UZUN DÖNEM BAKIM SİGORTASINDA UZUN ÖMÜRLÜLÜK RİSKİNİN FİYATLANDIRILMASI

LONGEVITY RISK PRICING IN LONG TERM CARE INSURANCE

ÇİĞDEM LAZOĞLU

Yrd.Doç.Dr. MURAT BÜYÜKYAZICI
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2017

ÇİĞDEM LAZOĞLU'nun hazırladığı **"Uzun Dönem Bakım Sigortasında Uzun Ömürlülük Riskinin Fiyatlandırılması"** adlı çalışma aşağıdaki jüri tarafından **AKTÜERYA BİLİMLERİ ANABİLİM DALI**'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Cenap ERDEMİR
Başkan ....

Yrd. Doç. Dr. Murat BÜYÜKYAZICI
Danışman ....

Doç. Dr. Ayten YİĞİTER
Üye ....

Yrd. Doç. Dr. Yasemin GENÇTÜRK
Üye ....

Yrd. Doç. Dr. Könül BAYRAMOĞLU KAVLAK
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof.Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

☐ **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**
(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

☒ **Tezimin/Raporumun** 12/07/2020 **tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**
(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım taktirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

☐ **Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

22 / 06 / 2017

ÇİĞDEM LAZOĞLU

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

22/ 06 /2017

ÇİĞDEM LAZOĞLU

Annem’e…

ÖZET

UZUN DÖNEM BAKIM SİGORTASINDA UZUN ÖMÜRLÜLÜK RİSKİNİN FİYATLANDIRILMASI

Çiğdem LAZOĞLU

Yüksek Lisans, Aktüerya Bilimleri Bölümü

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Murat BÜYÜKYAZICI

Haziran 2017, 78 sayfa

Beklenen yaşam süresinin uzaması ile kronik hastalıkların görülme sıklığında ve süresinde bir artış meydana gelmiştir. Kronik hastalıklar hastaların fiziksel durumlarında bozulmalara yol açmaktadır. Bu bozukluklar bireylerin günlük ihtiyaçlarını karşılayamamasına ve yaşam kalitesinin bozulmasına sebep olmaktadır. Hasta günlük ihtiyaçlarını karşılamak için başka birey ya da bireylere ihtiyaç duymaktadır. Türkiye'de beklenen yaşam süresi artmaktadır. Beklenen yaşam süresindeki artış bakım hizmetlerine olan talebi artıracaktır. Artan talep devlet bütçesi üzerinde baskı oluşturacaktır. Bu sorunun çözümü olarak ileri yaşlardaki bireyler için uzun dönem bakım sigortası modelleri geliştirilmelidir.

Uzun dönem bakım sigortası genellikle bakıma muhtaçlığın tek bir durum olduğu basit Markov ile modellenir. Fakat yaşlı bireylerin hastalık dereceleri günden güne değişmektedir. Hastalığın derecesi bakıma muhtaç durumda kalış süresini etkilemektedir. Bu yüzden bakıma muhtaç durumda kalış süresini tek bir durumla açıklamak yetersiz olur. Bu çalışmada literatürde yer alan birden çok bakıma muhtaçlık durumlu uzun dönem bakım sigortası modelinin Türkiye uyarlaması yapılmıştır. Bakıma muhtaçlık durumu, bakıma muhtaçlık derecesine göre 4'e ayrılmış ve geçiş olasılıklarının yarı-Markov süreci olduğu varsayılmıştır. Yarı-Markov sürecinde geçiş olasılıkları sadece şu anki duruma değil, aynı zamanda mevcut durumda kalış süresine de bağlıdır.

Bakıma muhtaç durumda kalış süresini açıklamak için yaş ve cinsiyet açıklayıcı değişkenleriyle Cox orantılı tehlike modeli kullanılmıştır. Ayrıca hastalık türünün de

bakıma muhtaç durumda kalış süresini etkilediği düşünülmüştür. Fakat hastalık türleri hakkında bilgi olmadığından gözlemlenemeyen açıklayıcı değişkenden kaynaklı zayıflık modeli kullanılır. Yukarıda belirtilmiş olan bakıma muhtaç durumda kalış süresi modeli için parametre tahmini yapılır.

Bakıma muhtaç durumda kalış süresi için literatürde var olan parametre değerleri kullanılmıştır. Türkiye'nin genel ölüm olasılıkları ve Fransa'nın sağlıklı durumdan bakıma muhtaç duruma geçme olasılıkları kullanılarak $[40,60]$ yaş aralığındaki sağlıklı bireylerin yaşam süreleri Monte Carlo benzetim yöntemiyle tahmin edilmiştir. Benzetim iki senaryo altında çalışılmıştır. İlk senaryo ölüm olasılıklarının zamanla değişmediği, ikinci senaryo ölüm olasılıklarının uzun ömürlülük riskine bağlı olarak her yıl değiştiği varsayımına dayanmaktadır. İki senaryo için nakit akış yöntemiyle her yaşa ait prim ve rezerv hesaplanmıştır. Ölüm olasılıklarının ve bakıma muhtaç duruma geçme olasılıklarının uzun dönem bakım sigortasının primi üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Uzun Dönem Bakım Sigortası, Uzun Ömürlülük Riski, Yarı-Markov Süreci, Monte Carlo Benzetim Yöntemi, Sansürleme, Cox-Orantılı Tehlike Modeli, Zayıflık Modeli, Genelleştirilmiş Doğrusal Model

ABSTRACT

LONGEVITY RISK PRICING IN LONG TERM CARE INSURANCE

Çiğdem LAZOĞLU

Master of Science, Department of Actuarial Sciences

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Murat BÜYÜKYAZICI

June 2017, 78 pages

An increase in the incidence and duration of chronic illnesses have occurred with the extension of the expected life span. Chronic diseases lead to deterioration of the physical condition of the patients. These disorders cause individuals to be unable to meet their daily needs and the quality of life to deteriorate. The patient needs other a person or people to meet their daily needs. Life expectancy in Turkey is increasing. Expected increase in life expectancy will increase the demand for care services. Increasing demand will put pressure on the state budget. As a solution to this problem long-term care insurance models should be developed for older people.

Long-term care insurance is usually modeled with simple Markov, which is a single state for dependency. But the degree of disease for elderly individuals vary from day to day. The degree of disease affects the duration in dependency. Therefore, it is inadequate to explain in a single situation the duration in state of dependency. In this study, the long-term care insurance model, which is in the literature, has been adapted to Turkey. The state of dependency is divided into four according to the degree of dependency and the transition probabilities are assumed to be semi-Markov process. Transition possibilities in the semi-Markov process are not only dependent on the current state, but also on the duration of the present state.

The Cox proportional hazard model was used to explain the duration of dependency, with age and gender explanatory variables. It is also thought that the types of disease affects the duration in dependency. But, frailty model that can not be observed because there is no

information about the types of diseases is used. Parameter estimation is performed with duration of dependency model which is mention above.

For the duration of dependency, parameter values existing in the literature are used. The life span of healthy individuals for [40,60] age range was estimated by Monte Carlo simulation using the general mortality rate in Turkey and the incidence rate of France becoming in dependency from a healthy state. Two scenarios were simulated. The first scenario is based on the assumption that the probability of death does not change over time, and the second scenario is based on the assumption that the probability of death changes every year depending on the risk of longevity. For both scenarios, premiums and reserves for each age are calculated by cash flow method. Mortality rate and rate of becoming dependent is examined effect on premium of long term care insurance.

Keywords: Long-Term Care Insurance, Longevity Risk, Monte Carlo Simulation Method, Censoring, Cox Proportional Hazard Model, Frailty Model, Generalized Linear Model

TEŞEKKÜR

Bu çalışmam boyunca bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren tez danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Murat BÜYÜKYAZICI'ya

Bu tezin hazırlanma aşamasında göstermiş olduğu anlayış ve destek için bölüm başkanımız sayın Prof. Dr. Meral SUCU'ya

Tez savunma jürisinde yer alan değerli düşünce ve görüşleriyle tezime katkı sağlayan Prof. Dr. Cenap ERDEMİR, Doç. Dr. Ayten YİĞİTER, Yrd. Doç. Dr. Yasemin GENÇTÜRK, Yrd. Doç.Dr. Könül BAYRAMOĞLU'ya

Tez çalışmam boyunca desteğini ve bilgisini benden esirgemeyen Hocam Dr. Ayşe ARIK'a

Bu süreç boyunca beni destekleyen ve her zaman yanımda olan Rümeysa KARATAŞ'a, sevgili oda arkadaşım M.Asım ÖZALP'a

Tez çalışmam boyunca benden hoşgörüsünü ve desteğini esirgemeyen sevgili arkadaşlarım, Müge YELDAN, Samet GENÇGÖNÜL ve İsmail GÜR'e teşekkürlerimi sunuyorum.

Her zaman ve her durumda yanımda olan canım dostum Merve ŞENTÜRK'e, dualarını hiçbir zaman üzerimden eksik etmeyen ablalarım Hatice COŞAR, Gonca DEMİR, kardeşim Duygu KOBAL ve eniştem Muammer DEMİR'e benim bugünlere gelmemde en büyük payın sahibi olan babam Muammer KOBAL ve şuan hayatta olmayan fakat hep kalbimde olan canım annem Nergül KOBAL'a ve son olarak yüzümün gülme sebebi olan yol arkadaşım Hacı LAZOĞLU'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT iii
TEŞEKKÜR v
İÇİNDEKİLER vi
ŞEKİLLER viii
ÇİZELGELER x
SİMGELER VE KISALTMALAR xi
1. GİRİŞ 1
2. UZUN DÖNEM BAKIM SİGORTASI 5
2.1. Uzun Dönem Bakım Sigortasının Ortaya Çıkışı 5
2.2. Kullanıldığı Ülkelerde Uzun Dönem Bakım Sigortası 5
2.3. Bakıma Muhtaçlığın Tespiti için Ölçütler 6
3. GENEL BİLGİLER 9
3.1. Yaşam Analizi için Tanımlar 10
3.1.1. Başarısızlık Süresinin Fonksiyonları 10
3.1.2. Sansürleme 11
3.1.2.1. Sağdan Sansürleme 12
3.1.2.2. Soldan Sansürleme 13
3.1.2.3. Aralık Sansürleme 14
3.1.3. Kesilme 14
3.2. Markov Modelleri 15
3.2.1. Markov Zinciri 15
3.2.2. Markov Süreci 16
3.2.3. Yarı-Markov Süreci 16
3.3. Yaşam Çözümlemesinde Kullanılan Weibull Dağılımı 19
3.4. Yarı Parametrik Yaşam Modeli: Cox Orantılı Tehlike Modeli 20
3.5. Zayıflık Modeli 22
3.6. Genelleştirilmiş Doğrusal Model 24
3.6.1. Bernoulli Dağılımı için Genelleştirilmiş Lineer Model 25
3.7. Nelder Mead Yöntemi 25
4. UZUN DÖNEM BAKIM SİGORTA MODELİ 28
4.1. Uzun Dönem Bakım Sigortası Modelini Oluşturmada Kullanılan Veri 29

4.2. Bakıma Muhtaçlık Durumlarında Geçiş Olasılıkları ... 32
4.3. Model Değişkenleri ... 33
4.4. Zayıflık Etkisinin Modele Eklenmesi ... 33
4.5. Model ... 35
4.6. Olabilirlik Fonksiyonu ... 35
4.7. Parametre Tahminleri ... 36
5. MONTE CARLO BENZETİM YÖNTEMİ İLE UZUN DÖNEM BAKIM SİGORTA PRİMİNİ HESAPLAMA ... 40
5.1. Benzetim için Gerekli Bilgiler ... 40
5.2. Benzetim için Gerekli Parametreler ... 43
5.3. Benzetim Modeli ... 45
5.4. Benzetim Sonuçları ... 51
5.5. Uzun Dönem Bakım Sigortasında Primlerin Hesaplanması ... 58
5.6. Primin Güven Aralığı ... 61
5.7. Prim Miktarı ve Güven Aralıkları ... 65
5.8. Rezerv Miktarı ... 66
5.9. Primin Parametredeki Değişime Duyarlılığı ... 69
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER ... 72
KAYNAKLAR ... 74
ÖZGEÇMİŞ ... 78

ŞEKİLLER

Sayfa

Şekil 1.1. Uzun Dönem Bakım Sigortası için 3 Durumlu Model.. 2

Şekil 3.1. Sansürlü ve Tam Gözlem Süreçleri.. 12

Şekil 3.2. Yarı-Markov Süreci 19

Şekil 3.3. Yansıtma Durumu 26

Şekil 3.4. Genişletilmiş Yansıtma Durumunu... 27

Şekil 3.5. Büzülme Durumu.. 27

Şekil 3.6. Küçülme Durumu.. 27

Şekil 4.1. Uzun Dönem Bakım Sigortası için Çok Durumlu Model 28

Şekil 4.2. APA Verisi için Değerlendirme Süreçleri 31

Şekil 4.3. Bakıma Muhtaç Durumda Kalış Süresi Modelinin Olasılık Yoğunluk ve Tehlike Hızı Fonksiyonu 38

Şekil 4.4. Cinsiyet ve Yaş Değişkenlerinin Zayıflığa Etkisi... 39

Şekil 5.1. TÜİK'in 2015 Adrese Dayalı Nüfus Kayıt Sistemi Sonuçlarına Göre 40 -100 Yaş Arasındaki Bireylerin Sayısı 40

Şekil 5.2. 2015 Yılında Yaşa ve Cinsiyete Göre Türkiye'deki Tahmini Sağlıklı Birey Sayısı 41

Şekil 5.3. Fransa'da Sağlıklı Bireylerin Yaşa ve Cinsiyete Göre Bakıma Muhtaç Duruma Geçme Olasılıkları... 41

Şekil 5.4. 60 ile 100 Yaş Arasında Bakıma Muhtaçlık Derecelerine Geçiş Olasılıkları..... 42

Şekil 5.5. Geçiş Durumları 48

Şekil 5.6. Benzetime Başlangıç Yaşı 60 Olan Sağlıklı Bireylerin Yaş ve Cinsiyete Göre Bakıma Muhtaç Duruma veya Ölüm Durumuna Geçme Oranları 51

Şekil 5.7. Benzetime Başlangıç Yaşı 60 Olan Sağlıklı Bireylerin Bakıma Muhtaçlık Derecelerine Göre Dağılımları 53

Şekil 5.8. Sisteme Giriş Yaşı 60 Olan Bireylerin Bakıma Muhtaçlık Durumunda Kalış Sürelerinin Giriş Yaşına ve Cinsiyete Göre Dağılımı 54

Şekil 5.9. Sisteme Giriş Yaşı 60 Olan Bireylerin Bakıma Muhtaçlık Durumuna Giriş Yaşı ve Bu Durumda Kalış Süresi 56

Şekil 5.10. 60 Yaşındaki Bireyin Statik Ölüm Olasılıklarıyla Benzetim Sayısına Göre Prim Değeri 65

Şekil 5.11. 60 Yaşında Olan Bireylerin Ödeyeceği Aylık Primin ve Alacağı Aylık Tazminatın Her Bir Yaş Dönemi Sonundaki Birikimli Değeri 67

Şekil 5.12. Bakıma Muhtaçlık Durumlarına Göre Tazminatların Birikimli Değeri 68

Şekil 5.13. 60 Yaşındaki Bireyler için Rezerv 69

ÇİZELGELER

Sayfa

Çizelge 2.1. APA Kurumunun Bakıma Muhtaç Bireylerin Bakıma Muhtaçlık Derecelerine İlişkin Tanımları 8

Çizelge 4.1. Markov Geçiş Olasılıkları 32

Çizelge 4.2. Her Bir Geçiş için Parametre Tahminleri 37

Çizelge 4.3. Zayıflığın Etkisi için Parametre Tahminleri 37

Çizelge 5.1. Benzetim Sonucu Beklenen Yaşam Süreleri 52

Çizelge 5.2. Benzetime Giriş Yaşı 60 Olan Kadınların Her Bir Bakıma Muhtaçlık Durumunda Kalış Süresinin Ortalaması ve Varyansı 57

Çizelge 5.3. Sisteme Giriş Yaşı 60 Olan Erkeklerin Her Bir Bakıma Muhtaçlık Durumunda Kalış Süresinin Ortalaması ve Varyansı 57

Çizelge 5.4. Statik Ölüm Olasılıklarıyla Benzetim Sonucu Elde Edilen Prim Değeri ve Güven Aralığı 65

Çizelge 5.5. Dinamik Ölüm Olasılıklarıyla Benzetim Sonucu Elde Edilen Prim Değeri ve Güven Aralığı 66

Çizelge 5.6. 60 Yaşındaki Bireylerin Aylık Ödeyeceği Priminin Farklı Risk Faktörlerine Duyarlılığı 70

Çizelge 5.7. 60 Yaşındaki Bireylerin Aylık Ödeyeceği Priminin Farklı Risk Faktörlerine Duyarlılığı 70

SİMGELER VE KISALTMALAR

AGGIR Özel Gerontoloji Gruplarının Uluslararası Standartlar Teşkilâtı Kaynakları (Autonomie Gérontologique Groupes İso-Ressources)

APA Özel Bağımsızlık Ödeneği (Allocation Personnalisée d'Autonomie)

UDBS Uzun Dönem Bakım Sigortası

NBD Net Bugünkü Değer

TÜİK Türkiye İstatistik Kurumu

$\boldsymbol{NBD_T}$ Tazminatın Net Bugünkü Değeri

$\boldsymbol{NBD_p}$ Primin Net Bugünkü Değeri

1. GİRİŞ

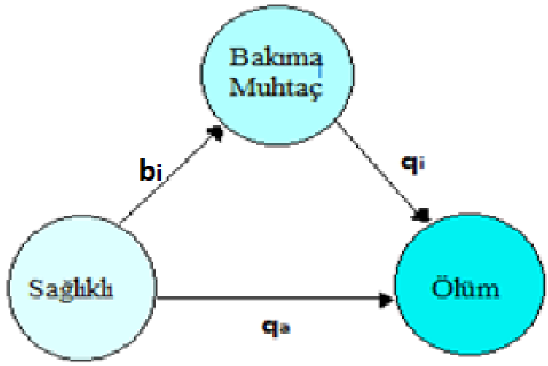
Özellikle gelişmiş ülkelerde 20. yüzyılın başında teknolojideki gelişmelerden dolayı beklenen ömür süresi uzamaktadır. Nitekim Türkiye'de de bu durum pek farklı değildir. Türkiye İstatistik Kurumu'nun(TÜİK) 2013 yılındaki nüfus projeksiyonuna göre 2023 yılında 65 ve üzeri yaştaki birey sayısının tüm nüfusa oranı %10,2 iken, bu oranın 2075'te %27,7 olması beklenmektedir[1]. Bu demografik değişim bakım hizmetlerine olan talebi artıracaktır. İlerleyen yıllarda bakım hizmetleri için yapılan harcamalar giderek artacaktır. Artan harcamaların devlet bütçesi üzerinde baskı oluşturması beklenmektedir.

Bakıma muhtaçlık riski; engellilik, yaşlılık, hastalık ve malullük gibi sebeplerden ötürü kişinin bedensel hareket edebilirliğinin kısıtlı olması sonucu olarak başka birey ya da bireylere ihtiyaç duyma tehlikesidir.

Bakım sigortası, yaşlı bireylerin bakıma muhtaçlık riskini karşılamak amacıyla uygulanan sosyal sigorta sisteminin bir koludur. Sağlık sigortasını ve bakım sigortasının ayırmak oldukça zordur. Sağlık sigortası çoğu zaman bakıma muhtaç bireyler için gerekli olan koruma ve güveni sağlayamamaktadır. Bu sebepten ötürü gerekli giderler bakıma muhtaç bireyin ailesi tarafından karşılanmaktadır. Bu giderler genellikle gelir seviyesi orta düzeyde olan bir ailenin karşılayamayacağı düzeydedir.

Uzun dönem bakım sigortasının (UDBS) kapsamında sigortalı bireylere hemşire hizmeti ve/veya medikal bakım hizmeti sağlamaktadır. Bu hizmetler sigortalı bireyin bakıma muhtaç olma derecesine göre artmakta veya azalmaktadır. UDBS emeklilik ve sağlık gibi bir sigorta türüne ek teminat kapsamında sunulabildiği gibi özerk bir sigorta da olabilir.

UDBS genellikle çok durumlu modellerle açıklanmaktadır[2]. Kesikli zaman modelleri bireyin sağlıklı, bakıma muhtaç, ölü olmasına göre 3 durumda ifade edilir. Fakat bakıma muhtaçlık durumu, bakıma muhtaçlığın derecesine göre kısmi ya da tam bakıma muhtaçlık biçiminde olabilir.



Şekil 1.1. Uzun Dönem Bakım Sigortası için 3 Durumlu Model

Şekil 1.1'de bireyin sağlıklı, bakıma muhtaç ve ölü olması durumu: b_i sağlıklı bireyin bakıma muhtaç duruma geçme olasılığını, q_i bakıma muhtaç durumdaki bireyin ölmesi olasılığını, q_a sağlıklı bireyin ölmesi olasılığını göstermektedir.

Yaşlılara yönelik olan bu sigortada bakıma muhtaçlığın fazla olmasından dolayı bireyin iyileşmesi çok zordur. Bu yüzden UDBS modelinde tek taraflı geçişlerin olduğu varsayılmaktadır. Bakıma muhtaç bireyin iyileşme ihtimali olmadığı varsayılmaktadır.

Şekil 1.1'de gösterilen basit UDBS modelinde, bakıma muhtaçlık derecesinin dikkate alınmaması bu sigorta için prim hesaplarında gerçekçi olmayan sonuçlara sebep olmaktadır. Bu yüzden bakıma muhtaçlık durumları derecelendirilmeli ve bu derece üzerinden fiyatlandırma yapılmalıdır.

Çok durumlu UDBS Markov özelliğine sahip olduğu varsayımıyla kolay şekilde değerlendirilebilir. Bu varsayım altında Hoem[3] yaşam olasılıklarını birtakım teoriler çerçevesinde geliştirmeye çalışmıştır. Bu teoriler dahilinde aktüeryal değer, ileriye dönük ön ödeme rezervi vb. kavramlar için formüller geliştirmiştir. Panjer[4] HIV virüsü bulaşmış bireylerin mortalite oranlarını modellenmiştir. Ramsay[5] enfeksiyon evrelerini temsil eden durumlar için Markov sürecini kullanmıştır. Tolley ve Manton[6] durum uzayındaki çeşitli risk faktörlerini içeren ölüm ve morbidite olasılıkları için model tasarlamışlardır. Pitacco[7] maluliyet tazminatlarının aktüeryal modeli için çok durumlu Markov ve yarı-Markov modelin nasıl kullanılacağını göstermiştir. Haberman ve Pitacco[8] sigorta poliçesinden elde edilen kârın stokastik özelliklerini incelemiştir.

Yarı-Markov süreçleri için geçiş olasılıkları sadece şu anki duruma bağlı değil; bu durumda kalınan süreye de bağlıdır. Commenges[9] kompleks olayları modellerken yarı-Markov sürecini epidimiyoloji alanında incelemiş ve bu sürecin Markov sürecinden daha iyi sonuç verdiği görmüştür. Aynı şekilde Foucher[10] her bir durumda kalış süresinin önemini vurgulamış ve böbrek nakil hastalarının takibinde yarı-Markov sürecini kullanmıştır.

Aktüeryal alanlarda yarı-Markov süreçlerin uygulaması ilk olarak Janssen[11] tarafından 1966 yılında gerçekleştirilmiştir. Hoem[12], Şahin ve Balcer[13], Carravetta, De Dominicis, Manca[14] gibi birçok araştırmacı yarı-Markov sürecini aktüeryal uygulamalarda kullanmıştır.

Hayat sigortası ve UDBS literatürde sigorta poliçelerinin veya portföylerinin değerlendirilmesi üzerine çalışmalar yapılmıştır. Beekman[15] günlük yaşam aktivitelerinin(ADL) ilk kez kaybedilme zamanını rassal değişken olarak inceleyerek UDBS için prim hesaplamıştır. Parker[16] dönem, ertelenmiş ve karma hayat poliçeleri gibi farklı poliçe portföyünü, stokastik ölüm olasılıkları ve faiz için incelemiştir. Hayatta kalma ve faiz oranı koşullarıyla yatırım riskini ve sigorta riskini ayrıştırmıştır. Deleglise[17] UDBS'ye sahip hasta bireylerin yaşam süresini çok durumlu Markov modelleri ile açıklamıştır. Gauzere[18] çok durumlu model ile farklı geçiş yoğunluklarının düzeltilmiş tahminleri için parametrik olmayan yaklaşımlar kullanmıştır. Geçiş olasılıkları, UDBS'ye sahip hasta bireylerin yaşına bağlıdır. UDBS'ye sahip ağır hastalar için bu yaklaşımlar yetersizdir. Czado and Rudolph[19] gözlemlenen hasarların; bakım tipi, cinsiyet ve hastalığın şiddeti gibi faktörlerin yaşam eğrisine etkisini incelemiştir. Çok durumlu Markov modelinde durumlar arası geçiş yoğunluğu Cox orantılı tehlike modeli ile tahmin edilmiştir. Helms[20] geçiş olasılıklarını, uzun dönem bakım planları ve gerekli prim değerini veren aktüeryal değerleri hesaplayarak elde etmiştir. Levantesi ve Menzietti[21] gelecekteki demografik trendlerden ve uzun dönem bakım portföyüne ilişkili etkilerin belirsizliğinden kaynaklanan riskleri değerlendirmiştir.

Bu çalışmada bakıma muhtaç bireyler için UDBS sistemi oluşturulmuştur. İkinci bölümde UDBS'yi uygulayan ülkelerden ve uygulama şeklinden bahsedilmiştir. Bakıma muhtaçlık durumları, bakıma muhtaçlık şiddetine göre 4 ayrı derecede sınıflandırılmıştır. Sınıflandırma için Özel Gerontoloji Gruplarının Uluslararası Standartlar Teşkilâtı Kaynakları (Autonomie Gérontologique Groupes İso-Ressources, AGGIR) kullanılmıştır[22].

Üçüncü bölümde yaşam analizi, sansürleme, Markov modelleri, Cox orantılı tehlike modeli, zayıflık modeli, genelleştirilmiş doğrusal model hakkında genel tanımlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde yer alan genel bilgiler kullanılarak Biessy'in[22] oluşturduğu bakıma muhtaç durumda kalış süresi modelinden bahsedilmiştir. Bakıma muhtaçlık durumlarının yarı-Markov model olduğu varsayılmıştır. Bakıma muhtaçlık durumunda kalış süresini açıklamak için yaş ve cinsiyet değişkenlerini içeren Cox orantılı tehlike modeli kullanılmıştır. Gözlemlenemeyen hastalık türü değişkeni için zayıflık modeli kullanılmıştır. Bakıma muhtaç durumda kalış süresi için oluşturulan bu modelin parametreleri Nelder Mead yöntemiyle tahmin edilmiştir. Türkiye'de UDBS veya bakıma muhtaç bireylere ait bilgiler mevcut olmadığından bu çalışmada Biessy'in[22] parametre tahmin sonuçlarından yararlanılmıştır.

Benzetimde Biessy'in bakıma muhtaç durumda kalış süresine ilişkin parametre değerleri, Türkiye'deki ölüm olasılıkları ve Fransa'daki sağlıklı durumdan bakıma muhtaç duruma geçiş olasılıkları kullanılmıştır. Benzetim için iki senaryo oluşturulmuştur. İlk senaryo ölüm olasılıklarının zamanla değişmediği, ikinci senaryo ölüm olasılıklarının uzun ömürlülük riskine bağlı olarak her yıl değiştiği varsayımına dayanmaktadır. Bu senaryolar ile Türkiye için $[40,60]$ yaş aralığındaki sağlıklı bireylerin yaşam sürelerine ilişkin veri seti Monte Carlo benzetim yöntemiyle elde edilmiştir. İki senaryo için sonuçlar karşılaştırılmıştır. Her yaşa ait prim, prim için güven aralığı ve yıllık rezerv miktarları hesaplanmıştır. Ölüm olasılıklarının ve bakıma muhtaç duruma geçme olasılıklarının uzun dönem bakım sigortasının primi üzerindeki etkisi incelenmiştir.

2. UZUN DÖNEM BAKIM SİGORTASI

Yaşam süresinin uzaması ile bakıma muhtaçlık riskinin artışı paralellik göstermektedir. Bakıma muhtaçlık riskinin zararlarını en aza indirgemek için bakım güvence modelleri oluşturulmalıdır. Dünyada bakıma muhtaçlık riskine karşı çözüm amaçlı geliştirilen iki bakım güvence sistem modeli mevcuttur[23]. Birincisi, bakım sigortasının yeni bir sigorta kolu olarak, ikincisi ise genel vergilerden finanse edilen devlet destekli bir sosyal yardım sistemi olarak düşünülmesidir. Birçok Avrupa ülkesi bakım güvence sistemlerinden birini tercih ederken, bazı ülkeler karma bir güvence sistemi tercih etmektedirler.

2.1. Uzun Dönem Bakım Sigortasının Ortaya Çıkışı

19. yüzyılın sonlarında Almanya Sosyal Sigorta Sistemi emeklilik, sağlık ve kaza sigortaları olmak üzere üç koldan oluşmaktaydı[24]. Bakıma muhtaçlık riskine karşı herhangi bir farkındalık gelişmemişti. Yaşam kalitesinin yükselmesi, sağlık alanındaki yatırımların artması ve teknolojik gelişmelerin sonucu olarak beklenen yaşam süresinin artması ile 20. yüzyılın ikinci yarısından itibaren bakıma muhtaç kişi sayısı artmıştır. Bu artış sonucu ortaya çıkan giderler, sağlık sigortasının karşılayamayacağı noktaya ulaşmıştır. Almanya'da 1988 yılında yapılan sağlık reformu ile bakıma muhtaç durumda kalan kişiye sağlık sigortasında belli bir sosyal gelir sağlanmıştır. Almanya'da bakım sigortası yaklaşık 20 yıllık bir tartışma ve değerlendirmenin ardından 1 Ocak 1995 tarihinde yürürlüğe girmiştir[24]. Diğer sigorta kollarında olduğu gibi bakım sigortasının da finansmanı işçi ve işverenlerden alınan eşit oranlı primlerle sağlanmaktadır.

Türkiye'de UDBS 2010 yılından önce pek gündemde olan bir konu değildi. İlk olarak Aile ve Sosyal Politikalar Bakanlığı tarafından 31.12.2010 yılında Bakım Hizmetleri Stratejisi ve Eylem Planı'nda bakıma muhtaç bireylerin ihtiyaçlarını karşılamak için stratejik plan belirlenmiştir. Dahası 2011 yılında sosyal hizmetlerin sadece kamu değil; özel sektör tarafından da sunulması teşvik edilmeye çalışılmıştır. Fakat bu çalışmalar yetersizdir ve bakım sigortası ihtiyacını tam olarak karşılayamamaktadır.

2.2. Kullanıldığı Ülkelerde Uzun Dönem Bakım Sigortası

Türkiye'de UDBS Almanya, Japonya, Hollanda, İngiltere, Amerika, Avusturalya gibi ülkelerde uygulanan sigorta sisteminden daha sınırlı bir şekilde uygulanmaktadır.

UDBS'de prim toplama şekli, sigorta kapsamına giren kişiler, sigortanın kapsamı, verilen hizmetlerin seviyesi ve bakım güvence modeli ülkeden ülkeye farklılık göstermektedir.

Örneğin Almanya ve Hollanda’da bakım sigorta sistemi benzerlik göstermesine rağmen, Japonya bu ülkelerden oldukça farklıdır.

Almanya'da ilke olarak herkes sosyal bakım sigortası veya bireysel bakım sigortası kapsamında bulunmaktadır. Zorunlu sağlık sigortası kapsamındaki kişiler otomatik olarak sosyal bakım sigortası kapsamına girmektedirler. Ayrıca sigorta sisteminde bulunan bireylerin aile üyeleri de prim ödemeksizin bu sigorta kapsamına dahil olmaktadırlar.

Japonya'da UDBS 40 yaş ve üzerindeki bireylere uygulanmaktadır. 40 ile 64 yaş arasındaki bireylerin sistemden faydalanabilmeleri için mutlaka yaşa ve yaşlılığa bağlı bir hastalığa (demans, kardiyovasküler, parkinson, romatoid artrit, damar sertliği, beyin omurilik dejenerasyonu vb.) yakalanması gerekmektedir[23]. Ayrıca bireyin bu sisteme dahil olabilmesi için en az 6 ay bakıma muhtaç durumda olmalıdır. Bireyin iyileşme olasılığından dolayı sisteme dahil kişiler 3-6 ayda bir tekrar değerlendirilmektedir.

Fransa'da UDBS hem özel hem de devlet desteğiyle sürdürülmektedir. Bakıma muhtaç olan yaşlı bireylere evde bakım, hemşire yardımı gibi yardımların sağlanmasının yanı sıra isteyen bireylere para yardımı sağlanmaktadır.

Hollanda ve Danimarka’da bakım sigortası vergilerden finanse edilmektedir. Bu ülkelerde bireye, bakıma muhtaçlık derecesine ve gelir düzeyine göre ücretli, ücretsiz veya kısmi katılımlı bakım hizmetleri verilmektedir[25].

2.3. Bakıma Muhtaçlığın Tespiti için Ölçütler

Bazı bireyler daha fazla bakıma muhtaçken, bazı bireyler daha az bakıma muhtaçtır. Bireylerin bakıma muhtaçlık durumlarının derecelendirilmesi bakım sigortasının maliyetlerinin hesaplanması için oldukça önem arz etmektedir.

UDBS, her bakıma muhtaç bireyi kapsamamaktadır. Bireyin sisteme girebilmesi için bazı şartları sağlaması gerekmektedir. Bireyler bakıma muhtaçlık derecesi ve yaşına göre sisteme dahil edilmekte veya edilmemektedir. Bakıma muhtaç bireyin UDBS kapsamına girebilmesi için genellikle 65 ve üzeri yaşta sahip olması gerekir.

Türkiye'de özel veya devlet destekli UDBS mevcut değildir. UDBS yerine kamusal sosyal yardım olan evde bakım sistemi veya maddi durumu yetersiz olan engelli bireylere belli oranda maddi destek sağlayan bir sistem vardır. Evde bakım sistemi engelli tüm bireylere uygulanırken, maddi durumu yetersiz olmasından dolayı maddi destek sağlayan sistem için gerekli olan şartlar; kişi başına düşen gelirin, asgari ücretin %67'sinden daha az olması, bireyin en az %40 ve üzeri özrü bulunup, herhangi bir kanunla kurulmuş sosyal güvenlik kurumundan (SSK, BAĞ-KUR, Emekli Sandığı) hiçbirine tabi olmaması ve muhtaçlığının Sosyal Yardımlaşma ve Dayanışma Vakıfları tarafından belgelenmiş olması gerekir. Bu maddi yardım 3 ayda bir yapılmaktadır ve özür oranına göre iki kademede maddi desteğin miktarı belirlenmektedir. Özür oranı %40 ile %69 arasında olan bireylere yapılan yardımlar, özür oranı %70 olan bireylerden daha azdır.

Türkiye’de bakıma muhtaçlığın tespiti için bir model geliştirilmemiştir. Bunun yerine engelli bireylere özürlü sağlık raporu verilmektedir. Bireylerin özür oranı, özürlü sağlık raporu vermeye yetkili hastanelerin sağlık kurulu tarafından belirlenir. Engelli sağlık kurulu raporu, Sağlık Bakanlığı’nın belirlemiş olduğu özürlülük oranı cetveli ile belirlenmektedir. Sağlık kurulunda olan doktorlar bir yönetmelik çerçevesinde özür oranını belirlemekte özgürdür. Birden fazla özür grubuna sahip olan bireylerin tam vücut engel oranı toplama yöntemiyle elde edilmektedir. Toplama yöntemi, Balthazard Hesaplama Tablosu ile hesaplanarak bir özür oranı belirlenir. Sağlık kurulunca, engelli sağlık kurulu raporunun geçerlilik süresi belirlenir. Bazı engelli bireyler için geçerlilik süresi, sürekli olmaktadır. Bu bireylerin raporlarını yenilemesine gerek olmamakla birlikte, istenilen bir zamanda engelli sağlık kurulu raporu için tekrar başvurabilmektedir.

Türkiye'de engelli bireylerin özür oranı özürlü sağlık raporu ile belirtilen şekilde hesaplanır fakat UDBS özür oranına göre değil; bireylerin günlük hayatlarında ihtiyaçlarının ne kadarını karşılayabildiğine göre gruplandırılır. Bakıma muhtaçlığın tespiti ve derecelendirilmesi için Ekonomik Kalkınma ve İşbirliği Örgütü(OECD) ülkeleri tarafından genellikle AEDL-Modeli (Krohwinkal Modeli), ADL-Modeli (juchi Modeli), Gordon Modeli ve NANDA-Reaksiyon Modeli olmak üzere 4 model kullanılır. En sık kullanılan ADL modelinde hayata devam etmek için tanımlanan 12 aktiviteden yola çıkarak bireyin bakıma muhtaç olup olmadığına karar verilir ve bakıma muhtaçlığın derecesi belirlenir[26].

Genellikle sigorta şirketleri bakıma muhtaçlığın tespiti için ADL modelini kullanır. Fakat her ülke kendi sosyo-ekonomik yapısını göz önünde bulundurarak bakıma muhtaçlık derecesinin tespiti için kendi ölçütlerini oluşturabilir. Türkiye için yaşlı ve bakıma muhtaç bireylere ait kişi bazlı bilgilere ulaşılamadığı için Guillaume Biessy’in[22] 2015 yılındaki çalışmasında sunduğu bilgiler kullanılarak bu çalışma gerçekleştirilmiştir. Guillaume Biessy çalışmasında bakıma muhtaç yaşlı bireyler için Fransa kamu tarafından yardım alınan Öze l Bağımsızlık Ödeneği (Allocation Personnalisée d’Autonomie) APA verisinden faydalanmıştır. APA veri setinde bakıma muhtaç bireyler AGGIR’de 6 farklı grupta bakıma muhtaçlık durumlarına göre sınıflandırılmıştır. Bakıma muhtaçlık durumları derecelerle sınıflandırılmaktadır. 6 dereceden oluşan bakıma muhtaçlık durumları mevcuttur. Bu dereceler kişinin günlük ihtiyaçlarını karşılamak için başka bireylere ihtiyaç duyma şiddetine göre şekillenmektedir.

AGGIR'e göre bireyin bakıma muhtaçlık derecesi aşağıdaki çizelge dikkate alınarak belirlenmektedir.

Bakıma Muhtaçlık Derecesi	Bakıma Muhtaçlık Derecesine İlişkin Tanımlar
1. Derece	Zihinsel yetenekleri büyük ölçüde bozulmuş, tekerlekli sandalyeye veya yatağa mahkum olan, günlük ihtiyaçlarını karşılamak için başka birey ya da bireylere ihtiyaç duyan, genellikle hayatının son dönemlerinde olan bireyleri ifade eder.
2. Derece	Zihinsel yetenekleri büyük ölçüde bozulmuş, tekerlekli sandalyeye veya yatağa mahkum olan, günlük birçok ihtiyaçlarını karşılamak için başka bireylere ihtiyaç duyan veya zihinsel yetenekleri bozulmuş fakat gözetim altında kendi kendilerine hareket edebilen bireyleri kapsar.
3. Derece	Zihinsel yeteneğine sahip olan fakat fiziksel yetenekleri kısıtlı olan bireyleri içerir. Bir kaç günlük ihtiyacını karşılamanın dışında, banyo yapmak ve temizlik yapmak için yardıma ihtiyacı olan bireyleri kapsar.
4. Derece	Kişiler evlerinin içinde yürüyebilirler fakat temizlik, giyinme, evin dışında bir yerden başka bir yere giderken yardıma ihtiyaç duyarlar.
5. Derece	Kişiler ara sıra temizlik, yemek pişirme ve ev temizliğinde yardıma ihtiyaç duyarlar.
6. Derece	İnsanlar temel günlük ihtiyaçlarını karşılayabilecek seviyededirler.

Çizelge 2.1. APA Kurumunun Bakıma Muhtaç Bireylerin Bakıma Muhtaçlık Derecelerine İlişkin Tanımları[22]

APA veri setinde Çizelge 2.1 'deki tanımlamalara göre kişilerin bakıma muhtaçlık dereceleri belirlenmiştir. 5. ve 6. derece bakıma muhtaçlık durumları incelendiğinde, bu duruma sahip bireyin çok fazla bakıma ihtiyacı olmadığını, hayatını başka bireylerden minimum düzeyde yardım alarak geçirdiği görülmektedir. Bu sebepten bakıma muhtaçlık durumlarının derecesi 1 ile 4 arasında olan bireyler bu sigorta kapsamından yararlanmaktadırlar.

3. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde bakıma muhtaç durumda kalış süresini açıklamak için kullanılacak modellerden bahsedilmiştir.

Gözlem süresince gözlemler hakkında bütün bilgilere sahip olunamamaktadır. Bazı gözlemler hakkında tüm bilgilere sahip olunabildiği gibi kısıtlı bilgiye de sahip olunabilir. Tam gözlemlenemeyen gözlemleri analiz edebilmek için bu gözlemler sansürleme veya kesilme uygulanabilir. Bu çalışmada bakıma muhtaç bazı bireyler tam gözlemlenemediği için sansürleme veya kesilme uygulanmıştır. Bu kapsamda kesilmeden ve sansürlemeden bahsedilmiştir.

Bakıma muhtaçlık durumlarının yarı-Markov sürecine uyduğu düşünülmüştür. Yarı-Markov çekirdeği, Markov geçiş olasılıkları ile geçiş durumunun dağılım fonksiyonunun çarpımıyla elde edilir. Bu yüzden her bir duruma geçişin dağılım fonksiyonunu elde edilmesi gerekmektedir.

Bakıma muhtaç durumda kalış süresi yaşa ve cinsiyete göre değişmektedir. Bu yüzden bakıma muhtaç durumda kalış süresi; yaş ve cinsiyet açıklayıcı değişkenler olmak üzere Cox orantılı tehlike modeliyle açıklanmıştır. Bakıma muhtaç durumda kalış süresine uygulanan Cox orantılı tehlike modelinin temel tehlike fonksiyonunun Weibull dağılım olduğu varsayılmıştır.

Bakıma muhtaç durumda kalış süresi yaş ve cinsiyetin yanı sıra hastalık türüne bağlıdır ve bir durumda kalış sürelerinde heterojenliğe neden olmaktadır. Hastalık türü hakkında bilgi sahibi olunamadığı için zayıflık modeli kullanılmıştır. Hastalık türleri ikiye ayrılmıştır: Nörolojik ve kardiolojik. Hastalık türleri için açıklayıcı değişken yaşa ve cinsiyete göre değişkenlik göstermektedir. Bu yüzden zayıflığı açıklamak için yaş ve cinsiyet değişkeni kullanılmış fakat bu model doğrusal bir regresyon model olmadığı için genelleştirilmiş doğrusal model kullanılmıştır. Hastalık türü 2 grup olduğu için bu modelin Bernoulli dağılımına sahip olduğu düşünülmüştür. Bernouli dağılımı için genelleştirilmiş doğrusal modelden ve zayıflık modelinden bahsedilmiştir.

Bakıma muhtaç durumda kalış süresi için model oluşturulmuştur. Bu modelin parametre tahmini için Nelder-Mead Algoritması kullanılmıştır. Bu yüzden bu parametre tahmin yönteminden bahsedilmiştir.

3.1. Yaşam Analizi için Tanımlar

Yaşam analizi demografik çalışmalarda ölüm kavramının karşılığı olarak ortaya çıkmıştır. Mühendislik, biyoloji, demografi gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Yaşam analizi sayma süreci ile başlamış ve günümüze ulaşmıştır[27].

Canlı veya cansız bir varlığın belirli bir başlangıç zamanı ile başarısızlık olarak adlandırılan olayın gerçekleştiği zaman arasında geçen süreye başarısızlık süresi veya yaşam süresi denir. Bir bireyin ölmesi, hastalığa yakalanması, bir makinenin bozulması, bozulan makinenin tamir edilmesi gibi durumlar başarısızlığa örnek gösterilebilir. Başarısızlık süresi en sık biyomedikal ve endüstriyel yaşam testlerinde olmak üzere ekonomi, biyoloji, demografi ve finans alanlarındaki araştırmalarda kullanılmaktadır.

Gözlemlerin genellikle, birbirinden bağımsız olan n tane bireyin başarısızlık sürelerinden oluştuğu varsayılmaktadır. Başarısızlık süresi analizinde karşılaşılan ilk sorun açıklayıcı değişkenlerin başarısızlık süresine etkisidir. İkinci sorun ise başarısızlık süresinin dağılımı için modellerin belirlenmesini ve tahminini içerir[28].

3.1.1. Başarısızlık Süresinin Fonksiyonları

Başarısızlık süresi, negatif olmayan T rastgele değişkeni ile ifade edilsin. T'nin olasılık dağılımı, yaşam analizinde kullanılan yaşam fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu ve tehlike hızı fonksiyonu ile belirlenebilir. Bu fonksiyonlar arasındaki ilişki sürekli ya da kesikli dağılım altında incelenebilir.

Yaşam fonksiyonu, yaşamsal verileri matematiksel olarak ifade eden başarısızlık süresinin olasılık dağılımıdır ve $S(t)$ ile ifade edilir. Tehlike hızı fonksiyonu ise, bir anda başarısızlık durumunun ortaya çıkması olasılığıdır ve $\lambda(t)$ ile ifade edilir.

T $[0, \infty)$ aralığında sürekli bir dağılıma sahip olduğu varsayımı altında, T rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{\Delta t}$$

dağılım fonksiyonu,

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(s)ds$$

yaşam fonksiyonu,

$$S(t) = 1 - F(t) = P(T > t) = \int_t^\infty f(s)ds$$

tehlike hızının fonksiyonu,

$$\lambda(\mathrm{t}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t \mid T \geq t)}{\Delta t}$$
$$= -\frac{d}{dt} \ln S(t)$$

kümülatif tehlike hızı fonksiyonu,

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\mathrm{s}) ds \qquad (3.1)$$

şeklinde ifade edilir[29].

Ayrıca yaşam fonksiyonu Eşitlik (3.1)'den,

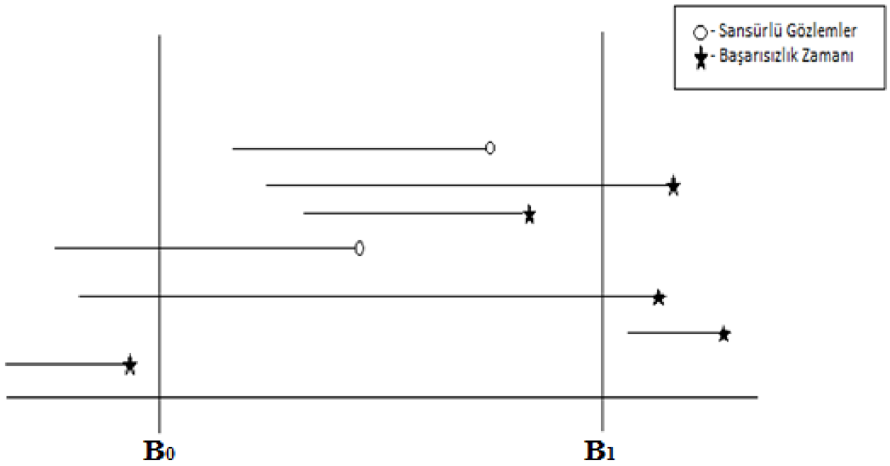
$$S(t) = 1 - F(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\mathrm{s}) ds} = e^{-\Lambda(t)}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

3.1.2. Sansürleme

Sansürleme, olay zamanındaki gözlemlerin tamamlanmamış olması anlamına gelmektedir. Sansürlü gözlem, olay zamanı hakkında kısıtlı bilgiye sahip olan gözlemlerdir. Çevre bilimi alanında bu kayıp değerler ve kısıtlı bilgiler sıklıkla "algılanılamaz" olarak adlandırılır. Gözlemlerdeki bazı kayıp bilgilere rağmen, algılanamaz bilgilerle birlikte verinin istatiksel analizi yapılabilir. Sansürlü veriyi çözümlemek için istatiksel yöntemlere, yaşam analizi alanındaki uzun çalışmaların sonucunda ulaşılmıştır. Yaşam analizinde sansürleme gözlemlenen bir birimin başarısızlığa uğramadan gözlemden çıkması ya da gözlemlenen zaman boyunca başarısızlığa uğramamasıdır. Sansürlü gözlemler sınırlı bilgilere sahiptirler. Sansürlemenin farklı tipleri vardır fakat yaşam analizlerinde yaygın olarak sağdan sansürleme kullanılmaktadır.

Bir veri setindeki gözlemin sansürlenmesinin birçok sebebi olabilir. Örneğin, akciğer kanserli bireylerin ölüm zamanlarına kadar geçen sürelerin 5 yıl boyunca izlendiğini düşünülsün. Bu çalışmadaki bireylerin hepsi 5 yıllık gözlem döneminde ölmemiş olabilir ya da birey söz konusu hastalık dışında farklı bir nedenden dolayı ölmüş olabilir. Bunun gibi birçok sebepten gözlemlenen birim hakkında bilgiyi sansürlemek gerekmektedir.



Şekil 3.1. Sansürlü ve Tam Gözlem Süreçleri

B_0 gözleme başlangıç zamanı, B_1 gözlemin bitiş zamanı olmak üzere sansürlü ve sansürsüz gözlemler Şekil 3.1'de ifade edilmektedir. B_0 ile B_1 arasında geçen süre gözlem süresi olarak adlandırılır. Bu süre içinde gözlemler başarısızlığa uğrayabilir, başlangıç zamanından önce başarısızlığa uğrayabilir ya da gözlem süresi boyunca gözlem hakkında bilgi edinilemez. Bu tip gözlemler sansürlenir.

3.1.2.1. Sağdan Sansürleme

Başarısızlık olarak tanımlanan olay çalışmanın sonuna kadar gerçekleşmezse, yani gözlemlenen bireyin yaşam süresi gözlem süresini aşarsa, bu bireyin yaşam süresi tam olarak bilinmez. Bu durumda bireyin yaşam süresi sansürlenecektir. Bu tip sansürlemeye "sağdan sansürleme" denir.

$T_1^*, T_2^*, \ldots, T_n^*$ bağımsız ve aynı dağılıma sahip yaşam sürelerini ve $C_1, C_2, \ldots, C_n$ bağımsız ve aynı dağılıma sahip olan sansürleme sürelerini göstersin.

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{eğer } \mathrm{T_i^*} \leq \mathrm{C_i} \quad \text{ise sansürlü değil.} \\ 0 & \text{eğer } \mathrm{T_i^*} > \mathrm{C_i} \quad \text{ise sansürlüdür.} \end{cases}$$

T_i başarısızlık süresi C_i sansürleme süresinden daha büyük olduğunda gözlemin yaşam süresinin sağdan sansürlenmiş olduğu söylenir. Bu durumda $(T_1, \delta_1), (T_2, \delta_2), \ldots, (T_n, \delta_n)$ iki değişkenli veriden $T_i = \min\{T_i^*, C_i\}$ gözlem süresi olarak tanımlanır. Verilerin analizini yapmak için en çok olabilirlik tahmini kullanılır[29].

θ parametresine bağlı olarak (t_i, δ_i) $(i = 1,2, \ldots, n)$ sağdan sansürlü yaşam verisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i; \theta)$$

ve olabilirlik fonksiyonu,

$L_i(\theta) = f(t_i;\theta)^{\delta_i} S(t_i;\theta)^{1-\delta_i}$

şeklinde ifade edilir[29][30]. Gözlem sansürlü ise olabilirlik fonksiyonu yaşam fonksiyonu ile sansürlü değilse olasılık yoğunluk fonksiyonu ile elde edilir. Gözlemin sansürlü olması gözlemin gözlem süresince ya başarısızlığa uğramamasından ya da tam bilginin elde olmamasında kaynaklanır. Hakkında tam olarak bilgi sahibi olunamayan bir gözlemin olasılık yoğunluk fonksiyonunu kullanmak yanlış olacağından yaşam fonksiyonu kullanılır.

$(t_1, \delta_1), \ldots, (t_n, \delta_n)$ yaşam süreleri bağımsız olduğu varsayımı altında genel olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} L_i(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} f(t_i;\theta)^{\delta_i} S(t_i;\theta)^{1-\delta_i} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda(t_i;\theta)^{\delta_i} S(t_i;\theta)^{\delta_i}}_{f(t_i;\theta)^{\delta_i}} S(t_i;\theta)^{1-\delta_i} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i;\theta)^{\delta_i}\, S(t_i;\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i;\theta)^{\delta_i}\, e^{-\Lambda(t)} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir[29][30].

3.1.2.2. Soldan Sansürleme

$T_1^*, T_2^*, \ldots, T_n^*$ bağımsız ve aynı dağılıma sahip yaşam sürelerini ve $C_1, C_2, \ldots, C_n$ bağımsız ve aynı dağılıma sahip olan sansürleme sürelerini göstersin. Soldan sansürleme durumunda

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{eğer} \quad T_i^* > C_i \quad \text{ise sansürlü değil.} \\ 0 & \text{eğer} \quad T_i^* \leq C_i \quad \text{ise sansürlüdür.} \end{cases}$$

T_i başarısızlık süresi C_i sansürleme süresinden daha küçük olduğunda gözlemin yaşam süresinin soldan sansürlenmiş olduğu söylenir. Soldan sansürlü verinin olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i;\theta)^{\delta_i} F(t_i;\theta)^{1-\delta_i}$$

şeklinde ifade edilir[30].

3.1.2.3. Aralık Sansürleme

Gözlemin başlangıç tarihinde gözlemlenmeye başlanmamış ve gözlemin bitiş tarihinden önce başarısızlık olarak tanımlanan olay dışında bir nedenle gözlemden çıkmış bireylerin yaşam sürelerinin sansürlemesidir. Yaşam süresi $(L_i, R_i]$ aralığında olan fakat bu aralığın tam olarak bilinmediği sansürleme tipine "aralık sansürleme" denir. L_i sol taraftaki uç noktayı ifade ederken, R_i sağ taraftaki uç noktayı ifade etmektedir. Olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i;\theta)^{\delta_i}\,[S(L_i) - S(R_i)]^{1-\delta_i}$$

şeklinde ifade edilmektedir[30].

3.1.3. Kesilme

Yaşam analizinde belirli süre gözlemlenen bireyler hakkındaki bilgiler analiz edilerek genel sonuçlara ulaşılır. Bu analizin başlangıç zamanından önce gerçekleşmiş başarısızlık durumu analize dahil edilmez veya gözlem süresinin sonuna doğru bireylerde herhangi bir değişiklik olmadığı varsayılır ve bireyin sonraki durumu gözleme dahil edilmez. Bu gibi durumlar kesilme olarak adlandırılır.

Olay zaman verisinin önemli özelliklerinden biri olan kesilme, parametre tahmini için özel bir uyarlama gerekmektedir. Sansürleme gerçek başarısızlık zamanını ve sansürleme zamanını haritalandırırken, kesilme gözlemlerin dağılımına etkide bulunur ve dağılım fonksiyonuna koşul getirir. Ayrıca kesilmenin rastgele olmadığı varsayılır.

Rastgele olmayan soldan kesilme, çalışmanın başlangıç tarihinden önce başarısızlığa uğramış gözlemlerin kaydedilmemesi anlamına gelir. Bu durumda kesilme zamanından önce başarısızlıkla karşılaşan birimler kaydedilmez[29].

(T^+, Δ^+) ile tanımlanan gözlemlenen kesilmiş bir verinin, t^+ rastgele olmayan sağdan kesilme zamanı ile $(T > t^+)$ koşulu altında gerçek verinin dağılımı,

$$\begin{aligned} P(T^+ > t, \Delta^+ = \delta) &= P(T > t, \Delta = \delta \mid T > t^+) \\ &= \frac{P(T > t, \Delta = \delta)}{P(T > t^+)} \\ &= \frac{P(T > t, \Delta = \delta)}{\big(1 - F(t^+)\big)\big(1 - G(t^+)\big)} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir[29].

3.2. Markov Modelleri

Stokastik bir süreç olan Markov sürecini diğer stokastik süreçlerden ayıran en büyük özellik, rastlantısal bir gelecek anındaki değerinin dağılımının sadece şu anki değerine bağlı olmasıdır. Yani Markov özelliği gösteren bir süreç, geçmişteki değerin dağılımına bağlı değildir. Markov süreçleri, durumların ve zamanın sürekli ve kesikli olmasına göre farklı modellenmektedir.

3.2.1. Markov Zinciri

Markov zinciri kesikli parametreli stokastik süreçtir.

Tanım 3.1: $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ dizisindeki rastgele değişkenlerinin kümesi $E = (1,2, \ldots m)$ sonlu veya sayılabilir sonsuz durum olsun. ℕ negatif olmayan tamsayılar kümesi olan bir durum uzayı ise $X_n = i$ ifadesi sürecin n anında i durumunda olduğunu belirtir.

$i_0, i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i, j$ sürecin durumları ve $n \geq 0$ olmak üzere;

$$P(X_{n+1} = j \,|X_0 = i_0,\ X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \,|X_n = i)$$

özelliğini sağlayan X_n stokastik sürecine Markov zinciri denir. Bu tanıma göre stokastik bir sürecin, $n+1$ anında j durumunda olmasının geçmişteki durumlarıyla ilişkisi yoktur. Sadece n anındaki i durumuna bağlı olarak $n+1$ anında j durumuna geçilir. Yani gelecek durum, geçmişteki durumlara değil yalnız şu anki duruma bağlıdır.

Sürecin, i durumundan bir dönem sonra j durumuna geçiş olasılığı p_{ij} ile ifade edilir. Dolayısıyla bir-adımda geçiş olasılığı zamandan bağımsız olduğunda yani Markov zinciri homojen olduğunda, Markov zincirinin durağan olduğu söylenir ve $\forall i, j \in E$ için,

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \,|X_n = i)$$

şeklindedir[31]. Markov zincirinin tam olarak tanımlanabilmesi için X_0 durumu için aşağıda verilen vektör gibi sabit bir başlangıç dağılımının olması gerekmektedir.

Tanım 3.2: $\pi = (\pi_{1,\ldots,}\pi_m)$ vektörü $\forall i \in E$ için

- $\pi_i \geq 0$,
- $\sum_{i \in E} \pi_i = 1$

şartlarını sağlanıyorsa, i ile başlayan başlangıç olasılıkları,

$$\pi_i = P(X_0 = i)$$

şeklinde ifade edilir. Yani başlangıç durumunun i olma olasılığı ifade edilir[32].

Tanım 3.3: Herhangi bir $m \in \mathbb{N}, \forall i, j \in E,\ n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, Markov zincirinin i durumundan j durumuna n adımda geçmesi olasılığı ,

$p_{ij}^{(n)} = P\,(X_{m+n} = j | X_m = i)$

olarak tanımlanır. Ayrıca,

$$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1\ , & i = j \\ 0\ , & i \neq j \end{cases}$$

olur.

3.2.2. Markov Süreci

Markov zincirinin genişletilmiş halidir. Durum uzayı $E = \{0,1,2,\dots\}$ olan t zamandaki Markov süreci $(X(t), t \geq 0)$ olarak tanımlanır. Markov sürecinin sürekli zamanlı Markov zinciri olduğu söylenebilir.

Tanım 3.4: $\forall i_{\mathrm{n}}\, i, j \in E$ ve $0 \leq h_1 < h_2 < \cdots < h_n < s < s + t$ için,

$$p_{ij}(s, s+t) = P(X(s+t) = j \mid \mathrm{X(s)} = i, \mathrm{X(h_n)} = i_{\mathrm{n}}, \mathrm{X(h_{n-1})} = i_{\mathrm{n-1}}, \dots, \mathrm{X(h_1)} = i_1) \qquad (3.2)$$

biçimindedir. $p_{ij}(s, s+t)$ olasılığı, Markov sürecinin geçiş olasılığı olarak adlandırılır. $p_{ij}(s, s+t)$, s anında i durumunda olan sürecin $s+t$ anında j duruma geçmesi olasılığıdır. Markov sürecinde gelecek durumun koşullu dağılımı geçmişteki durumlarına bağlı değil, yalnız şuandaki duruma bağlıdır.

$p_{ij}(t)$ Markov sürecinin geçiş olasılığı olarak adlandırılır. Geçiş olasılıkları s zamanına bağlı değildir, sadece t zaman aralığının uzunluğuna bağlıdır. Bu durumda Eşitlik (3.2)'den Markov süreci,

$p_{ij}(t) = P(X(s+t) = j | \mathrm{X(s)} = i)$

şeklinde gösterilebilir.

3.2.3. Yarı-Markov Süreci

Sürecin durumlar arası geçişi Markov özelliği gösteren ve bir durumda kalış süresi raslantısal olan stokastik sürece yarı-Markov süreci denir. Herhangi bir durumdan diğer bir duruma geçiş yapmadan önce mevcut durumda geçirdiği süreye kalış süresi denir. Kalış süresi sürece bağlı olarak farklı dağılımlar gösterebilir.

Klasik Markov süreci sadece kendinden bir önceki olaya bağlı olduğundan tek-adım bellek özelliğine sahipken; yarı-Markov süreci ardışık olaylar arasında geçen zamanın bir önceki ve gelecek olaya bağlılığından çok-adım bellek özelliği gösterir[33].

Durum uzay kümesi $E = \{0,1,2,\dots\}$ sonsuz ve sayılabilir tam sayılar olan $Y = (Y_n)_{\,n\geq 0}$ sağdan sürekli stokastik bir süreç olsun. Y'nin bir durumdan diğer duruma geçiş süresi $0 \leq$

$T_0 \leq T_1 \leq .... \leq T_n \leq T_{n+1} ...$ ve art arda geçilen durumların kümesi $X_0, X_1, X_2 ...$ ile ifade edilsin.

Tanım 3.5: $(X_n, T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stokastik sürecin, her n ∈ ℕ, t > 0 ve j∈ E için,

$$P(X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_0, T_0, \ ... \ , X_n, T_n) = P(X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_n, T_n) \equiv Q_{ij}(t)$$

eşitliğini sağlıyorsa Y, E durum uzaylı yarı-Markov sürecidir[34]. Tanımdaki olasılıklar n ve T_n' den bağımsız ise, bu sürece türdeş zamanlı yarı-Markov süreci denir.

Tanım 3.6: Y türdeş zamanlı yarı-Markov süreci olsun.

1. $\forall i, j \in E, \ \forall t \geq 0$ için, yarı-Markov çekirdeği,

$$Q_{ij}(t) = P(X_{n+1} = j, \ T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_n = i)$$

olarak tanımlanır. Yarı-Markov çekirdeği, i durumunda olduğu bilinen bir sürecin, en fazla t sürede, j durumuna geçmesi olasılığıdır. Ayrıca yarı-Markov çekirdeği $\forall i, j \in E, \ \forall t \geq 0$ için,

- $\sum_{j \in E} Q_{ij}(\infty) = 1,$
- $Q_{ij}(t) \geq 0,$
- $Q_{ij}(0) = 0,$
- $Q_{ii}(t) \neq 0$

koşullarını sağlar.

2. $\forall i, j \in E$ için, geçiş olasılığı,

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

olarak tanımlanır.

Geçiş olasılığı kesikli zamanlı Markov zinciri yapısına sahiptir. i durumda olduğu bilinen sürecin bir sonraki durumunun j olma olasılığıdır. Zaman uzayından bağımsız olarak i durumundan j durumuna geçiş süresi önemsizdir. Ayrıca $\forall \, i, j \in E$ için aşağıdaki denklemi sağlar.

$$p_{ij} = \lim_{t \to \infty} Q_{i,j}(t) = Q_{i,j}(\infty)$$

3. $\forall \, i, j \in E, \forall t \geq 0$ için j durumuna geçmeden önce i durumunda kalış süresinin dağılım fonksiyonu,

$$F_{ij}(t) = P(T_{n+1} - T_n \leq t | X_n = i, X_{n+1} = j)$$

olarak ifade edilir. Bu eşitlik sadeleştirilerek,

$$F_{ij}(t) = P(T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_n = i, X_{n+1} = j)$$
$$= \frac{P(T_{n+1} - T_n \leq t, X_n = i, X_{n+1} = j)}{P(X_{n+1} = j\ ,\ X_n = i)}$$
$$= \frac{P(T_{n+1} - T_n \leq t, X_{n+1} = j \mid X_n = i\ )}{P(X_{n+1} = j \mid\ X_n = i)} = \frac{Q_{ij}(t)}{p_{ij}} \tag{3.3}$$

sonucu elde edilir[22][35].

Tanım 3.7: i durumunda kalış süresinin dağılım fonksiyonu,

$$H_i(t) = P(T_{n+1} - T_n \leq t | X_n = i)$$
$$= \sum_{j \in E} Q_{ij}(t)$$

şeklinde yarı-Markov çekirdeğine bağlı olarak ifade edilir[36].

Tanım 3.8: $T, (T \geq 0)$ sabit bir zamanı ifade etsin. T zamanına kadar $i \in E$ için $(X_n)_{n\geq 0}$ durumunun ziyaret edilme sayısı $N_i(T)$ ile ifade edilirken, T zamanına kadar i durumundan j durumuna geçişlerin sayısı $N_{ij}(T)$ ile ifade edilmiştir.

$$N_i(T) = \sum_{n=1}^{N(T)} \mathbf{1}_{\{X_n = i,\ \ T_n \leq T\ \}}$$

ve

$$N_{ij}(T) = \sum_{n=1}^{N(T)} \mathbf{1}_{\{X_{n-1} = i,\ \ X_n = j\}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_{n-1} = i, X_n = j,\ \ T_n \leq T\}}$$

şeklinde gösterilir. $\mathbf{1}_{\{t \geq 0\}}$ gösterge fonksiyonu,

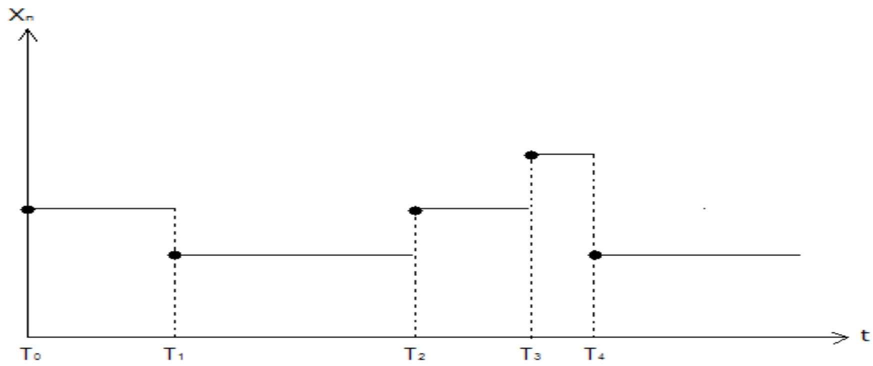
$$\mathbf{1}_{\{t\geq 0\}} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } t \geq 0 \\ 0 & \text{diğerleri} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Geçiş olasılıklarının gözlemsel kestiricisi

$$\hat{p}_{ij}(T) := \frac{N_{ij}(T)}{N_i(T)} \tag{3.4}$$

şeklinde ifade edilir[36].



Şekil 3.2. Yarı-Markov Süreci

Yarı-Markov sürecinde X_n durumları kesikli T_n geçiş süresi sürekli olduğunda, $T_n - T_{n-1}$ ifadesi X_n durumdan X_{n+1} durumuna geçiş süresini, yani X_n durumunda durumda kalış süresini ifade etmektedir.

Yarı-Markov sürecinde i durumdan j durumuna geçmeden i durumunda kalış süresinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{ij}(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{P(t < T_{n+1} - T_n < t + h \mid X_n = i, X_{n+1} = j)}{h}$$

yaşam fonksiyonu,

$$S_{ij}(t) = P(T_{n+1} - T_n \geq t \mid X_n = i, X_{n+1} = j\ )$$

marjinal yaşam fonksiyonu,

$$S_{i.}(t) = P(T_{n+1} - T_n \geq t \mid X_n = i) = \sum_{j\neq i} p_{ij} S_{ij}(t)$$

tehlike hızı fonksiyonu,

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{P(t < T_{n+1} - T_n < t + h \mid T_{n+1} - T_n \geq t,\ X_n = i, X_{n+1} = j)}{h}$$

marjinal olasılık yoğunluk fonsiyonu,

$$f_{i.}(t) = \sum_{j\neq i} p_{ij} f_{ij}(t)$$

şekilde ifade edilir[10][37].

3.3. Yaşam Çözümlemesinde Kullanılan Weibull Dağılımı

Weibulll dağılımı, ilk olarak 1951 yılında Waloddi Weibull tarafından makinelerin yaşam sürelerini tahmin etmek amacıyla geliştirilmiş bir dağılımdır. Yaşam(sağkalım) sürelerini inceleyen verilerin analizi alanında Weibull dağılımı esnek olup kolayca değiştirilebildiği için sıkça kullanılmaktadır. Weibull dağılımı iki parametreli bir dağılımdır. Şekil(v)

parametresi ve ölçek (σ) parametresi. Şekil parametresinin $v = 1$ olduğu durumda üstel dağılıma sahip olur.

$\sigma, v > 0$ için Weibull dağılımının;

- Olasılık yoğunluk fonksiyonu,

  $f_0(t) = -\frac{dS_0(t)}{dt} = \sigma v t^{v-1} e^{-\sigma t^v}$
- Yaşam fonksiyonu,

  $S_0(t) = e^{-\sigma t^v}$
- Tehlike hızı,

  $$\lambda_0(t) = \frac{f_0(t)}{S_0(t)} = \sigma v t^{v-1}$$

biçimindedir.

3.4. Yarı Parametrik Yaşam Modeli: Cox Orantılı Tehlike Modeli

1972 yılında Cox tarafından geliştirildiğinden Cox orantılı tehlike modeli olarak adlandırılmıştır. Başarısızlık durumu meydana gelene kadar geçen zaman için özel bir olasılık dağılımının olduğu varsayılmayan esnek ve popüler bir modeldir[38]. Yani dağılım bilgisi gerektirmeyen bir modeldir. Bu modelde yaşam süresi ve bu süre üzerinde etkili olarak görülen bağımsız değişkenler yer almaktadır. Bağımsız değişkenlerin tehlike hızı fonksiyonu üzerindeki etkisi log doğrusaldır. Bağımsız değişkenlerin log doğrusal fonksiyonu ile tehlike hızı arasındaki ilişki çarpımsaldır. Gözlemlerin birbirinden bağımsız olması ve tehlike oranının zamana karşı sabit veya bir bireyin tehlikesinin diğer bireyin tehlikesine orantılı olması gerekmektedir. Bu orantı ile ilgili varsayım orantılı tehlike varsayımı olarak adlandırılır. Orantılı tehlike varsayımı sağlanmaz ise zamana bağlı bağımsız değişkenli Cox regresyon modeline başvurulur. İncelenen çalışmada bağımsız değişkenler yoksa veya sadece bir kategorik bağımsız değişken varsa tehlike fonksiyonları için yaşam tablolarına veya Kaplan Meier yöntemine başvurulabilir[39].

Yaşam çözümlemesinde, sansürlemeden ve zamana bağlı açıklayıcı değişkenlerden dolayı klasik istatistiksel yöntemler kullanılmaz[40].

$\mathbf{x}^T = (\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_k)$ değişkenlerin vektörü ile t zamanındaki bireylerin tehlikesi, $\lambda(t|\mathbf{x})$ olarak tanımlansın. $\mathbf{x}^T$ vektörü, $\mathbf{x}$ sütun vektörünün transpozudur. Cox regresyon modeli,

$$\lambda(t|\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_k) = \lambda_0(t) g(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_k)$$

ya da

$$\lambda(t|\mathbf{x}) = \lambda_0(t) g(\mathbf{x}) \tag{3.5}$$

şeklinde ifade edilebilir[29]. $\lambda_0(t)$ temel tehlike hızı fonksiyonudur. Temel tehlike fonksiyonu açıklayıcı değişkenlere bağlı değildir fakat zamana bağlı bir fonksiyondur. Bu modelde, çalışmadaki tüm bireylerinin ortak temel tehlikeye sahip olduğu varsayılır. İlgili birincil parametreleri $g(\mathbf{x}) = g(\beta, \mathbf{x})$ içerir ve

$$g(\mathbf{x}) = \exp\left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j \mathrm{x}_j\right) = e^{\beta^T \mathbf{x}} \tag{3.6}$$

biçimindedir. Burada $\beta^T = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ regresyon parametrelerinin vektörü olarak tanımlanır. $g(\mathbf{x})$ zamana bağlı değildir, açıklayıcı değişkenlerin bir fonksiyondur. Bu modelde bireylerin açıklayıcı bilgileri tarafından belirlenen değişkenler, temel tehlike fonksiyonuna çarpımsal olarak eklenir[29]. Model orantılı tehlike modeline dayanmasına rağmen, olasılık dağılımının belirli bir biçimi yoktur[41]. Bu yüzden orantılı tehlike modeli yarı parametrik bir model olarak adlandırılmaktadır.

Cox regresyon modelinin temel varsayımı orantılılığın sağlanmasıdır. i ve i^* değişken vektörünün değerleri farklı olan iki gözlem olarak düşünülsün. i gözleminin açıklayıcı değişken vektörü $\mathbf{x} = (\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_k)$ ve i^* gözleminin açıklayıcı değişken vektörü $\mathbf{x}^* = (\mathrm{x}_1^*, \dots, \mathrm{x}_k^*)$ olmak üzere tehlike oranı,

$$\frac{\lambda(t|\mathbf{x})}{\lambda(t|\mathbf{x}^*)} = \frac{\lambda_0(t) g(\mathbf{x})}{\lambda_0(t) g(\mathbf{x}^*)} = \frac{\exp\left[\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{k}} \beta_j \mathrm{x}_j\right] \lambda_0(\mathrm{t})}{\exp\left[\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{k}} \beta_\mathrm{j} \mathrm{x}_j^*\right] \lambda_0(\mathrm{t})}$$

$$= \exp\left[\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{k}} \beta_\mathrm{j}\left(\mathrm{x}_\mathrm{j} - \mathrm{x}_\mathrm{j}^*\right)\right] = \exp\{\beta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)\}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu oran zamandan bağımsız ve sabittir[42].

Yaşam fonksiyonu ,

$$S(t|\mathbf{x}) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda_0(\tau|\mathbf{x}) \exp(\beta^\mathrm{T}\mathbf{x}) \mathrm{d}\tau\right\}$$

$$= \exp\left\{-\int_0^t \lambda_0(\tau|\mathbf{x}) \mathrm{d}\tau\right\}^{\exp(\beta^\mathrm{T}\mathbf{x})}$$

$$= S_0(t)^{\exp(\beta^\mathrm{T}\mathbf{x})}$$

şeklinde ifade edilir.

Gözlemler $i = 1,2, \dots, n$ olsun. Eğer $i.$ gözlem sansürlü değilse, $\delta_i = 1$ 'dir. $i.$ gözlem sağdan sansürlü ise $\delta_i = 0$ olarak değer alır. $t_1, t_2 \dots t_n$ gözlemlerin başarısızlık zamanlarını göstermek üzere Cox orantılı tehlike modelinin olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\beta, \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i|\beta, \mathbf{x})^{\delta_i} S(t_i|\beta, \mathbf{x})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \lambda_0(t_i)^{\delta_i} \exp(\beta^T \mathbf{x})^{\delta_i} S_0(t_i)^{\exp(\beta^T \mathbf{x})}$$

ve dolayısıyla log olabilirlik fonksiyonu,

$$\log L(\beta, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \log\{\lambda_0(t_i)\} + \delta_i \beta^T \mathbf{x} + \exp(\beta^T \mathbf{x}) \log\{S_0(t_i)\}$$

şeklinde ifade edilir. Temel tehlike $\lambda_0(t_i)$ dağılımı için özel bir biçim olmadığından hesaplanmasına gerek yoktur. Önemli olan β parametrelerinin tahminidir. Parametrelerin tahmininde en çok olabilirlik fonksiyonu yerine kısmi olabilirlik fonksiyonu kullanılır. Gözlemlenen bireyler $i,\ t_i > t$ olan henüz ölmemiş ya da sansürlü olan tüm bireylerin risk kümesi $R(t)$ ile tanımlansın. β için kısmi olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{e^{\beta^T \mathrm{x}_i}}{\sum_{j \epsilon R(t_i)} e^{\beta^T \mathrm{x}_j}} \right]^{\delta_i} \tag{3.7}$$

şeklinde ifade edilir. δ_i sağdan sansürlü olmayan ölüm ya da başarısızlık zamanının katkısıdır. Eşitlik (3.7)'nin payı, t_i zamanında başarısız olan i bireyi için risk oranını ve paydası t_i zamanında başarısızlık riskine sahip tüm bireylerin riskinin oranını ifade eder.

3.5. Zayıflık Modeli

Genellikle yaşam modellerinde rastgele değişkenlerin bağımsız ve aynı dağılıma sahip olduğu varsayılır. Bu varsayım kitlenin homojen olduğunu ifade eder. Fakat gözlemler incelendiğinde büyük ölçüde incelenen gözlemlerin bağımsız ve aynı dağılıma sahip olmadığı görülmektedir. Bu durumlar gözlemler arasında farklılığa sebep olmakla birlikte kitle artık heterojenlik özelliğine sahip olur. Zayıflık modeldeki temel düşünce, her birimin farklı zayıflıklara sahip olduğu ve çok zayıf olanın az zayıf olandan daha önce başarısızlığa uğrayacağıdır. Sonuç olarak sağlam birimler, zayıfların yerini alacak ve gözlemlerin yapısı bozulacaktır. Ölümlülük hızlarını tahmin etmek için yaş veya zamanın nasıl değiştiği dikkate alınır. Çoğu zaman bu ölüm hızları gözlem periyodunun başında artar, maksimum seviyeye ulaşır ve daha sonra azalır veya aynı şekilde devam eder[29]. Örneğin, kanser hastalarının ölüm hızları gözleme başlanıldığı zaman yüksektir. Çünkü ölüm riski yüksek olan kanser hastası bireyler, ölüm riski düşük bireylerden daha önce ölecektir. Bu durumda ölüm hızları yüksek olarak başlayarak ölüm riski az olan bireylerin sağ kalmasından dolayı ölüm hızı azalacaktır.

Yaşam analizde kullanılması gereken tüm açıklayıcı değişkenler biliniyorsa, orantılı tehlike modeli tanımlanabilir. Fakat bu modelin bütün önemli risk faktörlerini içermesi neredeyse imkansızdır. Yaşam analizinde model kurulurken genellikle açıklayıcı değişkenler yaş ve cinsiyet olarak belirlenir. Diğer faktörler hakkında ya hiç bir bilgiye ulaşılamamış ya da çok az bilgiye ulaşılmıştır. Hatta bazen çoğu faktörün olup olmadığı bilinemeyebilir. Heterojenlik gözlemlenebilen risk faktörlerinden ve bilinmeyen açıklayıcı değişkenden yani beklenmeyen bir etkiden kaynaklanabilir[29].

Zayıflık terimi ilk olarak Vaupel[43] tarafından tanımlanmıştır. Gözlemlenemeyen açıklayıcı değişkenden kaynaklanan heterojenliği değerlendirmiştir. Clayton[44] çok değişkenli yaşam analizi için model oluşturmuştur. Vaupel ve Yashin[45] zayıflık modelini ileri yaşlarda ölümlülük oranlarındaki sapmaları açıklamak için kullanmıştır. Daha sonra zayıflık modeli Hougaard[46], Aalen[47], Pickles ve Crouchley[48], Andersen[49], Klein ve Moeschberger[50], O'Quigley ve Stare[51] tarafından incelenmiştir.

Zayıflık modeli, paylaşılmış ve paylaşılmamış zayıflık modelleri olarak ikiye ayrılmaktadır. Paylaşılmamış zayıflık modeli bireyler arasındaki heterojenliği ve paylaşılmış zayıflık modeli ise gruplar arası heterojenliği modellemek için kullanılmaktadır[52].

Zayıflık modeli genelde rastgele etki üzerinde orantılı tehlike modelinin koşulu olduğu varsayılır. Birimlerin tehlike fonksiyonu, zamandan bağımsız gözlemlenemeyen rastgele değişken Z'ye bağlıdır. Bu rastgele değişken temel tehlike fonksiyona çarpımsal olarak eklenir. Z, negatif olmayan rastgele değişken olmak üzere zayıflık modeli,

$$\lambda(t|Z) = Z\lambda(t) \tag{3.8}$$

şeklinde ifade edilir. Eğer $Z < 1$ ise gözlemlenemeyen değişkenin etkisinden dolayı gözlemin az zayıf olduğunu $Z > 1$ ise gözlemin daha fazla zayıf olduğunu ve gözlemin daha erken son bulacağını söyleyebiliriz. $\lambda(t)$, orantılı tehlike modeli $\lambda_0(t)e^{\beta^T\mathbf{x}}$ ile Z değeri ise $Z = \exp(u)$ olarak ifade edilir[53]. u rastgele etki gözleme göre değişiklik gösterir. Tüm bireyler için $u = 1$ olduğunda zayıflık modeli orantılı tehlike modeline dönüşür. $(T_i, \delta_i, x_i, Z_i)(i = 1,2, \ldots, k)$ gözlemlerinin olabilirlik fonksiyonu,

$$\prod_{i=1}^{k}\left(Z_i\lambda_0(t_i)e^{\beta^T x_i}\right)^{\delta_i} exp\left(-Z_i\Lambda_0(t_i)e^{\beta^T x_i}\right)$$

şeklindedir[29]. Yaşam fonksiyonu ise,

$S(t|Z) = e^{\int_0^t \lambda(s|u)ds} = e^{-Z\int_0^t \lambda_0(s)ds} = e^{-Z\Lambda_0(T)}$

olarak ifade edilir.

3.6. Genelleştirilmiş Doğrusal Model

Genelleştirilmiş doğrusal modeller ilk olarak 1972 yılında Nelder ve Wedderburn[54] tarafından geliştirilmiş ve Myres, Montgomery[55] tarafından incelenmiştir.

Genellikle iki veya daha fazla değişken arasındaki bağlantıyı ölçmek için regresyon analizi kullanılır. Açıklanan değişken y ile n tane açıklayıcı değişken x arasındaki doğrusal regresyon denklemi,

$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n + \varepsilon$

şeklinde ifade edilir. y bağımlı yani açıklanan değişken, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ açıklayıcı değişkenler, $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ bilinmeyen parametrelerin bir kümesi ve ε hata terimidir.

Bağımlı değişkenin dağılımının, normal dağılım olmadığı durumlarda doğrusal model kullanılamaz. Bağımlı değişkeni normal dağılıma uygun hale getirmek için bağımlı değişkene $\ln(y)$, $y^{1/2}$, $y^{3/2}$ gibi dönüşümler uygulanabilir.

Genelleştirilmiş doğrusal model bağımlı değişkenin dağılımının normal dağılım olmadığı durumlar için kullanılır. Genelleştirilmiş doğrusal modelde, doğrusal modeldeki normallik ve sabit varyans varsayımları gerekmemektedir. Ayrıca doğrusal regresyon modellerinde bağımlı değişkenin nicel bir değişken olması gerekmektedir. Genelleştirilmiş doğrusal modellerde bağımlı değişken nicel ya da nitel olabilir. Üstel aileden tüm dağılımlarda varyans ortalamanın bir fonksiyonudur. Normal, ters normal, binom, negatif binom, üstel, gamma, poisson dağılımları üstel ailenin üyeleridir.

Üstel aile için genelleştirilmiş doğrusal modelin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y) = c(y, \emptyset)\exp\left(\frac{y\theta - a\theta}{\emptyset}\right), \qquad g(\mu) = x'\beta$$

biçiminde ifade edilir. θ kanonik parametre, $\emptyset$ ise yayılım parametresidir. $a(\theta)$, $c(y, \emptyset)$ dağılıma göre farklılık gösterirler. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ açıklayıcı değişkenler olmak üzere β parametresi için doğrusal kestirici $\eta = \sum_{j=1}^{n} x_j \beta_j$ olarak tanımlanır. Bağ fonksiyonu $g(.)$ ile ifade edilir ve ortalamanın x açıklayıcı değişkenleriyle ilişkisini belirler. Doğrusal modelde y bağımlı değişkenin ortalaması ile x açıklayıcı değişken arasındaki ilişki $\mu = x'\beta$ olarak ifade edilirken genelleştirilmiş doğrusal modelde $g(\mu) = x'\beta$ şeklinde ifade edilir. Bağ fonksiyonu g, monoton ve differansiyellenebilir olmalıdır[56].

3.6.1. Bernoulli Dağılımı için Genelleştirilmiş Lineer Model

Bernoulli dağılımı p başarı olasılığıyla 1 ve $1-p$ yani q başarısızlık olasılığıyla 0 değerini alan olasılık dağılımıdır. Bernoulli dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y) = p^{y}(1-p)^{1-y} \ , \qquad y = 0{,}1 \tag{3.9}$$

olarak ifade edilir. Bernoulli dağılımı için genelleştirilmiş doğrusal modelin bağ fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \ln\big(f(y)\big) &= ln(p^{y}(1-p)^{1-y}) \\ &= yln(p) + (1-y)ln(1-p) \\ &= yln\left(\frac{p}{1-p}\right) + ln(1-p) \end{aligned}$$

biçimindedir. Eşitlik (3.9)'dan

$$\theta = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = \eta = g(\mu) = ln\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right) \tag{3.10}$$

$$g^{-1}(\theta) = \frac{1}{1+exp(-\eta)} = \frac{exp(\eta)}{1+\exp(\eta)} \tag{3.11}$$

$$b(\theta) = -ln(1-p) = -ln(1-\mu)$$

olarak belirlenir[57].

3.7. Nelder Mead Yöntemi

Nelder-Mead tarafından geliştirilmiş, fonksiyonların yerel minimum noktalarını bulmak için kullanılan bir yöntemdir. Bilinmeyen parametreleri bulmak için kullanılan $f(x)$ fonksiyonunun türevinin alınması yerine, bu fonksiyonu düzenli bir geometrik şekil(simpleks) kullanarak köşe noktaların seçimini formüle eder. Simpleks n boyutlu bir geometrik şekildir ve n boyut $n+1$ nokta içermektedir. Eğer $n=2$ ise, simpleks bir üçgen, eğer $n=3$ ise simpleks bir dörtyüzlüdür[58].

n boyutlu simleks geometrik şeklin $n+1$ noktaları için fonksiyonun değerleri hesaplanır. Bulunan değerlerde en yüksek ve en küçük değerler bulunur. Bu iki noktanınn dışındaki noktalar aynı bırakılarak, en yüksek ve en düşük değerlerin elemanları üzerinde olduğu yüzeye göre yansıma noktasına taşır. Böylece simpleks geometrik şeklin boyutları küçülür ve minimum noktaların kordinatları bulunur.

Nelder-Mead yöntemi 2 boyutlu yani 3 nokta olduğunu düşünelim ve $f(x,y)$ fonksiyonunu minimize edelim. Üçgenin köşe noktaları $V_k = (x_k, y_k), k = 1{,}2{,}3$ şeklinde ifade edilsin. Bu fonksiyonun $k = 1{,}2{,}3$ için değeri $z_k = f(x_k, y_k)$ ile ifade edilsin. Fonksiyonun değerlerini bulmak için iterasyon:

1. İlk olarak $z_1 \leq z_2 \leq z_3$ şeklinde sıralandığını ve

$\boldsymbol{B} = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{G} = (x_2, y_2)$ ve $\boldsymbol{W} = (x_3, y_3)$

şeklinde olduğunu varsayalım[59]. Bu durumda fonksiyonun değerinin en küçük olduğu $\boldsymbol{B}$, en iyi köşedir. $\boldsymbol{W}$ en büyük değeri aldığından en kötü köşedir. Yani fonksiyonunun verilen değerlere göre en düşük ve en yüksek değerleridir. Bu durumda en kötü nokta olan $\boldsymbol{W}$ köşesini hareket ettirmek gerekir.

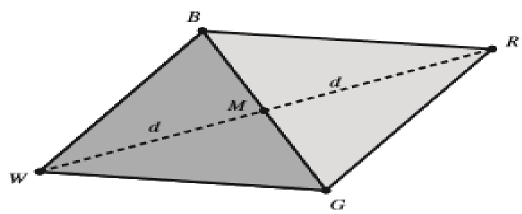
En yüksek değeri veren köşe diğer iki köşenin ortalaması üzerinden yansıtılarak yeni bir köşe elde edilir. İki köşenin orta noktaları,

$$\boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{G}}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2}$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra en kötü köşe bu $\boldsymbol{M}$ orta noktalarına göre yansıtılması,

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{M} + (\boldsymbol{M} - \boldsymbol{W}) = 2\boldsymbol{M} - \boldsymbol{W}$$

şeklinde ifade edilir ve artık yeni bir köşe oluşur. Bu köşe $\boldsymbol{R}$ ile ifade edilir. R köşesinin M olan uzaklığı W köşesinin M olan uzaklığına eşit ve d kadardır.

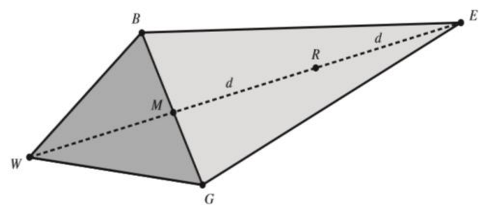


Şekil 3.3. Yansıtma Durumu

2. Bulunan bu köşenin fonksiyon değeri en iyi köşenin değerinden küçükse yansıtma doğru yönde yapılmış demektir. Aynı yönde genişletilmiş yansıtma yapılır. Bu yansıtılan köşe de $\boldsymbol{E}$ ile ifade edilir ve bu köşenin kordinat noktaları,

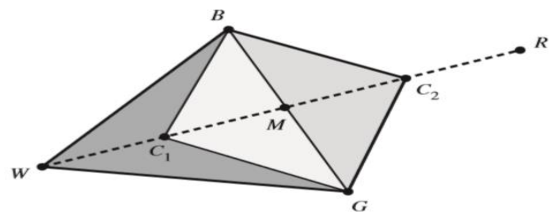
$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{R} + (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{M}) = 2\boldsymbol{R} - \boldsymbol{M}$$

şeklinde elde edilir. $\boldsymbol{E}$ köşesinin $\boldsymbol{M}$ köşesine uzaklığı $2d$ kadardır. Bulunan bu noktanın değeri B ve G köşelerinden daha küçükse o yeni oluşan üçgen $\widehat{\mathbf{BEG}}$ üçgenidir ve artık 1. durumdan tekrar başlanarak yeni üçgenler oluşturulabilir.



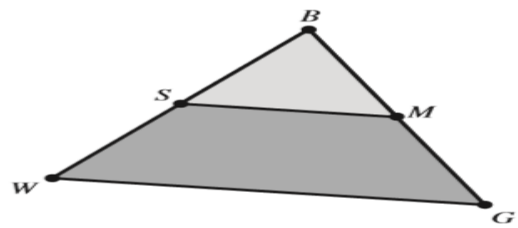
Şekil 3.4. Genişletilmiş Yansıtma Durumunu

3. R köşesinin fonksiyon değeri en iyi köşenin fonksiyon değerinden daha büyükse yansıtma yerine büzülme gerçekleşecektir. $\overline{\boldsymbol{WM}}$ ve $\overline{\boldsymbol{MR}}$ uzaklıklarının orta noktası belirlenir. $\overline{\boldsymbol{WM}}$ uzaklığının orta noktası $\boldsymbol{C}_1$ ile $\overline{\boldsymbol{MR}}$ uzaklığının orta noktası $\boldsymbol{C}_2$ ile ifade edilsin**.** Bu iki moktanın fonksiyon değeri küçük olan kullanılır ve artık $\boldsymbol{C}$ diye ifade edilir.



Şekil 3.5. Büzülme Durumu

4. Eğer fonksiyonun $\boldsymbol{C}$ noktasındaki değeri $\boldsymbol{W}$ noktasındaki değerden daha küçük değilse o zaman en iyi köşe olan $\boldsymbol{B}$ ‘ye doğru bir küçülme yapılmalıdır. $\boldsymbol{W}$ noktasının yerine $\boldsymbol{S}$ ve $\boldsymbol{G}$ köşesinin yerine $\boldsymbol{M}$ kullanılacaktır. S noktası $\overline{\boldsymbol{BW}}$ uzaklığının, $\boldsymbol{M}$ ise $\overline{\boldsymbol{BG}}$ uzaklığının orta noktalarıdır.



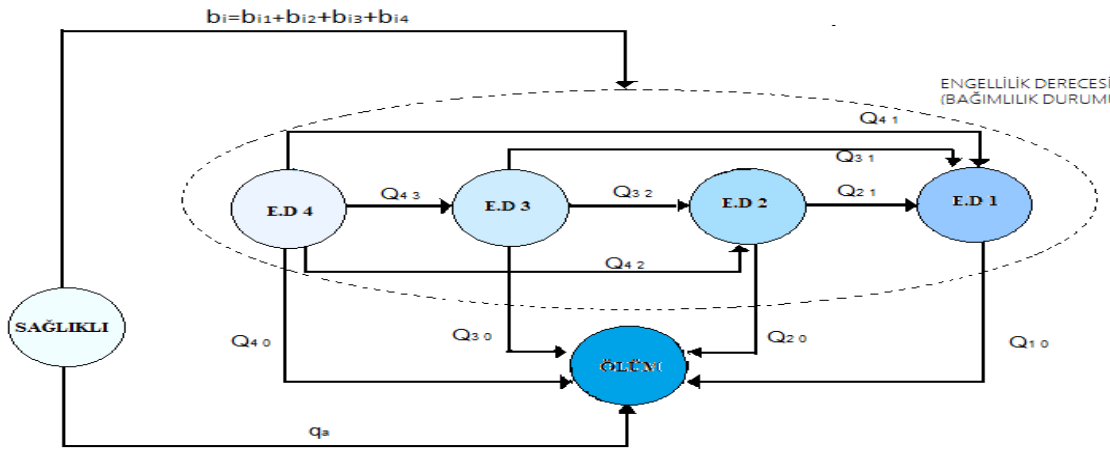
Şekil 3.6. Küçülme Durumu

5. Bu şekilde iterasyon, bütün noktaların fonksiyon değerleri birbirlerine en yakın olana kadar devam edecektir. Fonksiyonun en küçük değerinin noktaları yerel minimum değerleri göstermektedir.

4. UZUN DÖNEM BAKIM SİGORTA MODELİ

Çalışmanın bu kısmında Biessy'in[22] kullanmış olduğu UDBS modeli anlatılmıştır. Benzetimde kullanılacak parametrelerin nasıl elde edildiği ve kullanılan veri seti hakkında açıklamalar yapılmıştır.

UDBS modeli kesikli zamanlı ve sürekli zamanlı olmak üzere 2 farklı şekilde oluşturulabilir. Kesikli ve sürekli zamanlı modeller, durum sayısına göre farklı şekilde oluşturulabilir. Bu çalışmada UDBS'de sürekli zamanlı ve 10 geçişli model kullanılmıştır. Çizelge 2.1 de belirtildiği gibi bakıma muhtaçlık durumları 6 derecede sınıflandırılmıştır. Fakat ilk dört bakıma muhtaçlık derecesi UDBS'ye dahil edilmiştir. Bakıma muhtaçlık durumunun 4 derecesi, sağlıklı olma ve ölüm durumu göz önüne alınarak hesaplama yapılmaktadır. Ayrıca bu modelde durumlar arası geçişlerin tek taraflı olduğu varsayılmıştır.



Şekil 4.1. Uzun Dönem Bakım Sigortası için Çok Durumlu Model

Sağlıklı bir bireyin yaşamı boyunca gerçekleşebilecek durumlar Şekil 4.1'de ifade edilmiştir. Şekilde; b_i sağlıklı bireyin bakıma muhtaç duruma geçme olasılığını, q_a sağlıklı bireyin ölme olasılığını ve $i, j \in \{1,2,3,4\}$ olmak üzere Q_{ij} olasılıkları i. bakıma muhtaçlık derecesindeki bireyin j. bakıma muhtaçlık derecesine geçiş olasılıklarını ifade etmektedir.

Biessy'in çalışmasında sağlıklı durumdan bakıma muhtaç duruma ve ölüm durumuna yıllık geçiş olasılıkları bilinmektedir. Bu yüzden sağlıklı bireyin bakıma muhtaçlık ya da ölüm durumuna geçmeden sağlıklı bir şekilde geçirdiği süre yarı-Markov süreciyle açıklanmamıştır. Şekil 4.1'de ifade edilen bakıma muhtaçlık durumları arasındaki geçişler ve bakıma muhtaç durumundan ölüm durumuna geçişler yarı-Markov süreci olarak düşünülmüştür.

4.1. Uzun Dönem Bakım Sigortası Modelini Oluşturmada Kullanılan Veri

Fransa'da bakıma muhtaç bireylere yardımcı olmak için Özel Bağımsızlık Ödeneği (Allocation Personnalisée d'Autonomie, APA) 2002 yılında başlatılmıştır. Bieesy'in[22] çalışmasında APA'dan alınan bilgiler ile bireylerin bakıma muhtaç durumlarında kalış süreleri için model oluşturulmuştur.

APA verisi 2002 ile 2005 dahil olmak üzere bu yıllar arasında bakıma muhtaç bireylerin bakıma muhtaçlık durumları ile ilgilidir. APA, 2002 yılında başlatıldığı için 2002 yılından önce bakıma muhtaç durumda olan bireyler 2002 ile 2003 yılları arasında APA sistemine gireceklerdir. Bu durum "mevcut etkisi" olarak adlandırılır. 2002 ile 2003 yılında APA sistemine giren bireylerin ilk bakıma muhtaç olduğu zaman bilinemez. Bu yüzden mevcut etkisinin bireylerin bakıma muhtaç durumunda kalış süresi için oluşturulan modeli etkilememesi için 2003 yılından önce bakıma muhtaç olan bireyler APA verisine dahil edilmemiştir. Bunun için APA verisi soldan kesilmiştir. Böylece mevcut etkinin modelin parametrelerini etkilemesinin önüne geçilmiştir. 2002 yılında ilk kez bakıma muhtaç olan bireyler ile 2003 yılında ilk kez bakıma muhtaç olan bireyin bilgileri benzerdir. Bu yüzden sonuçların fazla etkilenmeyeceği düşünülmüştür. Bununla birlikte gözlem periyodu 4 yıldan 3 yıla düşmüştür. Diğer taraftan bakıma muhtaç durumda olan birey için 2005 yılından önce ölüm durumunun çok nadir gerçekleştiği görülmektedir. Bu nedenle ölüm hakkında bilgi sadece 2005 yılında toplanmıştır. Sonuç olarak 2002, 2003 ve 2004 yıllarında meydana gelen ölümler kayıp bilgi olarak kabul edilmiştir.

APA verisinde bakıma muhtaç bireylerin bakıma muhtaçlık derecesinin değişimi doktorlar tarafından belirlenmektedir. Fakat doktorların her an hastayı takip etmesi imkansızdır. Bakıma muhtaç bir bireyin bakıma muhtaçlık derecesinin değişim zamanı ile bireyin bakıma muhtaçlık derecesinin değerlendirildiği zaman aynı değildir. Bu yüzden bireyin bakıma muhtaçlık derecesinin değerlendirildiği tarih aslında bireyin bakıma muhtaçlık durumundaki geçiş zamanını göstermez. Tam olarak bakıma muhtaçlık durumundaki değişim zamanını belirlemek imkansız olduğundan bakıma muhtaçlık durumundaki değişikliğin belirlenme zamanı, bakıma muhtaçlık durumundaki geçiş zamanı olarak kabul edilmiştir.

APA sistemine dahil olabilmek için sigortalının 60 ve üzeri yaşa sahip olması gerekmektedir. 60 yaşından önce bakıma muhtaç olan birey 60 yaşına gelmeden sisteme girememektedir. 60 yaşında sisteme giren bireyin kaç yaşında bakıma muhtaç olduğu bilinemez. Bu yüzden 60 yaşındaki bireyler yani ilk değerlendirilme yaşı 61'den küçük olanlar APA verisinden çıkarılır. Böylece modelde yaş değişkenine ilişkin parametreye daha gerçekçi bir yaklaşım sağlanır. 60 yaşında bakıma muhtaç olan birey sayısı az olduğundan 61 yaşından küçük bireyleri çıkarmanın etkisi oldukça azdır.

APA verisinde sadece bireyin başka bir duruma geçiş yaptığı zamanlar kaydedilmiştir. Aynı durumda kaldığı değerlendirmeler dikkate alınmamıştır.

APA verisi 4 bakıma muhtaçlık durumunu içermektedir. Bireyin bakıma muhtaçlık durumu 4'den fazla değerlendirilirse, ardışık değerlendirme olarak kabul edilir. Ardışık değerlendirmeler kaydedilmez. Dört ardışık değerlerdirmeden sonra bakıma muhtaçlık durumunda değişim meydana gelmez. Ayrıca 4 değerlendirmeden sonra olabilecek tek durum ölüm durumunun gerçekleşmesidir. Ardışık 4 bakıma muhtaçlık durum değerlendirmesi geçiren birey sansürlenir. Bu noktadan sonra sadece bireyin ölümü hakkında bilgi dikkate alınır. Gözlem süresinin 4 değerlendirme ile son bulduğu düşünülür. Bu oluşturulan modelde bazı sorunlara neden olur fakat 4 bakıma muhtaçlık durum değerlendirmesi geçiren kişi sayısı az olduğundan bu verinin sansürlenmesinin modelde fazla etkisi olmaz.

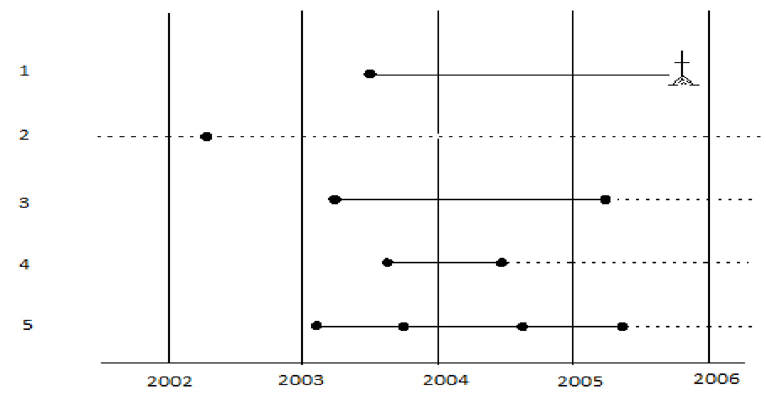
Geçici bir süre bakıma muhtaç olan bireyler APA'ya dahil edilmemiştir. Sürekli bakıma muhtaç durumda kalacağı tespit edilen bireyler hakkında bilgiler kaydedilmiştir. APA sistemindeki bireylerin bakıma muhtaçlık durumunda geçişler tek yönlüdür. Yaşlı bireylerde iyileşme ihtimalinin düşük olmasından dolayı bireylerin iyileşme ihtimali olmadığı düşünülmüştür. Ayrıca sistemdeki bireylere bakıma muhtaçlık derecesi arttıkça daha fazla imkan sağlanmaktadır. Bu imkanlardan faydalanabilmek için sağlık durumlarında iyileşme söz konusu olsa bile bu iyileşmeyi kabul etmeyeceklerdir. Sonuç olarak model oluşturulurken bireylerin sadece daha kötü bakıma muhtaçlık durumuna geçtiği varsayılmıştır. Daha iyi duruma geçme olasılıkları sıfır olarak kabul edilmiştir.

2005 yılına kadar ölüm durumunun gözlemlenmemesinden dolayı karşılaşılabilecek durumlar:

- Gözlem süresi boyunca bireyin ölümü gözlemleniyorsa, tam gözlemdir.
- Gözlem süresinde bireyin ölümü gözlemlenmiyorsa ve en son bakıma muhtaçlık derece değerlendirmesi 2005 yılında meydana geliyorsa, gözlem süresinin sonunda birey hayattadır aksi takdirde bireyin ölüm zamanı kaydedilirdi. Birey gözlem süresinde ölüm durumuna geçmediği için bu gözlem sağdan sansürlenir. En son

değerlendirme ve gözlem süresinin sonu arasında bireyin hayatta kalması hakkında bilgi olabilirlik fonksiyonu aracılığıyla hesaplanır.

- Gözlem süresinde bireyin ölümü gözlemlenmiyorsa ve en son gözlemlenen bakıma muhtaçlık durum değerlendirmesi 2005 yılından önce meydana geldi ise, birey ya 2005'ten önce ölmüştür ya da gözlem süresinin sonunda hala hayattadır. Aksi takdirde 2005 yılı boyunca ölümü kaydedilirdi. İki durumda da, yeni bir bakıma muhtaçlık durumu değerlendirilmesi yapılmadığı için geçiş yoktur. Bu olay sadece bireyin ölümü sansürlendiği için kısmi sansürleme olarak adlandırılır. Oldukça karmaşık görülebilir ama olasılığı olabilirlik fonksiyonuyla oldukça kolay ifade edilir[22].



Şekil 4.2. APA Verisi için Değerlendirme Süreçleri

1 → Tam gözlem, bireyin bakıma muhtaç olduğu zamandan ölene kadar olan tüm zaman gözlemlenmiştir.

2 → Göz ardı edilen gözlem, 2002 yılında ve öncesinde bakıma muhtaç olan bireyler mevcut etkisi nedeniyle veriye dahil edilmez.

3 → Sağdan sansürlü gözlem kayıp bilgi yoktur.

4 → Kısmi sansürlü gözlem, ölüm meydana gelir fakat gözlenmez.

5 → Sıklık sansürlü gözlem, bakıma muhtaçlık durumlarının 4 değerlenmesini de geçirmektedir.

Gözlem süresinin özelliklerin aşağıdaki gibi özetlenebilir. Gözlem süresi,

- Hem takvim yılı hem de yaşa göre soldan kesilmiştir. Takvim yılına göre, 2002 yılından önce bakıma muhtaç olan veya 1 Ocak 2003'den önce ölen bireyler veriden çıkarılır. Yaşa göre, 60 yaşından önce bakıma muhtaç olan veya 61 yaşından önce ölen bireyler veriden çıkarılır.

- Sağdan kesilmiştir. Sadece 31 Aralık 2005 tarihinden önce bakıma muhtaç olan bireyler veri setinde yer alır.
- Kısmi sansürlüdür. Kısmi sansürlü gözlemlerde, ölümler 1 Ocak 2005 tarihinden önce gözlenmez.
- Sıklık sansürlüdür. 4 bakıma muhtaçlık derecesi değerlendirmesinden sonra gözlem periyodu sonlanır.
- Sağdan sansürlüdür. Gözlem süresi 31 Aralık 2005 tarihinde sonlanır[22].

4.2. Bakıma Muhtaçlık Durumlarında Geçiş Olasılıkları

Bakıma muhtaçlık durumları arasındaki geçiş olasılıkları yarı-Markov ile modellenmektedir. Q_{ij} yarı-Markov çekirdek olasılığı olarak adlandırılır. 4 tane bakıma muhtaçlık ve ölüm durumu olmak üzere toplam 5 durum vardır. Bu durumlarda iyileşme olasılığı söz konusu değildir. Ayrıca bakıma muhtaçlık durumlarındaki yineleme yani i. bakıma muhtaçlık durumundan tekrar i. bakıma muhtaçlık durumuna geçmesi söz konusu değildir. Bu koşullar altında toplam 10 geçiş olasılığı vardır. Yarı-Markov modelde bir sürecin gelecekteki durumunun dağılımı şu andaki durumunun dağılımına bağlı olmanın yanı sıra şuandaki durumda kalış süresine de bağlıdır. Yarı-Markov geçiş olasılıkları Eşitlik (3.3)'den,

$$Q_{ij}(t) = p_{ij}F_{ij}(t)$$

şeklinde dağılım fonksiyonuna ve Markov geçiş olasılıklarına bağlı olarak yazılabilir. $Q_{ij}(t)$ olasılık değerlerini elde etmek için i. bakıma muhtaçlık durumundan j. bakıma muhtaçlık durumuna Markov geçiş olasılık değerlerinin ve bakıma muhtaç durumda kalış süresinin dağılım fonksiyonunun bulunması gerekmektedir. Eşitlik (3.4) kullanılarak Markov geçiş olasılıkları elde edilmiştir. Biessy'in çalışmasındaki Markov geçiş olasılıkları aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

Geçişler	**4→3**	**4→2**	**4 → 1**	**4→0**	**3→2**	**3→1**	**3→0**	**2→1**	**2→0**	**1→0**
p_{ij}	0,27	0,34	0,03	0,36	0,43	0,05	0,52	0,13	0,87	1,0

Çizelge 4.1. Markov Geçiş Olasılıkları

$Q_{ij}(t)$ olasılık değerini elde etmek için bakıma muhtaç durumda kalış süresinin dağılım fonksiyonu Cox orantılı regresyon ve zayıflık modeliyle modeliyle açıklanmıştır.

4.3. Model Değişkenleri

Bakıma muhtaçlık durumlarında kalış süresi modellenirken, bu süreyi etkileyecek açıklayıcı değişkenlerin de modele eklenmesi gerekmektedir. Bu yüzden Cox ortantılı tehlike modeli ile iki açıklayıcı değişken eklenir. Bu açıklayıcı değişkenler bakıma muhtaç bireylerin yaşı ve cinsiyetidir. Cinsiyet, kadın ve erkek olmak üzere iki değerden oluştuğundan tek bir parametre ile ifade edilebilir. Cinsiyetin tehlike hızı üzerindeki etkisini hesaplamak için modeldeki her bir geçiş α parametresi ile ifade edilir. Yaş değişkeni ise, bakıma muhtaç olan her birey için değişken ve sürekli bir ölçeğe sahiptir. Fakat modelde sadece tek bir parametre β ile ifade edilir. Eğer bakıma muhtaçlık durumuna giriş yaşı s ise tehlike oranı $e^{\beta s}$ ile çarpılır. Ayrıca bakıma muhtaçlık durumunda kalış süresinin Weibull dağılım olduğu varsayılmıştır. Cox orantılı tehlike modelinde temel tehlike hızı fonksiyonu Weibull dağılım olarak alınmıştır. $\forall\, t > 0$, $g \epsilon \{1,2\}$, $s, \sigma, v > 0$ ve $\alpha, \beta \epsilon$R olmak üzere,

$$\lambda_0(t) = \sigma v t^{v-1}$$
$$S_0(t) = e^{-\sigma t^v}$$
$$g(\mathbf{x}) = exp(\alpha g + \beta s)$$

biçimindedir. Eşitlik (3.5) ve (3.6)'dan Cox regresyon modelinin tehlike hızı ve yaşam fonksiyonu,

$$\lambda(t|g,s) = \lambda_0(t) e^{\alpha g + \beta s} \tag{4.1}$$
$$S(t|g,s) = S_0(t)^{\exp(\alpha g + \beta s)} \tag{4.2}$$

şeklinde ifade edilir.

4.4. Zayıflık Etkisinin Modele Eklenmesi

APA verisi her bireyin yaş ve cinsiyet bilgisine sahip olmasına rağmen bireylerin hastalıklarıyla ilgili bilgi içermemektedir. Bireyler farklı hastalık türlerinden dolayı aynı bakıma muhtaçlık derecesine sahip olabilirler, fakat hastalık türlerinin farklı olmasından dolayı bakıma muhtaçlık durumunda farklı kalış sürelerine sahip olacaklardır. Bu yüzden herhangi bir bakıma muhtaç durumda kalış süresine hastalığın etkisi olduğu düşünülmüştür. Hastalıklar hakkında bilgi sahibi olunmadığından hastalıktan kaynaklanan heterojenliği açıklamak için zayıflık modeli kullanılmıştır.

Genel olarak hastalıkları iki gruba ayrılabilir: kardiyovasküler ve nörolojik. Kardiyovasküler hastalıklar; kanser, felç ve diğer kalp ve damarlarla ilişkili hastalıklardır. Nörolojik hastalıklara bunaklık, alzaymır, emes gibi beyinle ilgili hastalıklar örnek gösterilebilir. Bu hastalıkların görülme sıklığı yaş artışıyla doğru ilişkili olmasına rağmen iki tür hastalık grubunun yaşam süresi birbirinden farklıdır. Her bir bakıma muhtaçlık derecesinde kardiyovasküler hastalığa sahip bireyin yaşam süresi nörolojik hastalığa sahip bireyin yaşam süresinden daha kısadır.

Zayıflık modeli Eşitlik (3.8)'de,

$$\lambda(t|Z) = Z\underbrace{\sigma v t^{v-1} e^{\alpha g+\beta s}}_{\lambda(t)}$$

şeklinde ifade edilmişti.

Z zayıflık değeri $Z = \exp(u)$ ile ifade edilir. Bu çalışmada u raslantı değişkeni Bernoulli dağıldığı varsayılmıştır. Hastalık türlerinin iki gruba ayrılmasından dolayı Bernoulli dağılımı uygun görülmüştür. Bernoulli dağılımının parametresi $\eta(g, s)$ ile ifade edilsin. $\eta(g, s)$ olasılığı üzerinde yaş ve cinsiyetin etkisini ifade etmek için logit bağ fonksiyonu ile genelleştirilmiş doğrusal model kullanılmıştır.

Genelleştirilmiş doğrusal modelde Bernoulli dağılımının bağ fonksiyonu Eşitlik (3.10)'dan

$$log\left(\frac{\eta}{1-\eta}\right) = \eta_0 + \eta_1 g + \eta_2 s$$

şeklinde ifade edilir.

$\eta(g, s)$ olasılığı s yaş ve g cinsiyete bağlı parametrelerle ifade edilmiştir[22]. Hem yaş hem de cinsiyet değişkeninin zayıflık modeli için etkisi farklıdır. Bu farklılığı modele yansıtmak için genelleştirilmiş doğrusal model uygulanmıştır. Böylece yaşa ve cinsiyete göre her bir birey farklı zayıflığa sahip olacaktır.

g ve s açıklayıcı değişkenlerine bağlı olan u değeri Eşitlik (3.10) ve (3.11) ile,

$$u \sim Bernoulli\left(\frac{e^{\eta_0+\eta_1 g+\eta_2 s}}{1+e^{\eta_0+\eta_1 g+\eta_2 s}}\right) \tag{4.3}$$

olarak gösterilir. Her bir geçiş için hastalık türünün etkisinin parametresi γ ile e^{γ} olarak ifade edilir. Bu değişken her bir geçiş durumu için farklı değerler alacaktır[22].

Zayıflık modelinin değişkeni $\gamma > 0$ olmak şartıyla, orantılı tehlike modeline çarpımsal etkisiyle,

$$\lambda(t|g,s,u) = e^{\gamma u}\lambda_1(t|g,s) = \begin{cases}\lambda_1(t|g,s) & eğer\ u = 0,\\ e^{\gamma}\lambda_1(t|g,s) & eğer\ u = 1\end{cases} \tag{4.4}$$

$$S(t|g,s,u) = S_1(t|g,s)^{exp(\gamma u)} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} f(t|g,s,u) &= \lambda(t|g,s,u)xS(t|g,s,u) \\ &= e^{\gamma u}\lambda_1(t|g,s)S_1(t|g,s)^{exp(\gamma u)} \end{aligned} \tag{4.6}$$

şeklinde ifade edilir[22].

4.5. Model

Bakıma muhtaç durumda kalış süresi modeline genel bir çerçeveden bakılınca, oluşan modelin Eşitlik (4.5)'den yaşam fonksiyonu,

$$\begin{aligned} S_{ij}(t|g,s,u) &= P(T_{n+1} - T_n > t \mid X_n = i, X_{n+1} = j, T_n = s) \\ &= exp\left(-t^{v_{ij}}\sigma_{ij}e^{\alpha_{ij}g+\beta_{ij}s+\gamma_{ij}u}\right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Eşitlik (4.6)'dan olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_{ij}(t|g,s,u) &= P(T_{n+1} - T_n = t \mid X_n = i, X_{n+1} = j, T_n = s) \\ &= -\frac{d}{dt}S_{ij}(t|g,s,u)) \\ &= v_{ij}\sigma_{ij}t^{v_{ij}-1}e^{\alpha_{ij}g+\beta_{ij}s+\gamma_{ij}u}exp\left(-t^{v_{ij}}\sigma_{ij}e^{\alpha_{ij}g+\beta_{ij}s+\gamma_{ij}u}\right) \end{aligned}$$

Eşitlik (4.4)'den tehlike hızı fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}(t|g,s,u) &= \lim_{h\to\infty}\frac{P(t \le T_{n+1} - T_n < t + h \mid X_{n+1} = j, X_n = i, T_n = s)}{h} \\ &= v_{ij}\sigma_{ij}t^{v_{ij}-1}e^{\alpha_{ij}g+\beta_{ij}s+\gamma_{ij}u} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Her bir geçiş durumu için $v, \alpha, \beta, \gamma, \sigma$ değerleri belirlenmelidir. Tüm bakıma muhtaçlık durumlarına geçişler için sabit olan η_0, η_1, η_3 zayıflığın parametreleri yaşa ve cinsiyete göre değişecektir.

4.6. Olabilirlik Fonksiyonu

Ölümlerin gözlemlenmeye başlanıldığı 1 Ocak 2005 tarihi B_1, gözlemin bittiği 31 Aralık 2005 tarihi B_2 ve bakıma muhtaç durumdaki birey k ile gösterilsin. Gözlem süresinde

1. n_k, k. bireyin bulunduğu durumların sayısını
2. $X^k = (X_m^k)_{1\le m\le n_k}$ k. bireyin geçiş yaptığı durumların kümesini
3. $h^k = (h_m^k)_{1\le m\le n_k}$ k. bireyin geçiş yaptığı zamanların kümesini
4. I birim matrisi olmak üzere gözlem sağdan sansürlü ise δ_1^k, kısmi sansürlü δ_2^k
   $(\delta_1^k, \delta_2^k) = \left(I\left[X_{n_k}^k \ne 0, B_1 \le h_{n_k} < B_2\right], I\left[X_{n_k}^k \ne 0, h_{n_k} < B_1\right]\right)$
5. g_k, k. bireyin cinsiyeti ve s_k, k. bireyin bakıma muhtaç duruma geçiş yaptığı yaşı

ifade etmektedir.

N gözlemlenen tüm bireylerin sayısını ifade etsin. Bu durumda $i,j \in E, t > 0,\ t_1 \ge t_2 > 0,\ u \in \{0,1\}, g \in \{1,2\}$ olmak üzere log-olabilirlik fonksiyonu,

$$l = \sum_{k=1}^{N} log\left(\eta(g_k, s_k)xl_k^1 + \left(1 - \eta(g_k, s_k)\right)xl_k^0\right)$$

olarak ifade edilir[22]. Bu eşitlikte,

$$l_k^u = \left(\prod_{m=1}^{n_k-1} \underbrace{C_{X_m^k, X_{m+1}^k} \left(h_{m+1}^k - h_m^k | g_k, s_k, u \right)}_{tam\ gözlemler} \right) x \underbrace{C_{X_{n_k}^k}^1 \left(B_2 - h_{n_k}^k | g_k, s_k, u \right)^{\delta_1^k}}_{sağdan\ sansürlü\ gözlemler}$$

$$x \underbrace{C_{X_{n_k}^k}^2 \left(B_1 - h_{n_k}^k, B_2 - h_{n_k}^k | g_k, s_k, u \right)^{\delta_2^k}}_{Kısmi\ sansürlü\ gözlemler} \quad (4.8)$$

biçimindedir. Burada,

- $C_{i,j}(t|g,s,u) = p_{ij} x\ f_{ij}(t|g,s,u)$
  $= p_{ij} x\ v_{ij} \sigma_{ij} t^{v_{ij}-1} e^{\alpha_{ij} g + \beta_{ij} s + \gamma_{ij} u} exp\left(-t^{v_{ij}} \sigma_{ij} e^{\alpha_{ij} g + \beta_{ij} s + \gamma_{ij}}\right)$

  şeklinde ifade edilebilir. p_{ij} olasılığı i. bakıma muhtaçlık durumundan j. bakıma muhtaçlık durumuna geçiş olasılığını ifade eder. $f_{ij}(t|g,s,u)$ en az t süresinde meydana gelen geçişlerin koşullu fonksiyonudur. Tam gözlemlerde kullanılır.
- $C_i^1(t|g,s,u) = \sum_{j<i} p_{ij}\ x\ S_{ij}(t|g,s,u)$
  $= \sum_{j<i} p_{ij}\ x\ exp\left(-t^{v_{ij}} \sigma_{ij} e^{\alpha_{ij} g + \beta_{ij} s + \gamma_{ij}}\right)$

  şeklinde ifade edilir. $S_{ij}(t|g,s,u)$ yaşam fonksiyonu, sağdan sansürlü gözlemi ifade eder. Gözlemin durumu hakkında bilgi sahibi olunamadığından en az t süresi boyunca i. bakıma muhtaçlık durumunda kalma olasılığını ifade etmektedir.
- $C_i^2(t_1, t_2|g,s,u) = p_{i0}\ x\ \left(1 - S_{i0}(t_1|g,s,u)\right) + \sum_{j<i} p_{ij}\ x\ S_{ij}(t_2|g,s,u)$
  şeklinde ifade edilir. İlk terim $p_{i0}\ x\ \left(1 - S_{i0}(t_1|g,s,u)\right)$, t_1 süresinden önce ölme olasılığını gösterir. $\sum_{j<i} p_{ij}\ x\ S_{ij}(t_2|g,s,u)$ terimi, t_2 süresinde i. bakıma muhtaçlık durumunda kalma olasılığını verir. Kısmi sansürlü gözlem için kullanılır.

Olabilirlik fonksiyonu, tam gözlem, sağdan sansürlü gözlem ve kısmi sansürlü gözlemlerle ifade edilmiştir. Bir birey için tüm süreç l_k^u ile gösterilmiştir. Bireylerin olabilirlik fonksiyonu hastalık türlerinin ve bu hastalık türlerine cinsiyet ve yaşın etkisi $\eta(g_k, s_k)$ olasılığıyla ifade edilmişti. Zayıflığın etkisine göre geçişler ayrı ayrı toplanıp $\eta(g_k, s_k)$ etkisiyle çarpılarak olabilirlik fonksiyonu elde edilir.

4.7. Parametre Tahminleri

Biessy'in çalışmasında parametreleri tahmin etmek için Newton Raphson yerine Nelder-Mead algoritması kullanmıştır. Newton Raphson az parametreli modellerde daha doğru sonuçlar vermektedir. Bakıma muhtaç durumda kalış süresi için oluşturulan modelde 10 geçiş mevcuttur. Bu modeldeki her bir geçiş 5 parametreden oluşmaktadır. Ayrıca her geçişte sabit olan genelleştirilmiş doğrusal modelden kaynaklı 3 parametre daha vardır. Toplam tahmin edilmesi gereken 53 parametre olduğundan Nelder-Mead yöntemini tercih edilmiştir.

Gözlem süresi boyunca gerçekleşen her bir geçiş için farklı parametreler kullanılmıştır. Zayıflık modelinin parametresi geçişlere göre değişmesine rağmen, genelleştirilmiş doğrusal modelle açıklanan yaş ve cinsiyetin zayıflık modeline etkisi sabittir. Elde edilen parametreler Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3'te verilmiştir

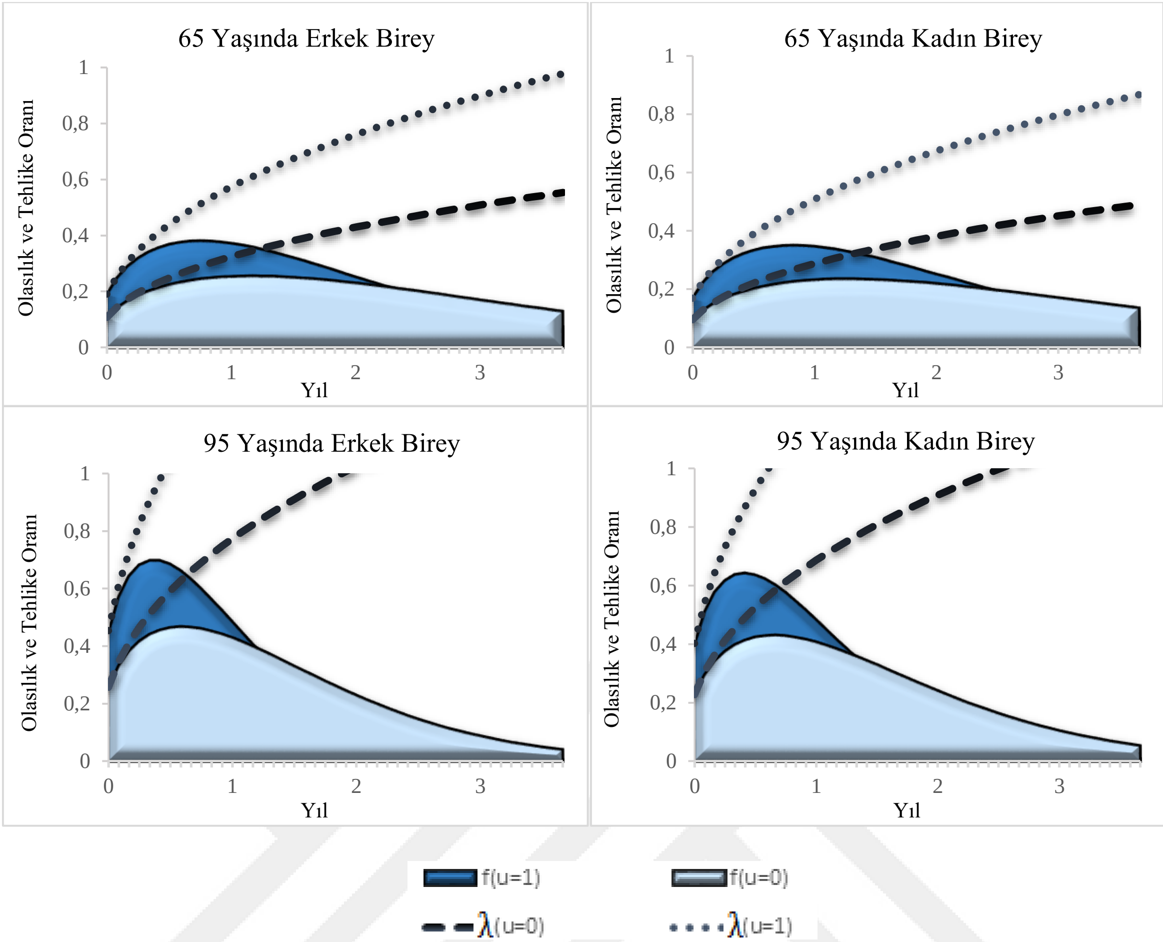
Geçişler	σ_{ij}	v_{ij}	α_{ij}	β_{ij}	γ_{ij}
4 → 3	0,0107	1,43	−0,23	0,044	0,13
4 → 2	0,0043	1,43	−0,15	0,046	0,62
4 → 1	0,0005	1,65	−0,11	0,070	1,17
4 → 0	0,0413	1,39	−0,90	0,039	3,09
3 → 2	0,0375	1,43	−0,12	0,029	0,57
3 → 1	0,0136	1,59	−0,22	0,044	0,22
3 → 0	0,0439	1,23	−0,73	0,037	2,95
2 → 1	0,1279	1,49	0,06	0,008	0,21
2 → 0	0,0515	1,23	−0,82	0,037	3,38
1 → 0	0,0711	1,14	−0,61	0,036	3,64

Çizelge 4. 2. Her Bir Geçiş için Parametre Tahminleri[22]

η_0	η_1	η_2
0,93	−0,06	−0,04

Çizelge 4. 3. Zayıflığın Etkisi için Parametre Tahminleri[22]

Nelder-Mead yöntemiyle 100 iterasyon sonucunda parametrelerin değeri bulunmuştur. Bu sonuçlara göre yaş, cinsiyet ve zayıflığın model üzerinde ne kadar etkili olduğuna dair yorum yapılabilir. Örnek olarak 3. derece bakıma muhtaçlık durumundan 2. derece bakıma muhtaçlık durumuna geçiş için olasılık yoğunluk ve tehlike hızı fonksiyonları kadın ve erkek bireylerin 65 ve 95 yaşı için hesaplanmıştır.

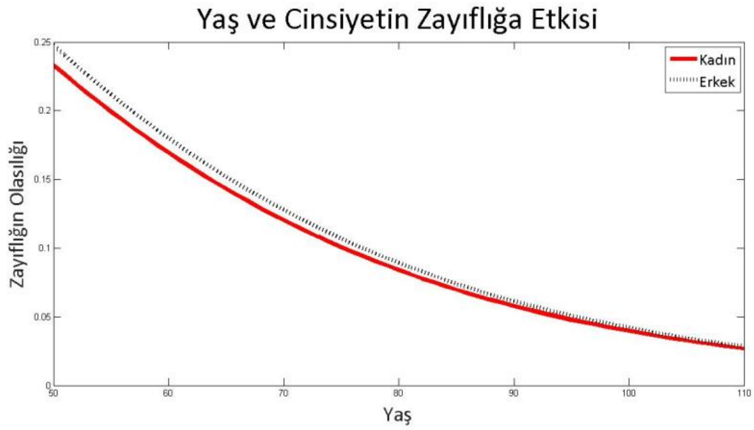


Şekil 4.3. Bakıma Muhtaç Durumda Kalış Süresi Modelinin Olasılık Yoğunluk ve Tehlike Hızı Fonksiyonu

Şekil 4.3'te 3. derece bakıma muhtaçlık durumundan 2. derece bakıma muhtaçlık durumuna geçiş süresinin zamana göre olasılık yoğunluk ve tehlike hızı fonksiyonları verilmiştir. Çizgi grafikleri tehlike fonksiyonunun yıllara göre değerlerini ifade ederken, taralı alan grafikleri olasılık yoğunluk fonksiyonun değerlerini yansıtır. Kesik çizgi $u = 0$, noktalı çizgi $u = 1$ olduğu zaman tehlike hızı fonksiyonu ifade etmektedir. Koyu renkli taralı alan $u = 1$ olduğu zaman olasılık yoğunluk fonksiyonu değerlerini gösterirken, açık renk ile taralı alan $u = 0$ olduğu zaman olasılık yoğunluk fonksiyonlarının değerini göstermektedir.

Şekil 4.3'ten görüldüğü üzere yaş ilerledikçe 3. derecede bakıma muhtaç bireyin daha kötü bir bakıma muhtaçlık derecesi olan 2. dereceye geçmesi hızlanmaktadır. Yaş arttıkça 3. derece bakıma muhtaçlık durumunda kalış süresi azalacaktır. Ayrıca 3. derece bakıma muhtaçlık durumunda bulunan erkekler kadınlara göre bu durumda daha kısa süre bulunacaklardır. Zayıflık parametresi olan u'nun değişimi tehlike hızı ve olasılık yoğunluk fonksiyonu üzerinde önemli derecede etkilidir. Zayıflık değişkeni $u = 1$ olduğunda bakıma muhtaçlık durumunda kalış süresi, $u = 0$ olduğundaki kalış süresinden kısadır. Zayıflık değişkenin etkisi yaş ve cinsiyete bağlı olduğundan yaş arttıkça zayıflık değişkeninin etkisi değişecektir.

Eşitlik (4.3)'te Bernoulli dağılım parametresi olarak verilen zayıflığın olasılığı Şekil 4.4'te ifade edilmiştir. Kadın ve erkek birey için zayıflık olasılıkları arasında çok fark olmamasına rağmen yaş ilerledikçe zayıflığın olasılığı her iki cinsiyet için de azalmaktadır.



Şekil 4.4. Cinsiyet ve Yaş Değişkenlerinin Zayıflığa Etkisi

Zayıflık terimi zayıflık konusunda bahsedildiği gibi Bernoulli dağılımına sahiptir. Bu dağılımın parametresi yaş ve cinsiyete göre değişmektedir. Kadının erkeğe göre zayıflık olasılığı(p) daha yüksektir. Yaş ilerledikçe kadın ve erkek bireylerde zayıflığın etkisi azalmakta ve değer olarak birbirine çok yaklaşmaktadır. 50 yaşında zayıflık etkisinin olasılığı yaklaşık 0,25 iken 100 yaşında 0,05'e kadar düşmektedir. Zayıflık değişkeni bakıma muhtaç bireyin daha kötü bakıma muhtaçlık seviyesine geçiş hızında önemli bir etkiye sahiptir. Yaş ilerledikçe zayıflığın etkisinin azalmaktadır. Bunun nedeni ise, ileri yaşlarda yaşam süresinin hastalıklardan çok yaştan etkilenmesidir.

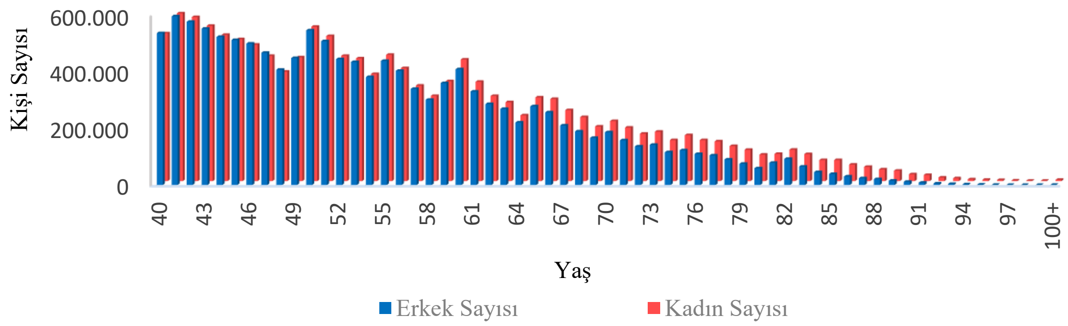
5. MONTE CARLO BENZETİM YÖNTEMİ İLE UZUN DÖNEM BAKIM SİGORTA PRİMİNİ HESAPLAMA

UDBS için bakıma muhtaçlık durumlarının geçiş olasılıklarıyla prim hesabı yapmak oldukça zordur. İç içe integraller alınmasını gerektirmektedir. Bu yüzden her bir yaşa göre benzetim yapılarak prim belirlemek daha doğru olacaktır. Bu çalışmada benzetim kodları için MATLAB 2013 kullanılmıştır. Benzetim [40,60] yaş arasındaki bireyleri kapsamaktadır. Bu aralıktaki her bir yaş için cinsiyet oranı, ölüm olasılığı, bakıma muhtaç olma olasılığı belirlendikten sonra her bir yaş ve cinsiyet için yaşam süreleri ve mevcut durumda kalış süreleri tahmin edilmiştir. Bu kapsamda iki senaryo oluşturulmuştur. İlk senaryo ölüm olasılıklarının zamanla değişmediği, ikinci senaryo ölüm olasılıklarının uzun ömürlülük riskine bağlı olarak her yıl değiştiği varsayımına dayanmaktadır. Bu iki senaryo için UDBS'nın primi ve rezervi elde edilmiştir.

5.1. Benzetim için Gerekli Bilgiler

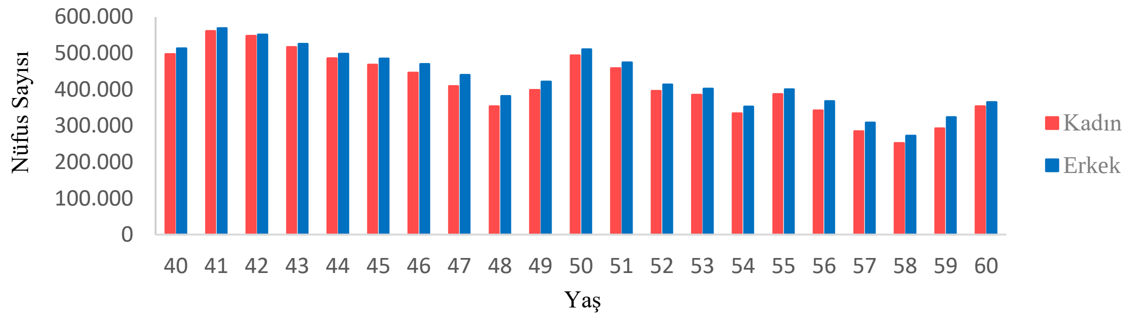
Benzetim için bazı olasılık değerlerini elde edilmesi gerekmektedir. Sağlıklı bireylerin cinsiyet dağılımının, ölüm olasılıklarının, bakıma muhtaç duruma geçme olasılıklarının, bakıma muhtaçlık derecesine göre dağılım olasılıklarının elde edilmesi gerekmektedir.

Yaşayan bireylerin cinsiyet oranlarını belirlemek için her bir yaş grubuna ve cinsiyete ait 2015 yılında Türkiye'de yaşayan birey sayısı kullanılmıştır.



Şekil 5.1. TÜİK'in 2015 Adrese Dayalı Nüfus Kayıt Sistemi Sonuçlarına Göre 40 -100 Yaş Arasındaki Bireylerin Sayısı

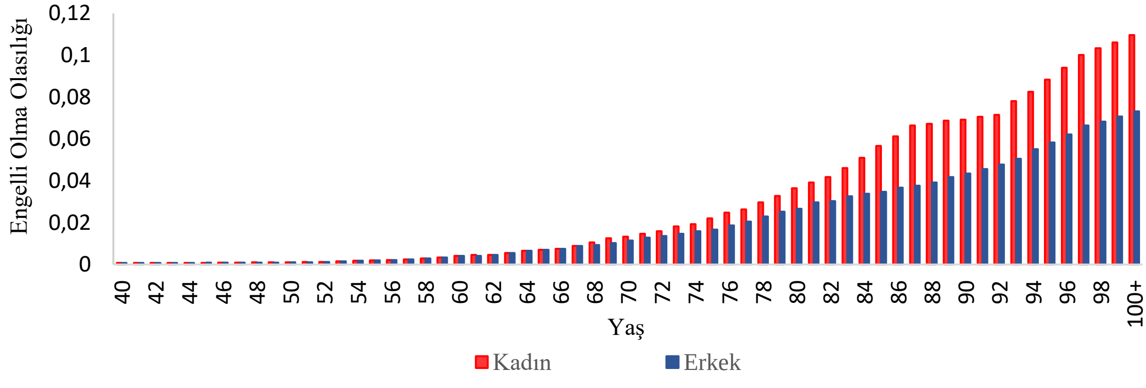
Şekil 5.1'de belirtilen kişi sayısı, Türkiye'de bulunan hem bakıma muhtaç hem de sağlıklı bireylerin sayısıdır. Benzetime tüm bireylerin durumunun sağlıklı olduğu varsayımıyla başlanacağı için yaş gruplarına ait birey sayılarından şu anda engelli durumda olan aynı yaştaki birey sayıları çıkarıldıktan sonra cinsiyet oranları belirlenmiştir. 2015 yılına ait engelli birey sayısı mevcut olmadığından TÜİK'in yapmış olduğu 2011 Nüfus ve Konut Araştırmasından[60] yararlanılarak en az bir engele sahip bireylerin nüfusa oranının değişmediği varsayımı altında 2015 yılında mevcut engelli birey sayısı tahmin edilmiştir. Tahmin edilen bu sayılar üzerinden cinsiyet oranları belirlenmiştir.



Şekil 5.2. 2015 Yılında Yaşa ve Cinsiyete Göre Türkiye'deki Tahmini Sağlıklı Birey Sayısı

Şekil 5.2'de Türkiye'de her bir yaşa ve cinsiyete göre sağlıklı yaşayan kişi sayısının tahmini elde edilmiştir. Her bir yaş için yaşayan sağlıklı erkek sayısı yaşayan sağlıklı bireylerin sayısına oranlanmasıyla o yaş grubuna ait cinsiyet oranları saptanmıştır. Bu çalışmada UDBS'nin 40 ile 60 yaş arasındaki bireyleri kapsadığı varsayılmıştır. Bu yüzden bu yaş aralığındaki sağlıklı birey sayısı tahmin edilmesi yeterlidir.

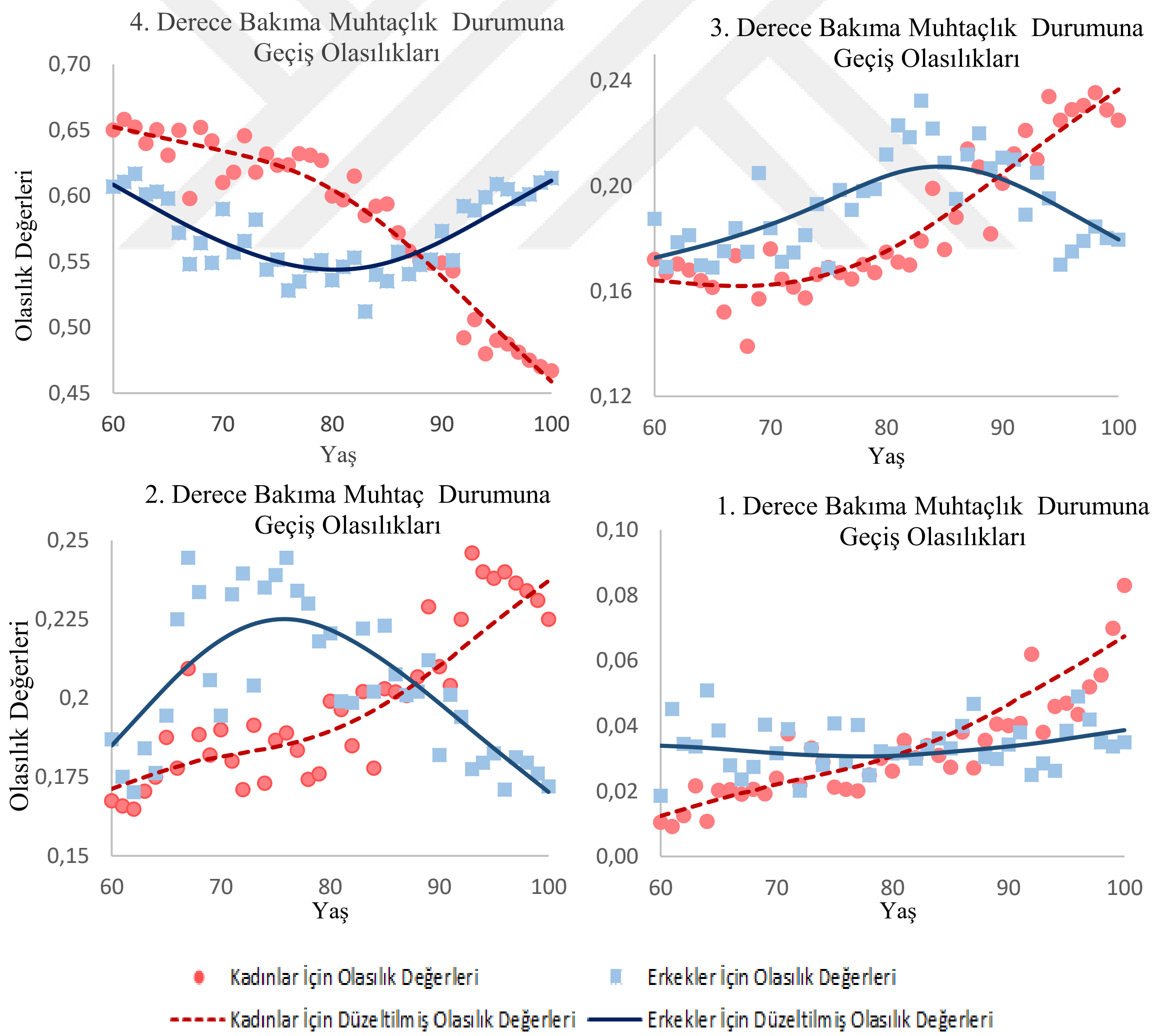
Türkiye'de sağlıklı bir bireyin bakıma muhtaç duruma geçme olasılığı bilinmemektedir. Bu yüzden Fransa'ya ilişkin Cohen, Miller ve Ingoldsby[61] çalışmasında kullanılmış olduğu sağlıklı bireyin bakıma muhtaç durumuna geçme olasılığı kullanılmıştır.



Şekil 5.3. Fransa'da Sağlıklı Bireylerin Yaşa ve Cinsiyete Göre Bakıma Muhtaç Duruma Geçme Olasılıkları[61]

Şekil 5.3'te gösterilen olasılıkların Türkiye içinde geçerli olduğu düşünülmüş ve bu olasılık değerleriyle benzetimde kullanılacak bazı olasılık değerleri elde edilmiştir.

Türkiye'de sağlıklı bireyin bakıma muhtaç duruma geçmesinin olasılığı bilinmediği gibi ilk kez bakıma muhtaç duruma geçen bireyin hangi derecede bakıma muhtaç olduğu da bilinmemektedir. Bu yüzden sağlıklı durumdan bakıma muhtaç duruma geçen bireylerin bakıma muhtaçlık derecelerine geçiş olasılıkları Fransa'ya ilişkin Biessy'in çalışması üzerinden değerlendirilmiştir[22]. Biessy'in çalışmasında sadece 60 ve üzeri yaş için sağlıklı durumdan bakıma muhtaç duruma geçen bireylerin bakıma muhtaçlık derecelerine geçiş olasılıkları mevcuttur. Türkiye'de UDBS kapsamına girebilmek için bireyin en az 65 yaşında olması gerektiği varsayılmıştır. Bu yüzden Biessy'in çalışmasında kullandığı sağlıklı durumdan bakıma muhtaç duruma geçen bireylerin bakıma muhtaçlık derecelerine geçiş olasılığı kullanılmıştır. Biessy'in çalışmasında bakıma muhtaçlık derecelerine geçiş olasılıkları düzgün bir eğri oluşturmamaktadır. Bu yüzden bu olasılıkların düzgün bir eğri olarak temsil edebilmesi için Whittaker Henderson düzeltme yöntemi kullanılmış ve bakıma muhtaçlık derecelerine geçiş olasılıkları elde edilmiştir.



Şekil 5.4. 60 ile 100 Yaş Arasında Bakıma Muhtaçlık Derecelerine Geçiş Olasılıkları

Bakıma muhtaçlık derecelerinin dağılımı yaşa, cinsiyete ve bakıma muhtaçlık durumlarına göre farklılık göstermektedir. 65 yaşındaki sağlıklı kadın için 4. derece bakıma muhtaçlık durumuna giriş olasılığı 0,65 iken 95 yaşındaki kadınlar için bu değerin 0,5 olduğu görülmektedir. Yaş ilerledikçe kadınların 4. derece bakıma muhtaçlık durumuna giriş olasılığı azalmaktadır. Kadınlarda 3. derece, 2. derece ve 1. derece bakıma muhtaçlık durumuna giriş olasılığı yaş ilerledikçe artmaktadır. Erkeklerde ise 3. derece ve 2. derece bakıma muhtaçlık durumlarına giriş olasılıkları her ikisinde de farklı olan bir tepe noktasına kadar artmakta sonra azalmaktadır. 4. derece ve 1. derece bakıma muhtaçlık durumuna giriş olasılığı ise belli bir yaşa kadar azalmakta sonra artmaktadır.

5.2. Benzetim için Gerekli Parametreler

Bu çalışmada 2 farklı senaryo düşünülmüştür. İlk senaryoda, sağlıklı durumdan ölüm durumuna geçiş olasılıklarının zamanla değişmediği statik ölüm olasılıklarla değerlendirildiği varsayılmıştır. Bu senaryoda Türkiye 2013-2015 genel ölüm olasılıklarının, sağlıklı bireylerin ölüm olasılığı olduğu varsayılmıştır. İkinci senaryoda ise sağlıklı durumdan bakıma muhtaç duruma geçiş olasılıklarının uzun ömürlülük riskinden dolayı zamanla değiştiği varsayımı altında dinamik ölüm olasılıklarıyla değerlendirildiği varsayılmıştır. Bu olasılık değerleri nüfus projeksiyonları[62] ile elde edilmiştir. İki senaryoda da diğer parametrelerin sabit kaldığı varsayılmıştır.

Sağlıklı bir bireyin bakıma muhtaç duruma geçiş zamanını ve derecesini tahmin etmek için cinsiyete ve yaşa göre bazı olasılıkların bulunması gerekmektedir. Bu çalışmada 3. bölümde anlatılan Biessy'in modeli ile bakıma muhtaç bir bireyin herhangi bir durumda kaldığı süre bulunabilir. Fakat sağlıklı bir bireyin hangi yaşta ve derecede bakıma muhtaçlık durumuna geçeceği bilinmemektedir. Bu yüzden bazı olasılıkların elde edilmesi gerekmektedir. 1 indisi erkek bireyi ve 2 indisi kadın bireyi $(g \in \{1,2\})$ ifade etmek üzere cinsiyete göre bu olasılıkların bulunması gerekmektedir. Her yaş ve cinsiyete ait statik ve dinamik ölüm olasılıkları ve sağlıklı durumdan bakıma muhtaç duruma geçiş olasılıkları kullanılarak aşağıdaki olasılıklar elde edilir.

- $q_a^g(s)$, s yaşında g cinsiyetindeki sağlıklı bireyin ölüm olasılığını
- ${b_i}^g(s)$, s yaşında g cinsiyetindeki bireyin bakıma muhtaç olma olasılığını
- $p_i^g(s,t)$, s yaşındaki bireyin $s+t$ yaşında bakıma muhtaç olma olasılığını
- $p_a^g(s,t)$, s yaşındaki bireyin bakıma muhtaç olmadan $s+t$ yaşında ölme olasılığını

- $p_i^g(s)$, s yaşındaki bireyin ölmeden önce bakıma muhtaç olma olasılığını
- $p_a^g(s)$, s yaşındaki bireyin bakıma muhtaç olmadan ölme olasılığını
- $p_{|i}^g(s,t)$, gelecekte bakıma muhtaç olacağı bilinen birinin $s+t$ yaşında bakıma muhtaç olması olasılığını
- $p_{|a}^g(s,t)$, gelecekte bakıma muhtaç olmayacağı bilinen birinin $s+t$ yaşında bakıma muhtaç olmadan ölme olasılığını

ifade etmektedir.

Sağlıklı bir birey ya bakıma muhtaç olduktan sonra ölecektir ya da hiç bakıma muhtaç olmadan ölecektir. Bu yüzden bu olasılık değerleri her $s \in \mathbb{N}$ için $p_i^g(s) + p_a^g(s) = 1$'dir.

$s, t \in \mathbb{N}$ için s yaşındaki bir birey için,

$$p_i^g(s,t) = \underbrace{\left(\prod_{k=0}^{t-1} \overbrace{\left(1 - {b_i}^g(s+k)\right)}^{\substack{s+t-1 \text{ yaşına kadar} \\ \text{bakıma muhtaç} \\ \text{olmama olasılığı}}} \overbrace{\left(1 - q_a^g(s+k)\right)}^{\substack{s+t-1 \text{ yaşına kadar} \\ \text{ölmeme olasılığı}}}\right)}_{\substack{s \text{ yaşındaki bir birey } s+t-1 \text{ yaşına kadar} \\ \text{bakıma muhtaç olmadan yaşama olasılığı}}} \quad \underbrace{{b_i}^g(s+t)}_{\substack{\text{Bireyin } s+t \text{ yaşında} \\ \text{bakıma muhtaç} \\ \text{olma olasılığı}}} \tag{5.1}$$

$$p_a^g(s,t) = \underbrace{\left(\prod_{k=0}^{t-1} \left(1 - {b_i}^g(s+k)\right)\left(1 - q_a^g(s+k)\right)\right)}_{\substack{s \text{ yaşındaki birey } s+t-1 \text{ yaşına kadar} \\ \text{bakıma muhtaç olmadan yaşama olasılığı}}} \underbrace{\left(1 - {b_i}^g(s+t)\right)}_{\substack{s+t \text{ yaşında} \\ \text{bakıma muhtaç} \\ \text{olmama olasılığı}}} \underbrace{q_a^g(s+t)}_{\substack{s+t \text{ yaşında} \\ \text{ölme olasılığı}}} \tag{5.2}$$

$$p_i^g(s) = \sum_{t=0}^{\infty} p_i^g(s,t) \tag{5.3}$$

$$p_a^g(s) = \sum_{t=0}^{\infty} p_a^g(s,t) \tag{5.4}$$

$$p_{|i}^g(s,t) = \frac{p_i^g(s,t)}{p_i^g(s)} \tag{5.5}$$

$$p_{|a}^g(s,t) = \frac{p_a^g(s,t)}{p_a^g(s)} \tag{5.6}$$

biçimindedir[22]. $q_a^g(s)$ için statik ve dinamik ölüm olasılıkları ve ${b_i}^g(s)$ için Şekil 5.3'de gösterilen Fransa'daki sağlıklı bireylerin engelli olma olasılıkları kullanılarak benzetime başlamadan önce her yaşa ve cinsiyete ait Eşitlik (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5), (5.6)'deki olasılık değerleri elde edilmiştir.

5.3. Benzetim Modeli

Başlangıç yaşı $s_k^0 \in [40,60]$, cinsiyeti $g_k \in \{1,2\}$ olan k. bireyin ölümüne kadar olan tüm yaşam süresinin benzetimi yapılmıştır. Benzetim 2 senaryo içinde aynı şekilde oluşturulmuştur.

k. birey ölüm durumuna kadar birçok durumla karşılaşabilir. Birey bakıma muhtaçlık durumlarından birine geçtikten bir müddet sonra ölebilir ya da bakıma muhtaçlık durumlarına hiç geçmeden ölebilir. Benzetime başlamadan önce aşağıda bazı sınırlamalar verilmektedir.

- k. bireyin yaşamı boyunca bulunduğu durumların sayısı n_k ile ifade edilsin. k. sağlıklı birey, 1. derece, 2. derece, 3. derece ve 4. derece bakıma muhtaçlık durumu olmak üzere 4 bakıma muhtaçlık durumundan birine geçebilir ya da bu durumlardan herhangi birine geçmeden ölebilir. Birey tüm durumlarda bulunarak en fazla 6, sadece sağlıklı ve ölüm durumlarında bulunarak en az 2 durumda bulunabilir. Yani $2 \leq n_k \leq 6$ şeklinde ifade edilir.
- k. bireyin bulunduğu durumların kümesi $X^k = (X_m^k)_{1 \leq m \leq n_k}$ şeklinde ifade edilsin.
- k. bireyin bir durumdan başka bir duruma geçtiği zamanların kümesi $h^k = (h_m^k)_{1 \leq m \leq n_k}$ şeklinde ifade edilsin.
- k. bireyin ilk bakıma muhtaçlık durumuna giriş yaşı 60'dan küçük ise $(X_m^k) = 7$ ile ifade edilir ve bu birey için benzetim durdurulur.

Bireylerin hepsinin sağlıklı olduğu varsayımı altında h_0^k anında benzetime başlanır.

1. Adım Benzetime başlangıç zamanı $h_1^k = s_0^k$ bireylerin şu anki yaşı olduğu ve tüm bireylerin sağlıklı $X_1^k = 5$ olduğu varsayılmıştır.

2. Adım k. bireyin cinsiyeti $g_k (g \in \{1,2\})$ ile ifade edilsin. $g = 1$ erkeği, $g = 2$ kadını ifade etmektedir. Türkiye'deki 40 ile 60 yaş arasındaki sağlıklı kişi sayısı Şekil 5.2'de gösterilmiştir. Şekil 5.2 kullanılarak her yaşa göre cinsiyet oranı belirlenmiştir. Her birey için tekdüze dağılıma sahip rastgele sayı üretilir. Üretilen rastgele sayılar ile erkek cinsiyet oranı karşılaştırılır. Birey için üretilen rastgele sayı cinsiyet oranından büyükse bu bireyin cinsiyeti kadın, küçükse erkek olarak belirlenir. Böylece tüm bireyler için cinsiyet belirlenmiş olur.

3. Adım Her bireyin benzetime başlangıç durumunun sağlıklı olduğu varsayılmıştır. Birey sağlıklı durumdan ya bakıma muhtaç durumlarından birine ya da ölüm durumuna geçecektir. Bireylerin hangi duruma geçtiğinin tahmin edilmesi için

Eşitlik (5.3) kullanılır. s yaşındaki bireyin bakıma muhtaç olmadan ölme olasılığı kadın ve erkek birey için farklı olmak üzere $p_i(s_k^0)$ ile ifade edilmişti. Her birey için tekdüze dağılıma sahip $[0,1]$ aralığında rastgele sayılar üretilir. Üretilen rastgele sayılar ile $p_i(s_k^0)$ olasılıkları karşılaştırılır. Üretilen rastgele sayılar, bu olasılıktan küçükse birey ölüm duruma geçer ve ölüm yaşının tahmin edilmesi için Adım 4 ile benzetime devam edilir. Üretilen rastgele sayılar, $p_i(s_k^0)$ olasılıklarından büyükse birey bakıma muhtaç duruma geçecektir. Bakıma muhtaç duruma geçen bireyler için Adım 5 ile benzetime devam edilir.

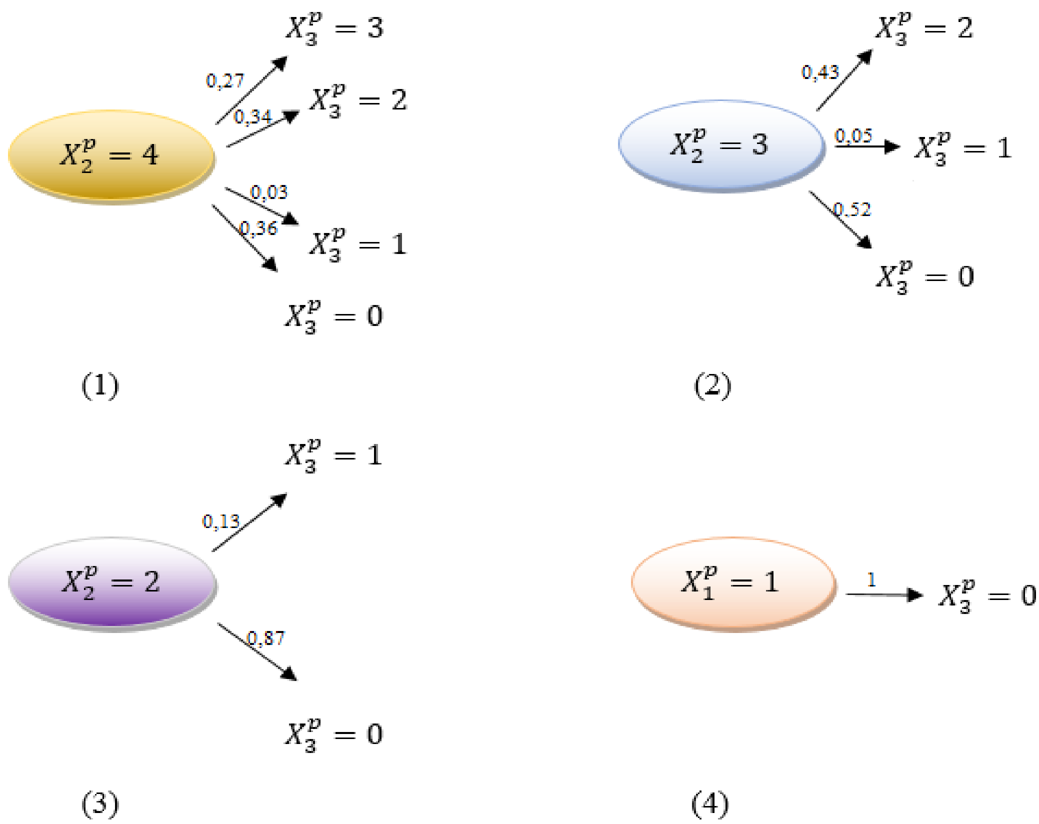
4. Adım Bu adım sağlıklı durumdan ölüm durumuna geçen bireyler için takip edilir. Bu bireylerin 2. durumu 0 $\left(X_2^k = 0\right)$ olmaktadır. Bu duruma giriş yaşının bulunması için Eşitlik (5.6) kullanılır. Başlangıç yaşı s_0^k olan gelecekte bakıma muhtaç olmayacağı bilinen birinin bakıma muhtaç olmadan $s_0^k + t$ yaşta ölme olasılığı $p_{|a}^g\left(s_0^k, t\right)$ ile ifade edilmişti. Ölüm durumuna geçeceği bilinen birey için tekdüze dağılıma sahip rastgele sayılar üretilir. Bu rastgele sayılar ile gelecekte bakıma muhtaç olmayacağı bilinen birinin t yıl sonra ölme olasılığı karşılaştırılır. Üretilen olasılık değeri t'nin hangi değerinden küçükse bu t değeri benzetime başlandıktan sonra sağlıklı olarak geçirdiği süre olarak kabul edilir. Böylece sağlıklı durumdan bakıma muhtaç duruma geçeceği bilinen bireyler için ölüm yaşı $s_0^p + t$ olarak belirlenir. Yıl içindeki kesikli zamanı ve rastgeleliliği sağlamak için tekdüze dağılıma sahip $[0,1]$ aralığında r olarak adlandırılan rastgele sayı üretilir. Sonuç olarak bireyin ölüm yaşı $s_0^k + t + r$ olarak belirlenir. Bu birey için 1. bulunduğu durumdan 2. bulunduğu duruma geçiş zamanı $h_2^p = s_0^p + t + r$ ile ifade edilir. Bu birey sağlıklı ve ölüm olmak üzere iki durumda bulunmuştur. Bu birey için benzetim $n_k = 2$'de durdurulur.

5. Adım Gelecekte bakıma muhtaç olacağı bilinen birinin bakıma muhtaç olma yaşının tahmin edilmesi için Eşitlik (5.5)'deki $p_{|i}^g\left(s_0^k, t\right)$ olasılık değerlerinden yararlanılır. Bu olasılık değerleri başlangıç yaşı s_0^k olan ve gelecekte bakıma muhtaç olacağı bilinen birinin $t \in \mathbb{N}$ için $(s_0^k + t)$ yaşında bakıma muhtaç olma olasılığı şeklinde ifade edilmişti. Bu olasılık değeriyle bireyin bakıma muhtaç durumuna geçiş yaşı tahmin edilmiştir. Benzetimde raslantısallığı ve yılın küsurlu değerini sağlamak için [0,1] arasında tekdüze dağılıma sahip bir r rastgele sayısı $s_0^k + t$ yaşına eklenir. Sağlıklı bir bireyin bakıma muhtaçlık durumuna geçiş yaşı

$h_2^k = s_0^k + t + r$ olarak tahmin edilir. Bu birey için $m = 2$'dir. Bireyin ilk bakıma muhtaçlık durumuna giriş yaşı s_k ile ifade edilsin.

6. Adım Bakıma muhtaç duruma geçecek bireylerin geçiş yaşı Adım 5'de tahmin edilmesine rağmen bakıma muhtaçlık derecesi henüz belirlenmemiştir. X_2^k geçeceği durum, bakıma muhtaçlık derecesi 1, 2, 3, 4'ten herhangi biri olabilir. X_2^k durumunu tahmin etmek için Şekil 5.4'de gösterilen sağlıklı durumdan bakıma muhtaçlık durumuna geçişlerde bakıma muhtaçlık derecelerine giriş olasılıklarından yararlanılmaktadır. Fransa için yapılan çalışmada bakıma muhtaçlık derecelerinin olasılık değerleri sadece 60 ve üzeri yaşlar için mevcuttur. Bakıma muhtaç duruma ilk giriş yaşı 60 ve üzeri olanlar için geçiş yaşılarına karşılık gelen bakıma muhtaçlık derecelerinin olasılık değerleri söz konusu çalışmada verilen grafik üzerinden elde edilmiştir. Bu yüzden h_2^k zamanı 60'dan büyük olan bireyler için sağlıklı durumdan bakıma muhtaçlık derecelerine geçiş olasılıkları kullanılır. 60 yaşın altındakiler için bakıma muhtaçlık dereceleri belirlenemez bu yüzden bu bireylerin 2. durumu $X_2^k = 7$ ile gösterilir.

7. Adım Benzetim tüm bireyler için ölüm durumu gerçekleşene kadar devam etmektedir. Bu yüzden bakıma muhtaç duruma geçen bireylerin sonraki durumlarının ve bu durumlara giriş yaşlarının tahmin edilmesi gerekir. h_2^k yaşında X_2^k durumdaki bireyin h_3^k zamanı ve bu zamanda hangi duruma geçtiğinin tahmin edilmesi gerekmektedir. Örneğin birey sağlıklı durumdan 4. derece bakıma muhtaçlık durumuna geçti ise gelecekte 3. derece, 2. derece, 1. derece bakıma muhtaçlık veya ölüm durumuna geçebilir. Birey $X_2^k = 2$ ise gelecekte 1. derece bakıma muhtaçlık durumunda ya da ölüm durumda olabilir. Şekil 5.5'de bir birey için olabilecek tüm durumlar ifade edilmiştir. Bakıma muhtaçlık durumları arasındaki geçişler için Markov olasılıkları kullanılmıştır.



Şekil 5.5. Geçiş Durumları

(1) → İlk bakıma muhtaçlık durumu 4 olan bireylerin % 27'si 3. derece, % 34'ü 2. derece, %3'ü 1. derece bakıma muhtaçlık duruma ve % 36 ise ölüm durumuna geçecektir.

(2) → İlk bakıma muhtaçlık durumu 3 olan bireylerin % 43'ü 2. derece, % 5'i 1. derece bakıma muhtaçlık duruma ve % 52 ise ölüm durumuna geçecektir.

(3) → İlk bakıma muhtaçlık durumu 2 olan bireylerin %13'ü 1. derece bakıma muhtaçlık duruma ve % 87 ise ölüm durumuna geçecektir.

(4) → İlk bakıma muhtaçlık durumu 1 olan bireylerin bir sonraki durumu ölüm olmak zorundadır.

Çizelge 4.1'de verilen geçiş olasılıkları kullanılarak geçiş matrisi

$$p_{i,j} = \begin{array}{c} \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ \text{Ölüm} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & \text{Ölüm} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0,27 & 0,34 & 0,03 & 0,36 \\ 0 & 0 & 0,43 & 0,05 & 0,52 \\ 0 & 0 & 0 & 0,13 & 0,87 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

elde edilmiştir.

Bakıma muhtaç olduğu ve bakıma muhtaçlık derecesi yani X_2^k durumu bilinen birey için bir sonraki durum belirlenir. $(X_m^k)_{3\leq m\leq 6}$ durumları sadece Markov geçiş olasılıklarına göre belirlenir. Her birey için $[0,1]$ aralığında tekdüze dağılıma sahip rastgele sayılar üretilir. Bu rastgele sayılar ile birey X_2^k'da hangi durumda ise o durumdan diğer durumlara geçiş olasılıklarının birikimli değeri karşılaştırılır ve X_3^k durumu belirlenir. Örneğin $X_2^k = 4$ durumunda olan herhangi bir birey için üretilen rastgele sayı $0{,}645$ olsun. Bu sayı $p_{4,3} = 0{,}27$ olasılığından daha büyüktür. 4 derece bakıma muhtaçlık durumdaki bu birey 3. derece bakıma muhtaçlık duruma geçmeyecektir. Bu yüzden 2. derece bakıma muhtaçlık durumu incelenir. Markov geçiş olasılığı $p_{4,2} = 0{,}34$ ifade edilmişti. Birey 2. derece bakıma muhtaçlık durumuna da geçmemiştir. Çünkü $p_{4,2} + p_{4,3}$ değeri üretilen rastgele sayıdan daha küçüktür. Yani üretilen sayı bu aralıkta da değildir. 1. derece bakıma muhtaçlık duruma geçip geçmediğinin incelenmesi gerekir. 4. derece bakıma muhtaçlık durumdan 1. derece bakıma muhtaçlık duruma geçmesi olasılığı $p_{4,1} = 0{,}03$'tür. $p_{4,2} + p_{4,3} + p_{4,1} = 0{,}64$ bu değer de rastgele üretilen sayı değeri 0.645'ten küçüktür. Bireyin 1 durumuna da geçmediğini söyleyebiliriz. Öyleyse bu bireyin 0 durumuna yani ölüm durumuna geçmiştir. Örnek olarak bahsedilen birey için süreç $X_1^k = 5 \rightarrow X_2^k = 4 \rightarrow X_3^k = 0$ şeklinde son bulmuştur. Örnekte ifade edildiği gibi tüm bireyler için bakıma muhtaç durumdan sonraki X_m^k durumu belirlenir.

8. Adım Zayıflık değişkeni, bakıma muhtaç bireylerin hastalıklarının farklı olmasından dolayı farklı yaşam sürelerine sahip olduğu düşünülerek, bakıma muhtaç durumda kalış süresi için oluşturulan modele eklenmiştir. Zayıflık değişkeni yaş ve cinsiyete bağlı olarak açıklanmaktadır. Bu yüzden genelleştirilmiş doğrusal model kullanılarak yaşın ve cinsiyetin zayıflığa etkisine bakılmıştır. Hastalık türelerinin ikiye ayrılması nedeniyle zayıflık değişkeninin Bernoulli dağıldığı varsayılmıştır. Bu değişken için Bernoulli dağılımının olasılık parametresi Eşitlik (4.3)'te

$$\eta(g_k, s_k) = \frac{e^{\eta_0+\eta_1 g_k+\eta_2 s_k}}{1+e^{e^{\eta_0+\eta_1 g_k+\eta_2 s_k}}}$$

olarak ifade edilmişti. Bakıma muhtaç duruma geçiş yaşı s_k kullanılarak $\eta(g_k, s_k)$ olasılık değeri elde edilir. Yaşa ve cinciyete özel bu olasılık değerleri ile tekdüze dağılıma sahip rastgele değerler karşılaştırılarak bakıma muhtaç olacağı belirlenen bireyin zayıflık değişkeninin 0 ya da 1'den hangisinin olacağı belirlenir. Her birey için belirlenen zayıflık teriminin ölüm durumu gerçekleşene kadar değişmediği varsayılmıştır. Nörolojik hastalığa sahip bir birey ilerde kardiyovasküler hastalığa sahip olup bakıma muhtaçlık derecesi ilerlese bile bu modelde bireyin bakıma muhtaçlık durumunun sadece nörolojik hastalığa bağlı olarak ilerlediği düşünülmüş ve bireyin yaşamı boyunca zayıflık teriminin aynı kaldığı varsayılmıştır.

9. Adım k bireyi için X_3^k durumu adım 7'de tahmin edilmiştir. Bireyin X_2^k durumunda bulunduğu süreyi belirlemek için ters dönüşüm yöntemi kullanılacaktır. Eşitlik (4.7)'deki bakıma muhtaç durumda kalış süresinin yaşam fonksiyonundan dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} F(t|g,s,u) &= P(T \leq t|g,s,u) \\ &= 1 - S(t|g,s,u) \\ &= 1 - exp\left(-t^v \sigma e^{\alpha g+\beta s+\gamma u}\right) \end{aligned} \tag{5.7}$$

şeklinde elde edilir.

Dağılım fonksiyonunun tersi,

$$x = 1 - exp\left(-t^v \sigma e^{\alpha g+\beta s+\gamma u}\right)$$

$$\ln(1-x) = \ln\left(exp\left(-t^v \sigma e^{\alpha g+\beta s+\gamma u}\right)\right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = t^v \sigma e^{\alpha g+\beta s+\gamma u}$$

$$\left[\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{e^{-(\alpha g+\beta s+\gamma u)}}{\sigma}\right]^{-\frac{1}{v}} = t \tag{5.8}$$

olarak elde edilir. Bu eşitlikte $x \in [0,1]$ arasında tekdüze dağılımdan üretilen rastgele bir sayıyı ifade etmektedir. Eşitlik (5.8) kullanılarak t değeri elde edilir. Bu t değeri X_2^k durumunda kalış süresini verir. σ, β, γ, v değerleri X_2^k durumundan X_3^k durumuna geçişe göre değişecektir. Bu doğrultuda $X_2^k = i$, $X_3^k = j$ olarak ifade edilirken i'de kalış süresi

$$t_{ij} = \left[\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{e^{-\left(\alpha_{ij}g+\beta_{ij}s+\gamma_{ij}u\right)}}{\sigma_{ij}}\right]^{-\frac{1}{v_{ij}}} \tag{5.9}$$

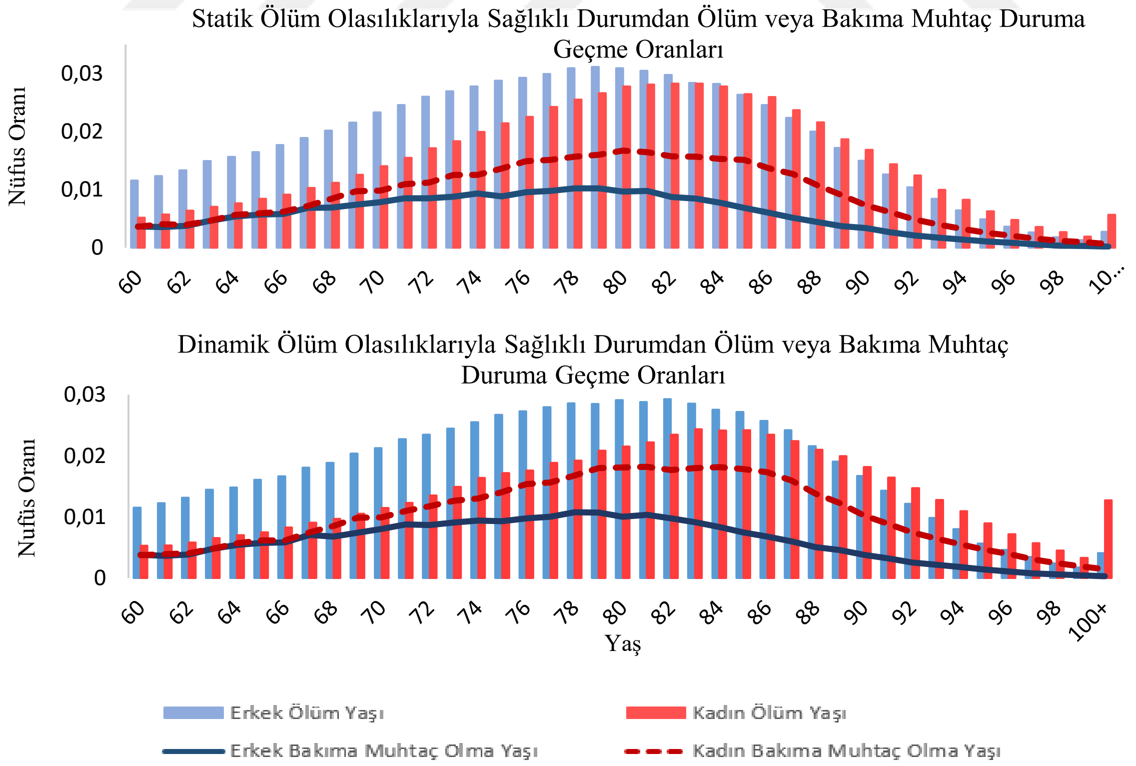
ile hesaplanır. Bulunan t değerine ilk bakıma muhtaçlık durumuna geçiş yaşı eklenerek $h_3^k = s_k + t$ elde edilir ve $m = 3$ olur.

10. Adım $X_m^k = 0$ olana kadar benzetim tekrar Adım 7'ye döner ve X_{m+1}^k durumu ve süresi elde edilir.

Bu şekilde tüm bireyler için benzetim gerçekleştirilir. Tüm bireylerin ölüm zamanı, bakıma muhtaç duruma giriş yaşı ve durumlarında kalış süreleri belirlenir. Benzetim ile $1\,000\,000 \times 13 \times 21$ boyutunda matris elde edilir. Üç boyutlu matrisin 3. boyutu başlangıç yaşı 40 ile 60 yaş arasındaki bireyleri, satırları bireyleri ifade eder. Sütunlar ise her bir yaşa ait özellikleri gösterir. 1. sütun cinsiyeti ifade ederken sütun 2, 3, 4, 5, 6 kişinin yaşamı boyunca bulunduğu durumları ifade eder. Sütun 7 benzetime giriş yaşını, sütun 8, 9, 10, 11, 12 ise bakıma muhtaç duruma ya da ölüm durumuna geçiş yaşını gösterir. 13. sütun ise zayıflık değişkeninin aldığı değeri içerir.

5.4. Benzetim Sonuçları

Benzetim satatik ve dinamik ölüm olasılıklarıyla 2 farklı senaryo olarak değerlendirilmiştir. Benzetimde iki senaryo içinde her bir yaşdaki kişi sayısı 1 000 000 olarak belirlenmiştir. Bu sayede her giriş yaşı için 1 000 000 deneme yapılması sağlanmıştır. Benzetim başlangıcında tüm bireylerin sağlıklı olduğu düşünülmüştür. Benzetimde öncelikle tüm bireylerin cinsiyeti belirlenmiştir. Sağlıklı insanların kaç yaşında bakıma muhtaç duruma geçtiği, bakıma muhtaç duruma geçen bireylerin bakıma muhtaçlık dereceleri belirlenmiştir. Bakıma muhtaçlık durumunda kaldığı süre ve ölüm yaşı tahmin edilmiştir. Her yaşa ve cinsiyete göre zayıflık değişkeni belirlenmiştir. Bu çalışmada sisteme giriş yaşı [40,60] aralığı ele alınmıştır. Fakat yakın yaşlardaki sonuçların benzerliği nedeniyle sadece 40, 50 ve 60 yaş olmak üzere 3 yaş grubu belirlenmiş ve bu yaş gruplarının sonuçları gösterilmiştir.



Şekil 5.6. Benzetime Başlangıç Yaşı 60 Olan Sağlıklı Bireylerin Yaş ve Cinsiyete Göre Bakıma Muhtaç Duruma veya Ölüm Durumuna Geçme Oranları

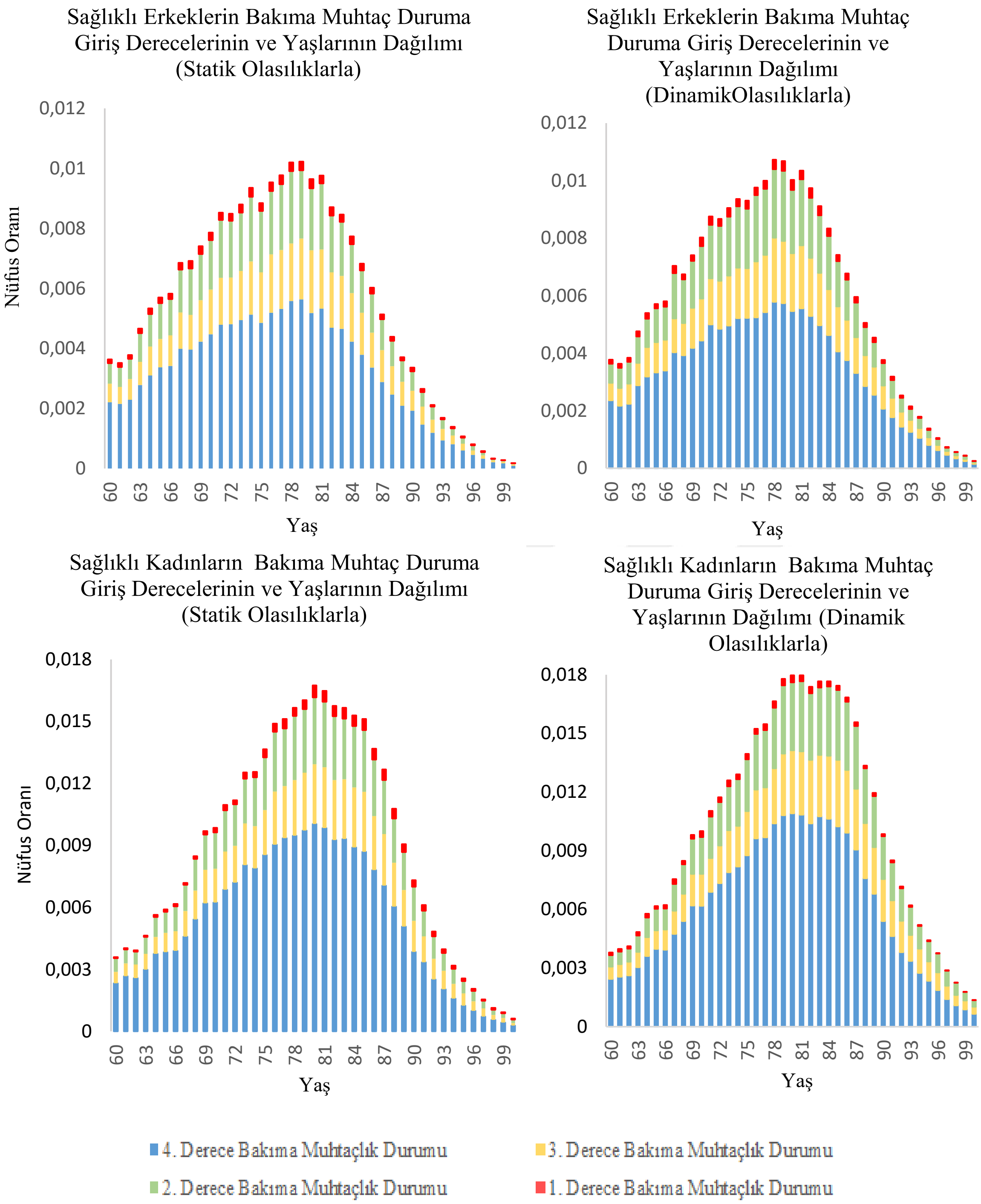
Şekil 5.6’de sisteme giriş yaşı 60 olan 1 000 000 kişinin benzetim sonucu elde edilen sağlıklı durumdan bakıma muhtaçlık veya ölüm durumuna geçiş yaşının dağılımını verilmiştir. x ekseni sağlıklı durumdan bakıma muhtaçlık ya da ölüm durumuna geçiş yaşını y ekseni ise her bir geçiş yaş aralığında ölü ya da bakıma muhtaç duruma giren kişi sayısının o cinsiyete ait tüm birey sayısına oranıdır.

Şekil 5.6’de görüldüğü üzere iki senaryoda da erkek bireyler kadınlara göre daha erken yaşlarda ölüm durumuna geçmektedir. Kadınlar, erkeklere nazaran daha erken yaşta bakıma muhtaç duruma geçmektedirler. Statik ölüm olasılıklarıyla benzetim sonucu erkeklerde ölüm ve bakıma muhtaçlık durumuna giriş yaşı 78’de yoğunlaşırken, kadınlarda 82’de yoğunlaşmaktadır. Dinamik ölüm olasıklarıyla benzetim sonucu erkeklerde ölüm ve bakıma muhtaçlık durumu 80 yaşında kadınlarda 84 yaşında yoğunlaşmaktadır.

	TÜİK 2013-2015 Beklenen Yaşam Süresi		**Statik Ölüm Olasılıklarıyla Benzetim Sonucu Beklenen Yaşam Süresi**		**Dinamik Ölüm Olasılıklarıyla Benzetim Sonucu Beklenen Yaşam Süresi**	
Yaş	**Erkek**	**Kadın**	**Erkek**	**Kadın**	**Erkek**	**Kadın**
40	37,5	42,4	35,4	39,7	36,6	41,8
50	28,3	32,8	26,3	30,4	27,2	32,2
60	19,9	23,7	18,2	21,6	18,7	22,9

Çizelge 5.1. Benzetim Sonucu Beklenen Yaşam Süreleri

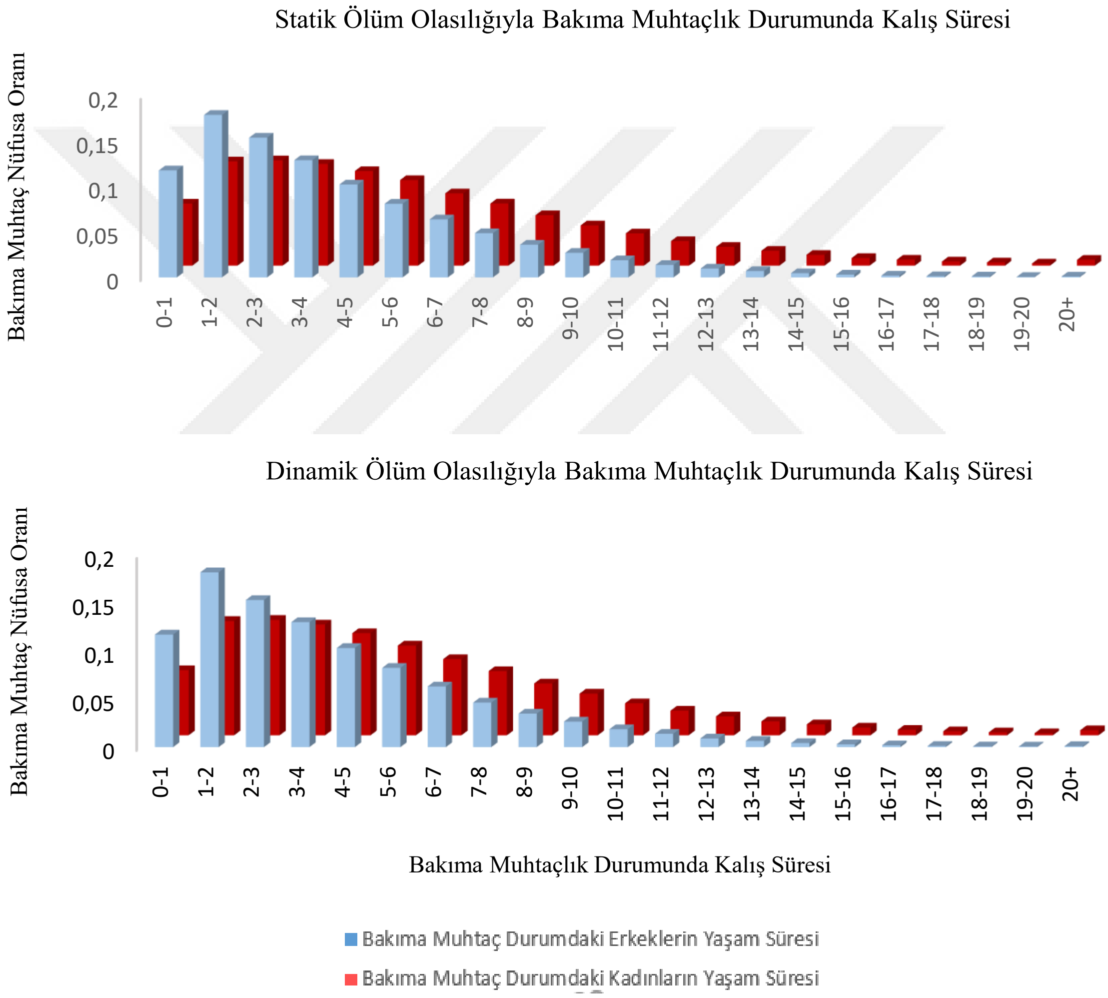
Çizelge 5.1’de statik ve dinamik ölüm olasıklarıyla benzetim sonucu 40, 50, 60 yaşındaki kadın ve erkek bireylerin beklenen yaşam süreleri ile bu yaşlar için TÜİK 2015 yılına ait beklenen yaşam süreleri verilmiştir. Statik ve dinamik ölüm olasılıklarıyla benzetimin beklenen yaşam süresi gerçek beklenen yaşam süresinden daha farklıdır. TÜİK’in beklenen yaşam süresi ile benzetim sonuçlarının farklı olmasının iki sebebi vardır; ilki sağlıklı bireylerin ölüm olasılıkları yerine tüm bireylerin ölüm olasılıklarının kullanılmış olmasıdır. İkincisi ise benzetimde Fransa’ya ait sağlıklı durumdan bakıma muhtaç duruma geçme olasılıklarının kullanılmasıdır. Statik ve dinamik ölüm olasılıklarıyla benzetim sonuçları incelendiğinde dinamik ölüm olasılığıyla benzetim sonucu beklenen yaşam süresi daha uzundur. Dinamik olasılıkla beklenen yaşam süresinin daha uzun olması beklenen bir sonuç olmasıyla birlikte, benzetimin tutarlı sonuç verdiği bu sonuç ile görülmektedir.



Şekil 5.7. Benzetime Başlangıç Yaşı 60 Olan Sağlıklı Bireylerin Bakıma Muhtaçlık Derecelerine Göre Dağılımları

Şekil 5.7 sisteme başlangıç yaşı 60 olan bireylerin bakıma muhtaçlık derecelerine ve bu duruma giriş yaşına göre dağılımını göstermektedir. x ekseni bakıma muhtaçlık durumuna giriş yaşını, y ekseni ise bakıma muhtaçlık durumuna geçen kişi sayısının aynı cinsiyeteki tüm kişi sayısına oranıdır.

Şekil 5.7'de görüldüğü üzere, erkeklerde ve kadınlarda 4. derece bakıma muhtaçlık durumuna giren kişi sayısı diğer durumlara giren kişi sayısından daha fazladır. 80'li yaşlara kadar yaş ilerledikçe bakıma muhtaçlık durumuna giren kişi oranı artmaktadır. 60'lı yaşlarda 1. derece bakıma muhtaçlık durumu az görülürken yaşla orantılı şekilde bu duruma giren kişi oranı artmış ve belli bir yıldan sonra tekrar azalmıştır. Statik ölüm olasılıklarıyla bakıma muhtaçlık durumlarına girişi, dinamik ölüm olasılıklarınkine göre daha genç yaşlarda gerçekleşmektedir. Fakat bakıma muhtaç durumana giriş yaş dağılımları benzerlik göstermektedir.

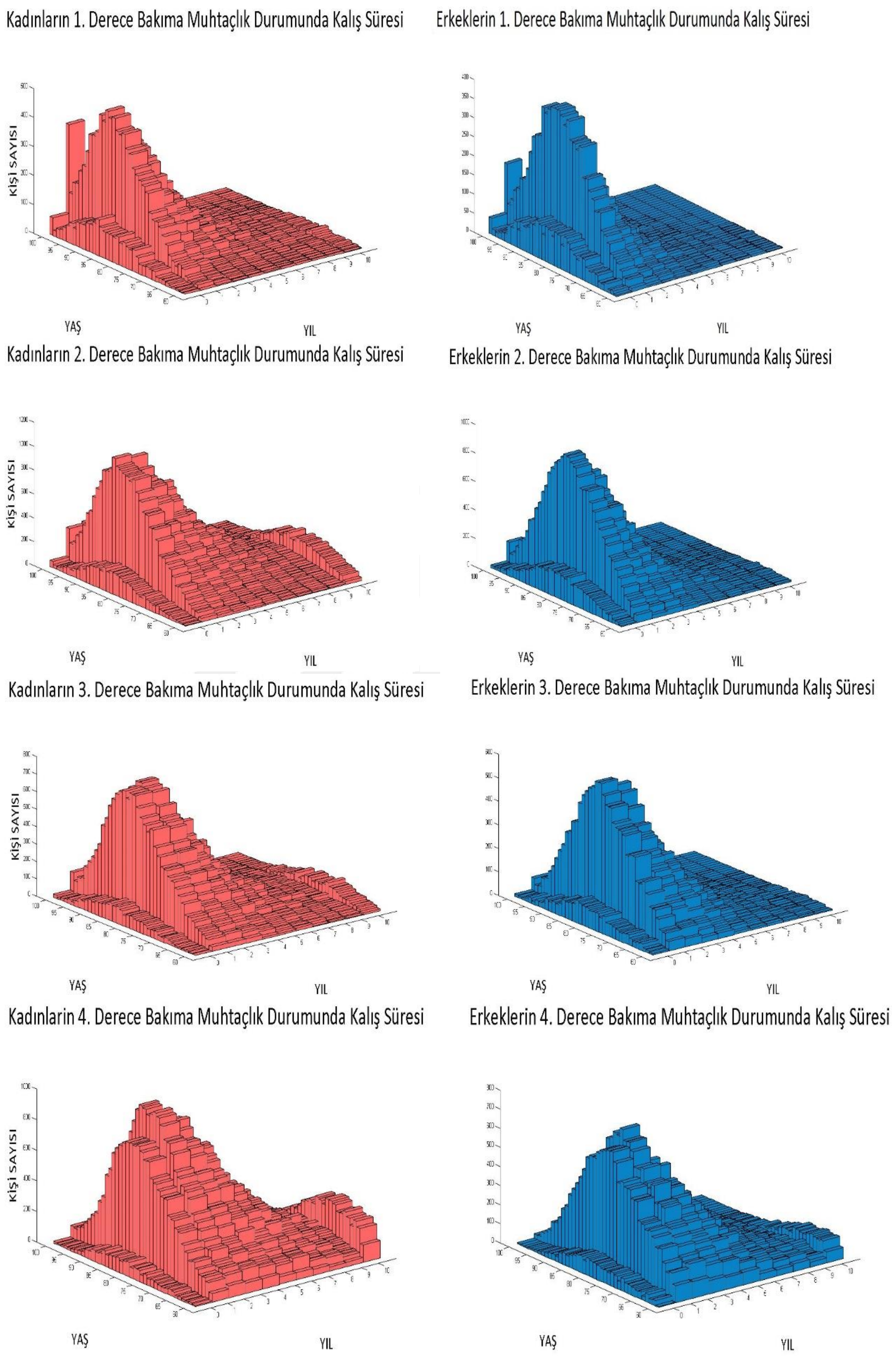


Şekil 5.8. Sisteme Giriş Yaşı 60 Olan Bireylerin Bakıma Muhtaçlık Durumunda Kalış Sürelerinin Giriş Yaşına ve Cinsiyete Göre Dağılımı

Şekil 5.8'de UDBS sistemine giriş yaşı 60 olan bireylerin bakıma muhtaç duruma geçtikten sonraki bakıma muhtaç durumda kalış süresini ifade etmektedir. x ekseni bakıma muhtaçlık durumundan ölüm durumuna geçiş süresini göstermektedir. y ekseni bakıma muhtaç durumda yaşayan birey sayısının bakıma muhtaç durumdaki tüm birey sayısına oranıdır.

Şekil 5.8'de görüldüğü üzere kadınların bakıma muhtaç durumda kalış süresi erkeklerden daha uzundur. Sayısal olarak ifade edilirse statik ve dinamik ölüm olasılıklarıyla erkeklerin bakıma muhtaç durumda kalış süresi ortalama 4 yıl iken kadınlarda bu süre ortalama 5,5 yıl olmaktadır. Bu durum ölüm olasılıklarının bakıma muhtaç durumda kalış süresi üzerinde küçük bir etkiye sahip olmasından kaynaklanmaktadır.

Şekil 5.8'de bakıma muhtaçlık durumda kalış süresi sisteme giriş yaşı 60 yaşındaki tüm bireyler için, bakıma muhtaç duruma giriş yaşına ve bakıma muhtaçlık derecesine bakılmadan ortalama olarak verilmiştir. Bakıma muhtaçlık derecesinin, bakıma muhtaç durumda kalış süresi üzerindeki etkisinin gösterilmesi için her bir bakıma muhtaçlık derecesi için bu dereceye giriş yaşı, kalış süresi ve bu duruma giren kişi sayısı Şekil 5.9'da gösterilmiştir. Bakıma muhtaç durumda kalış süresi statik ve dinamik ölüm olasılıklarının benzetim sonuçları çok yakın değerler aldığından Şekil 5.9'da sadece statik ölüm olasılıkları için gösterilmiştir.



Şekil 5.9. Sisteme Giriş Yaşı 60 Olan Bireylerin Bakıma Muhtaçlık Durumuna Giriş Yaşı ve Bu Durumda Kalış Süresi

x ekseni bakıma muhtaçlık durumunda kalış süresini, y ekseni bakıma muhtaçlık durumuna giriş yaşını ve z ekseni bakıma muhtaç durumda bulunan kişi sayısını ifade etmektedir. Bakıma muhtaç durumda kalış süresinin ilk 10 yıldaki dağılımı incelenmiştir.

Şekil 5.9 ve Çizelge 5.2'de görüldüğü üzere 1. derece bakıma muhtaçlık durumunda kalış süresi diğer durumlarda kalış süresinden daha kısadır. Bakıma muhtaçlık arttıkça bakıma muhtaç durumda kalış süresi kısalmaktadır. Ayrıca, 4 bakıma muhtaçlık derecesinde de kadınların bakıma muhtaçlık durumunda kalış süresi erkeklerin kalış süresinden daha uzundur. Şekil 5.9 incelendiğinde bakıma muhtaçlık durumuna giriş yaşının dağılımının benzer olduğu görülmektedir. Bakıma muhtaç duruma giriş yaşı erkeklerde 78'de, kadınlarda 80'de yığılmaktadır. 1. derece bakıma muhtaçlık durumunda kalış süresi 2. yılda yığılırken 4. derece bakıma muhtaçlık durumunda kalış süresi 3. yılda yığılmaktadır. Statik ve dinamik ölüm olasılıklarıyla bakıma muhtaç durumda kalış süresinin ortalaması ve varyansı Çizelge 5.2 ve 5.3'te gösterilmiştir.

Bakıma Muhtaçlık Dereceleri	Statik Ölüm Olasılıklarıyla Benzetim Sonucu		Dinamik Ölüm Olasılıklarıyla Benzetim Sonucu	
	Ortalama	Varyans	Ortalama	Varyans
4. Derece	3,9565	8,4024	3,8692	7,9821
3. Derece	3,1308	6,3812	3,0707	6,1007
2. Derece	3,4877	8,3649	3,4102	7,8427
1. Derece	2,3623	3,8009	2,3185	3,634

Çizelge 5.2. Benzetime Giriş Yaşı 60 Olan Kadınların Her Bir Bakıma Muhtaçlık Durumunda Kalış Süresinin Ortalaması ve Varyansı

Bakıma Muhtaçlık Dereceleri	Statik Ölüm Olasılıklarıyla Benzetim Sonucu		Dinamik Ölüm Olasılıklarıyla Benzetim Sonucu	
	Ortalama	Varyans	Ortalama	Varyans
4. Derece	3,2457	6,01466	3,2146	5,9604
3. Derece	2,3981	2,8009	2,3981	2,7757
2. Derece	2,3197	2,8836	2,9888	2,819
1. Derece	1,6693	1,6393	1,6773	1,6335

Çizelge 5.3. Sisteme Giriş Yaşı 60 Olan Erkeklerin Her Bir Bakıma Muhtaçlık Durumunda Kalış Süresinin Ortalaması ve Varyansı

Çizelge 5.2 ve 5.3'de sisteme giriş yaşı 60 olan bireyin bakıma muhtaç durumda ortalama kalış süresi verilmiştir. Kadının bakıma muhtaçlık durumunda kalış süresi erkekten daha uzundur. Bakıma muhtaçlığın en fazla olduğu 1. derece bakıma muhtaçlık durumunda ortalama kalış süresi diğer durumlarda kalış süresinden daha kısadır. Çizelge 5.2 ve 5.3'de bakıma muhtaç duruma giriş yaşları göz ardı edilmiştir. Bakıma muhtaçlık durumuna giriş yaşına göre bakıma muhtaç durumda kalış süresi değişmektedir. Bakıma muhtaç duruma giriş yaşı arttıkça bakıma muhtaç durumda kalış süresi azalacaktır. Dinamik ölüm olasılıklarıyla bakıma muhtaçlık durumlarında kalış süresi, dinamik ölüm olasılıklarıyla bakıma muhtaç duruma girişlerin ileri yaşlarda olmasından dolayı statik ölüm olasılığınkinden daha kısadır. Yani dinamik ölüm olasılığında bakıma muhtaç duruma giriş yaşı statik ölüm olasığına göre daha yüksektir. Bu yüzden dinamik ölüm olasığındaki bakıma muhtaç durumda kalış süresi daha kısa olmaktadır.

5.5. Uzun Dönem Bakım Sigortasında Primlerin Hesaplanması

UDBS'de tazminatların dönem sonu ödeneceği primlerin ise dönem başı alınacağı varsayılmaktadır. Ayrıca bakıma muhtaç duruma geçen bireye ilk ay belirli oranda maddi yardım sağlanır ve sonraki iki ay herhangi bir yardım sağlanmaz. Üç ayın sonunda birey hala bakıma muhtaçsa tazminat ödenmeye başlanır. Bu çalışmada UDBS genel olarak uygulanandan farklı olarak düşünülmüştür. UDBS primi hem statik hem de dinamik ölüm olasılıklarına göre hesaplanmıştır.

Bu çalışma için UDBS'nin özellikleri:

- UDBS'ye giriş yaşı $[40,60]$ olmalıdır.
- Primler dönem başı ödenecek, tazminatlar dönem sonu alınacaktır.
- UDBS 65 ve üzeri yaşta bakıma muhtaç duruma geçen kişilere tazminat ödemesi yapmaktadır.
- UDBS'ye sahip kişi 65 yaşından sonra bakıma muhtaç duruma geçti ise, bu kişiye her ayın sonunda tazminat ödenecektir.
- UDBS kapsamında primler 65 yaşına kadar zorunlu olarak alınacaktır. 65 yaşından sonrası için bakıma muhtaç duruma geçmediği süre boyunca prim ödeme son yaşı 70 olarak belirlenmiştir.

Tazminatlar her ayın sonunda verilmek üzere

- 4. derece bakıma muhtaç kişi için T_4= 400 TL
- 3. derece bakıma muhtaç kişi için T_3 $=$ 600 TL

- 2. derece bakıma muhtaç kişi için $T_2 = 1000$ TL
- 1. derece bakıma muhtaç kişi için ise T_1 =1 500 TL

olarak belirlenmiştir. Enflasyonun olmadığı varsayımı altında primin ve tazminatın net bugünkü değeri elde edilmiştir. Primlerin nakit akış net bugünkü değeri NBD_P ile tazminatların nakit akış net bugünkü değeri ise NBD_T ile ifade edilmiştir.

Düzenli bir nakit akış dizisi $F = (F_n)_{n\in N}$'nin i reel faiz oranı ile net bugünkü değeri,

$$NBD(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{(1+i)^n} \tag{5.11}$$

şeklinde ifade edilir.

Aylık efektif faiz oranı % 0,2 olarak belirlenmiş ve bu oran i ile ifade edilmiştir. d iskonto oranı ve v iskonto faktörü olarak adlandırılır.

$d = \frac{i}{1+i}$ ve $\text{v} = \frac{1}{1+i}$ biçiminde hesaplanmaktadır.

Benzetim 1 000 000 kez tekrarlanmıştır. k indisi benzetimdeki bireyleri ifade etsin. Benzetimde;

- Bölüm 5.3'deki adımlar takip edilerek her bir birey için bakıma muhtaç duruma giriş yaşı ve yaşam süresi tahmin edilir.
- Sağlıklı birey bakıma muhtaç veya ölüm durumuna 65 yaşından önce geçiyorsa o bireye ödediği primlerin bugünkü değeri iade edilir ve sistem dışına çıkartılır. Bakıma muhtaç vaya ölüm durumuna 65 ve üzeri yaşta geçiyorsa bu duruma geçtiği yaş ile benzetime başlangıç yaşı arasındaki süre ay cinsinden hesaplanır. k. bireyin sağlıklı olarak geçirdiği süre M_k ile ifade edilsin.
- k. birey için 1 birimlik düzenli ödemeli primin bugünkü değeri

  $$NBD_P{}^k = \frac{(1 - \text{v}^{M_k})}{d} \tag{5.12}$$

  şeklinde hesaplanır.
- Bakıma muhtaçlık durumunun derecelerine göre tazminat miktarı değişmektedir. Bu yüzden her bakıma muhtaçlık derecesine göre tazminat ödeme süresi hesaplanmalıdır. İlk bakıma muhtaçlık durumu 4 olan bireylere, bir sonraki duruma geçene kadar 4. derece bakıma muhtaçlık durumuna göre tazminat ödenir. 3. derece, 2. Derece ve 1. derecede bulunan bireylere bu derecelere göre tazminat ödenecektir. Birey yaşamı boyunca birden çok bakıma muhtaçlık durumunda

bulunabilir. Örneğin bir birey hayatı boyunca 4. derece ve 2. derece bakıma muhtaçlık durumunda bulunsun. 4. derece bakıma muhtaçlık durumunda kaldığı süre boyunca T_4, 2. derece bakıma muhtaçlık durumunda kaldığı süre boyunca T_2 miktarında tazminat ödemesi yapılacaktır. Toplam ödenen tazminatı hesaplayabilmek için kişinin geçirdiği her bir bakıma muhtaçlık durumunda kalış süresi hesaplanır. 1. derece, 2. derece, 3. derece ve 4. derece bakıma muhtaçlık durumunda kalış süresi sırasıyla $c_k^{T_1}$, $c_k^{T_2}$, $c_k^{T_3}$ ve $c_k^{T_4}$ şeklinde ifade edilsin. s_k^0, $k.$ bireyin benzetime başlangıç yaşı ve h_m^k, $k.$ bireyin m. bulunduğu duruma geçiş zamanını göstersin. Örneğin $k.$ birey hayatı boyunca 1. derece bakıma muhtaçlık durumuna sahip olsun. Bu duruma sahipken bireye ödenecek tazminatının bugünkü değeri,

$$NBD_T{}^k = \underbrace{T_1}_{\substack{1.\ derece\ bakıma \\ muhtaçlık\ durumu \\ için\ ödenecek \\ tazminat\ miktarı}} \times \underbrace{\frac{\left(1-\mathrm{v}^{c_k^{T_1}}\right)}{i}}_{\substack{c_k^{T_1}\ süresince\ düzenli \\ ödemelerinin \\ bugünkü\ değeri}} \times \underbrace{\mathrm{v}^{\left(h_2^k-s_k^0\right)}}_{\substack{Ödenecek \\ tazminat\ miktarının \\ s_k^0\ yaşındaki \\ bugünkü\ değeri}} \tag{5.13}$$

şeklinde hesaplanır. $k.$ birey hayatı boyunca 2. derece ve 1. derece bakıma muhtaçlık durumu sahip olsun. Bu durumlara sahipken bireye ödenecek tazminatın bugünkü değeri,

$$NBD_T{}^k = \underbrace{T_2 \times \frac{\left(1-\mathrm{v}^{c_k^{T_2}}\right)}{i} \times \mathrm{v}^{\left(h_2^k-s_k^0\right)}}_{\substack{2.\ derece\ bakaıma\ muhtaçlık \\ durumundaki\ tazminatların \\ s_k^0\ yaşındaki\ değeri}} + \underbrace{T_1 \times \frac{\left(1-\mathrm{v}^{c_k^{T_1}}\right)}{i} \times \mathrm{v}^{\left(h_3^k-s_k^0\right)}}_{\substack{1.\ derece\ bakaıma\ muhtaçlık \\ durumundaki\ tazminatların \\ s_k^0\ yaşındaki\ değeri}} \tag{5.14}$$

şeklindedir. Eşitlik (5.13) ve (5.14)'de gösterilen örnekler gibi tüm bireylerin bulunduğu durumlar ve bu durumlarda kalış süresi ile ödenecek tazminat miktarları belirlenir. Diğer geçiş durumları için de bu şekilde formül oluşturulur.

- Aktüeryal olarak bir sistemin dengede olabilmesi için toplanan primlerin bugünkü değerleri ile ödenecek tazminatların bugünkü değerlerinin birbirine eşit olması gerekmektedir. Prim miktarı başlangıçta 1 olduğu varsayımı altında toplam tazminatın net bugünkü değerinin toplam primin net bugünkü değerine oranı ile tahmini prim miktarı elde edilir. Yani toplam NBD_T miktarının toplam NBD_P bölünmesiyle tahmini prim miktarı elde edilir.

n benzetimin tekrar sayısı yani benzetimde bulunan kişi sayısı olmak üzere prim,

$$\widehat{p^n} = \frac{E(NBD_T)}{E(NBD_P)} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} NBD_T}{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} NBD_P} \tag{5.15}$$

şeklinde elde edilir.

Büyük sayılar kanununa göre örneklemdeki gözlem sayısı arttıkça örneklemin ortalaması kitlenin ortalamasına yakınsayacaktır. Bu varsayıma dayanarak elde edilen tahmini prim miktarı benzetimin tekrar sayısı arttıkça $\widehat{p^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ gerçek prim miktarına yakınsayacaktır

5.6. Primin Güven Aralığı

Tahmin edilen primin güven aralığının elde edilmesi için genellikle merkezi limit teoreminden yararlanılır.

Tanım 5.1: $X_1, X_2, \dots X_n$, sonlu; varyansı σ^2 olan bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele değişkenler kümesi olsun. Bu değişkenlerin ortalamasının normal dağılıma yakınsaması merkezi limit teoremi olarak adlandırılır. Merkezi limit teoremi,

$$\sqrt{n}[\overline{X}_n - \mu] \overset{D}{\rightarrow} N(0, \sigma^2)$$

şeklinde gösterilir. $\mu = E(X)$ ve $\overset{D}{\rightarrow}$ dağılımda yakınsamayı ifade etmektedir[63].

Tanım 5.2: $X_n = (X_{n1}, X_{n2}, \dots X_{nk})$ rastgele değişkenler kümesi olduğu varsayımı altında çok değişkenli merkezi limit teoremi,

$$\sqrt{n}[\overline{X}_n - \mu] \overset{D}{\rightarrow} N(0, \Sigma)$$

şeklinde ifade edilir. Σ korelasyon matrisidir.

Benzetim sonucu elde edilen primin dağılımının ve güven aralıklarının elde edilmesi için merkezi limit teoremi uygulanabilir. Fakat tahmin edilen prim miktarı hem tazminatların net bugünkü değerine hem de primlerin net bugünkü değerine bağlı olduğundan primi, tazminat ve primin fonksiyonu olarak düşünmek doğru olacaktır. Bu yüzden merkezi limit teoremi yerine Delta yönteminin kullanılması daha uygundur. Rastgele değişkenlerin asimptotik dağılımlarının bulunmasında Delta yönteminden yararlanılır. Delta yöntemi merkezi limit teoreminin genelleştirilmiş halidir ve Taylor açılımına dayanmaktadır.

Tanım 5.3: a, b sabit olmak üzere doğrusal bir g fonksiyonu belirli bir t değeri için türevlenebilir olması ve $g'(t) \neq 0$ şartları altında $g(t) = at + b$ fonksiyonu olarak verilsin. $E(\overline{X}_n) = \mu$ ise $E\left(g(\overline{X}_n)\right) = a\mu + b = g(\mu)$ olur. Bu yüzden $n \to \infty$ yaklaştıkça $\sqrt{n}[g(\overline{X}_n) - g(\mu)]$ ifadesi bazı dağılımlara uyma eğilimindedir. $g(t)$ fonksiyonu için,

$$\sqrt{n}[g(\overline{X}_n) - g(\mu)] = \sqrt{n}[a\overline{X}_n + b - a\mu - b]$$
$$= a\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$$

olur. $n \to \infty$ yaklaştıkça $g(t)$ fonksiyonunun ortalaması sıfıra, varyansı ise $\sigma^2 a^2$'ye yakınsayacaktır[64]. Bu durum,

$$\sqrt{n}[g(\overline{X}_n) - g(\mu)] \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 a^2)$$

şeklinde ifade edilir. Genel olarak tek değişken için Delta yönteminin formülü,

$$\sqrt{n}[g(\overline{X}_n) - g(\mu)] \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 [g'(\mu)]^2)$$

şeklindedir[63].

Tanım 5.4: $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere g fonksiyonunun her bir değişkene göre türevi

$$\nabla g(x) = \begin{bmatrix} \frac{dg}{dx_1} \\ \vdots \\ \frac{dg}{dx_k} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Taylor serisinin ilk iki terimi kullanılarak,

$$g(\overline{X}_n) \approx g(\mu) + \nabla g(\mu)^T (\overline{X}_n - \mu)$$

olarak tahmin edilebilir. $\nabla g(\mu)^T$ vektörü $\nabla g(\mu)$ vektörünün transpozu olarak ifade edilir. Bu $g(\overline{X}_n)$ değerinin yaklaşık varyans değeri,

$$Var(g(\overline{X}_n)) = Var\left(g(\mu) + \nabla g(\mu)^T (\overline{X}_n - \mu)\right)$$
$$= Var(g(\mu) + \nabla g(\mu)^T \overline{X}_n - \nabla g(\mu)^T \mu)$$
$$= \nabla g(\mu)^T Var(\overline{X}_n) \nabla g(\mu)$$
$$= \nabla g(\mu)^T (\Sigma / n) \nabla g(\mu)$$

şeklinde ifade edilir ve çok değişkenli Delta yöntemi,

$$\sqrt{n}[g(X_n) - g(\mu)] \xrightarrow{D} N\left(0, \nabla g(\mu)^T \Sigma \nabla g(\mu)\right) \tag{5.16}$$

şeklindedir[64][65]. X, Y arasındaki ilişki,

$$Cov(X, Y) = E\left((x - \mu_x)(y - \mu_y)\right) \tag{5.17}$$

ile belirlenirken kovaryans matrisi,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} E\big((x-\mu_x)(x-\mu_x)\big) & E\Big(\big(x-\mu_x\big)\big(y-\mu_y\big)\Big) \\ E\Big(\big(x-\mu_x\big)\big(y-\mu_y\big)\Big) & E\Big(\big(y-\mu_y\big)\big(y-\mu_y\big)\Big) \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

şeklinde elde edilir. Korelasyon katsayısı,

$$\rho_{xy} \equiv \frac{E\Big(\big(x-\mu_x\big)\big(y-\mu_y\big)\Big)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y} \tag{5.19}$$

ile hesaplanır. Kovaryans matrisi Eşitlik (5.17), (5.18) ve (5.19) kullanılarak,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho_{xy}\sigma_x\sigma_y \\ \rho_{xy}\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

şeklinde gösterilebilir.

n gözleme sahip örneklem için primin NBD tahmini ortalaması $\widehat{\mu_P^n}$, varyansı $\widehat{\sigma_P^2}$, tazminatın NBD tahmini ortalaması $\widehat{\mu_T^n}$, varyansı $\widehat{\sigma_T^2}$ ve NBD_T ile NBD_P arasındaki korelasyon katsayısı $\widehat{\rho^n}$ ile ifade edilsin. Primin ve tazminatın net bugünkü değerlerinin korelasyon matrisi Eşitlik (5.20)'den,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_T^2 & \rho\sigma_T\sigma_P \\ \rho\sigma_T\sigma_P & \sigma_P^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik (5.15)'te tahmini prim değeri,

$$\widehat{p^n} = \frac{E(NBD_T)}{E(NBD_P)} = \frac{\widehat{\mu_T^n}}{\widehat{\mu_P^n}}$$

fonksiyonu olarak gösterilmişti. Bu durumda tahmini prim değerinin asimptotik dağılımının bulunması için Delta yöntemi uygulanır. Tanım 5.3'teki $g(t)$ fonksiyonu $\widehat{p^n} = g\big(\widehat{\mu_T^n}, \widehat{\mu_P^n}\big)$ ile ifade edilsin. Bu fonksiyonun her bir elemanının türevi $\nabla g(\mu_T, \mu_P) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_P} \\ -\frac{\mu_T}{\mu_P^2} \end{bmatrix}$ ile primlerin asimptotik dağılımı Delta yöntemi kullanılarak Eşitlik (5.16) ile,

$$\sqrt{n}[\widehat{p^n} - p] \xrightarrow{D} N\big(0, \nabla g(\mu_T, \mu_P)^T \Sigma \nabla g(\mu_T, \mu_P)\big)$$

şeklinde ifade edilir. Bu dağılımın varyansı

$$\nabla g(\mu_T, \mu_P)^T \Sigma \nabla g(\mu_T, \mu_P) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_P} & -\frac{\mu_T}{\mu_P^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_T^2 & \rho\sigma_T\sigma_P \\ \rho\sigma_T\sigma_P & \sigma_P^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_P} \\ -\frac{\mu_T}{\mu_P^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sigma_T^2}{\mu_P} - \frac{\mu_T}{\mu_P^2}\rho\sigma_T\sigma_P & \frac{1}{\mu_P}\rho\sigma_T\sigma_P - \frac{\mu_T}{\mu_P^2}\sigma_P^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_P} \\ -\frac{\mu_T}{\mu_P^2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_T^2}{\mu_P^2} - \frac{\mu_T}{\mu_P^3}\rho\sigma_T\sigma_P - \frac{\mu_T}{\mu_P^3}\rho\sigma_T\sigma_P + \frac{\mu_T^2}{\mu_P^4}\sigma_P^2$$

$$= \frac{1}{\mu_P^2}\left(\sigma_T^2 - 2\rho\sigma_T\sigma_P\frac{\mu_T}{\mu_P} + \frac{\mu_T^2}{\mu_P^2}\sigma_P^2\right) \tag{5.21}$$

biçimindedir.

$$\begin{cases} \widehat{\mu_T^n} \xrightarrow{n\to\infty} \mu_T \\ \widehat{\mu_p^n} \xrightarrow{n\to\infty} \mu_p \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} \widehat{\sigma_T^n} \xrightarrow{n\to\infty} \sigma_T \\ \widehat{\sigma_P^n} \xrightarrow{n\to\infty} \sigma_P \end{cases}$$

olduğu bilinmektedir. Büyük sayılar kanununa göre $n \to \infty$ yaklaştıkça $\widehat{\mu^n}$ dağılımı μ'e ve $\widehat{\sigma^n}$ dağılımı σ'ya yakınsar. Yani örneklem sayısı büyüdükçe ortalama ve varyans gerçek ortalama ve varyans değerine yakınsar. Tahmini prim dağılımının varyansı Eşitlik (5.21)'le

$$\nabla g(\mu_T,\mu_P)^T \Sigma \nabla g(\mu_T,\mu_P) \cong \frac{1}{\widehat{\mu_P^n}^2}\left(\widehat{\sigma_T^n}^2 - 2\widehat{\rho^n}\widehat{\sigma_T^n}\widehat{\sigma_P^n}\frac{\widehat{\mu_T^n}}{\widehat{\mu_P^n}} + \frac{\widehat{\mu_T^n}^2}{\widehat{\mu_P^n}^2}\widehat{\sigma_P^n}^2\right) \tag{5.25}$$

şeklinde elde edilir. Prim için güven aralığı,

$$P\left(\left(\widehat{p^n} - \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{\widehat{\mu_P^n}^2}\left(\widehat{\sigma_T^n}^2 - 2\widehat{\rho^n}\widehat{\sigma_T^n}\widehat{\sigma_P^n}\frac{\widehat{\mu_T^n}}{\widehat{\mu_P^n}} + \frac{\widehat{\mu_T^n}^2}{\widehat{\mu_P^n}^2}\widehat{\sigma_P^n}^2\right)}}{\sqrt{n}}\right)\right) \le p \right.$$

$$\left. \le \left(\widehat{p^n} + \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{\widehat{\mu_P^n}^2}\left(\widehat{\sigma_T^n}^2 - 2\widehat{\rho^n}\widehat{\sigma_T^n}\widehat{\sigma_P^n}\frac{\widehat{\mu_T^n}}{\widehat{\mu_P^n}} + \frac{\widehat{\mu_T^n}^2}{\widehat{\mu_P^n}^2}\widehat{\sigma_P^n}^2\right)}}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)$$

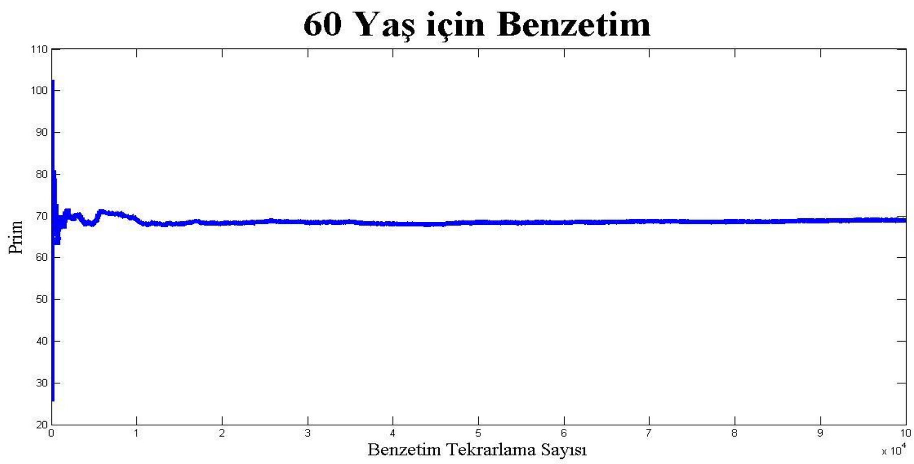
şeklinde hesaplanır. ϕ normal dağılım için kümülatif dağılım fonksiyonunu ifade ederken $\alpha\epsilon[0,1]$ olmak üzere $1-\alpha$ güven aralığında bu ifade sadeleştirilerek,

$$\left|\widehat{p^n} - p\right| = \sqrt{\frac{1}{n\widehat{\mu_P^n}^2}\left(\widehat{\sigma_T^n}^2 - 2\widehat{\rho^n}\widehat{\sigma_T^n}\widehat{\sigma_P^n}\frac{\widehat{\mu_T^n}}{\widehat{\mu_P^n}} + \frac{\widehat{\mu_T^n}^2}{\widehat{\mu_P^n}^2}\widehat{\sigma_P^n}^2\right)} \times \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

şeklinde gösterilebilir ve bu eşitlikle prim için güven aralıkları tespit edilmiş olunur.

5.7. Prim Miktarı ve Güven Aralıkları

[40,60] aralığındaki her bir yaş farklı ölüm ve bakıma muhtaçlık olasılıklarına sahip olduğu için NBD_T ile NBD_P her bir yaş için farklılık gösterecektir. Toplam NBD_T'nin toplam NBD_P'ye oranı ile prim elde edilir. Bu yüzden prim her bir yaş için farklı değerler alacaktır. Ayrıca her bir yaşın prim ödeme sayısı farklıdır. Bu yüzden genç yaştaki bireylerin ödeyeceği prim miktarı, yaşlı bireylerin ödeyeceği prim miktarından azdır. Benzetim ile her bir yaş aralığındaki kadın ve erkek bireyler için tek bir prim değeri elde edilmiştir.



Şekil 5.10. 60 Yaşındaki Bireyin Statik Ölüm Olasılıklarıyla Benzetim Sayısına Göre Prim Değeri

Benzetim 1 000 000 kere tekrarlanmış fakat daha küçük bir tekrar sayısında prim değeri sabitlendiği için Şekil 5.10'da sadece 100 000 tekrarına kadar gösterilmiştir. Böylece benzetimin 100 000 kez tekrarlanmasının tutarlı sonuç elde etmek için yeterli olduğu görülmüştür. Diğer yaş gruplarında da grafik benzerlik gösterdiğinden dolayı sadece bu yaş için prim değeri gösterilmiştir. Örnek olarak benzetim sonucu 40, 50, 60 yaş için prim değeri ve $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinde primin güven aralığı gösterilmiştir.

Statik Ölüm Olasılıklarıyla Elde Edilen Aylık Prim			
Yaş	**40**	**50**	**60**
Aylık Prim Miktarı	16,0837 TL	28,5056 TL	68,8386 TL
Güven Aralığı %	$\pm 0,0755$	$\pm 0,1322$	$\pm 0,3088$

Çizelge 5.4. Statik Ölüm Olasılıklarıyla Benzetim Sonucu Elde Edilen Prim Değeri ve Güven Aralığı

Dinamik Ölüm Olasılıklarıyla Elde Edilen Aylık Prim			
Yaş	**40**	**50**	**60**
Aylık Prim Miktarı	18,2891 TL	31,8655 TL	74,8019 TL
Güven Aralığı %	$\pm$0,0778	$\pm$0,1355	$\pm$0,314

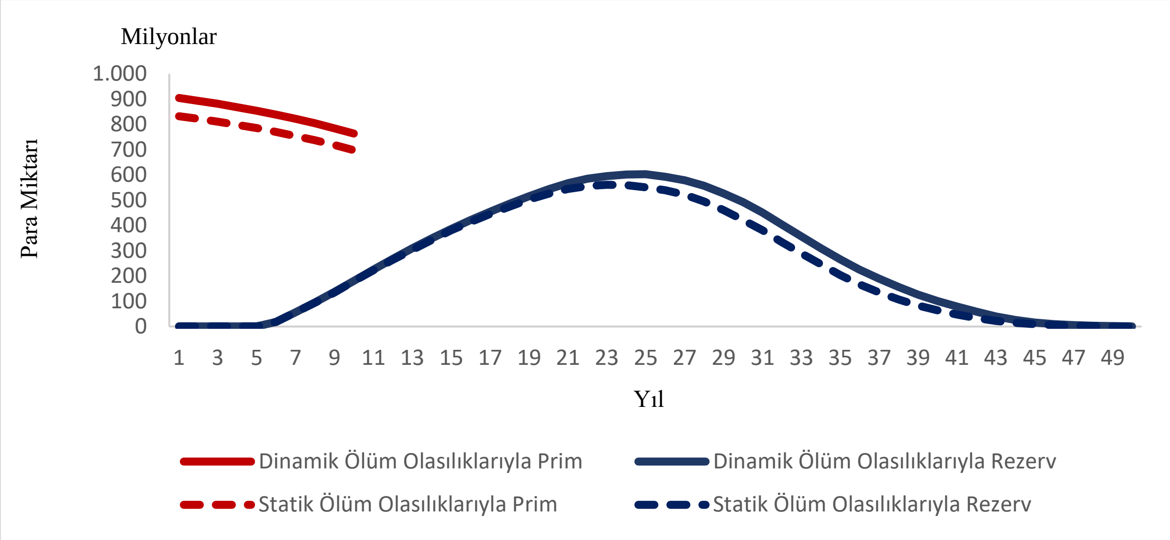
Çizelge 5. 5. Dinamik Ölüm Olasılıklarıyla Benzetim Sonucu Elde Edilen Prim Değeri ve Güven Aralığı

Çizelge 5.4 ve 5.5'te 40, 50, 60 yaşındaki bireyler için aylık ödenmesi gereken prim miktarları belirlenmiştir. Giriş yaşı arttıkça ödenecek prim sayısı azalacağından prim miktarı artacaktır. Giriş yaşı artıkça ölüm olasılıkları artmaktadır. Daha kısa sürede toplanacak primlerin belirsizliğinin daha fazla olması nedeniyle güven aralığı daha geniştir. Statik ölüm olasılıklarıyla aylık ödenecek prim miktarı dinamik ölüm olasılıklarına göre daha düşüktür. Beklenen yaşam süresinin artması ile bakıma muhtaç duruma giren kişi sayısı artacak ve tazminat ödemesini karşılamak için alınan prim miktarı da artması gerekecektir. Beklenen yaşam süresinin uzamasıyla orantılı şekilde prim miktarıda değişecektir.

5.8. Rezerv Miktarı

UDBS'de teknik rezerv hesaplamaları 2 bileşenden oluşmaktadır: primlerin ve tazminatların rezervi.

Bu çalışmada rezerv miktarı, sigortalının sağlıklı olarak hayatta kaldığı süre boyunca ödeyeceği primin birikimli değeri ile bakıma muhtaç durumda kaldığı süre boyunca ödenecek tazminatın birikimli değeri arasındaki fark olarak hesaplanmıştır. Çalışmada UDBS'de primlerin 70 yaşına kadar toplanmış, 65 ve üzeri yaşlarda bakıma muhtaç duruma geçenlerden de prim alınmamıştır. Benzetimde bireylerin geçiş yaşları küsüratlı olduğundan bu küsürat değerleri aylık olarak hesaplanılarak ve her bir yaşın yeni bir dönem olduğu düşünülerek yıllık rezerv hesabı yapılmıştır.

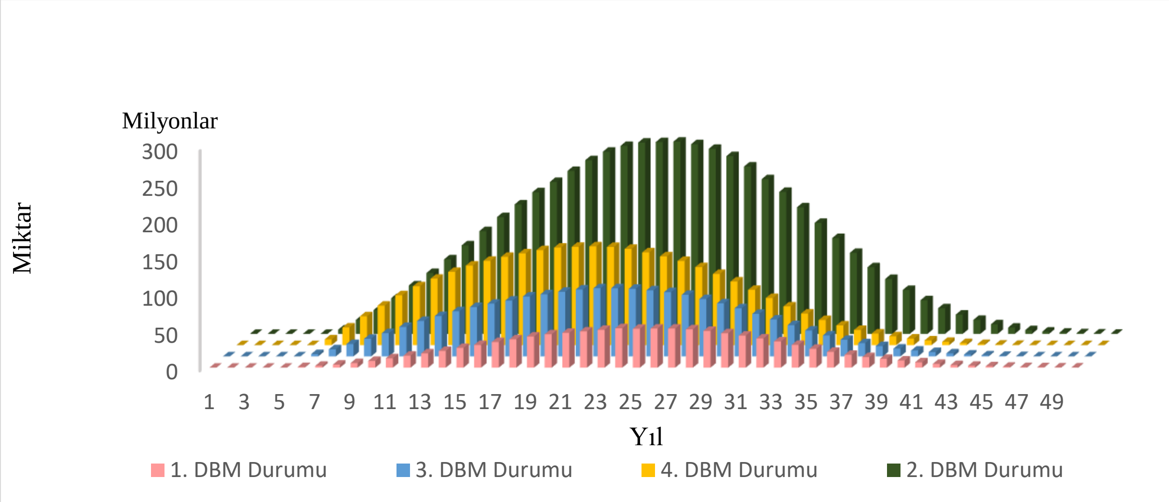


Şekil 5.11. 60 Yaşında Olan Bireylerin Ödeyeceği Aylık Primin ve Alacağı Aylık Tazminatın Her Bir Yaş Dönemi Sonundaki Birikimli Değeri

Şekil 5.11'de sisteme giriş yaşı 60 olan bireyler için 10 yıl boyunca bireylerin aylık olarak ödeyeceği primlerin her bir yıl sonundaki birikimli değeri ve 65 yaşından sonra 45 yıl boyunca bireylere aylık olarak ödenecek tazminatların her bir yıl sonundaki birikimli değeri gösterilmiştir. x ekseni yılları, y ekseni toplam ödenen prim ve tazminat miktarının birikimli değerini göstermektedir. Prim ödeme süresi boyunca sağlıklı bireyler bakıma muhtaç duruma ya da ölüm durumuna geçebilir. Bu yüzden yıllar içerisinde toplam prim miktarı azalmaktadır.

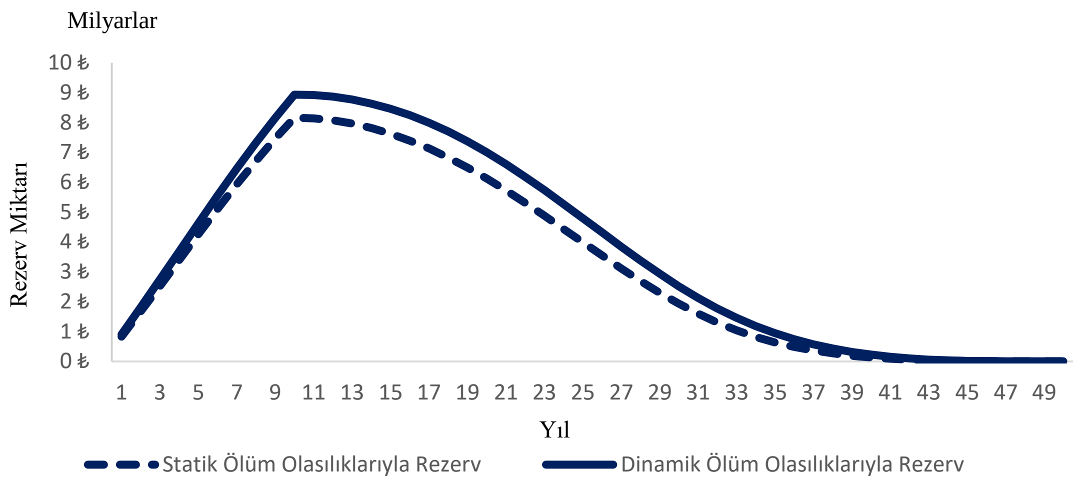
Sisteme giriş yaşı 60 olan bireyler için tazminat ödemesi 65 yaşında başlamaktadır. Statik ölüm olasılıklarıyla benzetimde rezerv miktarı 23. yıldan sonra ölümlerdeki artışa bağlı olarak azalmaktadır. Dinamik ölüm olasılıklarıyla ileri yıllarda bakıma muhtaç duruma geçme olasılığının artmasıyla yıldan yıla toplam tazminat miktarı artmakta 24. yıldan sonra ölümlerdeki artışa bağlı olarak azalmaktadır.

Bakıma muhtaçlık derecesinin farklı olmasıyla ödenencek tazminat miktarı ve süresi değişmektedir. Benzetim sonucunda bireylerin çoğunun 4. derece bakıma muhtaçlık durumuna girmesi beklenmektedir. Yıl sonundaki tazminatın birikimli değeri bakıma muhtaçlık derecelerine göre incelendiğinde 4. derece bakıma muhtaçlık durumundan kaynaklı tazminat miktarınında bu nedenle fazla olması beklenir fakat sonuçlar daha farklıdır. Statik ve dinamik ölüm olasılıklarıyla sonuçlar çok benzer olduğundan sadece statik ölüm olasılığıyla benzetim için bakıma muhtaçlık derecelerine göre tazminat ödemelerin dağılımı gösterilmiştir.



Şekil 5.12. Bakıma Muhtaçlık Durumlarına Göre Tazminatların Birikimli Değeri

Şekil 5.12'de bakıma muhtaçlık durumlarına göre tazminatların birikimli değerinin dağılımını göstermektedir. Tazminat miktarının ve bakıma muhtaçlık durumunda kalış sürelerinin farklı olmasından dolayı sadece toplam tazminat miktarı bakıma muhtaç duruma giren kişi sayısıyla açıklanamaz. Bir birey birçok bakıma muhtaçlık durumunda bulunabilir. Markov geçiş olasılıklarına bakıldığında 4. ve 3. derece bakıma muhtaçlık durumundan 2. derece bakıma muhtaçlık durumuna geçiş olasılığı diğer bakıma muhtaçlık durumuna geçiş olasılıklarından yüksektir. Bu yüzden 2. derece bakıma muhtaçlık durumu için ödenen toplam tazminat miktarı diğer durumlarda ödenen tazminat miktarından fazla olduğu söylenebilir. Bunun dışında 2. derece bakıma muhtaçlık durumu için ödenen tazminat miktarının 3. ve 4. derece bakıma muhtaçlık durumlarından yüksek olması ve bu duruma giriş yaşı ve cinsiyeti bu derecedeki toplam tazminat miktarının diğer durumlara göre fazla olmasına neden olmuştur. 1. derece bakıma muhtaçlık durumunun gerçekleşme olasılığı düşük olduğundan kişi başı tazminat miktarı en yüksek olmasına rağmen toplam tazminat miktarı en düşük olmaktadır. Ayrıca Şekil 5.12'den 1. derece ve 2. derece bakıma muhtaçlık durumu, 3. derece ve 4. derece bakıma muhtaçlık durumlarına göre ileri yaşlarda daha fazla gerçekleştiği söylenebilir.



Şekil 5.13. 60 Yaşındaki Bireyler için Rezerv

Şekil 5.13'te sigortaya başlangıç yaşı 60 olan bireyler için yıllık rezerv miktarı gösterilmektedir. Rezerv miktarı ilk 10 yıl artmakta daha sonraki yıllarda azalmakta ve 50. yılın sonunda sıfıra yaklaşmaktadır. İlk 5 yıl boyunca tazminat ödemesinin olmaması ve bakıma muhtaç duruma geçiş olasılığının ileri yaşlarda daha fazla olması nedeniyle rezerv ilk 10 yıl artacak, sonraki yıllarda bakıma muhtaç duruma geçen kişi sayısı artması ile yıllık rezerv miktarı düşecektir.

Dinamik ölüm olasılıklarıyla benzetimde daha fazla miktarda prim alınmakta ve daha fazla miktarda tazminat ödemesi yapılmaktadır. Primin erken yaşlarda alınması ve bu yaşlarda statik ve dinamik ölüm olasılıklarının çok farklı olmamasından dolayı prim ödeyen kişi sayısı çok fazla değişmemesine rağmen dinamik ölüm olasılıklarında ileri yaşlarda yaşayan kişi sayısı artığı için daha fazla kişiye tazminat ödemesi yapılacaktır. Bu sebepten statik ölüm olasılığıyla yıllık rezerv miktarı dinamik ölüm olasılığıyla rezerv miktarından daha düşüktür. Statik ve dinamik ölüm olasılıklarıyla benzetim sonucu rezerv incelendiğinde sisteme giriş yaşında bu değerlerin birbirine çok yakın olduğu görülmektedir. Yaş artışıyla rezervler arasındaki fark artmaktadır.

5.9. Primin Parametredeki Değişime Duyarlılığı

Benzetim çalışmalarında duyarlılık analizi modelin parametre değerlerine ne kadar duyarlı olduğunu tespit etmek için yapılmaktadır. Her bir parametre ayrı ayrı test edilir ve modelin en çok hangi parametreye duyarlı olduğu belirlenmeye çalışılır. Bu çalışmada bakıma muhtaç durumdan ölüm durumuna geçiş olasılığının ve sağlıklı durumdan ölüm durumuna geçiş olasılığının prime etkisini göstermek için duyarlılık analizi yapılmıştır. Her bir olasılık % 10 oranıyla değiştirilmiş, bu olasılık değişiminin primi ne kadar etkilediği tespit edilmiştir.

Benzetimde statik ölüm olasılıklarıyla 60 yaşındaki bireylerin ödemesi gereken aylık prim miktarı 68,8386 TL olarak bulunmaktadır. Olasılıkların değişiminin prim üzerindeki etkisini göstermek için sisteme giriş yaşı 60 olan bireylerin sağlıklı durumdan bakıma muhtaç duruma geçme ve ölme olasılıkları değiştirilmiştir.

	Sağlıklı Durumdan Bakıma Muhtaç Duruma Geçiş Olasılıkları		**Sağlıklı Bireylerin Statik Ölüm Olasılıkları**	
Değişim Oranı	**−% 10**	**+% 10**	**−% 10**	**+% 10**
Prim	63,2686	74,1932	71,9307	66,1058
İlgili Değişim	−% 8,1	% 7,8	% 4,5	−% 4

Çizelge 5.6. 60 Yaşındaki Bireylerin Aylık Ödeyeceği Priminin Farklı Risk Faktörlerine Duyarlılığı

Sağlıklı durumdan bakıma muhtaç duruma geçme olasılıkları %10 arttırıldığında prim %7,8 oranda artmakta, %10 azaltıldığında %8,1 oranında azalmaktadır. Prim sağlıklı durumdan bakıma muhtaç duruma geçiş olasılıkların azalması artmasından daha fazla etkilenir. Sağlıklı durumdan bakıma muhtaç duruma geçiş olasılıklarının artması, bakıma muhtaç duruma girecek kişi sayısının artması demektir. Bakıma muhtaç kişilere ödenecek tazminatın sağlanabilmesi için prim miktarı artacaktır.

Benzetimde dinamik ölüm olasılıklarıyla 60 yaşındaki bireylerin ödemesi gereken aylık prim miktarı 74,8019 TL olarak bulunmaktadır. Olasılıkların değişiminin prim üzerindeki etkisini göstermek için sisteme giriş yaşı 60 olan bireylerin sağlıklı durumdan bakıma muhtaç duruma geçme ve ölme olasılıkları değiştirilmiştir.

	Sağlıklı Durumdan Bakıma Muhtaç Duruma Geçiş Olasılıkları		**Sağlıklı Bireylerin Dinamik Ölüm Olasılıkları**	
Değişim Oranı	**−% 10**	**+% 10**	**−% 10**	**+% 10**
Prim	68,8574	80,5	77,8445	72,0516
İlgili Değişim	−% 8	% 7,6	% 4,1	−% 3,6

Çizelge 5. 7. 60 Yaşındaki Bireylerin Aylık Ödeyeceği Priminin Farklı Risk Faktörlerine Duyarlılığı

Dinamik ölüm olasılıklarıyla yapılan duyarlılık analizi statik ölüm olasılığınkiyle aynı yönlü farklı şiddetli değişim göstermektedirler. Sonuç olarak dinamik ve statik ölüm olasılıklarıyla da sağlıklı bireylerin ölüm olasılıklarının prim üzerindeki etkisi sağlıklı durumdan bakıma muhtaç duruma geçiş olasılıklarından daha azdır. Bunun nedeni tazminatın bakıma muhtaçlık durumuna geçiş hızıyla ilişkili olmasıdır. Sağlıklı bireylerin ölüm olasılığının artması ile daha fazla sayıda birey sağlıklı durumdan bakıma muhtaç duruma geçmeden ölecektir. Böylece bakıma muhtaç duruma geçen kişi sayısı azalacaktır. Hem toplam prim miktarı hem de toplam tazminat miktarı düşecektir. Dolayısıyla prim bu durumdan negatif yönlü etkilenecektir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Türkiye için UDBS modeli oluşturulmuştur. UDBS genellikle sağlıklı, bakıma muhtaç ve ölüm olmak üzere basit Markov modeliyle oluşturulur. Bu çalışmada bakıma muhtaç durumda kalış süresi için yarı-Markov modeli kullanılmıştır. Bakıma muhtaçlık durumu, bakıma muhtaçlık derecelerine göre 4'e ayrılmıştır. Bakıma muhtaçlık dereceleri AGGIR'e göre yapılmıştır. Sağlıklı, ölü ve 4 tane bakıma muhtaçlık durumu olmak üzere toplam 6 durum mevcuttur ve bu durumlar arası geçişler tek taraflı olmaktadır. Yani bakıma muhtaç bireyin iyileşme olasılığının sıfır olduğu varsayılmıştır.

Bu çalışmada Biessy'in bakıma muhtaç durumda kalış süresi için oluşturduğu modelin parametrelerinden yararlanılmıştır. Biessy bakıma muhtaç durumda kalış süresini Cox orantılı tehlike modeli ile açıklamıştır. Açıklayıcı değişken olarak cinsiyet ve yaş kullanmıştır. Bakıma muhtaç durumda kalış süresinin hastalık türüyle de ilişkili olduğu düşünülmüş fakat hastalık türleriyle ilgili bilgi mevcut olmadığından zayıflık modeli kullanmıştır. Zayıflık modelinin yaş ve cinsiyete göre farklılık gösterdiği düşünülmüştür. Hastalık türleri kardiolojik ve nörolojik olmak üzere ikiye ayrıldığı için Bernoulli dağılımı kullanılması uygun görmüştür. Zayıflık, açıklayıcı değişkenleri yaş ve cinsiyet olan genelleştirilmiş doğrusal model ile açıklamıştır. Böylece bir durumda kalış süresi için model elde edilmiştir. Modelin parametreleri Nelder Mead yöntemiyle elde edilmiştir. Bu çalışmada, bu parametreler, bakıma muhtaç durumda kalış süresinin fonksiyonları, Türkiye için ölüm olasılıkları ve bakıma muhtaç duruma geçme olasılıkları kullanılarak benzetim yoluyla bireylerin yaşam süreleri ve bulunacağı durumlar tahmin edilmiştir.

UDBS'de ödenecek tazminatların bugünkü değerlerinin hesaplanması çok fazla matematiksel işlem gerektirmektedir. Bu yüzden benzetim yöntemi ile prim ve tazminatların bugunkü değerleri elde edilmesi uygun görülmüştür. Benzetim $[40,60]$ yaş aralığındaki her bir yaş için 1 000 000 kez tekrarlanmıştır. Hem zamanla değişmeyen ölüm olasılıklarıyla hemde zamanla değişen ölüm olasılıklarına göre UDBS prim ve rezerv hesaplanmıştır.

Sonuç olarak statik ve dinamik ölüm olasılıklarıyla benzetimlerde kadınların bakıma muhtaç duruma girme olasılığının erkeklerinkinden fazla olduğu söylenebilir. Kadınların bakıma muhtaç durumda kalma süresi de daha uzundur. Elde edilen sonuçlardan sisteme giriş yaşı arttıkça prim ödeme sayısı azaldığından UDBS prim miktarı yaş ile orantılı olarak artacağı söylenebilir. Sisteme giriş yaşının artması ve kısa süre içinde sisteme giriş ve çıkışların fazla olması nedeniyle yaş arttışıyla primin güven aralığı daha geniş olmaktadır. Prim miktarının, sağlıklı durumdan bakıma muhtaç duruma geçiş olasılığı ve bakıma muhtaç durumda kalış süresiyle doğru, sağlıklı durumdan ölüm durumuna geçiş olasılığıyla da ters orantılı olduğu söylenebilir. Uzun ömürlülük riskine bağlı olarak her yıl değişen dinamik ölüm olasılıklarıyla bakıma muhtaç duruma giren kişi sayısı artmaktadır. Bununla birlikte bakıma muhtaç duruma giriş yaşı arttığı için bakıma muhtaç durumda kalış süresi azalacaktır. Statik ve dinamik ölüm olasılıklarıyla benzetim sonuçları incelendiğinde beklenen ömrün artmasıyla UDBS primi artmaktadır.

Bu çalışma ile Biessy'in çalışması karşılaştırıldığında primin aynı etkenlerden aynı yönde farklı derecede etkilendiği görülmüştür. Ayrıca bu çalışmanın sigorta kapsamının farklı olmasından dolayı her bir yaş için prim ve primin güven aralıkları farklı sonuçlar vermiştir.

İleride yapılacak çalışmalarda nüfus projeksiyonlarından yararlanarak morbilite riskinin UDBS üzerindeki etkisine bakılarak prim hesabının yapılması önerilmektedir. Ayrıca yarı-Markov süreçlerinin aktüeryadaki uygulamalarından yararlanılarak deterministik bir yaklaşımla prim hesabı yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Türkiye İstatistik Kurumu, “Nüfus Projeksiyonları, 2013-2075,” 2013.

[2] S. Ferri and A. Oliveri, “Technical Bases for Ltc Covers Including Mortality and Disability Projections,” in *Proceedings of the ASTIN 2000 International Colloquium*, 2000, pp. 295–314.

[3] J. M. . Hoem, “Markov Chain Models in Life Insurance,” *Blätter der DGVFM*, vol. 9, no. 2, pp. 91–107, 1969.

[4] H. H. Panjer, “Aids: Survival Analysis of Persons Testing HIV+,” *Trans. Soc. Actuar.*, vol. 40, no. 1, pp. 517–542, 1988.

[5] C. M. Ramsay, “AIDS and The Calculation of Life Insurance FAUNCTİONS,” *Trans. Soc. Actuar.*, vol. 41, pp. 393–442, 1989.

[6] K. G. Manton, “Intervention effects among a collection of risks,” *Trans. Soc. Actuar.*, vol. 4, pp. 443–468, 1991.

[7] E. Pitacco, “Actuarial models for pricing disability benefits: Towards a unifying approach,” *Insur. Math. Econ.*, vol. 16, no. 1, pp. 39–62, 1995.

[8] S. Haberman and E. Pitacco, *Actuarial models for disability insurance*. 1999.

[9] D. Commenges, “Inference for multi-state models from interval-censored data,” *Stat. Methods Med. Res.*, vol. 11, no. 2, pp. 167–182, 2002.

[10] Y. Foucher, M. Giral, J. Soulillou, and J. Daures, “A semi-Markov model for multistate and interval-censored data with multiple terminal events. Application in renal transplantation,” *Stat. Med.*, vol. 26, no. 30, pp. 5381–5393, 2007.

[11] J. Janssen, “Application des processus semi-markoviens a un probleme d’invalidite,” *Bull. l’Association R. des Actuar.*, vol. 63, pp. 35–52, 1966.

[12] J. M. Hoem, “Inhomogeneous semi-Markov processes, select actuarial tables, and duration-dependence in demography,” *Popul. Dyn.*, pp. 251–296, 1972.

[13] I. Sahin and Y. Balcer, “Stochastic Models for Pensionable Service,” *Oper. Res.*, vol. 27, no. 5, pp. 888–903, 1979.

[14] M. Carravetta, R. De Dominicis, and R. Manca, “Semimarkov process in social security problems,” *Cah. du C.E.R.O*, 1981.

[15] J. Beekman, “An alternative premium calculation method for certain long-term care coverages,” *Actuar. Res. Clear. House*, vol. 2, pp. 179–200, 1990.

[16] G. Parker, “Stochastic analysis of the interaction between investment and insurance risks,” *Actuar. Res. Clear. House*, vol. 2, pp. 179–218, 1995.

[17] M. P. Deleglise, C. Hess, and S. Nouet, “PILOTAGE D ’ UN PORTEFEUILLE D EPENDANCE To cite this version :,” *Bull. Français D.actuariat*, vol. 7, no. 17, pp. 70–108, 2011.

[18] F. Gauzere, D. Commenges, L. Letenneur, and J. Dartigues, “Maladie et dépendance : description des évolutions par des modèles multi-états,” *Population (Paris).*, vol. 54, no. 2, pp. 205–222, 1999.

[19] C. Czado and F. Rudolph, “Application of Survival Analysis Methods to Long Term Care Insurance,” *Insur. Econ.*, vol. 31, no. 3, pp. 395–413, 2002.

[20] F. Helms, C. Czado, and S. Gshlöbl, “Calculation of Ltc Premiums Based on Direct Estimates,” *ASTIN Bull.*, vol. 35, no. 2, pp. 455–469, 2005.

[21] S. Levantesi and M. Menzietti, “Managing longevity and disability risks in life annuities with long term care,” *Insur. Math. Econ.*, vol. 50, no. 3, pp. 391–401, 2012.

[22] G. Biessy, “Long-term Care Insurance: A Multi-State Semi-Markov Model to Describe the Dependency Process in Elderly People,” *Bull. Français D.actuariat*, vol. 15, no. 29, pp. 41–73, 2015.

[23] A. Seyyar and S. Oğlak, “Danimarka ve Hollanda Sosyal Güvenlik Sistemlerinde Bakım Hizmetleri,” *ÖZ-VERİ Derg.*, vol. 1, no. 1, 2004.

[24] M. Metin, “Almanya Federal Cumhuriyeti’ndeki Zorunlu Bakım Sigortası ve Türkiye’de Uygulanabilirliği,” 2014.

[25] “Bakım Hizmetleri Stratejisi ve Eylem Planı Kapsamında;Sosyal Güvenlik Sisteminde;Bakım Güvence Modeli ve Bakım Sigortasının Oluşturulması Çalışmaları Taslak Raporu,” 2013.

[26] V. Ağören, “Bakim Sigortasi ve Türkiye Uygulamasi,” 2009.

[27] T. R. Fleming and D. Y. Lin, “Survival analysis in clinical trials: past developments and future directions,” *Biometrics*, vol. 56, no. 4. pp. 971–983, 2000.

[28] J. D. Kalbflkeisch and R. L. Prentice, *The Statistical Analysis of Failure Time Data*. Hoboken, N.J. : J. Wiley, 1980.

[29] A. Wienke, *Frailty Models in Survival Analysis*. Boca Raton : Taylor & Francis, 2011.

[30] L. Samartzis, a. C. Davison, and V. Partovi Nia, “Survival and censored data,” *Ec. Polytech. Fed. Lausanne*, 2006.

[31] T. Nakagawa, *Stochastic Processes : with Applications to Reliability Theory*. 2011.

[32] J. Jacques and M. Raimondo, *Semi-Markov Risk Models for Finance, Insurance and Reliability*. Springer Science & Business Media, 2007.

[33] Y. Altınok, “Semi-Markov modelinin Kuzey Anadolu Fay Zonunda deprem riskine uygulanması,” *Jeofizik*, vol. 2, pp. 44–48, 1988.

[34] N. Limnios, “Semi-Markov processes and Hidden models,” *In Encyclopedia of Operations Research and Management Science*. 2010.

[35] F. Grabski, *Semi-Markov Processes: Applications in System Reliability and Maintenance*. 2015.

[36] I. Votsi, N. Limnios, G. Tsaklidis, and E. Papadimitriou, “Estimation of the Expected Number of Earthquake Occurrences Based on Semi-Markov Models,” *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, vol. 14, no. 3, pp. 685–703, 2012.

[37] Y. Foucher, E. Mathieu, P. Saint-Pierre, J. F. Durand, and J. P. Daurès, “A semi-markov model based on generalized weibull distribution with an illustration for HIV disease,” *Biometrical J.*, vol. 47, no. 6, pp. 825–833, 2005.

[38] J. M. Box-Steffensmeier and C. J. Zorn, “Duration Models and Proportional Hazards in Political Science,” *Am. J. Pol. Sci.*, vol. 45, no. 4, pp. 972–988, 2001.

[39] M. Yay, “Yaşam Analizinde Cox Regresyon Modeli ve Artıkların incelenmesi,”

Cerrahpaşa Tıp Derg., vol. 1300, no. 5227, pp. 139–145, 2007.

[40] D. Collett, *Modelling Survival Data in Medical Research, Third Edition*, vol. 46, no. 2. 2015.

[41] D. R. Cox and D. Oakes, *Analysis of Survival Data*. 1984.

[42] E. T. Lee and J. W. Wang, *Statistical Methods for Survival Data Analysis*, vol. 53, no. 9. 2003.

[43] J. W. Vaupel, K. G. Manton, and E. Stallard, “The Impact of Heterogeneity in Individual Frailty on the Dynamics of Mortality,” *Demography*, vol. 16, no. 3. pp. 439–454, 1979.

[44] D. G. Clayton, “A Model for Association in Bivariate Life Tables and Its Application in Epidemiological Studies of Familial Tendency in Chronic Disease Incidence,” *Biometrika*, vol. 65, no. 1, pp. 141–151, 2016.

[45] J. W. Vaupel and A. I. Yashin, “Heterogeneity Ruses - some surprising effects of selection on population dynamics,” *American Statistician*, vol. 39, no. 3. pp. 176–185, 1985.

[46] P. Hougaard, “Modeling Heterogeneity in Survival Data,” *J. Appl. Probab.*, vol. 28, no. 3, pp. 695–701, 1991.

[47] O. O. Aalen, “Effects of Frailty in Survival Analysis.,” *Stat. Methods Med. Res.*, vol. 3, no. 3, pp. 227–243, 1994.

[48] a Pickles and R. Crouchley, “Generalizations and applications of frailty models for survival and event data.,” *Stat. Methods Med. Res.*, vol. 3, pp. 263–278, 1994.

[49] F. Coolen, P. K. Andersen, O. Borgan, R. D. Gill, and N. Keiding, *Statistical Models Based on Counting Processes.*, vol. 45. 1996.

[50] J. P. Klein and M. L. Moeschberger, *Techniques for improving language-based editors*. Springer Science & Business Media, 2005.

[51] J. Stare and J. O’Quigley, “Fit and frailties in proportional hazards regression,” *Biometrical J.*, vol. 46, no. 2, pp. 157–164, 2004.

[52] N. Ata and D. Karasoy, “Sağkalım çözümlemesi için zayıflık modeli ve mide kanseri hastalarına ilişkin verilerle bir uygulama,” *C_ ankaya Univ. J. Sci. Eng.*, vol. 8, no. 2, pp. 225–235, 2011.

[53] L. Duchateau and P. Janssen, *The Frailty Model*. Springer Science & Business Media, 2008.

[54] J. A. Nelder and R. W. M. Wedderburn, “Generalized Linear Models,” *J. R. Stat. Soc. Ser. A J. R. Stat. Soc. Ser. A (General J. R. Stat. Soc. A*, vol. 13517213, no. 3, pp. 370–384, 1972.

[55] R. H. Myers and D. C. Montgomery, “A tutorial on generalized linear models,” *J. Qual. Technol.*, vol. 29, no. 3, pp. 274–291, 1997.

[56] P. de Jong and G. Z. Heller, *Generalized Linear Models for Insurance Data*. Cambridge University Press, 2008.

[57] james W. Hardin and J. M. Hilbe, *Generalized linear models and extensions*, 2nd ed. Stata Press, 2012.

[58] H. P. Gavin, “The Nelder-Mead Algorithm in Two Dimensions,” 2015.

[59] J. H. Matthews and K. D. Fink, *Numerical Methods Using Matlab*, 4th ed. Upper Saddle River, 2004.

[60] “Nüfus ve Konut Araştırması.” 2013.

[61] M. A. Cohen, D. Ph, J. Miller, and A. Ingoldsby, “Becoming Disabled After Age 65 : The Expected Lifetime Costs of Independent Living by,” 2005.

[62] M. Sucu ,v.d., “Türkiye Sigortalı ve Anüitant Hayat Tablolarının Oluşturulması ve Projeksiyonları,” Ankara, 2017.

[63] J. C.Watkins, *An Introduction to the Science of Statistics : Preliminary Edition*. 2014.

[64] D. Hunter, “Chapter 5 The Delta Method and Applications,” pp. 85–95, 2006.

[65] W. Wiscombe, “The Delta Method,” *J. Atmos. Sci.*, vol. 34, pp. 1408–1422, 1977.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Çiğdem LAZOĞLU

Doğum Yeri : Bayburt

Medeni Hali : Evli

E-posta : cigdemkobal@hacettepe.edu.tr

Adres : Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü

Eğitim

Lise : Bayburt Anadolu Lisesi, 2004-2008

Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri,2009-2013

Yüksek Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri,2014-2017

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, Orta

İş Deneyimi

Fırat Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü, 2014 Eylül-2015 Şubat

Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü, 2014-…

Deneyim Alanları

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

Tezden Üretilmiş Yayınlar

Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
AKTÜERYA BİLİMLERİ ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 11/ 07/2017

Tez Başlığı / Konusu: Uzun Dönem Bakım Sigortasında Uzun Ömürlülük Riskinin Fiyatlandırılması
Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 78 sayfalık kısmına ilişkin, 10 /07/2017 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 5 'tir.

Uygulanan filtrelemeler:

1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar hariç/~~dahil~~
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza
11.07.2017

Adı Soyadı: Çiğdem LAZOĞLU

Öğrenci No: N14125475

Anabilim Dalı: Aktüerya Bilimleri

Programı: Aktüerya Bilimleri

Statüsü: ☑ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Yrd.Doç.Dr. Murat BÜYÜKYAZICI