturur ve bu gruba karşılık gelen Lie cebirini $sd(3)$ ile gösterirsek $B(t) = \begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SD(3)$ için

$$\begin{aligned} B^{-1}(t) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{h(t)} a^{-1}(t) & -\frac{1}{h(t)} a^{-1}(t)c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a \in SO(3) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{h(t)} a^{T}(t) & -\frac{1}{h(t)} a^{T}(t)c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\overset{\bullet}{B}(t) = \begin{bmatrix} \overset{\bullet}{h}(t)a(t) + h(t)\overset{\bullet}{a}(t) & \overset{\bullet}{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup

$$\overset{\bullet}{B}(t)B^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\overset{\bullet}{h}(t)}{h(t)} a(t)a^T + \overset{\bullet}{a}(t)a^T(t) & -\frac{\overset{\bullet}{h}(t)}{h(t)} a(t)a^T(t)c(t) - \overset{\bullet}{a}(t)a^T(t)c(t) + \overset{\bullet}{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\bullet}{B}(t)B^{-1}(t)=\begin{bmatrix}\dfrac{\overset{\bullet}{h}(t)}{h(t)}I_3+\overset{\bullet}{a}(t)a^T(t) & -\dfrac{\overset{\bullet}{h}(t)}{h(t)}c(t)-\overset{\bullet}{a}(t)a^T(t)c(t)+\overset{\bullet}{c}(t)\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\gamma(t)I_3+\Omega(t) & \overline{c}(t)\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

olarak elde ederiz. Burada $\gamma(t)=\dfrac{\overset{\bullet}{h}(t)}{h(t)}$, $\Omega=\overset{\bullet}{a}(t)a^T(t)$ olup 3×3 tipinde bir anti-simetrik matris ve $\overline{c}(t)=-\gamma(t)c(t)-\overset{\bullet}{a}(t)a^T(t)c(t)+\overset{\bullet}{c}(t)$ dir. Bu durumda, $sd(3)$ Lie cebirini

$$sd(3)=\left\{\begin{bmatrix}\gamma(t)I_3+\Omega(t) & \overline{c}(t)\\ 0 & 0\end{bmatrix}:\Omega\in\mathbb{R}^3_3,\Omega^T=-\Omega,\overline{c}\epsilon\mathbb{R}^3_1,\gamma\in\mathbb{R}\right\}$$

olarak yazabiliriz. Ayrıca $se(3)$ Lie cebirinin elemanları ile spiral vektör alanları birebir eşlenirler.

Tanım 3.2.1 $\mathbb{R}^4_4$ de

$$sd(3)=\left\{\begin{bmatrix}\gamma I_3+\Omega & \overline{c}\\ 0 & 0\end{bmatrix}:\Omega\in\mathbb{R}^3_3,\Omega^T=-\Omega,\overline{c}\epsilon\mathbb{R}^3_1,\gamma\in\mathbb{R}\right\}$$

ile tanımlı cümlesinin elemanlarının oluşturduğu lineer vektör alanına **spiral vektör alanı** denir.

Ani homotetik hareket altında bir noktanın yörüngesi, lineer vektör alanının integral eğrisidir.

$\begin{bmatrix}\gamma(t)I_3+\Omega(t) & \overline{c}(t)\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in sd(3)$ matris kümesinde $t=t_0$ için $\gamma(t_0)I_3+\Omega(t_0)=D$ ve $\overline{c}(t_0)=\overline{c}$ olarak alırsak $\begin{bmatrix}D & \overline{c}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ matrisi yardımıyla lineer vektör alanını tanımlayabiliriz. Tanım 2.3.9 a göre $A=\begin{bmatrix}D & \overline{c}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ ve $v=\mathbb{R}^3$ alınırsa Y lineer vektör alanını

$$
\begin{aligned}
Y : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\
Q &\to Y(Q) = AQ \\
&= \begin{bmatrix} D & \overline{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DQ + \overline{c} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

şeklinde ifade edebiliriz. Şimdi bu lineer vektör alanının integral eğrisini $t = 0$ için $y(0) = Q = x$ başlangıç şartı altında bulalım.

$$\dot{y} = Dy + \overline{c}$$

sabit katsayılı matris diferensiyel denkleminin $y(0) = Q = x$ başlangıç koşulu altındaki çözümü

$$
\begin{aligned}
y(t) &= e^{Dt}x + \int_0^t e^{D(t-s)}\overline{c}ds \\
&= e^{Dt}x + e^{Dt}D^{-1}\overline{c} - e^{Dt}D^{-1}e^{-Dt}\overline{c} \\
&= e^{Dt}x + K(t)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

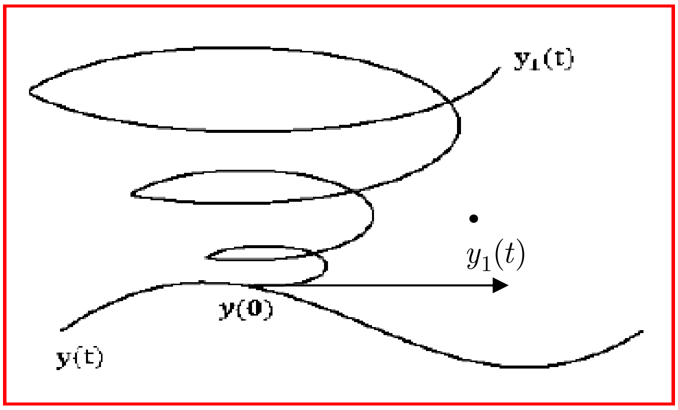
$$
\begin{aligned}
e^{Dt} &= e^{\begin{bmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(t) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(t) \end{bmatrix}}.e^{\Omega t} \\
&= e^{\gamma(t)}I_3.\left[e^{\Omega t}\right]
\end{aligned}
$$

olduğundan $y(t) = e^{Dt}x + K(t)$ ifadesinin $y(t) = \left[h(t)a(t)\right]x + K(t)$ şeklinde bir homotetik hareket belirttiğini söyleyebiliriz. Sonuç olarak x in yörüngesi olan $y(t)$ eğrisi bir spiral belirtir. Bu sonuçtan dolayı X vektör alanına **spiral vektör alanı** denir.

Ayrıca $\overline{v} = \dot{c} - \dot{a}\,a^T c$ ve $\overline{c} = -\gamma c - \dot{a}\,a^T c + \dot{c}$ olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$
\begin{aligned}
y(t) &= e^{Dt}x + e^{Dt}D^{-1}\overline{c} - e^{Dt}D^{-1}e^{-Dt}\overline{c} \\
y(t) &= e^{(\gamma I_3 + \Omega)t}x + e^{(\gamma I_3 + \Omega)t}(\gamma I_3 + \Omega)^{-1}\overline{c} - e^{(\gamma I_3 + \Omega)t}(\gamma I_3 + \Omega)^{-1}e^{-(\gamma I_3 + \Omega)t}
\end{aligned}
$$

ifadesinde $\gamma = 0$ alırsak $y(t) = e^{\Omega t}x - e^{\Omega t}\overline{v}\Omega^{-1}e^{-\Omega t} + e^{\Omega t}\overline{v}\Omega^{-1}$ ifadesini elde ederiz ki bu ifade (3.6) den dolayı $y(t)$ eğrisinin bir helis eğrisi olduğunu söyler. Bu durumda spiral vektör alanları helisel vektör alanlarının bir genel halidir diyebiliriz.



Şekil 3.1 Ani Homotetik Hareket

Spiral vektör alanları ile 1-parametreli homotetik hareketin Lie cebirinin elemanları eşleşebilir. Dolayısıyla bunlar yardımı ile 1-parametreli homotetik hareketleri elde ederiz. Bu durumda 1-parametreli homotetik hareketlerin yörüngelerini aşağıdaki teoremle verebiliriz.

Teorem 3.2.1 E^3 de bir lineer vektör alanı Y, bir anti-simetrik matris $\Omega \in \mathbb{R}_3^3$ ve bir kolon matrisi $\overline{c} \in \mathbb{R}_1^3$ olsun. O halde Y nin E^3 de bir $\{O; u_1, u_2, u_3\}$ ortonormal çatısına göre matrisi

$$\begin{bmatrix} \gamma I_3 + \Omega & \overline{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \gamma I_3 + \Omega & \overline{c} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

1. $\gamma = 0$ ise, bu durumda hareket bir katı cisim hareketidir.

i. $rank\begin{bmatrix} \gamma I_3 + \Omega & \overline{c} \end{bmatrix} = 3$ ise Y nin integral eğrileri, ortak eksenli aynı parametreli, helis eğrileridir.

ii. $rank\begin{bmatrix} \gamma I_3 + \Omega & \overline{c} \end{bmatrix} = 2$ ise Y nin integral eğrileri, paralel düzlemlerde kalan ve merkezleri bu paralel düzlemlere dik olan bir eksen üzerinde bulunan çemberlerdir.

iii. $rank\begin{bmatrix} \gamma I_3 + \Omega & \overline{c} \end{bmatrix} = 1$ ise, Y nin integral eğrileri, paralel doğrulardır (Karger, Novak).

2. $\gamma \neq 0$ ve $rank\begin{bmatrix} \gamma I_3 + \Omega & \overline{c} \end{bmatrix} = 3$ ise integral eğrileri spiral eğrilerdir.

Burada, $h(t) \in \mathbb{R}^+$, $\frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = \gamma(t)$ ve $\Omega = \dot{a}\, a^T$ dır.

Örnek 3.2.1 E^3de bir lineer vektör alanı Y, bir anti-simetrik matris $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_3^3$, bir kolon matrisi $\overline{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_1^3$, $h = e^t$ ve $\frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = \gamma = 1$

olmak üzere,

$$Y = \begin{bmatrix} \gamma I_3 + \Omega & \overline{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

$$e^{tY} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tY)^n}{n!} = I + tY + \frac{t^2}{2!}Y^2 + \frac{t^3}{3!}Y^3 + \frac{t^4}{4!}Y^4$$

olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned} e^{tY} &= \begin{bmatrix} 1 + t - \frac{2t^3}{3!} - \frac{4t^4}{4!} + \ldots & -t - \frac{2t^2}{2!} - \frac{2t^3}{3!} - \ldots & 0 & 0 \\ t + \frac{2t^3}{2!} + \frac{2t^3}{3!} + \ldots & 1 + t - \frac{2t^3}{3!} - \frac{4t^4}{4!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots & t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^t(e^{-it} + e^{it}) & \frac{1}{2}ie^t(e^{it} - e^{-it}) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}ie^t(e^{it} - e^{-it}) & \frac{1}{2}e^t(e^{-it} + e^{it}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & e^t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t \cos t & -e^t \sin t & 0 & 0 \\ e^t \sin t & e^t \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & e^t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[e^t \left| \begin{array}{ccc|c} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e^t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right. \right] \end{aligned}$$

olarak bulunur. e^{tY} ile 1-parametreli homotetik hareket tanımlanabilir. Bu harekette bir noktanın yörüngesi spiral eğri belirtir.

3.3 E^n Öklid Uzayında Spiral Vektör Alanları

Bu bölümde ilk önce E^n Öklid uzayında bir parametreli homotetik hareketlerin Lie grubu ve Lie cebirini inceleyerek spiral vektör alanını tanımlayacağız. Ayrıca aldığımız bir spiral vektör alanının integral eğrisini inceleyeceğiz.

E^n n-boyutlu Öklid uzay, $J \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $t \in J$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_t : E^n &\longrightarrow E^n \\ x &\longrightarrow f_t(x) = y(t) = h(t)a(t)x + c(t) \end{aligned} \tag{3.8}$$

ile tanımlı E^n de bir parametreli homotetik hareketi ele alalım. Bu homotetik hareketin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B(t)} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada, $h(t) \in \mathbb{R}^+$, $a(t) \in SO(n)$ ve $c(t) \in \mathbb{R}_1^n$ dir.

$B(t)$ formundaki 1-parametreli matrislerin cümlesi

$$SD(n) = \left\{ B(t) : B(t) = \begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a(t) \in SO(n), h(t) \in \mathbb{R}^+, c(t) \in \mathbb{R}_1^n \right\}$$

olup matrislerde çarpma işlemine göre bir Matris Lie grubunu oluşturur ve bu gruba karşılık gelen Lie cebirini $sd(n)$ ile gösterirsek $B(t) = \begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SD(n)$ için

$$\begin{aligned} B^{-1}(t) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{h(t)} a^{-1}(t) & -\frac{1}{h(t)} a^{-1}(t)c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a \in SO(n) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{h(t)} a^T(t) & -\frac{1}{h(t)} a^T(t)c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\dot{B}(t) = \begin{bmatrix} \dot{h}(t)a(t) + h(t)\dot{a}(t) & \dot{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup

$$\overset{\bullet}{B}(t)B^{-1}(t)=\begin{bmatrix}\frac{\overset{\bullet}{h}(t)}{h(t)}a(t)a^{T}+\overset{\bullet}{a}(t)a^{T}(t) & -\frac{\overset{\bullet}{h}(t)}{h(t)}a(t)a^{T}c(t)-\overset{\bullet}{a}(t)a^{T}(t)c(t)+\overset{\bullet}{c}(t)\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\overset{\bullet}{h}(t)}{h(t)}I_{n}+\overset{\bullet}{a}(t)a^{T}(t) & -\frac{\overset{\bullet}{h}(t)}{h(t)}c(t)-\overset{\bullet}{a}(t)a^{T}(t)c(t)+\overset{\bullet}{c}(t)\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\gamma(t)I_{n}+\Omega(t) & \overline{c}(t)\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

olarak elde ederiz. Burada $\gamma(t)=\dfrac{\overset{\bullet}{h}(t)}{h(t)}$, $\Omega=\overset{\bullet}{a}(t)a^{T}(t)$ olup $n\times n$ tipinde bir anti-simetrik matris ve $\overline{c}(t)=-\gamma(t)c(t)-\overset{\bullet}{a}(t)a^{T}(t)c(t)+\overset{\bullet}{c}(t)$ dir. Bu durumda, $sd(n)$ Lie cebirini

$$sd(n)=\left\{\begin{bmatrix}\gamma(t)I_{n}+\Omega(t) & \overline{c}(t)\\ 0 & 0\end{bmatrix}:\Omega\in\mathbb{R}_{n}^{n},\Omega^{T}=-\Omega,\overline{c}\epsilon\mathbb{R}_{1}^{n},\gamma\in\mathbb{R}\right\}$$

olarak yazabiliriz. Ayrıca $sd(n)$ Lie cebirinin elemanları ile spiral vektör alanları birebir eşlenirler.

Tanım 3.3.1 $\mathbb{R}_{n+1}^{n+1}$ de

$$sd(n)=\left\{\begin{bmatrix}\gamma I_{n}+\Omega & \overline{c}\\ 0 & 0\end{bmatrix}:\Omega\in\mathbb{R}_{n}^{n},\Omega^{T}=-\Omega,\overline{c}\epsilon\mathbb{R}_{1}^{n},\gamma\in\mathbb{R}\right\}$$

ile tanımlı cümlesinin elemanlarının oluşturduğu lineer vektör alanına **spiral vektör alanı** denir.

Ani homotetik hareket altında bir noktanın yörüngesi, lineer vektör alanının integral eğrisidir.

$\begin{bmatrix}\gamma(t)I_{n}+\Omega(t) & \overline{c}(t)\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in sd(n)$ matris kümesinde $t=t_0$ için $\gamma(t_0)I_n+\Omega(t_0)=D$ ve $\overline{c}(t_0)=\overline{c}$ olarak alırsak $\begin{bmatrix}D & \overline{c}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ matrisi yardımıyla lineer vektör alanını tanımlayabiliriz. Tanım 2.3.9 a göre $A=\begin{bmatrix} D & \overline{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $v=\mathbb{R}^n$ alınırsa Y lineer vektör alanını

$$\begin{aligned} Y:\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ Q &\to Y(Q)=AQ \\ &=\begin{bmatrix} D & \overline{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} DQ+\overline{c} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Şimdi bu lineer vektör alanının integral eğrisini $t=0$ için $y(0)=Q=x$ başlangıç şartı altında bulalım.

$$\dot{y}=Dy+\overline{c}$$

sabit katsayılı matris diferensiyel denkleminin $y(0)=Q=x$ başlangıç koşulu altındaki çözümü

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{Dt}x+\int_0^t e^{D(t-s)}\overline{c}ds \\ &= e^{Dt}x+e^{Dt}D^{-1}\overline{c}-e^{Dt}D^{-1}e^{-Dt}\overline{c} \\ &= e^{Dt}x+K(t) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} e^{Dt} &= e^{\begin{bmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(t) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(t) \end{bmatrix}}.e^{\Omega t} \\ &= e^{\gamma(t)}I_n.\left[e^{\Omega t}\right] \end{aligned}$$

olduğundan $y(t)=e^{Dt}x+K(t)$ ifadesinin $y(t)=\left[h(t)a(t)\right]x+K(t)$ şeklinde bir homotetik hareket belirttiğini söyleyebiliriz. Sonuç olarak x in yörüngesi olan $y(t)$ eğrisi bir spiral belirtir. Bu sonuçtan dolayı X vektör alanına **spiral vektör alanı** denir.

Ayrıca $\overline{v}=\dot{c}-\dot{a}\,a^Tc$ ve $\overline{c}=-\gamma c-\dot{a}\,a^Tc+\dot{c}$ olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{Dt}x+e^{Dt}D^{-1}\overline{c}-e^{Dt}D^{-1}e^{-Dt}\overline{c} \\ y(t) &= e^{(\gamma I_n+\Omega)t}x+e^{(\gamma I_n+\Omega)t}(\gamma I_n+\Omega)^{-1}\overline{c}-e^{(\gamma I_n+\Omega)t}(\gamma I_n+\Omega)^{-1}e^{-(\gamma I_n+\Omega)t} \end{aligned}$$

ifadesinde $\gamma=0$ alırsak $y(t)=e^{\Omega t}x-e^{\Omega t}\overline{v}\Omega^{-1}e^{-\Omega t}+e^{\Omega t}\overline{v}\Omega^{-1}$ ifadesini elde ederiz ki bu ifade (3.6) den dolayı $y(t)$ eğrisinin bir helis eğrisi olduğunu söyler. Bu durumda spiral vektör alanları helisel vektör alanlarının bir genel halidir diyebiliriz.

Spiral vektör alanları ile 1-parametreli homotetik hareketin Lie cebirinin elemanları eşleşebilir. Dolayısıyla bunlar yardımı ile 1-parametreli homotetik hareketleri elde ederiz. Bu 1-parametreli homotetik hareketlerin yörüngelerini aşağıdaki teoremle verebiliriz.

Teorem 3.3.1 E^n de bir lineer vektör alanı Y, bir anti-simetrik matris $\Omega \in \mathbb{R}_n^n$ ve bir kolon matrisi $\overline{c} \in \mathbb{R}_1^n$ olsun. O halde Y in E^n de bir $\{O; u_1, u_2, ..., u_n\}$ ortonormal çatısına göre matrisi $Y = \begin{bmatrix} \gamma I_n + \Omega & \overline{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere $\gamma \neq 0$ ve $rank\begin{bmatrix} \gamma I_n + \Omega & \overline{c} \end{bmatrix} = n$ ise Y nin integral eğrileri spiral eğrilerdir.

Burada, $a(t) \in SO(n)$, $h(t) \in \mathbb{R}^+$, $c(t) \in \mathbb{R}_1^n$, $\overline{c}(t) = \dot{c}(t) - \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} c(t) - \dot{a}(t) a^T(t) c(t)$,

$\gamma(t) = \frac{\dot{h}(t)}{h(t)}$ ve $\Omega(t) = \dot{a}(t) a^T(t)$ dir.

4. LORENZ UZAYINDA LİNEER VEKTÖR ALANLARI

Bu bölümde; Lorenz uzayı için, 1-parametreli hareket ve 1-parametreli homotetik hareket kavramları verilmiştir. Lorenz uzayında ani homotetik hareketlerin hız vektörleri incelenmiştir. Daha sonra lineer vektör alanları verilerek Lorenz uzayında spiral vektör alanları ve spiral vektör alanlarının integral eğrileri tanıtılmıştır. Bu integral eğrilerinin ani hareketler ile homotetik hareketler arasındaki ilişkisi verilmiştir.

4.1 E_1^3 Lorenz Uzayında Helisel Vektör Alanları

Bu bölümde E_1^3 Lorenz uzayında bir parametreli hareketlerin Lie grubu ve Lie cebirini inceleyerek helisel vektör alanını tanımlayacağız. Ayrıca aldığımız bir helisel vektör alanının integral eğrisini inceleyeceğiz.

Tanım 4.1.1 $\mathbb{R}^3$ üzerinde

$$\langle , \rangle_L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \longrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

ile tanımlı $\langle , \rangle_L$ metrik tensörünü ele alalım. Bu durumda $\left(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_L\right)$ ikilisine 3-boyutlu Lorenz Uzayı adı verilir ve E_1^3 ile gösterilir.

Tanım 4.1.2 E_1^3, 3-boyutlu Lorenz uzayı, $J \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $t \in J$ olmak üzere

$$f_t : E_1^3 \longrightarrow E_1^3$$

$$x \longrightarrow f_t(x) = y(t) = a(t)x + c(t) \tag{4.1}$$

ile tanımlı dönüşümüne E_1^3 Lorenz uzayında **1-parametreli hareket** denir ve bu hareketin matris gösterimi**,**

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A(t)} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada $c(t) \in \mathbb{R}_1^3$ ve $a(t) \in SO(3,1)$ dir. Ayrıca, $a(t) \in SO(3,1)$ olduğundan

$\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $a^T = \varepsilon a^{-1}\varepsilon$ dir.

$A(t)$ formundaki 1-parametreli matrislerin cümlesi

$$SE(3,1) = \left\{ A(t) \middle| A(t) = \begin{bmatrix} a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a(t) \in SO(3,1), c(t) \in \mathbb{R}_1^3 \right\}$$

olup matrislerde çarpma işlemine göre bir Matris Lie grubunu oluşturur ve bu gruba karşılık gelen Lie cebirini $se(3,1)$ ile gösterirsek $A(t) = \begin{bmatrix} a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3,1)$ için

$$A^{-1}(t) = \begin{bmatrix} a^{-1}(t) & -a^{-1}(t)c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\dot{A}(t) = \begin{bmatrix} \dot{a}(t) & \dot{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup

$$\begin{aligned} \dot{A}(t)A^{-1}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{a}(t)a^{-1}(t) & \dot{c}(t) - \dot{a}(t)a^{-1}(t)c(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C & \overline{u} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Burada $C = \dot{a}(t)a^{-1}(t)$ olup Lorenz anlamında bir anti-simetrik matris ve $\overline{u} = \dot{c}(t) - \dot{a}(t)a^{-1}(t)c(t)$ dir. Bu durumda, $se(3,1)$ Lie cebirini

$$se(3,1) = \left\{ \begin{bmatrix} C & \overline{u} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : C^T = -\varepsilon C \varepsilon, \overline{u} \in \mathbb{R}_1^3 \right\}$$

olarak yazabiliriz. Ayrıca $se(3,1)$ Lie cebirinin elemanları ile helisel vektör alanları birebir eşlenirler.

Tanım 4.1.3

$$se(3,1) = \left\{ \begin{bmatrix} C & \overline{u} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : C^T = -\varepsilon C \varepsilon, \overline{u} \in \mathbb{R}_1^3 \right\}$$

ile tanımlı cümlesinin elemanlarının oluşturduğu lineer vektör alanına **helisel vektör alanı** denir.

E_1^3 Lorenz uzayında bir parametreli ani hareket altında bir noktanın yörüngesi, lineer vektör alanının integral eğrisidir.

$\begin{bmatrix} C(t) & \overline{u}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3,1)$ matris kümesinde $t = t_0$ için $C(t_0) = C$ ve $\overline{u}(t_0) = \overline{u}$ olarak alırsak $\begin{bmatrix} C & \overline{u} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi yardımıyla lineer vektör alanını tanımlayabiliriz. Tanım 2.3.9 a göre $A = \begin{bmatrix} C & \overline{u} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $v = E_1^3$ alınırsa X lineer vektör alanını

$$\begin{aligned} X : E_1^3 &\longrightarrow E_1^3 \\ P &\to X(P) = AP \\ &= \begin{bmatrix} C & \overline{u} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CP + \overline{u} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Şimdi bu lineer vektör alanının integral eğrisini $t = 0$ için $y(0) = P = x$ başlangıç şartı altında bulalım.

$$\dot{y} = Cy + \overline{u}$$

sabit katsayılı matris diferensiyel denkleminin $y(0) = P = x$ başlangıç koşulu altındaki çözümü

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{Ct}x + \int_0^t e^{C(t-s)}\overline{u}ds \\ &= e^{Ct}x - e^{Ct}\overline{u}C^{-1}e^{-Ct} + e^{Ct}\overline{u}C^{-1} \\ &= e^{Ct}x - \underbrace{(e^{Ct}\overline{u}e^{-Ct} - e^{Ct}\overline{u})}_{\lambda}C^{-1} \\ &= e^{Ct}x + \lambda C \\ &= e^{Ct}x + S(t) \end{aligned} \qquad (4.2)$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak x in yörüngesi olan $y(t)$ eğrisi bir helis belirtir. Çünkü x , C etrafında dönmüş ve C boyunca ötelenmiştir. Bu sonuçtan dolayı X vektör alanına **helisel vektör alanı** denir.

Helisel vektör alanları ile 1-parametreli hareketlerin Lie cebirinini elemanları eşleşebilir. Dolayısıyla bunlar yardımı ile 1-parametreli (ani) hareketleri elde ederiz.

4.2 E_1^3 Lorenz Uzayında Spiral Vektör Alanları ve İntegral Eğrileri

Bu bölümde E_1^3 Lorenz uzayında 1-parametreli homotetik hareketlerin Lie grubu ve Lie cebirini inceleyerek spiral vektör alanını tanımlayacağız. Ayrıca aldığımız bir spiral vektör alanının integral eğrisini inceleyeceğiz.

Tanım 4.2.1 E_1^3, 3-boyutlu Lorenz uzayında $J \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $t \in J$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_t : E_1^3 &\longrightarrow E_1^3 \\ x &\longrightarrow f_t(x) = y(t) = h(t)a(t)x + c(t) \end{aligned} \tag{4.3}$$

ile tanımlı dönüşüme E_1^3 Lorenz uzayında **1-parametreli homotetik hareket** denir ve bu hareketin matris gösterimi,

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B(t)} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada $c(t) \in \mathbb{R}_1^3$, $h(t) \in \mathbb{R}^+$ ve $a(t) \in SO(3,1)$ dir. Ayrıca, $a(t) \in SO(3,1)$ olduğundan $\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $a^T = \varepsilon a^{-1} \varepsilon$ dir.

$B(t)$ formundaki 1-parametreli matrislerin cümlesi

$$SD(3,1)=\left\{B(t):B(t)=\begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a(t)\in SO(3,1), c(t)\in \mathbb{R}_1^3, h\in \mathbb{R}^+\right\}$$

olup matrislerde çarpma işlemine göre bir Matris Lie grubunu oluşturur ve bu gruba karşılık gelen Lie cebirini $sd(3,1)$ ile gösterirsek $B(t)=\begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\in SD(3,1)$ için

$$B^{-1}(t)=\begin{bmatrix} \frac{1}{h(t)}a^{-1}(t) & -\frac{1}{h(t)}a^{-1}(t)c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\dot{B}(t)=\begin{bmatrix} \dot{h}(t)a(t)+h(t)\dot{a}(t) & \dot{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\dot{B}(t)B^{-1}(t)&=\begin{bmatrix} \dfrac{\dot{h}(t)}{h(t)}+\dot{a}(t)a^{-1}(t) & -\dfrac{\dot{h}(t)}{h(t)}c(t)-\dot{a}(t)a^{-1}(t)c(t)+\dot{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} \gamma(t)I_3+C(t) & \overline{r}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} W(t) & \overline{r}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\\ &\cong\begin{bmatrix} W & \overline{r} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\gamma(t)=\dfrac{\dot{h}(t)}{h(t)}$, $\overline{r}(t)=-\gamma(t)c(t)-\dot{a}(t)a^{-1}(t)c(t)+\dot{c}(t)$ ve $C=\dot{a}(t)a^{-1}(t)$ olup Lorenz anlamında bir anti-simetrik matrisdir. Bu durumda, $sd(3,1)$ Lie cebirini

$$sd(3,1)=\left\{\begin{bmatrix} W & \overline{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}:\gamma I_3+C=W\in\mathbb{R}_3^3, C^T=-\varepsilon C\varepsilon,, \overline{r}\epsilon\mathbb{R}_1^3, \gamma\in\mathbb{R}\right\}$$

olarak yazabiliriz. Ayrıca $sd(3,1)$ Lie cebirinin elemanları ile spiral vektör alanları birebir eşlenirler.

Tanım 4.2.2

$$sd(3,1) = \left\{ \begin{bmatrix} W & \overline{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \gamma I_3 + C = W \in \mathbb{R}_3^3, C^T = -\varepsilon C \varepsilon,, \overline{r} \epsilon \mathbb{R}_1^3, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

ile tanımlı cümlesinin elemanlarının oluşturduğu lineer vektör alanına **spiral vektör alanı** denir.

E_1^3 Lorenz uzayında bir parametreli ani homotetik hareket altında bir noktanın yörüngesi, lineer vektör alanının integral eğrisidir.

$\begin{bmatrix} W(t) & \overline{r}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in sd(3,1)$ matris kümesinde $t = t_0$ için $W(t_0) = W$ ve $\overline{r}(t_0) = \overline{r}$ olarak alırsak $\begin{bmatrix} W & \overline{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi yardımıyla lineer vektör alanını tanımlayabiliriz. Tanım 2.3.9 a göre $A = \begin{bmatrix} W & \overline{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $v = E_1^3$ alınırsa Y lineer vektör alanını

$$\begin{aligned} Y : E_1^3 &\to E_1^3 \\ Q &\to Y(Q) = AQ \\ &= \begin{bmatrix} W & \overline{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} WQ + \overline{r} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Şimdi bu lineer vektör alanının integral eğrisini $t = 0$ için $y(0) = Q = x$ başlangıç şartı altında bulalım.

$$\dot{y} = Wy + \overline{r}$$

sabit katsayılı matris diferensiyel denkleminin $y(0) = Q = x$ başlangıç koşulu altındaki çözümü

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{Wt}x + \int_0^t e^{W(t-s)}\overline{r}ds \\ &= e^{Wt}x + e^{Wt}W^{-1}\overline{r} - e^{Wt}W^{-1}e^{-Wt}\overline{r} \\ &= e^{Wt}x + K(t) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

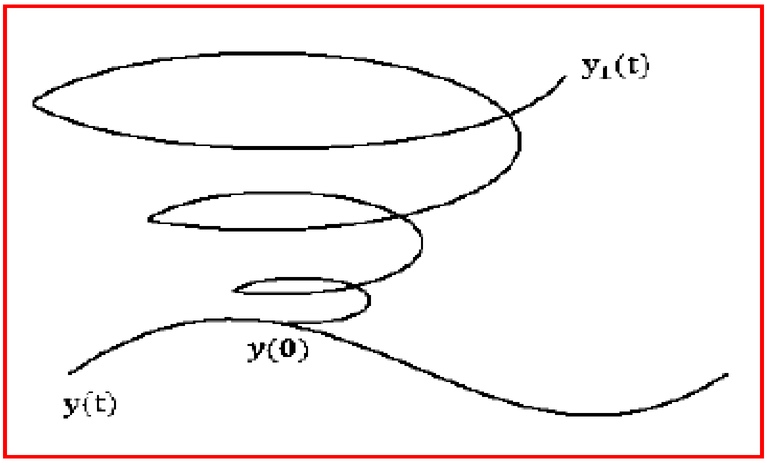
$$e^{Wt}=e^{\begin{bmatrix}\gamma(t) & 0 & 0\\ 0 & \gamma(t) & 0\\ 0 & 0 & \gamma(t)\end{bmatrix}}.e^{Wt}$$
$$=e^{\gamma(t)}I_3.\left[e^{Wt}\right]$$

olduğundan $y(t)=e^{Wt}x+K(t)$ ifadesinin $y(t)=\left[h(t)a(t)\right]x+K(t)$ şeklinde bir homotetik hareket belirttiğini söyleyebiliriz. Sonuç olarak x in yörüngesi olan $y(t)$ eğrisi bir spiral belirtir. Bu sonuçtan dolayı X vektör alanına **spiral vektör alanı** denir.

Ayrıca $\overline{u}=\dot{c}(t)-\dot{a}(t)a^{-1}(t)c(t)$ ve $\overline{r}(t)=-\gamma(t)c(t)-\dot{a}(t)a^{-1}(t)c(t)+\dot{c}(t)$ olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{Wt}x+e^{Wt}W^{-1}\overline{r}-e^{Wt}W^{-1}e^{-Wt}\overline{r} \\ &= e^{(\gamma I_3+C)t}x+e^{(\gamma I_3+C)t}(\gamma I_3+C)^{-1}\overline{r}-e^{(\gamma I_3+C)t}(\gamma I_3+C)^{-1}e^{-(\gamma I_3+C)t}\overline{r} \end{aligned}$$

İfadesinde $\gamma=0$ alırsak $y(t)=e^{Ct}x-e^{Ct}\overline{u}C^{-1}e^{-Ct}+e^{Ct}\overline{u}C^{-1}$ ifadesini elde ederiz ki buda bize (4.2) den dolayı elde edilen $y(t)$ eğrisinin Lorenz uzayında bir helisel vektör alanı olduğunu gösterir. Bu durumda söyleyebiliriz ki spiral vektör alanları helisel vektör alanlarının genel bir halidir.



Şekil 4.1 Lorenz Uzayında Ani Homotetik Hareket

Spiral vektör alanları ile 1-parametreli homotetik hareketin Lie cebirinin elemanları eşleşebilir. Dolayısıyla bunlar yardımı ile 1-parametreli homotetik hareketleri elde ederiz. Bu durumda 1-parametreli homotetik hareketlerin yörüngelerini aşağıdaki teoremle verebiliriz.

Teorem 4.2.1 E_1^3 de bir lineer vektör alanı Y, Lorenz anlamında bir anti-simetrik matris $C \in \mathbb{R}_3^3$ ve bir kolon matrisi $\overline{r} \in \mathbb{R}_1^3$ olsun. O halde Y in E_1^3 de bir $\{O; u_1, u_2, u_3\}$ ortonormal çatısına göre matrisi

$$Y = \begin{bmatrix} \gamma I_3 + C & \overline{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & \overline{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

1. $\gamma = 0$ ise, bu durumda hareket bir katı cisim hareketidir;

i. $rank\begin{bmatrix} W & \overline{r} \end{bmatrix} = 3$ ise Y nin integral eğrileri, ortak eksenli aynı parametreli, Lorenzian helis eğrileridir,

ii. $rank\begin{bmatrix} W & \overline{r} \end{bmatrix} = 2$ ise Y nin integral eğrileri, paralel düzlemlerde kalan ve merkezleri bu paralel düzlemlere dik olan bir eksen üzerinde bulunan Lorenzian çemberlerdir,

iii. $rank\begin{bmatrix} W & \overline{r} \end{bmatrix} = 1$ ise, Y nin integral eğrileri, Lorenzian paralel doğrulardır (Zafer Ünal 2007).

2. $\gamma \neq 0$ ve $rank\begin{bmatrix} W & \overline{r} \end{bmatrix} = 3$ ise integral eğrileri spiral eğrilerdir.

Burada, $h(t) \in \mathbb{R}^+$ ve $\frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = \gamma(t)$ dır.

4.3 E_1^n Lorenz Uzayında Spiral Vektör Alanları ve İntegral Eğrileri

Bu bölümde E_1^n Lorenz uzayında uzayında 1-parametreli homotetik hareketlerin Lie grubu ve Lie cebirini inceleyerek spiral vektör alanını tanımlayacağız. Ayrıca aldığımız bir spiral vektör alanının integral eğrisini inceleyeceğiz.

Tanım 4.3.1 E_1^n, n-boyutlu Lorenz uzayında $J \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $t \in J$ olmak üzere

$$f_t : E_1^n \longrightarrow E_1^n$$

$$x \longrightarrow f_t(x) = y(t) = h(t)a(t)x + c(t) \qquad (4.4)$$

ile tanımlı dönüşüme E_1^n Lorenz uzayında **1-parametreli homotetik hareket** denir ve bu hareketin matris gösterimi,

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B(t)} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada $c(t) \in \mathbb{R}_1^n$, $h(t) \in \mathbb{R}^+$ ve $a(t) \in SO(n,1)$ dir. Ayrıca, $a(t) \in SO(n,1)$ olduğundan $\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $a^T = \varepsilon a^{-1} \varepsilon$ dir.

$B(t)$ formundaki 1-parametreli matrislerin cümlesi

$$SD(n,1) = \left\{ B(t) : B(t) = \begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a(t) \in SO(n,1), c(t) \in \mathbb{R}_1^n, h \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

olup matrislerde çarpma işlemine göre bir Matris Lie grubunu oluşturur ve bu gruba karşılık gelen Lie cebirini $sd(n,1)$ ile gösterirsek $B(t) = \begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SD(n,1)$ için

$$B^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{h(t)} a^{-1}(t) & -\frac{1}{h(t)} a^{-1}(t)c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\dot{B}(t) = \begin{bmatrix} \dot{h}(t)a(t) + h(t)\dot{a}(t) & \dot{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\dot{B}(t)B^{-1}(t)=\begin{bmatrix}\dfrac{\dot{h}(t)}{h(t)}+\dot{a}(t)a^{-1}(t) & -\dfrac{\dot{h}(t)}{h(t)}c(t)-\dot{a}(t)a^{-1}(t)c(t)+\dot{c}(t)\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\gamma(t)I_n+C(t) & \overline{r}(t)\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}W(t) & \overline{r}(t)\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$\cong\begin{bmatrix}W & \overline{r}\end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada $\gamma(t)=\dfrac{\dot{h}(t)}{h(t)}$, $\overline{r}(t)=-\gamma(t)c(t)-\dot{a}(t)a^{-1}(t)c(t)+\dot{c}(t)$ ve $C=\dot{a}(t)a^{-1}(t)$ olup Lorenz anlamında bir anti-simetrik matris dir. Bu durumda, $sd(n,1)$ Lie cebirini

$$sd(n,1)=\left\{\begin{bmatrix}W & \overline{r}\\ 0 & 0\end{bmatrix}: \gamma I_n+C=W\in\mathbb{R}_n^n, C^T=-\varepsilon C\varepsilon,, \overline{r}\epsilon\mathbb{R}_1^n, \gamma\in\mathbb{R}\right\}$$

olarak yazabiliriz. Ayrıca $sd(n,1)$ Lie cebirinin elemanları ile spiral vektör alanları birebir eşlenirler.

Tanım 4.3.2

$$sd(n,1)=\left\{\begin{bmatrix}W & \overline{r}\\ 0 & 0\end{bmatrix}: \gamma I_n+C=W\in\mathbb{R}_n^n, C^T=-\varepsilon C\varepsilon,, \overline{r}\epsilon\mathbb{R}_1^n, \gamma\in\mathbb{R}\right\}$$

ile tanımlı cümlesinin elemanlarının oluşturduğu lineer vektör alanına **spiral vektör alanı** denir.

E_1^n Lorenz uzayında bir parametreli ani homotetik hareket altında bir noktanın yörüngesi, lineer vektör alanının integral eğrisidir.

$\begin{bmatrix}W(t) & \overline{r}(t)\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in sd(n,1)$ matris kümesinde $t=t_0$ için $W(t_0)=W$ ve $\overline{r}(t_0)=\overline{r}$ olarak alırsak $\begin{bmatrix} W & \overline{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi yardımıyla lineer vektör alanını tanımlayabiliriz. Tanım 2.3.9 a göre $A = \begin{bmatrix} W & \overline{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $v = E_1^n$ alınırsa Y lineer vektör alanını

$$\begin{aligned} Y : E_1^n &\to E_1^n \\ Q &\to Y(Q) = AQ \\ &= \begin{bmatrix} W & \overline{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} WQ + \overline{r} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Şimdi bu lineer vektör alanının integral eğrisini $t = 0$ için $y(0) = Q = x$ başlangıç şartı altında bulalım.

$$\overset{\bullet}{y} = Wy + \overline{r}$$

sabit katsayılı matris diferensiyel denkleminin $y(0) = Q = x$ başlangıç koşulu altındaki çözümü

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{Wt}x + \int_0^t e^{W(t-s)}\overline{r}ds \\ &= e^{Wt}x + e^{Wt}W^{-1}\overline{r} - e^{Wt}W^{-1}e^{-Wt}\overline{r} \\ &= e^{Wt}x + K(t) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} e^{Wt} &= e^{\begin{bmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(t) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(t) \end{bmatrix}} . e^{Wt} \\ &= e^{\gamma(t)} I_n . \left[e^{Wt} \right] \end{aligned}$$

olduğundan $y(t) = e^{Wt}x + K(t)$ ifadesinin $y(t) = \left[h(t)a(t) \right] x + K(t)$ şeklinde bir homotetik hareket belirttiğini söyleyebiliriz. Sonuç olarak x in yörüngesi olan $y(t)$ eğrisi bir spiral belirtir. Bu sonuçtan dolayı X vektör alanına **spiral vektör alanı** denir.

Ayrıca $\overline{u} = \overset{\bullet}{c}(t) - \overset{\bullet}{a}(t)a^{-1}(t)c(t)$ ve $\overline{r}(t) = -\gamma(t)c(t) - \overset{\bullet}{a}(t)a^{-1}(t)c(t) + \overset{\bullet}{c}(t)$ olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{Wt}x + e^{Wt}W^{-1}\overline{r} - e^{Wt}W^{-1}e^{-Wt}\overline{r} \\ &= e^{(\gamma I_n + C)t}x + e^{(\gamma I_n + C)t}(\gamma I_n + C)^{-1}\overline{r} - e^{(\gamma I_n + C)t}(\gamma I_n + C)^{-1}e^{-(\gamma I_n + C)t}\overline{r} \end{aligned}$$

ifadesinde $\gamma = 0$ alırsak $y(t) = e^{Ct}x - e^{Ct}\overline{u}C^{-1}e^{-Ct} + e^{Ct}\overline{u}C^{-1}$ ifadesini elde ederiz ki buda bize (4.2) den dolayı elde edilen $y(t)$ eğrisinin Lorenz uzayında bir helisel vektör alanı olduğunu gösterir. Bu durumda söyleyebiliriz ki spiral vektör alanları helisel vektör alanlarının genel halleridir.

Spiral vektör alanları ile 1-parametreli homotetik hareketin Lie cebirinin elemanları eşleşebilir. Dolayısıyla bunlar yardımı ile 1-parametreli homotetik hareketleri elde ederiz. Bu 1-parametreli homotetik hareketlerin yörüngelerini aşağıdaki teoremle verebiliriz.

Teorem 4.3.1 E_1^n de bir lineer vektör alanı Y, Lorenz anlamında bir anti-simetrik matris $C \in \mathbb{R}_n^n$ ve bir kolon matrisi $\overline{c} \in \mathbb{R}_1^n$ olsun. O halde Y in E_1^n de bir $\{O; u_1, u_2, ..., u_n\}$ ortonormal çatısına göre matrisi $Y = \begin{bmatrix} \gamma I_n + C & \overline{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & \overline{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere $\gamma \neq 0$ ve $rank\begin{bmatrix} W & \overline{r} \end{bmatrix} = n$ ise Y nin integral eğrileri spiral eğrilerdir.

Burada, $a(t) \in SO(n,1)$, $h(t) \in \mathbb{R}^+$, $c(t) \in \mathbb{R}_1^n$, $\gamma(t) = \dfrac{\dot{h}(t)}{h(t)}$, $W(t) = \gamma(t)I_n + C(t)$,

$\overline{r}(t) = \dot{c}(t) - \dfrac{\dot{h}(t)}{h(t)}c(t) - \dot{a}(t)a^{-1}(t)c(t)$ ve $C(t) = \dot{a}(t)a^{-1}(t)$ dir.

5. POINT-LINE OPERATÖRÜ

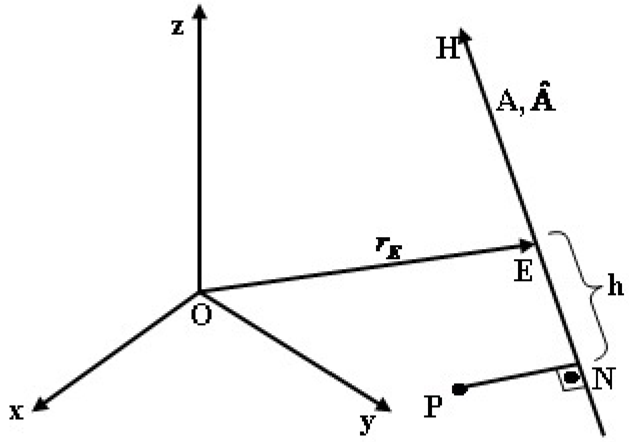
Bu bölümde point-line operatörü tanıtıldı ve daha sonra point-line yer değiştirmesi ile Öklid uzayındaki benzerlik dönüşümü arasındaki ilişki verildi. Daha önce point-line operatörü ve yer değiştirmesi dual kuaterniyonlar kullanılarak Yi Zhang, Kwun-Lon Ting tarafından **On Point-Line Geometry And Displeacement** adlı makalelerinde çalışılmıştır. Boris Odehnal, Helmut Pottmann, and Johannes Wallner **Equiform Kinematics And the Geometry of Line elements** adlı makalede 3-boyutlu Öklid uzayında doğru elemanlarının plücker koordinatlarını vermişlerdir. Biz ise point-line'nin referans noktasını koordinat sistemindeki orjin olarak kabul edildiğinde, point-line ile doğru elemanlarının benzer olduğunu gösterdik. Benzerlik dönüşümü yardımı ile de herhangi bir doğru elamanını başka bir doğru elemanına dönüştürebileceğimizi gösterdik. Ayrıca bir doğru elamanını başka bir doğru elamanına kuaterniyonları kullanarak daha kolay dönüştürülebileceğini ifade ettik.

Yönlendirilmiş bir doğru, birim doğru vektörü yada Plücker koordinatları ile temsil edilebilir. Point-line yönlendirilmiş bir doğru ve bu doğru üzerindeki bir referans noktası ile bellidir. E ve H noktaları yönlendirilmiş bir doğru üzerindeki herhangi iki nokta olsun. Bu durumda E ve H noktalarından geçen yönlendirilmiş doğrumuzu

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0 , \quad \left(\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1, \langle \vec{a}, \vec{a}_0 \rangle = 0 \right) \tag{5.1}$$

birim doğrultu vektörü ile gösterebiliriz (Şekil 5.1). Burada, $\vec{a}$ yönlendirilmiş doğru boyunca birim doğrultman vektörüdür ve $\vec{a}_0$ $O-xyz$ referans çatısına göre yönlendirilmiş doğrunun moment vektörüdür. Bir birim doğru vektör 6 tane paremetreye bağlıdır.

Şimdi doğru üzerinde olmayan herhangi bir nokta P olsun ve buna referans noktası diyelim. Ayrıca doğru üzerindeki herhangi bir nokta E olsun. N ise P den point-line'ye dik olan ayak noktası ve h ise yönlendirilmiş doğru üzerindeki N ayak noktasından E noktasına olan uzaklıktır. Burada h yönlendirmeye göre pozitif veya negatif olabilir.



Şekil 5.1 Point-line

Bir point-line $\exp(\varepsilon h)=(1+\varepsilon h)$ dual uzunluk ile (5.1) deki birim dual vektörün çarpılmasıyla elde edilen bir dual vektördür. Yani,

$$\begin{aligned}\hat{A}&=\exp(\varepsilon h)\vec{A}\\&=(1+\varepsilon h)(\vec{a}+\varepsilon\vec{a}_0)\\&=(1+\varepsilon h)\vec{a}+(1+\varepsilon h)\varepsilon\vec{a}_0,\quad \varepsilon^2=0\\&=\vec{a}+\varepsilon h\vec{a}+\varepsilon\vec{a}_0\\&=\vec{a}+(h\vec{a}+\vec{a}_0)\varepsilon\end{aligned}$$

ve $\vec{a}_0{}'=h\vec{a}+\vec{a}_0$ olmak üzere

$$\hat{A}=\vec{a}+\vec{a}_0{}'\varepsilon \tag{5.2}$$

dır. Eğer, vidanın adımını, E noktasının yeri olarak kabul edersek vida ile point-line benzerdir. Benzerliğin avantajı olarak vida ile ilgili koordinat dönüşümündeki formüller point-line' ye uygulanabilir. Bir point-line koordinatları verildiğinde E noktasını ve yönlendirilmiş doğruyu hesaplamak kolaydır.

$\vec{a}_0{}'=h\vec{a}+\vec{a}_0$ ifadesinde eşitliğin her iki yanını $\vec{a}$ ile iç çarparsak,

$$\begin{aligned}\langle\vec{a},\vec{a}_0'\rangle&=\langle\vec{a},\vec{a}_0+h\vec{a}\rangle\\&=\underbrace{\langle\vec{a},\vec{a}_0\rangle}_{0}+h\underbrace{\langle\vec{a},\vec{a}\rangle}_{1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow h=\langle\vec{a},\vec{a}_0'\rangle \tag{5.3}$$

olup (5.1) ifadesini

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\left(\vec{a}_0{}' - h\vec{a}\right) \tag{5.4}$$

olarak yazılabiliriz. Genelliği bozmadan referans noktamız orjindeki koordinat sistemi olsun. Böylece r_E referans noktasının yer vektörü (Şekil 5.2)

$$\vec{r}_E = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NE} \tag{5.5}$$

dır. Burada $\overrightarrow{ON}$, O noktasının point-line üzerindeki dikme ayağı olduğundan $\left\langle \overrightarrow{ON}, \vec{a} \right\rangle = 0$ olup vektörel moment tanımından dolayı

$$\overrightarrow{ON} \wedge \vec{a} = \vec{a}_0 \tag{5.6}$$

yazılabilir. (5.6) nın her iki yanını $\vec{a}$ ile vektörel çarparsak,

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{a}_0 &= \vec{a} \wedge \left(\overrightarrow{ON} \wedge \vec{a}\right) \\ &= \underbrace{\left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle}_{1} \overrightarrow{ON} - \underbrace{\left\langle \vec{a}, \overrightarrow{ON} \right\rangle}_{0} \vec{a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{ON} = \vec{a} \wedge \vec{a}_0 \tag{5.7}$$

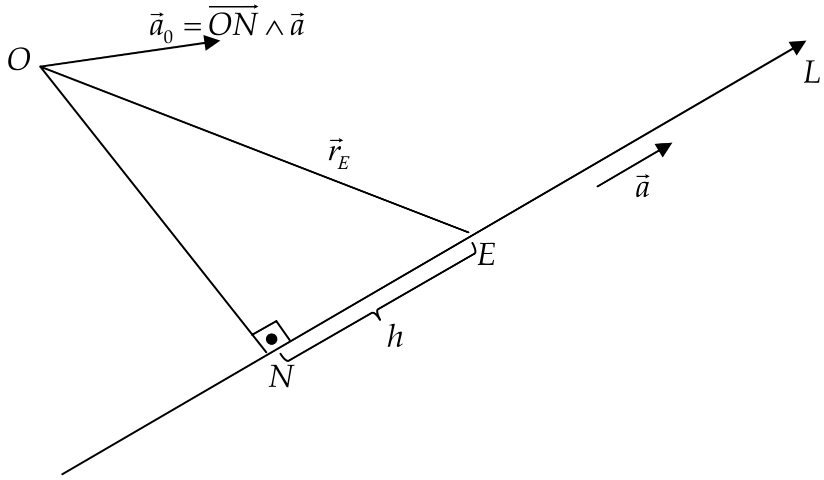
dir. Ayrıca

$$\overrightarrow{NE} = h\vec{a} \tag{5.8}$$

dir. O halde (5.7) ve (5.8) den

$$\vec{r}_E = \vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h\vec{a} \tag{5.9}$$

olarak bulunur.



Şekil 5.2 Referans noktası orjin olan point-line

5.1 Doğru Elemanlarının Plücker Koordinatları

3-boyutlu Öklid uzayında x noktasından geçen yönlendirilmiş bir doğru L olsun. Eğer, $\vec{a} \neq 0$, L doğrusuna paralel birim vektör, $\vec{a}_0 = \vec{x} \wedge \vec{a}$ ve $h = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle$ ise $(\vec{a}, \vec{a}_0, h) \in \mathbb{R}^7$ üçlüsüne doğru elemanlarının Plücker koordinatları denir ve bu koordinatlar homojen koordinatlardır. Burada $\vec{a}_0$, $\vec{a}$ nın vektörel momentidir ve h yi x in L üzerindeki yerel noktasını belirlemek için ekliyoruz.

Ayrıca orjinden L doğrusuna çizilen dikmenin ayağı

$$\begin{aligned} N(\vec{a}, \vec{a}_0) &= \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \vec{a} \wedge \vec{a}_0, \quad \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1 \\ &= \vec{a} \wedge \vec{a}_0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \vec{r}_X = \vec{x} &= N(\vec{a}, \vec{a}_0) + \frac{h}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \vec{a}, \quad \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1 \\ &= N(\vec{a}, \vec{a}_0) + h\vec{a} \end{aligned} \tag{5.11}$$

ve (5.10) den

$$\vec{r}_X = \vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h\vec{a} \tag{5.12}$$

olarak yazılabilir.

Şimdi benzerlik dönüşümü ile doğru elemanları arasındaki ilişkiyi verelim. $\vec{x}' = hg\vec{x} + \vec{v}$ denklemi ile tanımlı benzerlik dönüşümü $(\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$ doğru elelmanını

$$\vec{u} = g\vec{a}$$

$$\vec{u}_0 = \vec{x}' \wedge \vec{u}$$

$$h_2 = \langle \vec{x}', \vec{u} \rangle$$

denklemleri yardımı ile başka bir $(\vec{u}, \vec{u}_0, h_2)$ doğru elemanına dönüştürür ve bu dönüşümün matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{u}_0 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 \\ g^{\times} g & hg & 0 \\ v^T g & 0^T & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{a}_0 \\ h_1 \end{bmatrix}, \quad g^{\times} x = \vec{v} \wedge \vec{x} \tag{5.13}$$

dir. Özel durumda $h_1 = h_2 = 0$ ve $h = 1$ olduğunda $\vec{x}' = hg\vec{x} + \vec{v}$ ile tanımlı benzerlik dönüşümü

$$\vec{x}' = g\vec{x} + \vec{v}$$

ve (5.13) deki matris

$$\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{u}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & o \\ g^{\times}g & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{a}_0 \end{bmatrix}, \quad g^{\times}x = \vec{v} \wedge \vec{x} \tag{5.14}$$

olur ve (5.14) ifadesi *McCarthy nin* ***An Introduction to Theoretical Kinematics*** adlı kitabındaki sonuç ile çakışır.

Benzer şekilde kuaterniyonları kullanarak, $(\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$ doğru elelmanını başka bir $(\vec{u}, \vec{u}_0, h_2)$ doğru elemanına aşağıdaki teoremle dönüştürebiliriz.

Teorem 5.1.1 $\mathbb{R}^7$ de

$$\hat{Q} = \frac{1}{\|\vec{A}\|^2}\left(\left\langle \vec{A}, \vec{U} \right\rangle + \vec{A} \wedge \vec{U}\right) \tag{5.15}$$

dönüşümü;

1. Bir doğru elemanını başka bir bir doğru elemanına dönüştürür,

2. Bir point-line operatörü belirtir.

İspat:

$\mathbb{R}^7$ de iki doğru elemanı $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$ ve $\vec{U} = (\vec{u}, \vec{u}_0, h_2)$ olsun.

$$\hat{Q} = \frac{1}{\|\vec{A}\|^2}\left(\left\langle \vec{A}, \vec{U} \right\rangle + \vec{A} \wedge \vec{U}\right)$$

olup her iki tarafı $\vec{A}$ ile vektörel çarparsak

$$\begin{aligned} \hat{Q} \times \vec{A} &= \left[\frac{1}{\|\vec{A}\|^2}\left(\left\langle \vec{A}, \vec{U} \right\rangle + \vec{A} \wedge \vec{U}\right)\right] \wedge \vec{A} \\ &= \frac{1}{\|\vec{A}\|^2}\left(\left\langle \vec{A}, \vec{U} \right\rangle \vec{A} + \left[\vec{A} \wedge \vec{U}\right] \wedge \vec{A}\right) \end{aligned}$$

$$\hat{Q}\times\vec{A}=\frac{1}{\|\vec{A}\|^2}\left(\langle\vec{A},\vec{U}\rangle\vec{A}-\langle\vec{A},\vec{U}\rangle\vec{A}+\underbrace{\langle\vec{A},\vec{A}\rangle}_{\|\vec{A}\|^2}\vec{U}\right)$$
$$=\frac{1}{\|\vec{A}\|^2}\|\vec{A}\|^2\vec{U}$$
$$=\vec{U}$$

dir. Burada "×" kuaterniyon çarpımıdır.

Ayrıca $\vec{A}=(\vec{a},\vec{a}_0,h_1)$ ve $\vec{U}=(\vec{u},\vec{u}_0,h_2)$, $\mathbb{R}^7$ de iki doğru elemanının belirttiği point-line' ler, sırasıyla,

$$\hat{A}=\underbrace{\exp(\varepsilon h_1)}_{\|\vec{A}\|}\underbrace{(\vec{a}+\varepsilon\vec{a}_0)}_{\vec{A}_0}=\|\vec{A}\|\vec{A}_0$$
$$\hat{U}=\underbrace{\exp(\varepsilon h_2)}_{\|\vec{U}\|}\underbrace{(\vec{u}+\varepsilon\vec{u}_0)}_{\vec{U}_0}=\|\vec{U}\|\vec{U}_0$$

olup (5.15) ile tanımlı dönüşümü için

$$\hat{Q}=\frac{1}{\|\vec{A}\|^2}\left(\langle\vec{A},\vec{U}\rangle+\vec{A}\wedge\vec{U}\right)$$
$$=\frac{1}{\|\vec{A}\|^2}\left[\|\vec{A}\|\|\vec{U}\|\langle\vec{A}_0,\vec{U}_0\rangle+\|\vec{A}\|\|\vec{U}\|\left(\vec{A}_0\wedge\vec{U}_0\right)\right]$$
$$=\frac{\|\vec{U}\|}{\|\vec{A}\|}\left[\langle\vec{A}_0,\vec{U}_0\rangle+\left(\vec{A}_0\wedge\vec{U}_0\right)\right]$$
$$=\underbrace{\frac{\|\vec{U}\|}{\|\vec{A}\|}}_{\exp[\varepsilon(h_2-h_1)]}\left[\underbrace{\langle\vec{A}_0,\vec{U}_0\rangle+\left(\vec{A}_0\wedge\vec{U}_0\right)}_{Q_0}\right]$$
$$=\exp\left[\varepsilon(h_2-h_1)\right]Q_0$$

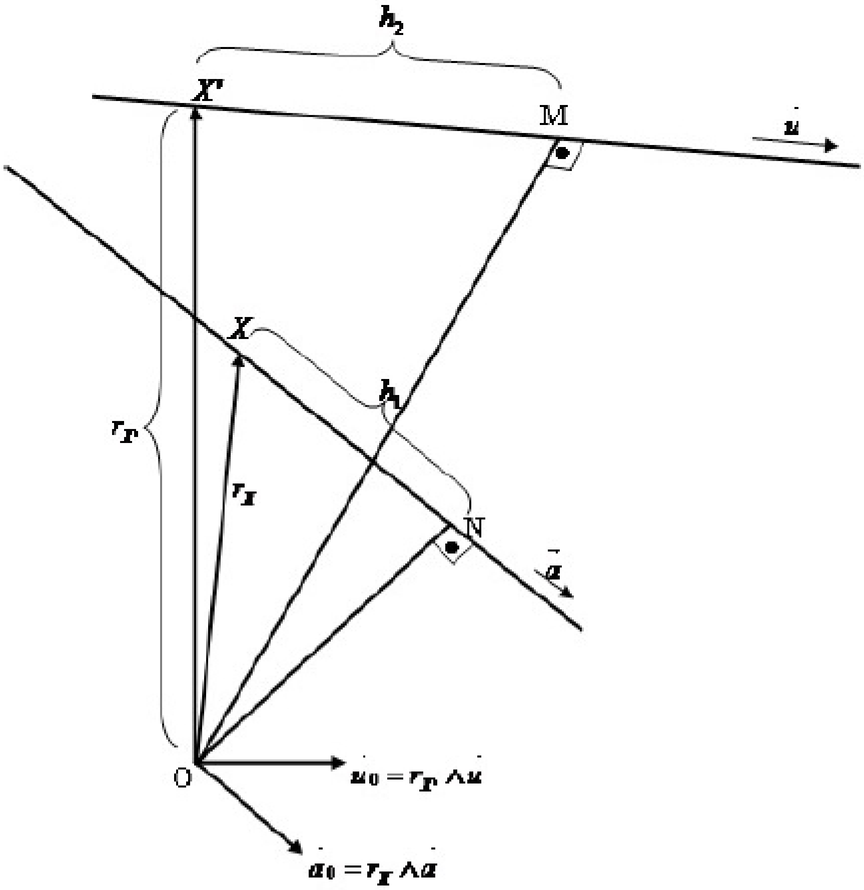
dir. Buradan (5.15) ile tanımlı dönüşümünün de bir point-line olduğunu söyleyebiliriz □

Teorem 5.1.2 Eğer bir point-line için referans noktası koordinat sisteminin orjin noktası ise $\vec{r}_{X'}=\vec{x}'=hg\vec{x}+\vec{v}$ benzerlik dönüşümü yardımıyla bir point-line başka bir point-line'ye dönüştürülebilir.

İspat:

$\hat{A}=(\vec{a},\vec{a}_0,h_1)$ ve $\hat{U}=(\vec{u},\vec{u}_0,h_2)$, sırasıyla, L_1 ile L_2 yönlendirilmiş doğruları üzerinde iki point-line olsun. $\vec{a}_0$ ve $\vec{u}_0$ orjin çatısına göre, sırasıyla, $\hat{A}$ ve $\hat{U}$ nun vektörel momentleridir. h_1, N den X noktasına olan uzaklık ve h_2, M den X' noktasına olan uzaklık olarak kabul edelim.

$\vec{r}_X$ ve $\vec{r}_{X'}$, sırasıyla, X ve X' nün pozisyon vektörleridir (Şekil 5.3)



Şekil 5.3 Point-line yer değiştirmesi

Biliyoruz ki, (5.9) dan r_X pozisyon vektörü

$$\vec{r}_X=\vec{a}\wedge\vec{a}_0+h_1\vec{a}$$

denklemine belirlidir. Aynı zamanda $\vec{r}_{X'}$ pozisyon vektörü (3.7) den

$$\vec{r}_{X'} = hg\vec{r}_X + \vec{v}$$

dir. Burada $g \in SO(3)$, $h \in \mathbb{R}^+$ ve $v \in \mathbb{R}^3$ dir. Aşağıdaki denklemleri kullanarak

$$\vec{u} = g\vec{a}$$

$$\vec{u}_0 = \vec{r}_{X'} \wedge \vec{u}$$

$$h_2 = \langle \vec{r}_{X'}, \vec{u} \rangle$$

ya da (5.13) deki blok matrisi kullanarak

$$\begin{aligned} \vec{u}_0 &= g^{\times} \underbrace{g\vec{a}}_{\vec{u}} + hg\vec{a}_0 \\ &= \vec{v} \wedge \vec{u} + hg\vec{a}_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g\vec{a}_0 = \frac{1}{h}\left(\vec{u}_0 - \vec{v} \wedge \vec{u}\right) \tag{5.16}$$

ve

$$\begin{aligned} h_2 &= \vec{v}^T \underbrace{g\vec{a}}_{\vec{u}} + hh_1 \\ &= \vec{v}^T \vec{u} + hh_1 \\ &= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + hh_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow hh_1 = h_2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \tag{5.17}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \vec{r}_{X'} &= hg\vec{r}_X + \vec{v} \\ &= hg\left(\vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h_1\vec{a}\right) + \vec{v} \\ &= hg\left(\vec{a} \wedge \vec{a}_0\right) + hgh_1\vec{a} + \vec{v} \\ &= h\left(g\vec{a} \wedge g\vec{a}_0\right) + hh_1 g\vec{a} + \vec{v} \end{aligned}$$

olup (5.13), (5.16) ve (5.17) den

$$\begin{aligned} \vec{r}_{X'} &= h\left(\underbrace{g\vec{a}}_{\vec{u}} \wedge g\vec{a}_0 \right) + hh_1 \underbrace{g\vec{a}}_{\vec{u}} + \vec{v} \\ &= h\left(\vec{u} \wedge \left[\frac{1}{h}\left(\vec{u}_0 - \vec{v} \wedge \vec{u}\right) \right] \right) + \left[h_2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \right] \vec{u} + \vec{v} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_{X'} &= \left(\vec{u} \wedge \left[\left(\vec{u}_0 - \vec{v} \wedge \vec{u}\right)\right]\right) + h_2\vec{u} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} + \vec{v} \\
&= \vec{u} \wedge \vec{u}_0 - \vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{u}\right) + h_2\vec{u} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} + \vec{v} \\
&= \vec{u} \wedge \vec{u}_0 - \underbrace{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}_{1} \vec{v} + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} + h_2\vec{u} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} + \vec{v} \\
&= \vec{u} \wedge \vec{u}_0 + h_2\vec{u}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Bu sonuç $\hat{U}$ point-line' ı için pozisyon vektörüdür □

Örnek 5.1.1 Şekil 5.3'de gösterilen $\hat{A} = \left(\vec{a}, \vec{a}_0, h_1\right)$ point-line vektörü için yön vektörü $\vec{a} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ve pozisyon vektörü $\vec{r}_X = \left(0,1,0\right)$ olsun. $x' = hg\vec{x} + \vec{v}$ ile verilen benzerlik dönüşümü ve (5.1.4) de verilen blok matrisi yardımıyla $\hat{A}$ point-line'sini $\hat{U}$ point-line'sine dönüştürelim. Burada, $h = -\sqrt{3}$, $\vec{v} = \left(1,0,0\right)$ ve $g \in SO(3)$, x-ekseni etrafında 30^o lik dönmeye karşılık gelen matris olsun.

O halde,

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= \vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0 \\
&= \vec{a} + \varepsilon\left(\vec{r}_X \wedge \vec{a}\right) \\
&= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \varepsilon\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Dikme ayağından referans noktasına olan uzaklık $h_1 = \langle \vec{r}_X, \vec{a} \rangle = \frac{1}{2}$ dir.

Buna göre şekil 5.3'deki $\hat{U}$ point-line vektörün $\vec{u}$ birim doğrultman vektörü, $\vec{u}_0$ moment vektörü ve $\vec{r}_{X'}$ yer vektörü aşağıdaki gibidir.

$$
\vec{u} = g\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$\vec{r}_{X'} = hg\vec{r}_X + \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

$$\vec{u}_0 = \vec{r}_{X'} \wedge \vec{u} = \left(-\frac{3}{2}, -1, 0\right)$$

$$\hat{U} = (0,0,1) + \varepsilon\left(-\frac{3}{2}, -1, 0\right)$$

$$h_2 = \langle \vec{r}_{X'}, \vec{u} \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ve biliyoruz ki point-line vektörünün yer vektörü aşağıdaki eşitliği sağlar,

$$\vec{r}_{X'} = \vec{u} \wedge \vec{u}_0 + h_2\vec{u} = \left(1, -\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Böylece bu sonuç (5.18) ile çakışır.

Sonuç olarak söyleyebiliriz ki benzerlik dönüşümü yardımıyla doğru elemanını başka bir doğru elemanına dönüştürebiliriz. Biz ise bu bölümde bir point-line'sini başka bir point-line'sine benzerlik dönüşümünü kullanarak nasıl dönüşebileceğini gösterdik. Aynı zamanda doğru elemanını başka bir doğru elemanına dönüştürme işinde (5.13) deki blok matrisi kullanmak zor olacağından bu işi kuaterniyonları kullanarak daha kolay nasıl yapılabileceğini gösterdik.

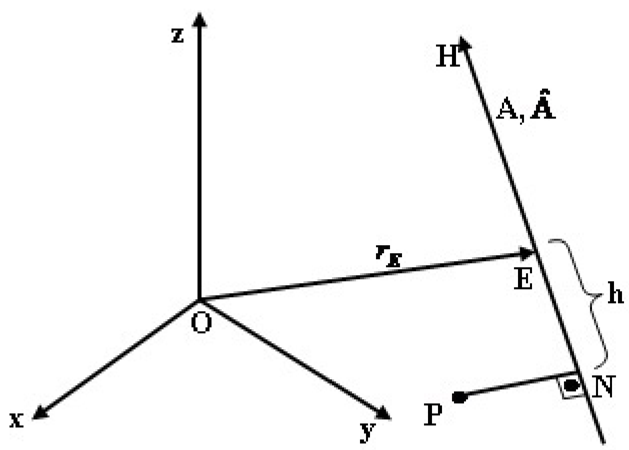
6. LORENZ UZAYINDA POINT-LINE OPERATÖRÜ

Bu bölümde Lorenz uzayında point-line operatörü tanıtıldı ve daha sonra point-line yer değiştirmesi ile Lorenz uzayındaki benzerlik dönüşümü arasındaki ilişki verildi. Daha önce Lorenz uzayında point-line operatörü ve yer değiştirmesi dual kuaterniyonlar kullanılarak Ö. Aydoğmuş, L. Kula ve Y. Yayli tarafından **On Point-Line Displeacement in Minkowski 3-space** adlı makalelerinde çalışılmıştır. Biz ise Lorenz uzayında ilk önce benzerlik dönüşümünü ve Plücker korrdinatları Lorenz uzayında tanıttık. Daha sonra point-line'ın referans noktasını koordinat sistemindeki orjin olarak kabul edildiğinde, point-line ile doğru elemanlarının benzer olduğunu gösterdik. Lorenz uzayında benzerlik dönüşümü yardımı ile de herhangi bir doğru elamanını başka bir doğru elemanına dönüştürebileceğimizi gösterdik. Ayrıca bir doğru elamanını başka bir doğru elamanına split-dual kuaterniyonları kullanarak daha kolay dönüştürülebileceğini ifade ettik.

Yönlendirilmiş bir doğru birim dual spilt vektörü yada Plücker koordinatlarla gösterilebilir. Bir point-line ise yönlendirilmiş bir ve bir referans noktası ile bellidir. Yönlendirilmiş bir doğru, E ve H noktasından geçsin ve birim dual-split vektörünü

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0 , \quad \left(\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \mp 1, \langle \vec{a}, \vec{a}_0 \rangle = 0 \right) \tag{6.1}$$

birim doğrultman vektörü ile gösterebiliriz (Şekil 6.1).



Şekil 6.1 Lorenz uzayında Point-line

Burada, $\vec{a}$ yönlendirilmiş doğru boyunca birim doğrultman vektörüdür ve $\vec{a}_0$ sırasıyla

$O-xyz$ referans çatısına göre yönlendirilmiş doğrunun moment vektörüdür.

Kabul edelim ki, H yönlendirilmiş bir doğru ve üzerinde alınan herhangi bir nokta E olsun. Ayrıca doğru üzerinde olmayan bir P noktası alalım. Bu noktaya referans noktası diyeceğiz. P den yönlendirilmiş doğruya inilen dikmenin ayağı N ve N dikmenin ayak noktasından E noktasına yönlendirilmiş doğru üzerindeki uzaklık h dir. Ayrıca h yönlendirilmiş doğru üzerinde N nin ve E nin konumuna göre pozitif veya negatif olabilir (Aydoğmuş, 2008). P noktası uzaydaki her hangi bir nokta olabilir. Bunlardan biri de orjin referans noktası olabilir.

Bir point-line $\exp(\varepsilon h)$ dual sayısı ile (6.1) deki birim dual vektörün çarpılmasıyla elde edilen bir dual vektördür. Yani,

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \exp(\varepsilon h)\vec{A} \\ &= (1+\varepsilon h)(\vec{a}+\varepsilon\vec{a}_0) \\ &= (1+\varepsilon h)\vec{a}+(1+\varepsilon h)\varepsilon\vec{a}_0, \quad \varepsilon^2=0 \\ &= \vec{a}+\varepsilon h\vec{a}+\varepsilon\vec{a}_0 \\ &= \vec{a}+(h\vec{a}+\vec{a}_0)\varepsilon\end{aligned}$$

ve $\vec{a}_0{}' = h\vec{a}+\vec{a}_0$ olmak üzere

$$\hat{A} = \vec{a}+\vec{a}_0{}'\varepsilon \tag{6.2}$$

dir. Burada, $\hat{A}$ nın $\exp(\varepsilon h)=1+\varepsilon h$ dual uzunluklu dual split vektör olduğunu söyleyebiliriz. (6.2) eşitliğinden

$$\hat{A} = \left(a_1, a_2, a_3, a'_{01}, a'_{02}, a'_{03}\right) \tag{6.3}$$

yazılabillir. Burada, $a'_{01} = a_{01}+ha_1$, $a'_{02} = a_{02}+ha_2$ ve $a'_{03} = a_{03}+ha_3$ dir.

Eğer, vidanın adımını, E noktasının yeri olarak kabul edersek vida ile point-line benzerdir. Benzerliğin avantajı olarak vida ile ilgili koordinat dönüşümündeki formüller point-line' a uygulanabilir. Bir point-line koordinatları verildiğinde E noktası ve yönlendirilmiş doğruyu hesaplamak kolaydır.

1) $\vec{A}$ birim dual-split vektörü spacelike ise $\vec{a}_0{}' = h\vec{a}+\vec{a}_0$ ifadesinde eşitliğin her iki yanını $\vec{a}$ ile iç çarparsak,

$$\begin{aligned}\langle \vec{a}, \vec{a}_0' \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{a}_0 + h\vec{a} \rangle \\ &= \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a}_0 \rangle}_{0} + h \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}_{1} \\ \Rightarrow h &= \langle \vec{a}, \vec{a}_0' \rangle \end{aligned} \tag{6.4}$$

olup (6.1) ifadesini

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \vec{a} + \vec{a}_0 \varepsilon \\ &= \vec{a} + \varepsilon \left(\vec{a}_0{}' - h\vec{a} \right) \end{aligned} \tag{6.5}$$

olarak yazılabiliriz.

2) $\vec{A}$ birim dual-split vektörü time-like ise $\vec{a}_0{}' = h\vec{a} + \vec{a}_0$ ifadesinde eşitliğin her iki yanını $\vec{a}$ ile iç çarparsak,

$$\begin{aligned}\langle \vec{a}, \vec{a}_0' \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{a}_0 + h\vec{a} \rangle \\ &= \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a}_0 \rangle}_{0} + h \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}_{-1} \\ \Rightarrow h &= -\langle \vec{a}, \vec{a}_0' \rangle \end{aligned} \tag{6.6}$$

olup (6.1) ifadesini

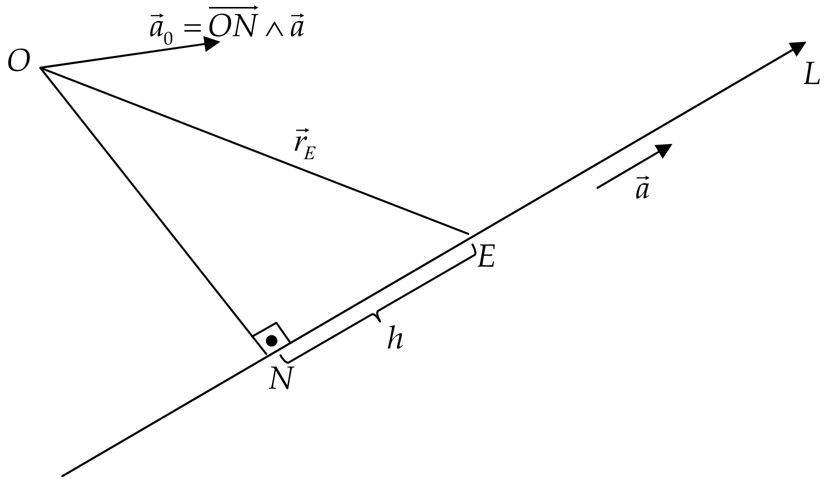
$$\begin{aligned}\vec{A} &= \vec{a} + \vec{a}_0 \varepsilon \\ &= \vec{a} + \varepsilon \left(\vec{a}_0{}' - h\vec{a} \right) \end{aligned} \tag{6.7}$$

olarak yazılabiliriz.

Point-line koordinatlarını vererek referans noktasının yerini, yönlendirilmiş doğruyu ve yer vektörü(pozisyon vektörü)nü hesaplamak kolaydır. Genelliği bozmadan referans noktamız orjindeki koordinat sistemi olsun. Böylece r_E referans noktasının yer vektörü (Şekil 6.2)

$$\vec{r}_E = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NE} \tag{6.8}$$

dır.



Şekil 6.2 Lorenz uzayında referans noktası orjin olan point-line

Burada $\overrightarrow{ON}$, O noktasının point-line üzerindeki dikme ayağı olduğundan $\left\langle \overrightarrow{ON}, \vec{a} \right\rangle = 0$ olup vektörel moment tanımından

$$\overrightarrow{ON} \wedge \vec{a} = \vec{a}_0 \tag{6.9}$$

yazılabilir.

1) $\vec{A}$ birim dual-split vektörü spacelike ise (6.9) un her iki yanını $\vec{a}$ ile vektörel çarparsak,

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{a}_0 &= \vec{a} \wedge \left(\overrightarrow{ON} \wedge \vec{a} \right) \\ &= -\underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}_{1} \overrightarrow{ON} + \underbrace{\left\langle \vec{a}, \overrightarrow{ON} \right\rangle}_{0} \vec{a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{ON} = -\vec{a} \wedge \vec{a}_0 \tag{6.10}$$

dir. Ayrıca

$$\overrightarrow{NE} = h\vec{a} \tag{6.11}$$

dir. O halde (6.10) ve (6.11) den

$$\vec{r}_E = -\vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h\vec{a} \tag{6.12}$$

olarak bulunur.

2) $\vec{A}$ birim dual-split vektörü time-like ise (6.9) un her iki yanını $\vec{a}$ ile vektörel çarparsak,

$$\vec{a} \wedge \vec{a}_0 = \vec{a} \wedge \left(\overrightarrow{ON} \wedge \vec{a}\right)$$

$$= -\underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}_{-1} \overrightarrow{ON} + \underbrace{\left\langle \vec{a}, \overrightarrow{ON} \right\rangle}_{0} \vec{a}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{ON} = \vec{a} \wedge \vec{a}_0 \tag{6.13}$$

dir. Ayrıca

$$\overrightarrow{NE} = h\vec{a} \tag{6.14}$$

dir. O halde (6.13) ve (6.14) den

$$\vec{r}_E = \vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h\vec{a} \tag{6.15}$$

olarak bulunur.

6.1 3-boyutlu Lorenz Uzayında Benzerlik Dönüşümü

Tanım 6.1.1 3-boyutlu Lorenz uzayı $\mathbb{R}_1^3$ de $R \in SO_1(3)$, $b \in \mathbb{R}_1^3$ ve α bir homotetik skalar olmak üzere

$$\varphi : \mathbb{R}_1^3 \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$$x \longrightarrow \varphi(x) = y(t) = \alpha(t)R(t)x + b(t) \tag{6.16}$$

ile tanımlı dönüşüme $\mathbb{R}_1^3$ Lorenz uzayında **benzerlik dönüşümü** denir.

Burada, R, α ve b, t ye göre C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir donksiyonlardır.

$$y(t) = \alpha(t)R(t)x + b(t)$$

dönüşümünde t ye göre türev alınarak $v(y) = \dot{y}(t)$ hız vektörü

$$v(y) = \dot{y}(t) = \dot{R}R^T y - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} y - RR^T b - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} b + \dot{b} \tag{6.17}$$

olarak elde ederiz. Burada R ortogonal matris olduğundan $\dot{R}R^T := C^\times$ Lorenz anlamındabir antisimetrik matristir ve $C^\times x$ çarpımı, $\vec{c}$ vektörünü kullanarak $C^\times x = \vec{c} \wedge \vec{x}$ şeklinde yazabilir. Bu durumda, (6.17) ifadesini

$$v(y) = \dot{y}(t) = c \wedge y + \gamma y + \overline{c} \tag{6.18}$$

dir. Burada $\gamma = \dfrac{\dot{\alpha}}{\alpha}$ ve $\overline{c} = -RR^{T}b - \dfrac{\dot{\alpha}}{\alpha}b + \dot{b}$ dir.

Her hangi $\left(c, \overline{c}, \gamma\right) \in \mathbb{R}_1^7$ üçlüsü bir tek 3-boyutlu Lorenz uzayında bir tek benzerlik hareketi tanımlar.

6.2 3-boyutlu Lorenz Uzayında Doğru Elemanlarının Plücker Koordinatları

3-boyutlu Lorenz uzayında x noktasından geçen yönlendirilmiş bir doğru L olsun. Eğer, $\vec{a} \neq 0$, L doğrusuna paralel birim vektör, $\vec{a}_0 = \vec{x} \wedge \vec{a}$ ve $h_1 = \mp\left\langle \vec{x}, \vec{a} \right\rangle$ ise $\left(\vec{a}, \vec{a}_0, h_1\right) \in \mathbb{R}_1^7$ üçlüsüne doğru elemanlarının Plücker koordinatları denir ve bu koordinatlar homojen koordinatlardır. Burada $\vec{a}_0$, $\vec{a}$ nın vektörel momentidir ve h_1, x in L üzerindeki yerel noktasını belirlemek için ekliyoruz. Buradan orjinden L doğrusuna çizilen dikmenin ayağı

1) $\vec{a}$ birim spacelike vektör ise

$$N(\vec{a}, \vec{a}_0) = -\vec{a} \wedge \vec{a}_0 \tag{6.19}$$

dir. Ayrıca

$$\vec{r}_X = \vec{x} = N(\vec{a}, \vec{a}_0) + h_1\vec{a} \tag{6.20}$$

ve (6.20) den

$$\vec{r}_X = -\vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h_1\vec{a} \tag{6.21}$$

olarak yazılabilir.

2) $\vec{a}$ birim timelike vektör ise

$$N(\vec{a}, \vec{a}_0) = \vec{a} \wedge \vec{a}_0 \tag{6.22}$$

dir. Ayrıca

$$\vec{r}_X = \vec{x} = N(\vec{a}, \vec{a}_0) + h_1\vec{a} \tag{6.23}$$

ve (6.22) den

$$\vec{r}_X = \vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h_1\vec{a} \tag{6.24}$$

olarak yazılabilir.

Şimdi benzerlik dönüşümleri ile doğru elemanları arasındaki ilişkiyi verelim. Eğer, doğru yönlendirilirse doğru elemanı da yönlendirilmiş olur. (6.16) deki $x^{'} = \alpha R\vec{x} + \vec{b}$ denklemi ile tanımlı benzerlik dönüşümü $(\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$ doğru elelmanını

$$\vec{x}\,' = \alpha R\vec{x} + \vec{b}$$
$$\vec{u} = R\vec{a}$$
$$\vec{u}_0 = \vec{x}\,' \wedge \vec{u}$$
$$h_2 = \langle \vec{x}\,', \vec{u} \rangle$$

denklemleri yardımı ile başka bir $(\vec{u}, \vec{u}_0, h_2)$ doğru elemanına dönüştürür ve bu dönüşümün blok matris gösterimi

1) $\vec{a}$ birim spacelike vektör ise

$$\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{u}_0 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ R^{\times}R & \alpha R & 0 \\ b^T R & 0^T & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{a}_0 \\ h_1 \end{bmatrix}, \quad R^{\times}x = \vec{b} \wedge \vec{x} \tag{6.25}$$

dir. Burada $R \in SO_1(3)$ dır.

2) $\vec{a}$ birim time-like vektör ise

$$\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{u}_0 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ R^{\times}R & \alpha R & 0 \\ -b^T R & 0^T & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{a}_0 \\ h_1 \end{bmatrix}, \quad R^{\times}x = \vec{b} \wedge \vec{x} \tag{6.26}$$

dir. Burada $R \in SO_1(3)$ dır.

(6.25) ve (6.26) eşitlikleri açıkça yönlendirilmiş doğru elemanına uygulanabilir. Benzer şekilde kuaterniyonları kullanarak, $(\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$ doğru elemanını başka bir $(\vec{u}, \vec{u}_0, h_2)$ doğru elemanına aşağıdaki teoremle dönüştürebiliriz.

Teorem 6.2.1 $\mathbb{R}_1^7$ de

$$\hat{Q} = \frac{1}{\|\hat{A}\|^2}\left(\left\langle \hat{A}, \hat{U}\right\rangle + \hat{A} \wedge \hat{U}\right) \tag{6.27}$$

dönüşümü $\hat{A} = (\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$ doğru elemanını, $\hat{U} = (\vec{u}, \vec{u}_0, h_2)$ doğru elemanına dönüştürür.

İspat:

$\vec{A} = (\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$ ve $\vec{U} = (\vec{u}, \vec{u}_0, h_2)$ dual-split vektörler olsun.

1) $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$ birim dual-split vektör spacelike ise

$$\hat{Q} = \frac{1}{\|\hat{A}\|^2}\left(\left\langle \hat{A}, \hat{U}\right\rangle + \hat{A} \wedge \hat{U}\right)$$

olup her iki tarafı $\hat{A}$ ile soldan vektörel çarparsak

$$\begin{aligned}
\hat{A} \times \hat{Q} &= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2}\left[\hat{A} \wedge \left(\left\langle \hat{A}, \hat{U}\right\rangle + \hat{A} \wedge \hat{U}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2}\left(\left\langle \hat{A}, \hat{U}\right\rangle \hat{A} + \hat{A} \wedge \left[\hat{A} \wedge \hat{U}\right]\right) \\
&= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2}\left(\left\langle \hat{A}, \hat{U}\right\rangle \hat{A} - \left\langle \hat{A}, \hat{U}\right\rangle \hat{A} + \underbrace{\left\langle \hat{A}, \hat{A}\right\rangle}_{\|\hat{A}\|^2} \hat{U}\right) \\
&= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2}\left\langle \hat{A}, \hat{A}\right\rangle \hat{U} \\
&= \hat{U}
\end{aligned}$$

dir. Burada "$\times$" kuaterniyon çarpımıdır.

Ayrıca $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$ ve $\vec{U} = (\vec{u}, \vec{u}_0, h_2)$, $\mathbb{R}_1^7$ de iki doğru elemanının belirttiği point-line'ler, sırasıyla,

$$\hat{A} = \underbrace{\exp(\varepsilon h_1)}_{\|\hat{A}\|}\underbrace{(\vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0)}_{\vec{A}_0} = \|\hat{A}\| \vec{A}_0$$

$$\hat{U} = \underbrace{\exp(\varepsilon h_2)}_{\|\hat{U}\|}\underbrace{(\vec{u}+\varepsilon\vec{u}_0)}_{\vec{U}_0} = \|\hat{U}\|\vec{U}_0$$

olup (6.27) ile tanımlı dönüşümü

$$\begin{aligned}
\hat{Q} &= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2}\left(\langle\hat{A},\hat{U}\rangle + \hat{A}\wedge\hat{U}\right) \\
&= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2}\left[\|\hat{A}\|\|\hat{U}\|\langle\vec{A}_0,\vec{U}_0\rangle + \|\hat{A}\|\|\hat{U}\|\left(\vec{A}_0\wedge\vec{U}_0\right)\right] \\
&= \frac{\|\hat{U}\|}{\|\hat{A}\|}\left[\langle\vec{A}_0,\vec{U}_0\rangle + \left(\vec{A}_0\wedge\vec{U}_0\right)\right] \\
&= \underbrace{\frac{\|\hat{U}\|}{\|\hat{A}\|}}_{\exp[\varepsilon(h_2-h_1)]}\left[\underbrace{\langle\vec{A}_0,\vec{U}_0\rangle + \left(\vec{A}_0\wedge\vec{U}_0\right)}_{Q_0}\right] \\
&= \exp\left[\varepsilon\left(h_2-h_1\right)\right]Q_0
\end{aligned}$$

dir. Buradan (6.27) ile tanımlı dönüşümünün de bir point-line olduğunu söyleyebiliriz.

2) $\vec{A} = (\vec{a},\vec{a}_0,h_1)$ birim dual-split vektör timelike ise

$$\hat{Q} = \frac{1}{\|\hat{A}\|^2}\left(\langle\hat{A},\hat{U}\rangle + \hat{A}\wedge\hat{U}\right)$$

olup her iki tarafı $\hat{A}$ ile vektörel çarparsak

$$\begin{aligned}
\hat{A}\times\hat{Q} &= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2}\left[\hat{A}\wedge\left(\langle\hat{A},\hat{U}\rangle + \hat{A}\wedge\hat{U}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2}\left(\langle\hat{A},\hat{U}\rangle\hat{A} + \hat{A}\wedge\left[\hat{A}\wedge\hat{U}\right]\right) \\
&= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2}\left(\langle\hat{A},\hat{U}\rangle\hat{A} - \langle\hat{A},\hat{U}\rangle\hat{A} + \underbrace{\langle\hat{A},\hat{A}\rangle}_{\|\hat{A}\|^2}\hat{U}\right) \\
&= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2}\langle\hat{A},\hat{A}\rangle\hat{U} \\
&= -\hat{U}
\end{aligned}$$

dir. Burada ”$\times$” kuaterniyon çarpımıdır

Ayrıca $\vec{A}=\left(\vec{a},\vec{a}_0,h_1\right)$ ve $\vec{U}=\left(\vec{u},\vec{u}_0,h_2\right)$, $\mathbb{R}_1^7$ de iki doğru elemanının belirttiği point-line’ ler, sırasıyla,

$$\hat{A}=\underbrace{\exp\left(\varepsilon h_1\right)}_{\|\hat{A}\|}\underbrace{\left(\vec{a}+\varepsilon\vec{a}_0\right)}_{\vec{A}_0}=\left\|\hat{A}\right\|\vec{A}_0$$

$$\hat{U}=\underbrace{\exp\left(\varepsilon h_2\right)}_{\|\hat{U}\|}\underbrace{\left(\vec{u}+\varepsilon\vec{u}_0\right)}_{\vec{U}_0}=\left\|\hat{U}\right\|\vec{U}_0$$

olup (6.27) ile tanımlı dönüşümü

$$\begin{aligned}
\hat{Q}&=\frac{1}{\left\|\hat{A}\right\|^2}\left(\left\langle\hat{A},\hat{U}\right\rangle+\hat{A}\wedge\hat{U}\right)\\
&=\frac{1}{\left\|\hat{A}\right\|^2}\left[\left\|\hat{A}\right\|\left\|\hat{U}\right\|\left\langle\vec{A}_0,\vec{U}_0\right\rangle+\left\|\hat{A}\right\|\left\|\hat{U}\right\|\left(\vec{A}_0\wedge\vec{U}_0\right)\right]\\
&=\frac{\left\|\hat{U}\right\|}{\left\|\hat{A}\right\|}\left[\left\langle\vec{A}_0,\vec{U}_0\right\rangle+\left(\vec{A}_0\wedge\vec{U}_0\right)\right]\\
&=\underbrace{\frac{\left\|\hat{U}\right\|}{\left\|\hat{A}\right\|}}_{\exp\left[\varepsilon\left(h_2-h_1\right)\right]}\left[\underbrace{\left\langle\vec{A}_0,\vec{U}_0\right\rangle+\left(\vec{A}_0\wedge\vec{U}_0\right)}_{Q_0}\right]\\
&=\exp\left[\varepsilon\left(h_2-h_1\right)\right]Q_0
\end{aligned}$$

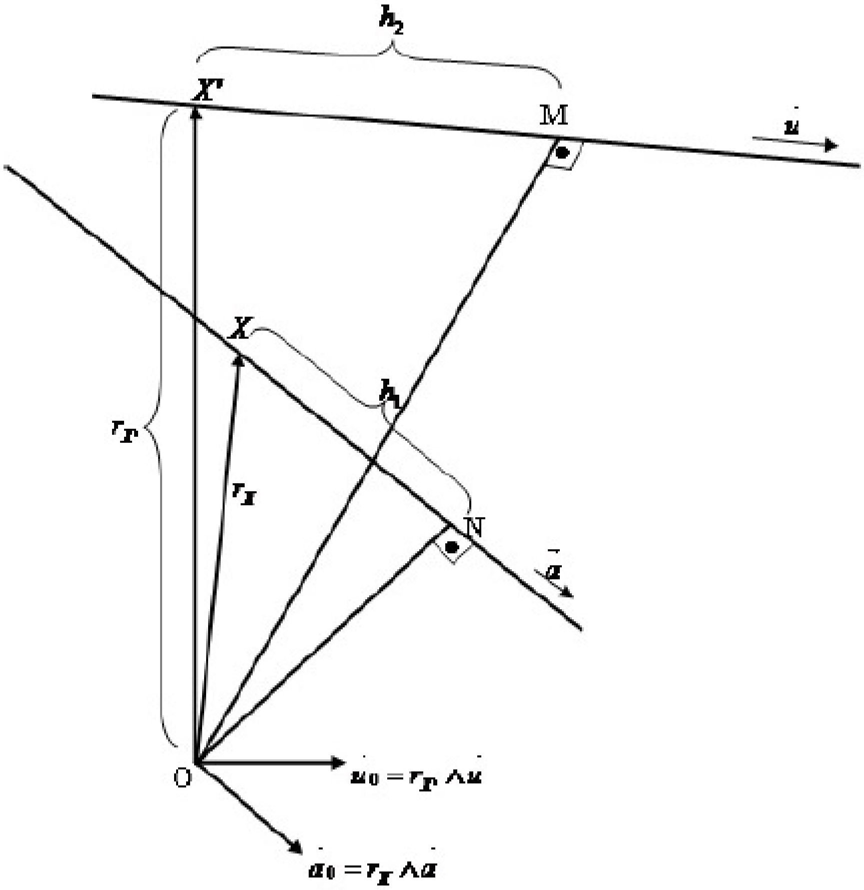
dir. Buradan (6.27) ile tanımlı dönüşümünün de bir point-line olduğunu söyleyebiliriz□

Şimdi 3-boyutlu Lorenz uzayında point-line yer değiştirmesi ve benzerlik dönüşümü arasındaki ilişkiyi bir teoremle verelim.

Teorem 6.2.2 Eğer 3-boyutlu Lorenz uzayında bir point-line için referans noktası koordinat sisteminin orjin noktası ise (6.16) benzerlik dönüşümü yardımıyla bir point-line başka bir point-line’ye dönüştürülür.

İspat:

$\hat{A}=\left(\vec{a},\vec{a}_0,h_1\right)$ ve $\hat{U}=\left(\vec{u},\vec{u}_0,h_2\right)$, sırasıyla, L_1 ile L_2 yönlendirilmiş doğruları üzerinde iki point-line olsun. $\vec{a}_0$ ve $\vec{u}_0$ orjin çatısına göre, sırasıyla, $\vec{a}$ ve $\vec{u}$ nun vektörel momentleridir. h_1, N dikme ayağından X noktasına olan uzaklık ve h_2, M dikme ayağından X' noktasına olan uzaklık olarak kabul edelim. $\vec{r}_X$ ve $\vec{r}_{X'}$, sırasıyla, X ve X' nün pozisyon vektörleridir (Şekil 6.3).



Şekil 6.3 Lorenz Uzayında Point-line yer değiştirmesi

1) $\vec{a}$ birim spacelike vektör ise (6.21) den $\vec{r}_X$ pozisyon vektörü

$$\vec{r}_X = -\vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h_1 \vec{a}$$

denklemine belirlidir. Aynı zamanda $\vec{r}_{X'}$ pozisyon vektörü (6.16) den

$$\vec{r}_{X'} = \alpha R \vec{r}_X + \vec{b}$$

dir. Burada $R \in SO_1(3)$, α homotetik skalar ve $b \in \mathbb{R}^3_1$ dir. (6.25) ve (6.26) deki blok matrisleri kullanılırsa

$$\vec{u}_0 = R^{\times} \underbrace{R\vec{a}}_{\vec{u}} + \alpha R\vec{a}_0$$
$$= \vec{b} \wedge \vec{u} + \alpha R\vec{a}_0$$
$$\Rightarrow R\vec{a}_0 = \frac{1}{\alpha}\left(\vec{u}_0 - \vec{b} \wedge \vec{u}\right) \tag{6.28}$$

ve

$$h_2 = \vec{b}^T \underbrace{R\vec{a}}_{\vec{u}} + \alpha h_1$$
$$= \vec{b}^T \vec{u} + \alpha h_1$$
$$= \left\langle \vec{b}, \vec{u} \right\rangle + \alpha h_1$$
$$\Rightarrow \alpha h_1 = h_2 - \left\langle \vec{b}, \vec{u} \right\rangle \tag{6.29}$$

dir. Buradan

$$\vec{r}_{X'} = \alpha R\vec{r}_X + \vec{b}$$
$$= \alpha R\left(-\vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h_1\vec{a}\right) + \vec{b}$$
$$= -\alpha R\left(\vec{a} \wedge \vec{a}_0\right) + \alpha R h_1 \vec{a} + \vec{b}$$
$$= -\alpha\left(R\vec{a} \wedge R\vec{a}_0\right) + \alpha h_1 R\vec{a} + \vec{b}$$

olup (6.25), (6.28) ve (6.29) den

$$\vec{r}_{X'} = -\alpha\left(\underbrace{R\vec{a}}_{\vec{u}} \wedge R\vec{a}_0\right) + \alpha h_1 \underbrace{R\vec{a}}_{\vec{u}} + \vec{b}$$
$$= -\alpha\left(\vec{u} \wedge \left[\frac{1}{\alpha}\left(\vec{u}_0 - \vec{b} \wedge \vec{u}\right)\right]\right) + \left[h_2 - \left\langle \vec{u}, \vec{b} \right\rangle\right]\vec{u} + \vec{b}$$
$$= -\left(\vec{u} \wedge \left[\left(\vec{u}_0 - \vec{b} \wedge \vec{u}\right)\right]\right) + h_2\vec{u} - \left\langle \vec{u}, \vec{b} \right\rangle \vec{u} + \vec{b}$$
$$= -\vec{u} \wedge \vec{u}_0 + \vec{u} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{u}\right) + h_2\vec{u} - \left\langle \vec{u}, \vec{b} \right\rangle \vec{u} + \vec{b}$$
$$= -\vec{u} \wedge \vec{u}_0 - \underbrace{\left\langle \vec{u}, \vec{u} \right\rangle}_{1} \vec{b} + \left\langle \vec{u}, \vec{b} \right\rangle \vec{u} + h_2\vec{u} - \left\langle \vec{u}, \vec{b} \right\rangle \vec{u} + \vec{b}$$
$$= -\vec{u} \wedge \vec{u}_0 - \vec{b} + \left\langle \vec{u}, \vec{b} \right\rangle \vec{u} + h_2\vec{u} - \left\langle \vec{u}, \vec{b} \right\rangle \vec{u} + \vec{b}$$
$$= -\vec{u} \wedge \vec{u}_0 + h_2\vec{u}$$

olarak elde edilir. Bu sonuç $\hat{U}$ point-line'si için pozisyon vektörüdür;

2) $\vec{a}$ birim time-like vektör ise (6.24) den $\vec{r}_X$ pozisyon vektörü

$$\vec{r}_X = \vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h_1\vec{a}$$

denklemine belirlidir. Aynı zamanda $\vec{r}_{X'}$ pozisyon vektörü (6.16) den

$$\vec{r}_{X'} = \alpha R \vec{r}_X + \vec{b}$$

dir. Burada $R \in SO_1(3)$, α homotetik skalar ve $b \in \mathbb{R}_1^3$ dir. (6.25) ve (6.26) deki blok matrisleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\vec{u}_0 &= R^{\times} \underbrace{R\vec{a}}_{\vec{u}} + \alpha R \vec{a}_0 \\
&= \vec{b} \wedge \vec{u} + \alpha R \vec{a}_0 \\
\Rightarrow R\vec{a}_0 &= \frac{1}{\alpha}\left(\vec{u}_0 - \vec{b} \wedge \vec{u}\right) \qquad (6.30)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
h_2 &= -\vec{b}^T \underbrace{R\vec{a}}_{\vec{u}} + \alpha h_1 \\
&= -\vec{b}^T \vec{u} + \alpha h_1 \\
\Rightarrow \alpha h_1 &= h_2 + \left\langle \vec{b}, \vec{u} \right\rangle \qquad (6.31)
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{X'} &= \alpha R \vec{r}_X + \vec{b} \\
&= \alpha R\left(\vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h_1 \vec{a}\right) + \vec{b} \\
&= \alpha R\left(\vec{a} \wedge \vec{a}_0\right) + \alpha R h_1 \vec{a} + \vec{b} \\
&= \alpha\left(R\vec{a} \wedge R\vec{a}_0\right) + \alpha h_1 R\vec{a} + \vec{b}
\end{aligned}$$

olup (6.26), (6.30) ve (6.31) den

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{X'} &= \alpha\left(\underbrace{R\vec{a}}_{\vec{u}} \wedge R\vec{a}_0\right) + \alpha h_1 \underbrace{R\vec{a}}_{\vec{u}} + \vec{b} \\
&= \alpha\left(\vec{u} \wedge \left[\frac{1}{\alpha}\left(\vec{u}_0 - \vec{b} \wedge \vec{u}\right)\right]\right) + \left[h_2 + \left\langle \vec{u}, \vec{b} \right\rangle\right]\vec{u} + \vec{b} \\
&= \left(\vec{u} \wedge \left[\left(\vec{u}_0 - \vec{b} \wedge \vec{u}\right)\right]\right) + h_2 \vec{u} + \left\langle \vec{u}, \vec{b} \right\rangle \vec{u} + \vec{b} \\
&= \vec{u} \wedge \vec{u}_0 - \vec{u} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{u}\right) + h_2 \vec{u} + \left\langle \vec{u}, \vec{b} \right\rangle \vec{u} + \vec{b} \\
&= \vec{u} \wedge \vec{u}_0 + \underbrace{\left\langle \vec{u}, \vec{u} \right\rangle}_{-1} \vec{b} - \left\langle \vec{u}, \vec{b} \right\rangle \vec{u} + h_2 \vec{u} + \left\langle \vec{u}, \vec{b} \right\rangle \vec{u} + \vec{b} \\
&= \vec{u} \wedge \vec{u}_0 - \vec{b} - \left\langle \vec{u}, \vec{b} \right\rangle \vec{u} + h_2 \vec{u} + \left\langle \vec{u}, \vec{b} \right\rangle \vec{u} + \vec{b} \\
&= \vec{u} \wedge \vec{u}_0 + h_2 \vec{u}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu sonuç $\hat{U}$ point-line'si için pozisyon vektörüdür □

Örnek 6.2.1 Şekil 6.3'de gösterilen $\hat{A}=(\vec{a},\vec{a}_0,h_1)$ point-line vektörü için yönlendirilmiş birim vektörü $\vec{a}=(1,1,1)$, moment vektörü $\vec{a}_0=(1,0,1)$ olsun. (6.16) de verilen benzerlik dönüşümü ve (6.25) de verilen blok matrisi yardımıyla $\hat{A}$ point-line'sini $\hat{U}$ point-line'sine dönüştürelim. Burada, $\alpha=4$, $\vec{b}=(-1,0,2)$ ve $\theta=\ln 2$ olarak aldığımızda,

$$\begin{aligned}\vec{A}&=\vec{a}+\varepsilon\vec{a}_0\\&=(1,1,1)+\varepsilon(1,0,1)\end{aligned}$$

şeklindedir. Dikme ayağından referans noktasına olan uzaklık $h_1=\langle\vec{r}_X,\vec{a}\rangle=1$ olsun. Bu durumda, X son noktanın pozisyon vektörü

$$\begin{aligned}\vec{r}_X&=-\vec{a}\wedge\vec{a}_0+h_1\vec{a}\\&=(2,1,2)\end{aligned}$$

dir. Buna göre şekil 6.3' deki $\hat{U}$ point-line'sinin $\vec{u}$ birim doğrultman vektörü, $\vec{u}_0$ moment vektörü ve $\vec{r}_{X'}$ yer vektörü aşağıdaki gibidir.

$$\vec{u}=R\vec{a}=\begin{bmatrix}\cosh\theta & \sinh\theta & 0\\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_0=R^{\times}R\vec{a}+\alpha R\vec{a}_0=(9,8,2)$$

$$h_2=\vec{b}^TR\vec{a}+\alpha h_1=8$$

$$\vec{r}_{X'}=\alpha R\vec{r}_X+\vec{b}=\begin{bmatrix}12\\11\\10\end{bmatrix} \tag{6.32}$$

dir. Biliyoruz ki point-line vektörünün yer vektörü,

$$\begin{aligned}\vec{r}_{X'}&=-\vec{u}\wedge\vec{u}_0+h_2\vec{u}\\&=(12,11,10)\end{aligned}$$

olup bu sonuç (6.32) ile çakışır.

Örnek 6.2.2 Şekil 6.3'de gösterilen $\hat{A}=(\vec{a},\vec{a}_0,h_1)$ point-line vektörü için yönlendirilmiş birim vektörü $\vec{a}=(1,0,0)$, moment vektörü $\vec{a}_0=(0,1,2)$ olsun. (6.16) de verilen benzerlik dönüşümü ve (6.26) de verilen blok matrisi yardımıyla $\hat{A}$ point-line' sini $\hat{U}$ point-line' sine dönüştürelim. Burada, $\alpha=\sqrt{2}$, $\vec{b}=(2,-1,3)$ ve $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$ olarak aldığımızda,

$$\begin{aligned}\vec{A}&=\vec{a}+\varepsilon\vec{a}_0\\&=(1,0,0)+\varepsilon(0,1,2)\end{aligned}$$

şeklindedir. Dikme ayağından referans noktasına olan uzaklık $h_1=\langle\vec{r}_X,\vec{a}\rangle=2$ olsun. Bu durumda, X referans noktasının pozisyon vektörü

$$\begin{aligned}\vec{r}_X&=+\vec{a}\wedge\vec{a}_0+h_1\vec{a}\\&=(2,-2,1)\end{aligned}$$

dir. Buna göre şekil 6.3' deki $\hat{U}$ point-line' sinin $\vec{u}$ birim doğrultman vektörü, $\vec{u}_0$ moment vektörü ve $\vec{r}_{X'}$ yer vektörü aşağıdaki gibidir.

$$\vec{u}=R\vec{a}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_0=-R^{\times}R\vec{a}+\alpha R\vec{a}_0=(0,4,-2)$$

$$h_2=-\vec{b}^{T}R\vec{a}+\alpha h_1=2+2\sqrt{2}$$

$$\vec{r}_{X'}=\alpha R\vec{r}_X+\vec{b}=\begin{bmatrix}2+2\sqrt{2}\\2\\4\end{bmatrix}\tag{6.33}$$

dir. Biliyoruz ki point-line vektörünün yer vektörü,

$$\begin{aligned}\vec{r}_{X'}&=\vec{u}\wedge\vec{u}_0+h_2\vec{u}\\&=\left(2+2\sqrt{2},2,4\right)\end{aligned}$$

olup bu sonuç (6.33) ile çakışır.

KAYNAKLAR

Acratalishian, A. 1989. *"E^{2n+1} de Lineer Vektör Alanları",* Doktora Tezi Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Aydoğmuş, Ö., Kula, L. and Yaylı, Y. 2008. "*On point-line displacement in Minkowski 3-space*" Differential Geometry-Dynamical Systems, Vol. 10, pp. 32-43.

Bottema, O. and Roth, B. 1979. "*Theoretical Kinematics*", North Holland Publ. Company New York

Hacısalihoğlu, H. H. 1983. "*Diferansiyel Geometri*", İnönü Üniversitesi Fen Fakültesi Yayını.

Hacısalihoğlu, H. H. 1980a. "*Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler*", İnönü Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Yayınları, Ankara.

Hacısalihoğlu, H. H. 1980b. "*Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş*", Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayını.

Hacısalihoğlu, H. H. 1971. "*On The Rolling of One Curve or Surface Upon Another*", Proceedings of the Royal Irish Academy. 71(2), 13-16.

Hacısalihoğlu, H. H. 1983. "*Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*", Gazi Üniversitesi Fen –Ed. Fakültesi Yayınları, Mat. No. 2, Ankara.

Karger, A. and Novak, J. 1985. "*Space Kinematics and Lie Groups*", Gordon and Breach Science Publishers.

McCarthy, J. M. 1990. "*An Introduction to Theoretical Kinematics*", The MIT Pres Cambridge, Massachusetts London, England.

Odehnal, B., Pottmann, H. and Wallner, J. 2000. “*Equiform Knematic and the Geometry of Line Elements*”, Mathematics subject Classification.

O’neill, B. 1983. “*Semi Riemannian Geometry*”, Academic Press, New York, London.

Ünal, Z. 2007. “*Lorenz Uzayında Cebirsel Metodlarla Kinematik*”, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri, Doktora Tezi.

Yano, K. and Kon, M. 1984. “*Structures on manifolds*”, World Scientific, Singapore.

Zhang, Y. and Ting, K. L. 2004. “*On point-line geometry and displacement*”, Mech. Mach. Theory 39, 1033-1050.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK
Doğum Yeri **:** KAYSERİ
Doğum Tarihi : 1982
Medeni Hali **:** Evli
Yabancı Dili **:** İngilizce

EĞİTİM DURUMU (Kurum ve Yıl) :

Lise	**:** Kayseri Lisesi – 2000
Lisans	**:** Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2002 - 2006)
Tezsiz Yüksek Lisans	**:** Sakarya Üniversitesi OFMA Tezsiz Yüksek Lisans (2006 - 2007)
Tezli Yüksek Lisans	**:** Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı – (2007 - 2009)
Doktora	**:** Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı – (2009 - 2012)

ÇALIŞTIĞI KURUM/KURUMLAR ve YIL :

- Ankara Cemal Şaşmaz Fen Lisesi, Yurt Müdür Yardımcılığı, Matematik Öğretmeni ve Olimpiyat Koordinatörlüğü, 2006 - 2008
- İngiltere Wisdom School, Matematik Öğretmeni, 2008 – 2009
- Ankara Öncü Koleji, Matematik Öğretmeni, 2009 - 2010

İŞTİRAK EDİLEN SEMİNER VE DİĞER ETKİNLİKLER :

- **II. Türk Dünyası Matematik Sempozyumu Katılımcı (**Sakarya Üniversitesi-SAKARYA**)**

YAYINLAR :

- Öztürk, U., Hacısalihoğlu, H.H., Yaylı, Y., **Koç Öztürk, E.B.** "*Dual Quaternion Frames",* Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.

- **Koç Öztürk, E.B**., Öztürk, U., Yaylı, Y., Özkaldı, S., "*Integral Curves of a Spiral Vector Field In E^n*", International Journal Of Mathematical Sciences & Applications

- Öztürk, U., **Koç Öztürk, E.B.,** Yaylı, Y., **"***Dual Quaternion Frames Of A Non Ligthlike Curve",* International Journal Of Contemporary Mathematics

EDİTÖRLÜK :

- **International Journal of Mathematical Sciences & Aplications**
  (Ocak 2011 den itibaren)
- **International Journal of Open Problems in Mathematics and Aplications**
  (Şubat 2011 den itibaren)