ANKARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

FRENET HAREKETLERİ VE YÜZEYLER

Naser MASROURİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2012

ÖZET

Doktora Tezi

FRENET HAREKETLERİ VE YÜZEYLER

Naser MASROURI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde ön bilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar ve teoremler verilmiştir.
Üçüncü bölümde, E^3 Öklid uzayında Frenet hareketinin pol noktalarının mevcut olmadığı gösterildi. Sonra hareketin Darboux vektörü verilerek, E^3 de uygulamaları yapıldı ve bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart verildi. Daha sonra hareketin yüksek mertebeden ivme merkezleri incelendi.
Dördüncü bölümde, E^3 Öklid uzayında, Bishop çatısı yardımıyla elde edilen hareketler incelendi.
Beşinci bölümde ise E^3 Lorentz uzayında Frenet hareketi tanımlanarak, bu hareketin pol noktası ve yüksek mertebeden ivme merkezleri incelendi.
Altıncı bölümde, Lorentz uzayında, Bishop çatısı ile elde edilen hareketin özelikleri incelendi.

Şubat 2012, 65 sayfa

Anahtar Kelimeler: Frenet Hareketi, Bishop Hareketi, Eğri, Eğrilik, Yüzey, Genel Helis.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

FRENET MOTIONS AND SURFACES

Naser MASROURI

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of six chapters.
The first chapter is devoted to the introduction.
In the second chapter, preliminaries and some definitions and theorems that will be needed for later use are given.
In the third section, In Euclidean 3- space, discussed in the existence of pole point, 1st and 2nd acceleration pole points in the Frenet motion. Then gives a necessary and enough condition for stationary direction of the Instantaneous Screw Axis.
In the fourth section in E^3, Bishop motion is defined and researches the third section.
In the fifth section in the Lorentz 3- space, discussed in the existence of pole point, 1st and 2nd acceleration pole points in the Frenet motion.
In the sixth section in the Lorentz 3- space, Bishop motion is defined and researches the fifth section.

February 2012, 65 pages

Key Words: Frenet Motion, Bishop Motion, Curve, Curvature, Surface, Generralized Helix.

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)' ya, yardımlarını benden esirgemeyen değerli jüri hocalarım Sayın Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)' ya, Sayın Doç. Dr. F. Nejat EKMEKCİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)' ya, Sayın Prof. Dr. Baki KARLIĞA (Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)' ya ve Sayın Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN (Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)' ya teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Çalışmam sırasında ellerinden gelen her türlü desteği bana veren eşim Furugh POURNAGI' ye ve oğlum Amirreza' ya sabırlarından ötürü teşekkürlerimi sunarım.

Naser MASROURI
Ankara, Şubat 2012

İÇİNDEKİLER

SİMGELERİN DİZİNİ

A^T	A matrisinin transpozu
$O(n)$	Ortogonal matrislerin cümlesi
R	Sabit uzay
R_0	Hareketli uzay
$\langle \, , \rangle$	Öklid anlamında iç çarpım
E^n	n- boyutlu Öklid uzayı
$\| \;\; \|$	Norm işareti
$SO(n)$	Ortogonal matrislerin cümlesi
ε	İşaret matrisi
$GL(n+1, R)$	Genel lineer grup
$\langle \, , \rangle_L$	Lorentz anlamında iç çarpım
R^n	n- boyutlu vektör uzayı
d	E^n de uzaklık fonksiyonu
Ω	Darboux matrisi
$\vec{\omega}$	Darboux vektöru

ŞEKİLLERİN DİZİNİ

1. GİRİŞ

Frenet ve Bishop hareketleri kinematikte ve mekanikte incelenmektedir. Frenet hareketlerinde, ani helis hareketlerinin ekseni olarak ortaya çıkan Darboux vektörü önemli bir vektördür. Diferensiyel geometride, eğriler teorisinde bu vektör sıkça karşımıza çıkmaktadır. Diferensiyel geometride, yüzeyler önemli bir yere sahiptir. Bu çalışma kinematiğin, diferensiyel geometriye uygulaması olacaktır. Yüzeyler, Frenet ve Bishop hareketlerinin bir eğriye etki etmesiyle elde edileceğinden, yüzeylerin sınıflandırıllması hareketlerde seçilen eğriye bağlı olacaktır. Bu tez çalışmasında, Frenet ve Bishop hareketlerinin bir eğriye etki etmesiyle elde edilen yüzeyler incelenmiştir. Ayrıca Frenet ve Bishop hareketlerini bir yüzeyin noktalarına da etki ettirerek yeni yüzeyler elde edilmiştir. Frenet ve Bishop çatıları yardımıyla, elde edilen hareketlerde, pol noktası ve 1. ve 2. ivme pol merkezlerinin varlığı tartışıldı ve yüzeylerin bazı özelikleri incelendi. Örneğin, hortum yüzeyleri Bishop hareketleri ile ele alınmıştır. Çalışmamız önce Öklid uzayında yapılmıştır sonra Lorentz uzayına genelleştirilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Afin Uzaylar

Tanım 2.1.1 (Afin Uzay)

$A \neq \emptyset$ bir cümle ve V de $\mathfrak{I}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\mathcal{X} : A \times A \rightarrow V$$

dönüşümü $P, Q \in A$ noktaları için

$$(P, Q) \rightarrow \overrightarrow{PQ} \in V$$

şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A cümlesine V ile birleştirilmiş bir *afin uzayı* denir:

1) $\forall\, P, Q, R \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ dir,

2) $\forall\, P \in A$ ve $\forall\, \alpha \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

$\overrightarrow{PQ}$ vektöründe P noktasına başlangıç noktası ve Q noktasına bitim noktası denir (Gray 1998, Hacısalihoğlu 2000).

Örnek 2.1.1

Her vektör uzayı kendisi ile birleşen bir afin uzaydır.

Tanım 2.1.2 (Afin Çatı)

Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri A olsun,

$P_0, P_1, \ldots, P_n \in A$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$

vektörlerinin sistemi V nin bir bazı ise

$$\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$$

nokta $(n+1)$-lisine A afin uzayının bir *afin çatısı* denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası ve P_i noktalarına da çatının bitim noktaları denir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.1.1

Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri A olsun. Belli bir $P_0 \epsilon A$ noktası seçildiğinde başlangıçı P_0 olan bir çatı vardır.

İspat: V nin bir bazı

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

olsun. Her bir $i,\ 1 \leq i \leq n$ için $\overrightarrow{P_0 P_i} = \alpha_i$ olacak şekilde ikinci afin aksiyomuna göre bir tek $P_i \epsilon A$ noktasının var olduğunu biliyoruz. O halde $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ - lisi bir afin çatıdır ve $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ bazı verildiğinde tektir.

Tanım 2.1.3 (Afin Dönüşüm)

Bir $\mathfrak{I}$ cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı V_1, V_2 ile birleştirilmiş afin uzaylar, sırası ile A_1 ve A_2 olsun.

$$f : A_1 \to A_2$$

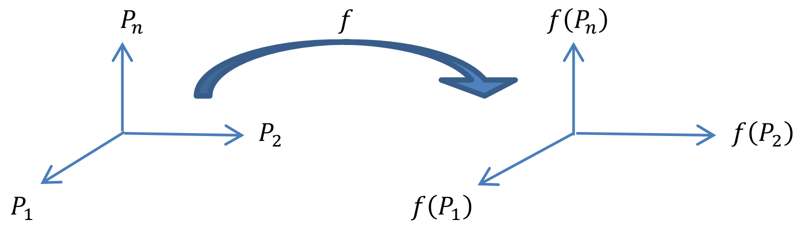
bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $P \in A_1$ noktası için bir

$$\mathcal{X}_P : V_1 \to V_2$$

dönüşümünü şu şekilde tanımlayalım. $\alpha \in V_1$ vektörü için $\alpha = \overrightarrow{PQ}$ olacak şekilde ikinci afin aksiyomuna göre tek olarak var olan nokta, $Q \in A_1$ olduğuna göre

$$\mathcal{X}_P(\alpha) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

dir. Eğer $\mathcal{X}_P$ lineer ise f dönüşümüne *afin dönüşüm* denir (Hacısalihoğlu 2000).



Şekil 2.1 Afin dönüşümler

2.2 Öklid Uzayları

Tanım 2.2.1 (Öklid Uzayı)

Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı V olsun. V de iç çarpım işlemi olarak

$$< , >: \; V \times V \to R$$

$$(x, y) \to < x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad , \quad y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayına *n-boyutlu Öklid uzayı* denir ve E^n ile gösterilir (Hacısalihoğlu 2000).

Örnek 2.2.1

3-boyutlu standart reel vektör uzayı R^3 ile birleştirilmiş E^3 afin uzayını ele alalım. Bu R^3 vektör uzayında Öklid iç çarpımını, her

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad , \quad y = (y_1, y_2, y_3)$$

Olmak üzere

$$<\,,\,>:\ R^3 \times R^3 \to R$$

$$(x, y) \to < x, y > = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece E^3 afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve E^3 ile gösterilir.

Tanım 2.2.2 (Öklid Çatısı)

Bir n-boyutlu reel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleşen E^n Öklid uzayında sıralı bir $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ nokta (n+1)-lisi için eğer

$$\{\, \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n} \,\}$$

vektör sistemi V nin bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ çatısına *dik çatı* (*Öklid çatısı*) denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.3 (Öklid Koordinat Sistemi)

E^n de $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ dik çatısı verilsin. $P \in E^n$ için

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{P_0P_i}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$x_i\ :\ E^n \to R$$

$$P \to x_i(P) = x_i$$

şeklinde tanımlı $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ fonksiyonlarının cümlesine *Öklid koordinat sistemi* denir (Gray 1998, Hacısalihoğlu 2000).

2.3 E^n de Hareketler

Tanım 2.3.1 (E^n de İzometri)

E^n de uzaklık fonksiyonu d olmak üzere,

$$f : E^n \to E^n$$

$$x \to f(y)$$

fonksiyonu için eğer,

$$d : E^n \times E^n \to R$$

$$\forall\, x, y \in E^n \qquad d\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y)$$

ise f fonksiyonuna E^n in bir *izometrisi* denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.3.2 (Dönme)

E^n in bir f izometrisi için eğer, $f(0) = 0\,, 0 \in E^n$ ise f ye 0 etrafında bir *dönme* denir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.3.1

E^n ile eşlenen R^n n-boyutlu standart reel vektör uzayında

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Öklid iç çarpımını koruyan ortogonal grup $O(n)$ ile 0 noktasını sabit bırakan dönme grubu eşlenebilirdir. Böylece, herhangi bir dönme altında, E^n deki bir X noktasının görüntüsü Y olmak uzere,

$$Y = AX\ , \qquad A \in O(n)$$

biçiminde yazılabilir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.3.3 (Öteleme)

E^n in bir f izometrisi için eğer, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E^n$ olmak üzere

$$f(X) = (x_1 + t_1, x_2 + t_2, \cdots, x_n + t_n) \ , \ \ t_i \in R \qquad 1 \leq i \leq n$$

ise f ye E^n de bir *öteleme* denir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.3.2

E^n, n-boyutlu Öklid uzayının katı hareketlerinden birinin matrisi

B olmak üzere,

$$B = \begin{bmatrix} & & & & & t_1 \\ & & & & & t_2 \\ & & a_{ij} & & & . \\ & & & & & . \\ & & & & & . \\ & & & & & t_n \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [a_{ij}] \in O(n) \ , \ \ 1 \leq i,j \leq n$$

$$B = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde $(n+1) \times (n+1)$ tipinde reel ve regüler bir matris olarak yazılabilir. Burada $A \in O(n)$ ve $C \in R_1^n$ dir. Bu matrislerin grubu, $GL(n+1, R)$ nin bir alt grubu olarak ifade edilebilir. Böylece B ye karşılık gelen genel izometri, E^n deki bir X noktasının B altındaki görüntüsü Y olmak üzere, matris formunda

$$Y = AX + C \ , \quad A \in O(n) \text{ ve } C \in R_1^n$$

biçiminde ifade edilebilir.

Şimdi n-boyutlu bir

$$\mathcal{R} = \{O' \ ; \ E^n\}$$

referans uzayını göz önüne alalım. Bu uzayın noktalarını hareketler altında sabit olarak düşünelim.

$$\mathcal{R}_0 = \{O \ ; \ E^n\}$$

ile hareket altında sabit olmayan bir diğer uzayı (hareketli uzay) ele alalım. $\mathcal{R}$ de orijin olarak bir keyfi O' noktasını seçerek E^n in herbir $P, Q, R, \cdots$ noktasına, bu noktaların $\mathcal{R}$ de $\overrightarrow{O'P}, \overrightarrow{O'Q}, \overrightarrow{O'R}, \cdots$ yer vektörlerini karşılık getirebiliriz. $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}_0$ vektör uzayları, Öklid iç çarpımı ile birer iç çarpım uzayıdırlar.

Tanım 2.3.4 (Genel Hareket)

E^n, n-boyutlu Öklid uzayında A bir $n \times n$ ortogonal matris, C bir ötelemeye tekabül eden $n \times 1$ matris olmak üzere

$$Y = AX + C \ , \qquad A \in O(n)$$

ile verilen genel izometrilerinin ifadesindeki A ve C operatörleri, eğer " zaman " ile özdeşlenebilen bir " t " parametresinin fonksiyonları ve üstelik A ya karşılık gelen ortogonal matrisin determinantı $+1$ ve bütün karakteristik değerleri farklı ise

$$Y = AX + C$$

izometrilerinin herbirine E^n de bir *genel hareket* denir (Gray 1998, Hacısalihoğlu 2000, Xu 2006).

$$Y = AX$$

ile verilen bir genel harekette hareketli uzayda sabit bir $X \in \mathcal{R}_0$ noktasının *resmi Y* demektir. Bir genel harekette AX kısmına hareketin *dönme* kısmı denir.

Hareketin parametresi t olmak üzere

$$Y = AX$$

ile verilen dönme kısmını düşünelim. Hareketli uzayın sabit bir X noktasının hız vektörü,

$$\dot{Y} = \frac{dY}{dt} \quad , \quad \dot{A} = \frac{dA}{dt}$$

olmak üzere

$$\dot{Y} = \dot{A}X$$

ile verilir. Böylece

$$\dot{Y} = \dot{A}A^TY$$

elde edilir.

Burada A^T ile A matrisinin transpozu gösterilmektedir. A ortogonal bir matris olduğundan

$$AA^T = I_n$$

Eşitliğinin her iki tarafının t ye göre türevi alınır ve

$$\Omega = \dot{A}A^T$$

anti-simetrik matrisi tanımlanırsa

$$\dot{Y} = \Omega Y$$

yazılabilir.

Tanım 2.3.5 (Darboux Matrisi)

$$\dot{Y} = \Omega Y$$

ifadesindeki

$$\Omega = \dot{A}A^T \, , \qquad A \in O(n)$$

anti-simetrik matrisine A ya karşılık gelen hareketin *Darboux matrisi* denir (Hacısalihoğlu 2000, Bottema 1979).

Tanım 2.3.6 (E^n de eğri)

n-boyutlu Öklid uzayı E^n ve I, R nin irtibatlı açık alt cümlesi olmak üzere,

$$\alpha : I \subset R \rightarrow E^n$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine E^n de bir *eğri* ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin *parametresi* denir.

Tanım 2.3.7 (Eğrinin Hız Vektörü)

E^n de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$\alpha : I \to E^n$ fonksiyonunun Öklidiyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ olmak üzere

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \cdots, \frac{d\alpha_n}{dt}\right)$$

dir. $\big(\alpha(t), \alpha'(t)\big) \in T_{E^n}(t)$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında, (I, α) koordinat komşuluğuna göre *hız vektörü* denir (Hacısalihoğlu 2000, Xu 2006).

Tanım 2.3.8 (Birim Hızlı Eğri)

M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için,

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğuna göre *birim hızlı* eğridir denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine *yay-parametresi* adı verilir.

$a, b \in I$ olmak üzere, a dan b ye M eğrisinin *yay uzunluğu* diye, eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzunluğuna karşılık gelen

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \quad ; \quad t \in I$$

reel sayısına denir. Kolayca görüleceği gibi bu değer koordinat komşuluğundan bağımsızdır (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.3.9 (Regüler Eğri)

Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye *regüler eğri* denir.

Teorem 2.3.2

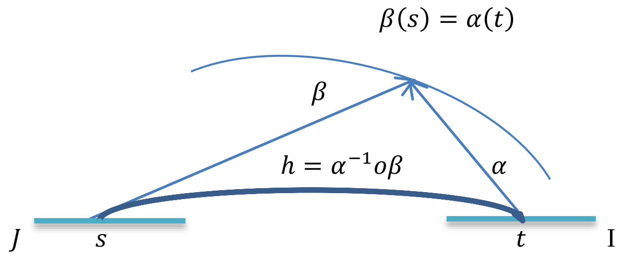
E^n de regüler her eğrinin, birim hızlı olacak şekilde bir koordinat komşuluğu vardır.

Tanım 2.3.10 (Parametre Değişimi)

E^n de bir M eğrisinin (I, α) ve (J, β) gibi iki koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$h = \alpha^{-1} o \beta : J \to I$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna M nin bir *parametre değişimi* denir (Şekil 2.2).



Şekil 2.2 Parametre değişimi

Örnek 2.3.1

$I = \{t |\ 0 < t < 4 , t \in R\}\ ve\ J = \{s |\ 0 < s < 2 , s \in R\}$

verilsin. $M = \{(\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1, -t) |\ t\epsilon I\}$ olmak üzere,

$\alpha : I \to E^4 \quad ; \quad \alpha(t) = (\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1, -t)$

$\beta : J \to E^4 \quad ; \quad \beta(s) = (s, s^3, 1, -s^2)$

fonksiyonları yardımıyla M için, $(I, \alpha)\ ve\ (J, \beta)$ birer koordinat komşuluğudur. Buna göre,

$$h = \alpha^{-1} o \beta : J \to I$$

$$s \to h(s) = s^2 \quad , \quad t = h(s)$$

fonksiyonu M için bir parametre değişimidir.

Örnek 2.3.2

M eğrisi,

$$\alpha : R \to E^3$$

$$t \to \alpha(t) = (a\cos t\,, a\sin t\,, bt)$$

olmak üzere, (R, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Buna göre

$$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

dir. Şimdi, kolaylık sağlayacağından $0 \in R$ yi başlangıç seçerek, I da bir Öklidyen koordinat sistemi $\{u\}$ olmak üzere,

$$s : R \to R$$

$$t \to s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du$$

$$= \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\, t$$

fonksiyonunu gözönüne alalım.

$s = s(t)$ olduğundan,

$$s^{-1}(s) = t = \frac{s(t)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

dir. Böylece,

$$\beta = \alpha o s^{-1}$$

veya yeni s parametresine göre eğrimiz için

$$\beta(s) = (\alpha o s^{-1})(s)$$

$$= \alpha\big(s^{-1}(s)\big)$$

$$= \alpha\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$= \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

elde edilir. M eğrisi, (R,β) koordinat komşuluğuna göre birim hızlıdır. Burada,

$$\beta'(s) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \|\beta'(s)\| = 1$$

Tanım 2.3.11

$Y = AX + C$ hareketine ait,

$$\dot{Y} = \dot{A}X + A\dot{X} + \dot{C}$$

ifadesindeki $\dot{Y}$' ye hareketin *mutlak hızı*, $\dot{A}X + \dot{C}$' ye *sürüklenme hızı* ve $A\dot{X}$' ye de hareketin *rölatif hızı* denir. Burada,

$$\dot{Y} = \frac{dY}{dt} \quad , \quad \dot{A} = \frac{dA}{dt} \quad , \quad \dot{X} = \frac{dX}{dt} \quad , \quad \dot{C} = \frac{dC}{dt}.$$

Tekrar t ye göre türev alınırsa, türevin ifadesi

$$\ddot{Y} = \ddot{A}X + 2\dot{A}\dot{X} + \ddot{C} + A\ddot{X}$$

bulunur. Burada, $\ddot{Y}$' ye *mutlak ivme*, $\ddot{A}X + \ddot{C}$' ye *sürüklenme ivmesi*, $2\dot{A}\dot{X}$' ye *coriolis ivmesi* ve $A\ddot{X}$' ye de hareketin *rölatif ivmesi* denir (Hacısalihoğlu 2000).

Hareketli ve sabit uzayın her ikisinde bir t anında sabit olan bir nokta için

$$\dot{Y} = \dot{X} = \dot{A}X + \dot{C} = 0$$

dır. Bu ortak sabit noktaya t anındaki *ani pol noktası* denir.

Bu ortak noktanın sabit uzaydaki adı *sabit pol noktası* ve hareketli uzaydaki adı *hareketli pol noktasıdır*.

Şu ifadeden dolayı, hareketin ivme merkezi

$$\ddot{A}X + \ddot{C} = 0$$

denkleminin çözümü olur.

2.4 Frenet Hareketleri

2.4.1 Öklid uzayında Frenet 3-ayaklısı

$M \subset E^3$ regüler eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı, $\{T(t), N(t), B(t)\}$ ise

$$T(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}\alpha'(t),$$

$$N(t) = B(t) \wedge T(t),$$

$$B(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)$$

dır. Bu durumda, T vektör alanına, M eğrisinin, (I, α) koordinat komşuluğuna göre *birim teğet vektör alanı*, N ye, eğrinin *birim normal vektör alanı* ve B ye de eğrinin *birim binormal vektör alanı* denir.

Özel halde, M eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş ise $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere,

$$T = \alpha' \quad , \quad N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} \quad , \quad B = T \wedge N$$

olduğu görulür. $\{T, N, B\}$ üç birim ve birbirne dik olan vektörlerden uluşan bir çatıdır.

$M \subset E^3$ eğrisinin $\alpha(s) \epsilon M$ noktasındaki oskülatör, rektifiyan ve normal düzlemlerinin denklemleri şöyle hesaplanırlar:

$$det(\overrightarrow{\alpha X}, \vec{T}, \vec{N}) = 0 \;\; , \;\; det(\overrightarrow{\alpha Y}, \vec{T}, \vec{B}) = 0 \;\; , \;\; det(\overrightarrow{\alpha Z}, \vec{N}, \vec{B}) = 0$$

burada, X, Y ve Z dikili düzlemler üzerindeki değişken noktalardır.

Tanım 2.4.2 (Frenet Hareketi)

α, t parametreli ve her $\alpha(t)$ noktasında regüler olan bir eğri olsun. T, N, B eğrinin her noktasındaki Frenet çatısının birim vektörleri olmak üzere

$$A = [T\ N\ B] = \begin{bmatrix} t_1 & n_1 & b_1 \\ t_2 & n_2 & b_2 \\ t_3 & n_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

ortogonal matrisidir, $det\, A = +1$ ve $A^T = A^{-1}$.

Bu $\alpha(t)$ eğrisinin Frenet çatısının, eğri boyunca hareket ettirilmesiyle elde edilen hareket $Y = AX + C$ denklemi ile verilir ve bu hareket *Frenet hareketi* olarak adlandırılır. Uzayda X noktasının bu hareket altında yörüngesi, seçilen eğrinin cinsine göre değişir. Burada, AX kısmına hareketin *dönme kısmı* ve C ye de *öteleme vektörü kısmı* denir (Bottema 1979).

2.5 Lorentz Uzayları

Tanım 2.5.1 (Lorentz 3-uzayı)

3-boyutlu standart reel vektör uzayı R^3 ile birleştirilmiş E_1^3 uzayını ele alalım. Bu R^3 vektör uzayında Lorentz iç çarpımı

$$\langle\, ,\rangle_L \;:\; R^3 \times R^3 \to R$$

$$(X, Y) \to \langle X, Y\rangle_L = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$$

$$X = (x_1, x_2, x_3)\ ,\ Y = (y_1, y_2, y_3)$$

biçiminde tanımlanır. Böylece R^3 afin uzayı 3-boyutlu *Lorentz uzayı* olur ve E_1^3 ile gösterilir (Lopez 2008).

$X \in E_1^3$ için: $\langle X, X\rangle_L > 0$ veya $X \geq 0$ ise X *spacelike*,

$\langle X,X\rangle_L < 0$ ise X *timelike*,

$\langle X,X\rangle_L = 0$ ve $X \neq 0$ ise X *lightlike* (*null)* vektör olarak adlandırılır.

E_1^3 uzayında X vektörünün normu

$$\|X\|_L = \sqrt{|\langle X,X\rangle_L|}$$

şeklinde tanımlanır. E_1^3 de bir düzlemin normali; spacelike (timelike, null) ise düzleme spacelike (timelike, null) düzlem denir.

Örnek 2.5.1

$E_1 = (1,0,0)$, $E_2 = (0,1,0)$, $E_3 = (0,0,1)$ olmak üzere,

a) E_1, E_2 spacelike vektör, E_3 timelike vektör ve $E_2 + E_3$ null vektörüdır.

b) $sp\{E_1, E_2\}$ düzlemi spacelike, $sp\{E_1, E_3\}$ ve $sp\{E_2, E_3\}$ düzlemleri timelike ve $sp\{E_1, E_2 + E_3\}$ null düzlemdir.

c) $E_1 + E_2 + E_3$ spacelikedir ve $sp\{E_1, E_1 + E_2 + E_3\}$ null düzlemdir.

d) $sp\{E_2 + E_3, E_3\}$ timelike düzlemdir.

Tanım 2.5.2

$\alpha : I \to E_1^3$ eğrisinin teğet vektörü spacelike (timelike, null) ise eğriye *spacelike* (*timelike, null*) *eğri* denir (Lopez 2008).

Örnek 2.5.2

$\alpha(t) = (a\cos t\,, a\sin t\,, bt)$ bir genel helis eğsisi olmak üzere,

$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$

$\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle_L = (-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 - b^2 = a^2 - b^2$

dir. $a \neq 0$, $b \neq 0$ olduğundan dolayı,

i) eğer $|a| > b$ ise, α eğrisi spacelike,

ii) eğer $a = \pm b$ ise, α eğrisi null

iii) ve eğer $|a| < b$ ise, α eğrisi timelike

olur.

3. E^3, ÖKLİD UZAYINDA FRENET HAREKETİ

3.1 Frenet Hareketinin Pol Noktası

α, t parametreli ve her $\alpha(t)$ noktasında regüler olan bir eğri olsun. T, N, B eğrinin her noktasındaki Frenet çatısının birim vektörleri olmak üzere

$$A = [T\ N\ B]$$

dir. Eğer $\kappa > 0$ eğrinin eğriliği ve τ da burulması (torsiyonu) olursa, Frenet-Serret formülleri şöyle yazılabilir:

$$\dot{T} = \kappa N \ , \ \ \dot{N} = -\kappa T + \tau B \ , \ \ \dot{B} = -\tau N,$$

ve bu formülleri

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklinde de yazabiliriz (Bottema 1979, Ekmekci 2000).

A matrisi, birim pozitif ortogonal olmak üzere, $det\, A = +1$ ve $A^T = A^{-1}$ dir.
Buradan,

$$det\, \dot{A} = det(\dot{T}, \dot{N}, \dot{B}) = \begin{vmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{vmatrix} = 0$$

dir. Dolayısıyla $\dot{A}X + \dot{C} = 0$ denkleminin tek çözümü yoktur, yani Ferenet hareketinin her t anında pol noktası yoktur.

Tanım 2.3.5 in ifadesinden, Darboux martisi

$$\Omega = \dot{A}A^T = \begin{bmatrix} 0 & -(b_3\kappa + t_3\tau) & b_2\kappa + t_2\tau \\ b_3\kappa + t_3\tau & 0 & -(b_1\kappa + t_1\tau) \\ -(b_2\kappa + t_2\tau) & b_1\kappa + t_1\tau & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bu matris antisimetrik matristir.

$$x = b_1\kappa + t_1\tau \quad , \quad y = b_2\kappa + t_2\tau \quad , \quad z = b_3\kappa + t_3\tau$$

olmak üzere, Darboux matrisi

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir (Bottema 1979).

$\vec{\Omega} = (x, y, z)$ olduğundan, $\Omega\vec{\Omega} = \vec{0}$ olur.

Örneğin, $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ bir helis eğrisi olsun. Bu eğri için,

$$\vec{\Omega} = (0,0,1) \quad , \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

Bir genel harekette, hareketli bir $X \in \mathcal{R}_0$ nokta olmak üzere, $\vec{\omega}$ Darboux vektörünü,

$$\vec{\omega} = A^T\vec{\Omega}$$

eşitliğinden ele alabiliriz. Burada

$$\vec{\omega} = (\tau, 0, \kappa) = \tau T + \kappa B$$

(T, B) düzleminde bir vektördür ve eğrinin normal vektörüne diktir.

Adi helis örneğinde, eğrilikler ve Darboux vektörü şöyledir:

$$\kappa = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad \tau = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad \vec{\omega} = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Bir birim hızlı α eğrisinin eğrilikleri κ ve τ olduğuna göre α üzerinde $\vec{\omega} = \tau T + \kappa B$ ile tanımlanan $\vec{\omega}$ vektör alanı için aşağıdaki özelikler vardır:

$$\langle \omega, T \rangle = \tau \quad , \quad \langle \omega, N \rangle = 0 \quad , \quad \langle \omega, B \rangle = \kappa$$

$$\omega \wedge T = \dot{T} \quad , \quad \omega \wedge N = \dot{N} \quad , \quad \omega \wedge B = \dot{B}.$$

3.2 Açılabilir Regle Yüzeyler

Tanım 3.2.1 (Regle Yüzey)

$M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında, E^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir *regle yüzey* ve $P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir *doğrultmanı* denir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 3.2.1

$M \subset E^3$ bir regle yüzey olsun. O zaman, M nin doğrultmanları, M de hem asimptotik ve hem de geodezik çizgilerdir (Hacısalihoğlu 2000).

Şimdi regle yüzeyler için atlas kavramını ele alalım.

M bir regle yüzey olsun.

$$\alpha : I \to M$$

eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere, $\forall t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasında M nin doğrultmanı T ile lineer bağımsız olacak şekilde verilsin. $\alpha(t) \in M$ noktasındaki doğrultman,

$$\begin{aligned}
&\beta : R \to M \\
&\beta(v) = \alpha(t) + va(t) \\
&\qquad = \big(\alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t)\big)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada, $a_i(t) \in R$, $1 \leq i \leq 3$, skalarları, doğrultmanın $\alpha(t)$ noktasındaki bileşenleridir. Açıkça,

$$\begin{aligned}
&\varphi : I \times R \to E^3 \\
&\varphi(t, v) = \big(\alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t)\big)
\end{aligned}$$

olmak üzere, $\{(I \times R, \varphi)\}$ sistemi, M için bir atlastır.

$\alpha : I \to M$ eğrisinin yay-parametresi ile verildiğini ve doğrultmanın üzerindeki

$$X|_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^{3} a_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\alpha(t)}$$

tanjant vektörünün de $\forall t \in I$ için birim vektör olduğunu kabul edelim. Üstelik, $\alpha : I \to M$ eğrisi de $\langle T, X \rangle = 0$ olacak şekilde seçilmiş ise M nin birim normali N olmak üzere $\{T, X, N\}$ sistemi, α boyunca bir ortonormal sistem teşkil eder.

Şimdi $\{T, X, N\}$ sisteminin α boyunca değişimini, yani, T ye göre her birinin kovaryant türevlerini bulalım. α boyunca,

$$1 = \langle T, T \rangle = \langle N, N \rangle = \langle X, X \rangle$$

$$\Rightarrow 0 = T[\langle X, X \rangle] = 2\langle D_T X, X \rangle$$

$$\Rightarrow \langle D_T X, X \rangle = 0$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\langle D_T N, N \rangle = 0 \quad , \quad \langle D_T T, T \rangle = 0$$

elde edilir. Burada, $a, b, c \in C^{\infty}(M, R)$ fonksiyonları,

$$a|_{\alpha(t)} = \langle D_T T, X \rangle|_{\alpha(t)}$$

$$b|_{\alpha(t)} = \langle D_T T, N \rangle|_{\alpha(t)}$$

$$c|_{\alpha(t)} = \langle D_T X, N \rangle|_{\alpha(t)}$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$D_T T = aX + bN$$

$$D_T X = -aT + cN$$

$$D_T N = -bT - cX$$

veya

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T X \\ D_T N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ X \\ N \end{bmatrix}$$

bulunur.

$\varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t)$ ile verilen ifade $\{(I \times R, \varphi)\}$ atlasında $\forall\, v \in R$ sabit değeri için M nin bir $\varphi_v : I \times \{v\} \to M$ eğrisini belirtir. Bu eğrinin teğet vektör alanı ise

$$A = T + vD_T X$$

veya burda $D_T X = -aT + cN$ olduğundan

$$A = (1 - av)T + cvN$$

şeklinde bulunur. Demek ki, A vektör alanı da X' e diktir.

Bir doğrultman boyunca, M nin teğet düzlemlerinin çakışık olduğu genellikle doğru değildir. Ancak, bu düzlemlerin daima sabit olması, $c \in C^\infty(M, R)$ fonksiyonu ile yakından ilgilidir.Bu ilgiyi bir teorem ile verelim:

Teorem 3.2.2

Bir regle yüzeyin, bir doğrultmanı boyunca teğet düzlemleri aynıdır $\Leftrightarrow$ $c = 0$.

Tanım 3.2.2 (Dağılma Parametresi)

Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin *dağılma parametresi* (*drali*) denir (Hacısalihoğlu 2000).

Anadoğrularını birim doğrultman vektörü X olan bir regle yüzeyin dralini P_X ile gösterelim. Komşu anadoğruların ortak dikmesi doğrultusundaki birim vektör, vektörel çarpım ile, $X \wedge X'$ olduğundan bu doğrultudaki birim vektör $\frac{X \wedge X'}{\|X'\|}$ dir, burada

$$X' = D_T X$$

dir. Dayanak eğrisinin komşu iki noktası

$$\vec{\alpha}(s) \quad \text{ve} \quad \vec{\alpha}(s + ds) = \vec{\alpha}(s) + d\vec{\alpha}(s)$$

olduğundan bu noktalardaki anadoğrular arasındaki en kısa uzaklık $d\vec{\alpha}$ vektörünün $\frac{X \wedge X'}{\|X'\|}$ vektöru üzerindeki izdüşümüdür. Böylece en kısa uzaklık k ile gösterilirse

$$k = \langle d\vec{\alpha}, \frac{X \wedge X'}{\|X'\|} \rangle \;\Rightarrow\; k = \frac{det(d\vec{\alpha}, X, X')}{\|X'\|}$$

olarak bulunur. Eğer anadoğruların küresel göstergesini gözönüne alırsak bu gösterge yay elementi olan

$$d\psi = \left\| \frac{dX}{ds} \right\| ds = \|D_T X\|\, ds = \sqrt{a^2 + c^2}\, ds$$

komşu iki anadoğru arasındaki açı olarak alınabilir. Böylece regle yüzeyin drali için

$$P_X = \frac{k}{d\psi}$$

$$= \frac{det\left(\frac{d\vec{\alpha}}{ds}, X, X'\right)}{\|X'\|^2}$$

$$= \frac{c}{a^2 + c^2}$$

bulunur. Regle yüzeyler için dral koordinant değişimlerine göre en basit diferensiyel invaryanttır.

Tanım 3.2.3 (Açılabilir Yüzey)

Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye *açılabilir*dir denir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 3.2.3

Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır (O'Neill 1966, Hacısalihoğlu 2000).

Frenet hareketinde, hareketli bir nokta $X \in \mathcal{R}_0$ olmak üzere, $\vec{X}$ Darboux vektörünün doğrultmanının birim vektörü ele alalım, burada:

$$\vec{\omega} = \tau T + \kappa B \quad , \quad \|\vec{\omega}\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \quad ,$$

$$\vec{X} = \frac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|} = \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\right) T + \left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\right) B \quad ,$$

$$X' = \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\cdot} T + \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right) \dot{T} + \left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\cdot} B + \left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right) \dot{B}$$

$$= \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\cdot} T + \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right) \kappa N + \left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\cdot} B - \left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right) \tau N$$

$$= \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\cdot} T + \left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\cdot} B,$$

$$det\left(\frac{d\vec{\alpha}}{ds}, X, X'\right) = det(T, X, X')$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} & 0 & \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} \\ \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\cdot} & 0 & \left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\cdot} \end{vmatrix} = 0.$$

Böylece regle yüzeyin drali

$$P_X = \frac{k}{d\psi} = \frac{det\left(\frac{d\vec{\alpha}}{ds}, X, X'\right)}{\|X'\|^2} = 0$$

olduğundan dolayı, Frenet hareketinde doğrultman $X = \omega$ Darboux vektörü olmak üzere regle yüzey her zaman açılabilirdir.

Tanım 3.2.4 (Striksiyon Noktası)

Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin *boğaz* (*striksiyon*) çizgisi (eğrisi) adı verilir (Hacısalihoğlu 2000).

Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin merkez noktasının $\vec{\overline{\alpha}}$ yervektörü dayanak eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ yervektörü, $X(s)$ doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan $\overline{u}$ uzaklığı cinsinden

$$\overline{\alpha}(s, \overline{u}) = \alpha(s) + \overline{u}X(s) \tag{3.1}$$

şeklinde ifade edilebilir. $\overline{u}$ parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultman cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi $\vec{X}(s)$ ve $\vec{X}(s) + d\vec{X}(s)$ olan komşu üç anadoğrusu verilsin. P, P' ve Q, Q' komşu anadoğruların ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar. İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi

$$X(s) \wedge (X(s) + D_T X(s)ds) = X(s) \wedge D_T X(s)ds$$

bağıntısından dolayı $X \wedge D_T X$ vektörüne paraleldir. Limit halinde $\overrightarrow{PQ}$ vektörü $\overrightarrow{PP'}$ ile çakışacak ve boğaz çizgisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$\langle X, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0 \quad , \quad \langle X + D_T X ds, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0$$

olacağından

$$\langle D_T X, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0 \tag{3.2}$$

elde edilir. Ayrıca (3.1) den dayanak eğrisinin s yay-parametresine göre türevi alınırsa va (3.2) den dolayı,

$$\langle D_T X, \frac{d\alpha}{ds} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle D_T X, T + \frac{d\overline{u}}{ds} X + \overline{u} D_T X \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle D_T X, T \rangle + \overline{u} \|D_T X\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \overline{u} = -\frac{\langle D_T X, T \rangle}{\|D_T X\|^2} = \frac{a}{a^2 + c^2} \tag{3.3}$$

bulunur. Böylece striksiyon eğrisinin yer vektörü için (3.1) den

$$\vec{\overline{\alpha}}(s) = \vec{\alpha}(s) - \frac{\langle D_T X, T \rangle}{\|D_T X\|^2} X(s) \tag{3.4}$$

elde edilir. Eğer $\|D_T X\| = 0$ ise regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu hal regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder. Regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için (3.3) formülünde

$$\overline{u} = 0 \quad \text{veya} \quad \langle D_T X, T \rangle = 0$$

alınması yeterlidir.

α bir t parametreli singüler olmayan eğri olsun. Frenet hareketinde, regle yüzeyin striksiyon eğrisini bulmak için, (3.4) den

$$\vec{\bar{\alpha}} = \vec{\alpha} - \frac{\langle X', T \rangle}{\|X'\|^2} X \tag{3.5}$$

elde edilir. Burada

$$\vec{\omega} = \tau T + \kappa B \quad , \quad \|\vec{\omega}\| = \sqrt{\kappa^2+\tau^2}$$

$$\vec{X} = \frac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{\omega} = \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right) T + \left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right) B$$

$$X' = \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\cdot} T + \left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\cdot} B$$

$$\left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{\tau}\sqrt{\kappa^2+\tau^2} - \tau\frac{\kappa\dot{\kappa} + \tau\dot{\tau}}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}}{\kappa^2+\tau^2} = \frac{\kappa^2\dot{\tau} - \kappa\dot{\kappa}\tau}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}} = \frac{-\kappa\tau^2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot}}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}$$

$$\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{\kappa}\sqrt{\kappa^2+\tau^2} - \kappa\frac{\kappa\dot{\kappa} + \tau\dot{\tau}}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}}{\kappa^2+\tau^2} = \frac{\tau^2\dot{\kappa} - \kappa\dot{\kappa}\tau}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}} = \frac{\tau^3\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot}}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}$$

$$\langle X', T \rangle = \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\cdot} = \frac{-\kappa\tau^2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot}}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}$$

$$\|X'\|^2 = \left[\left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\cdot}\right]^2 + \left[\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\cdot}\right]^2 = \left[\frac{\tau^2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot}}{\kappa^2+\tau^2}\right]^2$$

$$\frac{\langle X', T \rangle}{\|X'\|^2} = -\frac{\kappa\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}{\tau^2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot}}$$

$$\vec{\bar{\alpha}} = \vec{\alpha} - \frac{\langle X', T \rangle}{\|X'\|^2} X$$

$$= \vec{\alpha} + \frac{\kappa\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}{\tau^2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot}}\frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{\omega} = \vec{\alpha} + \frac{\frac{\kappa}{\tau}}{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot}}\left(T + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right) B\right)$$

O halde, eğer $q = \frac{\kappa}{\tau} = sabit$ ($\vec{\alpha}$ eğrisi bir genel helis) ise doğruların çizdiği regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir, diğer hallerde $\vec{\alpha} = (a, b, c) = aT + bN + cB$, $q = \frac{\kappa}{\tau}$ olarak alınırsa,

$$x = a + \frac{q}{\dot{q}} \quad , \quad y = b \quad , \quad z = c + \frac{q^2}{\dot{q}}$$

olmak üzere, striksiyon eğrisi $\overrightarrow{\overline{\alpha}} = (x, y, z)$ şeklindedir.

Sonuç: Bir Frenet hareketinde X birim Darboux vektörlerinin çizdiği regle yüzeyde striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olamaz.

3.3 Frenet Hareketinin 1. ve 2. İvme Pol Merkezleri

3.3.1 Frenet hareketinin 1. ivme pol merkezi

$Y = AX + C$ Frenet hareketinde

$$\ddot{A}X + \ddot{C} = 0$$

denkleminin çözümü bize 1. mertebeden ivme pol merkezlerini verir.

Teorem 3.3.1.1

Frenet hareketinin $\forall t$ anında bir tek 1. ivme pol merkezi olması için gerek ve yeter şart $\alpha(t)$ eğrisinin düzlemsel ve genel helis olmamasıdır.

İspat: $Y = AX + C$ Frenet hareketinin 1. ivme pol merkezini bulmak için, Frenet-Serret formüllerinden t ye göre türev alınırsa, türevin ifadesi

$$\begin{cases} \ddot{T} = -\kappa^2 T + \dot{\kappa} N + \kappa\tau B \\ \ddot{N} = -\dot{\kappa} T - (\kappa^2 + \tau^2) N + \dot{\tau} B \\ \ddot{B} = \kappa\tau T - \dot{\tau} N - \tau^2 B \end{cases} \tag{3.6}$$

bulunur. Bu formülleri

$$\begin{bmatrix} \ddot{T} \\ \ddot{N} \\ \ddot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\kappa^2 & \dot{\kappa} & \kappa\tau \\ -\dot{\kappa} & -(\kappa^2+\tau^2) & \dot{\tau} \\ \kappa\tau & -\dot{\tau} & -\tau^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklinde de yazabiliriz.

$$A = [T\ N\ B]$$

matrisi, birim pozitif ortogonal olmak üzere, $det\, A = +1$ ve $A^T = A^{-1}$ dir, o yüzden,

$$\det \ddot{A} = det(\ddot{T}, \ddot{N}, \ddot{B}) = \begin{vmatrix} -\kappa^2 & \dot{\kappa} & \kappa\tau \\ -\dot{\kappa} & -(\kappa^2+\tau^2) & \dot{\tau} \\ \kappa\tau & -\dot{\tau} & -\tau^2 \end{vmatrix} = -\left[\tau^2 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot}\right]^2 \quad (3.7)$$

dir. Eğer $\alpha(t)$ eğrisi düzlemsel ve genel helis değil ise,

$\tau \neq 0 \quad ve \quad \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot} \neq 0$ ise $\det \ddot{A} \neq 0$ olup

$$X = -(\ddot{A})^{-1}\ddot{C},$$

noktası $\ddot{A}X + \ddot{C} = 0$ denkleminin bir tek çözümü dür ve Frenet hareketinin $\forall t$ anında 1. ivme pol merkezi mevcuttur.

Teorem 3.3.1.2

Eğer $A \in SO(n)$ ve $rank\dot{A} = n - 1$ ise,

i) I.S.A nın yönü sabittir $\Leftrightarrow rank\ddot{A} = n - 1$

ii) I.S.A nın yönü sabit değildir $\Leftrightarrow rank\ddot{A} = n$

dir (Hacısalihoğlu 1974).

Eğer $\alpha(t)$ eğrisi düzlemsel ve genel helis değil ise, teorem (3.3.1.2) ü Frenet 3-ayaklısı hareketimize uygulayalım.

$A \in SO(3)$, için $det\dot{A} = 0$ olduğundan $rank\dot{A} < 3$ dir. Ayrıca $\begin{vmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \tau \end{vmatrix} = \kappa\tau \neq 0$ den dolayı $rank\dot{A} = 2$ olur. Ayrıca $rank\ddot{A} = 3$ olduğunu (3.7) ve $\det \ddot{A} \neq 0$ den biliyoruz. Böylece 3.3.1.2 teoreminin ii. kısmından, I.S.A nın yönü sabit değildir, yani ani vida eksenleri paralel değilddirler ve geometrik olarak, Darboux vektörlerinin cümlesi (Konoid) bir silindir değildir. Bu durumda $Y = AX + C$ Frenet hareketi için aşağıdaki teorem gerçeklenir.

Teorem 3.3.1.3

$\alpha(t)$ eğrisi düzlemsel veya genel helis olmasın. Bu durumda

$\dot{A}\left(\ddot{A}^{-1}\ddot{C}\right) + \dot{C} = 0 \Leftrightarrow$ 1. ivme pol eğrileri birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

İspat: $\alpha(t)$ eğrisi düzlemsel veya genel helis olmadığından $\det \ddot{A} \neq 0$ dır, o yüzden $\left(\ddot{A}\right)^{-1}$ mevcuttur. (Hacısalihoğlu 1974) den teorem gerçeklenir.

Eğer $\alpha(t)$ eğrisi düzlemsel $(\tau = 0)$ ya da genel helis $\left(\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot} = 0\right)$ ise, $\det \ddot{A} = 0$ olur ve $rank \ddot{A} = 2$ olduğu $\begin{vmatrix} -\kappa^2 & \dot{\kappa} \\ -\dot{\kappa} & -(\kappa^2 + \tau^2) \end{vmatrix} = \kappa^4 + \kappa^2\tau^2 + \dot{\kappa}^2 \neq 0$ den söylenebilir. Böylece 3.3.1.2 teoreminin i. kısmından, I.S.A nın yönü sabittir, yani ani vida eksenleri paraleldir ve geometrik olarak Konoid, bir silindirdir.

Örnek 3.3.1.1

M eğrisi, $\alpha : R \rightarrow E^3$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (t, \cosh t, \sinh t)$$

olmak üzere, (R, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Buna göre

$\dot{\alpha}(t) = (1, \sinh t, \cosh t)$

$\ddot{\alpha}(t) = (0, \cosh t, \sinh t)$

$\dddot{\alpha}(t) = (0, \sinh t, \cosh t)$

$\langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle = 1 + \cosh 2t = 2cos^2ht \neq 1$

$\|\dot{\alpha}\| = \sqrt{1 + \cosh 2t} = \sqrt{2} \cosh t$

$$\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & sinh\,t & cosh\,t \\ 0 & cosh\,t & sinh\,t \end{vmatrix}$$

$$= (-1, -sinh\,t, cosh\,t)$$

$$\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\| = \sqrt{2}\,cosh\,t$$

$$det(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}) = \begin{vmatrix} 1 & sinh\,t & cosh\,t \\ 0 & cosh\,t & sinh\,t \\ 0 & sinh\,t & cosh\,t \end{vmatrix} = 1$$

$$T = \frac{\dot{\alpha}}{\|\dot{\alpha}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\,cosh\,t}, \frac{sinh\,t}{\sqrt{2}\,cosh\,t}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$B = \frac{\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}}{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}\,cosh\,t}, \frac{-\,sinh\,t}{\sqrt{2}\,cosh\,t}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$N = B \wedge T = \left(\frac{-\,sinh\,t}{cosh\,t}, \frac{1}{cosh\,t}, 0\right)$$

$$\kappa = \frac{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|}{\|\dot{\alpha}\|^3} = \frac{1}{2cos^2ht}$$

$$\tau = \frac{det(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha})}{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|^2} = \frac{1}{2cos^2ht}$$

$$\frac{\tau}{\kappa} = 1 = sabit \implies \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\cdot} = 0$$

$$A = [T \quad N \quad B]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}\,cosh\,t} & \frac{-\,sinh\,t}{cosh\,t} & \frac{-1}{\sqrt{2}\,cosh\,t} \\ \frac{sinh\,t}{\sqrt{2}\,cosh\,t} & \frac{1}{cosh\,t} & \frac{-sinh\,t}{\sqrt{2}\,cosh\,t} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$det\,A = 1$$

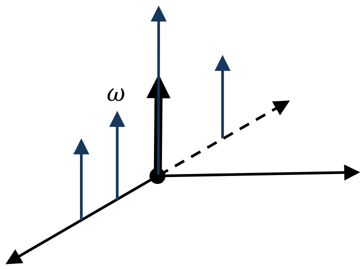
$$det\,\dot{A} = det(\dot{T}, \dot{N}, \dot{B}) = 0$$

$det\,\ddot{A} = det(\ddot{T}, \ddot{N}, \ddot{B}) = 0$

$\vec{\omega} = (\tau, 0, \kappa) = \tau T + \kappa B$

$= \sqrt{2}\kappa(0,0,1)$

$rank\,\dot{A} = rank\,\ddot{A} = 2$ olduğundan I.S.A nın yönü sabittir ve ani vida eksenleri paraleldir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Ani vida eksenleri

3.3.2 Frenet hareketinin 2. ivme pol merkezi

$Y = AX + C$ Frenet hareketinde 2. ivme pol merkezleri

$$\dddot{A}X + \dddot{C} = 0$$

denkleminin çözümünden elde edilen noktalardır.

Teorem 3.3.2.1

Frenet hareketinin $\forall t$ anında bir tek 2. ivme pol merkezi olması için gerek şart $\alpha(t)$ eğrisinin düzlemsel ve genel helis olmamasıdır.

İspat: $Y = AX + C$ Frenet hareketinin 2. ivme pol merkezini bulmak için, (3.6) formüllerinden t ye göre tekrar türev alınırsa,

$$\begin{cases} \dddot{T} = (-3\kappa\dot{\kappa})T - (\kappa^3 + \kappa\tau^2 - \ddot{\kappa})N + (\kappa\dot{\tau} + \dot{\kappa}\tau)B \\ \dddot{N} = (\kappa^3 + \kappa\tau^2 - \ddot{\kappa})T - 3(\kappa\dot{\kappa} + \tau\dot{\tau}\,)N - (\tau^3 + \kappa^2\tau - \ddot{\tau})B \\ \dddot{B} = (2\kappa\dot{\tau} + \dot{\kappa}\tau)T + (\tau^3 + \kappa^2\tau - \ddot{\tau})N - (3\tau\dot{\tau})B \end{cases}$$

bulunur. Bu formülleri, matris ile

$$\begin{bmatrix} \dddot{T} \\ \dddot{N} \\ \dddot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3\kappa\dot{\kappa}\,) & -(\kappa^3 + \kappa\tau^2 - \ddot{\kappa}) & (\kappa\dot{\tau} + 2\dot{\kappa}\tau) \\ (\kappa^3 + \kappa\tau^2 - \ddot{\kappa}) & -3(\kappa\dot{\kappa} + \tau\dot{\tau}\,) & -(\tau^3 + \kappa^2\tau - \ddot{\tau}) \\ (2\kappa\dot{\tau} + \dot{\kappa}\tau) & (\tau^3 + \kappa^2\tau - \ddot{\tau}) & -(3\tau\dot{\tau}\,) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklinde de yazabiliriz.

A matrisi, birim pozitif ortogonal olmak üzere, $det\, A = +1$ ve $A^T = A^{-1}$ dir.

$det\, \dddot{A} = det\big(\dddot{T}, \dddot{N}, \dddot{B}\big)$

$$= 3\tau^2 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot} [(\kappa^2 + \tau^2)(\kappa\ddot{\tau} - \ddot{\kappa}\tau) + 2(\kappa\dot{\kappa} + \tau\dot{\tau}\,)(\dot{\kappa}\tau - \kappa\dot{\tau})] - 3\left[\tau^2 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot}\right]^{\cdot} (\ddot{\kappa}\dot{\tau} - \dot{\kappa}\ddot{\tau}).$$

Eğer $\alpha(t)$ eğrisi düzlemsel ve genel helis değil ise, yani $\tau \neq 0$ ve $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot} \neq 0$, ise $det\, \dddot{A} \neq 0$ olup $\dddot{A}X + \dddot{C} = 0$ denkleminin bir tek çözümü

$$X = -\big(\dddot{A}\big)^{-1}\dddot{C}$$

dir ve bu çözümü Frenet hareketinin $\forall t$ anında 2. ivme pol merkezi olur.

Eğer eğri düzlemsel ise, $\tau = 0$ dır ve eğer eğri helis ise,

$$\frac{\kappa}{\tau} = sabit \;\Rightarrow \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot} = 0$$

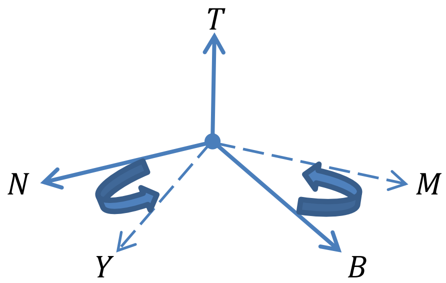
dir. Buradan $det\, \dddot{A} = 0$ olduğundan Frenet hareketinin $\forall t$ anında 2. ivme pol merkezi mevcut değildir.

Sonuç: Frenet hareketinde $\alpha(t)$ eğrisinin düzlemsel olmaması veya genel helis olmaması halinde 1. ve 2. ivme pol merkezleri vardır.

3.4 E^3, Öklid Uzayında Darboux Hareketinin Pol Noktas ve İvme Merkezleri

3-boyutlu Öklid uzayında, S bir yüzey ve S üzerinde bir eğri α olsun. Bu durumda $\{T, Y, M\}$ çatısına eğrinin *Darboux çatısı* denir. Burada M, yüzeyin birim normal vektör alanıdır. $M = T \wedge Y$ dir.

Bu çalışmasında, Darboux hareketinin pol ve yüksek mertebeden Pol ivme merkezleri incelenmiştir.



Şekil 3.2 Darboux çatısı

3.4.1 Darboux hareketinin pol noktası

Darboux çatısı ile Frenet çatısı arasında ilişki

$$\begin{bmatrix} T \\ Y \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

ya da

$$\begin{cases} T = T \\ Y = \cos\theta N - \sin\theta B \\ M = \sin\theta N + \cos\theta B \end{cases} \tag{3.9}$$

olur.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

olduğundan dolayı, dönme matrisinin tersini kullanarak

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & sin\,\theta \\ 0 & -sin\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ M \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

bulunur.

$$A = [T\ N\ B]$$

matrisi, bir pozitif ortogonal matris olmak üzere, $det\, A = +1$ ve $A^T = A^{-1}$ dir.

$$\det(T, Y, M) = \det(T, N, B) = 1$$

Darboux hareketinin pol noktasını bulmak için (3.9) formüllrinden t ye göre türev alınırsa,

$$\begin{cases} \dot{T} = \kappa N \\ \dot{Y} = -\kappa \cos\theta T + (\tau - \dot{\theta}) \sin\theta N + (\tau - \dot{\theta})\, cos\,\theta B \\ \dot{M} = -\kappa \sin\theta T - (\tau - \dot{\theta}) \cos\theta N + (\tau - \dot{\theta}) \sin\theta B \end{cases} \tag{3.11}$$

bulunur. Bu formülleri

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{Y} \\ \dot{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa\, cos\,\theta & (\tau - \dot{\theta})\, sin\,\theta & (\tau - \dot{\theta})\, cos\,\theta \\ -\kappa\, sin\,\theta & -(\tau - \dot{\theta})\, cos\,\theta & (\tau - \dot{\theta})\, sin\,\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklinde de yazabiliriz. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{Y} \\ \dot{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa \cos\theta & \kappa \sin\theta \\ -\kappa\, cos\,\theta & 0 & (\tau - \dot{\theta}) \\ -\kappa\, sin\,\theta & -(\tau - \dot{\theta}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ M \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

bulunur (Hanson 1995, Ekmekci 2000).

$$\begin{cases} \kappa_g = \kappa\, cos\,\theta \\ \kappa_n = \kappa\, sin\,\theta \\ t_r = \tau - \dot{\theta} \end{cases} \tag{3.13}$$

alınırsa, (3.12) matrisini şöyle yazabiliriz:

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{Y} \\ \dot{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & t_r \\ -\kappa_n & -t_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ M \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

veya

$$\begin{cases} \dot{T} = \kappa_g Y + \kappa_n M \\ \dot{Y} = -\kappa_g T + t_r M \\ \dot{M} = -\kappa_n T - t_r Y \end{cases} \tag{3.15}$$

$det(T, Y, M) = 1$ olmak üzere, $det(\dot{T}, \dot{Y}, \dot{M}) = 0$ dir, o yüzden Darboux hareketinin hiç bir zaman pol noktası yoktur.

(3.13) bağıntılardan ğösterilir ki

$$\kappa = \sqrt{\kappa_g{}^2 + \kappa_n{}^2} \quad , \quad \theta = arc\ \tan\left(\frac{\kappa_n}{\kappa_g}\right) \tag{3.16}$$

dır.

3.4.2 Darboux hareketinin 1. ivme pol merkzi

Darboux hareketinin 1. ivme pol merkezini bulmak için, (3.15)formüllerinden t ye göre türev alınırsa,

$$\begin{cases} \ddot{T} = -(\kappa_g{}^2 + \kappa_n{}^2)T - (\kappa_n t_r - \dot{\kappa_g})Y + (\kappa_g t_r + \dot{\kappa_n})M \\ \ddot{Y} = -(\kappa_n t_r + \dot{\kappa_g})T - (\kappa_g{}^2 + t_r{}^2)Y - (\kappa_g \kappa_n - \dot{t_r})M \\ \ddot{M} = (\kappa_g t_r - \dot{\kappa_n})T - (\kappa_g \kappa_n + \dot{t_r})Y - (\kappa_n{}^2 + t_r{}^2)M \end{cases} \tag{3.17}$$

bulunur. Bu formülleri

$$\begin{bmatrix} \ddot{T} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\kappa_g{}^2 + \kappa_n{}^2) & -(\kappa_n t_r - \dot{\kappa_g}) & (\kappa_g t_r + \dot{\kappa_n}) \\ -(\kappa_n t_r + \dot{\kappa_g}) & -(\kappa_g{}^2 + t_r{}^2) & -(\kappa_g \kappa_n - \dot{t_r}) \\ (\kappa_g t_r - \dot{\kappa_n}) & -(\kappa_g \kappa_n + \dot{t_r}) & -(\kappa_n{}^2 + t_r{}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ M \end{bmatrix}$$

şeklinde de yazabiliriz.

$det(T, Y, M) = 1$ olmak üzere,

$$det(\ddot{T}, \ddot{Y}, \ddot{M}) = -\left\{(\kappa_g \dot{t_r} - \dot{\kappa_g} t_r)^2 + (\kappa_g \dot{\kappa_n} - \dot{\kappa_g} \kappa_n)^2 + (\kappa_n \dot{t_r} - \dot{\kappa_n} t_r)^2\right\}$$

dir.

1. hal : α geodezik eğri olsun.

Bu durumda, $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ dir.

$$\kappa_g = 0 \ \ , \ \kappa_n = \pm\kappa \ , \ t_r = \tau$$

$$det(\ddot{T}, \ddot{Y}, \ddot{M}) = -(\kappa_n \dot{t_r} - \dot{\kappa_n} t_r)^2 = \tau^4 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot 2}$$

bulunur. Eğer geodezik eğri düzlemsel ve genel helis değil ise,

$\tau \neq 0 \ \ ve \ \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot} \neq 0$, olduğundan $\det \ddot{A} \neq 0$ olup ve hareketin 1. ivme pol merkezi

$$X = -(\ddot{A})^{-1} \ddot{C}$$

şeklinde bulunur.

2. hal : α asimptotik eğri olsun.

Bu durumda, $\theta = 0, \pi, 2\pi$ dir. Buradan

$$\kappa_g = \pm\kappa \ , \ \kappa_n = 0 \ , \ t_r = \tau$$

$$det(\ddot{T}, \ddot{Y}, \ddot{M}) = -\left(\kappa_g \dot{\kappa_n} - \dot{\kappa_g} \kappa_n\right)^2 = \tau^4 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot 2}$$

bulunur. Bu durumda da eğer asimptotik eğri, düzlemsel ve genel helis değil ise,

$\tau \neq 0$ ve $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot} \neq 0$, olacağından $\det \ddot{A} \neq 0$ olur ve hareketin 1. ivme pol merkezi

$$X = -(\ddot{A})^{-1} \ddot{C}$$

dur.

3. hal : α eğrilik çizgisi olsun.

Bu durumda,

$$t_r = 0 \Longrightarrow \tau = \dot{\theta}$$

dir. (3.15) formüllerini kullanarak,

$$\tan\theta = \frac{\kappa_n}{\kappa_g} \Longrightarrow \dot{\theta}\left(1 + \left(\frac{\kappa_n}{\kappa_g}\right)^2\right) = \left(\frac{\kappa_n}{\kappa_g}\right)^{\cdot}$$

$$\Longrightarrow \tau = \frac{\left(\frac{\kappa_n}{\kappa_g}\right)^{\cdot}}{\left(1 + \left(\frac{\kappa_n}{\kappa_g}\right)^2\right)}$$

$$\Longrightarrow \tau = \frac{\left(\frac{\kappa_n}{\kappa_g}\right)^{\cdot}}{\frac{\kappa^2}{{\kappa_g}^2}} = \frac{{\kappa_g}^2}{\kappa^2}\left(\frac{\kappa_n}{\kappa_g}\right)^{\cdot}$$

$$\Longrightarrow {\kappa_g}^2\left(\frac{\kappa_n}{\kappa_g}\right)^{\cdot} = \kappa^2\tau$$

bulunur.

$$det\left(\ddot{T}, \ddot{Y}, \ddot{M}\right) = -\left(\kappa_g\dot{\kappa_n} - \dot{\kappa_g}\kappa_n\right)^2$$

$$= -\left[{\kappa_g}^2\left(\frac{\kappa_n}{\kappa_g}\right)^{\cdot}\right]^2$$

$$= -\kappa^4\tau^2$$

Sonuç: S yüzeyi üzerinde α eğrilik çizgisi düzlemsel değildir ⇔ Darboux hareketinin 1. ivme pol merkezleri vardır.

3.4.3 Darboux hareketinin 2. ivme pol merkzi

Darboux hareketinin 2. ivme pol merkezini bulmak için, 1. , 2. ve 3. hallerini ele alalım.

1. hal

$$\begin{cases} \dddot{T} = (-3\kappa\dot{\kappa})T - (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})Y - (\kappa^3 + \kappa\tau^2 - \ddot{\kappa})M \\ \dddot{Y} = -(2\kappa\dot{\tau} + \dot{\kappa}\tau)T - (3\tau\dot{\tau})Y - (\tau^3 + \kappa^2\tau - \ddot{\tau})M \\ \dddot{M} = (\kappa^3 + \kappa\tau^2 - \ddot{\kappa})T + (\tau^3 + \kappa^2\tau - \ddot{\tau})Y - 3(\kappa\dot{\kappa} + \tau\dot{\tau})M \end{cases}$$

dır ve

$$det\left(\dddot{T}, \dddot{Y}, \dddot{M}\right) = 3(\kappa\ddot{\tau} - \ddot{\kappa}\tau)[\ddot{\kappa}\dot{\tau} - (\kappa\dot{\tau} - \dot{\kappa}\tau)(\kappa^2 + \tau^2)] + 6(\kappa\dot{\tau} - \dot{\kappa}\tau)^2(\kappa\dot{\kappa} + \tau\dot{\tau}) + 3\dot{\kappa}\ddot{\kappa}\tau\ddot{\tau}$$

bulunur.

Sonuç: Darboux hareketinin $\forall t$ anında bir tek 2. ivme pol merkezi olması için yeter şart geodezik eğrinin düzlemsel olmamasıdır.

2. hal

$\theta = \pi$ durumunda,

$$\begin{cases} \ddot{T} = (-3\kappa\dot{\kappa})T + (\kappa^3 + \kappa\tau^2 - \ddot{\kappa})Y - (\kappa\dot{\tau} + 2\dot{\kappa}\tau)M \\ \ddot{Y} = -(\kappa^3 + \kappa\tau^2 - \ddot{\kappa})T - 3(\kappa\dot{\kappa} + \tau\dot{\tau})Y - (\tau^3 + \kappa^2\tau - \ddot{\tau})M \\ \ddot{M} = -(2\kappa\dot{\tau} + \dot{\kappa}\tau)T + (\tau^3 + \kappa^2\tau - \ddot{\tau})Y - (3\tau\dot{\tau})M \end{cases}$$

dır ve

$$det(\ddot{T}, \ddot{Y}, \ddot{M}) = 6\,(\kappa\dot{\tau} - \dot{\kappa}\tau)^2(\kappa\dot{\kappa} + \tau\dot{\tau}) - 3(\kappa\dot{\tau} - \dot{\kappa}\tau)(\kappa^2 + \tau^2)(\kappa\ddot{\tau} - \ddot{\kappa}\tau)$$
$$+3(\kappa\ddot{\tau} - \ddot{\kappa}\tau)(\ddot{\kappa}\dot{\tau} - \dot{\kappa}\ddot{\tau})$$

dir. Eğer asimptotik eğri bir genel helis ise, $det(\ddot{T}, \ddot{Y}, \ddot{M}) = 0$ olur, bu durumda Darboux hareketinin 2. ivme pol merkezi yoktur.

Sonuç: Yüzey üzerinde asimptotik eğri helis ise 2. ivme pol merkezi yoktur.

3. hal

$$\begin{cases} \ddot{T} = -3(\kappa_g\dot{\kappa_g} + \kappa_n\dot{\kappa_n})T - ({\kappa_g}^3 + \kappa_g{\kappa_n}^2 - \ddot{\kappa_g})Y - ({\kappa_n}^3 + \kappa_n{\kappa_g}^2 - \ddot{\kappa_n})M \\ \ddot{Y} = ({\kappa_g}^3 + \kappa_g{\kappa_n}^2 - \ddot{\kappa_g})T - 3\kappa_g\dot{\kappa_g}Y - (\kappa_g\dot{\kappa_n} + 2\kappa_n\dot{\kappa_g})M \\ \ddot{M} = ({\kappa_n}^3 + \kappa_n{\kappa_g}^2 - \ddot{\kappa_n})T - (\kappa_n\dot{\kappa_g} + 2\kappa_g\dot{\kappa_n})Y - 3\kappa_n\dot{\kappa_n}M \end{cases}$$

dir. 3.4.8 formüllerini kullanark,

$$det(\ddot{T}, \ddot{Y}, \ddot{M}) = -3\kappa^6\tau\dot{\tau} - 3\kappa(\kappa\dot{\tau} + 2\dot{\kappa}\tau)(\dot{\kappa_g}\ddot{\kappa_n} - \ddot{\kappa_g}\dot{\kappa_n})$$

olur. Eğer eğrilik çizgisi düzlemsel $(\tau = 0)$ ise, Darboux hareketinin $\forall t$ anında 2. ivme pol merkezi yoktur.

Sonuç: yüzey üzerinde alınan eğri eğrilik çizgisi ve düzlemsel ise Darboux hareketinin 2. ivme pol merkezi yoktur.

4. E^3, ÖKLİD UZAYINDA BİSHOP HAREKETİ

Tanım 4.1 (Bishop Hareketi)

α, t parametreli ve her $\alpha(t)$ noktasında regüler olan bir eğri olsun. T, N_1, N_2 eğrinin her noktasındaki Bishop çatısının birim vektörleri olmak üzere

$$A = [T\ N_1\ N_2] = \begin{bmatrix} t_1 & n_{11} & n_{21} \\ t_2 & n_{12} & n_{22} \\ t_3 & n_{13} & n_{23} \end{bmatrix}$$

birim pozitif ortogonal matrisidir, $det\, A = +1$ ve $A^T = A^{-1}$.

$\alpha(t)$ eğrisinin Bishop çatısının, eğri boyunca hareket ettirilmesiyle elde edilen

$$Y = AX + C$$

hareketi *Bishop hareketi* olarak adlandırılır. Uzayda X noktasının bu hareket altında yörüngesi, seçilen eğrinin cinsine göre değişir. Burada, AX kısmına hareketin *dönme kısmı* ve C ye de *öteleme kısmı* denir. T, N_1, N_2 vektörleri şu özeliklere sahiptir:

$$\langle T, T\rangle = \langle N_1, N_1\rangle = \langle N_2, N_2\rangle = 1$$

$$\langle T, N_1\rangle = \langle N_2, T\rangle = \langle N_1, N_2\rangle = 0$$

$$T \wedge N_1 = N_2 \quad , \quad N_1 \wedge N_2 = T \quad , \quad N_2 \wedge T = N_1.$$

Eğer M eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş ise $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere, Frenet ve Bishop hareketlerinin arasındaki bağıntılardan,

$$\kappa(s) = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} \;\; , \;\; \theta(s) = arc\tan\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right) \;\; , \;\; \tau(s) = -\frac{d\theta(s)}{ds} \tag{4.1}$$

bulunur (Bishop 1975).

Burada, κ_1, κ_2 Bishop hareketinde eğrinin 1. ve 2. eğriliği dir. (4.1) formüllerini kullanarak,

$$\kappa(s) = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} \Rightarrow \kappa^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2$$

$$\theta(s) = arc\tan\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right) \Rightarrow \frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \tan\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\kappa_2}\kappa_1 - \kappa_2\dot{\kappa_1}}{\kappa_1^2} = (1 + \tan^2\theta)\frac{d\theta}{ds}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{\dot{\kappa_2}\kappa_1 - \kappa_2\dot{\kappa_1}}{\kappa_1^2(1 + \tan^2\theta)}$$

$$\Rightarrow -\tau = \frac{\dot{\kappa_2}\kappa_1 - \kappa_2\dot{\kappa_1}}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^{\cdot}}{\left(\frac{\kappa}{\kappa_2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^{\cdot} \kappa_2^2 = \kappa^2\tau \qquad (4.2)$$

bulunur.

4.1 Bishop Hareketinin Pol Noktası

T, N_1, N_2 eğrinin her noktasındaki Bishop çatısının birim vektörleri ve κ_1, κ_2 Bishop hareketinde eğrinin 1. ve 2. eğriliği olmak üzere, Bishop formülleri şöyle yazılabilir.

$$\dot{T} = \kappa_1 N_1 + \kappa_2 N_2 \ , \qquad \dot{N_1} = -\kappa_1 T \ , \qquad \dot{N_2} = -\kappa_2 T$$

Bishop formüllerini,

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N_1} \\ \dot{N_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ -\kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde de yazabiliriz.

A matrisi, bir pozitif ortogonal matris olmak üzere, $det\,A = +1$ ve $A^T = A^{-1}$ dir.
Buradan

$$det\,\dot{A} = det(\dot{T}, \dot{N}_1, \dot{N}_2) = \begin{vmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ -\kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

olur. Böylece $\dot{A}X + \dot{C} = 0$ denkleminin tek çözümü yoktur, yani Bishop hareketinin her t anında pol noktası yoktur.

Tanım 2.3.5 ifadesinden, Darboux martisini hesaplayalım. Hareketin Darboux matrisi

$$\Omega = \dot{A}A^T = \begin{bmatrix} 0 & -(b_3\kappa_1 - n_3\kappa_2) & b_2\kappa_1 - n_2\kappa_2 \\ b_3\kappa_1 - n_3\kappa_2 & 0 & -(b_1\kappa_1 - n_1\kappa_2) \\ -(b_2\kappa_1 - n_2\kappa_2) & b_1\kappa_1 - n_1\kappa_2 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Ω matrisi antisimetriktir.

$$x = b_1\kappa_1 - n_1\kappa_2 \quad , \quad y = b_2\kappa_1 - n_2\kappa_2 \quad , \quad z = b_3\kappa_1 - n_3\kappa_2$$

olmak üzere, Darboux matrisi

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

$\vec{\Omega} = (x, y, z)$ olduğundan, $\Omega\vec{\Omega} = \vec{0}$ olur. $\vec{\Omega}$ sabit uzaydaki Darboux vektörüdür. Hareketli uzaydaki $\vec{\omega}$ Darboux vektörünü,

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega}A^T$$

eşitliğinden elde edebiliriz. Böylece

$$\vec{\omega} = (0, -\kappa_2, \kappa_1) = -\kappa_2 N_1 + \kappa_1 N_2$$

vektörü (N_1, N_2) düzleminde bir vektördür ve eğrinin teğet vektörüne diktir.

Bir birim hızlı α eğrisinin eğrilikleri κ_1 ve κ_2 olduğuna göre α üzerinde

$$\vec{\omega} = -\kappa_2 N_1 + \kappa_1 N_2$$

ile tanımlanan $\vec{\omega}$ vektör alanı için aşağıdaki özelikler vardır:

$$\langle \omega, T \rangle = 0 \quad , \quad \langle \omega, N_1 \rangle = -\kappa_2 \quad , \quad \langle \omega, N_2 \rangle = \kappa_1$$

$$\omega \wedge T = \dot{T} \quad , \quad \omega \wedge N_1 = \dot{N}_1 \quad , \quad \omega \wedge N_2 = \dot{N}_2.$$

4.2 Bishop Hareketinde Açılabilir Regle Yüzeyler

Teorem 4.2.1

Bishop hareketinde doğrultmanları ω olan regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $\alpha(t)$ eğrisinin düzlemsel olmasıdır.

İspat: Bishop hareketinde, hareketli uzayda $\vec{\omega}$ Darboux vektörünün birim vektörünü ele alalım, buradan

$$\vec{\omega} = -\kappa_2 N_1 + \kappa_1 N_2 \quad , \quad \|\vec{\omega}\| = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} = \kappa$$

$$\vec{X} = \frac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|} = \left(\frac{-\kappa_2}{\kappa}\right) N_1 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa}\right) N_2$$

$$X' = \left(\frac{-\kappa_2}{\kappa}\right)^{\cdot} N_1 + \left(\frac{-\kappa_2}{\kappa}\right) \dot{N}_1 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa}\right)^{\cdot} N_2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa}\right) \dot{N}_2$$

$$= \left(\frac{-\kappa_2}{\kappa}\right)^{\cdot} N_1 + \left(\frac{-\kappa_2}{\kappa}\right)(-\kappa_1 T) + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa}\right)^{\cdot} N_2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa}\right)(-\kappa_2 T)$$

$$= \left(\frac{-\kappa_2}{\kappa}\right)^{\cdot} N_1 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa}\right)^{\cdot} N_2$$

$$det\left(\frac{d\vec{\alpha}}{ds}, X, X'\right) = det(T, X, X')$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\kappa_2}{\kappa} & \frac{\kappa_1}{\kappa} \\ 0 & \left(\frac{-\kappa_2}{\kappa}\right)^{\cdot} & \left(\frac{\kappa_1}{\kappa}\right)^{\cdot} \end{vmatrix}$$

$$= -\tau$$

elde edilir. Böylece regle yüzeyin drali

$$P_X = \frac{k}{d\psi} = \frac{det\left(\frac{d\vec{\alpha}}{ds}, X, X'\right)}{\|X'\|^2} = \frac{-\kappa^2 \tau}{\dot{\kappa}_1{}^2 + \dot{\kappa}_2{}^2 - \dot{\kappa}^2}$$

olduğundan dolayı, Bishop hareketinde regle yüzey düzlemsel $(\tau = 0)$ ise açılabilirdir.

$\langle X', T\rangle = 0$ olduğundan dolayı, (3.5) formülünü kullanarak, $\vec{\bar{\alpha}} = \vec{\alpha}$ olur, yani striksiyon eğrisi dayanak eğrisi ile çakışır. Aşağıdaki sonuçu verebiliriz.

Sonuç: Bishop hareketinde Darboux vektörünün çizdiği regle yüzeyde striksiyon çizgisi dayanak eğrisi ile çakışır.

4.3 Bishop Hareketinin 1. ve 2. İvme Pol Merkezleri

4.3.1 Bishop hareketinin 1. ivme pol merkezi

Teorem 4.3.1.1

Bishop hareketinin $\forall t$ anında bir tek 1. ivme pol merkezi olması için gerek ve yeter şart $\alpha(t)$ eğrisinin düzlemsel olmamasıdır.

İspat: $Y = AX + C$ Bishop hareketinin 1. ivme pol merkezini bulmak için, Bishop formüllerinden t ye göre türev alınırsa,

$$\begin{cases} \ddot{T} = -({\kappa_1}^2 + {\kappa_2}^2)T + \dot{\kappa_1}N_1 + \dot{\kappa_2}N_2 \\ \ddot{N}_1 = -\dot{\kappa_1}T - {\kappa_1}^2 N_1 - \kappa_1\kappa_2 N_2 \\ \ddot{N}_2 = -\dot{\kappa_2}T - \kappa_1\kappa_2 N_1 - {\kappa_2}^2 N_2 \end{cases} \tag{4.3}$$

bulunur. Bu formülleri

$$\begin{bmatrix} \ddot{T} \\ \ddot{N}_1 \\ \ddot{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -({\kappa_1}^2 + {\kappa_2}^2) & \dot{\kappa_1} & \dot{\kappa_2} \\ -\dot{\kappa_1} & -{\kappa_1}^2 & -\kappa_1\kappa_2 \\ -\dot{\kappa_2} & -\kappa_1\kappa_2 & -{\kappa_2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

biçiminde de yazabiliriz.

$$A = [T\ N_1\ N_2]$$

matrisi, bir pozitif ortogonal olmak üzere, $det\, A = +1$ ve $A^T = A^{-1}$ dir, o yüzden,

$$\det \ddot{A} = det(\ddot{T}, \ddot{N}_1, \ddot{N}_2) = \begin{vmatrix} -({\kappa_1}^2 + {\kappa_2}^2) & \dot{\kappa_1} & \dot{\kappa_2} \\ -\dot{\kappa_1} & -{\kappa_1}^2 & -\kappa_1\kappa_2 \\ -\dot{\kappa_2} & -\kappa_1\kappa_2 & -{\kappa_2}^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\left[{\kappa_2}^2 \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^{\cdot}\right]^2 \tag{4.4}$$

(4.2) formülünü kullanarak,

$$\det \ddot{A} = -\kappa^4 \tau^2 \tag{4.5}$$

dir. Eğer $\alpha(t)$ eğrisi düzlemsel değil ise, $\tau \neq 0$ dır ve dolayısı ile $\det \ddot{A} \neq 0$ olup

$\ddot{A}X + \ddot{C} = 0$ denkleminin bir tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$X = -\left(\ddot{A}\right)^{-1} \ddot{C}$$

dır. Bishop hareketinin $\forall t$ anında 1. ivme pol merkezi mevcuttur.

Eğer $\alpha(t)$ eğrisi düzlemsel değil ise, teorem 3.3.1.2 yi Bishop hareketimize uygulayalım.

$A \in SO(3)$, $det\dot{A} = 0$ olduğundan $rank\dot{A} < 3$ dir ve

$$\begin{vmatrix} 0 & \kappa_1 \\ -\kappa_1 & 0 \end{vmatrix} = {\kappa_1}^2 \neq 0$$

den dolayı $rank\dot{A} = 2$ olur. Ayrıca $rank\ddot{A} = 3$ olduğunu (4.5) den ve $\det \ddot{A} \neq 0$ den biliyoruz. Böylece 3.3.1.2 teoreminin ii. kısmından, I.S.A nın yönü sabit değildir, yani ani vida eksenleri paralel değildir ve geometrik olarak, Darboux vektörlerinin cümlesi (Konoid), bir silindir değildir. Bu durumda $Y = AX + C$ Bishop hareketi için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.3.1.2

$\alpha(t)$ düzlemsel eğri olmasın. Bu durumda,

$\dot{A}\left(\ddot{A}^{-1}\ddot{C}\right) + \dot{C} = 0 \Leftrightarrow$ 1. ivme pol eğrileri birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

İspat: $\alpha(t)$ düzlemsel eğri olmadığından $\det \ddot{A} \neq 0$ ve dolayısı ile $\left(\ddot{A}\right)^{-1}$ mevcuttur. [8] den teorem gerçeklenir. Diğer halde, eğer $\alpha(t)$ eğrisi düzlemsel $(\tau = 0)$ ise, $\det \ddot{A} = 0$ olur ve $rank\ddot{A} = 2$ olduğu

$$\begin{vmatrix} \dot{\kappa}_1 & \dot{\kappa}_2 \\ -\kappa_1{}^2 & -\kappa_1\kappa_2 \end{vmatrix} = -\kappa_1\dot{\kappa}_1\kappa_2 + \dot{\kappa}_2\kappa_1{}^2$$

$$= -\kappa_1(\dot{\kappa}_1\kappa_2 - \dot{\kappa}_2\kappa_1)$$

$$= -\kappa_1\kappa_2{}^2\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^{\cdot}$$

$$= -\kappa_1\kappa^2\tau \neq 0$$

den söylenebirir. Böylece 3.3.1.2 teoreminin i. kısmından, I.S.A nın yönü sabittir, yani ani vida eksenleri paraleldir ve geometrik olarak Konoid, bir silindirdir. Aşağıdaki sonuçu verebiliriz.

Sonuç: Bishop hareketinde I.S.A nın yönü sabittir $\Leftrightarrow$ α düzlemseldir.

4.3.2 Bishop hareketinin 2. ivme pol merkezi

Teorem 4.3.2.1

Bishop hareketinin $\forall t$ anında bir tek 2. ivme pol merkezi olması için gerek şart $\alpha(t)$ eğrisinin düzlemsel olmamasıdır.

İspat: $Y = AX + C$ Bishop hareketinin 2. ivme pol merkezini bulmak için, (4.3) formüllerinden t ye göre tekrar türev alınırsa,

$$\begin{cases} \dddot{T} = -3(\kappa_1\dot{\kappa}_1 + \kappa_2\dot{\kappa}_2)T - (\kappa_1{}^3 + \kappa_1\kappa_2^2 - \ddot{\kappa}_1)N_1 - (\kappa_2{}^3 + \kappa_1^2\kappa_2 - \ddot{\kappa}_2)N_2 \\ \dddot{N}_1 = (\kappa_1{}^3 + \kappa_1\kappa_2^2 - \ddot{\kappa}_1)T - (3\kappa_1\dot{\kappa}_1)N_1 - (\kappa_1\dot{\kappa}_2 + 2\dot{\kappa}_1\kappa_2)N_2 \\ \dddot{N}_2 = (\kappa_2{}^3 + \kappa_1^2\kappa_2 - \ddot{\kappa}_2)T - (\kappa_2\dot{\kappa}_1 + 2\dot{\kappa}_2\kappa_1)N_1 - (3\kappa_2\dot{\kappa}_2)N_2 \end{cases} \tag{4.6}$$

bulunur. Bu formülleri matris yardımı ile

$$\begin{bmatrix} \dddot{T} \\ \dddot{N}_1 \\ \dddot{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(\kappa_1\dot{\kappa}_1 + \kappa_2\dot{\kappa}_2) & -(\kappa_1{}^3 + \kappa_1\kappa_2^2 - \ddot{\kappa}_1) & -(\kappa_2{}^3 + \kappa_1^2\kappa_2 - \ddot{\kappa}_2) \\ (\kappa_1{}^3 + \kappa_1\kappa_2^2 - \ddot{\kappa}_1) & -(3\kappa_1\dot{\kappa}_1) & -(\kappa_1\dot{\kappa}_2 + 2\dot{\kappa}_1\kappa_2) \\ (\kappa_2{}^3 + \kappa_1^2\kappa_2 - \ddot{\kappa}_2) & -(\kappa_2\dot{\kappa}_1 + 2\dot{\kappa}_2\kappa_1) & -(3\kappa_2\dot{\kappa}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

biçiminde de yazabiliriz.

A matrisi, bir pozitif ortogonal matris olmak üzere, $det\,A = +1$ ve $A^T = A^{-1}$ dir.

$$\det \ddot{A} = -3(\ddot{\kappa_1}\kappa_2 - \kappa_1\ddot{\kappa_2})[(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)(\dot{\kappa_1}\kappa_2 - \kappa_1\dot{\kappa_2}) + (\ddot{\kappa_1}\dot{\kappa_2} - \dot{\kappa_1}\ddot{\kappa_2})]$$

$$+6(\dot{\kappa_1}\kappa_2 - \kappa_1\dot{\kappa_2})^2(\kappa_1\dot{\kappa_1} + \kappa_2\dot{\kappa_2})$$

Frenet ve Bishop bağıntı formüllerini kullanarak,

$\kappa^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2$

$\Rightarrow türevi\ \ \kappa\dot{\kappa} = \kappa_1\dot{\kappa_1} + \kappa_2\dot{\kappa_2}$

$\Rightarrow \dot{\kappa_1}\kappa_2 - \kappa_1\dot{\kappa_2} = \kappa^2\tau$

$\Rightarrow türevi\ \ \ddot{\kappa_1}\kappa_2 - \kappa_1\ddot{\kappa_2} = \kappa(2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})$

$$\Rightarrow \det \ddot{A} = -3(2\kappa\dot{\kappa}\tau + \kappa^2\dot{\tau})(\kappa^4\tau + \ddot{\kappa}_1\dot{\kappa}_2 - \dot{\kappa}_1\ddot{\kappa}_2) + 6\kappa^5\dot{\kappa}\tau^2 \qquad (4.7)$$

elde edilir. Eğer $\alpha(t)$ eğrisi düzlemsel değil ise, $\tau \neq 0$ dir ve dolayısı ile $det\,\ddot{A} \neq 0$ olup her t anında $\ddot{A}X + \ddot{C} = 0$ denkleminin bir tek çözümü vardır ve bu çüzüm

$$X = -(\ddot{A})^{-1}\ddot{C}$$

dır. Bishop hareketinin $\forall t$ anında 2. ivme pol merkezi mevcuttur.

Eğer eğri düzlemsel ise, $\tau = 0$ dır, o yüzden $det\,\ddot{A} = 0$ olup ve Bishop hareketinin $\forall t$ anında 2. ivme pol merkezi mevcut değildir.

Sonuç: Bishop hareketinde $\alpha(t)$ eğrisi düzlemsel değil ise $\forall t$ anında pol noktası yoktur fakat 1. ve 2. ivme pol merkezleri vardır.

4.4 Bishop Hareketleri ve Hortum Yüzeyleri

Eğer $Y(t) = A(t)X + \alpha(t)$ hareketinde, X bir eğri olursa, yeni yüzeyler elde edilebilir.

Özel olarak, eğer Bishop hareketinde $X = (0, r\cos\theta\,, r\sin\theta)$ bir çember olursa,

$$Y = [T, N_1, N_2]\begin{bmatrix} 0 \\ r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix} + \alpha(t)$$

dir.

$$\varphi(t,\theta) = \alpha(t) + (0, r\cos\theta, r\sin\theta)$$

bir hortum yüzeyi olmak üzere, bu yüzeyin ortalama, Gauss ve asli eğriliklerini hesaplayalım:

$$\varphi(t,\theta) = \alpha(t) + (r\cos\theta)N_1 + (r\sin\theta)N_2$$

$$\alpha = \alpha(t) \quad , \quad N_1 = N_1(t) \quad , \quad N_2 = N_2(t)$$

olursa

$$\begin{aligned}\varphi_t &= T + (r\cos\theta)(-\kappa_1 T) + (r\sin\theta)(-\kappa_2 T)\\ &= (1 - r\cos\theta\,\kappa_1 - r\sin\theta\,\kappa_2)T\end{aligned}$$

eğer

$$a = 1 - r\cos\theta\,\kappa_1 - r\sin\theta\,\kappa_2$$

alınırsa

$$\varphi_t = aT \Rightarrow \|\varphi_t\| = a \quad , \quad X = \frac{\varphi_t}{\|\varphi_t\|} = T$$

ve

$$\varphi_\theta = 0 + (-r\sin\theta)N_1 + (r\cos\theta)N_2$$

$$Y = \frac{\varphi_\theta}{\|\varphi_\theta\|} = (-\sin\theta)N_1 + (\cos\theta)N_2$$

$\langle X, Y\rangle = 0$ olduğundan, X, Y ye diktir ve N birim normal vektörü

$$N = X \wedge Y = (-\cos\theta)N_1 + (-\sin\theta)N_2$$

şeklinde elde edilir.

$$S(X) = D_X N = \frac{dN}{dX} = \frac{dN}{dt}\frac{1}{\|\varphi_t\|} = \frac{1-a}{ra}X$$

$$S(Y) = D_Y N = \frac{dN}{dY} = \frac{dN}{d\theta}\frac{1}{\|\varphi_\theta\|} = \frac{-1}{r}Y$$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1-a}{ra} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{r} \end{bmatrix}$$

S Weingarten dönüşümünün matrisidir.

$$K = \det S = \left(\frac{1-a}{ra}\right)\left(\frac{-1}{r}\right) = \frac{a-1}{r^2 a}$$

$$H = iz\, S = \left(\frac{1-a}{ra}\right) + \left(\frac{-1}{r}\right) = \frac{1-2a}{ra}$$

$$H^2 - 4K = \left(\frac{1}{ra}\right)^2 > 0$$

$$S^2 - HS + K = 0$$

eşitliğinden

$$h = \frac{1}{2}\left(H + \sqrt{H^2 - 4K}\right) = \frac{1-a}{ra}$$

$$k = \frac{1}{2}\left(H - \sqrt{H^2 - 4K}\right) = \frac{-1}{r}$$

olur. h ve k yüzeyin asli eğrilikleridir (Hacısalihoğlu 2000).

Aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 4.4.1

Bishop hareketi ile elde edilen hortum yüzeyi minimaldir ancak ve ancak $a = \frac{1}{2}$ dir.

Teorem 4.4.2

Bishop hareketi ile elde edilen hortum yüzeyi Weingarten yüzeyidir.

İspat: H ve K

$$\frac{1}{r}H + K = -\frac{a}{r^2}$$

denklemini gerçekler. Bu ise yüzeyin Weingarten yüzeyi olması demektir.

5. E_1^3, LORENTZ UZAYINDA FRENET HAREKETİ

5.1 Lorentz Uzayında Frenet Hareketinin Pol Noktası ve İvme Merkezleri

α, t parametreli ve her $\alpha(t)$ noktasında regüler olan bir eğri olsun. T, N, B eğrinin her noktasındaki Frenet çatısının birim vektörleri olmak üzere

$$A = [T\ N\ B] = \begin{bmatrix} t_1 & n_1 & b_1 \\ t_2 & n_2 & b_2 \\ t_3 & n_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

bir pozitif ortogonal matristir. Ayrıca

$$det\, A = +1 \ \text{ ve } \ A^t = \varepsilon A^{-1} \varepsilon$$

dir. Burada

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dir (Lopez 2008).

$\alpha(t)$ eğrisinin Frenet çatısının, eğri boyunca hareket ettirilmesiyle elde edilen harekete *Frenet hareketi* denir.

Bir X noktasının bu hareket altındaki yörüngesi

$$Y = AX + \alpha(t)$$

şeklinde efade edilir. $\alpha(t)$ eğrisi spacelike, timelike ya da null olabilir. Spacelike veya timelike eğriler olması halinde, Frenet-Serret formülleri

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon_0 \varepsilon_1 \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

şeklinde yazılabilir (O'Neill 1983, Ekmekci 2000, Yaylı 2006).

Burada

$$\varepsilon_0 = \langle T, T \rangle = \pm 1 \ , \ \varepsilon_1 = \langle N, N \rangle = \pm 1 \ , \ \varepsilon_2 = \langle B, B \rangle = \pm 1$$

dır.

i) $\alpha(t)$ timelike eğri olsun,

bu durumda T timelike olmalıdır. Böylece N ve B spacelike alınırsa,

$$\varepsilon_0 = \langle T,T\rangle = -1 \ , \ \ \varepsilon_1 = \langle N,N\rangle = +1 \ \ , \ \ \varepsilon_2 = \langle B,B\rangle = +1$$

olup ve (5.1) in ifadesi

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ya da

$$\dot{T} = \kappa N \ \ , \ \ \dot{N} = \kappa T + \tau B \ \ , \ \ \dot{B} = -\tau N \qquad (5.2)$$

elde edilir. Burada,

$$\det(\dot{T},\dot{N},\dot{B}) = 0$$

olur, böylece Lorentz uzayında i) durumunda Frenet hareketinin pol noktası yoktur.
Şimdi hareketin 1. ivme pol merkezini bulalım.

$Y = AX + \alpha(t)$ Frenet hareketinin 1. ivme pol merkezini bulmak için, (5.2) formüllerinden t ye göre tekrar türev alınırsa,

$$\begin{cases} \ddot{T} = \kappa^2 T + \dot{\kappa} N + \kappa\tau B \\ \ddot{N} = \dot{\kappa} T + (\kappa^2 - \tau^2) N + \dot{\tau} B \\ \ddot{B} = -\kappa\tau T - \dot{\tau} N - \tau^2 B \end{cases} \qquad (5.3)$$

bulunur. Bu formülleri

$$\begin{bmatrix} \ddot{T} \\ \ddot{N} \\ \ddot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa^2 & \dot{\kappa} & \kappa\tau \\ \dot{\kappa} & (\kappa^2 - \tau^2) & \dot{\tau} \\ -\kappa\tau & -\dot{\tau} & -\tau^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

biçiminde de yazabiliriz. Burada

$$\det \ddot{A} = \det(\ddot{T},\ddot{N},\ddot{B}) = \left[\tau^2 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot}\right]^2$$

dir. Eğer $\alpha(t)$ eğrisi düzlemsel ve genel helis değil ise,

$\tau \neq 0 \quad ve \quad \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot} \neq 0$, o yüzden $\det \ddot{A} \neq 0$ olup ve

$$X = -\left(\ddot{A}\right)^{-1}\ddot{C},$$

vektörü $\ddot{A}X + \ddot{C} = 0$ denkleminin bir tek çözümüdür ve Frenet hareketinin $\forall t$ anında 1. ivme pol merkezi olur.

Şimdi hareketin 2. mertebeden ivme pol merkezini bulalım.

$Y = AX + \alpha(t)$ Frenet hareketinin 2. ivme pol merkezini bulmak için, (5.3) formüllerinden t ye göre tekrar türev alınırsa,

$$\begin{cases} \dddot{T} = (3\kappa\dot{\kappa})T + (\kappa^3 - \kappa\tau^2 + \ddot{\kappa})N + (\kappa\dot{\tau} + 2\dot{\kappa}\tau)B \\ \dddot{N} = (\kappa^3 - \kappa\tau^2 + \ddot{\kappa})T + 3(\kappa\dot{\kappa} - \tau\dot{\tau})N + (-\tau^3 + \kappa^2\tau + \ddot{\tau})B \\ \dddot{B} = -(2\kappa\dot{\tau} + \dot{\kappa}\tau)T - (-\tau^3 + \kappa^2\tau + \ddot{\tau})N - (3\tau\dot{\tau})B \end{cases}$$

bulunur. Bu formülleri

$$\begin{bmatrix} \dddot{T} \\ \dddot{N} \\ \dddot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\kappa\dot{\kappa} & \kappa^3 - \kappa\tau^2 + \ddot{\kappa} & \kappa\dot{\tau} + 2\dot{\kappa}\tau \\ \kappa^3 - \kappa\tau^2 + \ddot{\kappa} & 3(\kappa\dot{\kappa} - \tau\dot{\tau}) & -\tau^3 + \kappa^2\tau + \ddot{\tau} \\ -(2\kappa\dot{\tau} + \dot{\kappa}\tau) & -(-\tau^3 + \kappa^2\tau + \ddot{\tau}) & -3\tau\dot{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

biçiminde de yazabiliriz. Burada

$$\det \dddot{A} = -3\tau^2 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot} \left[2\tau^2 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot} (\kappa\dot{\kappa} + \tau\dot{\tau}) + (\kappa^2 + \tau^2)(\kappa\ddot{\tau} - \ddot{\kappa}\tau)\right] + 3\dot{\tau}^2 \left(\frac{\dot{\kappa}}{\dot{\tau}}\right)^{\cdot} (\kappa\ddot{\tau} - \ddot{\kappa}\tau)$$

dir. Eğer,

$$\frac{\kappa}{\tau} = \lambda = sabit \ \Rightarrow \ \kappa = \lambda\tau$$

$$\Rightarrow \ \dot{\kappa} = \lambda\dot{\tau} \ \Rightarrow \ \frac{\dot{\kappa}}{\dot{\tau}} = \lambda = sabit$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\cdot} = \left(\frac{\dot{\tau}}{\dot{\kappa}}\right)^{\cdot} = 0$$

ise, $det\, \dddot{A} = 0$ olur.

Sonuç: Eğer α eğrisi düzlemsel yada bir genel helis ise, hareketin het t anında 1. ve 2. ivme pol merkezi yoktur.

ii) $\boldsymbol{\alpha(t)}$ spacelike eğri olsun.

ii. i) $\boldsymbol{\alpha(t)}$ spacelike, *N* spacelike ve *B* timelike olsun.

Bu halde,

$\varepsilon_0 = \langle T, T\rangle = +1$, $\varepsilon_1 = \langle N, N\rangle = +1$, $\varepsilon_2 = \langle B, B\rangle = -1$

olup ve (5.1) in ifadesi

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

yada

$$\dot{T} = \kappa N \ , \ \dot{N} = -\kappa T + \tau B \ , \ \dot{B} = \tau N \qquad (5.4)$$

elde edilir.

Bu durumunda da, $\det(\dot{T}, \dot{N}, \dot{B}) = 0$ olur, Lorentz uzayında Frenet hareketinin pol noktası yoktur.

Şimdi hareketin 1. ivme pol merkezini bulalım.

$Y = AX + \alpha(t)$ Frenet hareketinin 1. ivme pol merkezini bulmak için, (5.4) formüllerinden t ye göre tekrar türev alınırsa,

$$\begin{cases} \ddot{T} = -\kappa^2 T + \dot{\kappa} N + \kappa\tau B \\ \ddot{N} = -\dot{\kappa} T - (\kappa^2 - \tau^2) N + \dot{\tau} B \\ \ddot{B} = -\kappa\tau T + \dot{\tau} N + \tau^2 B \end{cases} \qquad (5.5)$$

bulunur. Bu formülleri

$$\begin{bmatrix} \ddot{T} \\ \ddot{N} \\ \ddot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\kappa^2 & \dot{\kappa} & \kappa\tau \\ -\dot{\kappa} & -(\kappa^2 - \tau^2) & \dot{\tau} \\ -\kappa\tau & \dot{\tau} & \tau^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

biçiminde de yazabiliriz. Burada

$$det\,\ddot{A} = det(\ddot{T}, \ddot{N}, \ddot{B}) = \left[\tau^2 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\dot{}}\right]^2$$

dir. Eğer $\alpha(t)$ eğrisi düzlemsel ve dolayısı ile genel helis değil ise,

$\tau \neq 0$, $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\dot{}} \neq 0$ ve $\det \ddot{A} \neq 0$ olup ve

$$X = -(\ddot{A})^{-1}\ddot{C}$$

vektörü $\ddot{A}X + \ddot{C} = 0$ denkleminin bir tek çözümü dür ve Frenet hareketinin $\forall t$ anında 1. ivme pol merkezi olur.

Frenet hareketinin 2. ivme pol merkezini bulmak için, (5.5) formüllerinden t ye göre tekrar türev alınırsa,

$$\begin{cases} \dddot{T} = -3\kappa\dot{\kappa}T + (-\kappa^3 + \kappa\tau^2 + \ddot{\kappa})N + (\kappa\dot{\tau} + 2\dot{\kappa}\tau)B \\ \dddot{N} = (\kappa^3 - \kappa\tau^2 - \ddot{\kappa})T + 3(-\kappa\dot{\kappa} + \tau\dot{\tau})N + (\tau^3 - \kappa^2\tau + \ddot{\tau})B \\ \dddot{B} = -(2\kappa\dot{\tau} + \dot{\kappa}\tau)T + (\tau^3 - \kappa^2\tau + \ddot{\tau})N + (3\tau\dot{\tau})B \end{cases}$$

bulunur. Bu formüllerin matris gösterimi şöyledir:

$$\begin{bmatrix} \dddot{T} \\ \dddot{N} \\ \dddot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\kappa\dot{\kappa} & -(\kappa^3 - \kappa\tau^2 - \ddot{\kappa}) & (\kappa\dot{\tau} + 2\dot{\kappa}\tau) \\ \kappa^3 - \kappa\tau^2 - \ddot{\kappa} & 3(-\kappa\dot{\kappa} + \tau\dot{\tau}) & \tau^3 - \kappa^2\tau + \ddot{\tau} \\ -(2\kappa\dot{\tau} + \dot{\kappa}\tau) & \tau^3 - \kappa^2\tau + \ddot{\tau} & 3\tau\dot{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

Burada

$$\det \dddot{A} = -3\tau^2 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\dot{}} \left[2\tau^2 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\dot{}} (\kappa\dot{\kappa} + \tau\dot{\tau}) + (\kappa^2 + \tau^2)(\kappa\ddot{\tau} - \ddot{\kappa}\tau)\right] + 3\dot{\tau}^2 \left(\frac{\dot{\kappa}}{\dot{\tau}}\right)^{\dot{}} (\kappa\ddot{\tau} - \ddot{\kappa}\tau)$$

dır. Eğer α eğrisi düzlemsel yada bir genel helis ise, hareketin het t anında 1. ve 2. ivme pol merkezi yoktur.

ii. ii) $\alpha(t)$ spacelike, *N* timelike ve *B* spacelike olsun.

Bu durumunda

$\varepsilon_0 = \langle T, T \rangle = +1$, $\varepsilon_1 = \langle N, N \rangle = -1$, $\varepsilon_2 = \langle B, B \rangle = +1$

olup ve (5.1) in ifadesi,

$$\begin{bmatrix}\dot{T}\\ \dot{N}\\ \dot{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \kappa & 0\\ \kappa & 0 & \tau\\ 0 & \tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T\\ N\\ B\end{bmatrix}$$

ve buradan

$$\dot{T}=\kappa N \quad , \quad \dot{N}=\kappa T+\tau B \quad , \quad \dot{B}=\tau N \qquad (5.6)$$

elde edilir. Bu durumda da $\det(\dot{T},\dot{N},\dot{B})=0$ olur. Bu halde Lorentz uzayında Frenet hareketinin pol noktası yoktur.

Şimdi hareketin 1. ivme pol merkezini bulalım.

$Y=AX+\alpha(\mathrm{t})$ Frenet hareketinin 1. ivme pol merkezini bulmak için, (5.6) formüllerinden t ye göre tekrar türev alınırsa,

$$\begin{cases}\ddot{T}=\kappa^2T+\dot{\kappa}N+\kappa\tau B\\ \ddot{N}=\dot{\kappa}T+(\kappa^2+\tau^2)N+\dot{\tau}B\\ \ddot{B}=\kappa\tau T+\dot{\tau}N+\tau^2B\end{cases} \qquad (5.7)$$

bulunur. Bu formülleri matris formunda

$$\begin{bmatrix}\ddot{T}\\ \ddot{N}\\ \ddot{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\kappa^2 & \dot{\kappa} & \kappa\tau\\ \dot{\kappa} & (\kappa^2+\tau^2) & \dot{\tau}\\ \kappa\tau & \dot{\tau} & \tau^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T\\ N\\ B\end{bmatrix}$$

biçiminde de yazabiliriz.

Burada

$$det\,\ddot{A}=det(\ddot{T},\ddot{N},\ddot{B})=-\left[\tau^2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot}\right]^2$$

dir. Eğer $\alpha(t)$ eğrisi düzlemsel ve genel helis değil ise

$\tau\neq 0$ ve $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot}\neq 0$ dolayısı ile $\det\ddot{A}\neq 0$ olup ve

$$X=-(\ddot{A})^{-1}\ddot{C}$$

vektörü $\ddot{A}X + \ddot{C} = 0$ denkleminin bir tek çözümüdir ve Frenet hareketinin $\forall t$ anında 1. ivme pol merkezi olur.

Frenet hareketinin 2. ivme pol merkezini bulmak için, (5.7) formüllerinden t ye göre tekrar türev alınırsa,

$$\begin{cases} \dddot{T} = 3\kappa\dot{\kappa}T + (\kappa^3 + \kappa\tau^2 + \ddot{\kappa})N + (\kappa\dot{\tau} + 2\dot{\kappa}\tau)B \\ \dddot{N} = (\kappa^3 + \kappa\tau^2 + \ddot{\kappa})T + 3(\kappa\dot{\kappa} + \tau\dot{\tau})N + (\tau^3 + \kappa^2\tau + \ddot{\tau})B \\ \dddot{B} = (2\kappa\dot{\tau} + \dot{\kappa}\tau)T + (\tau^3 + \kappa^2\tau + \ddot{\tau})N + (3\tau\dot{\tau})B \end{cases}$$

bulunur. Bu formüllerin matris gösterimi şöyledir:

$$\begin{bmatrix} \dddot{T} \\ \dddot{N} \\ \dddot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\kappa\dot{\kappa} & \kappa^3 + \kappa\tau^2 + \ddot{\kappa} & \kappa\dot{\tau} + 2\dot{\kappa}\tau \\ \kappa^3 + \kappa\tau^2 + \ddot{\kappa} & 3(\kappa\dot{\kappa} + \tau\dot{\tau}) & \tau^3 + \kappa^2\tau + \ddot{\tau} \\ 2\kappa\dot{\tau} + \dot{\kappa}\tau & \tau^3 + \kappa^2\tau + \ddot{\tau} & 3\tau\dot{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

burada

$$\det \dddot{A} = -3\tau^2 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot} \left[2\tau^2 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot} (\kappa\dot{\kappa} + \tau\dot{\tau}) + (\kappa^2 + \tau^2)(\kappa\ddot{\tau} - \ddot{\kappa}\tau)\right] + 3\dot{\tau}^2 \left(\frac{\dot{\kappa}}{\dot{\tau}}\right)^{\cdot} (\kappa\ddot{\tau} - \ddot{\kappa}\tau)$$

dır. Eğer α eğrisi düzlemsel yada bir genel helis ise, hareketin het t anında 1. ve 2. ivme pol merkezi yoktur.

ii. iii) $\alpha(t)$ spacelike, *N* null (lightlike) olsun.

Bu durumunda Frenet-Serret formüllerinin ifadesi

$$\dot{T} = N \quad , \quad \dot{N} = \tau N \quad , \quad \dot{B} = -T - \tau B \tag{5.8}$$

olur (Yaylı 2006, 2008).

Bu formülleri

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -1 & 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

Biçiminde de yazabiliriz. Bu durumda da, $\det(\dot{T},\dot{N},\dot{B}) = 0$ olur, o yüzden Lorentz uzayında Frenet hareketinin pol noktası yoktur.

Şimdi hareketin 1. ivme pol merkezini bulalım.

$Y = AX + \alpha(t)$ Frenet hareketinin 1. ivme pol merkezini bulmak için, (5.8) formüllerinden t ye göre tekrar türev alınırsa,

$$\begin{cases} \ddot{T} = \tau N \\ \ddot{N} = (\tau^2 + \dot{\tau})N \\ \ddot{B} = \tau T - N + (\tau^2 - \dot{\tau})B \end{cases} \tag{5.9}$$

bulunur. Bu formülleri

$$\begin{bmatrix} \ddot{T} \\ \ddot{N} \\ \ddot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ 0 & \tau^2 + \dot{\tau} & 0 \\ \tau & -1 & \tau^2 - \dot{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

biçiminde de yazabiliriz. Burada

$$\det(\ddot{T},\ddot{N},\ddot{B}) = 0$$

dır. Bu durumda, Lorentz uzayında, Frenet hareketinin hiç bir zaman 1. ivme pol merkezi yoktur.

Frenet hareketinin 2. ivme pol merkezini bulmak için, (5.9) formüllerinden t ye göre tekrar türev alınırsa,

$$\begin{cases} \dddot{T} = (\tau^2 + \dot{\tau})N \\ \dddot{N} = (\tau^3 + 3\tau\dot{\tau} + \ddot{\tau})N \\ \dddot{B} = (-\tau^2 + 2\dot{\tau})T - (\tau^3 - 3\tau\dot{\tau} + \ddot{\tau}) \end{cases}$$

bulunur. Bu formülleri

$$\begin{bmatrix} \dddot{T} \\ \dddot{N} \\ \dddot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tau^2 + \dot{\tau} & 0 \\ 0 & \tau^3 + 3\tau\dot{\tau} + \ddot{\tau} & 0 \\ -\tau^2 + 2\dot{\tau} & 0 & -(\tau^3 - 3\tau\dot{\tau} + \ddot{\tau}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklinde de yazabiliriz. Burada

$$\det(\ddot{T},\ddot{N},\ddot{B})=0$$

dır. Bu durumda, Lorentz uzayında, Frenet hareketinin hiç bir zaman 2. ivme pol merkezi yoktur.

Sonuç: ii. iii) durumunda Lorentz uzayında, Frenet hareketinin hiç bir zaman pol noktası ve ivme pol merkezleri yoktur.

iii) $\boldsymbol{\alpha(t)}$ **null eğrisi olsun,**

Bu durumunda Frenet-Serret formüllerinin ifadesi

$$\dot{T}=N \quad , \quad \dot{N}=\tau T-B \quad , \quad \dot{B}=-\tau N \tag{5.10}$$

dır. (Lopez 2008, Yaylı 2008).

Bu formülleri

$$\begin{bmatrix}\dot{T}\\ \dot{N}\\ \dot{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \tau & 0 & -1\\ 0 & -\tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T\\ N\\ B\end{bmatrix}$$

şeklinde de yazabiliriz. Bu durumda da, $\det(\dot{T},\dot{N},\dot{B})=0$ olur, o yüzden Lorentz uzayında Frenet hareketinin pol noktası yoktur.

Şimdi hareketin 1. ivme pol merkezini bulalım.

$Y=AX+\alpha(t)$ Frenet hareketinin 1. ivme pol merkezini bulmak için, (5.10) formüllerinden t ye göre tekrar türev alınırsa,

$$\begin{cases}\ddot{T}=\tau N-B\\ \ddot{N}=\dot{\tau}T+2\tau N\\ \ddot{B}=-\tau^2T-\dot{\tau}N+\tau B\end{cases} \tag{5.11}$$

bulunur. Bu formülleri

$$\begin{bmatrix}\ddot{T}\\ \ddot{N}\\ \ddot{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tau & 0 & -1\\ \dot{\tau} & 2\tau & 0\\ -\tau^2 & -\dot{\tau} & \tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T\\ N\\ B\end{bmatrix}$$

biçiminde de yazabiliriz. Burada

$$det(\ddot{T}, \ddot{N}, \ddot{B}) = \dot{\tau}^2$$

dır. Frenet hareketinin $\forall t$ anında bir tek 1. ivme pol merkezi olması için gerek ve yeter şart $\alpha(t)$ eğrisi için $\dot{\tau} \neq 0$ olmasıdır.

Frenet hareketinin 2. ivme pol merkezini bulmak için, (5.11) formüllerinden t ye göre tekrar türev alınırsa,

$$\begin{cases} \dddot{T} = (3\kappa\dot{\kappa})T + (\kappa^3 - \kappa\tau^2 + \ddot{\kappa})N + (\kappa\dot{\tau} + 2\dot{\kappa}\tau)B \\ \dddot{N} = (\kappa^3 - \kappa\tau^2 + \ddot{\kappa})T + 3(\kappa\dot{\kappa} - \tau\dot{\tau})N + (-\tau^3 + \kappa^2\tau + \ddot{\tau})B \\ \dddot{B} = -(2\kappa\dot{\tau} + \dot{\kappa}\tau)T - (-\tau^3 + \kappa^2\tau + \ddot{\tau})N - (3\tau\dot{\tau})\mathrm{B} \end{cases}$$

bulunur. Bu forüllerinin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} \dddot{T} \\ \dddot{N} \\ \dddot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tau} & 2\tau & 0 \\ \ddot{\tau} + 2\tau^2 & 3\dot{\tau} & -2\tau \\ -3\tau\dot{\tau} & -(\ddot{\tau} + 2\tau^2) & 2\dot{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Burada

$$det\,\dddot{A} = 6\dot{\tau}(\dot{\tau}^2 - \tau\ddot{\tau})$$

dır. Frenet hareketinin $\forall t$ anında bir tek 2. ivme pol merkezi olması için yeter şart, $\alpha(t)$ eğrisi $\dot{\tau} \neq 0$ olmasıdır.

6. E^3, LORENTZ UZAYINDA BİSHOP HAREKETİ

Eğer M eğrisi, (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş ise $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere, Frenet ve Bishop hareketlerinin arasındaki bağıntılardan,

$$\kappa(s) = \sqrt{|\kappa_1^2 - \kappa_2^2|} \ , \ \tau(s) = \frac{d\theta(s)}{ds} \ , \ \theta(s) = \operatorname{arc\,tanh}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right) \tag{6.1}$$

bulunur (Lopez 2008, Yaylı 2006).

(6.1) formüllerini kullanarak,

$$\kappa^2 = |\kappa_1^2 - \kappa_2^2|$$

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \tanh\theta$$

$$\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)^{\cdot} = (1 - \tan^2\mathrm{h}\theta)\frac{d\theta}{ds}$$

$$= \left(1 - \frac{{\kappa_2}^2}{{\kappa_1}^2}\right)\tau$$

$$= \left(\frac{{\kappa_1}^2 - {\kappa_2}^2}{{\kappa_1}^2}\right)\tau$$

$$= \pm\left(\frac{\kappa^2}{{\kappa_1}^2}\right)\tau$$

$$\Rightarrow {\kappa_1}^2\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)^{\cdot} = \pm\kappa^2\tau \tag{6.2}$$

bulunur. Burada, κ_1, κ_2 Bishop hareketinde eğrinin 1. ve 2. eğrilikleri

olmak üzere, Bishop formülleri şöyle yazılabilir:

$$\dot{T} = \kappa_1 N_1 - \kappa_2 N_2 \ , \ \dot{N}_1 = \kappa_1 T \ , \ \dot{N}_2 = \kappa_2 T \,. \tag{6.3}$$

Bu formülleri

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N}_1 \\ \dot{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & -\kappa_2 \\ \kappa_1 & 0 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

biçiminde de yazabiliriz.

A matrisi, bir pozitif ortogonal matris olmak üzere, $det\, A = +1$ dir, bu nedenle,

$$det\, \dot{A} = det(\dot{T}, \dot{N}_1, \dot{N}_2) = \begin{vmatrix} 0 & \kappa_1 & -\kappa_2 \\ \kappa_1 & 0 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

dolayısıyla $\dot{A}X + \dot{C} = 0$ denkleminin tek çözümü yoktur, yani Bishop hareketinin her t anında pol noktası yoktur.

$Y = AX + C$ Bishop hareketinin 1. ivme pol merkezini bulmak için, (6.3) formüllerinden t ye göre türev alınırsa,

$$\begin{cases} \ddot{T} = (\kappa_1^2 - \kappa_2^2)T + \dot{\kappa}_1 N_1 - \dot{\kappa}_2 N_2 \\ \ddot{N}_1 = \dot{\kappa}_1 T + \kappa_1^2 N_1 - \kappa_1\kappa_2 N_2 \\ \ddot{N}_2 = \dot{\kappa}_2 T + \kappa_1\kappa_2 N_1 - \kappa_2^2 N_2 \end{cases} \tag{6.4}$$

bulunur. Bu formülleri

$$\begin{bmatrix} \ddot{T} \\ \ddot{N}_1 \\ \ddot{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\kappa_1^2 - \kappa_2^2) & \dot{\kappa}_1 & -\dot{\kappa}_2 \\ \dot{\kappa}_1 & \kappa_1^2 & -\kappa_1\kappa_2 \\ \dot{\kappa}_2 & \kappa_1\kappa_2 & -\kappa_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

biçiminde de yazabiliriz.

$$A = [T \quad N_1 \quad N_2]$$

matrisi, bir pozitif ortogonal matris olmak üzere, $det\, A = +1$ dir, o yüzden,

$$\det \ddot{A} = \begin{vmatrix} (\kappa_1^2 - \kappa_2^2) & \dot{\kappa}_1 & -\dot{\kappa}_2 \\ \dot{\kappa}_1 & \kappa_1^2 & -\kappa_1\kappa_2 \\ \dot{\kappa}_2 & \kappa_1\kappa_2 & -\kappa_2^2 \end{vmatrix} = \left[\kappa_1^2 \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)^{\cdot}\right]^2$$

dir. (6.2) formüllerinin yardım ile,

$$\det \ddot{A} = \kappa^4 \tau^2$$

olur. Eğer $\alpha(t)$ eğrisi düzlemsel değil ise, $\tau \neq 0$ olur, o yüzden $\det \ddot{A} \neq 0$ olup

$$X = -\left(\ddot{A}\right)^{-1}\ddot{C},$$

vektörü $\ddot{A}X + \ddot{C} = 0$ denkleminin bir tek çözümüdür ve Lorentz uzayında Bishop hareketinin $\forall t$ anında 1. ivme pol merkezi olur.

Bishop hareketinin 2. ivme pol merkezini bulmak için, (6.4) formüllerinden t ye göre tekrar türev alınırsa,

$$\begin{cases} \dddot{T} = 3(\kappa_1\dot{\kappa}_1 - \kappa_2\dot{\kappa}_2)T + ({\kappa_1}^3 - \kappa_1\kappa_2^2 + \ddot{\kappa}_1)N_1 + ({\kappa_2}^3 - \kappa_1^2\kappa_2 - \ddot{\kappa}_2)N_2 \\ \dddot{N}_1 = ({\kappa_1}^3 - \kappa_1\kappa_2^2 + \ddot{\kappa}_1)T + (3\kappa_1\dot{\kappa}_1)N_1 - (\kappa_1\dot{\kappa}_2 + 2\dot{\kappa}_1\kappa_2)N_2 \\ \dddot{N}_2 = (-{\kappa_2}^3 + \kappa_1^2\kappa_2 + \ddot{\kappa}_2)T + (\kappa_2\dot{\kappa}_1 + 2\dot{\kappa}_2\kappa_1)N_1 - (3\kappa_2\dot{\kappa}_2)N_2 \end{cases}$$

bulunur. Bu formülleri

$$\begin{bmatrix} \dddot{T} \\ \dddot{N}_1 \\ \dddot{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(\kappa_1\dot{\kappa}_1 - \kappa_2\dot{\kappa}_2) & ({\kappa_1}^3 - \kappa_1\kappa_2^2 + \ddot{\kappa}_1) & ({\kappa_2}^3 - \kappa_1^2\kappa_2 - \ddot{\kappa}_2) \\ ({\kappa_1}^3 - \kappa_1\kappa_2^2 + \ddot{\kappa}_1) & (3\kappa_1\dot{\kappa}_1) & -(\kappa_1\dot{\kappa}_2 + 2\dot{\kappa}_1\kappa_2) \\ (-{\kappa_2}^3 + \kappa_1^2\kappa_2 + \ddot{\kappa}_2) & (\kappa_2\dot{\kappa}_1 + 2\dot{\kappa}_2\kappa_1) & -(3\kappa_2\dot{\kappa}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

biçiminde de yazabiliriz.

A matrisi, bir pozitif ortogonal matris olmak üzere,

$$\det \dddot{A} = 3\left(2\kappa\dot{\kappa}\tau + \kappa^2\dot{\tau}\right)\left(-\kappa^4\tau + \dot{\kappa}^2{}_1\left(\frac{\dot{\kappa}_2}{\dot{\kappa}_1}\right)^{\cdot}\right) + 6\kappa^5\dot{\kappa}\tau^2$$

dır. $\alpha(t)$ eğrisi düzlemsel olması halinde, hareketin 2. ivme pol merkezi yoktur.

KAYNAKLAR

Bishop, L.R. 1975. There is More Than One Way to Frame a Curve. Amer. Math. Monthly, Vol 82, issue 3, 246-251.

Bottema, O. Roth, B. 1979. Theoretical Kinematics. North Holland publ.

Ekmekcı, N. Hacısalihoğlu, H. H. and İlarslan, K. 2000. Harmonic Curvatures in Lorentzian Space. Bull. Malaysian Math. Sc, Soc. 23, pp: 173-179.

Gray, A. 1998. Modern Diffrential Geometry. Cre pres.

Gross, A. 1994. Analyzing Generalized Tubes. Proc. Spie conf. Intellisent Robots.

Hacısalihoğlu, H. H. 1974. On the Geometry of Motion in the Euclidean n-space. Department of Mathematics, University of Ankara.

Hacısalihoğlu, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri. Cilt 1-2, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

Hanson, A. J, Ma, H. 1995. Parallel Transport Approach to Streamline Visualization. Ice Transactions on Visualization and Computer Graphics, Vol: 1, Number 2.

Lopez, R. 2008. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space. Departamento de Geometria y Topologia Universidad de Granada 18071, Granada, Espana.

O'Neill, B. 1966. Elementary Differential Geometry. Academic Press, New York.

O'Neill, B. 1983. Semi Riemannian Geometry with Application to General Relativity. Academic Press, New York.

Weinstein, T. 1996. An Introduction to Lorentz Surfaces. Walter de Gruyter.

Yaylı, Y. Karacan, M. K. and Es, H. 2006. Singular Points of Tubular Surfaces in Minkowski 3-space. Sarajevo J. math. Soc: 2, pp: 7382.

Xu, Z. Feng, R. and Sun, J. G. 2006. Analytic and Algebraıc Peoperties of Canal Surfaces. Journal of Computational and Applied Mathematic, vol: 195, No. 1-2, pp: 220-228.

Yaylı, Y. Karacan, M. K. 2008. On the Geodesics of Tubular Surfaces in Minkowski 3-space. Bull. Malaysian, math. Sci. Soc: 2 (31), pp: 1-10.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Naser MASROURI
Doğum Yeri **:** Malekan, Iran
Doğum Tarihi **:** 31/05/1971
Medeni Hali **:** Evli
Yabancı Dili **:** İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise **:** Çemran Lisesi, Malekan, İran, 1989.
Lisans **:** Tebriz Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, İran, 1993.
Yüksek Lisans **:** Lahican Üniversitesi, Lahican, Iran, 1996.

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Şabester Üniversitesi, Şabester, İran, Öğretim Üyesi (1999- ⋯)

Yayınları (SCI ve diğer)

Masrouri, **N.** and Yayli, Y. 2010. On Acceleration Pole Points in Special Frenet and Bishop Motions. Revista Notas de Matemática,vol: 6(1), No. 289, pp: 30-39.

Masrouri, **N.** and Yayli, Y. 2011. Special Motions for Spacelike Curve in Minkowski 3-pace. Revista Notas de Matemática, vol: 7(1), No. 304, pp: 57-65.

Masrouri, **N.** and Yayli, Y. 2011. Comments On Differentiable Over Function of Split Quaternions. Revista Notas de Matemática, vol: 7(2), No. 312, pp: 128-134.

Kitaplar

Masrouri, **N.** 2004. Prerequisites of General Mathematics. Tabriz, Iran.

Masrouri, **N.** 2011. Numerical Calculations. Tabriz, Iran.