ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ HAMILTON OPERATÖRLERİ VE LİE GRUPLARI

Mehdi JAFARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2012

ÖZET

Doktora Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ HAMILTON OPERATÖRLERİ VE LİE GRUPLARI

Mehdi JAFARI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.
İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, reel ve dual kuaterniyonlar ve onların özelikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde, ilk önce genelleştirilmiş reel kuaterniyonların özelikleri ve bunların Lie grup ve Lie cebir yapılarını incelenmiştir. Dönme operatörü, Killing formu, Hamilton operatörleri ve reel genelleştirilmiş kuaterniyonlar için Euler ve De-Moivre formüllerin den bahsedilmiştir. Son olarak, De-Moivre formülünün genelleştirilmiş kuaterniyonlara karşılık gelen matrisler için de geçerli olduğu gösterilmiştir. Bu çalışmada verilen özeliklerin her birinin reel ve split kuaterniyonlar ile olan ilişkisi gösterilmektedir. Beşinci bölümde ise, genelleştirilmiş dual kuaterniyonlar ve özelikleri verilmıştır. Konuların daha anlaşılır olabilmesi için genelleştirilmiş reel ve dual kuaterniyonların uygulamaları ve bunlara ait örnekler verilmektedir. Son bölümde $E^4_{\alpha\beta}$, 4-boyutlu uzayda bir uzay eğrisi boyunca Hamilton hareketi tanımlanmaktadır. r. mertebeden regüler bir eğri boyunca tanımlanan Hamilton hareketi için her t anında $(r-1)$.mertebeden birtek ivme merkezinin olduğu gösterilmiştir.

Şubat 2012, 88 sayfa

Anahtar Kelimeler : De-Moivre formu, Genelleştirilmiş reel kuaterniyon, Killing formu, Hamilton operatörü, Homotetik hareket

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

THE GENERALIZED HAMILTON OPERATORS AND LIE GROUPS

Mehdi JAFARI

Ankara University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr.Yusuf YAYLI

This thesis consists of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In second chapter, real and dual quaternions and their fundamental properties are discussed. The properties of generalized quaternions and their Lie groups and Lie algebra structures are investigated in Chapter 3. In subsequent chapter the rotation operator, Killing form, Hamilton operators and Euler and De-Movire formulas for the generalized quaternions are discussed. It is pointed out that the De-Movire formula for matrices associated with the generalized quaternions is current too. This study reveals the relation between the real and split quaternions for each of the specifications. In chapter 5, generalized dual quaternions and some of their properties are provided. Eventually, some applications of generalized real and dual quaternions for the Hamilton motion are given at the last chapter, by considering a spatial curve in 4-dimensional space $E^4_{\alpha\beta}$. This motion corresponding to regular curve of order r, has only one acceleration center of order $(r-1)$.

February 2012, 88 pages

Key Words: De-Moivre's formula, Generalized Quaternion, Killing Formula, Hamilton operator, Homothetic motion

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve araştırmalarımın her aşamasında en yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Marematik Anabilim Dalı)'a çalışmalarım esnasında yardımlarını gördüğüm Sayın Prof. Dr.H. Hilmi HACISALİHOĞLU(Bilecik Üniversitesi Fen Fakültesi, Marematik Anabilim Dalı)'a, Sayın Prof. Dr. H.Hüseyin UĞURLU(Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Marematik Anabilim Dalı)'a, Sayın Doç. Dr. Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Marematik Anabilim Dalı)'a teşekkürlerimi sunarım.

Çalısmalarımda manevi desteklerini her zaman hissettiğim sevgili babam Zeinalabedin JAFARI'e ve sevgili annem Nores KOLAEI'e tesekkürlerimi sunarım.

Mehdi JAFARI

Ankara, Şubat 2012

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

G	G Lie Grubu
$\chi_l G$	G Lie Grubunun Lie Cebiri
l_g	Sol Öteleme
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
r_g	Sağ Öteleme
ad_g	G Lie Grubu için Ajoint Gösterimi
Ad_g	G Lie Grubunun Lie Cebiri için Ajoint Gösterimi
D	Dual Sayılar Halkası
H^+	Hamilton Oparetör
$H_{\alpha\beta}$	Genelleştilmiş Reel Kuaterniyon
$\widetilde{H}_{\alpha\beta}$	Genelleştilmiş Dual Kuaterniyon
K	Killing Form
$T_G(e)$	Tanjant Uzayı

1. GİRİŞ

Reel sayıları, bir boyutlu hiper-kompleks sayılar olarak düşünebiliriz. Reel sayılar, toplama ve çarpma işlemleri altında cisim özeliklerini sağlarlar. Herhangi bir kompleks sayıyı ise 2 boyutlu olan hiper-kompleks sayı olarak düşünebiliriz ve reel sayıları imajiner kısmı sıfır olan kompleks sayıların bir alt cümlesi olarak ele alabiliriz. Kompleks sayılar cisim özeliklerini de sağlarlar. Boyutu 2'den büyük hiper-kompleks sayıların herhangi bir cümlesi ise cisim olması özeliklerini sağlamaz.

William Rowan Hamilton 1830 yılından itibaren kompleks sayılar üzerinde çalışmış ve nihayet 1833 yılında iki reel sayıdan oluşan kompleks sayıların bir cebir oluşturduğu sonucuna varmıştır. Bu sonuçtan yola çıkarak çalışmalarını iki kompleks ve bir reel bileşenden oluşan ($q = a+e_1b+e_2c$) üçlü sayı sistemi üzerinde yoğunlaştırmıştır. Elemanlarını vektör olarak adlandırdığı bu sistem üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabildiği halde bölme işlemi için ise bir metot geliştirememiştir. 1843'de bu sayı sisteminin çarpma işleminde değişme özeliğinin gerçekleşmediğini anladı ve çarpma işleminin bu özeliğinden vazgeçerek $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1e_2e_3 = -1$ özeliğine sahip üç imajiner birim tanımladı. Böylece Hamilton, Kuaterniyon ismini verdiği $4-$boyutlu olan sözde hiper-kompleks sayıyı keşfetmiştir.

Bölüntülü(split) kuaterniyonlar ise 1849'da James Cockle tarafından ileri sürülmüştür. Hamilton ve James Cockle, çarpım operatörleri ile donatılmış 4 boyutlu gerçek vektör uzayı oluşturmuşlardır. Kuaterniyondan farklı olarak, bölüntülü kuaterniyonların böleni sıfır olabilmektedir. Kuaterniyonlar aynı reel ve kompleks sayılar gibi bir sayı sistemidir. Reel sayılar bir, kompleks sayılar iki bileşen içerirken kuaterniyonlar dört bileşene sahiptir. Kompleks sayılar reel sayıların bir kombinasyonudur. Dolayısıyla da reel sayılar, kompleks sayıların bir alt kümesidir. Diğer taraftan kuaterniyonlar da iki kompleks sayının kombinasyonundan oluşmuştur. Buna göre kompleks sayılarda kuaterniyonların bir alt kümesi olmalıdır. Bu sonuç, kuaterniyonların hem reel sayılar hem de kompleks sayıları kapsayan daha geniş bir sayı sistemi olduğunu göstermektedir.

Fizik biliminde ölçülebilen her şey reel olmak zorundadır. Bu nedenle reel sayılar bilimin doğuşundan itibaren kendilerine her alanda uygulama sahası bulmuştur. Öte yandan kompleks sayıların mekanik ve elektriksel uygulamalarda, özelikle devre analizlerinde kullanıldığı bilinmektedir. Ne yazık ki bu sayı sistemi uygulamalara sadece iki boyut getirir. 3-boyutlu uygulamalarda ise vektörler kullanılır. Fakat vektörlerin bazı uygulamalarda yetersiz kaldığı görülmektedir. Kuaterniyonlar vektörleri ifade etmede kullanılabilir. Bu sayı sistemi vektörleri kapsadığı gibi, bunlara ilaveten bir de reel bileşen ortaya koyarak uygulamalara dördüncü bir boyut katar. Kuaterniyonlar bölüm cebrine sahiptir. Kuaterniyon cebri, bileşimli fakat değişimli olmayan $(e_\circ, e_1, e_2, e_3)$ gibi dört birimden oluşur ve bunlardan biri reel, diğer üçü sanaldır (Soydaş 2003).

Kuaterniyon cebrinin keşfedildiği yıllarda A.Carley, K. Clifford ve J.J. Slyvester gibi İngiliz matematikçiler ve elektromanyetik teoriyi yeniden inşa eden J. C. Maxwell ile P. G. Tait gibi fizikçiler bu konuya önemli katkıda bulunmuşlardır. 20. yüzyılın başlarında ise vektör ve tensör cebrini geliştiren fizikçiler, fizikte vektör cebrinin kullanımını benimsetmişlerdir. 1878 yıllarında Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa İngilizce olarak yazdığı lineer cebir adlı kitapta, kompleks sayılarla ilgili teorisinde ileri sürdüğü çarpımın 3-boyutlu uzaya uygulamanın bir yolunu bulmuş ve özgün çalışma olarak kuaterniyonların çarpımının bizi üç boyutlu uzayda çalışmaya zorladığını vurgulamıştır. R. Kaya ve Ş. Koçak tarafından kuaterniyonlardan hareketle zayıf kuaterniyonların tanımı yapılarak $\mathbb{R}^3$ 'ün vektörleri zayıf kuaterniyon uzayına taşınmış ve bölme işleminin bu şekilde daha anlamlı olarak gerçekleştirilebileceği ispat edilmiştir.

Kuaterniyonların fizikte çok kullanılması ancak E. Schrödinger, W. Heisenberg, P. A. Dirac, M. Born ve daha pek çok ünlü fizikçi tarafından 1927 ile 1932 yılları arasında, neredeyse bu gün kullandığımız kuantum mekaniğinin kuruluşundan sonra gerçekleşmiştir. 20. yüzyılın başlarında Yale Üniversitesi profesörlerinden Gibbs uygun kuaterniyonlar için kullanım şeklini Hamilton'un çalışmalarının ve Rodrigues'e ait çalışmaların anahtar noktalarını buna ilave ederek keşfetti ve çalışmalarını vektörlerde nokta çarpımı ve bu gün bildiğimiz vektörel çarpımla tamamlandı. Hemen hemen aynı zamanlarda Alberd Einstein 4.boyut için bir kullanım keşfetti. Işık hızını tüm gözlemlerde sabitlemek için uzay ve zamanı birimlendirilmeliydi. Burada sonuç, 4. boyut için şekillendirilmişti. Fakat Einstein bir matematik düşkünü olmadığı için sadece lokal olarak işe yarayan parçaları buldu. Einstein; Minkowski'nin uzay-zamanı(space-time) ve Lorentz'in dönüşümünü keşfetmiş ve problemlerin çözümünü gerektiren yardımcıların özel rölativite içinde olduğunu göstermiştir.

Kuaterniyonlar son yıllarda her alanda artan bir hızla kullanılmaktadır. Kuaterniyon cebride kuaterniyonların kullanım alanlarının artmasına paralel olarak gelişme göstermektedir. Kompleks sayı ve kuaterniyon bileşiminden oluşan kompleks kuaterniyonlar (Bikuaterniyonlar), fiziksel uygulamalarda son yıllarda artan bir hızla yer almaktadır. Bunun yanı sıra kuaterniyonlar teorik fizik araştırmalarında kullanılmaktadır. Örneğin Gurlebeck ve Wolfgang kompleks kuaterniyonların yani bikuaterniyonları özel rölativite teorisi, parçacık mekaniği ve elektromanyetizmaya uygulayarak kompleks kuaterniyonların kendine oldukçageniş bir uygulama alanı bulduğunu göstermişlerdir. Bu güne kadar fizikteki bir çok denklem çeşitli bilim adamları tarafından kuaterniyonlarla yeniden ifade edilmiştir. Bunlardan bazıları şöyledir. Ş. C. K. Chou kinematik ve dinamik diferansiyel denklemleri, Adler kuantum mekaniğini, D. C. Jolly matris ve kuaterniyonlar arasındaki izomorfizmi, Kugotownsend tarafından kuaterniyonların süper simetrik modellerle olan bağlantısı, K. Morita tarafından kuaterniyonların Dirac teorisindeki rolü, M. Tanışlı ve K. Özdaş robotik manipülatörlerin pozisyonunun kuaterniyon dönüşümünü, M. Tanışlı akustik enerji korunum denklemini, yine Tanışlı ve Özgür açısal momentum ve Dirac denklemlerini, Negi ve arkadaşları tek kutup dynonslar gibi teorik varlıkları anlatmak için bu sayı cebrini kullanmışlardır.

Kompleks kuaterniyonların fizikteki uygulamaları daha çok genel ve özel rölativite ile kuantum mekaniği alanında olmuştur. Kompleks kuaterniyonlarla Dirac rölativistik denklemlerinin çeşitli formülasyonlarının ilk öncüsü A. W. Conway (1945) olarak görülmekle birlikte birçok bilim adamının yazılarında kompleks kuaterniyonlarla kuantum mekaniği K. Morita tarafından yeniden formüle edilmiştir. Leo'nun da kuaterniyon ve kompleks kuaterniyonlarla ilgili çalışmaları vardır.

Yang ve Freudenstein (1964) dual kuateriyonların, uzay mekaniği analizine uygulanmasını ele almış ve detaylı bir çalışmayla, bir dönme çifti ve üç silindirik çifti seçerek uzay 4-link mekaniğini incelemiştir. G. R. Veldkemp (1976) dual birim vektörler ve dual vektörler çiftleri yardımıyla dual birim küreyi ifade etmiş ve dual küresel hareketleri vermiştir. Ayrıca, dual hareket ve reel uzay hareketi arasındaki bağlantıyı göstermiştir. Rooney (1977) sabit bir nokta etrafında bir cismin dönme hareketini metodlar halinde ifade etmiştir. 3×3 reel ortogonal matrisler, 2×2 üniter matrisler, Pauli spin matrisleri, 3×3 özel üniter matrisleri yardımıyla bir eksen etrafında dönme matrislerini sınıflandırmıştır.

Bottema ve Roth (1979) reel ve dual kuaterniyonların uzay kinematiğine uygulanmalarını ifade etmiştir. Hareket matrislerinin formlarını vermişlerdir. Hacısalihoğlu (1983) reel ve dual kuaterniyonları ve sağladıkları ayrıntıları bir şekilde incelemiştir. Birim dual kuaterniyonlar yardımıyla dönme ve kayma operatörlerini de ifade etmiştir. Ayıca, vida operatörünün dönme ve kayma operatörlerinin bileşkesi olarak yazılabileceğini göstermiştir. Vida hareketlerinin bileşimini ve Euler açılarının denklemlerini vermiştir.

Hiller ve Woernle (1984) bir cismin genel vida hareketlerini nokta ve doğrulara göre formülleştirmiştir. Her iki durum için de temel bağıntılar sağlayan ani vida hareketlerinin diferensiyel denklemlerini vermiş ve bu diferensiyel denklemlerin çözümlerinden de sonlu vida hareketini ifade etmişlerdir. Bir doğrunun vida hareketi için gerekli dual vida tensörleri, dual matrisleri, vida koordinatları ve dual kuaterniyonların denklemlerini vermişlerdir.

Karger ve Novak (1985) reel kuaterniyonlar yardımıyla Öklid uzayında bir eksen etrafında dönmeyi adjoint gösterimiyle ifade etmişlerdir. Agrawal (1987) dual kuaterniyonları, Hamilton operatörlari ile formülleştirmiştir ve bu operatölere karşılık gelen dual matrislerin özeliklerini ifade etmiştir. Bu özelikleri bir nokta ve bir doğrunun vida hareketinin kinematik denklemlerini geliştirmekte kullanmıştır. Ward (1997) 3 ve 4 boyutlu Öklid uzaylarında dönme matrislerini, reel kuaterniyonları kullanarak vermistir. Kuaterniyonların matris formlarını ifade etmistir. Levent Kula tarafından hazırlanan "Bölüntülü Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları" doktora tezinde bölüntülü (split) kuaterniyonların Minkowski 3-uzayında dönme matrisleri tanımlanmıştır. Hamilton operatörleri ile Minkowski 3-uzayında vida hareketinin gösterimini yapmıştır. Pottmann (2001) "Computational line geometry" isimli kitabinda genelleştirilmiş kuaterniyonlari tanımını vermiş. Son yılarda, genelleştirimiş kuaterniyonlar, bölüm cebirlerine örnek teşkil etmesi bakımından önemli bir yere sahipttir.

Bu çalışmada, genelleştirillmiş reel kuaterniyonların özeliklerini ele alıp ve bunların Lie grup ve Lie cebir yapılarını inceliyeceğiz. Ayıca, dönme operatöründen, Killing formu ve Hamilton operatörlerinden bahsedilecek. Bu çalışmada verilen özeliklerin her birinin reel ve split kuaterniyonlar ile olan ilişkisi gösterilecektir. Ayrıca, genelleştirilmiş dual kuaterniyonlar ve özelikleri verilecektir. Konuların daha anlaşılır olabilmesi için genelleştirilmiş reel ve dual kuaterniyonların uygulamaları ve bunlara ait örnekler verilecektir. Reel ve dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar için Euler ve De-Movire formüllerini inceliyeceğiz. $q^n = 1$ denkleminin sonsuz çüzümünün olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, De-Moiver formülünüa genelleştirilmiş kuaterniyonlara karşılık gelen matrisler için de geçerli olduğunu gösterecağız.

$E^4_{\alpha\beta}$, 4-boyutlu uzayda bir uzay eğrisi boyunca Hamilton hareketini tanımlacağız. Bu hareketin bir homotetik hareket olduğunu gösterecağız. Ayıca, r. mertebeden regüler bir eğri ile tanımlanan Hamilton hareketi için her t anında $(r-1)$. mertebeden birtek ivme merkezinin olduğu da gösterilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Lie grubu, Lie cebri, adjoint gösterimi, skalar çarpım ve bize gerekli olan bazı tanımlar, teoremler ve notasyonlar hatırlatılacaktır.

Tanım 2.1.

V sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. Eğer

$$\eta : V \times V \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu bilineer, simetrik ve pozitif tanımlı ise η ya V üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu ve V ye de iç çarpımılı uzay denir(Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 2.2.

Bir Lie grubu, diferensiyellenebilir grup operatörlerine sahip diferensiyellenebilir bir manifolddur. G diferensiyellenebilir bir manifold olsun

$$\mu : G \times G \to G, \qquad \mu(a,b) = ab$$

ve G deki inversiyon operatörü olan

$$\xi : G \to G, \qquad \xi(a) = a^{-1}$$

dönüşümlerinin her ikisi de diferensiyellenebilir ise G ye Lie grubu denir (Boothby 1975, Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 2.3.

G Lie grubunun bir elemanı a olsun. Her $g \in G$ için $l_a(g) = ag$ olarak tanımlasın. l_a : $G \to G$ dönüşümüne G nin sol ötelemesi (sol çarpımı) denir. l_a bir diffeomorfizimdir. Her $g \in G$ için $r_a(g) = ga$ olarak tanımlansın. $r_a : G \to G$ dönüşümüne G nin sağ ötelemesi (sağ çarpımı) denir. r_a bir diffeomorfizimdir (Kobayashi ve Nomizu 1963, Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.4.

V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned} [,] \quad &: \quad V \times V \to V \\ (X, Y) \quad &\to \quad [X, Y] \end{aligned}$$

biçimindeki bir dönüşüm her $X, Y, Z \in V$ için aşağıdaki üç önermeyi doğruluyorsa bu dönüşüme Bracket operatörü, $(V, [,])$ ikilisine de bir Lie cebiri denir:

(i) $[,]$ bilineerdir.

(ii) $[X, Y] = -[Y, X]$ anti-simetrikdir.

(iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (Jakobi özdeşliği)

sağlar (Chevally 1946, Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.5.

Eğer her $a, g \in G$ için $\mathrm{d}l_a(X_g) = X_{ag}$ ise , G Lie grubu üzerindeki X vektör alanına sol-invaryant vektör alanı denir. Dolaysıyla

$$\begin{aligned} l_a &: G \to G \\ g &\to l_a(g) = ag \end{aligned}$$

sol çarpamının türev dönüşümü olan

$$\begin{aligned} \mathrm{d}l_a &: T_G(g) \to T_G(g) \\ X_g &\to \mathrm{d}l_a(X_g) = X_{ag} \end{aligned}$$

dönüşümü, X e ait tanjant vektörleri yer değiştirir. Sol invaryant vektör alanı diferensiyellenebilirdir.

G deki sol invaryant vektör alanlarının cümlesi $\chi_l(G)$ olsun. Vektör alanlarının alışılmış toplama ve skalar ile çarpma işlemleri $\chi_l(G)$ yi bir vektör uzay yapar. $\chi_l(G)$ de $[,]$ operatörü de tanımlanarak $\chi_l(G)$ bir Lie cebiri olur. $boy\ \chi_l(G) = n = boy\ G$ sonlu boyutuna sahiptir (O′Neil 1983, Howard 1991).

Lemma 2.6.

$X \in \chi_l(G)$ elemanını $X_e \in T_G(e)$ elemanına dönüştüren $f : \chi_l(G) \to T_G(e)$ fonksiyonu bir lineer izomorfizimdir. Burada e, G nin grup işlemine göre birim elemanıdır. $\phi : G \to G$ bir otomorfizim olsun. $X \in \chi_l(G)$ ise $\mathrm{d}\phi\,(X) \in \chi_l(G)$ dir ve

$$d\phi\,(X) : \chi_l(G) \to \chi_l(G)$$

Lie cebiri izomorfizimine ϕ nin diferensiyeli denir. d$\phi\,(X)$ diferensiyeli

$$d\phi_e : T_G(e) \rightarrow T_G(e)$$

dönüşümü ile ifade edilir (O′Neil 1983).

Tanım 2.7.

$a \in G$ olmak üzere g elemanını aga^{-1} elemanına dönüştüren

$$\begin{array}{rcl} C_a & : & G \rightarrow G \\ g & \rightarrow & C_a(g) = aga^{-1} \end{array}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda C_a bir diffeomorfizim olup C_a nın diferensiyeli ad_a ile gösterilir. O halde $dC_a = ad_a$ dır. $a, b \in G$ olduğunda $C_{ab} = abg(ab)^{-1} = a(bgb^{-1})a^{-1}$ dir. Böylece $C\ _{ab} = C_a o C_b$ olur. Diferensiyel alındığında ise

$$ad_{ab} = ad_a o ad_b$$

elde edilir. Bu grup homomorfizimine G nın adjoint gösterimi denir (O′Neil 1983, Gürlebeck and Sprössing 1997).

Tanım 2.8.

V reel vektör uzayı üzerinde $f : V \times V \rightarrow R$ iki lineer fonksiyonuna iki lineer form, eğer bu iki lineer form simetrik ise f ye simetrik iki lineer form denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.9.

E^n, n-boyutlu öklid uzayında uzaklık fonksiyonu d olmak üzere $f : E^n \to E^n$ fonksiyonu için eğer

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y), \qquad x, y \in E^n$$

ise f fonksiyonuna E^n in bir izometrisi denir (Yaylı 1988).

Tanım 2.10.

E^nin bir f izometrisi için eğer $f(o) = o$, $o \in E^n$ olacak şeklide bir o noktası mevcut ise f ye o etrafında bir dönme denir.

Tanım 2.11.

E^nin bir f izometrisi için eğer, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n$ olmak üzere

$$f(x) = (x_1 + t_1, ..., x_n + t_n), \quad t_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$$

ise f ye E^nde bir öteleme denir (Yaylı 1988).

Tanım 2.12.

$I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık, $0 \in I$ olsun. $h : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $A \in SO(n)$ ve $n \times 1$ tipindeki C matrisi t ye göre diferensiyellenebilir olmak üzere elemanları,

$$F(t) = \begin{bmatrix} h(t)A(t) & C(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlı $F(t)$ cümlesine E^n in 1-parametreli homotetik hareketi denir (Yaylı 1988).

Tanım 2.13.

$\mathbb{R}^3$ vektör uzayında bir

$$g(-,-) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall \overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3), \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$g(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \alpha u_1 v_1 + \beta u_2 v_2 + \alpha\beta u_3 v_3$$

şekilde tanımlanır. $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere bu g fonksiyonuna, genelleştirilmiş iç çarpım adı verilir. $E^3_{\alpha\beta} = \{\mathbb{R}^3, g(-,-)\}$. $E^3_{\alpha\beta}$ de vektöral çarpımı

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= \begin{vmatrix} \beta i & -\alpha j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= \beta(u_2 v_3 - u_3 v_2) i - \alpha(u_1 v_3 - u_3 v_1) j + (u_1 v_2 - u_2 v_1) k \end{aligned}$$

dir.

Özel Haller

(i) $\alpha = \beta = 1$ seçilmesi durumunda, g ye Öklid iç çarpımı ve $E^3_{\alpha\beta} = (\mathbb{R}^3, g)$ ye de Öklidiyen uzay denir.

(ii) $\alpha = 1$, $\beta = -1$ seçilmesi durumunda, g ye Lorentz iç çarpımı ve $E^3_{\alpha\beta} = (E^3_1, g)$ ye de Minkowski uzay denir.

3. REEL VE DUAL KUATERNİYONLAR

Bu bölümde genelleştirilmiş kuaterniyonları daha iyi anlayabilmek, hem reel hem de dual kuaterniyonlar ile olan ilişkisini daha rahat görebilmek için reel ve dual kuaterniyonlardan bahsedeceğiz.

Tanım 3.1.

$$H = \{q = a_\circ + a_1 i + a_2 j + a_3 k : a_\circ, a_1, a_2, a_3 \in R\}$$

cümlesini ele alalım. Burada $\{1, i, j, k\}$ birimlerinin çarpımları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

$\times$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

H nın her bir elemanına reel kuaterniyon denir. i, j, k birimleri 3-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sistemi olarak alınabilir. Dolaysıyla $q = a_\circ + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ kuaterniyonun skalar kısmı S_q ve vektörel kısmı $\overrightarrow{V}_q$ olmak üzere iki kısma ayrılır. $q = S_q + \overrightarrow{V}_q$ olmak üzere $S_q = a_\circ$, $\overrightarrow{V}_q = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ dir.

Tanım 3.2.

$q = S_q + \overrightarrow{V}_q$ ve $p = S_p + \overrightarrow{V}_p$ reel kuetrniyonlarının toplamı

$$q + p = (S_q + S_p) + (\overrightarrow{V}_q + \overrightarrow{V}_p),$$

şeklinde tanımlıdır.

$\lambda \in R$ olmak üzere skalarla çarpıma işlemi ise

$$\lambda q = (\lambda a_{\circ}) + (\lambda a_1)i + (\lambda a_2)j + (\lambda a_3)k$$

eşitliği ile tenımlıdır.

Tanım 3.3.

Reel kuaterniyonların çarpımı

$$\begin{aligned} \times \quad &: \quad H \times H \to H \\ (q,p) \quad &\to \quad q \times p = qp \end{aligned}$$

$$qp = S_q S_p - \left\langle \overrightarrow{V}_q, \overrightarrow{V}_p \right\rangle + S_q \overrightarrow{V}_p + S_p \overrightarrow{V}_q + \overrightarrow{V}_q \wedge \overrightarrow{V}_p$$

olarak tanımlanır. Burada, $\mathbb{R}^3$ teki iç çarpımı ifade etmek için " $\langle , \rangle$ " ve $\mathbb{R}^3$ teki vektöral çarpımı ifade etmek için ise " $\wedge$ " sembolleri kullanılmıştır. Bu çarpım matrislerle

$$qp = \begin{bmatrix} a_{\circ} & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_{\circ} & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_{\circ} & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_{\circ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{\circ} \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.4.

Bir q kuaterniyonun eşleniği $\overline{q}$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} \overline{()} &: H \to H \\ q &= S_q + \overrightarrow{V}_q \to \overline{q} = S_q - \overrightarrow{V}_q, \end{aligned}$$

veya $q = a_\circ + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ olmak üzere q reel kuaterniyonun eşleniği $\overline{q} = a_\circ - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ ile tanımlanır.

Tanım 3.5.

Bir q reel kuetrniyonunun normu N_q ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} N &: H \to \mathbb{R} \\ q &\to N(q) = N_q = q\overline{q} = \overline{q}q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanar.

$q = a_\circ + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ olmak üzere q reel kuaterniyonun normu $N_q = q\overline{q} = \overline{q}q = a_\circ^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ dır.

Tanım 3.6.

$N_q = 1$ olan $q = a_\circ + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ reel kuaterniyona birim reel kuaterniyon denir.

Tanım 3.7.

Bir q reel kuaterniyonun inversi (tersi) q^{-1} ile gösterilir.

$$
\begin{aligned}
(,)^{-1} \quad &: \quad H \to H \\
q \quad &\to \quad q^{-1} = \frac{\overline{q}}{N_q}, N_q \neq 0
\end{aligned}
$$

dır. Yani $q = a_\circ + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ olmak üzere q reel kuaterniyonun inversi

$$q^{-1} = \frac{a_\circ - a_1 i - a_2 j - a_3 k}{a_\circ^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

dır.

Tanım 3.8.(Reel kuaterniyonların kutupsal formu)

$q = a_\circ + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
q &= \sqrt{N_q}(\frac{q}{\sqrt{N_q}}) \\
&= \sqrt{N_q} q_\circ
\end{aligned}
$$

yazılabilir.

$$q_\circ = \frac{a_\circ + a_1 i + a_2 j + a_3 k}{\sqrt{a_\circ^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

ifadesi,

$$\cos\theta = \frac{a_\circ}{\sqrt{a_\circ^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \sin\theta = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{\sqrt{a_\circ^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

ve

$$\overrightarrow{S}_\circ = \frac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

olmak üzere

$$q_\circ = \cos\theta + \overrightarrow{S}_\circ \sin\theta,$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $q = \sqrt{N_q}(\cos\theta + \overrightarrow{S}_\circ \sin\theta)$ elde edilir. Bu ifadeye q kuaterniyonun kutupsal formu denir.

Tanım 3.9.

$q = a_\circ + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ kuaterniyonu kullanılarak Öklide 3 uzayındaki verilen dönme

$$M = \begin{bmatrix} a_\circ^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2(a_1 a_2 - a.a_3) & 2(a_1 a_3 + a_\circ a_2) \\ 2(a_\circ a_3 + a_1 a_2) & a_\circ^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2(a_2 a_3 - a_\circ a_1) \\ 2(a_1 a_3 - a_\circ a_2) & 2(a_\circ a_1 + a_2 a_3) & a_\circ^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \end{bmatrix}$$

matrisi ile tanımlanır.

Tanım 3.10.

Bir A dual sayısı $A = a + \varepsilon a^*$ ile gösterilir. Burada $a, a^* \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon^2 = 0$ kurallarıyla belirli bir sayıdır. Dual sayıların cümlesi D ile gösterilir. Dual sayıların cümlesi birimli, değişmeli bir halkadır.

$q = a_\circ + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ve $q^* = a_\circ^* + a_1^* i + a_2^* j + a_3^* k$ olmak üzere $Q = q + \varepsilon q^*$ şeklinde tanımlanan kuaterniyona dual kuaterniyon denir. Dual kuaterniyonlar cümlesini H_D ile göstereceğiz.

$Q = q + \varepsilon q^* = A_\circ + A_1 i + A_2 j + A_3 k$ kuaterniyonun skalar kısmı S_Q ve vektörel kısmı $\overrightarrow{V}_Q$ olmak üzere iki kısma ayrılır.

$$Q = S_Q + \overrightarrow{V}_Q$$

biçiminde yazılır. Burada

$$S_Q = A_\circ \text{ ve } \overrightarrow{V}_Q = A_1 i + A_2 j + A_3 k$$

dir.

Tanım 3.11.

$Q = A_\circ + A_1 i + A_2 j + A_3 k$ ve $Q = B_\circ + B_1 i + B_2 j + B_3 k$ dual kuaterniyonlarının toplamı

$$Q + P = (S_Q + S_P) + (\overrightarrow{V}_Q + \overrightarrow{V}_P)$$

şeklinde tanımlıdır.

$\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere skalarla çarpımi ise

$$\lambda Q = (\lambda A_\circ)1 + (\lambda A_1)i + (\lambda A_2)j + (\lambda A_3)k$$

şeklinde tenımlıdır.

Tanım 3.12.

Dual kuaterniyonların çarpımı

$$\begin{aligned} \times \quad &: \quad H_D \times H_D \to H_D \\ (Q, P) \quad &\to \quad Q \times P = QP \end{aligned}$$

biçiminde bir işlem olup

$$QP = qp + \varepsilon(qp^* + pq^*)$$

veya

$$
\begin{aligned}
QP &= S_Q S_P - \left\langle \overrightarrow{V}_Q, \overrightarrow{V}_P \right\rangle + S_P \overrightarrow{V}_Q + S_Q \overrightarrow{V}_P + \overrightarrow{V}_Q \wedge \overrightarrow{V}_P \\
&= (A_\circ B_\circ - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3) + (A_\circ B_1 + A_1 B_\circ + A_2 B_3 - A_3 B_2) i \\
&\quad + (A_\circ B_2 + A_2 B_\circ - \alpha A_1 B_3 - A_3 B_1) j + (A_\circ B_3 + A_1 B_2 - A_2 B_1 + A_3 B_\circ) k
\end{aligned}
$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.13.

Bir Q dual kuaterniyonunun eşleniği $\overline{Q}$ ile gösterilir ve

$$
\begin{aligned}
\overline{()} &: H_D \to H_D \\
Q &= S_Q + \overrightarrow{V}_Q \to \overline{Q} = S_Q - \overrightarrow{V}_Q,
\end{aligned}
$$

veya $Q = A_\circ + A_1 i + A_2 j + A_3 k$ olmak üzere Q dual kuaterniyonun eşleniği $\overline{Q} = A_\circ - A_1 i - A_2 j - A_3 k$ ile tanımlanır.

Tanım 3.13.

Bir dual kuetrniyonun normu

$$
\begin{aligned}
N &: H_D \to D \\
Q &\to N(Q) = N_Q = Q\overline{Q} = \overline{Q}Q
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanır.

$Q = A_\circ + A_1 i + A_2 j + A_3 k$ olmak üzere Q dual kuaterniyonun normu $N_Q = Q\overline{Q} = A_\circ^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$ dır.

Tanım 3.14.

$N_Q = 1$ olan $Q = A_\circ + A_1 i + A_2 j + A_3 k$ dual kuaterniyonuna birim dual kuaterniyon denir.

Tanım 3.15.

Bir dual kuaterniyonun inversi (tersi) Q^{-1} ile gösterilir.

$$\begin{array}{rcl} (,)^{-1} & : & H_D \to H_D \\ Q & \to & Q^{-1} = \dfrac{\overline{Q}}{N_Q}, \end{array}$$

$N_Q \neq 0$ ve $Q = A_\circ + A_1 i + A_2 j + A_3 k$ olmak üzere Q dual kuaterniyonun inversi

$$Q^{-1} = \frac{Q_\circ - Q_1 i - Q_2 j - Q_3 k}{Q_\circ^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu1983).

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR

$$H_{\alpha\beta} = \{q = a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_\circ, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

cümlesini ele alalım. Burada $\{1, i, j, k\}$ birimlerinin çarpımı aşağıda verilmiştir;

$$\begin{aligned} i^2 &= -\alpha, \quad j^2 = -\beta, \quad k^2 = -\alpha\beta \\ ij &= -ji = k, \quad jk = -kj = \beta i \\ ki &= -ik = \alpha j, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$H_{\alpha\beta}$ nın her bir elemanına, bir genelleştirilmiş kuaterniyon adı verilir. Burada $a_\circ, a_1,\ a_2,\ a_3$ reel sayılarına q genelleştirilmiş kuaterniyonun bileşenleri denir. Bundan sonraki bölümlerde, bir genelleştirilmiş kuaterniyonlar için $q = a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ gösterimi kullanılacaktır. i, j, k birimleri 3-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sistemi olarak alınabilir. Dolaysıyla, $q = a_\circ + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ kuaterniyonun skalar kısmı S_q ve vektörel kısmı $\overrightarrow{V}_q$ olmak üzere iki kısma ayrılır.

$$q = S_q + \overrightarrow{V}_q$$

biçiminde yazılır. Burada

$$S_q = a_\circ, \quad \overrightarrow{V}_q = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

dir.

Özel Haller

(i) $\alpha = \beta = 1$ seçilmesi durumunda reel kuaterniyonlar elde edilir.

(ii) $\alpha = 1$, $\beta = -1$ seçilmesi durumunda split kuaterniyonlar elde edilir.

(iii) $\alpha = 1$, $\beta = 0$ seçilmesi durumunda semi-kuaterniyonlar elde edilir.

(iv) $\alpha = -1$, $\beta = 0$ seçilmesi durumunda split semi-kuaterniyonlar elde edilir.

(v) $\alpha = 0$, $\beta = 0$ seçilmesi durumunda $\frac{1}{4}-$ kuaterniyonlar elde edilir(Rosenfeld 1997).

$q = a_\circ + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ve $p = b_\circ + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ iki genelleştirilmiş kuaterniyon toplamı

$$\begin{aligned} q + p &= (S_q + S_p) + (V_q + V_p) \\ &= (a_\circ + b_\circ) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k, \end{aligned}$$

eşiliği ile tanımlıdır. $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $q = a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ olmak üzere λq dış işlemi

$$\lambda q = (\lambda a_\circ)1 + (\lambda a_1)i + (\lambda a_2)j + (\lambda a_3)k$$

ile tanımlıdır. Bu iki işlem ile birlikte $H_{\alpha\beta}$ cümlesi reel sayılar cismi üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayı olur. Ayrıca $q = a_\circ + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ve $p = b_\circ + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ iki genelleştirilmiş kuaterniyon çarpımı

$$\begin{aligned} \times \quad &: \quad H_{\alpha\beta} \times H_{\alpha\beta} \to H_{\alpha\beta} \\ (q, p) \quad &\to \quad q \times p = qp \end{aligned}$$

olmak üzere

$$qp = S_q S_p - g(V_q, V_p) + S_q V_p + S_p V_q + V_q \wedge V_p$$

veya

$$qp = \begin{bmatrix} a_\circ & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha\beta a_3 \\ a_1 & a_\circ & -\beta a_3 & \beta a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_\circ & -\alpha a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_\circ \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\begin{aligned} g \quad &: \quad \operatorname{Im} H_{\alpha\beta} \times \operatorname{Im} H_{\alpha\beta} \to \mathbb{R} \\ (V_q, V_p) \quad &\to \quad g(V_q, V_p) = \alpha a_1 b_1 + \beta a_2 b_2 + \alpha\beta a_3 b_3, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \wedge \quad &: \quad \operatorname{Im} H_{\alpha\beta} \times \operatorname{Im} H_{\alpha\beta} \to \operatorname{Im} H_{\alpha\beta} \\ (V_q, V_p) \quad &\to \quad V_q \wedge V_p = \begin{vmatrix} \beta i & -\alpha j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \quad \beta(a_2 b_3 - a_3 b_2) i - \alpha(a_1 b_3 - a_3 b_1) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k \end{aligned}$$

dır. $\operatorname{Im} H_{\alpha\beta} = \{a_1 i + a_2 j + a_3 k : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ dır. Bu işlem ile birlikte $H_{\alpha\beta}$ ya genelleştirilmiş kuaterniyon cebiri denir.

Burada $\alpha = \beta = 1$ seçilmesi durumunda Öklid uzayındaki iç çarpım ve vektörel çarpım elde edilir. $\alpha = 1, \beta = -1$ seçilmesi durumunda, E_2^4 yarı Öklidyen uzayındaki iç çarpım ve vektöral çarpım elde edilir.

4.1. Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler

1) **Eşlenik:**

$$\begin{aligned} \overline{(,)} \quad &: \quad H_{\alpha\beta} \to H_{\alpha\beta} \\ q \quad &= \quad S_q + V_q \to \overline{q} = S_q - V_q \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır ve buna göre bir $q = a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ olmak üzere q genelleştirilmiş kuaterniyon eşleniği $\overline{q} = a_\circ 1 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ olur. Eşlenik işlemi aşağıdaki özeliklere sahiptir.

i) $\overline{pq} = \overline{q}\overline{p}, \forall\ p, q \in H_{\alpha\beta}$

ii) $\overline{\lambda p + \delta q} = \lambda\overline{p} + \delta\overline{q},\ \ \lambda, \delta \in \mathbb{R}$ ve $p, q \in H_{\alpha\beta}$

iii) $\overline{\overline{q}} = q, \qquad \forall q \in H_{\alpha\beta}$

2) **Norm:**

$$\begin{aligned} N \quad &: \quad H_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{R} \\ q \quad &\rightarrow \quad N_q = q\overline{q} = \overline{q}q \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan N işlemine $H_{\alpha\beta}$ üzerinde norm denir. $q = a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ olmak üzere q genelleştirilmiş kuaterniyonun N_q normu

$$N_q = a_\circ^2 + \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2$$

reel sayısı ile tanımlıdır. Norm işlemi aşağıdaki özeliklere sahiptir.

i) $N_{pq} = N_p N_q, \qquad \forall q, p \in H_{\alpha\beta}$

ii) $N_{\lambda q} = \lambda^2 N_q, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall q \in H_{\alpha\beta}$

3) **İnvers:**

$$\begin{aligned} (,)^{-1} \quad &: \quad H_{\alpha\beta} \rightarrow H_{\alpha\beta} \\ q \quad &\rightarrow \quad q^{-1} = \frac{\overline{q}}{N_q}, \quad N_q \neq 0 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan işleme $H_{\alpha\beta}$ da invers işlemi denir. $N_q \neq 0$ olmak üzere bir genelleştirilmiş kuaterniyonun inversi

$$q^{-1} = \frac{a_\circ 1 - a_1 i - a_2 j - a_3 k}{a_\circ^2 + \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2}$$

dır. İnvers işlemi aşağıdaki özeliklere sahiptir.

i) $(pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1}, \quad \forall q, p \in H_{\alpha\beta}$ ve $N_q \neq 0, N_p \neq 0$

ii) $(\lambda q)^{-1} = \frac{1}{\lambda} q^{-1}, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall q \in H_{\alpha\beta}$ ve $N_q \neq 0$

iii) $N_{q^{-1}} = \frac{1}{N_q}, \qquad \forall q \in H_{\alpha\beta}$ ve $N_q \neq 0.$

4) **İki genelleştirilmiş kuaterniyonun skalar çarpımı:**

$q = S_q + V_q$ ve $p = S_p + V_p$ iki genelleştirilmiş kuaterniyon olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle , \rangle &: \quad H_{\alpha\beta} \times H_{\alpha\beta} \to \mathbb{R} \\ (q,p) &\to \quad \langle q,p \rangle = S_q S_p + g(V_q, V_p) \\ &= \quad a_\circ b_\circ + \alpha a_1 b_1 + \beta a_2 b_2 + \alpha\beta a_3 b_3 \\ &= \quad S(p\overline{q}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan işleme iki genelleştirilmiş kuaterniyonun skalar çarpımı denir.

4.2. Genelleştirilmiş Kuaterniyonların Lie Grubu ve Lie Cebiri

Teorem 4.2.1

$G = \{q \in H_{\alpha\beta} : N_q = 1\}$ bir Lie grubudur.

İspat:

(i) G cümlesi genelleştirilmiş kuaterniyon çarpımına göre bir gruptur ve bu grubunun birim elemanı $e = 1$ dir.

(ii) G, $E^4_{\alpha\beta}$ de 3-boyutlu bir manifold dur. f fonksiyonu

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad H_{\alpha\beta} \to \mathbb{R} \\ q \quad &\to \quad f(q) = \langle q, q \rangle \\ &= \quad a_\circ^2 + \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2 \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. $\{x_\circ, x_1, x_2, x_3\}$, $E^4_{\alpha\beta}$ uzayının koordinat sistemi olsun. f fonksiyonun koordinat fonksiyonlaı cinsinden

$$f = x_\circ^2 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \alpha\beta x_3^2,$$

olarak yazılabilir. f fonksiyonu diferensiyellebilir dir ve f nin jakobiyen matrisi

$$\begin{aligned} J(f) \quad &= \quad [\frac{\partial f}{\partial x_\circ} \ \frac{\partial f}{\partial x_1} \ \frac{\partial f}{\partial x_2} \ \frac{\partial f}{\partial x_3}] \\ &= \quad [2x_\circ \ 2\alpha x_1 \ 2\beta x_2 \ 2\alpha\beta x_3] \end{aligned}$$

dir. $J(f)$ matrisin rankı bir dir. $f^{-1}(1) = G$ dir. 1 değeri f nin bir regüler değeri olduğundan G, $E^4_{\alpha\beta}$ de 3 boyutlu bir manifold olur.

(iii)

$$\begin{aligned} \mu \quad &: \quad H_{\alpha\beta} \times H_{\alpha\beta} \to H_{\alpha\beta} \\ & \quad \mu(q, p) = qp \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tau &: G \to G \\ \tau(q) &= q^{-1} = \overline{q} \end{aligned}$$

dönüşümlerinin diferensiyellenebilir olduğu gösterebilir. Böylece

$$G = \{q \in H_{\alpha\beta} : N_q = 1\}$$

cümlesi bir Lie grubu olur. G nin Lie cebirini bulmak için $T_G(e)$ yi bulmak yeterlidir.

Teorem 4.2.2:

G Lie grubunun Lie cebiri Im $H_{\alpha\beta}$ dır.

İspat:

$\nu_e \in T_G(e)$ olsun. G içinde ν_e yi hız vektörü olarak kabul eden bir γ eğrisi alalım. Yani $\gamma(0) = 1$ ve $\gamma'(0) = \nu_e$ olacak biçimde G içinde en az bir

$$\begin{aligned} \gamma &: I \to G \\ \gamma(s) &= a_\circ(s) + a_1(s)\,i + a_2(s)\,j + a_3(s)\,k \end{aligned}$$

eğrisi vardır. $\gamma(s) \in G$ olduğundan

$$a_\circ^2(s) + \alpha a_1^2(s) + \beta a_2^2(s) + \alpha\beta a_3^2(s) = 1$$

dir. Bu eşitliğin $s = 0$ noktasında türevini alınırsa,

$$2a_\circ(s)\,a_\circ'(s) + 2\alpha a_1(s)\,a_1'(s) + 2\beta a_2(s)\,a_2'(s) + 2\alpha\beta a_3(s)\,a_3'(s) = 0$$

eşitliğin elde edilir.

$a_\circ(0) = 1$, $a_1(0) = 0$, $a_2(0) = 0$, $a_3(0) = 0$ olduğundan $a'_\circ(0) = 0$ olur. $T_G(e)$, e noktasından geçen eğrilerin hız vektörlerinin kümesidir. $T_G(e)$ deki her vektörü, Im $H_{\alpha\beta}$ nin e noktasındaki teğet uzayının $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right\}$ bazındaki vektörlerin bir lineer birleşimi olarak yazabiliriz. Buna göre $a'_\circ(0) = 0$ hız vektörü

$$a'_\circ(0) = a'_\circ(0)\ \frac{\partial}{\partial x_\circ} + a'_1(0)\frac{\partial}{\partial x_1} + a'_2(0)\frac{\partial}{\partial x_2} + a'_3(0)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

dir. $a'_\circ(0) = 0$ olduğundan $T_G(e) \subset Sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right\}$ dır.

$boyG = boyT_G(e) = 3$ olduğundan $T_G(e) = Sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right\}$ bulunur. Öyle ise G nin Lie cebriri Im $H_{\alpha\beta}$ dır.

$$T_G(e) \simeq \operatorname{Im} H_{\alpha\beta} = \{a_1 i + a_2 j + a_3 k : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

olur. $T_G(e)$, $E^3_{\alpha\beta} = \{q = (a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, g(q,q) = \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2\}$ deki çatının e noktasına taşınmış halidir. $\chi_l(G)$ Lie cebiri $E^3_{\alpha\beta}$ ile özdeşlenebilir.

4.3 Bir Lie Grubu ve Lie Cebiri İçin Adjoint Dönüşümler

1) G Lie Grubunun Matris Temsili

$G = \{q \in H_{\alpha\beta} : N_q = 1\}$ ve $g \in G$ için

$$\begin{aligned} int\ g \quad &: \quad G \to G \\ x \quad &\to \quad int\ g(x) = gxg^{-1} \end{aligned}$$

birebir, örten ve differensiyellenebilir olan $int\ g$ fonksiyonunu tanımlayalım.

Bu fonksiyonun türev dönüşümünün grubun birim elemanı olan $e = 1$ noktasında kısıtlamasına adjoint dönüşümü denir. Bir $q \in H_{\alpha\beta}$ için

$$\begin{aligned} adq \quad &: \quad T_G(e) \to T_G(e) \\ p \quad &\to \quad adq(p) = qpq^{-1} \end{aligned}$$

dir. $T_G(e) = Sp\{i, j, k\}$ olduğundan $\{i, j, k\}$ bazına göre

$$adq = \begin{bmatrix} a_\circ^2 + \alpha a_1^2 - \beta a_2^2 - \alpha\beta a_3^2 & 2\beta(a_1 a_2 - a_\circ a_3) & 2\beta(a_1 a_3 + a_\circ a_2) \\ 2\alpha a_\circ a_3 + 2\ \alpha a_1 a_2 & a_\circ^2 + \alpha a_1^2 - \beta a_2^2 - \alpha\beta a_3^2 & 2\alpha\beta a_2 a_3 - 2\alpha a_\circ a_1 \\ 2\alpha a_1 a_3 - 2\ a.a_2 & 2a_\circ a_1 + 2\beta a_2 a_3 & a_\circ^2 - \alpha a_1^2 - \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Özel Haller

(i) Burada $\alpha = 1, \beta = 1$ seçilmesi durumunda reel kuaterniyonlar ele edilir. Böylelikle reel kuaterniyonlar için bilinen

$$adq = M = \begin{bmatrix} a_\circ^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2(a_1a_2 - a_\circ a_3) & 2(a_1a_3 + a_\circ a_2) \\ 2a_\circ a_3 + 2\ a_1a_2 & a_\circ^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2a_2a_3 - 2a_\circ a_1 \\ 2a_1a_3 - 2\ a_\circ a_2 & 2a_\circ a_1 + 2a_2a_3 & a_\circ^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. $MM^t = I_3$ ve $\det M = 1$ olduğundan M ortogonal olup adq dönüşümü R^3 te dönmelere karşılık gelir. Dönme ekseni $S = (s_1, s_2, s_3)$ olmak üzere

$$M = I + \sin\theta S + (1 - \cos\theta)S^2$$

şeklinde yazılabilir. Burada θ dönme açısı ve S anti-simetrik bir matris olup

$$S = \begin{bmatrix} 0 & s_3 & s_2 \\ -s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(ii) Aynı şekilde $\alpha = 1, \beta = -1$ seçilmesi durumunda bölünmüş kuaterniyonlar elde edilir.

$$adq = N = \begin{bmatrix} a_\circ^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & -2a_1a_2 + 2a_\circ a_3 & -2(a_1a_3 + a_\circ a_2) \\ 2a_\circ a_3 + 2\ a_1a_2 & a_\circ^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 & -2a_2a_3 - 2a_\circ a_1 \\ 2a_1a_3 - 2\ a_\circ a_2 & 2a_\circ a_1 - 2a_2a_3 & a_\circ^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $N^t \varepsilon N \varepsilon = 1$ dır. Ayrıca $\det N = 1$ olduğundan N yarı-ortogonal olup, adq dönüşümü Minkowski 3 uzayında dönmelere karşılık gelir.

Dönme ekseni $C = (c_1, c_2, c_3)$ olmak üzere

$$N = I + \sinh\theta C + (1 - \cosh\theta)C^2$$

şeklinde yazılabilir. Burada θ dönme açısı ve $C^t = -\varepsilon C\varepsilon$ eşitliğini sağlayan C anti-simetrik

$$C = \begin{bmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

şeklindedir. Bu sonuç (Kula 2003) aynıdır.

Theorem 4.3.1.

$\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta \end{bmatrix}$ olmak üzere $(adq)^t\varepsilon(adq) = \varepsilon$ dır. Yani adq quasi-ortogonal dir. Ayrıca, $\det adq = 1$ olduğundan adq lineer dönüşümü $T_G(e) = \operatorname{Im} H_{\alpha\beta}$ de izometridir.

Theorem 4.3.2.

$q \in H_{\alpha\beta}, N_q = 1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$olmak üzere

$$adq = I + \sin\theta S + (1 - \cos\theta)S^2$$

dir.

2) Lie Çarpımı

$G = \{q \in H_{\alpha\beta} : N_q = 1\}$ Lie grubunun sol invaryant vektör alanlarının cümlesini

$$\boldsymbol{\chi}_l(G) = \{X : (l_g)_*(X) = X\}$$

ile gösterelim. Bu cümle e noktasindaki tanjant uzay ile izomorftur, yani $\boldsymbol{\chi}_l(G) \simeq T_G(e)$ dir.

$$\begin{aligned} [\,,] \quad &: \quad T_G(e) \times T_G(e) \to T_G(e) \\ (X, Y) \quad &\to \quad [X, Y] = D_X Y - D_Y X \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan çarpım bir Lie çarpımı olur ve $(T_G(e), [,])$ ikilisi $G = \{q \in H_{\alpha\beta} : N_q = 1\}$ Lie grubunun Lie cebiridir. Şimdi Lie çarpımının kuralını bulalım.

$s = 0$ da e noktasından geçen ve $\gamma_1'(0) = i$ olan bir

$$\begin{aligned} \gamma_1 \quad &: \quad I \to G \\ s \quad &\to \quad \gamma_1(s) \end{aligned}$$

eğrisi alalım. $g \in G$ omlak üzere $(l_g)(\gamma_1(s))) = \mu_1(s)$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} \mu_1 \quad &: \quad I \to G \\ s \quad &\to \quad \mu_1(s) \end{aligned}$$

eğrisi vardır. Öyle ki $(l_g)_*(\gamma_1'(0)) = \mu_1'(0)$ dır.

$(l_g)_*(\gamma_1'(0)) = \mu_1'(0)$ eşitiliğinde $g = g_\circ + g_1 i + g_2 j + g_3 k$ alınırsa

$$\begin{aligned} \mu_1'(0) \quad &= \quad g \times i = -\alpha g_1 + g_0 i + \alpha g_3 j - g_2 k \\ &= \quad \overrightarrow{X}_1 \end{aligned}$$

Aynı şekilde $s = 0$ da e noktasından geçen ve $\gamma_2'(0) = j$ olan bir

$$\begin{aligned} \gamma_2 &: I \to G \\ s &\to \gamma_2(s) \end{aligned}$$

eğrisi alalım. $g \in G$ omlak üzere $(l_g)(\gamma_2(s))) = \mu_2(s)$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} \mu_2 &: I \to G \\ s &\to \mu_2(s) \end{aligned}$$

eğrisi vardır. Öyle ki $(l_g)_*(\gamma_2'(0)) = \mu_2'(0)$ dır.

$$\begin{aligned} \mu_2'(0) &= g \times j = -\beta g_2 - \beta g_3 i + g_0 j + g_1 k \\ &= \overrightarrow{X}_2, \end{aligned}$$

$s = 0$ da e noktasından geçen ve $\gamma_3'(0) = k$ olan bir

$$\begin{aligned} \gamma_3 &: I \to G \\ s &\to \gamma_3(s) \end{aligned}$$

eğrisi alalım. $g \in G$ omlak üzere $(l_g)(\gamma_3(s))) = \mu_3(s)$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} \mu_3 &: I \to G \\ s &\to \mu_3(s) \end{aligned}$$

eğrisi vardır. Öyle ki $(l_g)_*(\gamma_3'(0)) = \mu_3'(0)$ dır.

$$\begin{aligned} \mu_3'(0) &= g \times k = -\alpha\beta g_3 + \beta g_2 i - \alpha g_1 j + g_0 k \\ &= \overrightarrow{X}_3, \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Dolaysıyla $\chi_l(G)$ nin bir bazı $\{X_1, X_2, X_3\}$ dir, baz vektörlerini $\chi(E^4_{\alpha\beta})$ ün baz vektörlerin bir lineer birleşimi olarak yazabiliriz.

$$\overrightarrow{X}_1 = -\alpha g_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + g_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha g_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - g_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\overrightarrow{X}_2 = -\beta g_2 \frac{\partial}{\partial x_0} - \beta g_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ g_0 \frac{\partial}{\partial x_2} - g_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\overrightarrow{X}_3 = -\alpha\beta g_3 \frac{\partial}{\partial x_0} + \beta g_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \alpha g_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + g_0 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

yazabiliriz.

Böylece $\chi_l(G)$ üzerinde braket öperatörünü tenımlayabiliriz. Bunun için $\chi_l(G)$ nin baz elemanlarının çarpım kuralını vermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{X}_1}\overrightarrow{X}_2 &= (-\alpha\beta g_3, \beta g_2, -\alpha g_1, g_0), \\ D_{\overrightarrow{X}_2}\overrightarrow{X}_1 &= (\ \alpha\beta g_3, -\beta g_2,\ \alpha g_1, g_0) \end{aligned}$$

bulunur.

$[\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{X}_2\ ] = 2\overrightarrow{X}_3$ olur. Aynı şekilde

$$D_{\overrightarrow{X}_2}\overrightarrow{X}_3 = (\ \alpha\beta g_1, -\beta g_0,\ -\alpha\beta g_3, \beta g_2)$$

$$D_{\overrightarrow{X}_3}\overrightarrow{X}_2 = (\ -\alpha\beta g_1,\ \beta g_0,\ \ \alpha\beta g_3, -\beta g_2)$$

bu eşitliklerden $[\overrightarrow{X}_2, \overrightarrow{X}_3\ ] = 2\beta\overrightarrow{X}_1$ bulunur. Son olarak

$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{X}_1}\overrightarrow{X}_3 &= (\ -\alpha\beta g_2, -\alpha\beta g_3,\ -\alpha\beta g_0, \alpha g_1) \\ D_{\overrightarrow{X}_3}\overrightarrow{X}_1 &= (\ \ \alpha\beta g_2,\ \alpha\beta g_3,\ \ \alpha\beta g_0, -\alpha g_1), \end{aligned}$$

eşitliklerinden $[\overrightarrow{X}_3, \overrightarrow{X}_1\ ] = 2\alpha\overrightarrow{X}_1$ bulunur.

$\chi_l(G) \simeq T_G(e)$ olduğundan $T_G(e)$ üzerindenki braket çarpım kuralını verebiliriz. Burada

$$\overrightarrow{e}_i = (\frac{\partial}{\partial x_i}) \mid_e \quad i = 1, 2, 3$$

olmak üzere $(\left[\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{X}_2\right]) \mid_e = 2\left(\overrightarrow{X}_3\right) \mid_e$olur. $\left[\left(\overrightarrow{X}_1\right) \mid_e, \left(\overrightarrow{X}_2\right) \mid_e\right] = 2\overrightarrow{e}_3$ buradan da $[\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2] = 2\overrightarrow{e}_3$ bulunur. Aynı şekilde $[\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3] = 2\beta\overrightarrow{e}_1$ ve $[\overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{e}_1] = 2\alpha\overrightarrow{e}_2$ eşitlikleri elde edilir. Burada $\alpha = \beta = 1$ seçilmesi durumunda reel kuaterniyonlar için braket çarpımının kuralları elde edilir. $\alpha = 1, \beta = -1$ seçilmesi durumunda ise split kuaterniyonlar için braket çarpımının kuralları elde edilir.

3) G in Lie cebirinin matris gösterimi

$\overrightarrow{X} \in T_G(e)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} Ad_{\overrightarrow{X}} & : & T_G(e) \to T_G(e) \\ \overrightarrow{Y} & \to & Ad_{\overrightarrow{X}}(\overrightarrow{Y}) = \left[\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}\right] \end{array}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu lineer dönüşüme karşılık gelen matris Lie cebrinin matris temsilidir.

Teorem 4.3.3.

$\overrightarrow{X} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ olmak üzere $Ad_{\overrightarrow{X}} = \begin{bmatrix} 0 & -2\beta x_3 & 2\beta x_2 \\ 2\alpha x_3 & 0 & -2\alpha x_1 \\ 2\ x_2 & 2\ x_1 & 0 \end{bmatrix}$

dır.

İspat:

$\overrightarrow{X} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ olmak üzere lineer dönüşüme karşlık gelen matrisi bulalım.

$$\begin{aligned} Ad_{\overrightarrow{X}}(\overrightarrow{e}_1) &= \left[\overrightarrow{X}, \overrightarrow{e}_1\right] \\ &= [x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, \overrightarrow{e}_1] \end{aligned}$$

$[e_1, e_2] = 2e_3$, $[e_2, e_3] = 2\beta e_1$, $[e_3, e_1] = 2\alpha e_2$, $[e_1, e_1] = [e_2, e_2] = [e_3, e_3] = 0$ ve Lie çarpımı lineer olduğundan:

$$[x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, \overrightarrow{e}_1] = 0e_1 + 2\alpha x_3e_2 - 2\beta x_2e_3$$

olarak bulunur. Ayıca,

$$\begin{aligned} Ad_{\overrightarrow{X}}(\overrightarrow{e}_2) &= \left[\overrightarrow{X}, \overrightarrow{e}_2\right] \\ &= [x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, \overrightarrow{e}_2] \\ &= -2\beta x_3e_1 + 0e_2 - 2\alpha x_1e_3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Ad_{\overrightarrow{X}}(\overrightarrow{e}_3) &= \left[\overrightarrow{X}, \overrightarrow{e}_3\right] \\ &= [x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, \overrightarrow{e}_3] \\ &= -2\beta x_2e_1 - 2\alpha x_1e_2 + 0e_3. \end{aligned}$$

O halda $Ad_{\overrightarrow{X}}$ lineer dönüşüme karşılık gelen matris Lie cebrinin matris olup

$$Ad_{\overrightarrow{X}} = \begin{bmatrix} 0 & -2\beta x_3 & 2\beta x_2 \\ 2\alpha x_3 & 0 & -2\alpha x_1 \\ 2\ x_2 & 2\ x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

Burada $\alpha = \beta = 1$ seçilmesi durumunda reel kuaterniyonlar cebirinin matris temsili elde edilir. $\alpha = 1, \beta = -1$ seçilmesi durumunda ise split kuaterniyonlar cebirinin matris temsili elde edilir.

4) Killing bi-lineer formu

$$\begin{aligned} K \quad &: \quad T_G(e) \times T_G(e) \to T_G(e) \\ (\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) \quad &\to \quad K(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = iz(Ad_{\overrightarrow{X}} Ad_{\overrightarrow{Y}}) \end{aligned}$$

böyle tanımlanan K dönüşümüne G Lie grubunun killing bi-lineer formu denir. K dönüşümü aşağıdaki özeliklere sahiptir.

i) K bi-lineerdir.

ii) $K(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = K(\overrightarrow{Y}, \overrightarrow{X})$

iii) $K(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = K(adg\overrightarrow{X}, adg\overrightarrow{Y})$.

Teorem 4.3.4.

$$\begin{aligned} g \quad &: \quad \operatorname{Im} H_{\alpha\beta} \times \operatorname{Im} H_{\alpha\beta} \to \operatorname{Im} H_{\alpha\beta} \\ (\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) \quad &\to \quad g(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = \alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_2 + \alpha\beta x_3 y_3 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$K(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = -8g(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$$

dir.

İspat:

$\overrightarrow{X} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ ve $\overrightarrow{Y} = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ olmak üzere:

$$Ad_{\overrightarrow{X}} = \begin{bmatrix} 0 & -2\beta x_3 & 2\beta x_2 \\ 2\alpha x_3 & 0 & -2\alpha x_1 \\ 2\ x_2 & 2\ x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$Ad_{\overrightarrow{Y}} = \begin{bmatrix} 0 & -2\beta y_3 & 2\beta y_2 \\ 2\alpha y_3 & 0 & -2\alpha y_1 \\ 2\ y_2 & 2\ y_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ad_{\overrightarrow{X}}Ad_{\overrightarrow{Y}} = \begin{bmatrix} 0 & -2\beta x_3 & 2\beta x_2 \\ 2\alpha x_3 & 0 & -2\alpha x_1 \\ 2\ x_2 & 2\ x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2\beta y_3 & 2\beta y_2 \\ 2\alpha y_3 & 0 & -2\alpha y_1 \\ 2\ y_2 & 2\ y_1 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

$$Ad_{\overrightarrow{X}}Ad_{\overrightarrow{Y}} = \begin{bmatrix} -4\alpha\beta x_3y_3 - 4\beta x_2y_2 & -4\beta x_2y_1 & 4\alpha\beta x_3y_1 \\ 4\alpha x_1y_1 & -4\alpha\beta x_3y_3 - 4\alpha x_1y_1 & 4\alpha\beta x_3y_2 \\ 4\alpha x_1y_3 & 4\beta x_2y_3 & -4\ \beta x_2y_2 - 4\alpha x_1y_1 \end{bmatrix}$$

bu matrisin köşegen elemanlarının toplamı:

$iz(Ad_{\overrightarrow{X}}Ad_{\overrightarrow{Y}}) = -8(\alpha x_1y_1 + \beta x_2y_2 + \alpha\beta x_3y_3)$ böylelikle $iz(Ad_{\overrightarrow{X}}Ad_{\overrightarrow{Y}}) = -8g(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$.

Teorem 4.3.5.

α ve β iki pozitif reel sayı olsun. Bu durumda $G = \{q \in H_{\alpha\beta} : N_q = 1\}$ kompakt olur.

İspat:

$K(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}) < 0$ ise Lie grubu kompakt olur. Burada α ve β iki pozitif reel sayı olduğundan $g(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}) > 0$ dolaysıyla $K(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}) < 0$ olur bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.3.6

G Lie grubunun Killing bi-lineer formuna karşılık gelen matris K ve

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta \end{bmatrix}$$

olmak üzere $K = -8\epsilon$ dır.

İspat:

G Lie grubunun Killing bi-lineer formuna

$$\begin{aligned} K \quad &: \quad T_G(e) \times T_G(e) \to T_G(e) \\ (\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}) \quad &\to \quad K(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}) = -8g(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}) \end{aligned}$$

şeklinde bir lineer dönüşümün olup $T_G(e) \simeq Sp\{e_1, e_2, e_3\}$ olduğundan

$$K = \begin{bmatrix} K(e_1,e_1) & K(e_1,e_2) & K(e_1,e_3) \\ K(e_2,e_1) & K(e_2,e_2) & K(e_2,e_3) \\ K(e_3,e_1) & K(e_3,e_2) & K(e_3,e_3) \end{bmatrix},$$

şeklindedir. Buradan

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} -8\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -8\beta & 0 \\ 0 & 0 & -8\alpha\beta \end{bmatrix} \\ &= -8\epsilon. \end{aligned}$$

4.4 Hamilton Operatörleri ve Özelikler

Bu bölümde $\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ operatörlerine karşılık gelen Hamilton matrisleri tanımlanacak ve özelikleri ifade edilecektir. Bu bölümdeki çalışmalarımızda, $\alpha = \beta = 1$ seçilmesi durumunda reel kuaterniyonlar için $\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ operatörlerine karşılık gelen Hamilton matrisleri elde edilir. $\alpha = 1$, $\beta = -1$ seçilmesi durumunda ise split kuaterniyonlar için $\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ operatörlerine karşılık gelen Hamilton matrisleri elde edilir.

$q = a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ reel genelleştirillmiş bir kuaterniyonun olsun,

$$\begin{aligned} \overset{+}{h}_q &: H_{\alpha\beta} \to H_{\alpha\beta} \\ \overset{+}{h}_q(x) &= qx, \quad x \in H_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

lineer dönüsümüne karşılık gelen matris $\overset{+}{H}(q)$ ise

$$\begin{aligned} \overset{+}{h}_q(1) &= (a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)1 = a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \\ \overset{+}{h}_q(i) &= (a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)i = -\alpha a_1 + a_\circ i + \alpha a_3 j - a_2 k, \\ \overset{+}{h}_q(j) &= (a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)j = -\beta a_2 - \beta a_3 i + a_\circ j + a_1 k, \\ \overset{+}{h}_q(k) &= (a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)k = -\alpha\beta a_3 - \beta a_2 i - \alpha a_1 j + a_\circ k \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\overset{+}{H}(q) = \begin{bmatrix} a_\circ & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha\beta a_3 \\ a_1 & a_\circ & -\beta a_3 & \beta a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_\circ & -\alpha a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_\circ \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \overset{-}{h}_q &: H_{\alpha\beta} \to H_{\alpha\beta} \\ \overset{-}{h}_q(x) &= xq, \quad x \in H_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

lineer dönüsümüne karşılık gelen matris $\overset{-}{H}(q)$ ise

$$\begin{aligned} \overset{-}{h}_q(1) &= 1(a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) = a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \\ \overset{-}{h}_q(i) &= i(a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) = -\alpha a_1 + a_\circ i - \alpha a_3 j + a_2 k, \\ \overset{-}{h}_q(j) &= j(a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) = -\beta a_2 + \beta a_3 i + a_\circ j - a_1 k, \\ \overset{-}{h}_q(k) &= k(a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) = -\alpha\beta a_3 - \beta a_2 i + \alpha a_1 j + a_\circ k. \end{aligned}$$

eşitliklerinden;

$$\overset{-}{H}(q) = \begin{bmatrix} a_\circ & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha\beta a_3 \\ a_1 & a_\circ & \beta a_3 & -\beta a_2 \\ a_2 & -\alpha a_3 & a_\circ & \alpha a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_\circ \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Burada $\overset{+}{H}(q)$ ve $\overset{-}{H}(q)$ matrislerine q genellestirilmis kuaterniyonuna karşılık gelen Hamilton matrisleri denir.

$$M=\left\{\begin{bmatrix} a_\circ & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha\beta a_3 \\ a_1 & a_\circ & \beta a_3 & -\beta a_2 \\ a_2 & -\alpha a_3 & a_\circ & \alpha a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_\circ \end{bmatrix} : a_\circ, a_1, a_2, a_3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} \text{olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} \overset{+}{H} &: H_{\alpha\beta} \to M \\ x &\to \overset{+}{H}(x) = qx, \end{aligned}$$

dönüsümü lineer izomorfizimdir. Ayrıca $H^+(qp) = H^+(q)H^+(p)$ esitligi saglanır.

$$N=\left\{\begin{bmatrix} a_\circ & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha\beta a_3 \\ a_1 & a_\circ & \beta a_3 & -\beta a_2 \\ a_2 & -\alpha a_3 & a_\circ & \alpha a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_\circ \end{bmatrix} : a_\circ, a_1, a_2, a_3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} \text{olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} \overset{-}{H} &: H_{\alpha\beta} \to M \\ x &\to \overset{-}{H}(x) = xq, \end{aligned}$$

dönüsümü lineer izomorfizimdir. Ayrıca $H^-(qp) = H^-(q)H^-(p)$ eşitliği sağlanır.

H^+ ve H^- tanımlarından aşağıdaki eşitlikleri verebiliriz,

$\overset{+}{H}(1) = \overset{-}{H}(1) = I_4$

$\overset{+}{H}(i) = E_1, \overset{+}{H}(j) = E_2, \overset{+}{H}(k) = E_3,$

$\overset{-}{H}(i) = F_1, \overset{-}{H}(j) = F_2, \overset{-}{H}(k) = F_3,$

olmak üzere

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta \\ 1 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \; F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta \\ 1 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri 4×4 reel matrislerdir. Ayrıca

$E_1E_1 = -\alpha I_4$, $E_2E_2 = -\beta I_4$, $E_3E_3 = -\alpha\beta I_4$,

$E_1E_2 = -\ E_2E_1 = E_3$,

$E_2E_3 = -E_3E_2 = -\beta\ E_1$,

$E_3E_1 = -E_1E_3 = \alpha E_2$, ve

$F_1F_1 = -\alpha I_4$, $F_2F_2 = -\beta I_4$, $F_3F_3 = -\alpha\beta I_4$,

$F_1F_2 = -\ F_2F_1 = -F_3$,

$F_2F_3 = -F_3F_2 = -\beta F_1$,

$F_3F_1 = -F_1F_3 = -\alpha F_2$,

eşitlikleri sağlanır.

E_1, E_2, E_3 ve F_1, F_2, F_3 matrislerinin özelikleri i, j, k genelleştirilmis kuaterniyon birimleri ile özdeştir. H^+ ve H^- lineer olduğundan

$$\begin{aligned} \overset{+}{H}(q) &= a_\circ I + a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3\ E_3 \\ \overset{-}{H}(q) &= a_\circ I + a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3\ F_3 \end{aligned}$$

yazabiliriz. $q = a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ve $p = b_\circ 1 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \overset{+}{H}(q)p &= \begin{bmatrix} a_\circ & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha\beta a_3 \\ a_1 & a_\circ & -\beta a_3 & \beta a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_\circ & -\alpha a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b. \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_\circ b_\circ - \alpha a_1 b_1 - \beta a_2 b_2 - \alpha\beta a_3 b_3 \\ a_1 b_\circ + a_\circ b_1 - \beta a_3 b_2 + \beta a_2 b_2 \\ a_2 a_\circ + \alpha a_3 b_1 + a_\circ b_2 - \alpha a_2 b_3 \\ a_3 b_\circ - a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_\circ b_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

oldugundan $H^+(q)p = qp$ eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} \overset{-}{H}(q)p &= \begin{bmatrix} b_\circ & -\alpha b_1 & -\beta b_2 & -\alpha\beta b_3 \\ b_1 & b_\circ & \beta b_3 & -\beta b_2 \\ b_2 & -\alpha b_3 & b_\circ & \alpha b_1 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & b_\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_\circ \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_\circ b_\circ - \alpha a_1 b_1 - \beta a_2 b_2 - \alpha\beta a_3 b_3 \\ a_1 b_\circ + a_\circ b_1 - \beta a_3 b_2 + \beta a_2 b_2 \\ a_2 a_\circ + \alpha a_3 b_1 + a_\circ b_2 - \alpha a_2 b_3 \\ a_3 b_\circ - a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_\circ b_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

oldugundan $H^-(p)q = qp$ eşitliği elde edilir.

Teorem 4.4.1.

q birim genelleştirillmiş kuaterniyon olmak üzere $\overset{+}{H}, \overset{-}{H}$ operatörlerinden üretilen matrisler ortogonaldir.

İspat:

$\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \end{bmatrix}$ olmak üzere eğer $\left(\overset{+}{H}(q)\right)^t \epsilon \overset{+}{H}(q) = \epsilon$ eşitliği sağlanıyorsa, $\overset{+}{H}$ operatörüne karşılık gelen matris ortogonaldir.

Aynı şekilde $\overset{-}{H}$ operatörüne karşılık gelen matris ortogonal olabilmesi için $\left(\overset{-}{H}(q)\right)^t \epsilon \overset{-}{H}(q) = \epsilon$ eşitliğini sağlanması gerekir ve $\det \left[\overset{+}{H}(q)\right] = (N_q)^2$, $\det \left[\overset{-}{H}(q)\right] = (N_q)^2$.

Teorem 4.4.2.

q ve p iki genelleştirilmiş kuaterniyon ve λ reel bir sayı olmak üzere $\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ operatörleri aşağıdaki özelikleri sağlarlar.

(i) $q = p \Leftrightarrow \overset{+}{H}(q) = \overset{+}{H}(p) \Leftrightarrow \overset{-}{H}(q) = \overset{-}{H}(p)$

(ii) $\overset{+}{H}(q+p) = \overset{+}{H}(q) + \overset{+}{H}(p),\ \overset{-}{H}(q+p) = \overset{-}{H}(q) + \overset{-}{H}(p)$

(iii) $\overset{+}{H}(\lambda q) = \lambda \overset{+}{H}(q),\ \overset{-}{H}(\lambda q) = \lambda \overset{-}{H}(q)$

(iv) $iz \left[\overset{+}{H}(q)\right] = 4a_\circ,\ \ iz \left[\overset{-}{H}(q)\right] = 4a_\circ$

(v) $\det \left[\overset{+}{H}(q)\right] = N_q^2$, $\det \left[\overset{-}{H}(q)\right] = N_q^2$

(vi) $\overset{+}{H}(qp) = \overset{+}{H}(q)\overset{+}{H}(p),\ \overset{-}{H}(qp) = \overset{-}{H}(p)\overset{-}{H}(q)$

(vii) $\overset{+}{H}(q^{-1}) = [\overset{+}{H}(q)]^{-1}, \quad \overset{-}{H}(q^{-1}) = [\overset{-}{H}(q)]^{-1},\ N_q^2 \neq 0$

(viii) $[\overset{+}{H}(q)]^t \epsilon \overset{+}{H}(q) = \epsilon, \ \ [\overset{-}{H}(q)]^t \epsilon \overset{-}{H}(q) = \epsilon$

(ix) $\overset{+}{H}(q)p = qp$, $\overset{-}{H}(p)q = qp$

(x) $\overset{+}{H}(q)\overset{-}{H}(p) = \overset{-}{H}(p)\ \overset{+}{H}(q)$

İspat:

(i) (ii) (iii) (iv) özelikleri $\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ operatörlerinin tanımından yaralanarak rahatlıkla ispat edilir.

Teorem 4.4.3.

$\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ dönüşümlerine karşlık gelen matrisler değişmelidir.

İspat:

Her hangi r, q ve p genelleştirilmiş kuaterniyonunu ele alalım.

$$\begin{aligned}(pr)q &= \overset{+}{H}(pr)q \\ &= \overset{+}{H}(p)\overset{+}{H}(r)q \\ &= \overset{+}{H}(p)\overset{-}{H}(q)r\end{aligned}$$

Şimdi de

$$\begin{aligned} p(rq) &= \overset{+}{H}(rq)p \\ &= \overset{+}{H}(q)\overset{+}{H}(r)p \\ &= \overset{-}{H}(q)\overset{+}{H}(p)r \end{aligned}$$

r keyfi olduğundan $\overset{+}{H}(p)\overset{-}{H}(q) = \overset{-}{H}(q)\overset{+}{H}(p)$ eşitliği elde edilir. Bu da ispatımızı tamamlar.

4.5 Genelleştirillmiş Kuaterniyonların Kutupsal Formu

(i) α ve β yi pozitif sayı alalım. $q = a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ reel genelleştirillmiş kuaterniyonu,

$$q = r(\cos\theta + \overrightarrow{u}\sin\theta)$$

biçiminde kutupsal formuda ifade edilibilir. Burada

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{N_q} = \sqrt{a_\circ^2 + \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2}, \\ \cos\theta &= \frac{a_\circ}{\sqrt{N_q}}, \ \sin\theta = \frac{\sqrt{\alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2}}{\sqrt{N_q}} \end{aligned}$$

özelikllerini sağlayan bir θ açısı var ve $\overrightarrow{u}$ birim vektörü

$$\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{\sqrt{\alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2}}(a_1, a_2, a_3)$$

dır.

Tanım 4.5.1.

Birim genelleştirillmiş kuaterniyonların cümlesi $S^3_{\alpha\beta}$ ve birim genelleştirillmiş vektör cümlesi $S^2_{\alpha\beta}$ olmak üzere

$$S^3_{\alpha\beta} = \left\{q = x_\circ + (x_1, x_2, x_3) \in H_{\alpha\beta} : x_\circ^2 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \alpha\beta x_3^2 = 1; \alpha, \beta > 0\right\}$$

ve

$$S^2_{\alpha\beta} = \{\overrightarrow{w} = (x_1, x_2, x_3) \in E^3_{\alpha\beta} : \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \alpha\beta x_3^2 = 1; \alpha, \beta > 0\}$$

olsun.

Lemma 4.5.2.

$\overrightarrow{w} \in S^2_{\alpha\beta}$ olmak üzere

$$(\cos\theta_1 + \overrightarrow{w}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \overrightarrow{w}\sin\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + \overrightarrow{w}\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

dır.

Teorem 4.5.3. **(**De-Moivre Formü**)**

$q \in S^3_{\alpha\beta}$ için $q = \cos\theta + \overrightarrow{u}\sin\theta$ olmak üzere

$$q^n = \cos n\theta + \overrightarrow{u}\sin n\theta$$

dir.

İspat:

İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım. n negatif olmayan bir tamsayı olsun. $n = 2$ için teoremin doğruluğu Lemma 4.5.2. kullanarak

$$q^2 = (\cos\theta + \overrightarrow{u}\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + \overrightarrow{u}\sin 2\theta$$

gösterebilirik. $(\cos\theta + \overrightarrow{u}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \overrightarrow{u}\sin n\theta$ olduğunu varsayalım. $(\cos\theta + \overrightarrow{u}\sin\theta)^{n+1} = \cos(n+1)\theta + \overrightarrow{u}\sin(n+1)\theta$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + \overrightarrow{u}\sin\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + \overrightarrow{u}\sin\theta)^n(\cos\theta + \overrightarrow{u}\sin\theta) \\
&= (\cos n\theta + \overrightarrow{u}\sin n\theta)(\cos\theta + \overrightarrow{u}\sin\theta) \\
&= \cos(n\theta + \theta) + \overrightarrow{u}\sin(n\theta + \theta) \\
&= \cos(n+1)\theta + \overrightarrow{u}\sin(n+1)\theta.
\end{aligned}$$

n negatif bir tamsayı olsun,

$$\begin{aligned}
q^{-1} &= \cos\theta - \overrightarrow{u}\sin\theta \\
q^{-n} &= \cos(-n\theta) + \overrightarrow{u}\sin(-n\theta) \\
&= \cos n\theta - \overrightarrow{u}\sin n\theta.
\end{aligned}$$

Özel Hal

Eğer $\alpha = \beta = 1$ alırsak, $q = a_\circ + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ birim reel kuaterniyon olup, q nın De-Moivre formü

$$q^n = \cos n\theta + \overrightarrow{u}\sin n\theta$$

dir (Cho 1998).

Örnek 4.5.4.

α ve β pozitif sayı alalım. $q_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})$ birim genelleştirilmiş kuaterniyon 6. mertebeden $(q_1^6 = 1)$ ve $q_2 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})$ 3. mertebeden$(q_2^3 = 1)$ dir. Ayrıca q_1^4 ve q_2^8 eşitir.

İspat:

$q_1 = \cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}}\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow q_1^6 = 1$

$q_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}}\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})\sin\frac{2\pi}{3} \Rightarrow q_2^3 = 1$

(ii) α yı pozitif ve β yı negatif sayı alalım. O zaman $q = a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ reel genelleştirillmiş kuaterniyonun için üç durum vardir.

1) $N_q = a_\circ^2 + \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2 < 0$. Çün $0 < a_\circ^2 < -\alpha a_1^2 - \beta a_2^2 - \alpha\beta a_3^2$ dır, o zaman $\alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2 < 0$ dır. q nun kutupsal formü

$$q = r(\sinh\theta + \overrightarrow{u}\cosh\theta)$$

biçiminde ifade edilibilir. Burada

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{|N_q|} = \sqrt{|a_\circ^2 + \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2|}, \\ \sinh\theta &= \frac{a_\circ}{\sqrt{|N_q|}}, \quad \cosh\theta = \frac{\sqrt{-\alpha a_1^2 - \beta a_2^2 - \alpha\beta a_3^2}}{\sqrt{|N_q|}} \end{aligned}$$

özelikllleri sağlayan bir θ açısı var ve $\overrightarrow{u}$ birim genelleştirillmiş vektörü

$$\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{\sqrt{-\alpha a_1^2 - \beta a_2^2 - \alpha\beta a_3^2}}(a_1, a_2, a_3)$$

dır.

Özel Hal

Eğer $\alpha = 1, \beta = -1$ alırsak ve $N_q = a_\circ^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 < 0$. O zaman q spacelike kuaterniyon olup, q nun kutupsal formü

$$q = \sqrt{|N_q|}(\sinh\theta + \overrightarrow{u}\cosh\theta)$$

dır. Burada $\overrightarrow{u}$, E_1^3 de birim sapcelike vektördür (Özdemir 2006).

Teorem 4.5.5.

$q = r(\sinh\theta + \overrightarrow{u}\cosh\theta)$ olmak üzere

$$q^n = r^n(\sinh n\theta + \overrightarrow{u}\cosh n\theta)$$

dir.

2) $N_q = a_\circ^2+\alpha a_1^2+\beta a_2^2+\alpha\beta a_3^2 > 0$ ve $\alpha a_1^2+\beta a_2^2+\alpha\beta a_3^2 < 0$ olsun. Bu kuaterniyonun kutupsal formu için

$$q = r(\cosh\theta + \overrightarrow{u}\sinh\theta)$$

biçiminde ifade edilibilir. Burada

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{N_q} = \sqrt{a_\circ^2 + \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2}, \\ \cosh\theta &= \frac{a_\circ}{\sqrt{N_q}}, \ \ \sinh\theta = \frac{\sqrt{-\alpha a_1^2 - \beta a_2^2 - \alpha\beta a_3^2}}{\sqrt{N_q}} \end{aligned}$$

özeliklleri sağlayan bir θ açısı var ve $\overrightarrow{u}$ birim vektörü

$$\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{\sqrt{-\alpha a_1^2 - \beta a_2^2 - \alpha\beta a_3^2}}(a_1, a_2, a_3)$$

dır.

Özel Hal

$\alpha = 1, \beta = -1$ alalım. $N_q = a_\circ^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 > 0$ ve $a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 < 0$ olmak üzere q bir timelike kuaterniyon dur ki vektöral kısmı spacelike dir. q nun kutupsal formü

$$q = \sqrt{N_q}(\cosh\theta + \overrightarrow{u}\sinh\theta)$$

dır. Burada

$$\cosh\theta = \frac{a_\circ}{\sqrt{N_q}}, \quad \sinh\theta = \frac{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{\sqrt{N_q}}$$

ve

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}(a_1, a_2, a_3)$$

E_1^3 de birim spacelike vektördür ve $\overrightarrow{u}^2 = +1$ (Özdemir 2009).

3) $N_q = a_\circ^2 + \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2 > 0$ ve $\alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2 > 0$ olsun. Bu kuaterniyonun kutupsal formü

$$q = r(\cos\theta + \overrightarrow{u}\sin\theta)$$

biçiminde kutupsal formuda ifade edilibilir. Burada

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{N_q} = \sqrt{a_\circ^2 + \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2}, \\ \cos\theta &= \frac{a_\circ}{\sqrt{N_q}}, \ \sin\theta = \frac{\sqrt{\alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2}}{\sqrt{N_q}} \end{aligned}$$

özelikleri sağlayan bir θ açısı var ve $\overrightarrow{u}$ birim vektörü

$$\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{\sqrt{\alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2}}(a_1, a_2, a_3)$$

dır.

Özel Hal

$\alpha = 1, \beta = -1$ alalım. $N_q = a_\circ^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 > 0$ ve $a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 > 0$ olmak üzere q bir timelike kuaterniyon ki vektöral kısmı da timelike dir. q nun kutupsal formü

$$q = \sqrt{N_q}(\cos\theta + \overrightarrow{u}\sin\theta)$$

dır. Burada $\overrightarrow{u}$, E_1^3 de birim timeelike vektördür ve $\overrightarrow{u}^2 = -1$ (Özdemir 2009).

Tanım 4.5.6. (Genelleştirillmiş Kuaterniyonlar için Euler Formu)

$\overrightarrow{w} \in S^2_{\alpha\beta}$ için $\overrightarrow{w}^2 = -1$ dır. Bu bilgiden yola çıkarak

$$\overrightarrow{w}^3 = -\overrightarrow{w}, \quad \overrightarrow{w}^4 = 1,$$

olduğunu da görüp herhangi bir θ için

$$\begin{aligned} e^{w\theta} &= 1 + w\theta - \frac{\theta^2}{2!} - w\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + ... \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - ... + w(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - ...) \\ &= \cos\theta + w\sin\theta \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} \cos\theta &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... \\ \sin\theta &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... \end{aligned}$$

açılımlarını da kullandık.

4.6 Genelleştirillmiş Kuaterniyonlara Karşılık Gelen Matrisler için De-Moivre Formu

α ve β ni pozitif sayı alalım. q birim genelleştirilmiş kuaterniyon olsun. Sol çarpım fonksiyonunu

$$\begin{aligned} \varphi_l &: \quad H_{\alpha\beta} \to H_{\alpha\beta} \\ x &\to \quad \varphi_l(x) = qx, \qquad x \in H_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu lineer dönüşüm bir dönmeye karşılık geldiğinden, kolayca gösterilebilir ki açıyı ve normu korur. φ_l dönüşümünün matris temsili

$$A_{\varphi_l} = \begin{bmatrix} a_\circ & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha\beta a_3 \\ a_1 & a_\circ & -\beta a_3 & \beta a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_\circ & -\alpha a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_\circ \end{bmatrix}$$

dir. q birim reel genelleştirilmiş kuaterniyon, q nın kutupsal formu $q = \cos\theta + \overrightarrow{u}\sin\theta$ olmak üzere, karşılık gelen matrisler için De-Moivre formülünü bulalım.

Teorem 4.6.1.

$$\phi : (H_{\alpha\beta}, +, .) \to (M_{(4,R)}, \oplus, \otimes)$$

$$\phi(a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) \to \begin{bmatrix} a_\circ & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha\beta a_3 \\ a_1 & a_\circ & -\beta a_3 & \beta a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_\circ & -\alpha a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_\circ \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümü bir izomorfizimdir.

İspat

ϕ dönüşümünün izomorfizim olduğunu göstermek için 1-1, örten ve homomorfizma olduğunu göstermemiz gerekir. Öncelikle bu dönüşümün homomorfizma olduğunu yani aşağıdaki eşitlikleri sağladığını gösterelim.

$$\begin{aligned} \phi(q+p) &= \phi(q) \oplus \phi(p) \\ \phi(q.p) &= \phi(q) \otimes \phi(p) \end{aligned}$$

$p, q \in H_{\alpha\beta}$ ve $q = a_\circ + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $p = b_\circ + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ olsun.

$$
\begin{aligned}
\phi(q+p) &= \phi\left[(a_\circ + b_\circ) + (a_1+b_1)i + (a_2+b_2)j + (a_3+b_3)k\right] \\
&= \begin{bmatrix} a_\circ + b_\circ & -\alpha(a_1+b_1) & -\beta(a_2+b_2) & -\alpha\beta(a_3+b_3) \\ a_1+b_1 & a_\circ + b_\circ & -\beta a_3 & \beta(a_2+b_2) \\ a_2+b_2 & \alpha(a_3+b_3) & a_\circ + b_\circ & -\alpha(a_1+b_1) \\ a_3+b_3 & -(a_2+b_2) & a_1+b_1 & a_\circ + b_\circ \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_\circ & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha\beta a_3 \\ a_1 & a_\circ & -\beta a_3 & \beta a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_\circ & -\alpha a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_\circ \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_\circ & -\alpha b_1 & -\beta b_2 & -\alpha\beta b_3 \\ b_1 & b_\circ & -\beta b_3 & \beta b_2 \\ b_2 & \alpha b_3 & b_\circ & -\alpha b_1 \\ b_3 & -b_2 & b_1 & b_\circ \end{bmatrix} \\
&= \phi(q) \oplus \phi(p).
\end{aligned}
$$

Örten olduğunu gösterelim. $H_{\alpha\beta} = \{q_1, q_2, ..., q_n, ...\}$ ve $M_{(4,R)} = \{\phi_{q_1}, \phi_{q_2}, ..., \phi_{q_n}, ...\}$ olmak üzere her $\phi_{q_k} \in M_{(4,R)}$ için $\phi(q_k) = \phi_{q_k}$ olacak şekilde $q_k \in H_{\alpha\beta}$ vardır. ϕ dönüşümün 1-1 olduğunu aşikar dir. Böylelikle ispat tamamlanmış oldu.

A_{φ_l} matrisini kutupsal formda yazalım. q birim genelleştirilmiş kuaterniyon olsun.

$$
\begin{aligned}
q &= a_\circ + a_1 i + a_2 j + a_3 k \\
&= \cos\theta + \overrightarrow{u}\sin\theta \\
&= \cos\theta + (u_1, u_2, u_3)\sin\theta \\
&= \cos\theta + (u_1\sin\theta, u_2\sin\theta, u_3\sin\theta).
\end{aligned}
$$

Buradan

$$\begin{bmatrix} a_\circ & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha\beta a_3 \\ a_1 & a_\circ & -\beta a_3 & \beta a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_\circ & -\alpha a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\alpha u_1 \sin\theta & -\beta u_2 \sin\theta & -\alpha\beta u_3 \sin\theta \\ u_1 \sin\theta & \cos\theta & -\beta u_3 \sin\theta & \beta u_2 \sin\theta \\ u_2 \sin\theta & \alpha u_3 \sin\theta & \cos\theta & -\alpha u_1 \sin\theta \\ u_3 \sin\theta & -u_2 \sin\theta & u_1 \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

şeklinde φ_l matrisinin kutupsal formdaki ifadesine ulaşabiliriz.

Lemma 4.6.2.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\alpha u_1 \sin\theta & -\beta u_2 \sin\theta & -\alpha\beta u_3 \sin\theta \\ u_1 \sin\theta & \cos\theta & -\beta u_3 \sin\theta & \beta u_2 \sin\theta \\ u_2 \sin\theta & \alpha u_3 \sin\theta & \cos\theta & -\alpha u_1 \sin\theta \\ u_3 \sin\theta & -u_2 \sin\theta & u_1 \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \cos\theta' & -\alpha u_1 \sin\theta' & -\beta u_2 \sin\theta' & -\alpha\beta u_3 \sin\theta' \\ u_1 \sin\theta' & \cos\theta' & -\beta u_3 \sin\theta' & \beta u_2 \sin\theta' \\ u_2 \sin\theta' & \alpha u_3 \sin\theta' & \cos\theta' & -\alpha u_1 \sin\theta' \\ u_3 \sin\theta' & -u_2 \sin\theta' & u_1 \sin\theta' & \cos\theta' \end{bmatrix}$$

olmak üzere $A.B$ matrisi

$$A.B = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\alpha u_1 \sin(\theta+\theta') & -\beta u_2 \sin(\theta+\theta') & -\alpha\beta u_3 \sin(\theta+\theta') \\ u_1 \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') & -\beta u_3 \sin(\theta+\theta') & \beta u_2 \sin(\theta+\theta') \\ u_2 \sin(\theta+\theta') & \alpha u_3 \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') & -\alpha u_1 \sin(\theta+\theta') \\ u_3 \sin(\theta+\theta') & -u_2 \sin(\theta+\theta') & u_1 \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 4.6.3.

Her n tamsayısı için

$$A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\alpha u_1\sin\theta & -\beta u_2\sin\theta & -\alpha\beta u_3\sin\theta \\ u_1\sin\theta & \cos\theta & -\beta u_3\sin\theta & \beta u_2\sin\theta \\ u_2\sin\theta & \alpha u_3\sin\theta & \cos\theta & -\alpha u_1\sin\theta \\ u_3\sin\theta & -u_2\sin\theta & u_1\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

matrisinin n. kuvveti

$$A^n=\begin{bmatrix} \cos n\theta & -\alpha u_1\sin n\theta & -\beta u_2\sin n\theta & -\alpha\beta u_3\sin n\theta \\ u_1\sin n\theta & \cos n\theta & -\beta u_3\sin n\theta & \beta u_2\sin n\theta \\ u_2\sin n\theta & \alpha u_3\sin n\theta & \cos n\theta & -\alpha u_1\sin n\theta \\ u_3\sin n\theta & -u_2\sin n\theta & u_1\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

dir.

İspat: Lemma 4.7.2 ni kullanarak, ispati tümevarımla yapılabılır.

n negatif bir tamsayı olsun.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \alpha u_1\sin n\theta & \beta u_2\sin n\theta & \alpha\beta u_3\sin n\theta \\ -u_1\sin n\theta & \cos n\theta & \beta u_3\sin n\theta & -\beta u_2\sin n\theta \\ -u_2\sin n\theta & -\alpha u_3\sin n\theta & \cos n\theta & \alpha u_1\sin n\theta \\ -u_3\sin n\theta & u_2\sin n\theta & -u_1\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

$$A^{-n}=\begin{bmatrix} \cos(-n\theta) & -\alpha u_1\sin(-n\theta) & -\beta u_2\sin(-n\theta) & -\alpha\beta u_3\sin(-n\theta) \\ u_1\sin(-n\theta) & \cos(-n\theta) & -\beta u_3\sin(-n\theta) & \beta u_2\sin(-n\theta) \\ u_2\sin(-n\theta) & \alpha u_3\sin(-n\theta) & \cos(-n\theta) & -\alpha u_1\sin(-n\theta) \\ u_3\sin(-n\theta) & -u_2\sin(-n\theta) & u_1\sin(-n\theta) & \cos(-n\theta) \end{bmatrix}$$

Özel Hal

Eğer $\alpha = \beta = 1$ alırsak, $q = a_\circ + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ birim reel kuaterniyon olup, bu kuaterniyona karşılık gelen matris için De-Moivre formü incelenmiştir (Meral 2009).

Tanım 4.6.3. (Genelleştirillmiş Kuaterniyonlara Karşılık Gelen Matrisler için Euler Formu)

A bir matris olsun. Biz A matrisini

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha u_1 & -\beta u_2 & -\alpha\beta u_3 \\ u_1 & 0 & -\beta u_3 & \beta u_2 \\ u_2 & \alpha u_3 & 0 & -\alpha u_1 \\ u_3 & -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Seçelim. $A^2 = -I_4$ olduğu hemen görülebilir.

$$\begin{aligned} e^{A\theta} &= I_4 + A\theta + \frac{(A\theta)^2}{2!} + \frac{(A\theta)^3}{3!} + \frac{(A\theta)^4}{4!} + ... \\ &= I_4(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} -)... + A(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - ...) \\ &= \cos\theta + A.\sin\theta, \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\alpha u_1 \sin\theta & -\beta u_2 \sin\theta & -\alpha\beta u_3 \sin\theta \\ u_1 \sin\theta & \cos\theta & -\beta u_3 \sin\theta & \beta u_2 \sin\theta \\ u_2 \sin\theta & -\alpha u_3 \sin\theta & \cos\theta & -\alpha u_1 \sin\theta \\ u_3 \sin\theta & -u_2 \sin\theta & u_1 \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tanım 4.6.3. (Genelleştirilmiş Kuaterniyon Matrislerin n. Dereceden Kökleri)

α, β yı pozitif sayı alalım. q birim genelleştirilmiş kuaterniyona karşılık gelen matris (4.2) şeklinde olduğunu biliyoruz. (4.2) daki matrisi daha genel halde $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta+2k\pi) & -\alpha u_1 \sin(\theta+2k\pi) & -\beta u_2 \sin(\theta+2k\pi) & -\alpha\beta u_3 \sin(\theta+2k\pi) \\ u_1 \sin(\theta+2k\pi) & \cos(\theta+2k\pi) & -\beta u_3 \sin(\theta+2k\pi) & \beta u_2 \sin(\theta+2k\pi) \\ u_2 \sin(\theta+2k\pi) & -\alpha u_3 \sin(\theta+2k\pi) & \cos(\theta+2k\pi) & -\alpha u_1 \sin(\theta+2k\pi) \\ u_3 \sin(\theta+2k\pi) & -u_2 \sin(\theta+2k\pi) & u_1 \sin(\theta+2k\pi) & \cos(\theta+2k\pi) \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade etmiştik. $x^n = A$ denkleminin n tane kökü vardır. Bu denklemden $x = A^{\frac{1}{n}}$ elde edilir. O halde

$$A_i^{\frac{1}{n}} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) & -\alpha u_1 \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n}) & -\beta u_2 \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n}) & -\alpha\beta u_3 \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n}) \\ u_1 \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n}) & \cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) & -\beta u_3 \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n}) & \beta u_2 \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n}) \\ u_2 \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n}) & -\alpha u_3 \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n}) & \cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) & -\alpha u_1 \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n}) \\ u_3 \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n}) & -u_2 \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n}) & u_1 \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n}) & \cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) \end{bmatrix},$$

$k = 0$ için ilk kök,

$$A_\circ^{\frac{1}{n}} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{n}) & -\alpha u_1 \sin(\frac{\theta}{n}) & -\beta u_2 \sin(\frac{\theta}{n}) & -\alpha\beta u_3 \sin(\frac{\theta}{n}) \\ u_1 \sin(\frac{\theta}{n}) & \cos(\frac{\theta}{n}) & -\beta u_3 \sin(\frac{\theta}{n}) & \beta u_2 \sin(\frac{\theta}{n}) \\ u_2 \sin(\frac{\theta}{n}) & -\alpha u_3 \sin(\frac{\theta}{n}) & \cos(\frac{\theta}{n}) & -\alpha u_1 \sin(\frac{\theta}{n}) \\ u_3 \sin(\frac{\theta}{n}) & -u_2 \sin(\frac{\theta}{n}) & u_1 \sin(\frac{\theta}{n}) & \cos(\frac{\theta}{n}) \end{bmatrix}$$

$k=1$ için ikinci kök,

$$A_1^{\frac{1}{n}}=\begin{bmatrix}\cos(\frac{\theta+2\pi}{n}) & -\alpha u_1\sin(\frac{\theta+2\pi}{n}) & -\beta u_2\sin(\frac{\theta+2\pi}{n}) & -\alpha\beta u_3\sin(\frac{\theta+2\pi}{n})\\ u_1\sin(\frac{\theta+2\pi}{n}) & \cos(\frac{\theta+2\pi}{n}) & -\beta u_3\sin(\frac{\theta+2\pi}{n}) & \beta u_2\sin(\frac{\theta+2\pi}{n})\\ u_2\sin(\frac{\theta+2\pi}{n}) & -\alpha u_3\sin(\frac{\theta+2\pi}{n}) & \cos(\frac{\theta+2\pi}{n}) & -\alpha u_1\sin(\frac{\theta+2\pi}{n})\\ u_3\sin(\frac{\theta+2\pi}{n}) & -u_2\sin(\frac{\theta+2\pi}{n}) & u_1\sin(\frac{\theta+2\pi}{n}) & \cos(\frac{\theta+2\pi}{n})\end{bmatrix}$$

$k=n-1$ için n. kök,

$$A_{n-1}^{\frac{1}{n}}=\begin{bmatrix}\cos(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}) & -\alpha u_1\sin(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}) & -\beta u_2\sin(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}) & -\alpha\beta u_3\sin(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n})\\ u_1\sin(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}) & \cos(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}) & -\beta u_3\sin(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}) & \beta u_2\sin(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n})\\ u_2\sin(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}) & -\alpha u_3\sin(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}) & \cos(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}) & -\alpha u_1\sin(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n})\\ u_3\sin(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}) & -u_2\sin(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}) & u_1\sin(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}) & \cos(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n})\end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 4.6.6. (Üsler Arasındaki İlişki)

Bir reel genelleştirilmiş kuaterniyona karşılık gelen matrisin üsleri arasındaki ilişkiyi gösteren aşağıdaki teoremler ifade edilebilir.

Teorem 4.6.4.

q birim genelleştirilmiş kuaterniyonunun kutupsal ifadesi $q=\cos\theta+\overrightarrow{u}\sin\theta$ dir. $m=\frac{2\pi}{\theta}\in\mathbb{Z}^{+}-\{1\}$ olsun. $n\equiv p(\operatorname{mod} m)$ olması için gerek ve yeter koşul $q^n=q^p$ olmasıdır.

İspat

$n \equiv p(\text{mod } m)$ olsun. O halde $n = a.m + p$, $a \in \mathbb{Z}$ dir.

$$\begin{aligned}
q^n &= \cos n\theta + \overrightarrow{u} \sin n\theta \\
&= \cos(am+p)\theta + \overrightarrow{u} \sin(am+p)\theta \\
&= \cos(a\frac{2\pi}{\theta} + p)\theta + \overrightarrow{u} \sin(a\frac{2\pi}{\theta} + p)\theta \\
&= \cos(p\theta + a2\pi) + \overrightarrow{u} \sin(p\theta + a2\pi)
\end{aligned}$$

$a \in \mathbb{Z}$ olduğu için $p\theta + a2\pi = p\theta$ dir.

$$\begin{aligned}
q^n &= \cos(p\theta) + \overrightarrow{u} \sin(p\theta) \\
&= q^p.
\end{aligned}$$

Diğer taraftan $q^n = q^p$ olsun. O halde $q^n = \cos n\theta + \overrightarrow{u} \sin n\theta$ ve $q^p = \cos p\theta + \overrightarrow{u} \sin p\theta$ dir. Çünkü $q^n = q^p$ olmak üzere $\cos n\theta = \cos p\theta$ ve $\sin n\theta = \sin p\theta$ yazılabilir. Buradan $n\theta = p\theta + 2\pi a$, $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n = a\frac{2\pi}{\theta} + p$, $n \equiv p(\text{mod } m)$ dir.

Teorem 4.6.5.

q birim genelleştirilmiş kuaterniyonunun kutupsal formdaki ifadesi $q = \cos\theta + \overrightarrow{u} \sin\theta$ dir. $m = \frac{2\pi}{\theta} \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ olsun. q ya karşılık gelen matris A olsun. $n \equiv p(\text{mod}\, m)$ olması için gerek ve yeter koşul $A^n = A^p$ olmasıdır.

İspat: İspatı teorem 4.9.1 den kolayca görülür.

Teorem 4.6.6.

q genelleştirilmiş kuaterniyonunun kutupsal formdaki ifadesi $q = \sqrt{N_q}(\cos\theta + \overrightarrow{u} \sin\theta)$ dir. $m = \frac{2\pi}{\theta} \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ olsun. $n \equiv p(\text{mod}\, m)$ olması için gerek ve yeter koşul $q^n = (\sqrt{N_q})^{n-p} q^p$ olmasıdır.

İspat

$n \equiv p(\text{mod } m)$ olsun. O halde $n = a.m + p$, $a \in \mathbb{Z}$ dir.

$$\begin{aligned} q^n &= (\sqrt{N_q})^n(\cos\theta + \overrightarrow{u}\sin\theta)^n \\ &= (\sqrt{N_q})^{n-p}(\sqrt{N_q})^p(\cos n\theta + \overrightarrow{u}\sin n\theta) \\ &= (\sqrt{N_q})^{n-p}(\sqrt{N_q})^p(\cos(am+p)\theta + \overrightarrow{u}\sin(am+p)\theta) \\ &= (\sqrt{N_q})^{n-p}(\sqrt{N_q})^p(\cos(a\frac{2\pi}{\theta}+p)\theta + \overrightarrow{u}\sin(a\frac{2\pi}{\theta}+p)\theta) \\ &= (\sqrt{N_q})^{n-p}(\sqrt{N_q})^p(\cos(p\theta + a2\pi) + \overrightarrow{u}\sin(p\theta + a2\pi)) \end{aligned}$$

$a \in \mathbb{Z}$ olduğu için $p\theta + a2\pi = p\theta$ dir.

$$\begin{aligned} q^n &= (\sqrt{N_q})^{n-p}(\sqrt{N_q})^p(\cos(p\theta) + \overrightarrow{u}\sin(p\theta)) \\ &= (\sqrt{N_q})^{n-p}q^p. \end{aligned}$$

Diğer taraftan $q^n = (\sqrt{N_q})^{n-p}q^p$ olsun.

$$(\sqrt{N_q})^n(\cos n\theta + \overrightarrow{u}\sin n\theta) = (\sqrt{N_q})^{n-p}(\sqrt{N_q})^p(\cos(p\theta) + \overrightarrow{u}\sin(p\theta))$$

olmak üzere $\cos n\theta = \cos p\theta$ ve $\sin n\theta = \sin p\theta$ yazılabilir. Buradan $n\theta = p\theta + 2\pi a$, $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n = a\frac{2\pi}{\theta} + p$, $n \equiv p(\text{mod } m)$ dir.

Örnek 4.6.7.

α ve β yı pozitif sayı alalım. $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})$ genelleştirilmiş kuaterniyonu verilmiş olsun. Bu kuaterniyona karşılık gelen matris

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{\alpha}}{2} & -\frac{\sqrt{\beta}}{2} & -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{\beta}}{2\sqrt{\alpha}} & -\frac{\sqrt{\beta}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{\beta}} & \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\beta}} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} & -\frac{1}{2\sqrt{\beta}} & \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

dir. Bu matrisin 28.kuvveti, teorem **4.7.2.** yardımıyla aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$A^{28} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{\alpha}}{2} & \frac{\sqrt{\beta}}{2} & \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{\beta}}{2\sqrt{\alpha}} & -\frac{\sqrt{\beta}}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{\beta}} & -\frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\beta}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} & \frac{1}{2\sqrt{\beta}} & -\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

teorem 4.6.5. den, $m = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$ olduğundan,

$$\begin{aligned} A &= A^7 = A^{13} = A^{19} = ... \\ A^2 &= A^8 = A^{14} = A^{20} = ... \\ A^3 &= A^9 = A^{15} = A^{21} = ... = -I_4 \\ &.. \\ A^6 &= A^{12} = A^{18} = A^{24} = ... = I_4 \end{aligned}$$

A matrisinin küp köklerini de hesaplayabiliriz.

$$A_i^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi+60}{2}\right) & -\alpha u_1 \sin\left(\frac{2k\pi+60}{2}\right) & -\beta u_2 \sin\left(\frac{2k\pi+60}{2}\right) & -\alpha\beta u_3 \sin\left(\frac{2k\pi+60}{2}\right) \\ u_1 \sin\left(\frac{2k\pi+60}{2}\right) & \cos\left(\frac{2k\pi+60}{2}\right) & -\beta u_1 \sin\left(\frac{2k\pi+60}{2}\right) & -\beta u_2 \sin\left(\frac{2k\pi+60}{2}\right) \\ u_2 \sin\left(\frac{2k\pi+60}{2}\right) & \alpha u_3 \sin\left(\frac{2k\pi+60}{2}\right) & \cos\left(\frac{2k\pi+60}{2}\right) & -\alpha u_1 \sin\left(\frac{2k\pi+60}{2}\right) \\ u_3 \sin\left(\frac{2k\pi+60}{2}\right) & -u_2 \sin\left(\frac{2k\pi+60}{2}\right) & u_1 \sin\left(\frac{2k\pi+60}{2}\right) & \cos\left(\frac{2k\pi+60}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$k = 0$ için ilk küp kök,

$$A_{\circ}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{\beta}}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3\alpha}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{\beta}}{2\sqrt{3\alpha}} & -\frac{\sqrt{\beta}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3\beta}} & \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{3\beta}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3\alpha\beta}} & -\frac{1}{2\sqrt{3\beta}} & -\frac{1}{2\sqrt{3\alpha}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$k = 1$ için ikinci küp kök,

$$A_{1}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{\beta}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3\alpha}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{\beta}}{2\sqrt{3\alpha}} & \frac{\sqrt{\beta}}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3\beta}} & -\frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{3\beta}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3\alpha\beta}} & \frac{1}{2\sqrt{3\beta}} & -\frac{1}{2\sqrt{3\alpha}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Ayrıca, görebiliriz ki $A_{\circ}^{\frac{1}{2}} + A_{1}^{\frac{1}{2}} = 0$ dir.

5. DUAL GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR

Bu bölümde daha önce tanımladığımız ve mekanikte kayma ve vida operatörleri gibi uygulamaları olan dual kuaterniyonları genelleştireceğiz.

Tanım 5.1

$q = a_\circ + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ve $q^* = a_\circ^* + a_1^* i + a_2^* j + a_3^* k \in H_{\alpha\beta}$ olmak üzere $Q = q + \varepsilon q^*$ şeklinde tanımlanan kuaterniyona dual genelleştirilmiş kuaterniyon denir. Bu dual kuaterniyonlar cümlesini $\widetilde{H}_{\alpha\beta}$ ile göstereceğiz.

$$\widetilde{H}_{\alpha\beta} = \{Q = A_\circ + A_1 i + A_2 j + A_3 k : A_\circ, A_1, A_2, A_3 \in D\}$$

Burada $\{1, i, j, k\}$ birimlerinin çarpımı aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} i^2 &= -\alpha, \quad j^2 = -\beta, \quad k^2 = -\alpha\beta \\ ij &= -ji = k, \quad jk = -kj = \beta i \\ ki &= -ik = \alpha j, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$Q = q + \varepsilon q^* = A_\circ + A_1 i + A_2 j + A_3 k$ dual genelleştirilmiş kuaterniyonun skalar kısmı S_Q ve vektörel kısmı $\overrightarrow{V}_Q$ olmak üzere iki kısma ayrılır. Yani,

$$Q = S_Q + \overrightarrow{V}_Q$$

biçiminde yazılır. Burada

$$S_Q = A_\circ \text{ ve } \overrightarrow{V}_Q = A_1 i + A_2 j + A_3 k$$

dir.

Tanım 5.2.

$Q = A_\circ + A_1 i + A_2 j + A_3 k$ ve $P = B_\circ + B_1 i + B_2 j + B_3 k$ dual genelleştirilmiş kuaterniyonlarının toplamı

$$Q + P = (S_Q + S_P) + (\overrightarrow{V}_Q + \overrightarrow{V}_P)$$

şeklinde tanımlıdır.

$\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere skalarla çarpma işlemi ise

$$\lambda Q = (\lambda A_\circ)1 + (\lambda A_1)\overrightarrow{i} + (\lambda A_2)\overrightarrow{j} + (\lambda A_3)\overrightarrow{k}$$

şeklinde tanımlıdır.

Ayıca, dual genelleştirilmiş kuaterniyonların çarpımı

$$\begin{aligned} \times \quad &: \quad \widetilde{H}_{\alpha\beta} \times \widetilde{H}_{\alpha\beta} \to \widetilde{H}_{\alpha\beta} \\ (Q, P) \quad &\to \quad Q \times P = QP \end{aligned}$$

biçiminde bir işlem olup

$$QP = qp + \varepsilon(qp^* + pq^*)$$

veya

$$
\begin{aligned}
QP &= S_Q S_P - g(\overrightarrow{V}_Q, \overrightarrow{V}_P) + S_P \overrightarrow{V}_Q + S_Q \overrightarrow{V}_P + \overrightarrow{V}_Q \wedge \overrightarrow{V}_P \\
&= (A.B. - \alpha A_1 B_1 - \beta A_2 B_2 - \alpha\beta A_3 B_3) + (A.B_1 + A_1 B. + \beta A_2 B_3 - \beta A_3 B_2)i \\
&\quad +(A.B_2 + A_2 B_\circ - \alpha A_1 B_3 + \alpha A_3 B_1)j + (A.B_3 + A_1 B_2 - A_2 B_1 + A_3 B_\circ)k
\end{aligned}
$$

olarak tanımlanır. Burada

$$
\begin{aligned}
g(\overrightarrow{V}_q, \overrightarrow{V}_p) &= \alpha A_1 B_1 + \beta A_2 B_2 + \alpha\beta A_3 B_3, \\
\overrightarrow{V}_q \wedge \overrightarrow{V}_p &= \begin{vmatrix} \beta i & -\alpha j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\
&= \beta(A_2 B_3 - A_3 B_2)i - \alpha(A_1 B_3 - A_3 B_1)j + (A_1 B_2 - A_2 B_1)k
\end{aligned}
$$

dır. Bu işlemi ile birlikte $\widetilde{H}_{\alpha\beta}$ ya dual genelleştirilmiş kuaterniyon cebiri denir.

5.1 Dual Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler

1) **Eşlenik:**

$$
\begin{aligned}
\overline{(,)} &: \widetilde{H}_{\alpha\beta} \to \widetilde{H}_{\alpha\beta} \\
Q &= S_Q + V_Q \to \overline{Q} = S_Q - V_Q
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlanır ve buna göre bir $Q = A_\circ 1 + A_1 i + A_2 j + A_3 k$ olmak üzere Q dual genelleştirilmiş kuaterniyonunun eşleniği $\overline{Q} = A_\circ 1 - A_1 i - A_2 j - A_3 k$ olur. Eşlenik işlemi aşağıdaki özeliklere sahiptir.

i) $\overline{aQ + bP} = a\overline{Q} + b\overline{P}, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $Q, P \in \widetilde{H}_{\alpha\beta}$

ii) $\overline{QP} = \overline{PQ}, \ \forall Q, P \in \widetilde{H}_{\alpha\beta}$

iii) $\overline{\overline{Q}} = Q, \ \forall Q \in \widetilde{H}_{\alpha\beta}.$

2) **Norm:**

$$\begin{aligned} N &: \widetilde{H}_{\alpha\beta} \to D \\ Q &\to N_Q = Q\overline{Q} = \overline{Q}Q \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan N işlemine $\widetilde{H}_{\alpha\beta}$ üzerinde norm denir. $Q = A_\circ 1 + A_1 i + A_2 j + A_3 k$ olmak üzere Q dual genelleştirilmiş kuaterniyonunun normu

$$N_Q = A_\circ^2 + \alpha A_1^2 + \beta A_2^2 + \alpha\beta A_3^2$$

reel sayısı ile tanımlıdır. Norm işlemi aşağıdaki özeliklere sahiptir.

i) $N_{QP} = N_Q N_P. \ \ \forall P, Q \in \widetilde{H}_{\alpha\beta}$

ii) $N_{\lambda Q} = \lambda^2 N_Q, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

3) **İnvers:**

$$\begin{aligned} (,)^{-1} &: \widetilde{H}_{\alpha\beta} \to \widetilde{H}_{\alpha\beta} \\ Q &\to Q^{-1} = \frac{\overline{Q}}{N_Q}, \quad N_Q \neq 0 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan işleme $\widetilde{H}_{\alpha\beta}$ da invers işlemi denir. $N_Q \neq 0$ olmak üzere bir dual genelleştirilmiş kuaterniyonun inversi

$$Q^{-1} = \frac{A_\circ 1 - A_1 i - A_2 j - A_3 k}{A_\circ^2 + \alpha A_1^2 + \beta A_2^2 + \alpha\beta A_3^2}$$

dir. İnvers işlemi aşağıdaki özeliklere sahiptir.

i) $(QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}, \forall P, Q \in \widetilde{H}_{\alpha\beta}$ ve $\ N_Q, N_P \neq 0$

ii) $(\lambda Q)^{-1} = \frac{1}{\lambda} Q^{-1}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N_Q \neq 0, \lambda \neq 0$

4) **Birim dual genelleştirilmiş kuaterniyon:**

$N_Q = 1$ olan $Q = A_\circ 1 + A_1 i + A_2 j + A_3 k \in \widetilde{H}_{\alpha\beta}$ kuaterniyonuna birim dual genelleştirilmiş kuaterniyon denir.

5) **İki genelleştirilmiş vektörün vektörel çarpımı:**

Skalar kısmı sıfır olan dual genelleştirilmiş kuaterniyona, dual genelleştirilmiş vektör adı veirlir.

$Q = A_1 i + A_2 j + A_3 k, P = B_1 i + B_2 j + B_3 k$ dual genelleştirilmiş vektörlerin vektörel çarpımı

$$Q \wedge P = \frac{1}{2}(QP - PQ)$$

olarak tanımlanır.

6) Q **ve** P **dual genelleştirilmiş kuaterniyonlarının skalar çarpımı**

$$\begin{aligned} \langle Q, P \rangle &= \langle P, Q \rangle \\ &= A_\circ^2 + \alpha A_1^2 + \beta A_2^2 + \alpha\beta A_3^2 \\ &= \langle q, p \rangle + \varepsilon(\langle q, p^* \rangle + \langle q^*, p \rangle) \end{aligned}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

7) **Dual Genelleşirilmiş Kuaterniyon Operatörü**

Burada bir doğruyu diğer bir doğruya dönüştüren operatör (vida operatörü) elde edeceğiz. Bunu bir örnekle verelim.

Örnek:

$l_1 = \{x = t,\ y = z = 0\}$ doğrusunu $l_2 = \left\{ \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y}{\frac{1}{\sqrt{2}}}, z = 2 \right\}$ doğrusuna dönüştüren dual genelleşirilmiş kuaterniyon (vida) operatörünü bulalım.

l_1 doğru için $M = (0,0,0)$ ve $\overrightarrow{a} = (1,0,0)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a}^* &= \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a} \\ &= (0,0,0) \end{aligned}$$

l_2 doğru için $N = (0,0,2)$ ve $\overrightarrow{b} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \overrightarrow{b}^* &= \overrightarrow{ON} \wedge \overrightarrow{b} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}(-\beta, \alpha, 0) \end{aligned}$$

dir. Dolaysıyla, E.Study teoremine göre, $l_1$ve l_2 doğrularına $D^3_{\alpha\beta}$ uzayda, sıra ile $A.$ ve $B.$ birim genelleşirilmiş dual vektör karşılık gelir. Burada $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{a}^*$ ve $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{b} + \varepsilon \overrightarrow{b}^*$ olmak üzere,

$$\overrightarrow{A}_\circ = \frac{\overrightarrow{A}}{\left\| \overrightarrow{A} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0)$$

ve

$$\overrightarrow{B}_\circ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha + \beta}} \left[(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) + \varepsilon(\frac{-2\beta}{\sqrt{2}}, \frac{2\alpha}{\sqrt{2}}, 0) \right]$$

dir. Şimdi de vida operatörünü hesaplayalım

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B}_\circ &= Q \times \overrightarrow{A}_\circ \\ Q &= \overrightarrow{B}_\circ \times (\overrightarrow{A}_\circ)^{-1} \end{aligned}$$

buradan da $Q = -\overrightarrow{B}_\circ \times \overrightarrow{A}_\circ$ dir. O halde

$$Q = g(\overrightarrow{B}_\circ, \overrightarrow{A}_\circ) - \overrightarrow{B}_\circ \wedge \overrightarrow{A}_\circ$$

eşitliği elde edilir. Böylece Q vida operatörünü elde edebiliriz.

$$Q = Q_{\cdot} + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k$$

Burada

$$\begin{aligned} Q_{\cdot} &= \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha+\beta}} + \varepsilon\frac{-2\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha+\beta}}, \qquad Q_1 = Q_2 = 0 \\ Q_3 &= -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta}} + \varepsilon\frac{-2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha+\beta}}. \end{aligned}$$

dir.

5.2. Hamilton Operatörleri

Daha önceki bölümde $q = a_\circ 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in H_{\alpha\beta}$ genelleştirilmiş kuaterniyon olmak üzere,

$$\overset{+}{H}(q) = \begin{bmatrix} a_\circ & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha\beta a_3 \\ a_1 & a_\circ & -\beta a_3 & \beta a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_\circ & -\alpha a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_\circ \end{bmatrix}, \overset{-}{H}(q) = \begin{bmatrix} a_\circ & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha\beta a_3 \\ a_1 & a_\circ & \beta a_3 & -\beta a_2 \\ a_2 & -\alpha a_3 & a_\circ & \alpha a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_\circ \end{bmatrix}$$

matrisleri hesaplamıştık. Benzer şekilde $Q = A_\circ 1 + A_1 i + A_2 j + A_3 k \in \widetilde{H}_{\alpha\beta}$ olmak üzere Q dual genelleştirilmiş kuaterniyonu için,

$$\overset{+}{H}(Q) = \begin{bmatrix} A_\circ & -\alpha A_1 & -\beta A_2 & -\alpha\beta A_3 \\ A_1 & A_\circ & -\beta A_3 & \beta A_2 \\ A_2 & \alpha A_3 & A_\circ & -\alpha A_1 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & A_\circ \end{bmatrix},$$

ve

$$\overset{-}{H}(Q) = \begin{bmatrix} A_\circ & -\alpha A_1 & -\beta A_2 & -\alpha\beta A_3 \\ A_1 & A_\circ & \beta A_3 & -\beta A_2 \\ A_2 & -\alpha A_3 & A_\circ & \alpha A_1 \\ A_3 & A_2 & -A_1 & A_\circ \end{bmatrix} \qquad \text{dir.}$$

Ayrıca $Q = q + \varepsilon q^*$, $\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ operatörleri lineer olduklarından

$$\begin{aligned} \overset{+}{H}(Q) &= \overset{+}{H}(q) + \varepsilon \overset{+}{H}(q^*) \\ \overset{-}{H}(Q) &= \overset{-}{H}(q) + \varepsilon \overset{-}{H}(q^*) \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir.

Genelleştirilmiş kuaterniyonlar için ispat ettiğimiz özelikler burada da rahatlıkla gösterebiliriz. Q ve P iki dual genelleştirilmiş kuaterniyon ve λ reel bir sayı olmak üzere $\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ operatörleri aşağıdaki özelikleri sağlarlar.

(i) $Q = P \Leftrightarrow \overset{+}{H}(Q) = \overset{+}{H}(P) \Leftrightarrow \overset{-}{H}(Q) = \overset{-}{H}(P)$

(ii) $\overset{+}{H}(Q + P) = \overset{+}{H}(Q) + \overset{+}{H}(P)$, $\overset{-}{H}(Q + P) = \overset{-}{H}(Q) + \overset{-}{H}(P)$

(iii) $\overset{+}{H}(\lambda Q) = \lambda \overset{+}{H}(Q)$, $\overset{-}{H}(\lambda Q) = \lambda \overset{-}{H}(Q)$

(iv) $iz \left[\overset{+}{H}(Q) \right] = 4A_\circ$, $iz \left[\overset{-}{H}(Q) \right] = 4A_\circ$

(v) $\det \left[\overset{+}{H}(Q) \right] = N_Q^2$, $\det \left[\overset{-}{H}(Q) \right] = N_Q^2$

(vi) $\overset{+}{H}(QP) = \overset{+}{H}(Q)\overset{+}{H}(P)$, $\overset{-}{H}(QP) = \overset{-}{H}(Q)\overset{-}{H}(P)$

(vii) $\overset{+}{H}(Q^{-1}) = [\overset{+}{H}(Q)]^{-1}$, $\overset{-}{H}(Q^{-1}) = [\overset{-}{H}(Q)]^{-1}$, $N_Q^2 \neq 0$

(viii) $[\overset{+}{H}(Q)]^t \epsilon \overset{+}{H}(Q) = \epsilon, \ \ [\overset{-}{H}(Q)]^t \epsilon \overset{-}{H}(Q) = \epsilon,$

(ix) $\overset{+}{H}(Q)P = QP \ , \ \overset{-}{H}(P)Q = QP$

(x) $\overset{+}{H}(Q)\overset{-}{H}(P) = \overset{-}{H}(P) \ \overset{+}{H}(Q).$

Özel Hallar

i) $\alpha = \beta = 1$ seçilmesi durumunda dual kuaterniyonlar için, Agrawal (1987)'in elde ettiği sonuçlara ulaşırız.

ii) $\alpha = 1, \beta = -1$ seçilmesi durumunda dual split kuaterniyonlar için, Kula(2006)'in elde ettiği sonuçlara ulaşırız.

5.3 Dual Genelleştirilmiş Kuaterniyonların Kutupsal Formu

α, β nı pozitf sayı alalım. $Q = A_\circ + A_1 i + A_2 j + A_3 k \in \widetilde{H}_{\alpha\beta}$ olmak üzere

$$Q_\circ = \frac{Q}{\sqrt{N_Q}} = \frac{A_\circ + A_1 i + A_2 j + A_3 k}{\sqrt{A_\circ^2 + \alpha A_1^2 + \beta A_2^2 + \alpha\beta A_3^2}}$$

buradan

$$Q_\circ = \cos\phi + \overrightarrow{S_\circ} \sin\phi,$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
\cos\phi &= \frac{A_\circ}{\sqrt{N_Q}}, \ \ \sin\phi = \frac{\sqrt{\alpha A_1^2 + \beta A_2^2 + \alpha\beta A_3^2}}{\sqrt{N_Q}} \\
\overrightarrow{S_\circ} &= \frac{A_1 i + A_2 j + A_3 k}{\sqrt{\alpha A_1^2 + \beta A_2^2 + \alpha\beta A_3^2}}
\end{aligned}$$

dır. Burada ϕ açısı $Q_\circ$ birim dual genelleştirilmiş kuaterniyonun açısı ve $S_\circ$, $Q_\circ$ ın eksenini belirten dual bir vektördür. Ayrıca, $\phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ ve $\overrightarrow{S_\circ} = s_\circ + \varepsilon s_\circ^*$ eşitlikleri ile verilir.

Teorem 5.3.1.

$Q_\circ = \cos\phi + S_\circ \sin\phi$ bir birim dual genelleştirilmiş kuaterniyon olmak üzere

$$Q^n = (\cos\phi + \overrightarrow{S_\circ}\sin\phi)^n = \cos n\phi + \overrightarrow{S_\circ}\sin n\phi$$

dir.

6. HOMOTETİK HAREKET

$E^4_{\alpha\beta}$ de bir γ eğrisi boyunca bu eğriye tekabül eden Hamilton operatörü ile belirtilen hareketi inceliyecağız.

$$\begin{aligned} \gamma &: \quad I \subset \mathbb{R} \to E^4_{\alpha\beta} \\ t &\to \quad \gamma(t) = (a_\circ(t), a_1(t), a_2(t), a_3(t)), \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

eğrisini ele alalım. Bu eğri r. mertebeden diferensiyellenebilir regüler bir eğri olsun.

γ eğrisine tekabül eden Hamilton operatörü diye

$$B = \overset{+}{H}(\gamma(t)) = \begin{bmatrix} a_\circ(t) & -\alpha a_1(t) & -\beta a_2(t) & -\alpha\beta a_3(t) \\ a_1(t) & a_\circ(t) & -\beta a_3(t) & \beta a_2(t) \\ a_2(t) & \alpha a_3(t) & a_\circ(t) & -\alpha a_1(t) \\ a_3(t) & -a_2(t) & a_1(t) & a_\circ(t) \end{bmatrix}$$

matrisiyle belirtilen operatöre denir. Eğrimiz başlangıçtan geçmeyen bir eğri olmak üzere bu matris

$$B = h \begin{bmatrix} \frac{a_\circ(t)}{h} & -\frac{\alpha a_1(t)}{h} & -\frac{\beta a_2(t)}{h} & -\frac{\alpha\beta a_3(t)}{h} \\ \frac{a_1(t)}{h} & \frac{a_\circ(t)}{h} & -\frac{\beta a_3(t)}{h} & \frac{\beta a_2(t)}{h} \\ \frac{a_2(t)}{h} & \frac{\alpha a_3(t)}{h} & \frac{a_\circ(t)}{h} & -\frac{\alpha a_1(t)}{h} \\ \frac{a_3(t)}{h} & -\frac{a_2(t)}{h} & \frac{a_1(t)}{h} & \frac{a_\circ(t)}{h} \end{bmatrix} = hA \qquad (6.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $h : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} t &\to \quad h(t) = \|\gamma(t)\| \\ h(t) &= \quad \sqrt{|a^2_\circ(t) + \alpha a^2_1(t) + \beta a^2_2(t) + \alpha\beta a^2_3(t)|} \end{aligned}$$

$\forall t$ için $h(t) \neq 0$ dır. Ayrıca $h(t)$ sabit olmasını kabul edecağiz. Yani h fonksiyonu eğrinin t yay parametresinin reel değerli bir fonksiyonu olsun.

Teorem 6.1.1.

$B = hA$ Hamilton operatöründeki A matrisi bir quasi-ortogonal matristir.

İspat:

(6.1) de belli olan A matrisi için $A^t \epsilon A = \epsilon$ ve $\det A = 1$ dir, ki burada

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \end{bmatrix}.$$

Bu ise A matrisinin quasi-ortogonal olması demektir.

Tanım 6.1.2.

$B = hA$ Hamilton operatöründeki A matrisine Hamilton operatörünü dönme kısmı ve h fonksiyonuna da öteleme kısmı adı verilir.

6.2 Bir Parametreli Hareket

Sabit uzayı R, hareketli uzayı da $R_\circ$ ile gösterelim. O zaman $R_\circ$ ın R ye göre 1-parametreli hareketini $R_\circ / R$ ile göstereceğiz. $\forall t$ için $C(t) = \gamma(t) - \gamma(t_\circ)$ olmak üzere $R_\circ / R$ bir parametreli homotetik hareketi

$$\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hA & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_\circ \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textit{(6.2)}$$

ile tanımlanabilir. Burada X ve $X_\circ$ herhangi bir noktanın sırası ile sabit ve hareketli uzaydaki yer vektörleridir. Genel olarak hareketin pür dönme ve pür öteleme olması için

$$\frac{d}{dt}(hA) \neq 0 \text{ ve } \frac{dC}{dt} \neq 0$$

olmaını kabul edeceğiz.

Tanım 6.2.1.

$\overset{+}{H}(\gamma(t))$ Hamilton operatörü yardımı ile $E^4_{\alpha\beta}$ de bir uzey eğrisi boyunca tanımlanan (6.1) de hareketine bir parametreli Hamilton hareketi diyecağiz.

Teorem 6.2.2.

$E^4_{\alpha\beta}$ de bir uzay eğrisi boyunca tanımlanan bir Hamilton hareket bir homotetik harekettir.

6.3 Hamilton Hareketinde Hızlar

γ eğrisinin t yay paremtresine göre türev operatörünü $\frac{d}{dt}$ veya (.) ile gösterecağiz. (6.2) den kısaca

$$X = BX_\circ + C$$

yazabiliriz. Buradan t ye göre türev alınırsa

$$\dot{X} = \dot{B}X_\circ + \dot{C} + B\dot{X}_\circ$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V}_a &= \dot{X}, \quad \overrightarrow{V}_f = \dot{B}X_\circ + \dot{C} \\ \overrightarrow{V}_r &= B\dot{X}_\circ \end{aligned}$$

sırası ile hareketin mutlak hızı, sürükleme hızı ve rölatif hızı dır. Zıra hareketli uzay $R_\circ$ daki bir noktanın R sabit uzayına göre hızı $\dot{X}_\circ$, $R_\circ$ hareketli uzayına göre hızı $B\dot{X}_\circ$ olacaktır. Ancak, hareketli uzaydaki sabit bir nokta için $B\dot{X}_\circ = 0$ olacağından bu sabit noktanın R sabit uzayına göre hızı da $\dot{B}X_\circ + \dot{C}$ olacaktır. Bu hıza sürükleme hızı denir.

6.4 Hamilton Hareketinde Pol Noktaları ve Pol Eğrileri

Tanım 6.4.1.

$R_\circ / R$ 1-parametreli hareketinde herhangi bir t anında hem $R_\circ$ de, hem de R da sabit olan noktaya hareketin o andaki pol noktası adı verilir. Noktamız hem $R_\circ$ da, hem de R de sabit olduğuna göre sürüklenme hızı sıfır olacaktır. Yani $\dot{B}X_\circ + \dot{C} = 0$ olacaktır. Bu denklemin çözümü ile bulunacak nokta hareketin $R_\circ$ daki o ana ait pol noktasıdır. $\dot{B}X_\circ + \dot{C} = 0$ denklemi için $\det \dot{B}$ nın sıfır olup olmayacağına göre çözümlerin sayısı tek veya çoktur.

Şimdi $\dot{B}$ nın incelemesine geçelim.

Teorem 6.4.2.

$B = hA$ Hamilton operatörünün $\dot{B}$ türev operatörü bir quasi-ortogonal matristir.

İspat:

$B = \overset{+}{H}(\gamma(t)) = hA$ dan t ye göre türev alınırsa

$$\dot{B} = \dot{h}A + h\dot{A}$$

olur. Ayıca (6.1) den türev alınarak $\dot{B} = \overset{+}{H}(\dot{\gamma}(t))$ olduğu görülür. (6.1) de $a_i(t)$ yerine $\dot{a}_i(t)$ konumu yapılarak

$$\dot{B}^t \epsilon \dot{B} = \epsilon,$$

olduğu ve ayıca $\gamma(t)$ eğrisinde t yay parametresi olduğundan $\left\|\dot{\gamma}(t)\right\|^2 = \dot{a}_\circ^2 + \alpha \dot{a}_1^2 + \beta \dot{a}_2^2 + \alpha\beta \dot{a}_3^2 = 1$ dir. Dolayısıyla $\det \dot{B} = 1$ olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Şu halde $\det \dot{B} \neq 0$ dır. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 6.4.3.

$E^4_{\alpha\beta}$ de bir uzay eğrisi boyunca tanımlanan bir Hamilton hareketi h dan bağımsız olarak bir regüler harekettir.

İspat:

$\det \dot{B} \neq 0$ olduğundan hareket regülerdir ve $\det \dot{B}$ değeri h ya bağlı değildir.

Şimdi pol noktalarını bulabiliriz. t anında $R_\circ$ daki pol noktası $X_\circ = q_\circ$ olsun. O zaman $\dot{B}X_\circ + \dot{C} = 0$ denkleminden $X_\circ = q_\circ$ konumu ile $\dot{B}q_\circ + \dot{C} = 0$ ve ya buradan

$$\begin{aligned} q_\circ &= -(\dot{B})^t \dot{C} \\ q_\circ &= \dot{B}^t(-\dot{C}) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece şu teoremleri verebiliriz.

Teorem 6.4.4.

$E^4_{\alpha\beta}$ de bir uzay eğrisi boyunca tanımlanan bir Hamilton hareketinde $\forall t$ anında birtek pol noktası vardır.

Teorem 6.4.5.

$R_\circ$ daki her t anında tekabül eden pol noktası öteleme vektörünün o noktadaki $(-\dot{C})$ hız vektörünün $\dot{B}^{t}$ kadar döndürülmesiyle elde edilir.

6.5 Hamilton Hareketinde Yüksek Mertebeden İvme Merkezleri

Tanım 6.5.1. ($(r-1)$. Mertebeden İvme Merkezleri)

Bir t anında r. mertebeden sürüklenme ivmesinin sıfır olduğu noktalara $(r-1)$. mertebeden ivme merkezleri denir.

$\ddot{B}\, X_\circ + \ddot{C} = 0$ ardışık türevler alınarak

$$\eta^{(r)} = B^{(r)} X_\circ + C^{(r)}$$

bulunur. $(r-1)$. mertebeden ivme merkezi

$$B^{(r)} X_\circ + C^{(r)} = 0$$

denkleminin çözüm vektörüyle bellidir. γ eğrisinin regüler bir eğri olması halinde

$$\det B^{(r)} = \left\{ \left[a_\circ^{(r)}\right]^2 + \alpha \left[a_1^{(r)}\right]^2 + \beta \left[a_2^{(r)}\right]^2 + \alpha\beta \left[a_3^{(r)}\right]^2 \right\}^2 \neq 0$$

olur ve böylece t anında $(r-1)$. mertebeden ivme merkezleri

$$X_{\circ} = \left[B^{(r)}\right]^{-1}(-C^{(r)})$$

bulunur. $X = BX_{\circ} + C$ denkleminde $X_{\circ}$ yerine yazılırsa

$$X = B\left\{\left[B^{(r)}\right]^{-1}(-C^{(r)})\right\} + C$$

elde edilir ki bu da bize sabit uzaydaki $(r-1)$. mertebeden ivme merkezleri verir. Böylece şu teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 6.5.2.

$E^4_{\alpha\beta}$ de bir uzay eğrisi boyunca tanımlanan Hamilton hareketinde, eğrinin r. mertebeden regüler bir eğri olması halinde her t anında $(r-1)$. mertebeden birtek ivme merkezi vardır.

Örnek 6.5.3.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} &: I \subset \mathbb{R} \to E^4_{\alpha\beta} \\ t &\to \boldsymbol{\gamma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos t, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{\beta}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\sin t\right), \ \alpha, \beta \gneqq 0. \end{aligned}$$

eğrisini ele alalım. Bu eğri r. mertebeden diferensiyellenebilir regüler bir eğri ve $\left\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\right\| = 1$ olduğunda yay parametrisidir. $\boldsymbol{\gamma}$ eğrisine karşılık gelen Hamilton operatörü

$$B = \overset{+}{H}[\boldsymbol{\gamma}(t)] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \cos t & -\sqrt{\alpha}\sin t & -\sqrt{\beta}\cos t & -\sqrt{\alpha\beta}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sin t & \cos t & -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sin t & \sqrt{\beta}\cos t \\ \frac{1}{\sqrt{\beta}}\cos t & \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sin t & \cos t & -\sqrt{\alpha}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\sin t & -\frac{1}{\sqrt{\beta}}\cos t & \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

dir. Bu matris 6. bölümdeki teoremleri sağlır.

KAYNAKLAR

Agrawal, O. P. 1987. Hamilton Operators and Dual-Number-Quaternions in Spatial Kinematics, Mech. Mach. Theory. 22 , no.6, pp. 569-575

Anton, H. and Rorres, C. 1984. Elementary Linear Algebra, Drexel University, Canada.

Ata, E. and Yayli, Y. 2008. Dual Unitary Matrices and Unit Dual Quaternions, Differential Geometry-Dynamical System 10, pp. 1-12.

Bharathi. k. and Nagaraj M. 1985. Geometry of Quaternionic and Pseudo-quaternionic Multiplications, Indian J. pure appl. Math., 16(7) pp. 741-756.

Brand. L. 1942. The Roots of a Quaternion, Amer. Math. Monthly 49 (8) pp. 519–520.

Chevally, C. 1946. Therory of Lie Groups, Princeton University, Press, New Jersey.

Cho. E. 1998. De-Moivre Formula for Quaternions, Appl. Math. Lett., Vol. 11, no., pp. 633-35.

Farebrother, R.W., GroB J. and Troschke S. 2003. Matrix Representaion of Quaternions, Linear Algebra and its Appl., 362, pp. 251-255.

Girard, P. R. 2007 Quaternions, Clifford algebras relativistic physics. Birkhäuser Verlag AG, Switzerland Part of Springer Science+Business Media.

Gungor, M.A. and Sarduvan M., 2011, A Note on Dual Quaternions and Matrices of Dual Quaternions, Scientia Magna, Vol.7, no.1, pp. 1-11.

Gürlebeck, K. and Sprössing, W. 1997. Quaternionic and Clifford Calculus for Physicsts and Engineers, John Wiley and Sons. Toronto, Canada.

GroB, J., Trenkler G. and Troschke, S. 2001, Quaternions: Futher Contributions to a Matrix Oriented Approach, Linear Algebra and its Appl., 326, pp. 205-213.

Gu Y., Luh J.Y.S., 1987, Dual-number Transformation and Its Applications to Robotics. IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol. Ra-3, No. 6, pp.615-623.

Inoguchi J., 1998. Timelike Surfaces of Constant Mean Curvature in Minkowski 3-space, Tokyo J. Math. 21, no.1, pp.140-152.

Hacisalihoglu H.H., 1971a. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Published by Gazi University, Ankara, Turkey.

Hacisalihoglu H.H., 1971b. On the Rolling of one curve or surface upon another. Proceeding of the Royal Irish Academy, Vol. 71, Section A, Number 2, 13-17.

Hacisalihoglu H.H., 1980. Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler, Inönü Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Yayınları Mat. No:1, 224s.

Hacisalihoglu H.H., 2000. Vektör Uzaylarının Linear Dönüşümleri ve Matrisler, Ankara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi yayınları, Ankara, Turkey.

Hamilton W. Rowan, 1969. Elements of Quaternions, 2 Vols(1899-1901); reprinted Chelsea, New York.

Hiller, M. and Worenle C. 1984. A Unified Representation of Spatial Displacement, Mech. Mach. Theory, Vol.19, No.6, 477-486.

Howard D.F., 1991. Introduction to Compact Lie Groups, World Sci. Publishing

Co. Ltd.

Jafari M., Yayli Y., 2010a. The E. Study Maps of Circle on Dual Elliptical Unit Sphere $\widetilde{E}_D^2$. Submittied for publication.

Jafari M., Yaylı Y., 2011b. Spherical Cyclic Motions In Euclidean 3-space. Accepted for publication (Advances and Applications in Mathematical Science)

Jafari M., Yayli Y., 2010. Homothetic Motions at $E_{\alpha\beta}^4$. Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 5, no. 47. 2319 - 2326.

Jafari M., Mortazaasl H. and Yayli Y., 2011. De Moivre's formula for matrices of quaternions, JP J. of Algebra, Number Theory and appl., Vol.21, no.1 p.57-67.

Kabadayi H., Yayli y., 2011. De-Moivre's Formula for Dual Quaternions, Kuwait J. Of Sci. & Tech., Vol. 38, no. 1.

Kula L. and Yayli Y., 2007. Split quaternions and rotations in semi-euclidean space E_2^4, J. Korean Math. Soc. 44, no. 6. p.1313-1327.

Kula L., 2003. Split Kuaterniyonlar ve geometrik uygulamalari, PhD thesis, Ankara university, Ankara, Turkey.

Kula L. and Yayli Y., 2005. Homothetic Motions in semi-Euclidean space E_2^4. Mathematical Proceeding of the R. Irish Academy, Vol. 105, section A, Num.1, 9-15.

Kula L. and Yayli Y., 2006. Dual split quaternions and screw motion in Minkowski 3-space.Iranian journal of Sci. & Tech., Transaction A, vol.30,No.A3.

Karger, A. and Novak, J.1985. Space kinematics and Lie groups, Gordon and science publishers.

Kuipers J. B. 1999. Quaternions and rotation sequences.Published by princenton university press, New Jersey.

Meral M. 2009. Kuaterniyonlara ait Matrisler için De-Moivre ve Euler Formülleri, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Mortazaasl H., Jafari M., Yayli Y., 2011. Homothetic Motions in the Dual 3-Spaces. International Journal Contemp. of Mathematics Sciences, Vol. 6, no. 17, 841-852.

Ölmez O., 2006. Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar ve uygulamalar, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara.

O'Neill B., 1983. Semi-Riemannian geometry, Pure and Application Mathematics, 103. Academic Press, Inc., New York.

Özdemir M., 2009. The Roots of a Split Quaternion, Applied Math. Lett. 22 258-263.

Özdemir M., Ergin A.A., 2006. Rotation with Unit Timelike Quaternions in Minkowski 3-Space, J. of Geo. and Physics, 56, 322-336.

Pottman H.,Wallner J. 2000. Computational Line Geometry. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.

Rosenfeld B., 1997. Geometry of Lie Groups, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Savin D., Flaut C., Ciobanu C., 2009. Some Properties Of the Symbol algebras. Carpathian J. Math.arXiv:0906.2715v1.

Soydaş M., 2003. Bikuaterniyonların Modern Fiziğe Uygulaması,Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Study E., 1891, Von Den Bewegungen und Umlegungen, Mathematische Annalen 39, 441-564.

Unger T., Markin N., 2008. Quadratic Forms and space-Time Block Codes from Qeneralized Quaternion and Biquaternion Algebras.arXiv:0807.0199v1.

Ward J. P.,1997. Quaternions and Cayley Numbers Algebra and Applications, Kluwer Academic Publishers, London.

Weinstein T., 1995, Lorentz Surfaces, Rutgers University, New Brunswick, New Jersey.

Yang A.T., Freudensterin F., 1964.Application of Dual-number Quaternion Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms. ASME Journal of applied Mechnics 86E (2) 300-308.

Yaylı Y.,1992. Homothetic Motions at E^4. Mech. Mach. Theory, Vol. 27, No. 3, 303-305.

Yaylı Y., 1988. Hamilton hareketleri ve Lie Grupları, PhD thesis, Gazi university, Ankara, Turkey.

Zhang F., 1997. Quaternions and Matrices of Quaternions, Linear Algebra and its Appl., 251, 21-57.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Mehdi JAFARI
Doğum Yeri	:	İran-Ürmiye
Doğum Tarihi	:	15.06.1979
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Ibne Sina Lisesi (1998)
Lisans	:	Ürmiye Üniversitesi(Urmia), Fen Fakültesi, Matematik Bölümü (2002)
Yüksek Lisans	:	I.A. Üniversitesi, Tahran, Fen Bilimleri Enstitüsü (2003-2005)
Doktora	:	Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,Matematik Anabılım Dalı (Eylül 2008- Mart 2012)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

I.A. Üniversitesi, Ürmiye, Fen Fakültesi
Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi (2005-2007)

Yayınları (SCI ve diğer)

1. Mortazaasl H., **Jafari M.**, Yaylı Y., Homothetic Motions In dual 3-spaces, International Journal Contemp. of Math. Sciences. Vol. 6, 2011, no. 6, pp.841 – 856.

2. **Jafari M.**, Mortazaal H., Yaylı Y., De-Moiver's Formula for Matrices of

Quaternions. JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications. Vol.21, Num. 1, 2011, pp. 57-67.

3. **Jafari M.**, Yaylı Y., Homothetic Motions at $E^4_{\alpha\beta}$. International Journal Contemp. of Math. Sciences. Vol. 5, 2010, no. 47, pp.2319 – 2326.

4. Jahan A., **Jafari M.** , Bound State Energy of Delta –Function potential. Iranian Journal of Science and Technology (IJST) Transition A. Vol.31, No. A (2007)

5. Jahan A., Nasseri M., **Jafari M.**, Noncommutative Nonrelativistic Fermions. Modern Physics Letters A, Vol. 22, NO.35 (2007)

6. **Jafari M.,** Yaylı Y., Spherical Cyclic Motions In Euclidean 3-space. Accepted for publication (Advances and Applications in Mathematical Science)