# KADEMELİ HALKALAR, MODÜLLER VE ÇOKKATLILIK

# GRADED RINGS, MODULES AND MULTIPLICITY

**DAMLA ACAR**

**DOÇ. DR. BÜLENT SARAÇ**
**Tez Danışmanı**

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2017

**DAMLA ACAR** 'ın hazırladığı **"Kademeli Halkalar, Modüller ve Çokkatlılık "** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI'**nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ahmet ARIKAN
Başkan ..........................................

Doç. Dr. Bülent SARAÇ
Danışman ..........................................

Prof. Dr. Ali ERDOĞAN
Üye ..........................................

Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN
Üye ..........................................

Prof. Dr. Yücel TIRAŞ
Üye ..........................................

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

- ☐ **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**
  (Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

- ☒ **Tezimin/Raporumun 13.04.2020 tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**
  (Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım taktirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

- ☐ **Tezimin/Raporumun ............. tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

- ☐ **Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

13 / 04 / 2017

*(İmza)*

*Öğrencinin Adı Soyadı*

DAMLA ACAR

# ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmamda,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

01/04/2017

DAMLA ACAR

# ÖZET

## KADEMELİ HALKALAR, MODÜLLER VE ÇOKKATLILIK

**Damla ACAR**

**Yüksek Lisans, Matematik Bölümü**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. Bülent SARAÇ**

**Mart 2017, 146 sayfa**

Tez çalışmamız, Cebir ve Geometri alanlarında önemli bir yere sahip Kademeli Halka ve Kademeli Modül kavramları ve bunlar ile ilgili ortaya atılmış bazı düşünceler üzerindeki araştırmalarımızı kapsamaktadır. Bir kademeli modül ile ilişkilendirilen önemli bir değişmez (invaryant) homojen bileşenlerin büyüklüğünü ölçen "Hilbert Fonksiyonu" olarak karşımıza çıkmaktadır. Tezimizde ayrıca Hilbert fonksiyonlarından okunan çokkatlılık kavramı da çeşitli yön ve boyutlarıyla ele alınmıştır.

Tez çalışmamız beş bölümden oluşmaktadır. Giriş kısmında diğer bölümlerde kullanılan Halka ve Modül Teorisi'nin temel kavramlarına ve teoremlerine yer verilmiştir.

İkinci bölümde kademeli halka ve modüller tanıtılarak homojen eleman ve ideal kavramları açıklanmıştır. Daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan özel kademeli halkalar ve modüller ele alınmıştır. Kademeli bir modülün bir homojen ayrışabilir alt modülünün, bütün bileşenleri homojen olan asıl ayrışıma sahip olup olmadığı sorusu incelenmiştir.

Üçüncü bölümde çokkatlı sistemler ele alınarak, D. J. Wright tarafından ortaya atılan "genel çokkatlılık sembolü" tanıtılmış ve özellikleri incelenmiştir. C. Lech tarafından verilen, çokkatlılık sembolü için limit formülü elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde $x_1, \ldots, x_s$, 1–dereceli homojen elemanlar olmak üzere $R = R_0[x_1, \ldots, x_s]$ kademeli halkası üzerinde tanımlanan Hilbert ve Hilbert-Samuel fonksiyonları incelenmiştir. Ayrıca Hilbert fonksiyonları üzerinde verilen sonuçların bir uygulaması olarak P. Samuel'in çokkatlılık sembolü için verdiği bir diğer limit formülü elde edilmiştir. Ek olarak, Hilbert fonksiyonlarının Cebirsel Geometri'de çeşitlemlerin boyutlarını belirlemede nasıl kullanıldığı üzerinde durulmuştur.

Son bölümde ise çokkatlılık kavramını homolojik açıdan ele almamızı sağlayan Koszul kompleksler ve özellikleri incelenmiştir. Bu bölümün en önemli sonucu olarak, Koszul kompleksleri yardımıyla tanımlanan Euler-Poincaré karakteristiğini kullanarak daha önce farklı biçimlerde tanımlanan çokkatlılık sembolleri arasındaki ilişki verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Kademeli halka, kademeli modül, çokkatlılık sembolü, çokkatlı sistem, Hilbert fonksiyonu, Hilbert-Samuel fonksiyonu, Koszul kompleksi, Euler-Poincaré karakteristiği.

# ABSTRACT

## GRADED RINGS, MODULES AND MULTIPLICITY

**Damla ACAR**

**Master of Science, Department of Mathematics**

**Supervisor: Assoc. Prof. Bülent SARAÇ**

**March 2017, 146 pages**

This thesis is based on a research over graded rings and graded modules as well as some related ideas which are of particular importance especially to the areas Algebra and Geometry. An important concept related to graded modules, so-called Hilbert functions, occurs as an invariant which measures size of homogeneous components. In this thesis we study the concept of multiplicity, which can be read from Hilbert functions, in many aspects.

This thesis consists of five chapters. In the introductory chapter we give some important notions and results on commutative rings and their modules which will be used in the sequel.

In the second chapter, we introduce the notions of graded rings and graded modules. We also give some particular graded rings which will be used later in other chapters. Finally we deal with the question as to whether a homogeneous decomposable submodule of a graded module has a primary decomposition in which every primary term is homogeneous.

In the third chapter, by considering multiplicity systems, we give an account of a theory for "general multiplicity symbols" initiated by D. J. Wright. Also, we obtain a limit formula given for multiplicty symbol by C. Lech.

In the fourth chapter, we study Hilbert and Hilbert-Samuel functions over a graded ring $R_0[x_1, \ldots, x_s]$, where $x_1, \ldots, x_s$ are homogeneous elements of degree 1. Then, as an application of Hilbert functions theory, we give another limit formula for multiplicity symbol which is proved by P. Samuel. Moreover, we demonstrate how Hilbert-Samuel functions are used in Algebraic Geometry to determine the dimension of an affine variety.

In the last chapter, we give some properties of Koszul complexes which provide us with homological methods for studying multiplicities. As one of the main results of this chapter, we establish a connection between two multiplicity symbols using Euler-Poincaré characteristics which are defined with the help of Koszul complexes.

**Keywords:** Graded ring, graded module, multiplicity symbol, multiplicity system, Hilbert function, Hilbert-Samuel function, Koszul complex, Euler-Poincaré characteristic.

# TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bilgi ve tecrübeleriyle bana sabırla yol gösteren, destekleyen, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam ve tez danışmanım Doç. Dr. Bülent SARAÇ'a,

Tez savunması aşamasındaki değerlendirmeleri ve katkıları ile jüri üyeleri sayın hocalarım Prof. Dr. Ahmet ARIKAN, Prof. Dr. Ali ERDOĞAN, Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN ve Prof. Dr. Yücel TIRAŞ'a,

Hayatım boyunca aldığım kararlarda daima yanımda olup, maddi ve manevi desteklerini hiç esirgemeyen canım anneme ve babama, bu süreçte tüm sıkıntılarımı paylaşan canım kardeşime,

Manevi olarak desteklerini her zaman hissettiğim her an yanımda olan değerli dostlarım Ömer Furkan AFACAN, Burcu KAYIKÇI ve Sibel KURT'a

sonsuz teşekkürler...

# İçindekiler

# SİMGELER VE KISALTMALAR

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | negatif olmayan tamsayılar |
| $\subset$ veya $\subsetneqq$ | kesin olarak kapsama |
| $\leq$ | alt modül |
| $\lneqq$ | öz alt modül |
| $\oplus$ | dik toplam |
| $\approx$ | izomorfizma |
| $l_R(M)$ | $M$ $R$–modülünün uzunluğu |
| $Jac(R)$ | $R$'nin Jacobson radikali |
| $\operatorname{Rad} I$ veya $\sqrt{I}$ | $I$ idealinin radikali |
| $\ker f$ | $f$ homomorfizmasının çekideği |
| $\operatorname{Im} f$ | $f$ homomorfizmasının görüntüsü |
| $M_P$ | $M$'nin $P$ asal idealindeki yerelleştirmesi |
| $K^e$ | $K$ alt modülünün yerelleştirme içindeki genişlemesi |
| $W^c$ | $W$ alt modülünün çekilmesi |
| $\operatorname{Ass}(M)$ | $M$'nin ilgili asal ideallerinin kümesi |
| $\operatorname{Ann}_R(M)$ veya $(0 :_R M)$ | $M$'nin $R$ halkasındaki sıfırlayanı |
| $\chi_R$ | doğal dönüşüm |
| $\operatorname{Supp}(M)$ | $M$'nin destek kümesi |
| $\dim(P)$ | $P$ asal idealinin boyutu |
| $\operatorname{Rank}(P)$ | $P$ asal idealinin rankı |
| $\operatorname{der}(x)$ | $x$ elemanının derecesi |
| $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$ veya $e_R(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ | $E$ modülünün $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ ile belirli çokkatlısı |
| $H_M(n)$ | $M$'nin Hilbert fonksiyonu |
| $HS_M(n)$ | $M$'nin Hilbert-Samuel fonksiyonu |
| $HP_M(n)$ | $M$'nin Hilbert polinomu |
| $HSP_M(n)$ | $M$'nin Hilbert-Samuel polinomu |
| $\Delta$ | bağlantı homomorfizması |
| $\binom{s}{\mu}$ | binom katsayısı |
| $V(f_1, \ldots, f_s)$ | $f_1, \ldots, f_s$ ile tanımlı afin çeşitlem |
| $BK(f)$ | $f$'nin başkatsayısı |
| $BM(f)$ | $f$'nin baş monomu |
| $BT(I)$ | $I$'nın başterimleri kümesi |
| $K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ | $E$'nin $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$'e göre Koszul kompleksi |
| $H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ | $\mu$. homoloji modülü |

# Bölüm 1

# GİRİŞ

Tez çalışmamızda halka, ideal, bölüm halkası, halka homomorfizması, modül, alt modül, bölüm modülü, modül homomorfizması gibi Halka ve Modül Kuramının bazı temel kavram ve sonuçlarının okuyucu tarafından bilindiği varsayılmıştır. Daha genel kabuller altında doğru olduğu bilinen bir takım sonuçlara da yer verilmiş olmasına rağmen, tez çalışmamız boyunca ele alacağımız halkalar, aksi belirtilmedikçe, birimli ve değişmeli, modüller ise üniter olacaktır. Ayrıca halka elemanlarının modül elemanları üzerine etkisi soldan çarpma biçiminde gösterilecektir. Genel olarak bir halka $R$ şeklinde gösterilecektir. Dolayısıyla tez çalışmamız boyunca $R$ ile, birimli ve değişmeli olan herhangi bir halka ifade edilecek, $R$ üzerindeki modüller ile de, sol $R$–modüller kastedilecektir. Ayrıca alt modül olma durumu $\leq$ ile gösterilecektir.

Bu kısım içerisinde tez çalışmamızın asıl konularını ele alırken kullanacağımız bazı temel tanım ve sonuçlara yer verilmiştir. Bu kısım içinde yer alan sonuçlara yüksek lisans düzeyinde yazılmış pek çok Değişmeli Cebir kitabında rastlanabilir. Buradaki sonuçlar ile ilgili daha detaylı bilgi sahibi olmak için [1] veya [2] nolu referanslar ile verilen kitaplara başvurulabilir.

## 1.1 Bir Modülün Uzunluğu ve Zincir Koşulları

**Tanım 1.1.1.** *$M$ bir $R$–modül ve $K$, $M$ modülünün bir alt modülü olsun. O halde $E_0, E_1, \ldots, E_s$, $M$'nin birer alt modülü olmak üzere*

$$M = E_0 \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots \supseteq E_s = K \qquad (1.1.1)$$

azalan dizisine, *$M$ modülünden $K$ alt modülüne alt modüllerin bir zinciri* denir. Ayrıca $1 \leq i \leq s$ için $C_i = E_{i-1}/E_i$ olmak üzere $C_i$ bölüm modüllerine *zincirin faktörleri* denir.

Şimdi $M$ modülünden $K$ alt modülüne *1.1.1* dizisinden farklı bir

$$M = F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_t = K \tag{1.1.2}$$

alt modüller zinciri alınsın. O halde eğer $s \leq t$ *ve* $0 \leq \nu \leq s$ için $F_{j_\nu} = E_\nu$ olacak şekilde $0 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_s \leq t$ tamsayıları var ise o zaman *1.1.2* dizisine *1.1.1* dizisinin bir *incelmesi* denir.

Ayrıca eğer $s = t$ ve $\nu = 1, 2, \ldots, s$ için $\Gamma_{\rho_\nu}$'ler 1.1.2 dizisinin faktörleri olmak üzere $C_\nu \approx \Gamma_{\rho_\nu}$ olacak şekilde $\{1, 2, \ldots, s\}$ kümesi yeniden $\{\rho_1, \ldots, \rho_s\}$ şeklinde düzenlenebilirse o zaman *1.1.1* ve *1.1.2* alt modül zincirleri *denktir* denir.

**Tanım 1.1.2.** $C$ sıfırdan farklı bir $R$–modül olsun. Eğer $C$'nin tek öz alt modülü sıfır alt modülü ise o zaman $C$ modülüne bir *basit modül* denir.

**Tanım 1.1.3.** $M$ bir $R$–modül ve $K$, $M'$nin bir alt modülü olsun. O zaman $M$ modülünden $K$ alt modülüne bir kompozisyon serisi $E_{i-1}/E_i$ faktörleri basit olmak üzere

$$M = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_s = K$$

alt modüller zinciridir.

**Teorem 1.1.4.** *$M$ bir $R$–modül ve $K$, $M'$nin bir alt modülü olsun. $M$ modülünden $K$ alt modülüne en az bir kompozisyon serisinin olduğu varsayılsın. O zaman öz olarak azalan her*

$$M = F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_t = K$$

*zinciri bir kompozisyon serisine inceltilebilir. Ayrıca $M$ modülünden $K$ alt modülüne olan iki kompozisyon serisi denktir.*

Şimdi $E$ keyfi bir $R$–modül olsun. 0 ile $E$ modülünün sıfır alt modülü gösterilmek üzere $l_R(E)$ sembolü aşağıdaki gibi tanımlansın:

1. $E \neq 0$ ve $E$ modülünden 0 alt modülüne bir kompozisyon serisi yok ise o zaman $l_R(E) = \infty$,
2. $E \neq 0$ ve $E = E_0 \supset E_1 \supset \ldots \supset E_s = 0$ olacak şekilde bir kompozisyon serisi var ise o zaman $l_R(E) = s$,
3. $E = 0$ ise o zaman $l_R(E) = 0$ olsun.

**Tanım 1.1.5.** $E$ bir $R$–modül olmak üzere yukarıdaki gibi tanımlanan $l_R(E)$ değerine *$E'$nin uzunluğu* denir.

**Teorem 1.1.6.** *$M$ bir $R$–modül olmak üzere $K \subseteq N$, $M$ modülünün alt modülleri olsun. O zaman*

$$l_R\left(M/K\right) = l_R\left(M/N\right) + l_R\left(N/K\right)$$

*olur.*

**Tanım 1.1.7.** $M$ bir $R$–modül olsun. Eğer $M$ modülünün alt modüllerinin boştan farklı her ailesi kapsama bağıntısına göre bir maksimal elemana sahip ise o zaman $M$ *modülü alt modüller için maksimal koşulunu sağlar* denir.

**Tanım 1.1.8.** $M$ bir $R$–modül ve $K_1 \subsetneqq K_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq K_m \subsetneqq \ldots$ alt modüllerin öz olarak artan bir sonsuz dizisi olsun. Eğer her $m \geq \mu$ için $K_m = K_\mu$ olacak şekilde bir $\mu$ tamsayısı var ise o zaman $M$ *modülü alt modüller için artan zincir koşulunu sağlar* denir.

**Önerme 1.1.9.** *Eğer $M$ bir $R$–modül ise o zaman aşağıdakiler denktir:*

1. *$M$ modülü alt modüller için maksimal koşulunu sağlar.*
2. *$M$ modülü alt modüller için artan zincir koşulunu sağlar.*
3. *$M$ modülünün her alt modülü sonlu üretilmiştir.*

**Tanım 1.1.10.** $M$ bir $R$–modül olsun. Eğer $M$ yukarıdaki önermede verilen denk koşullardan birini sağlıyorsa $M'$ye bir *Noether modül* denir.

Eğer $R$ halkası kendisi üzerindeki modül yapısına göre bir Noether modül ise o zaman $R'$ye bir *Noether halka* denir.

**Tanım 1.1.11.** $M$ bir $R$–modül olsun. $M$ modülünün alt modüllerinin boştan farklı her ailesi kapsama bağıntısına göre bir minimal elemana sahip ise o zaman $M$ *modülü alt modüller için minimal koşulunu sağlar* denir.

**Tanım 1.1.12.** $M$ bir $R$–modül ve $K_1 \supsetneqq K_2 \supsetneqq \ldots \supsetneqq K_m \supsetneqq \ldots$ alt modüllerin öz olarak azalan bir sonsuz dizisi olsun. Eğer her $m \geq \mu$ iken $K_m = K_\mu$ olacak şekilde bir $\mu$ tamsayısı var ise o zaman $M$ *modülü alt modüller için azalan zincir koşulunu sağlar* denir.

**Önerme 1.1.13.** *Eğer $M$ bir $R$–modül ise o zaman aşağıdakiler denktir:*

1. *$M$ modülü alt modüller için minimal koşulunu sağlar.*
2. *$M$ modülü alt modüller için azalan zincir koşulunu sağlar.*

**Tanım 1.1.14.** $M$ bir $R$–modül olsun. Eğer $M$ yukarıdaki önermede verilen denk koşullardan birini sağlıyorsa $M'$ye bir *Artin modül* denir.

Eğer $R$ halkası kendisi üzerindeki modül yapısına göre bir Artin modül ise o zaman $R'$ye bir *Artin halka* denir.

**Tanım 1.1.15.** $M$, $N$, $P$ birer $R$–modül ve $\phi : M \to N$ , $\psi : N \to P$, $R$–modül homomorfizmaları olsun. Eğer

$$M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} P \tag{1.1.3}$$

dizisi için $\ker\psi = \operatorname{Im}\phi$ oluyor ise o zaman 1.1.3 dizisine bir *tam dizi* denir.

Ayrıca tanım üçten daha fazla terim içeren dizilere genişletilebilir.

$$\ldots \to M_{n+2} \to M_{n+1} \to M_n \to M_{n-1} \to \ldots \tag{1.1.4}$$

$R$–modüllerin bir dizisi olsun. Eğer 1.1.4 dizisinin ardışık üç teriminden oluşan her

$$M_{n+1} \to M_n \to M_{n-1}$$

üçlüsü tam ise o zaman 1.1.4 dizisine *tamdır* denir.

**Örnek 1.1.16.** $K$, $M$ modülünün bir alt modülü ise $K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/K$ dizisi bir tam dizi olur. Burada $i$ ve $\pi$ sırasıyla içerim dönüşümü ve doğal dönüşümdür.

**Teorem 1.1.17.** *Her terimi sonlu uzunluklu $R$–modül olan $0 \to E_s \to E_{s-1} \to \cdots \to E_0 \to 0$ tam dizisi alınsın. O zaman*

$$\sum_{\mu=0}^{s} (-1)^{\mu}\, l_R\,(E_\mu) = 0$$

*olur.*

**Tanım 1.1.18.** $M$ bir $R$–modül olsun. O halde $\alpha M = 0$ olacak şekilde $R$ halkasının tüm $\alpha$ elemanlarının kümesine *$M$ modülünün $R$ içindeki sıfırlayanı* denir ve $\operatorname{Ann}_R(M)$ veya $(0 :_R M)$ şeklinde gösterilir.

**Önerme 1.1.19.** *$M$ bir $R$–modül ve $I = \operatorname{Ann}_R M$ olmak üzere $I \subseteq A$ olacak şekilde bir $A$ ideali alınsın. Ayrıca*

$$\phi : R \to R/A$$

*doğal dönüşüm olsun. O zaman $M$ modülü bir $(R/A)$–modül yapısına sahiptir. Bu yapı $r \in R$ ve $x \in M$ olmak üzere $rx = \phi(r)x$ şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile verilir. Son olarak $M$ bir $(R/A)$–modül olarak göz önüne alınırsa $\phi(I) = I/A$, $M$ modülünün $R/A$ içindeki sıfırlayanı olur.*

**Sonuç 1.1.20.** *$M$ bir $R$–modül, $I = \operatorname{Ann}_R M$ ve $N$, $M$ modülünün bir alt kümesi olsun. Ayrıca $I \subseteq A$ olacak şekilde bir $A$ ideali alınsın. O zaman $M$ bir $R$–modül olarak göz önüne alındığında $N$ kümesi, $M$ modülünün bir alt modülüdür ancak ve ancak $M$ bir $(R/A)$–modül olarak göz önüne alındığında $N$ kümesi $M$ modülünün bir alt modülüdür.*

**Sonuç 1.1.21.** *$M$ bir $R$–modül, $I = \operatorname{Ann}_R M$ olsun. $I \subseteq A$ olacak şekilde bir $A$ ideali alınsın. O zaman $l_R\,(M) = l_{R/A}\,(M)$ olur.*

**Tanım 1.1.22.** $R$ bir halka ve $M$ bir $R$–modül olsun. Eğer $R$'nin bir $P$ asal ideali, bir $m \in M$ için $P = (0 :_R m)$ olacak şekilde varsa o zaman $P$'ye *$M$'nin bir ilgili asal ideali* denir. $M$'nin ilgili asal ideallerinin kümesi $\mathrm{Ass}(M)$ ile gösterilir.

**Lemma 1.1.23** (Zorn Lemma)**.** *Boştan farklı kısmi sıralı bir küme içindeki her zincirin o küme içinde bir üst sınırı varsa, bu kısmi sıralı kümenin bir maksimal elemanı vardır.*

**Önerme 1.1.24.** *$P_1, P_2, \ldots, P_n$ idealleri $R$ halkasının asal idealleri olsun. $A$ ideali bu ideallerin hiçbirinde tamamen kapsanmasın. O zaman $A$ ideali hiçbir $P_i$ idealine ait olmayan bir $\alpha$ elemanı içerir.*

**Tanım 1.1.25.** $A$, $R$ halkasının bir ideali ve $\alpha$, $R$'nin bir elemanı olsun. O halde bir $m$ pozitif tamsayısı için $\alpha^m \in A$ olacak şekildeki $\alpha \in R$ elemanlarının kümesine *$A$ idealinin $R$ halkası içindeki radikali* denir ve $\mathrm{Rad}\, A$ ya da $\sqrt{A}$ ile gösterilir.

**Özellikler.**

1. *$A$, $R$ halkasının bir ideali olmak üzere* $A \subseteq \mathrm{Rad}\, A$ .
2. *$A$, $B$, $R$'nin iki ideali ve $A \subseteq B$ ise o zaman* $\mathrm{Rad}\, A \subseteq \mathrm{Rad}\, B$ .
3. *$A$, $R$'nin bir ideali olmak üzere* $\mathrm{Rad}\,(\mathrm{Rad}\, A) = \mathrm{Rad}\, A$ .

**Önerme 1.1.26.** *$A_1, \ldots, A_m$, $R$ halkasının idealleri olsun. O zaman*

$$\begin{aligned} \mathrm{Rad}\,(A_1 A_2 \ldots A_m) &= \mathrm{Rad}\,(A_1 \cap \ldots \cap A_m) \\ &= \mathrm{Rad}\, A_1 \cap \ldots \cap \mathrm{Rad}\, A_m \end{aligned}$$

*olur.*

**Önerme 1.1.27.** *$A$ bir ideal olsun.* $\mathrm{Rad}\, A$ *idealinde kapsanan sonlu üretilmiş bir $B$ ideali alınsın. O zaman $B^m \subseteq A$ olacak şekilde pozitif bir $m$ tamsayısı vardır.*

**Tanım 1.1.28.** $R \subseteq R'$ olmak üzere $R$ ve $R'$ iki halka olsun. Eğer $R \to R'$ içerim dönüşümü bir halka homomorfizması ise o zaman $R$ halkasına $R'$ halkasının bir *alt halkası* denir. Ayrıca $R'$ halkasına $R$'nin bir *genişlemesi* denir. Şimdi $\alpha \in R'$ olsun. O zaman uygun $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ ve $n \geq 1$ için

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

ise $\alpha$ elemanına $R$ halkası üzerinde bir *integral eleman* denir. Ayrıca eğer $R'$ halkasının her elemanı $R$ halkası üzerinde integral ise o zaman $R'$ halkasına $R$ halkasının bir *integral genişlemesi* denir.

**Önerme 1.1.29.** *$R'$, $R$ halkasının bir integral genişlemesi, $A'$ bir $R'$–ideal ve $P'$ bir asal $R'$–ideal olsun. Eğer $P' \subseteq A'$ ve $P' \cap R = A' \cap R$ ise o zaman $A' = P'$ olur.*

**Tanım 1.1.30.** $R'$, $R$ halkasının bir genişlemesi olsun. $A'$, $R'$ halkasının bir ideali olmak üzere $R$ halkasının $A' \cap R$ idealine $A'$ *idealinin $R$ halkasındaki çekilmesi* denir ve $A'^c$ ile gösterilir.

**Tanım 1.1.31.** $R'$, $R$ halkasının bir genişlemesi olsun. $A$, $R$ halkasının bir ideali olmak üzere $A$ idealinin $R'$ halkasında ürettiği ideale $A$ idealinin *genişlemesi* denir ve $AR'$ ya da $R'A$ şeklinde gösterilir.

**Teorem 1.1.32.** *$R'$, $R$ halkasının integral genişlemesi ve $P'$, $R'$ halkasının bir asal ideali olsun. $P'$ idealinin $R$ halkasındaki $P = P' \cap R$ çekilmesi alınsın. O zaman $P'$, $R'$ halkasının bir maksimal idealidir ancak ve ancak $P$, $R$ halkasının bir maksimal idealidir.*

$E$ bir $R$–modül, $K \leq E$ ve $U \subseteq E$ olsun.

$$(K :_R U) = \{r \in R : \text{her } u \in U \text{ için } ru \in K\} = \{r \in R : rU \subseteq K\}$$

kümesi tanımlansın. Buna göre $(K :_R U)$ $R$'nin bir ideali olur. Özel olarak $U = \{u\}$ ise $(K :_R U)$ ideali için $(K :_R \{u\})$ yerine $(K :_R u)$ yazılabilir. Dikkat edilirse $K = 0$ alındığında o zaman $(0 :_R U)$ daha önce tanımlanan sıfırlayan ile aynı ideal olacaktır.

Şimdi $G \subseteq R$ ve $K \leq E$ olmak üzere

$$(K :_E G) = \{e \in E : \text{her } g \in G \text{ için } ge \in K\} = \{e \in E : Ge \subseteq K\}$$

kümesi tanımlanırsa $(K :_E G)$, $E$'nin bir alt modülüdür. Eğer $G = \{\gamma\}$ ise $(K :_E G)$ alt modülü için $(K :_E \{\gamma\})$ yerine $(K :_E \gamma)$ yazılabilir.

$\{K_i\}_{i\in I}$ ailesi $E$ modülünün alt modüllerinin bir ailesi olsun. $\{A_j\}_{j\in J}$ ile $R$ halkasının ideallerinin bir ailesi gösterilsin. $G \subseteq R$ olsun. Ayrıca $A$ ve $B$ kümeleri $R$ halkasının idealleri, $K$ ve $N$ kümeleri $E$ modülünün alt modülleri olsun. Buna göre aşağıdaki özellikler verilebilir.

**Özellikler.**

1. *$(K :_R U) = (K :_R RU)$ ve $(K :_E G) = (K :_E RG)$ olur. Özel olarak her $u \in U$ için $(K :_R u) = (K :_R Ru)$ ve her $\gamma \in R$ için $(K :_E \gamma) = (K :_E (\gamma))$ elde edilir.*

2. *$((\cap_{i\in I} K_i) : U) = \cap_{i\in I} (K_i : U)$ve $((\cap_{i\in I} K_i) :_E G) = \cap_{i\in I} (K_i :_E G)$.*

3. *$(K : (\sum_{i\in I} K_i)) = \cap_{i\in I} (K : K_i)$ ve $\left(K :_E \left(\sum_{j\in J} A_j\right)\right) = \cap_{j\in J} (K :_E A_j)$.*

4. *$((N : K) : A) = (N : AK) = ((N :_E A) : K)$.*

5. $((N :_E A) :_E B) = (N :_E AB) = ((N :_E B) :_E A)$.

6. $\gamma E \cap K = \gamma(K :_E \gamma)$

7. $L$, *$E'$nin $K$' yı içeren bir alt modülü ise* $(L :_E \gamma)/K = \Big((L/K) :_{E/K} \gamma\Big)$ *olur. Özel olarak* $L = K$ *alınırsa* $(K :_E \gamma)/K = (0 :_{E/K} \gamma)$ *elde edilir.*

**Önerme 1.1.33.** *$E$, $n$ tane eleman ile üretilen bir $R$–modül olsun. $B$ idealinin $E$ modülünün sıfırlayanını içerdiğini varsayalım. Eğer bir $A$ ideali için $AE \subseteq BE$ ise o zaman $A^n \subseteq B$ olur.*

**Tanım 1.1.34.** $E$ bir $R$–modül olsun. $E$ modülünün bir $N$ alt modülü alınsın. Eğer

1. $N$, $E$ modülünün bir öz alt modülü ve

2. her $r \in R$, $e \in E$ için $re \in N$ ve $e \notin N$ iken $r^m E \subseteq N$ olacak şekilde pozitif bir $m$ tamsayısı bulunabiliyor ise o zaman $N$ alt modülüne $E$ modülünün bir *asıl alt modülü* denir.

Özel olarak $E = R$ alınırsa $R'$nin asıl alt modüllerine *asıl ideal* denir. Buna göre $R$ halkasının bir $Q$ ideali için eğer

1. $Q$, $R$ halkasının bir öz ideali ve

2. $r, \alpha \in R$ olmak üzere $r\alpha \in Q$ ve $\alpha \notin Q$ iken $r \in \operatorname{Rad} Q$ ise o zaman $Q$ idealine $R$ halkasının bir *asıl ideali* denir.

$N$, $E$ modülünün bir asıl alt modülü ise $\operatorname{Rad}(N : E)$ idealinin $R$'nin bir asal ideali olduğu kolayca görülebilir.

**Tanım 1.1.35.** $N$, $E$ modülünün bir asıl alt modülü olsun. Eğer $\operatorname{Rad}(N : E) = P$ ise o zaman $N$ alt modülüne bir *$P$–asıl alt modül* denir. Benzer şekilde eğer $Q$ bir asıl ideal ve $P = \operatorname{Rad} Q$ ise o zaman $Q$ idealine bir *$P$–asıl ideal* denir.

**Tanım 1.1.36.** $E$ bir $R$–modül ve $K$, $E$'nin bir alt modülü olsun. $N_1, \ldots, N_s$, $E$ modülünün asıl alt modülleri olmak üzere eğer $K = N_1 \cap \ldots \cap N_s$ ise o zaman $K$ alt modülü *$E$ modülünde ayrışabilir* denir. Ayrıca $K = N_1 \cap \ldots \cap N_s$ ifadesine *$K'$nın $E$ içindeki bir asıl ayrışımı* denir. $E = R$ ve $1 \leq i \leq s$ için $Q_i$ idealleri asıl idealler olsun. Eğer $A = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_s$ ise o zaman *$A$ ideali bir asıl ayrışıma sahiptir* denir.

Ayrıca $E$ bir $R$–modül olmak üzere $N$, $E$'nin bir alt modülü olsun ve $N$'nin $E$ içinde bir asıl ayrışıma sahip olduğu varsayılsın. O halde pozitif bir $n$ tamsayısı, $P_i$ idealleri $R$'nin farklı asal idealleri ve $K_i$ alt modülleri $E$'nin farklı $P_i$–asıl alt modülleri olmak üzere, her $i$ için $N = K_1 \cap \ldots \cap K_n$ ve $N \neq K_1 \cap \ldots \cap K_{i-1} \cap K_{i+1} \cap \ldots \cap K_n$ olacak şekilde bulunabiliyor ise o zaman $N$'ye *$E$ içinde bir normal asıl ayrışıma sahiptir* denir.

**Teorem 1.1.37.** *$E$ bir $R$–modül ve $K$, $E$'nin asıl ayrışıma sahip olan bir $K$ alt modülü olsun. Eğer $A$ sonlu üretilmiş bir ideal ve $(K :_E A) = K$ ise o zaman $A$ ideali $K$ alt modülüne ait olan hiçbir asal idealde kapsanmaz.*

## 1.2 Kesirli Halkalar ve Modüller, Yerelleştirmeler

**Tanım 1.2.1.** $S$, $R$ halkasının bir alt kümesi olsun. Eğer $1 \in S$ ve $s_1, s_2 \in S$ iken $s_1 s_2 \in S$ ise o zaman $S$ kümesine $R$'nin bir *çarpımsal kapalı alt kümesi* denir.

$S$, $R$'nin boştan farklı çarpımsal kapalı bir alt kümesi ve $E$ bir $R$–modül olsun. $E \times S$ üzerinde her $e_1, e_2 \in E$ ve $s_1, s_2 \in S$ için

$$(e_1, s_1) \sim (e_2, s_2) \Leftrightarrow \exists s \in S \text{ için } s s_2 e_1 = s s_1 e_2$$

şeklinde bir bağıntı tanımlansın. $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Herhangi bir $(e, s) \in E \times S$ ikilisinin $\sim$ bağıntısına göre denklik sınıfı $e/s$ olarak gösterilsin. Ayrıca

$$\{\frac{e}{s} : e \in E, s \in S\}$$

kümesi $E_S$ ile gösterilsin. $E_S$ kümesinin $e_1/s_1$ ve $e_2/s_2$ elemanları için

$$\frac{e_1}{s_1} + \frac{e_2}{s_2} = \frac{s_2 e_1 + s_1 e_2}{s_1 s_2}$$

işlemi tanımlansın. Buna göre $(E_S, +)$ bir abelyan gruptur. Özel olarak $E = R$ alındığında $R_S$ üzerinde her $r_1/s_1$, $r_2/s_2 \in R_s$ için

$$\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2}$$

işlemi tanımlanırsa $(R_S, +, \cdot)$ bir halka olur. Ayrıca her $r/s \in R_S$ ve $e/t \in E_S$ için

$$\frac{r}{s} \cdot \frac{e}{t} = \frac{re}{st}$$

işlemi $E_S$'yi bir $R_S$–modül yapar.

$$\chi_E : E \to E_S, \chi_E(e) = \frac{e}{1}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm grup homomorfizmasıdır. Bu dönüşüme *doğal dönüşüm* denir. Özel olarak $\chi_R : R \to R_S$ doğal dönüşümü bir halka homomorfizmasıdır. Buna göre $E_S$, $\chi_R$ dönüşümü sayesinde aynı zamanda bir $R$–modül yapısına sahip olur. Diğer taraftan $\chi_E : E \to E_S$ doğal dönüşümü bir $R$–modül homomorfizması haline gelir.

$E$ ve $E'$ birer $R$–modül olmak üzere $f : E' \to E$ bir $R$–modül homomorfizması olsun. $f_S : E'_S \to E_S$, her $x/s \in E'_S$ için $f_S(x/s) = f(x)/s$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir $R_S$–modül homomorfizmasıdır.

Şimdi

$$0 \to E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \to 0$$

$R$–modüllerin bir tam dizisi olsun. O zaman

$$0 \to E_S^{'} \xrightarrow{f_S} E_S \xrightarrow{g_S} E_S^{''} \to 0$$

dizisi $R_S$–modüllerin bir tam dizisidir. Özel olarak $E' \leq E$ alındığında $i : E' \to E$ içerim dönüşümü olmak üzere $i_S : E_S^{'} \to E_S$ dönüşümü bir monomorfizma olur. O nedenle $E_S^{'}$ modülü ona izomorf olan $E_S$ modülünün $i_S(E_S^{'})$ alt modülü ile özdeş tutulacaktır ve

$$E_S^{'} = \left\{ \frac{x}{s} : x \in E', s \in S \right\} \leq E_S$$

şeklinde yazılacaktır.

**Tanım 1.2.2.** $E$ bir $R$–modül olsun ve $E_S$ bir $R_S$–modül olarak göz önüne alınsın. $W$, $E_S$'nin bir alt modülü olmak üzere $\chi_E : E \to E_S$ doğal dönüşüm olsun. O halde $E$'nin $\chi^{-1}(W)$ $R$–alt modülüne *$W$'nın $E$ içindeki çekilmesi* denir ve $W^c$ ile gösterilir.

**Tanım 1.2.3.** $E$ bir $R$–modül, $K$, $E$'nin bir alt modülü ve $\chi_E : E \to E_S$ doğal dönüşüm olsun. O halde $\chi_E(K)$'nın $E_S$ içinde ürettiği alt modüle *$K$'nın $E_S$ içindeki genişlemesi* denir ve $K^e$ ile gösterilir.

**Önerme 1.2.4.** *$E$ bir $R$–modül ve $S$, $R$'nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. O halde*

1. *$W$, $E_S$ modülünün bir alt modülü ise $W^{ce} = W$.*

2. *$K$ bir $U \subseteq E$ tarafından üretilen alt modül ise o zaman $K_S$, $\chi_E(U)$ ile üretilir.*

3. *$A$, $R$'nin bir ideali ise o zaman $(AE)_S = A_S E_S$.*

**Teorem 1.2.5.** *$E$ bir $R$–modül olsun. Eğer $S$ kümesi $R$ halkasının boştan farklı çarpımsal kapalı bir alt kümesi ise o zaman $l_{R_S}(E_S) \leq l_R(E)$ olur.*

**Önerme 1.2.6.** *$E$ bir sonlu üretilmiş $R$–modül, $S$, $R$'nin boştan farklı bir çarpımsal kapalı alt kümesi ve $Y$, $E$'nin bir alt modülü olsun. O zaman $(Y : E)_S = (Y_S : E_S)$ olur.*

Şimdi $S$, $R$'nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi ve $A$, $R$'nin bir ideali olmak üzere $S$'nin $R \to R/A$ doğal dönüşümü altındaki görüntüsü $S/A$ ile gösterilsin.

**Önerme 1.2.7.** *$\phi : R \to R/A$ doğal dönüşüm olmak üzere $\psi : R_S \to (R/A)_{S/A}$, $\psi(r/s) = \phi(r)/\phi(s)$ dönüşümü çekirdeği $A_S$ olan bir halka epimorfizmasıdır. Dolayısıyla $R_S/A_S \approx (R/A)_{S/A}$ elde edilir.*

**Önerme 1.2.8.** *$P$, $R$ halkasının bir asal ideali olsun. O halde eğer*

1. *$P$ ile $S$ kümesinin arakesiti boştan farklı ise o zaman $P_S = R_S$ olur*

2. *$P$ ile $S$ kümesinin arakesiti boş ise o zaman $P_S$ ideali $R_S$ halkasının $R$ halkasındaki çekilmesi $P$ olan bir asal idealidir.*

$R$ bir halka ve $E$ bir $R$–modül olsun. Ayrıca $P$, $R$ halkasının asal ideali ve $S$, $P$ idealinin tümleyenini göstersin. O zaman $S$ kümesi $R$ halkasının boştan farklı çarpımsal kapalı bir alt kümesidir. Burada $R_S$ halkası ve $E_S$ modülü yerine sırasıyla $R_P$ ve $E_P$ yazılsın. $R$'nin $P$ tarafından içerilen asal idealleri ile $R_P$'nin asal idealleri kapsama bağıntısını koruyan bir eşleme ile birebir eşlenir. Dolayısıyla $P$ idealinin genişlemesi, $R_P$ halkasının tek maksimal ideali olur. Daha sonra tanımlanacağı gibi $R_P$ halkası bir quasi-yerel halka olur. Bu nedenle $R_P$'nin elde edilmesi işlemine *yerelleştirme* denir. $R_P$ halkasının asal idealleri $R$ halkasının $P$ idealinde kapsanan asal idealleri ile birebir eşlenir. Öte yandan özel olarak maksimal idealler aynı zamanda asal olduğundan $R$ halkası maksimal idealler ile yerelleştirilebilir.

**Teorem 1.2.9.** *$E$ bir $R$–modül olsun. O zaman*

$$l_R(E) = \sum_M l_{R_M}(E_M)$$

*olur. Burada toplam $R$ halkasının maksimal idealleri üzerinden alınmıştır.*

**Teorem 1.2.10.** *(Uzunluk için genişleme formülü)$R'$, $R$ halkasının bir integral genişlemesi ve $E'$ bir $R'$–modül olsun. O zaman*

$$l_R(E') = \sum_{M'} l_{R'_{M'}}(E'_{M'}) \left[\frac{R'}{M'} : \frac{R}{M' \cap R}\right]$$

*olur. Burada toplamı $R'$ halkasının maksimal idealleri üzerinden alınmıştır.*

**Tanım 1.2.11.** $R$ bir halka, $M$, $R$ üzerinde bir modül olsun. O halde $R$'nin $M_P \neq 0$ koşulunu sağlayan $P$ asal ideallerinin kümesi $\mathrm{Supp}(M)$ ya da $\mathrm{Supp}_R(M)$ ile gösterilecektir. Dolayısıyla

$$\mathrm{Supp}(M) = \{P : P,\ R\text{'nin asal ideali ve } M_P \neq 0\}$$

yazılabilir.

**Lemma 1.2.12.** *$R$ halkası üzerinde bir $M$ modülü alınsın. O zaman aşağıdaki durumlar denktir:*

1. *$M = 0$.*

2. *$R$'nin her $P$ asal ideali için $M_P = 0$.*

3. *$R$'nin her $\mathfrak{m}$ maksimal ideali için $M_{\mathfrak{m}} = 0$.*

**Lemma 1.2.13.** *$R$ bir halka ve $M$ sonlu üretilmiş bir $R$–modül olsun. O zaman*

$$\mathrm{Supp}(M) = \{P : P,\ R\text{'nin asal ideali ve } (0 :_R M) \subseteq P\}$$

*olur.*

## 1.3 Noether Halka ve Modüller

Bu kısımda daha önce tanımlanan alt modüller için maksimal ve minimal koşullar ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

**Lemma 1.3.1.** $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ *dizisi $R$–modüllerin bir tam dizisi olsun. Eğer $E$ Noether ise o zaman $E'$ ve $E''$ de Noetherdir. Tersine eğer $E'$ ve $E''$ Noether ise o zaman $E$ Noetherdir. Ayrıca burada Noether yerine Artin alınırsa da lemma doğru olur.*

**Sonuç 1.3.2.** *$E_1, E_2, \ldots, E_s$, $R$–modüller olsun. O zaman $E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_s$ dik toplamı Noetherdir(Artindir) ancak ve ancak herbir $E_i$ modülü Noetherdir(Artindir).*

**Önerme 1.3.3.** *$N_1, N_2, \ldots, N_s$, $E$, $R$–modülünün alt modülleri olsun. Her $i$ için $N_i$ alt modülleri Noetherdir. O zaman $N_1 + N_2 + \cdots + N_s$ toplamı Noetherdir. Burada Noether yerine Artin alınırsa da önerme doğru olur.*

**Sonuç 1.3.4.** *$R$ bir Noether halka ve $E$ sonlu üretilmiş bir $R$–modül olsun. O zaman $E$ bir Noether $R$–modül olur. Ayrıca sonuç Artin durumu için de doğrudur.*

**Önerme 1.3.5.** *$E$ bir $R$–modül ve $N_1, N_2, \ldots, N_s$, $E$'nin alt modülleri olsun. Eğer herbir $i$ için $E/N_i$ modülü Noether(Artin) ise o zaman*

$$E/\left(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_s\right)$$

*modülü de Noether(Artin) olur.*

**Teorem 1.3.6.** *$E$ sonlu üretilmiş bir $R$–modül, $A = Ann_R E$ olsun. O zaman $E$ modülü Noetherdir(Artindir) ancak ve ancak $R/A$ halkası Noetherdir(Artindir).*

**Teorem 1.3.7.** *$R$ bir Artin halka olsun. O zaman $R$ halkası Noetherdir.*

**Önerme 1.3.8.** *$R$ bir halka olsun. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ idealleri $i \neq j$ için $A_i + A_j = R$ olacak şekilde alınsın. O zaman herbir $1 \leq i \leq n$ için*

$$A_i + (A_1 \ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots A_n) = A_i + (A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \ldots \cap A_n) = R$$

*olur. Ayrıca* $A_1A_2\dots A_n = A_1 \cap \dots \cap A_n$ *ve*

$$R/\left(A_1 \cap \dots \cap A_n\right) \approx R/A_1 \oplus \dots \oplus R/A_n$$

*elde edilir.*

**Önerme 1.3.9.** *$E$ bir Noether $R$–modül ve $N$, $E$'nin bir $P$–asıl alt modülü olsun. O zaman $P^mE \subseteq N$ olacak şekilde bir $m$ tamsayısı vardır.*

**Önerme 1.3.10.** *$E$ bir Noether $R$–modül ve $K$, $E$'nin bir alt modülü olsun. O zaman aşağıdaki durumlar denktir:*

1. *$l_R\left(E/K\right) < \infty$ olur.*

2. *$(K : E)$ idealini içeren her asal ideal bir maksimal idealdir.*

3. *$n \geq 0$ için $M_1M_2\dots M_nE \subseteq K$ olacak şekilde maksimal ideallerin sonlu bir $M_1, \dots, M_n$ kümesi vardır.*

**Sonuç 1.3.11.** *$A$ Noether $R$ halkasının bir ideali olsun. O zaman aşağıdaki durumlar denktir:*

1. *$l_R\left(R/A\right) < \infty$ ve denk olarak $R/A$ bir Artin halkasıdır.*

2. *$A$ idealini içeren her asal ideal $R$ halkasının bir maksimal idealidir.*

3. *$n \geq 0$ olmak üzere maksimal ideallerin bir sonlu $M_1, \dots, M_n$ kümesi $M_1 \dots M_n \subseteq A$ olacak şekilde vardır.*

**Sonuç 1.3.12.** *$E$ sonlu üretilmiş bir $R$–modül ve $A = \operatorname{Ann}_R E$ olsun. O zaman $l_R(E)$ sonludur ancak ve ancak $R/A$ halkası Artindir.*

**Tanım 1.3.13.** Bir halkanın Jacobson radikali halkanın maksimal ideallerinin arakesitidir ve $Jac(R)$ ile gösterilir.

**Teorem 1.3.14.** *$A$, $R$ halkasının bir ideali olsun. O zaman aşağıdaki iki durum denktir:*

1. *$A$ ideali $R$ halkasının Jacobson radikalinde kapsanır.*

2. *Her $E$ Noether $R$–modülü için $\cap_{n=1}^{\infty} A^nE = 0$ olur.*

**Lemma 1.3.15** (Nakayama Lemması)**.** *$R$ bir halka ve $M$, $R$ üzerinde sonlu üretilmiş bir modül olsun. $R$'nin $I \subseteq Jac(R)$ olacak şekilde bir ideali alınsın. Eğer $M = IM$ ise o zaman $M = 0$ olur.*

**Teorem 1.3.16** (Hilbert Taban Teoremi)**.** *$R$ bir Noether halka ve $x_1, \dots, x_n$ bilinmeyenler olsun. O zaman $R[x_1, \dots, x_n]$ polinomlar halkası da Noether olur.*

## 1.4 Yerel Halkalar

**Tanım 1.4.1.** $R$ bir halka ve $P$, $R$'nin bir asal ideali olsun. O halde bir $n \geq 0$ tamsayısı için eğer

1. $P$ ideali ile başlayan ve $n+1$ tane asal idealin öz olarak azalan $P \supset P_1 \supset \ldots \supset P_n$ dizisi var ve
2. (1) şıkkındaki özellikleri sağlayan ve daha fazla sayıda terim içeren bir dizi yoktur

koşulları sağlanıyor ise o zaman $P$ *asal idealinin rankı* $n$*'dir* denir ve bu durum $\operatorname{Rank} P = n$ şeklinde gösterilir. Eğer her $n$ tamsayısı için $n+1$ terimli en az bir $P \supset P_1 \supset \ldots \supset P_n$ dizisi var ise o zaman $\operatorname{Rank} P = \infty$ yazılır. Dolayısıyla her asal idealin rankı tanımlıdır. Rank değeri ya negatif olmayan bir tamsayı ya da $\infty$ olur.

Bu tanımdan aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir:

1. Bir $P$ asal ideali için $\operatorname{Rank} P = 0$ olur ancak ve ancak $P$ ideali halkanın minimal asal idealidir.
2. Eğer $P \subsetneqq P'$ asal idealler ise o zaman $\operatorname{Rank} P \leq \operatorname{Rank} P'$ olur. Ayrıca eğer $\operatorname{Rank} P < \infty$ ise o zaman $\operatorname{Rank} P < \operatorname{Rank} P'$ elde edilir.

Rank kavramı asal olmayan idealler için de tanımlanabilir. $A$ bir öz ideal olsun. $P$ idealleri asal idealler olmak üzere

$$\operatorname{Rank} A = \inf_{P \supset A} \operatorname{Rank} P$$

olsun. Ayrıca $P$ asal idealleri $A$ idealinin minimal asal idealleri olarak alınabilir. $A$, $B$ öz idealler ve $A \subseteq B$ ise o zaman $\operatorname{Rank} A \leq \operatorname{Rank} B$ olur.

**Teorem 1.4.2.** *$R$ bir Noether halka ve $A$, $R$'nin bir öz ideali olsun. $A$ ideali $n \geq 0$ için $n$ tane eleman ile üretilsin. Eğer $P$ ideali $A$'nın bir minimal asal ideali ise o zaman* $\operatorname{Rank} P \leq n$ *olur.*

**Önerme 1.4.3.** *$R$ bir halka ve $E$ bir Noether $R$–modül olsun. $R$'nin $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ elemanları alınsın. O zaman $(\operatorname{Ann}_R E, \alpha_1, \ldots, \alpha_p) = \operatorname{Ann}_R E + (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ olmak üzere*

$$\operatorname{Rad}(\operatorname{Ann}_R E, \alpha_1, \ldots, \alpha_p) = \operatorname{Rad}(\operatorname{Ann}_R (E/(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)E))$$

*elde edilir. Ayrıca $(\operatorname{Ann}_R E, \alpha_1, \ldots, \alpha_p)$'yi kapsayan asal idealler ile $\operatorname{Ann}_R (E/(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)E)$'yi kapsayan asal idealler aynıdır. Öte yandan eğer $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)E \neq E$ ise o zaman*

$$\operatorname{Rank}(\operatorname{Ann}_R (E/(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)E) \,/\, \operatorname{Ann}_R E) \leq p$$

*elde edilir.*

**Tanım 1.4.4.** $P$, $R$ halkasının bir asal ideali ve $n \geq 0$ bir tamsayı olsun. O halde

1. ilk terimi $P$ olan $n+1$ tane asal idealin

$$P \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n \tag{1.4.1}$$

dizisi vardır ve

2. (1) şıkkındaki özellikleri sağlayan ve daha fazla terim içeren bir dizi yoktur

koşulları sağlanıyor ise o zaman $P$ *idealinin boyutu* $n$*'dir* denir ve $\dim P = n$ ile gösterilir. Eğer her $n \geq 0$ için 1.4.1 dizisi gibi en az bir dizi var ise o zaman $P$ ideali *sonsuz boyutludur* denir ve $\dim P = \infty$ yazılır. Dolayısıyla boyut kavramı her $P$ asal ideali için tanımlıdır. Boyut değeri ya sonsuzdur ya da negatif olmayan bir tamsayıdır.

Tanımdan aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir:

1. $P$ asal ideali için $\dim P = 0$ olur ancak ve ancak $P$ ideali maksimaldir.

2. Eğer $P \subsetneqq P'$ asal idealler ise o zaman $\dim P \geq \dim P'$ olur. Ayrıca eğer $\dim P' < \infty$ ise o zaman $\dim P > \dim P'$ elde edilir. Boyut kavramı bütün öz idealler için tanımlanabilir. $P$ idealleri asal idealler olmak üzere

$$\dim A = \sup_{P \supseteq A} \dim P$$

olsun. Ayrıca $P$ asal idealleri $A$ idealinin minimal asal idealleri olarak alınabilir.

**Tanım 1.4.5.** Sıfırdan farklı $R$ halkasının boyutu $R$ halkasının sıfır idealinin boyutu olarak tanımlanır ve $\dim R$ ile gösterilir.

**Tanım 1.4.6.** $R$ bir halka olmak üzere $E$ sıfırdan farklı bir $R$–modül olsun. O zaman $E$ modülünün boyutu ile aslında $R/\operatorname{Ann}_R E$ halkasının boyutu kastedilir ve $\dim E$ ile gösterilir.

Dolayısıyla $P$ idealleri $\operatorname{Ann}_R E$ idealinin minimal asal idealleri olmak üzere $\dim E = \max_P(\dim P)$ olur.

**Tanım 1.4.7.** Sıfırdan farklı bir Noether $R$ halkasının sadece sonlu tane maksimal ideali var ise o zaman $R$ halkasına bir *yarı yerel halka* denir. Eğer $R$ halkasının bir tane maksimal ideali var ise o zaman $R$ halkasına *yerel halka* denir.

Tek maksimal ideali olan halkalar Noether olmak zorunda değildir. Herhangi bir halkanın bir tek maksimal ideali varsa halkaya *quasi-yerel halka* denir. Burada yerel halka ile aslında Noether quasi-yerel halkalar kastedilmektedir.

**Tanım 1.4.8.** $R$ bir yarı yerel halka ve $R$'nin bütün maksimal idealleri $M_1, M_2, \ldots, M_s$ olsun. Ayrıca $R$ halkasının bir $B$ ideali alınsın. Eğer bir $k$ tamsayısı için

$$(M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_s)^k \subseteq B \subseteq (M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_s)$$

oluyorsa o zaman $B$ idealine $R$'nin bir *tanım ideali* denir.

Bir $P$ asal idealinin $B$'yi kapsaması ile $\operatorname{Rad} B$'yi kapsaması denk olduğundan aşağıdaki durumların denk olduğu kolayca görülebilir.

1. $B$, $R$ halkasının bir tanım idealidir.

2. $\operatorname{Rad} B = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_s$ .

3. $B$ idealinin minimal asal idealleri $M_1, \ldots, M_s$ olur.

**Teorem 1.4.9.** *$R$ bir yarı yerel halka ve $d \geq 0$ olmak üzere $\dim R = d$ olsun. O zaman $R$ halkası için bir tanım idealini üreten $d$ tane eleman bulunabilir. Ayrıca $d$'den daha az sayıda eleman ile üretilen bir tanım ideali yoktur.*

**Tanım 1.4.10.** $R$ halkası $d \geq 0$ olmak üzere $d$ boyutlu bir yarı yerel halka olsun. O zaman $R$'nin $d$ elemanlı bir alt kümesi ile üretilen bir tanım idealine $R$ halkasının bir *parametreler sistemi* denir.

**Önerme 1.4.11.** *$R$ bir yarı yerel halka olsun ve $R$ halkasının bütün maksimal ideallerine ait olan bir $\alpha$ elemanı alınsın. Eğer $\alpha$ sıfır bölen değil ise o zaman $\dim (R/\alpha) = \dim R - 1$ olur.*

**Teorem 1.4.12.** *$R$ bir yarı-yerel halka ve $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $R$'nin bir parametreler sisteminin elemanları ise o zaman $\dim R/(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \dim R - k$ olur.*

**Teorem 1.4.13.** *[1, Theorem 4, §6.2]A sıfırdan farklı bir Artin halka ve $P$, $A[x_1, \ldots, x_n]$ polinom halkasının herhangi bir asal ideali ise o zaman*

$$\dim P + \operatorname{Rank} P = n$$

*olur.*

**Teorem 1.4.14.** *[2, Theorem 3.61] $R$ bir halka ve $n \geq 2$ için $P_1, \ldots, P_n$ en fazla iki tanesi asal olmayan $R$'nin idealleri olsun. $S$, $R$'nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi olmak üzere $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ olduğu varsayılsın. O zaman $1 \leq j \leq n$ olacak şekilde bir $J$ için $S \subseteq P_j$ olur.*

## 1.5 Kompleksler

Bu bölümde 5. Bölüm içinde ele alınacak olan Koszul kompleksleri ile ilgili detayların anlaşılabilmesi için gereken bazı kavram ve sonuçlar mümkün olduğunca özetlenerek verilmiştir Bunun için öncelikle $R$–modüllerin kompleksi ile ne kastedildiği ele alınacaktır. Bu bölüm içinde ele alınan kavram ve sonuçlar hakkında daha detaylı ve aydınlatıcı bilgiye ulaşmak için [3] nolu referans ile verilen kitaba başvurulabilir.

$R$–modüllerin bir kompleksi, $R$–modül ve $R$–homomorfizmaların

$$\cdots \to X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} X_{n-2} \to \cdots \tag{1.5.1}$$

olacak şekilde bir dizisidir. Ayrıca burada her $n$ için $d_{n-1}d_n = 0$ koşulu da sağlanmalıdır. $X_n$'e *$n$. dereceden bileşen modül* ya da *kompleksin $n$. bileşeni* ve $d_n$'e de *$n$.dereceden sınır homomorfizması* denir. Ayrıca 1.5.1 dizisi $(X, d)$ ya da sadece $X$ ile gösterilecektir.

$(X, d)$, $R$–modüllerin bir kompleksi olmak üzere

$$Z_n(X) = \ker(X_n \to X_{n-1}) = \ker d_n \tag{1.5.2}$$

ve

$$B_n(X) = \operatorname{Im}(X_{n+1} \to X_n) = \operatorname{Im} d_{n+1} \tag{1.5.3}$$

olsun. Burada $Z_n(X)$'in elemanlarına $X$'in *$n$-devirleri* ve $B_n(X)$'in elemanlarına da $X$'in *$n$–sınırları* denir. $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$ olsun. $H_n(X)$'e kompleksin *$n$.homoloji modülü* denir. Bu nedenle 1.5.1 dizisi tamdır ancak ve ancak bütün homoloji modülleri sıfırdır.

$(X, d)$ ve $(X', d')$ $R$–modüllerin iki kompleksi olsun. $(X, d)$ kompleksinden $(X', d')$ kompleksine bir $\phi$ dönüşümü, $-\infty < n < \infty$ için $\phi_n : X_n \to X_n^{'}$ ve her $n$ için aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde, $R$–homomorfizmaların bir $\{\phi_n\}$ ailesidir.

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\phi_n"'] & X_{n-1} \arrow[d, "\phi_{n-1}"] \\ X_n^{'} \arrow[r, "d_n^{'}"'] & X_{n-1}^{'} \end{tikzcd} \tag{1.5.4}$$

diyagramının değişmeli olması her $n$ için $\phi_{n-1}d_n = d_n^{'}\phi_n$ olması demektir. $(X, d)$ ve $(X', d')$ iki kompleks olsun. Eğer her $n$ için $\phi_n : X_n \to X_n^{'}$ bir $R$–modül izomorfizması ise o zaman $(X, d)$ ve $(X', d')$ kompleksleri izomorftur denir.

Şimdi $\phi : X \to X'$, $X$ kompleksinden $X'$ kompleksine bir dönüşüm olsun. 1.5.4 diyagramı değişmeli olduğundan $\phi_n(\ker d_n) \subseteq \ker d_n^{'}$ olur. Buradan $\phi_n(Z_n(X)) \subseteq Z_n(X')$ yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{tikzcd} X_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "\phi_{n+1}"'] & X_n \arrow[d, "\phi_n"] \\ X'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & X'_n \end{tikzcd} \tag{1.5.5}$$

diyagramı değişmeli olduğundan $\phi_n(\operatorname{Im} d_{n+1}) \subseteq \operatorname{Im} d'_{n+1}$ elde edilir. Buradan $\phi_n(B_n(X)) \subseteq B_n(X)$ olur. Dolayısıyla $(B_n(X), Z_n(X))$ ikilisinden $(B_n(X'), Z_n(X'))$ ikilisine bir dönüşüm tanımlanabilir. Bu da

$$\phi_n^* : Z_n(X)/B_n(X) \to Z_n(X')/B_n(X')$$

dolayısıyla

$$\phi_n^* : H_n(X) \to H_n(X')$$

şeklinde yazılabilir. Buradan komplekslerin bir $\phi : X \to X'$ dönüşümü ile, $X$'in homoloji modüllerinden $X'$ kompleksinin homoloji modüllerine bir $H_n(X) \to H_n(X')$ dönüşümü tanımlanabileceği söylenebilir. $X', X, X''$, $R$–modüllerin kompleksleri olsun ve bu kompleksler arasında $\phi : X' \to X$, $\psi : X \to X''$ dönüşümleri alınsın. Eğer her $n$ için

$$X'_n \xrightarrow{\phi_n} X_n \xrightarrow{\psi_n} X''_n$$

dizisi $R$–modüllerin bir tam dizisi ise o zaman

$$X' \xrightarrow{\phi} X \xrightarrow{\psi} X''$$

komplekslerin bir tam dizisi olur. Ayrıca her $n$ için $X_n = 0$ olan bir komplekse *sıfır kompleksi* denir ve 0 ile gösterilir. Buradan eğer her $n$ için

$$0 \to X'_n \xrightarrow{\phi_n} X_n \xrightarrow{\psi_n} X''_n \to 0$$

$R$–modüllerin bir tam dizisi ise o zaman

$$0 \to X' \xrightarrow{\phi} X \xrightarrow{\psi} X'' \to 0$$

komplekslerin bir tam dizisi olur.

**Lemma 1.5.1.** *$(X', d'), (X, d)$ ve $(X'', d'')$ $R$–modüllerin kompleksleri ve*

$$0 \to X' \xrightarrow{\phi} X \xrightarrow{\psi} X'' \to 0$$

*dizisi $R$–modüllerin bir tam dizisi olsun. O halde*

$$H_n(X') \xrightarrow{\phi_n^*} H_n(X) \xrightarrow{\psi_n^*} H_n(X'')$$

*dizisi tamdır. Buradaki $\phi_n^*$ ve $\psi_n^*$ dönüşümleri daha önce açıklandığı gibi sırasıyla $\phi$ ve $\psi$ dönüşümlerinden elde edilen dönüşümlerdir.*

Şimdi komplekslerin bir

$$0 \to X' \xrightarrow{\phi} X \xrightarrow{\psi} X'' \to 0$$

tam dizisi olsun. Her $n$ için $\Delta_n : H_n(X'') \to H_{n-1}(X')$ $R$–homomorfizmaları aşağıdaki gibi tanımlanacaktır ve bu şekilde tanımlanan homomorfizmalara *bağlantı homomorfizmaları* denir.

$\zeta_n \in H_n(X'')$ olsun. O halde $u_n'' \in Z_n(X'')$ olmak üzere $\zeta_n = u_n'' + B_n(X'')$ alınabilir. $\psi_n$ bir epimorfizmadır. Dolayısıyla $\psi_n(x_n) = u_n''$ olacak şekilde bir $x_n \in X_n$ elemanı vardır. Ayrıca $u_n'' \in Z_n(X'')$ olduğundan

$$\psi_{n-1}d_n(x_n) = d_n''\psi_n(x_n) = d_n''(u_n'') = 0$$

elde edilir. Ayrıca

$$0 \to X_{n-1}' \xrightarrow{\phi_{n-1}} X_{n-1} \xrightarrow{\psi_{n-1}} X_{n-1}'' \to 0$$

tam dizisi ile bir $x_{n-1}' \in X_{n-1}'$ için $d_n(x_n) = \phi_{n-1}(x_{n-1}')$ olur. O halde $d_{n-1}d_n = 0$ olduğundan

$$\phi_{n-2}d_{n-1}'(x_{n-1}') = d_{n-1}\phi_{n-1}(x_{n-1}') = d_{n-1}d_n(x_n) = 0$$

elde edilir. $\phi_{n-2}$ bir monomorfizma olduğundan $d_{n-1}'(x_{n-1}') = 0$ olur. Buradan $x_{n-1}' \in Z_{n-1}(X')$ elde edilir. Şimdi

$$\Delta_n(\zeta_n) = x_{n-1}' + B_{n-1}(X') \tag{1.5.6}$$

olsun. Dolayısıyla $\Delta_n$ bağlantı homomorfizması tanımlanmış olur. Bu dönüşümün iyi tanımlı olduğu şu şekilde gösterilebilir. $\zeta_n \in H_n(X'')$ olsun ve yukarıda yapılan işlemler burada tekrar ele alınsın. $u_n''$, $x_n$, $x_{n-1}'$ elemanları yerine sırasıyla $v_n''$, $y_n$, $y_{n-1}'$ alınırsa o zaman $u_n''$ ve $v_n''$ $\zeta_n$'in $H_n(X'')$'ndeki temsilcileri olur. Dolayısıyla $u_n'' - v_n'' \in B_n(X'')$ elde edilir. Bir $x_{n+1}'' \in X_n$ için $u_n'' - v_n'' = d_{n+1}''(x_{n+1}'')$ olsun. O zaman bir $t_{n+1} \in X_{n+1}$ için $x_{n+1}'' = \psi_{n+1}(t_{n+1})$ olur. Bu nedenle $u_n'' - v_n'' = \psi_n d_{n+1}(t_{n+1})$ yazılabilir. Ayrıca $\psi_n(x_n) = u_n''$ ve $\psi_n(y_n) = v_n''$ olur. Bu nedenle $x_n - y_n - d_{n+1}(t_{n+1}) \in \ker\psi_n = \operatorname{Im}\phi_n$ elde edilir. O halde $t_n' \in X_n'$ iken $x_n - y_n - d_{n+1}(x_{n+1}) = \phi_n(t_n')$ yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafına $d_n$ dönüşümü uygulanır ve $d_n(x_n) = \phi_{n-1}(x_{n-1}')$, $d_n(y_n) = \phi_{n-1}(y_{n-1}')$ olduğu da göz önüne alınırsa o zaman

$$\phi_{n-1}(x_{n-1}') - \phi_{n-1}(y_{n-1}') = \phi_{n-1}d_n'(t_n')$$

elde edilir. $\phi_{n-1}$ bir monomorfizma olduğundan $x'_{n-1} - y'_{n-1} = d'_n(t'_n)$ yazılabilir. Buradan

$$x'_{n-1} \equiv y'_{n-1} (\mod B_{n-1}(X'))$$

olur. Bu nedenle $x'_{n-1}$ ve $y'_{n-1}$ elemanlarının $H_{n-1}(X')$'deki görüntüleri aynıdır. Bu da $\Delta_n$ dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu söyler.

**Teorem 1.5.2.** *$(X', d'), (X, d), (X'', d'')$, $R$–modüllerin kompleksleri ve*

$$0 \to X' \xrightarrow{\phi} X \xrightarrow{\psi} X'' \to 0 \tag{1.5.7}$$

*bir tam dizi olsun. O zaman*

$$\cdots \to H_n(X') \to H_n(X) \to H_n(X'') \to H_{n-1}(X') \to H_{n-1}(X) \to H_{n-1}(X'') \to \cdots \tag{1.5.8}$$

*dizisi $R$–modüllerin bir tam dizisidir Burada*

1. *$H_n(X') \to H_n(X)$ ve $H_n(X) \to H_n(X'')$ sırasıyla $\phi_n^*$ ve $\psi_n^*$ dönüşümleridir.*
2. *$H_n(X'') \to H_{n-1}(X')$ dönüşümü $\Delta_n$ bağlantı homomorfizmasıdır.*

**Tanım 1.5.3.** $(X, d)$ ve $(X', d')$, $R$–modüllerin iki kompleksi olsun. Eğer

1. her $n$ için $X'_n \leq X_n$'dir.
2. $i_n : X'_n \to X_n$ içerim dönüşümü $(X', d')$ kompleksinden $(X, d)$ kompleksine bir dönüşüm olur.

koşulları sağlanıyorsa o zaman $(X', d')$ kompleksine $(X, d)$'nin bir *alt kompleksi* denir ve $(X', d') \leq_K (X, d)$ ya da $X \leq_K X'$ ile gösterilir.

Buradaki (2) koşulu ile her $n$ için $d_n$'in $X'_n$ modülüne kısıtlamasının $d'_n$ dönüşümü olduğu elde edilir.

Şimdi $(X', d') \leq_K (X, d)$ olsun ve $X''_n = X_n / X'_n$ şeklinde alınsın. O zaman

$$d_n(X'_n) = d'_n(X'_n) \subseteq X'_{n-1}$$

olur ve buradan $d_n$, $(X'_n, X_n)$ ikilisinden $(X'_{n-1}, X_{n-1})$ ikilisine bir dönüşümdür. Bu nedenle $d''_n : X''_n \to X''_{n-1}$ dönüşümü elde edilebilir. $d''_{n-1} d''_n = 0$ olduğu açıktır. Bu yüzden $(X'', d'')$ bir kompleks olur. Buna $(X, d)$ kompleksinin $(X', d')$ ile belirli *bölüm kompleksi* denir.

$$\begin{tikzcd}
X_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[d] \\
X''_n \arrow[r, "d''_n"'] & X''_{n-1}
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Bu diyagramdaki düşey dönüşümler bölüm modülleri üzerindeki doğal dönüşümlerdir. Bu nedenle $X_n \to X_n^{''}$ doğal dönüşümleri $(X, d)$'den $(X^{''}, d^{''})$'ye bir dönüşüm oluşturur. Ayrıca her $n$ için

$$0 \to X_n^{'} \to X_n \to X_n^{''} \to 0$$

dizileri tam olur.

**Tanım 1.5.4.** $(X, d)$ $R$–modüllerin bir kompleksi olmak üzere eğer her $n < 0$ için $X_n = 0$ ise o zaman $(X, d)$ kompleksine bir *sol kompleks* denir.

# Bölüm 2

# KADEMELİ HALKALAR VE MODÜLLER

## 2.1 Temel Tanım ve Sonuçlar

Kademeli halka ve modül kavramları tanımlanmadan önce kademe monoidi kavramı ele alınacaktır.

$\Gamma$ boştan farklı bir küme olmak üzere, $\Gamma$ üzerinde bir toplama işlemi $+$ tanımlı olsun. Eğer

1. her $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_2 + \gamma_1$
2. her $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$ için $\gamma_1 + (\gamma_2 + \gamma_3) = (\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3$
3. her $\gamma \in \Gamma$ için $\gamma + 0 = \gamma$ olacak şekilde bir tek 0 elemanı vardır
4. $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $\gamma + \gamma_1 = \gamma + \gamma_2$ ise o zaman $\gamma_1 = \gamma_2$ olur

koşulları sağlanıyorsa $\Gamma$'ya bir *kademe monoidi* denir. Buna göre toplamsal abel bir grup bir kademe monoidi olur. Ayrıca negatif tamsayılar ve negatif olmayan tamsayılar (yani $\mathbb{N}$ kümesi) bilinen toplama işlemi ile birlikte birer kademe monoidi örneğidir. Daha genel olarak da $d$ sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere negatif olmayan tamsayıların $(m_1, \ldots, m_d)$ dizileri göz önüne alınsın. Bu dizilerin kümesi $\mathbb{N}^d$ ile gösterilecektir. $\mathbb{N}^d$ üzerinde toplama işlemi

$$(m_1, \ldots, m_d) + (m'_1, \ldots, m'_d) = (m_1 + m'_1, \ldots, m_d + m'_d)$$

şeklinde tanımlanırsa o zaman $\mathbb{N}^d$ bir kademe monoidi olur.

Şimdi $\Gamma$ bir kademe monoidi ve $R$ bir halka olsun. $(R, +)$ bir grup olduğundan $R$ toplamsal grubunun alt gruplarından bahsedilebilir.

**Tanım 2.1.1.** $R$ bir halka ve $\Gamma$ bir kademe monoidi olsun. $R$ toplamsal grubunun alt gruplarının bir $\left\{R^{(\gamma)}\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ ailesi alınsın. O halde eğer

1. $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R^{(\gamma)}$ ve

2. her $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ için $R^{(\gamma)}R^{(\gamma')} \subseteq R^{(\gamma+\gamma')}$

ise o zaman $\left\{R^{(\gamma)}\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ ailesine $R$ *halkası üzerinde bir* $\Gamma$*–kademesi* denir. Bu durumda $R$ halkasına bir $\Gamma$–*kademeli halka* denir.

Ayrıca $R^{(\gamma)}R^{(\gamma')} = \left\{r_1^{(\gamma)}\rho_1^{(\gamma')} + \cdots + r_s^{(\gamma)}\rho_s^{(\gamma')} \mid r_j^{(\gamma)} \in R^{(\gamma)}, \rho_j^{(\gamma')} \in R^{(\gamma')}\right\}$ olur.

Şimdi $R$ halkası üzerinde bir $\Gamma$–kademesi olsun. Yukarıdaki tanımın (1) şıkkı ile $R$ halkasının her $r$ elemanı $r = \sum_\gamma r^{(\gamma)}$ şeklinde tek türlü yazılabilir. Bu toplamda sadece sonlu sayıda sıfırdan farklı eleman vardır. $R^{(\gamma)}$ kümesinin elemanlarına $\gamma$*–dereceli homojen elemanlar* denir. Ayrıca tek türlü belirli $r^{(\gamma)}$ elemanlarına $r$ elemanının $\gamma$*–dereceli homojen bileşeni* denir. 0 elemanı her $\gamma \in \Gamma$ için $\gamma$–dereceli homojen elemandır. Ayrıca Tanım 2.1.1 ile $\gamma$–dereceli bir homojen eleman ve $\gamma'$–dereceli bir homojen elemanın çarpımı $(\gamma + \gamma')$–dereceli bir homojen eleman olur. Verilen herhangi bir $R$ halkası için $R$ üzerinde $R^{(0)} = R$ ve her $0 \neq \gamma$ için $R^{(\gamma)} = 0$ alınarak bir $\Gamma$–kademesi elde edilebilir. Elde edilen bu $\Gamma$–kademesine $R$ üzerinde *aşikar* $\Gamma$*–kademesi* denir.

**Teorem 2.1.2.** *$R$ bir $\Gamma$–kademeli halka olsun. O zaman $R$ halkasının birim elemanı 0–dereceli bir homojen elemandır.*

*Kanıt.* $1_R \in R$ olduğundan, birim elemanı $1_R = \sum_\gamma \epsilon^{(\gamma)}$ olacak şekilde homojen elemanların toplamı olarak tek türlü yazılabilir. Şimdi $\eta$, $\lambda$–dereceli bir homojen eleman olsun. O zaman

$$\eta = \eta 1_R = \eta \sum_\gamma \epsilon^{(\gamma)} = \sum_\gamma \eta\epsilon^{(\gamma)}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafındaki $\lambda$–dereceli homojen elemanlar karşılaştırılırsa $\eta = \eta\epsilon^{(0)}$ elde edilir. $\eta$ elemanı keyfi olduğundan $\epsilon^{(0)}$, bir homojen eleman ile çarpmaya göre etkisizdir. Her eleman homojen elemanların toplamı olduğundan sonuç olarak her $r \in R$ için $r = r\epsilon^{(0)}$ olur. Dolayısıyla $1_R = 1_R\epsilon^{(0)} = \epsilon^{(0)}$ elde edilir. □

**Sonuç 2.1.3.** *$R^{(0)}$, $R$ halkasının bir alt halkasıdır.*

*Kanıt.* $\alpha, \beta \in R^{(0)}$ olsun. $R^{(0)}$, $R$ halkasının toplamsal bir alt grubu olduğundan $\alpha + \beta$ ve $-\alpha \in R^{(0)}$ olur. $R^{(0)}R^{(0)} \subseteq R^{(0)}$ olacağından $\alpha\beta \in R^{(0)}$ elde dilir. Dolayısıyla $R^{(0)}$ çarpma işlemine göre kapalıdır. Teorem 2.1.2 ile $1_R \in R^{(0)}$ olur. Böylece $R^{(0)}$, $R$ halkasının bir alt halkası olur. □

**Örnek 2.1.4.** $R$ bir halka ve $x_1, \ldots, x_d$, $R$ üzerinde bilinmeyenler olsun. $m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{N}^d$ için $x^m = x_1^{m_1} \ldots x_d^{m_d}$ şeklinde alınsın. (Bu biçimdeki bir $x^m$ ifadesine $x_1, \ldots, x_d$ *bilinmeyenlerine bağlı bir monom* denir.) O halde $S^{(0)} = R$, her $i$ için $\operatorname{der} x_i = 1$ ve

$$S^{(n)} = \{ \sum_{m \in \mathbb{N}^d} r_m x^m : r_m \in R \text{ ve } m_1 + \cdots + m_d = n\}$$

olmak üzere $S = R[x_1, \ldots, x_d]$ polinom halkası bir kademeli halkadır. Polinom halkası üzerinde elde edilen bu kademeye *standart kademe* denir.

$S$ üzerinde başka kademeler de tanımlamak mümkündür. Örneğin $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$ olmak üzere

$$S^{(n)} = \{ \sum_{m \in \mathbb{N}^d} r_m x^m : r_m \in R \text{ ve } \alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_d m_d = n\}$$

şeklinde tanımlanan $\{S^{(n)}\}$ alt grupları $S$ üzerinde bir kademe tanımlar. Burada $R \subseteq S^{(0)}$ ve her $i = 1, \ldots, d$ için $\operatorname{der} x_i = \alpha_i$ olur.

Daha somut bir örnek vermek gerekirse $k$ bir cisim olmak üzere $S = k[x, y, z]$ ve $f = x^3 + yz$ alınsın. $S$ üzerinde standart kademe düşünülürse $f$, homojen bileşenleri $x^3$ ve $yz$ olan bir polinom olur. Fakat $S$ üzerinde $\operatorname{der} x = 3$, $\operatorname{der} y = 4$ ve $\operatorname{der} z = 5$ olacak şekilde bir kademe tanımlanırsa o zaman $f$'nin kendisi derecesi 9 olan bir homojen polinom olur.

**Örnek 2.1.5.** $d \geq 1$ bir tamsayı, $R$ bir halka ve $x_1, \ldots, x_d$ bilinmeyenler olsun. $S = R[x_1, \ldots, x_d]$ halkası $\mathbb{N}^d$ kademe monoidine göre bir kademeli halka olarak tanımlanabilir. Burada her $m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{N}^d$ için

$$S^{(m)} = \{cx^m : c \in R\}$$

alınırsa

$$S = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^d} S^{(m)}$$

yazılabilir.

**Tanım 2.1.6.** $\Gamma$ bir kademe monoidi olmak üzere $S = \bigoplus_\Gamma S^{(\gamma)}$ bir kademeli halka olsun. Eğer $R = \sum_\Gamma (S^{(\gamma)} \cap R)$ ise o zaman $R$ alt halkasına $S$'nin bir *kademeli alt halkası* denir. Denk olarak eğer her $f \in R$ için $f$'nin bütün homojen bileşenleri $R$'de ise o zaman $R$, $S$'nin bir kademeli alt halkasıdır.

**Örnek 2.1.7.** $S = \bigoplus_\mathbb{N} S^{(n)}$ bir kademeli halka ve $f_1, \ldots, f_d$, $S$'nin dereceleri sırasıyla $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ olan homojen elemanları olsun. O halde

$$R^{(n)} = \{ \sum_{m \in \mathbb{N}^d} r_m f_1^{m_1} \ldots f_d^{m_d} : r_m \in S_0 \text{ ve } \alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_d m_d = n\}$$

olmak üzere $R = S^{(0)}[f_1, \ldots, f_d]$, $S$'nin bir kademeli alt halkasıdır.

**Örnek 2.1.8.** Örnek 2.1.7'de bahsedilen kademeli alt halkalar için somut bir örnek vermek gerekirse, $k$ bir cisim olmak üzere $S = k[x]$ polinom halkasını standart kademe ile bir kademeli halka olsun. $R = k[x^3]$ olarak alınsın. Bu takdirde Örnek 2.1.7 sayesinde $R$, $S$'nin bir kademeli alt halkası olur. Ayrıca $R$'nin homojen alt grupları her $n$ için

$$R^{(n)} = \{cx^{3m} : c \in k \text{ ve } 3m = n\}$$

eşitliğini sağlayan kümelerdir. Buna göre her $n \geq 0$ tamsayısı için

$$R^{(n)} = \begin{cases} S^{(n)}, & 3 \mid n \text{ ise} \\ 0, & 3 \nmid n \text{ ise} \end{cases}$$

yazılabilir. Başka bir deyişle,

$$R = S^{(0)} \oplus 0 \oplus 0 \oplus S^{(3)} \oplus 0 \oplus 0 \oplus S^{(6)} \oplus 0 \oplus \cdots$$

şeklindedir.

**Örnek 2.1.9.** $k$ bir cisim olmak üzere $S = k[x, y]$ polinom halkası standart kademe ile bir kademeli halka olarak düşünülürse $R = k[x, y^2]$ halkası, $S$'nin bir kademeli alt halkası olur. Burada

$$\begin{aligned}
R^{(0)} &= S^{(0)} \\
R^{(1)} &= \{cx : c \in k\} \\
R^{(2)} &= \{c_1x^2 + c_2y^2 : c_1, c_2 \in k\} \\
R^{(3)} &= \{c_1x^3 + c_2xy^2 : c_1, c_2 \in k\} \\
R^{(4)} &= \{c_1x^4 + c_2x^2y^2 + c_3y^4 : c_1, c_2, c_3 \in k\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

yazılabilir.

**Tanım 2.1.10.** $R$ bir halka ve $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n=0}^{\infty}$, $R$'nin ideallerinin bir dizisi olsun. Eğer

1. $I_0 = R$.

2. her $n \geq 0$ için $I_{n+1} \subseteq I_n$.

3. her $n, m \geq 0$ için $I_n. I_m \subseteq I_{n+m}$.

koşulları sağlanıyorsa o zamana $\mathcal{I}$'ya $R$'nin bir *filtrasyonu* denir.

**Örnek 2.1.11.** $R$ bir halka ve $I$, $R$'nin bir ideali olmak üzere $\{I^n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $R$'nin bir filtrasyonu olur.

**Örnek 2.1.12.** $\mathcal{I} = \{I_n\}$, $R$'nin bir filtrasyonu olsun. O zaman

$$R(\mathcal{I}) = \bigoplus_n I_n = R \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus \dots$$

şeklinde bir $\mathbb{N}$–kademeli halkası tanımlanabilir. Bu şekilde tanımlanan $R(\mathcal{I})$ kademeli halkasına bir *Rees cebiri* denir. Buradaki toplam $R$–modüllerin bir dik toplamıdır ve çarpma işlemi $I_n.I_m \subseteq I_{n+m}$ kapsaması ile belirlenir. $R(\mathcal{I})$, Rees cebiri, $\operatorname{der} t = 1$ için

$$R(\mathcal{I})^{(n)} = \{at^n : a \in I_n\}$$

olmak üzere

$$R(\mathcal{I}) = \{a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n \in R[t] : a_i \in I_i \, \forall i\}$$

şeklinde$R[t]$ kademeli halkasının bir alt halkası olarak da tanımlanabilir. Özel olarak, eğer $I = (a_1, \dots a_k)$, $R$'nin bir sonlu üretilmiş ideali ve $\mathcal{I} = \{I^n\}_{n=0}^{\infty}$ alınırsa

$$R(\mathcal{I}) = R[a_1 t, \dots a_k t]$$

bulunur. $I$, $R$'nin bir ideali olmak üzere $\mathcal{I} = \{I^n\}_{n=0}^{\infty}$ ise $R(\mathcal{I})$ halkasına *$I$'nın Rees cebiri* denir ve genellikle $R[It]$ biçiminde gösterilir. Somut bir örnek vermek gerekirse, $k$ bir cisim olmak üzere $R = k[x, y]$ halkası ve $R$'nin $I = (x^2 + y^3, xy^5, y^6)$ ideali için

$$R[It] = R[(x^2 + y^3)t, xy^5 t, y^6 t] = k[x, y, x^2 t + y^3 t, xy^5 t, y^6 t]$$

olur. Dikkat edilirse burada $\operatorname{der} x = \operatorname{der} y = 0$ ve $\operatorname{der} t = 1$' dir.

**Örnek 2.1.13.** $R$ bir halka, $\mathcal{I} = \{I_n\}$, $R$'nin bir filtrasyonu ve

$$\begin{aligned} G(\mathcal{I}) &= \bigoplus_n (I_n / I_{n+1}) \\ &= (R/I_1) \oplus (I_1/I_2) \oplus (I_2/I_3) \oplus \dots \end{aligned}$$

olsun. Burada çarpma işlemi $n$ ve $m$ negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$(x_n + I_{n+1}) \, . \, (x_m + I_{m+1}) = x_n x_m + I_{n+m+1}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $G(\mathcal{I})$ bir kademeli halkadır. Bu halkaya *$\mathcal{I}$'nın ilgili kademeli halkası* denir. Özel olarak $R$'nin bir $I$ ideali için $\mathcal{I} = \{I^n\}_{n=0}^{\infty}$ alınırsa $G(\mathcal{I})$ halkasına *$I$ idealinin ilgili kademeli halkası* denir ve bu halka $gr_I(R)$ şeklinde gösterilir.

**Örnek 2.1.14.** $R$ bir kademeli halka, $S$, $R$'nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. O halde

$$(R_S)^{(n)} = \left\{ \frac{r}{s} \in R_S : r, s \text{ homojen elemanlar ve } \operatorname{der} r - \operatorname{der} s = n \right\}$$

için $R_S$ bir kademeli halkadır.

Şimdi $\Gamma$ bir kademe monoidi olmak üzere $R = \bigoplus R^{(\gamma)}$ bir $\Gamma$–kademeli halka ve $E$ bir $R$–modül olsun. $E$ modülü toplamaya göre bir abel gruptur. Bu grup $E$ modülünün toplamsal grubu olarak adlandırılacaktır.

**Tanım 2.1.15.** $\left\{E^{(\gamma)}\right\}_{\gamma\in\Gamma}$, $E$ toplamsal grubunun alt gruplarının bir ailesi olsun. O halde eğer

1. $E = \bigoplus_\gamma E^{(\gamma)}$ ve
2. her $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ için $R^{(\gamma)} E^{(\gamma')} \subseteq E^{(\gamma+\gamma')}$

ise o zaman $\left\{E^{(\gamma)}\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ ailesine $E$ *üzerinde bir* $\Gamma$*–kademesi* denir. Bu durumda $E$ modülüne de $R$ *üzerinde bir* $\Gamma$*–kademeli modül* denir. Burada

$$R^{(\gamma)} E^{(\gamma')} = \left\{ r_1^{(\gamma)} e_1^{(\gamma')} + \cdots + r_s^{(\gamma)} e_s^{(\gamma')} \mid r_i^{(\gamma)} \in R^{(\gamma)}, e_i \in E^{(\gamma')} \right\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

$E = \bigoplus_\gamma E^{(\gamma)}$, $\Gamma$–kademeli $R = \bigoplus_\gamma R^{(\gamma)}$ halkası üzerinde bir $\Gamma$–kademeli modül olsun. O zaman $E$ modülünün her elemanı $e_\gamma \in E^{(\gamma)}$ için $e = \sum_\gamma e^{(\gamma)}$ olacak şekilde tek türlü yazılır. Ayrıca bu toplam sonlu sayıda sıfırdan farklı terim içerir. $E^{(\gamma)}$ kümesinin elemanlarına $\gamma$*–dereceli homojen elemanlar* ve $e^{(\gamma)}$ elemanına $e$'nin $\gamma$*–dereceli homojen bileşeni* denir. Tanım 2.1.15 ile $\gamma'$–dereceli homojen $e$ elemanı ve $\gamma$–dereceli homojen $r$ elemanın çarpımı $E$ modülünün $(\gamma + \gamma')$–dereceli homojen bir elemanı olur. Ayrıca her $E^{(\gamma)}$ birer $R^{(0)}$–modüldür.

Bir $\Gamma$–kademeli $R = \bigoplus_\gamma R^{(\gamma)}$ halkasının kendisi üzerinde bir $\Gamma$–kademeli modül olduğu tanımdan kolayca görülebilir.

$R$ herhangi bir halka ve $E$ herhangi bir $R$–modül olsun. $R$ halkası herhangi bir $\Gamma$ kademe monoidi için $R^{(0)} = R$ ve her $0 \neq \gamma \in \Gamma$ için $R^{(\gamma)} = 0$ alınarak bir $\Gamma$–kademeli halka ve $E$ modülü de $E^{(0)} = E$, her $0 \neq \gamma \in \Gamma$ için $E^{(\gamma)} = 0$ alınarak $R$ üzerinde bir $\Gamma$–kademeli modül yapılabilir. $R$'nin ve $E$'nin bu şekildeki kademeli halka ve modül yapılarına sırasıyla *aşikar kademeli halka* ve *aşikar kademeli modül yapısı* denir.

**Örnek 2.1.16.** $R$ bir $\mathbb{Z}$–kademeli halka, $M$ bir kademeli $R$–modül ve $n$ herhangi bir tamsayı olsun. $M(n)$, bir $R$ –modül olarak $M$ ile aynı olsun. $M(n)$ üzerindeki kademe $M(n)^{(k)} = M_{n+k}$ şeklinde tanımlansın. O halde $M(n)$ bir kademeli $R$–modüldür. Dolayısıyla kademeli bir modül üzerinde başka bir kademe kullanılarak yeni bir kademeli $R$–modül elde edilmiş olur.

**Önerme 2.1.17.** *$K$, $\Gamma$ –kademeli bir $E$, $R$–modülünün bir alt modülü ise o zaman aşağıdakiler denktir:*

1. $K = \bigoplus_\gamma \left(K \cap E^{(\gamma)}\right)$

2. *Eğer $y \in K$ ise o zaman $y$ elemanının bütün homojen bileşenleri $K$ alt modülüne aittir.*

3. *$K$ alt modülü içerdiği homojen elemanlar tarafından bir $R$–modül olarak üretilir.*

*Kanıt.* (1) $\Rightarrow$ (2) $y \in K$ olsun. O zaman $K = \bigoplus_\gamma \left(E^{(\gamma)} \cap K\right)$ olduğundan $y = \sum_\gamma y^{(\gamma)}$ olacak şekilde en fazla sonlu tanesi sıfırdan farklı ve tek türlü belirli $y^{(\gamma)} \in E^{(\gamma)} \cap K$ elemanları bulunabilir. Dolayısıyla $y^{(\gamma)}$, $y$ elemanının $\gamma$–dereceli homojen bileşenidir ve $y^{(\gamma)} \in K$ olur. Böylece (2) elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) Her eleman kendisinin homojen bileşenlerinin toplamı olduğundan $K$ alt modülünün her elemanı $K$ alt modülündeki homojen elemanların toplamıdır. Bu yüzden $K$ alt modülü içerdiği bütün homojen elemanlar tarafından üretilir. Dolayısıyla (3) elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) $x_i$ elemanları $\gamma_i$–dereceli homojen elemanlar olmak üzere $K$ alt modülü $\{x_i\}_{i\in I}$ ailesi ile üretilsin. $K = \sum_\gamma \left(E^{(\gamma)} \cap K\right)$ olduğu gösterilsin. $r = \sum_\gamma r^{(\gamma)} \in R$ olsun. O zaman $r^{(\gamma)}x_i \in E^{(\gamma+\gamma_i)}$ ve $r^{(\gamma)}x_i \in K$ elde edilir. Dolayısıyla $r^{(\gamma)}x_i \in E^{(\gamma+\gamma_i)} \cap K$ olur. Bu durumda

$$rx_i = \sum_\gamma r^{(\gamma)}x_i = r^{(0)}x_i + r^{(1)}x_i + \cdots \in \sum_\gamma \left(E^{(\gamma)} \cap K\right)$$

elde edilir. $K$ alt modülünün her elemanı bu şekildeki elemanların toplamı olduğundan $K = \bigoplus_\gamma \left(E^{(\gamma)} \cap K\right)$ olur. Dolayısıyla (1) elde edilir. $\square$

$E = \bigoplus_\gamma E^{(\gamma)}$ kademeli modülünün Önerme 2.1.17'de yer alan $(1), (2)$ ve (3) koşullarından herhangi birini sağlayan $K$ alt modülüne $E$ modülünün bir *homojen alt modülü* denir. $E$ modülü yerine $R$ halkasının kendisi alınırsa o zaman *homojen ideal* kavramı elde edilir. Dolayısıyla $A$ bir homojen idealdir ancak ve ancak $A$ ideali homojen elemanlar tarafından üretilir.

Şimdi Artin-Rees Teoremi ele alınacak ve teorem kanıtlanmadan önce bazı gözlemler yapılacaktır.

$R$ bir halka ve $A = (\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ $s$ tane eleman ile üretilen bir ideal olsun. $E$ bir $R$–modül olmak üzere $s$ tane bilinmeyen $x_1, \ldots, x_s$ ile gösterilsin. $x_1, \ldots, x_s$ bilinmeyenlerinin katsayıları $R$ halkasından gelen polinomlar halkası $R[x_1, \ldots, x_s]$ olsun. Ayrıca $T$ bir bilinmeyen olmak üzere $E[T]$ ile $T$'nin katsayıları $E$ modülünden gelen polinomlarının toplamsal grubu gösterilsin. Buradan $E[T]$, $\cdot : R[x_1, \ldots, x_s] \times E[T] \to E[T]$, $\left(\sum r_{\mu_1\ldots\mu_s} x_1^{\mu_1} \ldots x_s^{\mu_s}\right) . \left(\sum e_m T^m\right) = \sum\sum \left(\gamma_1^{\mu_1}\gamma_2^{\mu_2} \ldots \gamma_s^{\mu_s} r_{\mu_1\ldots\mu_s} e_m\right) T^{m+\mu_1+\cdots+\mu_s}$ işlemi ile bir $R[x_1, \ldots, x_s]$–modül olur. Şimdi

$$\phi : E[x_1, \ldots, x_s] \to E[T]$$

dönüşümü $\phi\left(e_{\nu_1 \ldots \nu_s} x_1^{\nu_1} \ldots x_s^{\nu_s}\right) = \gamma_1^{\nu_1} \ldots \gamma_s^{\nu_s} e_{\nu_1 \ldots \nu_s} T^{\nu_1 + \cdots + \nu_s}$ ile tanımlansın. $\phi$ dönüşümü bir $R$–modül homomorfizmasıdır. $\gamma_1^{\nu_1} \ldots \gamma_s^{\nu_s} e_{\nu_1 \ldots \nu_s} T^{\nu_1 + \cdots + \nu_s}$ ifadesinde $T^{\nu_1 + \cdots + \nu_s}$ elemanının katsayısı

$$\gamma_1^{\nu_1} \ldots \gamma_s^{\nu_s} e_{\nu_1 \ldots \nu_s}$$

olur. $\nu_1, \ldots, \nu_s$ negatif olmayan tamsayıları için $n = \nu_1 + \cdots + \nu_s$ olsun. Dolayısıyla $\gamma_1^{\nu_1} \ldots \gamma_s^{\nu_s}$ çarpımları $A^n$ idealini üretir. Sonuç olarak $T^n$ elemanının katsayıları $A^n E$'nin herhangi bir elemanıdır. Bu nedenle $\operatorname{Im} \phi$, $n \geq 0$ ve $e_i e \in A^i E$ olmak üzere bütün $e_0 + e_1 T + e_2 T^2 + \cdots$ polinomlarından oluşur. Ayrıca $A^0 E = E$ olacaktır. Dolayısıyla $\operatorname{Im} \phi = \sum (A^n E)\, T^n$ olur.

İddia: Eğer $E$ bir Noether $R$–modül ise o zaman $\sum (A^n E)\, T^n$ bir Noether $R[x_1, \ldots, x_s]$ –modüldür: $E[x_1, \ldots, x_s]$ bir Noether $R[x_1, \ldots, x_s]$–modül olur. $\phi$ dönüşümü, $E[x_1, \ldots, x_s]$ modülünden $\sum (A^n E)\, T^n$ modülüne bir lineer dönüşümdür. Dolayısıyla Lemma 1.3.1 sayesinde iddia elde edilir.

Şimdi $R[x_1, \ldots, x_s]$ polinom halkası negatif olmayan tamsayılar ile bir kademeli halka olduğundan $E[T]$, $R[x_1, \ldots, x_s]$ kademeli halkası üzerinde bir kademeli modül olur. Son olarak $E[T]$ modülünün $\sum (A^n E)\, T^n$ alt modülü homojendir.

**Teorem 2.1.18** (Artin-Rees Teoremi)**.** *$E$ bir Noether $R$–modül olsun ve $E$'nin bir $K$ altmodülü ile $R$'nin bir $A$ ideali alınsın. O halde her $n \geq q$ için $A^n E \cap K = A^{n-q}\left(A^q E \cap K\right)$ olacak şekilde bir $q \geq 0$ tamsayısı vardır.*

*Kanıt.* Genelliği bozmadan $A$ ideali sonlu üretilmiş olarak alınabilir. Ayrıca $R/\operatorname{Ann}_R E$ halkası Noether ve buradan $\left(A + \operatorname{Ann}_R E\right) / \operatorname{Ann}_R E$ ideali sonlu üretilmiştir. O halde $\pi : R \to R/\operatorname{Ann}_R E$ doğal dönüşüm olmak üzere

$$(\pi(\gamma_1), \ldots, \pi(\gamma_s)) = \left(A + \operatorname{Ann}_R E\right) / \operatorname{Ann}_R E$$

olacak şekilde $A$'nın $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları seçilsin. $A_0 = (\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ olsun. O halde her $n \geq 0$ için $A^n E \cap K = A_0^n E \cap K$ elde edilir. Ayrıca negatif olmayan her $q$ tamsayısı için $A^{n-q}\left(A^q E \cap K\right) = A_0^{n-q}\left(A_0^q E \cap K\right)$ yazılabilir. Dolayısıyla teorem $A$ yerine $A_0$ alınarak kanıtlanabilir. $A$ ideali sonlu üretilmiş olsun. O halde $A = (\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ olsun. Yukarıda yapılan açıklamalar ile $\sum (A^n E)\, T^n$, $R[x_1, \ldots, x_s]$ kademeli halkası üzerinde bir kademeli modül olarak alınabilir. Ayrıca bir Noether modüldür. Her $j \geq 0$ için $\varepsilon_j \in A^j E \cap K$ olacak şekilde $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 T + \varepsilon_2 T^2 + \cdots \in E[T]$ elemanları alınsın. Bu elemanlar $\sum (A^n E)\, T^n$ modülünün bir homojen $N$ alt modülünü oluşturur. $\sum (A^n E)\, T^n$ Noether olduğundan $N$ sonlu üretilmiştir. $N = (u_1, \ldots, u_p)$ olsun. Her $u_i$ sıfırdan farklı homojen bileşenlerinin toplamı olur ve her bileşen $N$'ye aittir. Dolayısıyla $u_i$ elemanları sıfırdan farklı homojen bileşenler olarak alınabilir. Şimdi $\omega_i \in A^{n_i}E \cap K$ olmak üzere $u_i = \omega_i T_i^{n_i}$ olsun. Buradan $N = \sum_{i=1}^{p} R[x_1, \dots, x_s]\,(\omega_i T^{n_i})$ olur. $q = \max\{n_1, \dots, n_s\}$ ve $n \geq q$ olsun. O halde $A^nE \cap K \subseteq A^{n-q}\,(A^qE \cap K)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu nedenle $\eta \in (A^nE \cap K)$ olsun. O zaman $\eta T^n \in N$ olur. Dolayısıyla $g_i(x_1, \dots, x_s) \in R[x_1, \dots, x_s]$ olmak üzere

$$\eta T^n = \sum_{i=1}^{p} g_i(x_1, \dots, x_s)(\omega_i T^{n_i}) \tag{2.1.1}$$

olur. Ayrıca her $g_i(x_1, \dots, x_s)$ polinomu farklı derecedeki homojen polinomların sonlu toplamı şeklinde ifade edilebilir. 2.1.1 eşitliğinin her iki tarafındaki $n$ dereceli terimler karşılaştırılırsa $1 \leq i \leq q$ için $g_i(x_1, \dots, x_s)$, $(n - n_i)$ –dereceli homojen bir polinom olacak şekilde tekrar düzenlenebilir.

İddia: $g_i(x_1, \dots, x_s)(\omega_i T^{n_i}) \in A^{n-q}\,(A^qE \cap K)\,T^n$: $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_s = n - n_i$ olmak üzere $r x_1^{\nu_1} \dots x_s^{\nu_s}$ , $g_i(x_1, \dots, x_s)$ polinomunun bir terimi olsun. O halde $c \in A^{n-q}\,(A^qE \cap K)$ olmak üzere $g_i(x_1, \dots, x_s)(\omega_i T^{n_i})$ elemanının $cT^n$ şeklinde olduğu gösterilmelidir. Şimdi $\sigma_i$ ve $\tau_i$ sırasıyla $\sigma_1 + \cdots + \sigma_s = n - q$ , $\tau_1 + \cdots + \tau_s = q - n_i$ olacak şekilde negatif olmayan tamsayılar olsun. O halde $x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_s^{\nu_s} = x_1^{\sigma_1} \dots x_s^{\sigma_s} x_1^{\tau_1} \dots x_s^{\tau_s}$ yazılabilir. Bu nedenle

$$(r x_1^{\nu_1} \dots x_s^{\nu_s})\,(\omega_i T^{n_i}) = \gamma_1^{\sigma_1} \dots \gamma_s^{\sigma_s}\,(\gamma_1^{\tau_1} \gamma_s^{\tau_s} r \omega_i)\,T^n$$

olur. Ayrıca $\omega_i \in A^{n_i}E \cap K$ olduğundan $\gamma_1^{\sigma_1} \dots \gamma_s^{\sigma_s}\,(\gamma_1^{\tau_1} \gamma_s^{\tau_s} r \omega_i) \in \gamma_1^{\sigma_1} \dots \gamma_s^{\sigma_s}\,(A^qE \cap K) \subseteq A^{n-q}\,(A^qE \cap K)$elde edilir. Bu nedenle $g_i(x_1, \dots, x_s)(\omega_i T^{n_i}) \in A^{n-q}\,(A^qE \cap K)\,T^n$ olur. 2.1.1 eşitliği ile $\eta T^n \in A^{n-q}\,(A^qE \cap K)\,T^n$ elde edilir. Buradan $\eta \in A^{n-q}\,(A^qE \cap K)$ olur. Dolayısıyla $A^nE \cap K \subseteq A^{n-q}\,(A^qE \cap K)$ elde edilir. Diğer kapsama açık olduğundan kanıt tamamlanır. □

Şimdi $E = \bigoplus_\gamma E^{(\gamma)}$, $\Gamma$–kademeli $R = \bigoplus_\gamma R^{(\gamma)}$ halkası üzerinde bir $\Gamma$–kademeli modül olsun. $E$ modülünün homojen bir $K$ alt modülü alınsın. Eğer

$$K^{(\gamma)} = E^{(\gamma)} \cap K \tag{2.1.2}$$

ise o zaman $K^{(\gamma)}$, $K$ toplamsal grubunun bir alt grubu olur. Önerme 2.1.17 ile $\left\{K^{(\gamma)}\right\}_{\gamma \in \Gamma}$ ailesi $K$ üzerinde bir $\Gamma$–kademesi oluşturur. Buna $K$ *üzerine indirgenen* $\Gamma$*–kademesi* denir.

$K \to E$ içerim dönüşümü ile $K^{(\gamma)}$ alt modülü $E^{(\gamma)}$ alt modülüne gömülür. $K$, $E$ modülünün bir homojen alt modülü ve $\phi : E \to E/K$ doğal dönüşüm olsun. $E$ ve $E/K$ modülleri $R^{(0)}$–modüller olarak göz önüne alınırsa $\phi$ bir $R^{(0)}$–homomorfizma olur.

$$\phi(E^{(\gamma)}) = (E/K)^{(\gamma)} \tag{2.1.3}$$

olsun. O zaman $(E/K)^{(\gamma)}$, $E/K$ bölüm modülünün bir $R^{(0)}$–alt modülüdür ve buradan

$E/K$ toplamsal grubunun alt grubudur. Şimdi $\left\{(E/K)^{(\gamma)}\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ ailesinin $E/K$ üzerinde bir $\Gamma$–kademesi olduğu gösterilsin. $x=\sum_\gamma x^{(\gamma)}$ ve $x^{(\gamma)}$ elemanlarının sonlu tanesi sıfırdan farklı olsun. O zaman

$$\phi(x)=\sum_\gamma \phi(x^{(\gamma)})$$

ve

$$\phi(x^{(\gamma)})\in\phi(E^{(\gamma)})=(E/K)^{(\gamma)}$$

olur. Buradan $E/K=\sum_\gamma (E/K)^{(\gamma)}$ elde edilir. Buna göre

$$R^{(\gamma)}(E/K)^{(\gamma')}=R^{(\gamma)}\phi(E^{(\gamma)})=\phi\left(R^{(\gamma)}E^{(\gamma')}\right)\subseteq\phi\left(E^{(\gamma+\gamma')}\right)=(E/K)^{(\gamma+\gamma')}$$

yazılabilir. Şimdi $E/K$ bölüm modülünün $(E/K)^{(\gamma)}$ modüllerinin dik toplamı olduğu şu şekilde gösterilebilir: $\epsilon^{(\gamma)}\in(E/K)^{(\gamma)}$ ve $\epsilon^{(\gamma)}$ elemanlarının sonlu tanesi sıfırdan farklı olmak üzere $\sum_\gamma \epsilon^{(\gamma)}=0$ olsun. Her $\gamma$ için $\epsilon^{(\gamma)}=0$ olduğu göstermek yeterli olacaktır. $x^{(\gamma)}\in E^{(\gamma)}$ elemanları $\phi\left(x^{(\gamma)}\right)=\epsilon^{(\gamma)}$ olacak şekilde alınsın. $\epsilon^{(\gamma)}=0$ için $x^{(\gamma)}$ elemanı sıfır elemanı olacak şekilde seçilsin. Bu ise sonlu tane $\gamma$ dışındaki bütün $\gamma$ değerleri için $x^{(\gamma)}=0$ alınabilmesini sağlar. Şimdi $x=\sum_\gamma x^{(\gamma)}$ olsun. O zaman

$$\phi(x)=\sum_\gamma \phi\left(x^{(\gamma)}\right)=\sum_\gamma \epsilon^{(\gamma)}=0$$

olacağından $x\in K$ olur. $K$ homojen olduğundan $x$ elemanının bütün homojen bileşenleri $K$ alt modülüne aittir. Buradan $x^{(\gamma)}\in K$ olur. Böylece $\epsilon^{(\gamma)}=\phi\left(x^{(\gamma)}\right)=0$ elde edilir. Dolayısıyla $\left\{(E/K)^{(\gamma)}\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ ailesi $E/K$ üzerinde bir $\Gamma$–kademesi olur.

**Tanım 2.1.19.** $E/K$ üzerinde $\left\{(E/K)^{(\gamma)}\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ şeklinde verilen $\Gamma$–kademesine bir *bölüm kademesi* denir.

Dolayısıyla eğer $E/K$ bir bölüm kademesine sahip ise o zaman 2.1.3 eşitliği ile $E$ modülünün bir homojen elemanının $E/K$ bölüm modülünün aynı dereceli homojen elemanına $\phi$ dönüşümü ile resmedildiği söylenebilir.

$$\phi: E^{(\gamma)}\to(E/K)^{(\gamma)}$$

bir $R^{(0)}$–epimorfizmasıdır. Bu epimorfizmanın çekirdeği $K^{(\gamma)}=K\cap E^{(\gamma)}$ alt modülüdür. Sonuç olarak her $\gamma\in\Gamma$ için $E^{(\gamma)}/K^{(\gamma)}\approx(E/K)^{(\gamma)}$ şeklinde $R^{(0)}$–izomorfizması yazılabilir. Bu izomorfizma bazen $E^{(\gamma)}/K^{(\gamma)}$ ile $(E/K)^{(\gamma)}$ modülünü eşdeğer tutmak için kullanılır. Bu eşdeğerlik sayesinde $E/K$ bölüm modülünün $E^{(\gamma)}/K^{(\gamma)}$, $R^{(0)}$–modüllerinin dik toplamı olduğu söylenebilir.

**Tanım 2.1.20.** $E=\bigoplus_\gamma E^{(\gamma)}$ ve $F=\bigoplus_\gamma F^{(\gamma)}$ $\Gamma$–kademeli modüller ve $f:E\to F$ bir $R$–homomorfizma olsun. Eğer her $\gamma\in\Gamma$ için $f\left(E^{(\gamma)}\right)\subseteq F^{(\gamma+\lambda)}$ olacak şekilde $\lambda\in\Gamma$

varsa o halde $f$ homomorfizmasına $\lambda$–*dereceli* denir.

**Örnek 2.1.21.** Şimdi $X$ bir kompleks olmak üzere $X$'lerin dik toplamı alınsın. Ayrıca $R$ kendisi üzerinde aşikar kademe ile bir kademeli halka olsun. O halde $X = \bigoplus_{-\infty<n<\infty} X_n$ bir kademeli $R$–modül olur. Eğer $d : X \to X$, $d(x_n) = d_n(x_n)$ şeklinde tanımlanırsa o zaman $d$ dönüşümü homojen elemanların derecelerini bir düşürür. Dolayısıyla her kompleks ile bir kademeli modül ve onun bir endomorfizması yazılabilir. Burada $d$ dönüşümü $-1$ dereceli homomorfizma olur.

**Lemma 2.1.22.** *$E$ ve $F$, $\Gamma$–kademeli $R$–modüller ve $f : E \to F$, $\lambda$–dereceli bir $R$–homomorfizma olsun. O zaman $\operatorname{Im} f$ ve $\ker f$ sırasıyla $F$ ve $E$ modüllerinin homojen alt modülleridir.*

*Kanıt.* $x \in E$ olsun. $E = \sum_\gamma E^{(\gamma)}$ olduğundan $x = \sum_\gamma x^{(\gamma)}$ olacak şekilde en fazla sonlu tanesi sıfırdan farklı $x^{(\gamma)} \in E$ elemanı vardır. Bu nedenle $f(x) = \sum_\gamma f\left(x^{(\gamma)}\right)$ elde edilir. Her $f\left(x^{(\gamma)}\right)$, $\operatorname{Im} f$ alt modülünün birer homojen elemanıdır. $f(x)$, $\operatorname{Im} f$ alt modülünün herhangi bir elemanı olduğundan $\operatorname{Im} f$ homojen elemanlar tarafından üretilir. Dolayısıyla $\operatorname{Im} f$, $F$ modülünün bir homojen alt modülüdür.

Şimdi $\ker f$'in, $E$'nin homojen bir alt modülü olduğu gösterilsin. $y = \sum_\gamma y^{(\gamma)} \in \ker f$ olsun. O halde $f(y) = \sum_\gamma f\left(y^{(\gamma)}\right) = 0$ olur. $f\left(y^{(\gamma)}\right)$ elemanlarının herbirinin derecesi farklı ve $\sum_\gamma f\left(y^{(\gamma)}\right) = 0$ olduğundan her $\gamma$ için $f\left(y^{(\gamma)}\right) = 0$ elde edilir. Buradan her $\gamma \in \Gamma$ için $f\left(y^{(\gamma)}\right) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla her $\gamma \in \Gamma$ için $y^{(\gamma)} \in \ker f$ olur. Bu nedenle Önerme 2.1.17 (2) ile $\ker f$, $E$ modülünün bir homojen alt modülü olur. □

**Önerme 2.1.23.** *$\{K_i\}_{i\in I}$ ailesi $\Gamma$–kademeli $E$, $R$– modülünün homojen alt modüllerinin bir ailesi olsun. O zaman $\sum_i K_i$ ve $\bigcap_i K_i$ birer homojen alt modüllerdir.*

*Kanıt.* Her $i$ için $K_i$ alt modülü homojen olduğundan homojen elemanlar tarafından üretilir. Dolayısıyla $\sum_i K_i$ modülü de homojen elemanlar tarafından üretilir.

Şimdi $\bigcap_i K_i$ modülünün homojen alt modül olduğu gösterilsin. $x \in \bigcap_i K_i$ olsun. $\sum x^{(\gamma)}$ olacak şekilde en fazla sonlu tanesi sıfırdan farklı $x^{(\gamma)} \in E^{(\gamma)}$ vardır. $x = \sum_\gamma x^{(\gamma)} \in \bigcap_i K_i$ olduğundan her $i$ için $\sum_\gamma x^{(\gamma)} \in K_i$ elde edilir. Arakesitin homojen olduğunu göstermek için herhangi bir $i \in I$ için $x^{(\gamma)}$ elemanlarının $K_i$ alt modülüne ait olduğunu göstermek yeterlidir. $K_i$ homojen ve $x = \sum_\gamma x^{(\gamma)} \in K_i$ olduğundan $x^{(\gamma)}$ homojen bileşenler $K_i$ alt modülünün elemanları olur. Dolayısıyla $\bigcap_i K_i$ homojen alt modüldür. □

**Önerme 2.1.24.** *$E$ bir $\Gamma$–kademeli $R$–modül ve $K$, $E$ modülünün bir homojen alt modülü olsun. O zaman $(K : E) = \operatorname{Ann}_R(E/K)$ bir homojen idealdir.*

*Kanıt.* $\{\omega_i\}_{i\in I}$ ailesi $E$ modülünü üreten homojen elemanların bir ailesi olsun. $r = \sum_\gamma r^{(\gamma)} \in (K : E)$ alınsın. Her $i \in I$ için $r\omega_i = \sum_i r^{(\gamma)}\omega_i \in K$ olur ve toplamdaki terimlerin herbiri farklı derecelere sahip homojen elemanlardır. $K$ homojen olduğundan $r^{(\gamma)}\omega_i \in K$ olur. $\gamma$ sabit tutulursa bu durum tüm $i$ değerleri için sağlanır. Dolayısıyla $r^{(\gamma)}E \subseteq K$ olur. Buradan $r^{(\gamma)} \in (K : E)$ elde edilir. □

**Önerme 2.1.25.** *$R$ bir $\Gamma$–kademeli halka, $A$, $R$'nin bir homojen ideali ve $E$ bir $\Gamma$–kademeli $R$–modül olsun. $E$ modülünün bir homojen $K$ alt modülü alınsın. O zaman $AK$ ve $(K :_E A)$, $E$ modülünün homojen alt modülleridir.*

*Kanıt.* $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ ailesi $A$ idealini üreten homojen elemanların bir ailesi olsun. $K$ alt modülünü üreten homojen elemanların bir $\{k_j\}_{j\in J}$ ailesi alınsın. O zaman $\alpha_i k_j$ çarpımları $AK$ modülünü üretir. Dolayısıyla $AK$ modülü bir homojen alt modül olur. $(K :_E A)$ alt modülünün homojen olduğu Önerme 2.1.24 ispatına benzer şekilde yapılır. □

Şimdi kademeli Noether modüller ele alınsın. $\Gamma$ bir kademe monoidi ve $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R^{(\gamma)}$ bir $\Gamma$–kademeli halka olsun. Ayrıca $R$ üzerinde $\Gamma$–kademeli bir $E = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} E^{(\gamma)}$ modülü alınsın. Teorem 2.1.3 gereğince $R^{(0)}$, $R$ halkasının bir alt halkasıdır. Ayrıca $E^{(\gamma)}$ doğal $R^{(0)}$–modül yapısına sahiptir.

**Lemma 2.1.26.** *$E = \bigoplus_\gamma E^{(\gamma)}$, $\Gamma$–kademeli $R = \bigoplus_\gamma R^{(\gamma)}$ halkası üzerinde bir $\Gamma$–kademeli modül olsun. Eğer $E$ bir Noether $R$–modül ise o zaman herbir $\gamma \in \Gamma$ için $E^{(\gamma)}$ bir Noether $R^{(0)}$–modül olur.*

*Kanıt.* Belirli bir $\gamma \in \Gamma$ elemanı alınsın. $U$ kümesi $E^{(\gamma)}$ modülünün bir $R^{(0)}$–alt modülü olsun. O halde $U$ kümesinin sonlu üretildiğini göstermek yeterlidir. $K$ ile $U$ kümesinin elemanları ile üretilen, $E$ modülünün $R$–alt modülü gösterilsin. $E$ Noether olduğundan $K$ sonlu üretilmiştir. $K = Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_n$ olsun. $x$ ile $x_1, \ldots, x_n$ elemanlarından herhangi birini gösterilsin. O halde $x \in U$ olduğundan $u_i' \in U$ ve $r_i' \in R$ için $x = r_1 u_1' + \cdots + r_p u_p'$ şeklinde yazılabilir. Bu nedenle herbir $x_1, \ldots, x_n$ elemanı $U$ kümesinin elemanlarının lineer kombinasyonudur. Buradan $U$ kümesinin herbir $1 \leq i \leq n$ için $r_{i_j} \in R$ ve $x_i = r_{i_1}u_1 + \cdots + r_{i_s}u_s$ olacak şekilde bir $\{u_1, \ldots, u_s\}$ alt kümesi vardır. Dolayısıyla $K = Ru_1 + Ru_2 + \cdots + Ru_s$ olur. Şimdi $U = R^{(0)}u_1 + \cdots + R^{(0)}u_s$ olduğu gösterilsin. $u \in U$ olsun. O zaman $u \in K$ elde edilir. Buradan $r_1, \ldots, r_s \in R$ için

$$u = r_1 u_1 + \cdots + r_s u_s \tag{2.1.4}$$

olur. Ayrıca $r_i$ farklı derecelere sahip homojen elemanların toplamı şeklinde tek türlü ifade edilebilir. Dolayısıyla $r_i = \sum_\lambda r_i^{(\lambda)}$ olsun. O halde 2.1.4 eşitliğinin her iki tarafındaki $\gamma$–dereceli homojen bileşenler karşılaştırılırsa $u = r_1^{(0)}u_1 + \cdots + r_s^{(0)}$ olur. Buradan $U \subseteq R^{(0)}u_1 + \cdots + R^{(0)}u_s$ elde edilir. Ters kapsama açık olduğundan kanıt tamamlanır. □

**Sonuç 2.1.27.** *$R = \bigoplus_\gamma R^{(\gamma)}$ bir $\Gamma$–kademeli halka olsun. Eğer $R$ bir Noether halka ise o zaman $R^{(0)}$ halkası bir Noether halkadır. Ayrıca herbir $R^{(\gamma)}$ birer Noether $R^{(0)}$–modüldür.*

*Kanıt.* $E$ yerine $R$ alınırsa Teorem 2.1.26 ile kolayca elde edilir. □

**Teorem 2.1.28.** *[4, Theorem 4.1] $R$ bir $\mathbb{Z}$–kademeli halka olsun. $R$ halkası Noetherdir ancak ve ancak $R^{(0)}$ Noetherdir ve $R$, $R^{(0)}$ üzerinde bir cebir olarak sonlu üretilmiştir.*

*Kanıt.* ($\Leftarrow$) Eğer $R^{(0)}$ Noether ve $R$ sonlu üretilmiş $R^{(0)}$–cebiri ise o zaman $R$, $R^{(0)}$ halkası üzerinde bir polinom halkasının bölüm halkasına izomorf olacağından Teorem 1.3.16 ile $R$ halkası da Noether olur.

($\Rightarrow$) $R$, Noether olsun. O halde Teorem 2.1.26 ile $R^{(0)}$ Noetherdir. $R$'nin $R^{(0)}$ üzerinde sonlu üretilmiş olduğu gösterilecektir. $R_- = \bigoplus_{n<0} R^{(n)}$ ve $R_+ = \bigoplus_{n>0} R^{(n)}$ olsun. İlk olarak $R^{(0)}[R_-]$'nin $R^{(0)}$ üzerinde sonlu üretilmiş olduğu gösterilsin. Eğer $R_- = 0$ ise o zaman durum açıktır. O halde $y_1, \ldots, y_d \in R_-$ elemanları $(R_-)R$ idealinin üreteçleri olsun. $R_-$ bir homojen ideal olduğundan üreteçleri homojen elemanlar olarak alınabilir. $k > 0$ olmak üzere $-k = \min\{\operatorname{der} y_1, \ldots, \operatorname{der} y_d\}$ ve $N = R^{(-k)} \oplus R^{(-k+1)} \oplus \ldots \oplus R^{(-1)}$ olsun. Teorem 2.1.26 gereğince $N$ sonlu üretilmiş bir $R^{(0)}$–modüldür. Bu nedenle $N$'nin bir $R^{(0)}$–modül olarak homojen üreteçleri $x_1, \ldots, x_t$ olsun. O halde $(x_1, \ldots, x_t)R = (y_1, \ldots, y_d)R = (R_-)R$ elde edilir.

İddia: $R^{(0)}[R_-] = R^{(0)}[x_1, \ldots, x_t]$'dir: $S = R^{(0)}[R_-]$ ve $T = R^{(0)}[x_1, \ldots, x_t]$ olsun. $n$ üzerine tümevarım uygulayarak her $n > 0$ için $S^{(-n)} = T^{(-n)}$ olduğu şu şekilde göstrilebilir: $n = 0$ için $S^{(0)} = T^{(0)} = R^{(0)}$ olur. Dolayısıyla $n > 0$ ve $r \in S^{(-n)}$ olsun. Eğer $n \leq k$ ise o zaman $r \in N = R^{(0)}x_1 + \cdots + R^{(0)}x_t \subseteq T$ olur. Dolayısıyla $n > k$ olarak alınsın. $r \in R_-R = (x_1, \ldots, x_t)R$ olduğundan $r = \sum u_i x_i$ olacak şekilde $u_1, \ldots, u_t \in R$ vardır. Bu nedenle, her $i$ için $\operatorname{der} u_i + \operatorname{der} x_i = \operatorname{der} r = -n$ olur. Her $i$ için $-n < \operatorname{der} x_i < 0$ olduğundan her $i$ için $-n < \operatorname{der} u_i < 0$ olur. Tümevarım hipotezi ile her $i$ için $u_i \in T$ elde edilir. Bu nedenle $r = \sum u_i x_i \in T$ olur. Dolayısıyla $S^{(-n)} = T^{(-n)}$ elde edilir.

$A = R^{(0)}[R_-]$ olsun.

İddia: $R$, $A$ üzerinde sonlu üretilmiştir: $z_1, \ldots, z_m \in R_+$ elemanları $(R_+)R$ idealinin homojen üreteçleri olsun. Yukarıda $(R_-)R$ için yapılanlar $R = A[z_1, \ldots, z_m]$ eşitliğini göstermek için tekrarlanabilir. Bu durumda $R$, $A$ üzerinde sonlu üretilmiş ve $A$, $R^{(0)}$ üzerinde sonlu üretilmiş olduğundan $R$'nin $R^{(0)}$ üzerinde sonlu üretilmiş olduğu söylenebilir. □

**Lemma 2.1.29.** *$R$ bir $\mathbb{Z}$–kademeli halka ve $M$ bir $R$–modül olsun. O zaman $M$, $R$–modül olarak basittir ancak ve ancak $M$, $R^{(0)}$–modül olarak basittir.*

*Kanıt.* $M$, $R$–modül olarak basit olsun. O zaman homojen bir $I$ maksimal ideali için $M \approx R/I$ olur. Kolayca görülebilir ki $I = \ldots \oplus R^{(-2)} \oplus R^{(-1)} \oplus \mathfrak{m} \oplus R^{(1)} \oplus R^{(2)} \oplus \ldots$, olacak şekilde $R^{(0)}$ halkasının bir maksimal ideali vardır. Bu yüzden $M \approx R/I \approx R^{(0)}/\mathfrak{m}$ olur. Bu nedenle $M$ $R^{(0)}$–modül olarak basittir. Tersi açık olduğundan lemmanın kanıtı tamamlanır. □

**Lemma 2.1.30.** *$R$ bir $\mathbb{Z}$–kademeli halka ve $M$, $l_R(M) = n$ olacak şekilde bir kademeli $R$–modül olsun. O zaman her $i$ için $M_i/M_{i+1}$ basit olacak şekilde $M$'nin homojen alt modüllerinin bir*

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_{n-1} \supset M_n = (0)$$

*dizisi vardır.*

*Kanıt.* $n = 0$ veya $n = 1$ için açıktır. Bu nedenle $n > 1$ olsun. Tümevarım ile $M$'nin sıfırdan farklı, öz ve homojen bir alt modülü olduğunu göstermek yeterlidir. Sıfırdan farklı homojen bir $x \in M$ alınsın. Eğer $Rx \neq M$ ise aranılan alt modül elde edilir. Bu nedenle $Rx = M$ olsun. O zaman $I = (0 : x)$ olmak üzere $M \approx R/I$, $R$–modül izomorfizması vardır. $l_R(R/I) = n < \infty$ olacağından $R/I$ Artin olur. Dolayısıyla $R/I$'nın bütün maksimal idealleri aynı zamanda minimal asal idealler olacağından homojendir (bkz. Önerme 2.3.3). $R/I$'nın tek maksimal ideali (0) ise o zaman $n = l_R(R/I) = 1$ olur. Bu ise çelişkidir. Bu nedenle $r + I$, $R/I$'da tersinir olmayacak şekilde homojen bir $r \in R$ vardır. $y = rx$ ve $N = Ry$ olsun. O zaman $N$, $M$'nin sıfırdan farklı, öz, homojen bir alt modülü olur. □

**Teorem 2.1.31.** *[4, Theorem 4.2] $R$ bir $\mathbb{Z}$–kademeli halka ve $M$ bir kademeli $R$–modül olsun. O zaman*

$$l_R(M) = l_{R^{(0)}}(M) = \sum_n l_{R^{(0)}}(M^{(n)})$$

*olur.*

*Kanıt.* Eğer $l_R(M) = \infty$ ise $l_{R^{(0)}}(M) = \infty$ olur. Bu nedenle $l_R(M) = n$ olsun. O zaman Lemma 2.1.30 gereğince her $i$ için $M_i/M_{i+1}$ basit olacak şekilde $M$'nin homojen alt modüllerinin bir

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_{n-1} \supset M_n = (0)$$

kompozisyon serisi vardır. Lemma 2.1.29 gereğince bu modüller aynı zamanda basit $R_0$–modüllerdir. Bu nedenle $l_{R_0}(M) = n$ olur. $M$, $R^{(0)}$–modül olarak $M^{(n)}$ modüllerinin dik toplamı olarak yazıldığından eşitliğin kalan kısmı açıktır. Böylece kanıt tamamlanır. □

**Sonuç 2.1.32.** *$R$ bir $\mathbb{Z}$–kademeli halka ve $M$ bir kademeli $R$–modül olsun. O zaman $M$ bir $R$–modül olarak sonlu uzunluğa sahiptir ancak ve ancak her $M^{(n)}$, $R^{(0)}$–modül olarak sonlu uzunluğa sahiptir ve sonlu tane $M^{(n)}$ modülü hariç $M^{(n)} = 0$ olur.*

**Sonuç 2.1.33.** *$R$ bir $\mathbb{Z}$–kademeli halkası olsun. Buna göre $R$ Artindir ancak ve ancak her $n$ için $R^{(n)}$, bir Artin $R^{(0)}$–modüldür ve sonlu tane $R^{(n)}$ modülü hariç $R^{(n)} = 0$ olur.*

## 2.2 Burulmasız Kademe Monoidleri

Homojen bir idealin radikali de homojen olur mu sorusunun cevabı araştırılacaktır. Genel olarak kademe monoidleri alındığında bu doğru değildir.

**Tanım 2.2.1.** Eğer bir $n \geq 1$ tamsayısı ve $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ elemanları için $n\gamma = n\gamma'$ iken $\gamma = \gamma'$ oluyorsa o zaman $\Gamma$–kademe monoidine *burulmasız* denir. Burada $n\gamma$ ile $\underbrace{\gamma + \cdots + \gamma}_{n}$ toplamı kastedilmektedir.

**Tanım 2.2.2.** $\Gamma$ bir burulmasız kademe monoidi ve $\leq$, $\Gamma$ üzerinde bir tam sıralama olsun. Eğer her $\gamma, \gamma', \gamma^{''} \in \Gamma$ için $\gamma' \leq \gamma$ iken $\gamma + \gamma' \leq \gamma + \gamma^{''}$ oluyorsa $\leq$ bağıntısı $\Gamma$ *monoidinin yapısıyla uyumludur* denir.

**Lemma 2.2.3.** *$\leq, \Gamma$ üzerinde monoid yapısıyla uyumlu olan bir tam sıralama bağıntısı olsun. Eğer $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma* \in \Gamma$ ve $m$ pozitif bir tamsayı ise o zaman aşağıdakiler sağlanır:*

1. $\gamma + \gamma' \leq \gamma + \gamma'' \Leftrightarrow \gamma' \leq \gamma''$.
2. $\gamma + \gamma' = \gamma'' + \gamma*$ *ve* $\gamma \leq \gamma'' \Rightarrow \gamma* \leq \gamma'$.
3. $m\gamma \leq m\gamma' \Leftrightarrow \gamma \leq \gamma'$.
4. $m\gamma = m\gamma' \Leftrightarrow \gamma = \gamma'$.
5. *Eğer $1 \leq i \leq n$ için $\gamma_i \leq \gamma_i^{'}$ ise o zaman $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n \leq \gamma_1^{'} + \cdots + \gamma_n^{'}$ olur. Ayrıca her $i$ için $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n = \gamma_1^{'} + \cdots + \gamma_n^{'}$ olur ancak ve ancak $\gamma_i = \gamma_i^{'}$ elde edilir.*

*Kanıt.* (1) $\leq, \Gamma$ üzerinde onun monoid yapısıyla uyumlu olan bir tam sıralama bağıntısı olduğundan her $\gamma \in \Gamma$ için $\gamma' \leq \gamma'' \Rightarrow \gamma + \gamma' \leq \gamma + \gamma''$ olur. Şimdi $\gamma + \gamma' \leq \gamma + \gamma''$ ve $\gamma'' \leq \gamma'$ olsun. Buradan

$$\gamma + \gamma'' \leq \gamma + \gamma' \leq \gamma + \gamma'' \Rightarrow \gamma + \gamma'' = \gamma + \gamma' \Rightarrow \gamma'' = \gamma'$$

olur. O halde $\gamma' \leq \gamma''$ elde edilir.

(2) $\gamma + \gamma' = \gamma'' + \gamma*$ , $\gamma' \leq \gamma*$ ve $\gamma \leq \gamma''$ olsun. Buradan

$$\gamma'' + \gamma* = \gamma + \gamma' \leq \gamma + \gamma* \leq \gamma'' + \gamma* \Rightarrow \gamma'' + \gamma* = \gamma + \gamma* \Rightarrow \gamma'' = \gamma$$

elde edilir. Dolayısıyla $\gamma'' \leq \gamma$ olur.

(3) $\gamma \leq \gamma'$ olsun. $m$ üzerine tümevarım uygulansın. $m = 2$ için $\gamma + \gamma \leq \gamma + \gamma' \leq \gamma' + \gamma' = 2\gamma'$ olur. $m = n$ için $n\gamma \leq n\gamma'$ olsun.

$$(n+1)\gamma = n\gamma + \gamma \leq n\gamma' + \gamma \leq n\gamma' + \gamma' = (n+1)\gamma'$$

yazılabilir. O halde her pozitif $m$ tamsayısı için $m\gamma \leq m\gamma'$ elde edilir. Şimdi $m\gamma \leq m\gamma'$ olsun. O halde $\leq$ tam sıralama bağıntısı olduğundan $\gamma \leq \gamma'$ ya da $\gamma' \leq \gamma$ olur. Eğer $\gamma \leq \gamma'$ ise istenen elde edilir. Dolayısıyla $\gamma' \leq \gamma$ olsun. $m > 1$ ise o zaman

$$(m-1)\gamma + \gamma' \leq (m-1)\gamma + \gamma = m\gamma \leq m\gamma' = (m-1)\gamma' + \gamma'$$

olur. Buradan

$$(m-1)\gamma + \gamma' \leq (m-1)\gamma' + \gamma'$$

elde edilir. (1) ile $(m-1)\gamma \leq (m-1)\gamma'$ olur. Benzer şekilde $m > 2$ için

$$(m-2)\gamma \leq (m-2)\gamma'$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$(m-(m-1))\gamma \leq (m-(m-1))\gamma'$$

olur. O halde $\gamma \leq \gamma'$ elde edilir.

(4) $m\gamma = m\gamma' \Leftrightarrow m\gamma \leq m\gamma'$ ve $m\gamma' \leq m\gamma$ olur. Buradan (3) ile $\gamma \leq \gamma'$ ve $\gamma' \leq \gamma$ elde edilir.

(5) $1 \leq i \leq n$ için $\gamma_i \leq \gamma_i^{'}$ ise o zaman

$$\begin{aligned}
\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n &\leq \gamma_1^{'} + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n \\
&\leq \gamma_1^{'} + \gamma_2^{'} + \gamma_3 + \cdots + \gamma_n \\
&\vdots \\
&\leq \gamma_1^{'} + \gamma_2^{'} + \cdots + \gamma_n^{'}
\end{aligned}$$

olur. Şimdi $1 \leq p \leq n$ için $\gamma_1 + \cdots + \gamma_n \leq \gamma_1^{'} + \cdots + \gamma_n^{'}$ olsun. $p = 1$ için açıktır. Ayrıca eğer $1 \leq q \leq n$ ve

$$\gamma_1 + \cdots + \gamma_q \leq \gamma_1^{'} + \cdots + \gamma_q^{'}$$

ise o zaman

$$\gamma_1 + \cdots + \gamma_q + \gamma_{q+1} \leq \gamma_1 + \cdots + \gamma_q + \gamma_{q+1}^{'} \leq \gamma_1^{'} + \cdots + \gamma_q^{'} + \gamma_{q+1}^{'} \tag{2.2.1}$$

olur. Bu nedenle istenilen sonuca tümevarım ile ulaşılabilir.

Şimdi eğer $\gamma_1 + \cdots + \gamma_q + \gamma_{q+1} = \gamma_1^{'} + \cdots + \gamma_q^{'} + \gamma_{q+1}^{'}$ ise o zaman 2.2.1 eşitsizliği ile

$$\gamma_1 + \cdots + \gamma_q + \gamma_{q+1} = \gamma_1 + \cdots + \gamma_q + \gamma_{q+1}^{'} = \gamma_1^{'} + \cdots + \gamma_q^{'} + \gamma_{q+1}^{'}$$

elde edilir. Bu nedenle $\gamma_{q+1} = \gamma_{q+1}^{'}$ ve $\gamma_1 + \cdots + \gamma_q = \gamma_1^{'} + \cdots + \gamma_q^{'}$ olur. Böylece kanıt tamamlanır. $\square$

Lemma 2.2.3 (4) ile eğer $\Gamma$ üzerinde onun monoidinin yapısıyla uyumlu olan bir tam sıralama bağıntısının varlığı kabul edilirse o zaman $\Gamma$ burulmasız olur. Şimdi $\Gamma$ burulmasız ise $\Gamma$ üzerinde onun monoid yapısıyla uyumlu olan bir tam sıralama bağıntısının varlığı gösterilecektir. $\Gamma$ burulmasız bir kademe monoidi olsun. $G \subseteq \Gamma$, $0 \in G$ ve $\gamma, \gamma' \in G$ iken $\gamma + \gamma'$ ise o zaman $G$ kümesi bir kademe monoidi olarak ele alınabilir. $G$ alt kümesine $\Gamma$ *monoidinin alt monoidi* denir. $(G, \leq)$ ikilisi alınsın. $G$, $\Gamma$ monoidinin bir alt monoidi ve $\leq$, $G$ üzerinde onun monoid yapısıyla uyumlu olan bir tam sıralama bağıntısı olsun. Bu şekildeki ikililerin kümesi $\Omega$ ile gösterilsin. $G = \{0\}$ aşikar alt monoidi alınırsa o zaman $\Omega \neq \varnothing$ olur.

Şimdi $(G, \leq)$ ve $(G^*, \leq^*) \in \Omega$ olsun ve $\ll$ bağıntısı şöyle tanımlansın:

$$(G, \leq) \ll (G^*, \leq^*) \Leftrightarrow G \subseteq G^*$$

ve $\leq^*$ bağıntısının $G$ üzerine kısıtlaması $\leq$ bağıntısıdır. $\ll$ bağıntısı, $\Omega$ üzerinde bir tam sıralama bağıntısıdır:

1. $(G, \leq) \ll (G, \leq)$ olduğundan $\ll$ bağıntısı yansımalıdır.

2. $(G, \leq) \ll (G', \leq')$ ve $(G', \leq') \ll (G, \leq)$ olsun. O zaman $G \subseteq G'$ ve $G' \subseteq G$ olur. Dolayısıyla $G = G'$ elde edilir. Ayrıca $\leq' \equiv \leq$ olur. Buradan $\ll$ bağıntısı ters simetri özelliğine sahiptir.

3. $(G, \leq) \ll (G', \leq')$ ve $(G', \leq') \ll (G^*, \leq^*)$ olsun. O halde $G \subseteq G'$ ve $G' \subseteq G^*$ olur. Kapsama bağıntısı geçişmeli olduğundan $G \subseteq G^*$ elde edilir. Ayrıca $\leq$ bağıntısı $\leq^*$ bağıntısının $G$ kümesi üzerine kısıtlaması olur. Dolayısıyla $\ll$ bağıntısı geçişmelidir.

$\Omega$ kümesinin boştan farklı her alt kümesinin bir maksimal elemana sahip olduğu gösterilecektir. $\Omega$ kümesinin boştan farklı ve $\ll$ bağıntısına göre tam sıralı bir $\{(G^i, \leq^i)\}_{i \in I}$ ailesi alınsın. $G = \bigcup_i G^i$ olsun. $\{(G^i, \leq^i)\}_{i \in I}$ ailesi tam sıralı olduğundan $g, g' \in G$ iken bir $i \in I$ için $g, g' \in G^i$ olur. $G^i$ bir altmonoid olduğundan $g + g' \in G^i \subseteq G$ elde edilir. Ayrıca $0 \in G^i$ olduğundan $0 \in G$ olur. Dolayısıyla $G$ kümesi $\Gamma$ monoidinin bir alt monoididir. Bu yüzden $g \leq g'$ yazılarak bu durum gösterilir. Bu nedenle $\ll$ bağıntısı $G$ üzerinde onun monoid yapısıyla uyumlu olan bir tam sıralama bağıntısıdır. Zorn lemması ile $\Omega$'nın boştan farklı her tam sıralı alt kümesi en az bir maksimal eleman içerir. $\Omega$ kümesinin bir maksimal elemanı $(G, \leq)$ ve

$$\widetilde{G} = \{\xi \in \Gamma | \exists g, g' \in G \, \text{vardır} \ni \xi + g = g'\}$$

olsun. $g \in G$ ise o zaman $g + 0 = g$ yazılabileceğinden $g \in \widetilde{G}$ olur. Buradan $G \subseteq \widetilde{G}$ elde edilir. Dolayısıyla $\widetilde{G}$, $\Gamma$ monoidinin $G$ kümesini kapsayan bir alt monoidi olur. $\xi, \xi' \in \widetilde{G}$

alınsın. O zaman $\xi + g = g'$ ve $\xi' + \rho = \rho'$ olacak şekilde $g, g', \rho, \rho' \in G$ vardır. O halde

$$(\xi + \xi') + g + \rho = g' + \rho'$$

olduğundan $\xi' + \xi \in \widetilde{G}$ yazılabilir.

Şimdi $G$ üzerindeki $\leq$ tam sıralama bağıntısının $\widetilde{G}$ üzerine onun monoid yapısıyla uyumlu olacak şekilde genişletilebileceği gösterilecektir. Böylece $(G, \leq)$ ikilisinin maksimal eleman olması kullanılırsa $G = \widehat{G}$ elde edilir. $\xi_1, \xi_2 \in \widetilde{G}$ olsun. O zaman uygun $g_1, g_1^{'}, g_2, g_2^{'} \in G$ elemanları için $\xi_1 + g_1 = g_1^{'}$ ve $\xi_2 + g_2 = g_2^{'}$ olur. Dikkat edilirse $\widetilde{G}$ kümesinin elemanları olan $\xi \in \Gamma$ için $\xi + g = g'$ olacak şekilde $g, g' \in G$ elemanları tek olmak zorunda değildir. O halde yukarıdaki bağıntılara ek olarak $\xi_1 + \widetilde{g}_1 = \widetilde{g}_1^{'}$ ve $\xi_2 + \widetilde{g}_2 = \widetilde{g}_2^{'}$ olacak şekilde $\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2, \widetilde{g}_1^{'}, \widetilde{g}_2^{'} \in G$ elemanları olduğu varsayılsın. Buradan

$$\xi_1 + g_1 + \widetilde{g}_1^{'} = g_1^{'} + \xi_1 + \widetilde{g}_1 \Rightarrow g_1 + \widetilde{g}_1^{'} = g_1^{'} + \widetilde{g}_1$$

ve benzer şekilde

$$\xi_2 + g_2 + \widetilde{g}_2^{'} = g_2^{'} + \xi_2 + \widetilde{g}_2 \Rightarrow g_2 + \widetilde{g}_2^{'} = g_2^{'} + \widetilde{g}_2$$

yazılabilir. O halde $g_1^{'} + g_2 + \widetilde{g}_1 + \widetilde{g}_2^{'} = g_1 + g_2^{'} + \widetilde{g}_1^{'} + \widetilde{g}_2$ olur. Lemma 2.2.3 (2) ile eğer $g_1^{'} + g_2 \leq g_1 + g_2^{'}$ ise o zaman $\widetilde{g}_1^{'} + \widetilde{g}_2 \leq \widetilde{g}_1 + \widetilde{g}_2^{'}$ yazılabilir. Buradan $\xi_1 + \widetilde{g}_1 + \widetilde{g}_2 \leq \xi_2 + \widetilde{g}_2 + \widetilde{g}_1$ olur. Lemma 2.2.3 ile $\xi_1 \leq \xi_2$ elde edilir. O halde $\widetilde{G}$ üzerinde $g_1^{'} + g_2 \leq g_1 + g_2^{'}$ iken $\xi_1 \leq \xi_2$ denilebilecek bir bağıntı tanımlanabilir. Eğer $\xi_1, \xi_2 \in G$ ise o zaman $g_1^{'} = \xi_1$, $g_2^{'} = \xi_2$ ve $g_1 = g_2 = 0$ alınır. Bu nedenle $\widetilde{G}$ üzerindeki bağıntı $G$ üzerindeki tam sıralamanın bir genişlemesidir ve aynı sembol kullanıldığı için bir karışıklık meydana gelmez. $\xi_1 \leq \xi_1$ olduğu açıktır.

Şimdi $\xi_1 \leq \xi_2$ ve $\xi_2 \leq \xi_1$ olsun. O halde

$$\rho_1^{'} + \rho_2 \leq \rho_1 + \rho_2^{'} \,\text{ve}\, \rho_1 + \rho_2^{'} \leq \rho_1^{'} + \rho_2$$

olur. Buradan

$$\rho_1 + \rho_2^{'} = \rho_1^{'} + \rho_2$$

elde edilir. Dolayısıyla $\xi_1 + \rho_1 + \rho_2 = \xi_2 + \rho_1 + \rho_2$ olur. Buradan $\xi_1 = \xi_2$ elde edilir. $\xi_1 \leq \xi_2$ ve $\xi_2 \leq \xi_3$ olsun. O halde $g_1^{'} + g_2 \leq g_1 + g_2^{'}$ ve $g_2^{'} + g_3 \leq g_2 + g_3^{'}$ olduğundan

$$g_1^{'} + g_3 + g_2 \leq g_1 + g_2^{'} + g_3 \leq g_2 + g_3^{'} + g_1$$

ve

$$g_1^{'} + g_3 + g_2 \leq g_2 + g_3^{'} + g_1$$

elde edilir. Lemma 2.2.3 (1) ile $g_1^{'} + g_3 \leq g_3^{'} + g_1$ olur. Dolayısıyla $\xi_1 \leq \xi_3$ elde edilir.

$\widetilde{G}$ üzerindeki bağıntı geçişlidir. $g_i$ elemanları kıyaslanabilir olduğundan $\xi_i$ elemanları kıyaslanabilir. Buradan $\leq$ bağıntısı $\widetilde{G}$ üzerinde tam sıralıdır. Şimdi $\xi_1 \leq \xi_2$ ve $\xi$, $\widetilde{G}$ kümesinin keyfi bir elemanı olsun. O zaman $g_1^{'} + g_2 \leq g_1 + g_2^{'}$ olur ve $\xi + g = g'$ olacak şekilde $g, g' \in G$ vardır. Bu nedenle $\xi + \xi_1 + g + g_1 = g' + g_1^{'}$ ve $\xi + \xi_2 + g + g_2 = g' + g_2^{'}$ olur. Buradan

$$g' + g_1^{'} + g + g_2 \leq g_1 + g_2^{'} + g' + g$$

elde edilir. O halde $\xi + \xi_1 \leq \xi + \xi_2$ olur. Buradan $(\widetilde{G}, \leq) \in \Omega$ ve $(G, \leq) \ll (\widetilde{G}, \leq)$ elde edilir. Fakat $(G, \leq)$ ikilisi $\Omega$ kümesinin bir maksimal elemanı olduğundan $G = \widetilde{G}$ eşitliği elde edilir. $G = \Gamma$ eşitliği gösterilsin. $\gamma \in \Gamma$ olsun.

$$H = \{\gamma' \in \Gamma | \exists g \in G, n \geq 0 \text{ vardır } \ni \gamma' = g + n\gamma\}$$

$H$ kümesi $\Gamma$ monoidinin $G$ kümesini kapsayan bir alt monoididir. $\gamma' \in H$ olsun. O halde $\gamma' = g_1 + n_1\gamma$ ve $\gamma'' = g_2 + n_2\gamma$ ise o zaman $\gamma' + \gamma'' = (g_1 + g_2) + (n_1 + n_2)\gamma$ olur. Buradan $\gamma' + \gamma'' \in H$ elde edilir. Dolayısıyla $H$, $\Gamma$'nın bir alt monoidi olur. $\gamma$ elemanının $G$ kümesine ait olduğu gösterilip bir çelişki elde edilecektir.

Şimdi aşağıdaki iki durum ele alınacaktır.

1. $m \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere $m\gamma \in G$ olsun. O zaman

   $$\phi : H \to G \,\text{ve}\, \phi(h) = mh = \underbrace{h + h + \cdots + h}_{m}$$

   alınsın. O halde $\phi(0) = m0 = 0$ olur . Öte yandan $h_1 + h_2 \in H$ ise o zaman

   $$\phi(h_1 + h_2) = m(h_1 + h_2) = mh_1 + mh_2 = \phi(h_1) + \phi(h_2)$$

   elde edilir. Ayrıca $\Gamma$ burulmasız olduğundan $H$ kümesinin farklı elemanlarının görüntüleri de farklı olur. Dolayısıyla $H$ ve $\phi(H)$, monoid olarak izomorftur. $G$ üzerindeki bir tam sıralama bağıntısı $\phi(H)$ üzerine onun monoid yapısıyla uyumlu olacak şekilde kısıtlanabilir. $\phi(H)$'nin monoid yapısıyla uyumlu olan tam sıralama $\phi^{-1}$ görüntüsü ile $H$'ye aktarılsın. Bu tam sıralama $G$ üzerindeki orijinal tam sıralamaya genişletilebilir. O halde $(G, \leq) \ll (H, \leq)$ olur. $(G, \leq)$ maksimal eleman olduğundan $G = H$ elde edilir. $\gamma \in H$ ve $H = G$ olduğundan $\gamma \in G$ olur.

2. Şimdi $\gamma, 2\gamma, 3\gamma, \ldots$ elemanlarının hiçbirinin $G$ kümesine ait olmadığı kabul edilerek çelişki elde edilecektir. $H$ kümesinin her elemanının $g \in G$ ve $n \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere $g + n\gamma$ şeklinde bir tek gösterime sahip olduğu gösterilsin. $g + n\gamma = g' + n'\gamma$ olsun. Eğer $n = n'$ olduğu gösterilirse o zaman $g = g'$ olduğu elde edilir. Eğer $n < n'$ olursa o zaman $g + n\gamma = g' + (n' - n)\gamma + n\gamma$ elde edilir. Dolayısıyla $(n' - n)\gamma \in \widetilde{G} = G$ olur. Bu durum $\gamma$ elemanının pozitif hiçbir katı-

nın $G$ kümesine ait olmaması kabulü ile çelişir. Gösterim tek türlü olduğundan $H$ üzerinde bir tam sıralama bağıntısı tanımlanabilir. Daha açık bir ifadeyle, $H$ kümesinin $h = g + n\gamma$ ve $h^* = g^* + n^*\gamma$ şeklinde iki elemanı için eğer

(a) $g \leq g'^*$ ve $g \neq g^*$ ya da

(b) $g = g^*$ ve $n \leq n^*$

koşullarından biri sağlanıyorsa o zaman $h \leq h^*$ denilir. Bunun $H$ kümesi üzerinde bir bağıntıyı vereceği açıktır. Elde edilen bağıntı $G$ üzerinde bir tam sıralama bağıntısına genişletilebilir. Her $h \in H$ için $h \leq h$ olduğu açıktır. Eğer $h \leq h^*$ ve $h^* \leq h$ ise o zaman $g = g^*$, $n \leq n^*$, $n^* \leq n$ olur. Buradan $n = n^*$ ve $g = g^*$ elde edilir. Dolayısıyla $h = h^*$ olur. $h \leq h^*$ ve $h^* \leq h^{**}$ olsun. Burada $h^{**} = g^{**} + n^{**}\gamma$ olur. O halde $g = g^*$ ve $g^* = g^{**}$ ise o zaman $g = g^{**}$ ve $n \leq n^*$, $n^* \leq n^{**}$ elde edilir. Buradan $n \leq n^{**}$ olur. Dolayısıyla $h \leq h^{**}$ elde edilir. Son olarak $h \leq h^*$ ve $\overline{h} = \overline{g} + \overline{n}\gamma \in H$ olsun. O zaman

$$h + \overline{h} = (g + \overline{g}) + (n + \overline{n})\gamma$$

ve

$$h^* + \overline{h} = (g + g^*) + (n + n^*)\gamma$$

elde edilir. Eğer $g \lneqq g^*$ ise o zaman $g + \overline{g} \leq g^* + \overline{g}$ ve $g + \overline{g} \neq g^* + \overline{g}$ olur. Sonuç olarak $h + \overline{h} \leq h^* + \overline{h}$ elde edilir. Eğer $g = g^*$ ve $n \leq n^*$ ise o zaman $g + \overline{g} = g^* + \overline{g}$ ve $n + \overline{n} \leq n^* + \overline{n}$ olur. Buradan $h + \overline{h} \leq h^* + \overline{h}$ yazılabilir. Bu nedenle $H$ üzerindeki tam sıralama bağıntısı onun monoid yapısıyla uyumludur. Buna göre $(G, \leq) \ll (H, \leq)$ olur. Dolayısıyla $(G, \leq)$ maksimal olduğundan $G = H$ olmak zorundadır. Bu nedenle $\gamma \in G$ elde edilir. Bu ise istenilen çelişkidir. Böylece aşağıdaki teorem kanıtlanmış olur.

**Teorem 2.2.4.** *[1, Theorem 22, §2.12] Bir kademe monoidi onun monoid yapısıyla uyumlu olan bir tam sıralama bağıntısına sahiptir ancak ve ancak bu kademe monoidi burulmasızdır.*

## 2.3 Homojen Asıl Ayrışımlar

Bu kısımda, $\Gamma$ bir kademe monoidi olmak üzere $R = \bigoplus_\gamma R^{(\gamma)}$, $\Gamma$–kademeli halkasının özellikleri çalışılmaya devam edilecektir. Fakat daha önce yapılanın aksine $\Gamma$ monoidinin burulmasız olduğu durumla ilgilenilecektir.

**Önerme 2.3.1.** *$\Gamma$ burulmasız bir kademe monoidi olmak üzere $R$, bir $\Gamma$–kademeli halka ve $A$, $R$'nin bir homojen ideali olsun. O zaman* Rad $A$ *ideali homojendir.*

*Kanıt.* $\Gamma$ burulmasız olduğundan Teorem 2.2.4 ile $\Gamma$ üzerinde onun monoid yapısıyla uyumlu olan bir tam sıralama bağıntısı vardır. Bu tam sıralam bağıntısı $\leq$ olsun. $r$,

$\operatorname{Rad} A$ idealinin bir elemanı olsun. O halde $r \in \operatorname{Rad} A \subseteq R$ olacağından $r = \sum_\gamma r^{(\gamma)}$ olacak şekilde en fazla sonlu tanesi sıfırdan farklı $r^{(\gamma)}$ elemanları bulunabilir. Dikkat edilirse $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_p$ olmak üzere $\gamma_i$–dereceli uygun $r^{(\gamma_i)}$ homojen elemanları için $r = r^{(\gamma_1)} + \cdots + r^{(\gamma_p)}$ yazılabilir. $r \in \operatorname{Rad} A$ olduğundan $r^m \in A$ olacak şekilde bir $m$ tamsayısı vardır. $A$ homojen bir ideal olduğundan Önerme 2.1.17 gereğince $A$ idealinin her elemanının homojen bileşenleri $A$'ya aittir. Sonuç olarak $r^m$ elemanının $m\gamma_1$ dereceli homojen bileşeni $A$ idealine ait olur. Bu bileşen $r^{(\gamma_1)}$ elemanının $m$. kuvveti olduğundan $\left(r^{(\gamma_1)}\right)^m \in A$ elde edilir. Buradan $r^{(\gamma_1)} \in \operatorname{Rad} A$ olur. Benzer şekilde

$$r^{(\gamma_2)}, r^{(\gamma_3)}, \ldots, r^{(\gamma_p)} \in \operatorname{Rad} A$$

elde edilir. O halde

$$r^{(\gamma_2)} + r^{(\gamma_3)} + \cdots + r^{(\gamma_p)} \in \operatorname{Rad} A$$

olur. Buradan $r$ elemanının bütün homojen bileşenleri $\operatorname{Rad} A$ idealine ait olur. Dolayısıyla kanıt tamamlanır. □

**Lemma 2.3.2.** *$\Gamma$ burulmasız bir kademe monoidi olmak üzere $R$ bir $\Gamma$–kademeli halka olsun. $R$ halkasının bir $P$ öz, homojen ideali alınsın. $\alpha, \beta$ $R$'nin homojen elemanları olmak üzere $\alpha\beta \in P$ iken $\alpha \in P$ ya da $\beta \in P$ oluyorsa o zaman $P$, $R$'nin bir asal idealidir.*

*Kanıt.* $P$ ideali lemmanın ifadesindeki özelliği sağlasın ancak asal olmasın. O zaman $r, \rho \in R$ elemanları $r\rho \in P$ iken $r \notin P$ ve $\rho \notin P$ olacak şekilde vardır. $\Gamma$ üzerinde onun monoid yapısıyla uyumlu olan bir tam sıralama bağıntısı tanımlansın. $\gamma_1, \ldots, \gamma_p \in \Gamma$ elemanları $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_p$ olacak şekilde alınsın ve $r = r^{(\gamma_1)} + r^{(\gamma_2)} + \cdots + r^{(\gamma_p)}$ ve $\rho = \rho^{(\gamma_1)} + \rho^{(\gamma_2)} + \cdots + \rho^{(\gamma_p)}$ olsun. $r \notin P$ olduğundan $r^{(\gamma_i)}$ homojen bileşenlerinin hepsi birden $P$ idealine ait değildir. $P$ idealine ait olmayan $r^{(\gamma_i)}$ bileşenlerinin en küçük dereceli olanı $r^{(\gamma_s)}$ olsun. Benzer şekilde $\rho^{(\gamma_t)}$ ile $\rho$ elemanının $P$ idealine ait olmayan en küçük dereceli bileşeni gösterilsin. Buradan

$$\left(r^{(\gamma_s)} + \cdots + r^{(\gamma_p)}\right)\left(\rho^{(\gamma_t)} + \cdots + \rho^{(\gamma_p)}\right) \in P$$

elde edilir. $P$ homojen ideal olduğundan yukarıdaki çarpımda $(\gamma_s + \gamma_t)$–dereceli homojen bileşen $P$ idealinde olmalıdır. Bu dereceye sahip olan tek eleman $r^{(\gamma_s)}\rho^{(\gamma_t)}$ olur. O halde $r^{(\gamma_s)}\rho^{(\gamma_t)} \in P$ elde edilir. Hipotez ile $r^{(\gamma_s)}$ ya da $\rho^{(\gamma_t)}$ bileşenlerinden en az biri $P$ idealine ait olmalıdır. Bu durum $r^{(\gamma_s)}$ ve $\rho^{(\gamma_t)}$ elemanlarının seçimi ile çelişir. Dolayısıyla $P$ bir asal ideal olur. □

**Önerme 2.3.3.** *$P$, $\Gamma$–kademeli $R = \bigoplus_\gamma R^{(\gamma)}$ halkasının bir asal ideali ve $\Gamma$ bir burulmasız kademe monoidi olsun. $P^*$ ile $P$ idealindeki bütün homojen elemanlar ile üretilen ideal gösterilsin. O zaman $P^*$ bir homojen asal idealdir.*

*Kanıt.* $r\rho \in P^*$ ve $r \notin P^*$ olmak üzere $r, \rho \in R$ homojen elemanlar olsun. Lemma 2.3.2 ile $\rho \in P^*$ olduğunu göstermek yeterlidir. $P^* \subseteq P$ ve $r\rho \in P^*$ olduğundan $r\rho \in P$ elde edilir. Ayrıca $r \notin P$ olur. Aksi halde $r$ homojen eleman olduğundan $r \in P^*$ elde edilirdi. Bu durum kabulle çelişir. O halde $P^*$ idealinin bütün üreteçleri $P$ idealinde olduğundan $P^* \subseteq P$ olur. Bu durumda $r\rho \in P$ ve $P$ asal olduğundan $\rho \in P^*$ elde edilir. $\square$

Buradan itibaren $E = \bigoplus_\gamma E^{(\gamma)}$, $\Gamma$–kademeli $R = \bigoplus_\gamma R^{(\gamma)}$ halkası üzerinde bir $\Gamma$–kademeli modül olsun.

**Lemma 2.3.4.** *$\Gamma$ bir burulmasız kademe monoidi ve $N$, $E$ modülünün bir homojen öz alt modülü olsun. Ayrıca $\rho$, $R$'nin bir homojen elemanı ve $y$, $E$'nin bir homojen elemanı olmak üzere $N$ aşağıdaki koşulu sağlasın*

$$\text{'}\rho y \in N \textit{ ise o zaman } y \in N \textit{ ya da } \rho \in \mathrm{Rad}(N:E) \textit{ olur.'}$$

*Bu durumda $N$, $E$ modülünün bir asıl alt modülüdür.*

*Kanıt.* $\Gamma$ üzerinde onun monoid yapısıyla uyumlu olan bir tam sıralama bağıntısı alınsın. Ayrıca $N$, $E$'nin bir asıl alt modülü olmasın. O halde $rx \in N$ ve $r \notin \mathrm{Rad}(N:E)$ ve $x \notin N$ olacak şekilde $r \in R$, $x \in E$ vardır. $r$ ve $x$ elemanları sıfırdan farklı homojen bileşenlerinin toplamı olarak

$$r = r^{(\gamma_1)} + \cdots + r^{(\gamma_p)}, \quad \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_p$$

ve

$$x = x^{(\delta_1)} + \cdots + x^{(\delta_q)}, \quad \delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_q$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi yukarıdaki özelliklere sahip olan bütün $(r, x)$ ikililerinden biri $q$ tamsayısı minimal olacak şekilde seçilsin. Önce $x^{(\delta_1)} \notin N$ olması gerektiği gösterilsin.

$$x = x^{(\delta_1)} + x^{(\delta_2)} + \cdots + x^{(\delta_q)} \notin N$$

ve $N$ alt modül olduğundan $x^{(\delta_1)} \notin N$ ya da $x^{(\delta_2)} + \cdots + x^{(\delta_q)} \notin N$ olur. Eğer $x^{(\delta_1)} \in N$ ise o zaman

$$x - x^{(\delta_1)} = x^{(\delta_2)} + \cdots + x^{(\delta_q)} \notin N$$

olacağından $(r, x - x^{(\delta_1)})$ çifti yukarıdaki özellikleri sağlayan ve $\left(x - x^{(\delta_1)}\right)$'in en fazla $q-1$ adet sıfırdan farklı homojen bileşene sahip olduğu bir ikili olur. Bu durum $q$'nun seçimi ile çelişir. O halde $x^{(\delta_1)} \notin N$ olduğu söylenebilir. Şimdi her $1 \leq i \leq s-1$ için $r^{(\gamma_i)} \notin \mathrm{Rad}(N:E)$ ve $r^{(\gamma_s)} \in \mathrm{Rad}(N:E)$ olacak şekilde bir $1 \leq s \leq q$ tamsayısı alınsın. Ayrıca

$$\rho = r^{(\gamma_1)} + r^{(\gamma_2)} + \cdots + r^{(\gamma_{s-1})}$$

olsun. O zaman $\rho \in \mathrm{Rad}(N : E)$ olur. Bu nedenle bir $k$ tamsayısı için $\rho^k \in (N : E)$ yazılabilir. Dolayısıyla $(r-\rho)^k x \in N$ elde edilir. Buna göre

$$(r^{(\gamma_s)} + r^{(\gamma_{s+1})} + \cdots + r^{(\gamma_k)})x \in N$$

olur. O halde $(r^{(\gamma_s)} + r^{(\gamma_{s+1})} + \cdots + r^{(\gamma_k)})^k x$ ifadesinde $(k\gamma_s + \delta_1)$–dereceli eleman $\left[r^{(\gamma_s)}\right]^k x^{(\delta_1)}$ elemanıdır. Bu nedenle $N$ alt modülüne aittir. $x^{(\delta_1)} \notin N$ olduğundan, hipotez gereğince $\left[r^{(\gamma_s)}\right]^k \in \mathrm{Rad}(N : E)$ elde edilir. Dolayısıyla $r^{(\gamma_s)} \in \mathrm{Rad}(N : E)$ olduğundan bu durum $s$ tamsayısının seçimi ile çelişir. Dolayısıyla kanıt tamamlanır. □

**Teorem 2.3.5.** *[1, Theorem 23, §2.13] $\Gamma$ bir burulmasız kademe monoidi ve $N$, $E$ modülünün bir $P$–asıl alt modülü olsun. $N^*$ ile $E$'nin $N$ tarafından kapsanan homojen elemanları ile üretilen homojen alt modülü gösterilsin. $P^*$, $R$ halkasının $P$ idealindeki bütün homojen elemanlar ile üretilen homojen ideali olsun. O zaman $P^*$ bir asal idealdir ve $N^*$, $E$ modülünün bir $P^*$–asıl alt modülüdür.*

*Kanıt.* Önerme 2.3.3 gereğince $P^*$ bir asal idealdir. $ry \in N^*$, $y \notin N^*$olacak şekilde $r \in R$ ve $y \in E$ homojen elemanları alınsın. Eğer $r \in \mathrm{Rad}(N^* : E)$ olduğu gösterilirse o zaman Lemma 2.3.4 ile $N^*$ alt modülünün bir asıl alt modül olduğu söylenebilir. Şimdi $ry \in N$ ve $y \notin N$'dir. $r \in \mathrm{Rad}(N : E)$ olduğundan $r^s E \subseteq N$ olacak şekilde bir $s$ tamsayısı vardır. Dolayısıyla $e \in E$ bir homojen eleman ise o zaman $r^s e \in N^*$ olur. Bu yüzden $r^s \in (N^* : E)$ elde edilir. Buradan $r \in \mathrm{Rad}(N^* : E)$ olur. Geriye $N^*$ modülünün $P^*$ idealine ait olduğunu göstermek kalır. $(N^* : E) \subseteq (N : E)$ yazılabilir. Buradan

$$\mathrm{Rad}(N^* : E) \subseteq \mathrm{Rad}(N : E) = P$$

olur. Ayrıca Önerme 2.1.24 gereğince $(N^* : E)$ bir homojen idealdir. Bu nedenle Önerme 2.3.1 ile $\mathrm{Rad}(N^* : E)$ idealinin homojen olduğu elde edilir. Ayrıca $\mathrm{Rad}(N^* : E) \subseteq P$ ve $P^*$, $P$ idealinin bütün homojen elemanları tarafından üretildiğinden $\mathrm{Rad}(N^* : E) \subseteq P^*$ olur. Şimdi $\rho \in P^*$ bir homojen eleman olsun. O zaman $\rho \in P$ ve $P = \mathrm{Rad}(N : E)$ olduğundan $\rho^q \in (N : E)$ olacak şekilde bir $q$ tamsayısı vardır. Bu durumda eğer $e \in E$ bir homojen eleman ise o zaman $\rho^q e \in N$ olur. Dolayısıyla $\rho^q e \in N^*$ elde edilir. $E$ homojen elemanlar tarafından üretildiğinden ve $e \in E$ keyfi homojen eleman olduğundan $\rho^q E \subseteq N^*$ olur. Buradan $\rho \in \mathrm{Rad}(N^* : E)$ elde edilir. Dolayısıyla $P^* = \mathrm{Rad}(N^* : E)$ olur. O halde $N^*$, $E$ modülünün bir $P^*$–asıl alt modülüdür. □

Şimdi bir kademeli modülün bir homojen ayrışabilir alt modülünün bütün bileşenleri homojen olan bir asıl ayrışıma sahip olup olmadığı sorusu incelenecektir. Aşağıdaki teorem, bu durumun kademe monoidi burulmasız alındığında gerçekleştiğini göstermektedir.

**Teorem 2.3.6.** *[1, Theorem 24, §2.13] $\Gamma$ bir burulmasız kademe monoidi olsun. $E$*

*modülünün bir asıl ayrışıma sahip olan homojen bir $K$ alt modülü alınsın. O zaman $K$ bütün asıl bileşenleri homojen olan bir normal ayrışıma sahiptir.*

*Kanıt.* $N_1, \ldots, N_s$ $E$ modülünün sırasıyla $P_1, P_2, \ldots, P_s$–asıl alt modülleri olmak üzere

$$K = N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_s$$

olsun. $N_i^*$ ile $N_i$ alt modüllerine ait olan bütün homojen elemanlar ile üretilen homojen alt modüller gösterilsin. Benzer şekilde $P_i^*$ idealleri de $P_i$'de kapsanan bütün homojen elemanlar ile üretilen asal idealler olsun. O halde Teorem 2.3.5 gereğince $P_i^*$ idealleri asaldır ve $N_i^*$ alt modülleri $E$ modülünün $P_i^*$–asıl alt modülleridir. Üstelik $K \subseteq N_i^* \subseteq N_i$ olur. Bu nedenle

$$K = N_1^* \cap N_2^* \cap \ldots \cap N_s^*$$

elde edilir. Yukarıdaki ayrışım $K$'nın $E$ modülündeki bir homojen asıl ayrışımdır. Ayrıca normal ayrışıma inceltilirse o zaman elde edilen normal ayrışımın bileşenleri de homojen olur. $K$ alt modülüne ait olan asal idealler $\{P_1^*, P_2^*, \ldots, P_s^*\}$ kümesinin elemanları olduğundan kanıt tamamlanır. □

# Bölüm 3

# GENEL ÇOKKATLILIK TEORİSİ

## 3.1 Çokkatlı Sistemler

**Tanım 3.1.1.** $E$ bir $R$–modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $R$ halkasının elemanları olsun. Eğer $E/(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)E$, $R$–modülü, sonlu uzunluğa sahip ise o zaman $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları *$E$ üzerinde bir çokkatlı sistem oluşturur* denir.

Doğal olarak $s = 0$ iken bu koşul aslında $l_R\left(E/(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)E\right) = l_R(E)$ değerinin sonlu olması demektir.

**Önerme 3.1.2.** *[1, Proposition 2, §7.3] $E$ bir $R-$ modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ $R$ halkasının elemanları olsun. O zaman keyfi $n_1, \ldots, n_s$ pozitif tamsayıları için*

$$l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E}\right\} \leq n_1.n_2\ldots n_s l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E}\right\}$$

*olur.*

*Kanıt.* Bu sonuçta uzunlukların sonlu olmasına gerek yoktur. Şimdi

$$l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1^{n_1}E + \gamma_2 E + \cdots + \gamma_s E}\right\} \leq n_1.l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E}\right\}$$

olduğu gösterilecektir. $E' = E/\left(\gamma_2 E + \cdots + \gamma_s E\right)$ olsun. O zaman

$$\frac{E'}{\gamma_1^{n_1}E'} \approx \frac{E}{\gamma_1^{n_1}E + \gamma_2 E + \cdots + \gamma_s E}$$

yazılabilir. Bu nedenle

$$l_R\left(\frac{E'}{\gamma_1^{n_1}E'}\right) = l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s E}\right\}$$

olur. Dolayısıyla

$$l_R\left(\frac{E'}{\gamma_1^{n_1}E'}\right) \leq n_1.l_R\left(\frac{E'}{\gamma_1 E'}\right)$$

olduğu gösterilmelidir. $\gamma = \gamma_1$ ve $n = n_1$ olsun. O halde $l_R\left(E/\gamma^n E\right) \leq n.l_R\left(E/\gamma E\right)$ olduğu gösterilsin. Burada

$$l_R\left(\frac{E}{\gamma^n E}\right) = \sum_{i=1}^{n} l_R\left(\frac{\gamma^{i-1}E}{\gamma^i E}\right)$$

olduğundan her $1 \leq i \leq n$ için $l_R\left(\gamma^{i-1}E/\gamma^i E\right) \leq l_R\left(E/\gamma E\right)$ göstermek yeterlidir. $\gamma^{i-1}$ ile çarpma etkisi olan $\psi : E \to \gamma^{i-1}E$ dönüşümü bir epimorfizmadır. $\gamma^i E$'nin bu dönüşüm altındaki öngörüntüsü ele alınsın. O halde $\alpha \in \psi^{-1}(\gamma^i E)$ olsun. O zaman

$$\psi(\alpha) = \gamma^{i-1}\alpha \in \gamma^i E$$

olur. Dolayısıyla $\gamma^{i-1}\alpha = \gamma^i \alpha'$ olacak şekilde bir $\alpha' \in E$ vardır. Buradan

$$\gamma^{i-1}(\alpha - \gamma\alpha') = 0 \Rightarrow \alpha - \gamma\alpha' \in (0 :_E \gamma^{i-1}) \Rightarrow \alpha \in (0 :_E \gamma^{i-1}) + \gamma E$$

olur. Şimdi $\alpha + \gamma e \in (0 :_E \gamma^{i-1}) + \gamma E$ olsun. O halde

$$\alpha \in (0 : \gamma^{i-1}) \Rightarrow \gamma^{i-1}\alpha = 0 \Rightarrow \psi(\alpha + \gamma e) = \gamma^{i-1}\alpha + \gamma^{i-1}\gamma e = \gamma^i e$$

elde edilir. Bu yüzden $\gamma^{i-1}E/\gamma^i E \approx E/\left((0 : \gamma^{i-1}) + \gamma E\right)$ izomorfizması vardır ve buradan

$$l_R\left\{\frac{\gamma^{i-1}E}{\gamma^i E}\right\} = l_R\left\{\frac{E}{(0 :_E \gamma^{i-1}) + \gamma E}\right\} \leq l_R\left\{\frac{E}{\gamma E}\right\}$$

olur. O halde $l_R\left(E'/\gamma_1^{n_1}E'\right) \leq n_1.l_R\left(E'/\gamma_1 E'\right)$ elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} l_R\left\{\frac{E}{(\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E)}\right\} &\leq n_1.l\left\{\frac{E}{\gamma_1 E + \gamma_2^{n_2}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E}\right\} \\ &\vdots \\ &\leq n_1.n_2 \ldots n_s l\left\{\frac{E}{\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E}\right\} \end{aligned}$$

olacağından kanıt tamamlanır. □

**Özellikler.**

*$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ elemanları $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun.*

1. *$\{i_1, \ldots, i_s\}$, $\{1, \ldots, s\}$'in bir permütasyonu olsun. O zaman $\gamma_{i_1}, ..., \gamma_{i_s}$ elemanları $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olur. Ayrıca $1 \leq i \leq s$ için $\gamma_i E = 0$ olacak şekildeki $\gamma_i$'ler çıkarılırsa geriye kalan elemanlar bir çokkatlı sistemdir.*

2. *Önerme 3.1.2 gereğince $n_1, ..., n_s$ keyfi pozitif tamsayıları için, $\gamma_1^{n_1}, ..., \gamma_s^{n_s}$ elemanları $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olur.*

*3.* *$K$, $E$ modülünün bir alt modülü olmak üzere $E' = E/K$ olsun. O zaman*

$$\gamma_1 E' + \gamma_2 E' + \cdots + \gamma_s E' = \frac{K + \gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E}{K}$$

*olur. Bu nedenle*

$$\frac{E}{\gamma_1 E' + \cdots + \gamma_s E'} \approx \frac{E}{K + \gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E}$$

*izomorfizması vardır. Buradan*

$$l_R\left\{\frac{E'}{\gamma_1 E' + \cdots + \gamma_s E'}\right\} = l_R\left\{\frac{E}{K + \gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E}\right\} \leq l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E}\right\}$$

*elde edilir. $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ bir çokkatlı sistem olduğundan $l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E}\right\} < \infty$ olur. Dolayısıyla*

$$l_R\left\{\frac{E'}{\gamma_1 E' + \cdots + \gamma_s E'}\right\} < \infty$$

*elde edilir. Buradan $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları $E'$ bölüm modülü üzerinde bir çokkatlı sistem olur.*

**Lemma 3.1.3.** *$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$, $R$–modüllerin bir tam dizisi ve $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ $R$ halkasının elemanları olsun. O zaman*

$$l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E}\right\} \leq l_R\left\{\frac{E'}{\gamma_1 E' + \cdots + \gamma_S E'}\right\} + l_R\left\{\frac{E''}{\gamma_1 E'' + \cdots + \gamma_s E''}\right\}$$

*olur. Buradan eğer $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları $E'$ ve $E''$ modülleri üzerinde bir çokkatlı sistem ise o zaman $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E$ üzerinde çokkatlı sistem olur.*

*Kanıt.* Genelliği bozmadan $E'$, $E$ modülünün bir alt modülü ve $E'' = E/E'$ olsun. O zaman

$$\gamma_1 E'' + \gamma_2 E'' + \cdots + \gamma_s E'' = \frac{E' + \gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E}{E'}$$

olur. Dolayısıyla

$$E''/\left(\gamma_1 E'' + \cdots + \gamma_s E''\right) = \frac{E/E'}{\left(E' + \gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E\right)/E'} \approx E/\left(E' + \gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E\right)$$

olduğundan

$$l_R\left\{\frac{E''}{\gamma_1 E'' + \cdots + \gamma_s E''}\right\} = l_R\left\{\frac{E}{E' + \gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E}\right\}$$

elde edilir. Bu nedenle

$$
\begin{aligned}
l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1 E+\cdots+\gamma_s E}\right\} &= l_R\left\{\frac{E}{E'+\gamma_1 E+\cdots+\gamma_s E}\right\}+l_R\left\{\frac{E'+\gamma_1 E+\cdots+\gamma_s E}{\gamma_1 E+\cdots+\gamma_s E}\right\}\\
&= l_R\left\{\frac{E''}{\gamma_1 E''+\cdots+\gamma_s E''}\right\}+l_R\left\{\frac{E'}{E'\cap(\gamma_1 E+\cdots+\gamma_s E)}\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca

$$\gamma_1 E'+\gamma_2 E'+\cdots+\gamma_s E' \subseteq E'\cap(\gamma_1 E+\cdots+\gamma_s E)\subseteq E'$$

olduğundan

$$l_R\left\{\frac{E'}{E'\cap(\gamma_1 E+\cdots+\gamma_s E)}\right\} \leq l_R\left\{\frac{E'}{\gamma_1 E'+\cdots+\gamma_s E'}\right\}$$

olur. O halde

$$l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1 E+\cdots+\gamma_s E}\right\} \leq l_R\left\{\frac{E''}{\gamma_1 E''+\cdots+\gamma_s E''}\right\}+l_R\left\{\frac{E'}{\gamma_1 E'+\cdots+\gamma_s E'}\right\}$$

elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır. □

Şimdi $E$ bir $R$–modül olsun. $\gamma_1,...,\gamma_s$ elemanları, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsa bile bu elemanlar $E$ modülünün bütün alt modülleri üzerinde bir çokkatlı sistem olmayabilir. Ancak Noether modüllerle çalışıldığında bu sorunla karşılaşılmaz.

**Önerme 3.1.4.** *[1, Proposition 3, §7.3]* $0\to E'\to E\to E''\to 0$ *Noether* $R$*–modüllerin bir tam dizisi ve* $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ *elemanları* $R$ *halkasına ait olsun. O zaman* $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ $E$ *modülü üzerinde bir çokkatlı sistemdir ancak ve ancak* $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$*,* $E'$ *ve* $E''$*modülleri üzerinde de bir çokkatlı sistem olur*

*Kanıt.* $(\Rightarrow)$ $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ elemanları $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem iken $E'$ üzerinde de bir çokkatlı sistem olduğu gösterilsin. Şimdi genelliği bozmadan $E'$ modülü $E$ modülünün bir alt modülü olarak alınsın. $A=\gamma_1 R+\cdots+\gamma_s R$ olsun. O zaman Teorem 2.1.18 gereğince

$$A^{q+1}E\cap E' = A\left(A^q E\cap E'\right)\subseteq AE'$$

olacak şekilde negatif olmayan bir $q$ tamsayısı vardır. Buradan

$$\begin{aligned}
l_R\left\{\frac{E'}{\gamma_1E'+\cdots+\gamma_sE'}\right\} &= l_R\left\{\frac{E'}{AE'}\right\}\\
&\leq l_R\left\{\frac{E'}{A^{q+1}E\cap E'}\right\}\\
&= l_R\left\{\frac{A^{q+1}E+E'}{A^{q+1}E}\right\}\\
&\leq l_R\left\{\frac{E}{A^{q+1}E}\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.Şimdi

$$\gamma_1^{q+1}E+\gamma_2^{q+1}E+\cdots+\gamma_s^{q+1}E\subseteq A^{q+1}E$$

olduğu söylenebilir. O halde Önerme 3.1.2 gereğince

$$\begin{aligned}
l_R\left\{\frac{E'}{\gamma_1E'+\cdots+\gamma_sE'}\right\} &\leq l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1^{q+1}E+\cdots+\gamma_s^{q+1}E}\right\}\\
&\leq (q+1)^s\, l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1E+\cdots+\gamma_sE}\right\}\\
&< \infty
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ elemanları $E'$ modülü üzerinde bir çokkatlı sistemdir. Genelliği bozmadan $E''$ modülü $E''=E/E'$ bölüm modülü şeklinde alınsın. Çokkatlı sistemlerin yukarıda verilen özellikleri ile $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ elemanları $E''$ üzerinde bir çokkatlı sistem olur.

($\Leftarrow$) Lemma 3.1.3 ile elde edilir. □

Bu kısım çokkatlı sistemler için verilecek bir uyarı ile bitirilecektir. $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ elemanları $E$, $R$–modülü üzerinde bir çokkatlı sistem olsun ve $IE=0$ olacak şekilde bir $I$ ideali alınsın. $\overline{R}=R/I$ olsun. O zaman Önerme 1.1.19 gereğince $E$ modülü bir $\overline{R}$–modül yapısına sahiptir. $\gamma_i$ elemanının $\overline{R}$ halkasındaki doğal görüntüsü $\overline{\gamma}_i$ ile gösterilsin. O zaman

$$\frac{E}{\gamma_1E+\cdots+\gamma_sE}=\frac{E}{\overline{\gamma}_1E+\cdots+\overline{\gamma}_sE}$$

olur. Yukarıdaki eşitlikte $R$ ve $\overline{R}$–modül yapıları birlikte ele alınmaktadır. Ayrıca $R$–alt modüller ile $\overline{R}$–alt modüller aynıdır. Dolayısıyla

$$l_{\overline{R}}\left\{\frac{E}{\overline{\gamma}_1E+\cdots+\overline{\gamma}_sE}\right\}=l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1E+\cdots+\gamma_sE}\right\}<\infty$$

olur. Buradan $\overline{\gamma}_1,\ldots,\overline{\gamma}_s$ elemanları, $E$, $\overline{R}$–modül olarak göz önüne alındığında $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olur.

## 3.2 Çokkatlılık Sembolü

$E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. Şimdi $s$ üzerine tümevarım uygulayarak $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanlarının $E$ modülü üzerinde bir çokkatlısı aşağıdaki gibi tanımlanacaktır:

Çokkatlı, negatif olmayan bir tamsayı olacaktır ve $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$ ya da $e_R(\gamma_{1 \cdots s} \mid E)$ sembolü ile gösterilecektir. İlk olarak $s = 0$ olsun. Bu durumda boş küme $E$ üzerinde bir çokkatlı sistemdir. Dolayısıyla $l_R(E)$ sonludur. Bu nedenle $e_R(. \mid E) = l_R(E)$ olarak gösterilsin. Şimdi $s \geq 1$ olsun. Ayrıca Noether modüller üzerinde $s-1$ elemanlı her çokkatlı sistem için çokkatlılık sembolünün tanımlı olduğu kabul edilsin. Lemma 1.3.1 gereğince $E/\gamma_1 E$ ve $(0 :_E \gamma_1)$ modülleri Noether olur. Önerme 3.1.4 ile $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları $E/\gamma_1 E$ ve $(0 :_E \gamma_1)$ modülleri üzerinde bir çokkatlı sistemdir. $\gamma_1$, $E/\gamma_1 E$ modülünü sıfırlar. Dolayısıyla $\gamma_2, \ldots \gamma_s$ elemanları $E/\gamma_1 E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olur. Benzer şekilde $\gamma_2, \ldots, \gamma_s$ elemanlarının $(0 :_E \gamma_1)$ üzerinde de bir çokkatlı sistem olduğu da elde edilebilir. Dolayısıyla varsayım gereği $e_R(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E/\gamma_1 E)$, $e_R(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid (0 :_E \gamma_1))$ tanımlıdır. Buna göre

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = e_R(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E/\gamma_1 E) - e_R(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid (0 :_E \gamma_1))$$

ifadesi bir tamsayı değerine sahiptir. Böylece elde edilen

$$e_R(. \mid E) = l_R(E) \tag{3.2.1}$$

ve

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = e_R(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E/\gamma_1 E) - e_R(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid (0 :_E \gamma_1)) \tag{3.2.2}$$

eşitlikleri ile genel çokkatlılık sembolü tanımlanır.

Dikkat edilirse $E$ yerine ona izomorf olan herhangi bir modül alınırsa çokkatlılık sembolünün değeri değişmeyecektir. Ayrıca $E$ sıfır modülü iken

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$$

olur.

$E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. $IE = 0$ olacak şekilde bir $I$ ideali alınsın. $\overline{R} = R/I$ ve $\overline{\gamma}_i$, $\gamma_i$ elemanının $\overline{R}$ halkasındaki doğal görüntüsü olsun. O zaman $E$ bir Noether $\overline{R}$–modüldür. Ayrıca daha önce gösterildiği gibi $\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_s$ elemanları $E$, $\overline{R}$–modülü üzerinde bir çokkatlı sistemdir.

İddia: $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = e_{\overline{R}}(\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_s \mid E)$'dir:

$s = 0$ için $l_R(E) = l_{\overline{R}}(E)$ olduğundan iddia doğrudur. Şimdi $s > 0$ olmak üzere

$s-1$ elemanlı çokkatlı sistemler için iddia doğru olsun. O zaman $E/\gamma_1 E = E/\overline{\gamma}_1 E$ ve

$$(0 :_E \gamma_1) = (0 :_E \overline{\gamma}_1)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) &= e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E/\gamma_1 E\right) - e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid (0 :_E \gamma_1)\right) \\ &= e_{\overline{R}}\left(\overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_s \mid E/\gamma_1 E\right) - e_{\overline{R}}\left(\overline{\gamma}_2, \ldots \overline{\gamma}_s \mid (0 :_E \gamma_1)\right) \\ &= e_{\overline{R}}\left(\overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_s \mid E/\overline{\gamma}_1 E\right) - e_{\overline{R}}\left(\overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_s \mid (0 :_E \overline{\gamma}_1)\right) \\ &= e_{\overline{R}}(\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_s \mid E) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla iddia kanıtlanır.

**Lemma 3.2.1.** $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ *$R$–modüllerin bir tam dizisi olsun ve $R$ halkasının bir $\gamma$ elemanı alınsın. O zaman*

$$0 \to (0 :_{E'} \gamma) \xrightarrow{\phi'} (0 :_E \gamma) \xrightarrow{\psi'} (0 :_{E''} \gamma) \xrightarrow{f} \frac{E'}{\gamma E'} \xrightarrow{\phi^*} \frac{E}{\gamma E} \xrightarrow{\psi^*} \frac{E''}{\gamma E''} \to 0 \tag{3.2.3}$$

*şeklinde $R$–modüllerin bir tam dizisi oluşturulabilir.*

*Kanıt.* Genelliği bozmadan $E'$ modülü $E$'nin bir alt modülü ve $E'' = E/E'$ olsun.

$$\phi : E' \to E$$

içerim dönüşümü ve

$$\psi : E \to E'' = E/E'$$

doğal dönüşüm olsun. O zaman $\phi(0 :_{E'} \gamma) \subseteq (0 :_E \gamma)$ ve $\phi(\gamma E') \subseteq \gamma E$ olur. Bu yüzden $\phi$ dönüşümünün $(0 :_{E'} \gamma)$ alt modülüne kısıtlanması ile

$$\phi' : (0 :_{E'} \gamma) \to (0 :_E \gamma)$$

dönüşümü elde edilir. Ayrıca $\phi^* : E'/\gamma E' \to E/\gamma E$ olsun.

$$\psi(0 :_E \gamma) \subseteq (0 :_{E''} \gamma) \,\text{ve}\, \psi(\gamma E) \subseteq \gamma E''$$

olduğundan benzer şekilde $\psi$ dönüşümü ile

$$\psi' : (0 :_E \gamma) \to (0 :_{E''} \gamma) \,\text{ve}\, \psi^* : E/\gamma E \to E''/\gamma E''$$

dönüşümleri elde edilir. Şimdi $e'' \in (0 :_{E''} \gamma)$ olsun. O halde $\psi(e) = e''$ olacak şekilde bir $e \in E$ seçilebilir. Ayrıca $\gamma e'' = 0$ olduğundan $\psi(\gamma e) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\gamma e \in E'$ olur. $f(e'')$, $\gamma e$ elemanının $E'/\gamma E'$ modülündeki görüntüsü olsun.

İddia 1: $f$ dönüşümü iyi tanımlıdır: $\psi(e_1) = e''$ olacak şekilde $e_1 \in E$ alınsın. O zaman $e - e_1 \in E'$ olur. Bu nedenle $\gamma e - \gamma e_1 \in \gamma E'$ elde edilir. Buradan $\gamma e$ ve $\gamma e_1$ elemanları $E'/\gamma E'$ modülünde aynı görüntülere sahiptir. Dolayısıyla $f$ dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece iddia kanıtlanır.

Ayrıca $f$ dönüşümü $R$–lineerdir. O halde 3.2.3 dizisindeki dönüşümlerin tümü elde edilmiş olur. Şimdi

$$\ker\psi' = \operatorname{Im}\phi' \,,\, \ker f = \operatorname{Im}\psi' \,,\, \ker\phi^* = \operatorname{Im} f \,,\, \ker\psi^* = \operatorname{Im}\phi^*$$

eşitlikleri ele alınsın.

İddia 2 : $\operatorname{Im} f = \ker\phi^*$ olur: $\alpha + \gamma E' \in \ker\phi^*$ olsun. O halde

$$\alpha \in E' \,\text{ve}\, \phi^*(\alpha + \gamma E') = \alpha + \gamma E = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \gamma E \cap E'$$

olur. Dolayısıyla $\ker\phi^* = (\gamma E \cap E')\,/\gamma E'$ yazılabilir. Diğer taraftan $f : (0 :_{E''} \gamma) \to E'/\gamma E'$ ve $f(e + E') = \gamma e + \gamma E'$ olduğundan $\gamma e + \gamma E' \in (\gamma E \cap E')\,/\gamma E'$ elde edilir. Ayrıca $\gamma e + \gamma E' \in (\gamma E \cap E')\,/\gamma E'$ için $f(e + E') = \gamma e + \gamma E'$ ve $e + E' \in (0 :_{E''} \gamma)$ olur. Dolayısıyla $\operatorname{Im} f = \ker\phi^*$ elde edilir.

İddia 3: $\ker f = \operatorname{Im}\psi'$olur: $\alpha + E' \in \ker f$ olsun. O halde $f(\alpha + E') = \gamma\alpha + \gamma E' = 0$ olur. Buradan $\gamma\alpha \in \gamma E'$ elde edilir. Dolayısıyla $\gamma\alpha = \gamma e'$ olacak şekilde bir $e' \in E'$ vardır. Böylece

$$\gamma\alpha - \gamma e' = 0 \Rightarrow \gamma(\alpha - e') = 0 \Rightarrow \alpha - e' \in (0 :_E \gamma)$$

olur. Buradan $\alpha \in (0 :_E \gamma) + E' \Rightarrow \alpha + E' \in ((0 :_E \gamma) + E')\,/E'$ elde edilir. Şimdi $\alpha \in (0 :_E \gamma)$ olmak üzere $\alpha + E' \in ((0 :_E \gamma) + E')\,/E'$ olsun. Buradan $\gamma\alpha = 0$ olur. Dolayısıyla

$$f(\alpha + E') = \gamma\alpha + \gamma E' = 0$$

elde edilir. O halde $\ker f = ((0 :_E \gamma) + E')\,/E'$ olur. Şimdi $\operatorname{Im}\psi'$ kümesi ele alınsın. $\psi'(\alpha) = \alpha + E'$ olsun. $\alpha \in (0 :_E \gamma)$ olduğundan $\gamma\alpha = 0$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\gamma(\alpha + E') = \gamma\alpha + eE' \in ((0 :_E \gamma) + E')\,/E'$$

olur. $\alpha \in (0 :_E \gamma)$ olmak üzere $\alpha + E' \in (0 :_E \gamma) + E'$ olsun. Buradan $\gamma\alpha = 0$ elde edilir. O halde $\alpha + E' = \psi'(\alpha)$ olduğundan $\alpha + E' \in \operatorname{Im}\psi'$ olur. Ayrıca $0 \to E' \xrightarrow{\phi} E \xrightarrow{\psi} E'' \to 0$ dizisi tam olduğundan $\operatorname{Im}\phi' = \ker\psi'$, $\operatorname{Im}\phi = \ker\psi^*$ ve $\ker\psi = \operatorname{Im}\phi$ eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla kanıt tamamlanır. □

**Teorem 3.2.2.** *[5, Theorem 1]* $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ *Noether $R$–modüllerin bir tam* *dizisi ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları dizinin herbir terimi üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. O zaman*

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E') + e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E^{''})$$

*olur.*

Bu teorem aşağıda verilen sonuçla birlikte kanıtlanacaktır.

**Sonuç 3.2.3.** *[1, Corollary 1 of Theorem 5, §7.4] $0 \to E_p \to \cdots \to E_1 \to E_0 \to 0$ Noether $R$–modüllerin bir tam dizisi olsun. Ayrıca $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları, dizideki herbir modül üzerinde bir çokkatlı sistem olacak şekilde alınsın. O zaman*

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^i e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_i) = 0 \tag{3.2.4}$$

*olur.*

*Kanıt.* Teorem ve sonuç $s$ üzerine tümevarım uygulanarak aynı anda kanıtlanacaktır. $s = 0$ iken $0 \leq i \leq p$ değerleri için $e_R(. \mid E_i) = l_R(E_i)$ olur Ayrıca $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ her $0 \leq i \leq p$ için $E_i$ modülü üzerinde bir çokkatlı sistem olduğundan $l_R(E_i)$ uzunlukları sonlu olur. Dolayısıyla Teorem 1.1.17 ile 3.2.4 eşitliği elde edilir. Şimdi $s \geq 1$ ve Teorem 3.2.11 ile Sonuç 3.2.3 $s-1$ elemanlı çokkatlı sistemler için doğru olsun. Lemma 3.2.1'den

$$0 \to (0 :_{E'} \gamma_1) \to (0 :_E \gamma_1) \to (0 :_{E''} \gamma_1) \to \frac{E'}{\gamma_1 E'} \to \frac{E}{\gamma_1 E} \to \frac{E''}{\gamma_1 E''} \to 0$$

tam dizisi vardır. Dizideki her terim Noether modüldür. Ayrıca $\gamma_1$ elemanı yukarıdaki dizinin her terimini sıfırladığından $\gamma_2, \ldots, \gamma_s$ elemanları dizinin bütün terimleri üzerinde bir çokkatlı sistem olur. Buradan

$$\begin{aligned} e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E}{\gamma_1 E}\right) &- e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid (0 :_E \gamma_1)\right) \\ &= e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E'}{\gamma_1 E'}\right) - e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid (0 :_{E'} \gamma_1)\right) \\ &+ e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E''}{\gamma_1 E''}\right) - e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid (0 :_{E''} \gamma_1)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde çokkatlı sembol tanımından

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E') + e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E^{''})$$

olur. Dolayısıyla $s$ durumu için Teorem 3.2.2 kanıtlanmış olur. O halde tümevarımdan Teorem 3.2.2 elde edilir. Şimdi Sonuç 3.2.3 $s$ durumunda ele alınsın. $p$ üzerine tümevarım uygulanacaktır. $p = 0$ için $0 \to E_0 \to 0$ dizisi tam olacağından $E_0 = 0$ elde edilir.

Buradan $l_R(E_0) = 0$ olur. Dolayısıyla sonucun ifadesi elde edilir. $p = 1$ durumunda $0 \to E_1 \to E_0 \to 0$ tam dizi olduğundan $E_1 \approx E_0$ olur. Buradan $l_R(E_0) = l_R(E_1)$ elde edilir. O halde $l_R(E_0) - l_R(E_1) = 0$ olur. Şimdi $p > 2$ ve sonuç $p - 1$ için doğru olsun. $p$ için sonucun doğru olduğu gösterilsin. O halde

$$\mathrm{Im}(E_{p-1} \to E_{p-2}) = E'_{p-1}$$

olsun. Buradan

$$E'_{p-1} = \ker(E_{p-2} \to E_{p-3})$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$0 \to E'_{p-1} \xrightarrow{i} E_{p-2} \to E_{p-3} \to \cdots \to E_0 \to 0$$

dizisi tam olur. O halde tümevarım hipotezinden

$$\sum_{i=0}^{p-2} (-1)^i e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_i) + (-1)^{p-1} e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E'_{p-1}) = 0$$

elde edilir. Ayrıca

$$0 \to E_p \to E_{p-1} \to E'_{p-1} \to 0$$

dizisi tam olduğundan

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_{p-1}) = e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_p) + e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E'_{p-1})$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E'_{p-1}) = e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_{p-1}) - e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_p) \tag{3.2.5}$$

olur. 3.2.5 eşitliği toplamda yazılılırsa sonuç elde edilir. □

**Sonuç 3.2.4.** *$R$ bir halka, $E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. $E$'nin alt modüllerinin*

$$0 = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \ldots \subseteq E_m = E$$

*olacak şekilde bir dizisi alınsın. O halde*

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = \sum_{i=1}^{m} e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_i/E_{i-1})$$

*olur.*

*Kanıt.* İlk olarak $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_1) = e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_0) + e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_1/E_0)$

yazılabilir. Şimdi $0 \to E_1 \to E_2 \to E_2/E_1 \to 0$ tam dizisi ele alınsın. Buradan 3.2.2 gereğince $e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_2) = e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_1) + e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_2/E_1)$ olur. Benzer şekilde devam edilirse

$$\begin{aligned}
e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_1) &= e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_0) + e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_1/E_0)\\
e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_2) &= e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_1) + e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_2/E_1)\\
&\vdots\\
e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_m) &= e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_{m-1}) + e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_m/E_{m-1})
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_1/E_0) &= e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_1) - e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_0)\\
e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_2/E_1) &= e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_2) - e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_1)\\
&\vdots\\
e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_m/E_{m-1}) &= e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_m) - e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_{m-1})
\end{aligned}$$

elde edilir. Son elde edilen eşitlikler taraf tarafa toplanır ve $E_0 = 0$, $E_m = E$ olduğu da göz önüne alınırsa o zaman

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) = \sum_{i=1}^{m} e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_i/E_{i-1})$$

olur. □

**Sonuç 3.2.5.** *[5, Lemma 11] $E$ bir $R$–modül, $E_1$ ve $E_2$, $E$'nin Noether alt modülleri olsun. Ayrıca $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ elemanları $E_1$ ve $E_2$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. O zaman $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ $E_1+E_2$ ve $E_1 \cap E_2$ Noether modülleri üzerinde bir çokkatlı sistemdir. Ayrıca*

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_1{+}E_2){+}e_R(\gamma_1,\ldots\gamma_s \mid E_1{\cap}E_2) = e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_1){+}e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E_2) \tag{3.2.6}$$

*olur.*

*Kanıt.* Önerme 1.3.3 ile $E_1 + E_2$ ve $E_1 \cap E_2$ Noether $R$–modüllerdir. Ayrıca Önerme 1.3.4 ile $E_1 \oplus E_2$ de Noether $R$–modül olur. O halde

$$f : E_1 \to E_1 \oplus E_2, f(e_1) = (e_1, 0)$$

ve

$$g : E_1 \oplus E_2 \to E_2, g\left((e_1, e_2)\right) = e_2$$

olmak üzere $\operatorname{Im} f = E_1 \oplus 0 = \ker g$, $f$ dönüşümü birebir, $g$ dönüşümü örten olur. Buradan

$$0 \to E_1 \xrightarrow{f} E_1 \oplus E_2 \xrightarrow{g} E_2 \to 0$$

dizisinin tam olduğu elde edilir. Dolayısıyla Önerme 3.1.4 gereğince $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları $E_1 \oplus E_2$ üzerinde bir çokkatlı sistem olur. Şimdi

$$\psi : E_1 \oplus E_2 \to E_1 + E_2, \psi\left((e_1, e_2)\right) = e_1 + e_2$$

olsun. Buradan izomorfizma teoremleri ile $E_1 + E_2 \approx (E_1 \oplus E_2) / \ker \psi$ elde edilir. Ayrıca $E_1 \cap E_2$, $E_1$ modülünün alt modülü olduğundan Önerme 3.1.4 gereğince $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ $E_1 + E_2$ ve $E_1 \cap E_2$ modülleri üzerinde bir çokkatlı sistemdir. Dolayısıyla 3.2.6 eşitliğindeki bütün çokkatlılar tanımlıdır. Şimdi

$$0 \to E_1 \to E_1 + E_2 \to (E_1 + E_2) / E_1 \to 0$$

tam dizisi ele alınsın. İzomorfizma teoremlerinden $(E_1 + E_2) / E_1 \approx E_2 / (E_1 \cap E_2)$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla

$$0 \to E_1 \to E_1 + E_2 \to E_2 / (E_1 \cap E_2) \to 0 \tag{3.2.7}$$

tam dizisi yazılabilir. Ayrıca

$$0 \to E_1 \cap E_2 \to E_2 \to E_2 / (E_1 \cap E_2) \to 0 \tag{3.2.8}$$

tam dizisi vardır. 3.2.7 ve 3.2.8 dizileri ile Teorem 3.2.2 gereğince

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_1 + E_2) = e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_1) + e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E_2}{E_1 \cap E_2}\right)$$

ve

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_2) = e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_1 \cap E_2) + e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E_2}{E_1 \cap E_2}\right)$$

elde edilir. Bu nedenle

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_1 + E_2) = e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_1) + e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_2) - e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_1 \cap E_2)$$

olur. Buradan

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_1 + E_2) + e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_1 \cap E_2) = e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_1) + e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_2)$$

elde edilir. Dolayısıyla kanıt tamamlanır. □

**Sonuç 3.2.6.** *[5, Lemma 11] $E_1$ ve $E_2$, $E$, $R$–modülünün $E/E_1$ ve $E/E_2$ bölüm mo-*

*dülleri Noether olacak şekilde alt modülleri olsun. Eğer $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları $E/E_1$ ve $E/E_2$ üzerinde bir çokkatlı sistem ise o zaman $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E/(E_1 \cap E_2)$ ve $E/(E_1 + E_2)$ Noether $R$–modülleri üzerinde bir çokkatlı sistem olur. Ayrıca*

$$e_R(\gamma_{1\cdots s} \mid \frac{E}{E_1+E_2}) + e_R\left(\gamma_{1\cdots s} \mid \frac{E}{E_1 \cap E_2}\right) = e_R\left(\gamma_{1\cdots s} \mid \frac{E}{E_1}\right) + e_R\left(\gamma_{1\cdots s} \mid \frac{E}{E_2}\right) \quad (3.2.9)$$

*elde edilir.*

*Kanıt.* $f : E/E_1 \to E/(E_1 + E_2)$, $f(e+E_1) = e + E_1 + E_2$ olacak şekilde bir dönüşüm olsun. Dikkat edilirse bu dönüşüm bir epimorfizmadır. O halde izomorfizma teoremlerinden $E/(E_1+E_2)$, $E/E_1$ modülünün bir bölüm modülüne izomorftur. Dolayısıyla $E/(E_1+E_2)$ Noether modüldür. Ayrıca $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E/(E_1+E_2)$ modülü üzerinde bir çokkatlı sistem olur.

İddia 1: $\ker f = (E_1+E_2)/E_1$ olur: Şimdi $e + E_1 \in E/E_1$ için $f(e+E_1) = 0$ olsun. O zaman

$$e + E_1 + E_2 = 0 \Rightarrow e \in E_1 + E_2 \Rightarrow e + E_1 \in \frac{E_1+E_2}{E_1}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\ker f \subseteq (E_1+E_2)/E_1$ olur. Şimdi $e' + E_1 \in (E_1+E_2)/E_1$ olsun. O zaman $e' \in E_1 + E_2$ elde edilir. Buradan

$$f(e'+E_1) = e' + E_1 + E_2 = 0$$

olur. O halde $\ker f \supseteq (E_1+E_2)/E_1$ elde edilir. Böylece iddia doğrudur.

İzomorfizma teoremlerinden $E/(E_1+E_2) \approx (E/E_1)/((E_1+E_2)/E_1)$ elde edilir. Şimdi

$$g : E \to \frac{E}{E_1} \oplus \frac{E}{E_2}, g(e) = (e+E_1, e+E_2)$$

olsun.

İddia 2: $g$ dönüşümünün çekirdeği $E_1 \cap E_2$'dir: $e \in Ker g$ olsun. O zaman

$$g(e) = (e+E_1, e+E_2) = (0,0) \Rightarrow e \in E_1 \text{ ve } e \in E_2 \Rightarrow e \in E_1 \cap E_2$$

olur. Şimdi $e \in E_1 \cap E_2$ olsun. $g(e) = (e+E_1, e+E_2) = (0,0)$ olduğundan $e \in \ker g$ elde edilir.

O halde izomorfizma teoremlerinden $E/(E_1 \cap E_2)$, $E/E_1 \oplus E/E_2$ modülünün bir alt modülüne izomorf olur. Sonuç 1.3.2'den dolayı $(E/E_1) \oplus (E/E_2)$ Noether olur. Buradan

$$0 \to \frac{E}{E_1} \to \frac{E}{E_1} \oplus \frac{E}{E_2} \to \frac{E}{E_2} \to 0$$

tam dizisi düşünülürse Önerme 3.1.4'den $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları $(E/E_1) \oplus (E/E_2)$ üzerinde bir çokkatlı sistem olur. Dolayısıyla $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E/(E_1 \cap E_2)$ üzerinde bir çokkatlı sistemdir. O halde 3.2.9 eşitliğindeki bütün çokkatlılar tanımlıdır. Ayrıca

$E/\left(E_1 \cap E_2\right) \approx \left(E_1 + E_2\right)/E_2$ olduğundan

$$0 \to \frac{E_1}{E_1 \cap E_2} \to \frac{E}{E_1 \cap E_2} \to \frac{E}{E_1} \to 0$$

tam dizisi

$$0 \to \frac{E_1 + E_2}{E_2} \to \frac{E}{E_1 \cap E_2} \to \frac{E}{E_1} \to 0 \tag{3.2.10}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca

$$0 \to \frac{E_1 + E_2}{E_2} \to \frac{E}{E_2} \to \frac{E}{E_1 + E_2} \to 0 \tag{3.2.11}$$

tam dizisi vardır. 3.2.10, 3.2.11 dizileri ve Teorem 3.2.2 ile

$$e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E}{E_1 \cap E_2}\right) = e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E_1 + E_2}{E_2}\right) + e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E}{E_1}\right)$$

ve

$$e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E}{E_2}\right) = e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E_1 + E_2}{E_2}\right) + e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E}{E_1 + E_2}\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E}{E_1 \cap E_2}\right) &+ e\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E}{E_1 + E_2}\right) \\ &= e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E}{E_1}\right) + e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E}{E_2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Bir sonraki Önerme ile $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$ değerinin $\gamma_i$ elemanlarının sırasından bağımsız olduğu gösterilecektir. Bunun için önce aşağıdaki lemma verilsin.

**Lemma 3.2.7.** *$E$ bir Noether $R$–modül ve $s \geq 2$ için $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. O zaman*

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E) = e_R(\gamma_2, \gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$$

*olur.*

*Kanıt.* Öncelikle bazı gösterimler oluşturulacaktır. $K$ bir Noether $R$–modül olsun. O halde eğer $\gamma_3, \gamma_4, \ldots, \gamma_s$ elemanları $K$ üzerinde bir çokkatlı sistem ise

$[K] = e_R(\gamma_3, \ldots, \gamma_s \mid K)$ olarak alınsın. $L \subseteq M$ Noether $N$, $R$–modülünün alt modülleri olsun ve $\gamma_3, \gamma_4, \ldots, \gamma_s$ elemanları $N/L$ üzerinde bir çokkatlı sistem olacak şekilde alınsın. O halde $M/L \leq N/L$ ve $N/M \approx (N/L)\,/\,(M/L)$ olduğundan $\gamma_3, \gamma_4, \ldots, \gamma_s$ elemanları $M/L$ ve $N/M$ üzerinde bir çokkatlı sistem olur. Ayrıca

$$0 \to \frac{M}{L} \to \frac{N}{L} \to \frac{N}{M} \to 0$$

tam dizi olduğundan Teorem 3.2.2 gereğince

$$\left[\frac{N}{L}\right] = \left[\frac{N}{M}\right] + \left[\frac{M}{L}\right] \tag{3.2.12}$$

elde edilir.

Şimdi 3.2.2 eşitliğinden

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = e_R\left(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E}{\gamma_1 E}\right) - e_R\left(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_s \mid (0 :_E \gamma_1)\right)$$

olur. O halde 3.2.12 eşitliğindeki çokkatlıları 3.2.2 eşitliğine göre yeniden düzenlenirse

$$[1] = \left[\frac{E/\gamma_1 E}{\gamma_2(E/\gamma_1 E)}\right],\ [2] = [0 :_{E/\gamma_1 E} \gamma_2],\ [3] = \left[\frac{(0 :_E \gamma_1)}{\gamma_2(0 :_E \gamma_1)}\right],\ [4] = [0 :_{(0 :_E \gamma_1)} \gamma_2]$$

olmak üzere

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E) = [1] - [2] - [3] + [4]$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{E/\gamma_1 E}{\gamma_2(E/\gamma_1 E)} \approx \frac{E}{\gamma_1 E + \gamma_2 E}$$

ve

$$(0 :_{(0 :_E \gamma_1)} \gamma_2) = (0 :_E \gamma_1) \cap (0 :_E \gamma_2)$$

olduğundan $[1] = \left[\frac{E}{\gamma_1 E + \gamma_2 E}\right]$ ve $[4] = [(0 :_E \gamma_1) \cap (0 :_E \gamma_2)]$ durumlarında $\gamma_1$ ile $\gamma_2$ simetrik olur. Bu nedenle $[2] + [3]$ toplamının ele alınması yeterli olacaktır. Ayrıca $(0 :_{E/\gamma_1 E} \gamma_2) = (\gamma_1 E :_E \gamma_2)\,/\,\gamma_1 E$ ve

$$\gamma_1 E \subseteq \gamma_1 E + (0 :_E \gamma_2) \subseteq (\gamma_1 E :_E \gamma_2)$$

olduğu açıktır. Buradan 3.2.12 eşitliği ve

$$\frac{\gamma_1 E + (0 :_E \gamma_2)}{\gamma_1 E} \approx \frac{(0 :_E \gamma_2)}{\gamma_1 E \cap (0 :_E \gamma_2)}$$

izomorfizması ile

$$[2]=\left[\frac{(\gamma_1 E:_E(0:_E\gamma_2))}{\gamma_1 E}\right]+\left[\frac{(\gamma_1 E:_E\gamma_2)}{\gamma_1 E+(0:_E\gamma_2)}\right]=\left[\frac{(0:_E\gamma_2)}{\gamma_1 E\cap(0:_E\gamma_2)}\right]+\left[\frac{((\gamma_1 E):_E\gamma_2)}{\gamma_1 E+(0:_E\gamma_2)}\right]$$

elde edilir. Ayrıca

$$(\gamma_1 E)\cap(0:_E\gamma_2)=\gamma_1\left((0:_E\gamma_2):_E\gamma_1\right)=\gamma_1(0:_E\gamma_1\gamma_2)$$

olduğundan $[5]=\left[\frac{(0:_E\gamma_2)}{\gamma_1(0:_E\gamma_1\gamma_2)}\right]$ ve $[6]=\left[\frac{(\gamma_1 E:_E\gamma_2)}{((\gamma_1 E)+(0:_E\gamma_2))}\right]$ için $[2]=[5]+[6]$ olur. Şimdi $\gamma_2$ ile çarpma işlemi $(\gamma_1 E:_E\gamma_2)$ modülünden $\gamma_2\left(\gamma_1 E:_E\gamma_2\right)$ modülüne bir homomorfizmadır. Ayrıca $\gamma_2\left(\gamma_1 E:_E\gamma_2\right)=\gamma_1 E\cap\gamma_2 E$ olduğundan

$$f:(\gamma_1 E:_E\gamma_2)\to\gamma_1 E\cap\gamma_2 E$$

dönüşümü vardır. $f$ dönüşümünün çekirdeği $(0:_E\gamma_2)$ alt modülüdür. O halde $(0:_E\gamma_2)\subseteq\gamma_1 E+(0:_E\gamma_2)$ ve $f\left(\gamma_1 E+(0:_E\gamma_2)\right)=\gamma_1\gamma_2 E$ olur. Buradan izomorfizma teoremleri ile

$$\frac{(\gamma_1 E:_E\gamma_2)}{\gamma_1 E+(0:_E\gamma_2)}\approx\frac{\gamma_1 E\cap\gamma_2 E}{\gamma_1\gamma_2 E}$$

elde edilir. Bu nedenle $[6]=\left[\frac{\gamma_1 E\cap\gamma_2 E}{\gamma_1\gamma_2 E}\right]$ olur. Dolayısıyla [6]'da $\gamma_1$ ile $\gamma_2$ simetriktir. O halde $[3]+[5]$ toplamını incelemek yeterli olacaktır. Şimdi

$$\gamma_2(0:_E\gamma_1)\subseteq\gamma_2(0:_E\gamma_1\gamma_2)\subseteq(0:_E\gamma_1)$$

olur. Buradan $[7]=\left[\frac{\gamma_2(0:_E\gamma_1\gamma_2)}{\gamma_2(0:_E\gamma_1)}\right]$ ve $[8]=\left[\frac{(0:_E\gamma_1)}{\gamma_2(0:_E\gamma_1\gamma_2)}\right]+\left[\frac{(0:_E\gamma_2)}{\gamma_1(0:_E\gamma_1\gamma_2)}\right]$ olmak üzere 3.2.12 eşitliği ile $[3]+[5]=[7]+[8]$ elde edilir. O halde [8] istenen simetriye sahiptir. Ayrıca $\gamma_2$ ile çarpma işlemi sayesinde $g:(0:_E\gamma_1\gamma_2)\to\gamma_2(0:_E\gamma_1\gamma_2)$ epimorfizması elde edilir.

İddia: $g^{-1}\left(\gamma_2(0:_E\gamma_1)\right)=(0:_E\gamma_1)+(0:_E\gamma_2)$ olur: Şimdi

$$\alpha\in g^{-1}\left(\gamma_2(0:_E\gamma_1)\right)\Rightarrow g(\alpha)\in\gamma_2(0:_E\gamma_1)\Rightarrow g(\alpha)=\gamma_2\alpha$$

olduğundan $\alpha\in(0:_E\gamma_1)$ elde edilir. O halde $\gamma_1\alpha=0$ olur. Buradan $\alpha=\alpha+0$ olduğundan $\alpha\in(0:_E\gamma_1)+(0:_E\gamma_2)$ elde edilir. Şimdi tersine $\alpha\in(0:_E\gamma_1)$ ve $\beta\in(0:_E\gamma_2)$ olacak şekilde $\alpha+\beta\in(0:_E\gamma_1)+(0:_E\gamma_2)$ alalım. O halde $\gamma_1\alpha=0$ ve $\gamma_2\beta=0$ olur. Buradan

$$g(\alpha+\beta)=\gamma_2(\alpha+\beta)=\gamma_2\alpha+\gamma_2\beta=\gamma_2\alpha\Rightarrow\alpha\in\gamma_2(0:_E\gamma_1)$$

elde edilir.

O halde

$$\frac{(0:_E\gamma_1\gamma_2)}{(0:_E\gamma_1)+(0:_E\gamma_2)}\approx\frac{\gamma_2(0:_E\gamma_1\gamma_2)}{\gamma_2(0:_E\gamma_1)}$$

olur. Buradan $[7] = \left[\frac{(0:_E\gamma_1\gamma_2)}{(0:_E\gamma_1)+(0:_E\gamma_2)}\right]$ elde edilir. Dolayısıyla [7] eşitliğinde $\gamma_1$ ve $\gamma_2$ simetriktir. O halde

$$e_R(\gamma_1,\dots,\gamma_s \mid E) = [1]+[4]-[6]-[7]-[8]$$

eşitliğinde yer alan bütün terimlerde $\gamma_1$ ve $\gamma_2$ elemanları simetrik olur. □

**Önerme 3.2.8.** *[5, Theorem 2] $E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1,\dots,\gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. Şimdi eğer $\{i_1,i_2,\dots,i_s\}$, $\{1,2,\dots,s\}$ kümesinin bir permütasyonu ise o zaman*

$$e_R(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_s \mid E) = e_R(\gamma_{i_1},\gamma_{i_2},\dots,\gamma_{i_s} \mid E)$$

*olur. Elde edilen eşitliğe çokkatlılık sembolünün değişme özelliği denir.*

*Kanıt.* $e_R(\gamma_1,\dots,\gamma_m,\gamma_{m+1},\dots,\gamma_s \mid E) = e_R(\gamma_1,\dots,\gamma_{m+1},\gamma_m,\dots,\gamma_s \mid E)$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Çokkatlılık sembolünün tanımı $m-1$ defa uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
e_R(\gamma_1,\dots,\gamma_m,\gamma_{m+1},\dots\gamma_s \mid E) &= e_R\left(\gamma_2,\dots,\gamma_s \mid \frac{E}{\gamma_1 E}\right) - e_R\left(\gamma_2,\dots,\gamma_s \mid (0:_E\gamma_1)\right)\\
&= e_R\left(\gamma_3,\dots,\gamma_s \mid \frac{(E/\gamma_1E)}{\gamma_2E}\right) - e_R\left(\gamma_3,\dots,\gamma_s \mid (0:_{\frac{E}{\gamma_1E}}\gamma_2)\right)\\
&- e_R\left(\gamma_2,\dots,\gamma_s \mid (0:_E\gamma_1)\right)\\
&= e_R\left(\gamma_3,\dots,\gamma_s \mid \frac{(E/\gamma_1E)}{\gamma_2E}\right) - e_R\left(\gamma_3,\dots,\gamma_s \mid (0:_{\frac{E}{\gamma_1E}}\gamma_2)\right)\\
&- e_R\left(\gamma_3,\dots,\gamma_s \mid \frac{(0:_E\gamma_1)}{\gamma_2(0:_E\gamma_2)}\right) + e_R\left(\gamma_3,\dots,\gamma_s \mid (0:_{(0:_E\gamma_1)}\gamma_2)\right)\\
&\vdots\\
&= \sum_\nu \varepsilon_\nu e_R(\gamma_m,\gamma_{m+1},\dots,\gamma_s \mid E_\nu)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki toplamda $\varepsilon_\nu = \mp 1$ olur. Ayrıca $E_\nu$ modülleri $E$ modülünün alt modülü ya da bölüm modülü olduğundan Noetherdir. $\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1}$, $E_\nu$ modüllerini sıfırladığı için $\gamma_m,\gamma_{m+1},\dots,\gamma_s$ elemanları $E_\nu$ modülleri üzerinde çokkatlı sistem olur. Ayrıca $\varepsilon_\nu$ sayıları ile $E_\nu$ modülleri yalnızca $E$ ile belirlidir ve $\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1},\gamma_m,\dots,\gamma_s$ elemanlarından bağımsızdır. Bu nedenle $\varepsilon_\nu$ ve $E_\nu$ yukarıdaki gibi olmak üzere eğer $\gamma_m$ ile $\gamma_{m+1}$ elemanlarının yeri değiştirilirse

$$e_R(\gamma_1,\dots,\gamma_{m+1},\gamma_m,\dots\gamma_s \mid E) = \sum_\nu \epsilon_\nu e_R(\gamma_{m+1},\gamma_m,\dots,\gamma_s \mid E_\nu)$$

elde edilir. Lemma 3.2.7 ile

$$e_R(\gamma_m,\gamma_{m+1},\dots,\gamma_s \mid E_\nu) = e_R(\gamma_{m+1},\gamma_m,\dots,\gamma_s \mid E_\nu)$$

olur. Buradan

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_s \mid E) = e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_{m+1}, \gamma_m, \ldots, \gamma_s E)$$

elde edilir. □

**Önerme 3.2.9.** *[1, Proposition 5, §7.4] $E$ bir Noether $R$– modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. O halde $m > 0$ olmak üzere belirli bir $i$ değeri için $\gamma_i^m E = 0$ ise o zaman $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$ elde edilir.*

*Kanıt.* Çokkatlılık sembolünün değişme özelliği sayesinde $i = 1$ alınabilir. $m$ üzerine tümevarım uygulanacaktır. İlk olarak $m = 1$ olsun. O zaman $\gamma_1 E = 0$ olur. Buradan $E/\gamma_1 E = E$ ve $(0 :_E \gamma_1) = E$ elde edilir. Dolayısıyla 3.2.2 eşitliği ile

$$\begin{aligned} e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) &= e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E}{\gamma_{1E}}\right) - e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid (0 :_E \gamma_1)\right) \\ &= e_R(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E) - e_R(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $m > 1$ ve $m$ sayısından küçük olan her değer için varsayım doğru olsun. Teorem 3.2.2 ve $0 \to \gamma_1 E \to E \to E/\gamma_1 E \to 0$ tam dizisi ile

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \gamma_1 E) + e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E}{\gamma_1 E}\right)$$

elde edilir. Ayrıca $\gamma_1^{m-1}(\gamma_1 E) = 0$ ve $\gamma_1\left(E/\gamma_1 E\right) = 0$ olur. Buradan tümevarım kabülü ile $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \gamma_1 E) = 0$, $e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E/\gamma_1 E\right) = 0$ elde edilir. O halde $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$ olur. □

**Lemma 3.2.10.** *$E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma$, $R$ halkasının bir elemanı olsun. O halde $F_m = E/(0 :_E \gamma^m)$ olmak üzere yeterince büyük bir $m$ tamsayısı için $(0 :_{F_m} \gamma) = 0$ elde edilir.*

*Kanıt.* $E$ bir Noether $R$–modül olduğundan $E$ modülünün alt modüllerinin bir

$$(0 :_E \gamma) \subseteq (0 :_E \gamma^2) \subseteq (0 :_E \gamma^3) \subseteq \ldots$$

artan dizisi durmalıdır. Dolayısıyla yeterince büyük bir $m$ tamsayısı için $(0 :_E \gamma^{m+1}) = (0 :_E \gamma^m)$ olur. O zaman

$$(0 :_{F_m} \gamma) = \frac{((0 :_E \gamma^m) :_E \gamma)}{(0 :_E \gamma)} = \frac{(0 :_E \gamma^{m+1})}{(0 :_E \gamma^m)} = \frac{(0 :_E \gamma^m)}{(0 :_E \gamma^m)} = 0$$

elde edilir. □

**Teorem 3.2.11.** *[5, Lemma 2], [1, Theorem 6, §7.4] E bir Noether R–modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları E üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. O zaman*

$$0 \leq e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \leq l_R \left\{ \frac{E}{\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E} \right\}$$

*olur.*

*Kanıt.* İlk olarak $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$ çokkatlılık sembolünün negatif olmadığını göstermek için $s$ üzerine tümevarım uygulansın. $s = 0$ için $e(. \mid E) = l_R(E) < \infty$ olur. Dolayısıyla $e_R(. \mid E) = l_R(E)$ negatif olmayan tamsayıdır. Şimdi $s \geq 1$ olmak üzere $s-1$ elemanlı çokkatlı sistemler için varsayım doğru olsun. $F = E/(0 :_E \gamma_1^m)$, $m$'nin $(0 :_F \gamma_1^m) = 0$ olacak şekilde yeterince büyük bir değeri için tanımlansın. Lemma 3.2.10 sayesinde böyle bir $m$ (dolayısıyla da böyle bir $F$) seçilebilir. Ayrıca

$$0 \to (0 :_E \gamma_1^m) \to E \to \frac{E}{(0 :_E \gamma_1^m)} = F \to 0$$

tam dizisi ve Teorem 3.2.2 ile

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid (0 :_E \gamma_1^m)\right) + e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid F)$$

elde edilir. $\gamma_1^m(0 :_E \gamma_1^m) = 0$ olduğundan Önerme 3.2.9 ile $e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid (0 :_E \gamma_1^m)\right) = 0$ olur. O halde

$$\begin{aligned} e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) &= e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid F) \\ &= e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid F/\gamma_1 F\right) + e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid (0 :_F \gamma_1)\right) \\ &= e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid F/\gamma_1 F\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\gamma_2, \ldots, \gamma_s$, $s-1$ elemanlı bir çokkatlı sistem olduğundan tümevarım kabülü ile $e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid F/\gamma_1 F\right) \geq 0$ olur. Dolayısıyla $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \geq 0$ elde edilir.

Şimdi diğer eşitsizlik gösterilsin. $s \geq 1$ ise

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E/\gamma_1 E\right) - e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid (0 :_E \gamma_1)\right) \tag{3.2.13}$$

elde edilir. O halde çokkatlılık sembolü negatif değer almadığı için 3.2.13 eşitliği ile $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \leq e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E/\gamma_1 E\right)$ olur. Şimdi bu eşitsizlikte $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ ve $E$ yerine sırasıyla $\gamma_2, \ldots, \gamma_s$ ve $E' = E/\gamma_1 E$ yazılırsa o zaman

$$e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E' = E/\gamma_1 E\right) \leq e_R\left(\gamma_3, \ldots, \gamma_s \mid E'/\gamma_2 E'\right)$$

olur. Ayrıca

$$E'/\gamma_2E' = (E/\gamma_1E)/\gamma_2(E/\gamma_1E) \approx E/(\gamma_1E+\gamma_2E)$$

elde edilir. Buradan

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) \le e_R\left(\gamma_3,\ldots,\gamma_s \mid \frac{E}{\gamma_1E+\gamma_2E}\right)$$

olur. Bu şekilde devam edilirse

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) \le e_R\left(. \mid \frac{E}{\gamma_1E+\cdots+\gamma_sE}\right) = l_R\left(\frac{E}{\gamma_1E+\cdots+\gamma_sE}\right)$$

elde edilir □

**Sonuç 3.2.12.** *$E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ elemanları $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. O halde eğer*

$$\gamma_1E+\cdots+\gamma_sE = E$$

*ise o zaman $e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) = 0$ olur.*

*Kanıt.* Teorem 3.2.11 gereğince

$$0 \le e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) \le l_R\left\{E/\left(\gamma_1E+\cdots+\gamma_sE\right)\right\} = l_R\left\{E/E\right\} = l_R\left(0\right) = 0$$

olur. Dolayısıyla $e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) = 0$ elde edilir. □

**Teorem 3.2.13.** *[1, Theorem 7, §7.4] $E$ bir Noether $R$–modül olmak üzere $\gamma_1,\ldots,\gamma_i,\ldots\gamma_s$ ve $\gamma_1,\ldots,\gamma_i^{'},\ldots,\gamma_s$ $E$ üzerinde çokkatlı sistemler olsun. O zaman $\gamma_1,\ldots,\gamma_i\gamma_i^{'},\ldots,\gamma_s$ $E$ üzerinde bir çokkatlı sistemdir ve*

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_i\gamma_i^{'},\ldots\gamma_s \mid E) = e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_i,\ldots,\gamma_s \mid E) + e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_i^{'},\ldots,\gamma_s \mid E)$$

*elde edilir.*

*Kanıt.* $F = \gamma_1E+\cdots+\gamma_iE+\cdots+\gamma_sE$ olsun. O zaman $F$, $E$ modülünün bir alt modülüdür. Bu nedenle Önerme 3.1.4 ile $\gamma_1,\ldots,\gamma_i^{'},\ldots,\gamma_s$ elemanları $F$ üzerinde bir çokkatlı sistem olur. Ayrıca

$$\gamma_1F+\cdots+\gamma_i^{'}F+\cdots\gamma_sF \subseteq F = \gamma_1E+\cdots+\gamma_iE+\cdots+\gamma_sE \subseteq E$$

olduğundan

$$l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1F+\cdots+\gamma_i^{'}F+\cdots+\gamma_sF}\right\} = l_R\left\{\frac{E}{F}\right\} + l_R\left\{\frac{F}{\gamma_1F+\cdots+\gamma_i^{'}F+\cdots+\gamma_sF}\right\} \tag{3.2.14}$$

elde edilir. Burada $\gamma_1,\ldots,\gamma_i,\ldots,\gamma_s$, $E$ üzerinde, $\gamma_1,\ldots,\gamma_i^{'},\ldots,\gamma_s$, $F$ üzerinde çokkatlı sistemler olduğundan 3.2.14 eşitliğinin sağ tarafı sonlu olur. Dolayısıyla eşitliğin sol tarafının da sonlu olduğu elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\gamma_1F+\cdots+\gamma_i^{'}F+\cdots+\gamma_sF &= \gamma_1(\gamma_1E+\cdots+\gamma_iE+\cdots+\gamma_sE)+\cdots\\
&\quad+\gamma_s(\gamma_1E+\cdots+\gamma_iE+\cdots+\gamma_sE)\\
&=\gamma_1^2E+\cdots+\gamma_1\gamma_iE+\cdots+\gamma_1\gamma_sE+\cdots+\gamma_i^{'}\gamma_iE+\cdots+\gamma_s^2E\\
&\subseteq \gamma_1E+\cdots+\gamma_i^{'}\gamma_iE+\cdots+\gamma_sE\subseteq E
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1F+\cdots+\gamma_i^{'}F+\cdots+\gamma_sF}\right\} &= l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1E+\cdots+\gamma_i\gamma_i^{'}E+\cdots+\gamma_sE}\right\}\\
&\quad+l_R\left\{\frac{\gamma_1E+\cdots+\gamma_i\gamma_i^{'}E+\cdots+\gamma_sE}{\gamma_1F+\cdots+\gamma_i^{'}F+\cdots+\gamma_sF}\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1E+\cdots+\gamma_i\gamma_i^{'}E+\cdots+\gamma_sE}\right\}<\infty$ olur.

Bu nedenle $\gamma_1,\ldots,\gamma_i\gamma_i^{'},\ldots,\gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistemdir. Şimdi Önerme 3.2.8 'de $i=s$ alınıp 3.2.2 eşitliği tekrar uygulanırsa

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-1},\gamma_s\mid E)=\sum_\nu \epsilon_\nu e_R(\gamma_s\mid E_\nu)$$

elde edilir. Elde edilen eşittliğin sağ tarafındaki toplam sonludur. Ayrıca her $\epsilon_\nu=\mp1$ ve $\gamma_s$, $E_\nu$ Noether $R$–modülü üzerinde bir çokkatlı sistem olur. Önerme 3.2.8'nin kanıtında olduğu gibi $\epsilon_\nu$ sayıları ve $E_\nu$ modülleri $E$'ye ve $\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-1}$ elemanlarına bağlıdır. Buradan aynı $\epsilon_\nu$ sayıları ve $E_\nu$ modülleri ile

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-1},\gamma_s^{'}\mid E)=\sum_\nu \epsilon_\nu e_R(\gamma_s^{'}\mid E_\nu)$$

ve

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-1},\gamma_s,\gamma_s^{'}\mid E)=\sum_\nu \epsilon_\nu e_R(\gamma_s\gamma_s^{'}\mid E_\nu)$$

olur. Dolayısıyla $s=1$ alınabilir. Kanıtın devamında $\gamma_s$ ve $\gamma_s^{'}$ yerine sırasıyla $\gamma$ ve $\gamma'$ alınacaktır. Bu durumda $e_R(\gamma\mid E)=l_R\,(E/\gamma E)-l_R(0:_E\gamma)$ olur. Ayrıca

$$e_R(\gamma'\mid E)=l_R\left(\frac{E}{\gamma'E}\right)-l_R(0:_E\gamma')$$

ve

$$e_R(\gamma\gamma' \mid E) = l_R\left(\frac{E}{\gamma\gamma' E}\right) - l_R(0 :_E \gamma\gamma')$$

yazılabilir. Şimdi $\psi : E \to \gamma E\,, \psi(e) = \gamma e$ dönüşümü bir epimorfizmadır ve $\psi^{-1}(\gamma\gamma' E) = (0 :_E \gamma) + \gamma' E$ olur.Bu nedenle $\gamma E/\gamma\gamma' E \approx E/((0 :_E \gamma) + \gamma' E)$ izomorfizması vardır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} l_R\left(\frac{\gamma E}{\gamma\gamma' E}\right) &= l_R\left(\frac{E}{(0 :_E \gamma) + \gamma' E}\right) \\ &= l_R\left(\frac{E}{\gamma' E}\right) - l_R\left(\frac{\gamma' E + (0 :_E \gamma)}{\gamma' E}\right) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\frac{((0 :_E \gamma) + \gamma' E)}{\gamma' E} \approx \frac{(0 :_E \gamma)}{\gamma' E \cap (0 :_E \gamma)} = \frac{(0 :_E \gamma)}{\gamma'(0 :_E \gamma\gamma')}$$

olduğundan

$$l_R\left(\frac{\gamma E}{\gamma\gamma' E}\right) = l_R\left(\frac{E}{\gamma' E}\right) - l_R(0 :_E \gamma) + l_R\left(\gamma'(0 :_E \gamma\gamma')\right) \tag{3.2.15}$$

elde edilir. Buradan 3.2.15 eşitliğinin her iki tarafına $l_R(E/\gamma E)$ eklenirse

$$l_R\left(\frac{E}{\gamma\gamma' E}\right) = l_R\left(\frac{E}{\gamma E}\right) - l_R(0 :_E \gamma) + l_R\left(\frac{E}{\gamma' E}\right) + l_R(\gamma'(0 :_E \gamma\gamma')) \tag{3.2.16}$$

olur. Ayrıca $(0 :_E \gamma\gamma') \to \gamma'(0 :_E \gamma\gamma')$, $\gamma'$ ile çarpma dönüşümü çekirdeği $(0 :_E \gamma)$ olan bir epimorfizmadır. Buradan $\gamma'(0 :_E \gamma\gamma') \approx (0 :_E \gamma\gamma')/(0 :_E \gamma')$ elde edilir. Dolayısıyla $l_R(\gamma'(0 :_E \gamma\gamma')) = l_R(0 :_E \gamma\gamma') - l_R(0 :_E \gamma')$ olur. O halde elde edilen son eşitlik 3.2.16 eşitliğinde yerine yazılırsa kanıt tamamlanır. □

**Sonuç 3.2.14.** *$E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistemi olsun. O zaman $n_1, \ldots, n_s$ pozitif tamsayılar olmak üzere $\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, \ldots, \gamma_s^{n_s}$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistemdir. Ayrıca*

$$e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid E) = n_1.n_2 \ldots n_s e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$$

*olur.*

*Kanıt.* Teorem 3.2.13 ile $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem iken $\gamma_1^2, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ elemanlarının $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olduğu elde edilebilir. Bu şekilde devam edilirse $\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olur. Ayrıca

$$e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid E) = n_1 e_R(\gamma_1, \gamma_2^{n_2} \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid E) = \cdots = n_1 \ldots n_s e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$$

elde edilir. □

**Sonuç 3.2.15.** *$E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. O zaman $n_1, \ldots, n_s$ keyfi pozitif tamsayılar olmak üzere*

$$0 \leq e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \leq \frac{l_R \{E/(\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E)\}}{n_1.n_2 \ldots n_s}$$

*elde edilir.*

*Kanıt.* Teorem 3.2.11 ile $0 \leq e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \leq l_R \{E/\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E\}$ olur. Buradan

$$0 \leq e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid E) = n_1.n_2 \ldots n_s e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \leq l_R \left\{ \frac{E}{\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E} \right\}$$

elde edilir. Dolayısıyla $0 \leq e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \leq l_R \{E/(\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E)\} / n_1.n_2 \ldots n_s$ olur. □

**Sonuç 3.2.16.** *$E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. $m$ bir pozitif tamsayı olmak üzere*

$$\gamma_i^m E \subseteq \gamma_1 E + \cdots + \gamma_{i-1}E + \gamma_{i+1}E + \cdots + \gamma_s E$$

*olsun. O zaman*

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$$

*elde edilir.*

*Kanıt.* Önerme 3.2.8 sayesinde $i = 1$ alınabilir. Şimdi eğer $n > m$ ise o zaman

$$\gamma_1^n E + \gamma_2 E + \cdots + \gamma_s E = \gamma_2 E + \cdots + \gamma_s E$$

olur. Buradan Sonuç 3.2.15 ile

$$0 \leq n.e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \leq l_R \left\{ \frac{E}{\gamma_2 E + \cdots + \gamma_s E} \right\} < \infty$$

elde edilir. O halde yukarıdaki eşitsizlikler $1/n$ ile çarpılırsa

$$0 \leq e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \leq \frac{1}{n}.\, l_R \left\{ \frac{E}{\gamma_2 E + \cdots + \gamma_s E} \right\} < \infty$$

olur. $n \to \infty$ iken limit alınırsa $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$ elde edilir. □

Şimdi $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = l_R \{E/(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E)\}$ eşitliğinin hangi koşullar altında sağlanacağı araştırılacaktır. İlk koşul aşağıdaki teorem ile verilebilir.

**Teorem 3.2.17.** *$E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. Şimdi eğer $0 \leq i \leq s-1$ için*

$$((\gamma_1 E + \gamma_2 E + \cdots + \gamma_i E) :_E \gamma_{i+1}) = \gamma_1 E + \cdots + \gamma_i E$$

*ise o zama*

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = l_R \left\{ \frac{E}{\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E} \right\}$$

*olur.*

*Kanıt.* $E_i = E/\left(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_i E\right)$ olsun. O zaman $0 \leq i \leq s-1$ için

$$\begin{aligned}(0 :_{E_i} \gamma_{i+1}) &= \frac{(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_i E :_E \gamma_{i+1})}{\gamma_1 E + \cdots + \gamma_i E} \\ &= \frac{\gamma_1 E + \cdots + \gamma_i E}{\gamma_1 E + \cdots + \gamma_i E} \\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $E_i/\gamma_{i+1} E_i \approx E_{i+1}$ elde edilir. Bu nedenle $i = 0$ için $E_0 = E/0 = E$ ve $(0 :_{E_0} \gamma_1) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) &= e_R(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E_1) \\ &= e_R\left(\gamma_3, \ldots, \gamma_s \mid E_2\right) \\ &\vdots \\ &= e_R(. \mid E_s) \\ &= l_R \left\{ \frac{E}{\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E} \right\}\end{aligned}$$

elde edilir. □

**Teorem 3.2.18.** *[1, Theorem 9, §7.4] $E$ bir Noether $R$–modül olsun. $R$ halkasının Jacobson radikaline ait olan $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem oluşturacak şekilde alınsın. O zaman aşağıdaki iki durum denktir:*

1. $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = l_R \left\{ \frac{E}{\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E} \right\}$'dir.
2. $0 \leq i \leq s-1$ *için* $(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_i E :_E \gamma_{i+1}) = \gamma_1 E + \cdots + \gamma_i E$ olur.

*Kanıt.* (2) $\Rightarrow$ (1) Teorem 3.2.17 ile elde edilir.

(1) $\Rightarrow$ (2) $s$ üzerine tümevarım uygulanacaktır. $s = 1$ için

$$l_R \left\{ \frac{E}{\gamma_1 E} \right\} = e_R(\gamma_1 \mid E) = e_R \left( . \mid \frac{E}{\gamma_1 E} \right) - e_R\left(. \mid (0 :_E \gamma_1)\right) = l_R \left\{ \frac{E}{\gamma_1 E} \right\} - l_R\left(0 :_E \gamma_1\right)$$

olur. Buradan $l_R(0 :_E \gamma_1) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $(0 :_E \gamma_1) = 0$ olur. Şimdi $s > 1$ olsun ve $s-1$ elemanlı bütün çokkatlı sistemler için hipotez doğru olsun. Ayrıca $n_1, \ldots, n_s$ pozitif tamsayılar olsun. O zaman

$$\begin{aligned} e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid E) &\leq l_R \left\{ \frac{E}{\gamma_1^{n_1} E + \cdots + \gamma_s^{n_s} E} \right\} \\ &\leq n_1.n_2 \ldots n_s l_R \left\{ \frac{E}{\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E} \right\} \\ &= n_1.n_2 \ldots n_s e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \\ &= e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid E) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan keyfi $n_1, \ldots, n_s$ pozitif tamsayıları için

$$e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid E) = l_R \left\{ \frac{E}{\gamma_1^{n_1} E + \cdots + \gamma_s^{n_s} E} \right\}$$

olur. $K = E/(0 :_E \gamma_1)$ olsun. O zaman $0 \to (0 :_E \gamma_1) \to E \to K \to 0$ tam dizisi ile

$$e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid E) = e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid K) - e_R\left(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid (0 :_E \gamma_1)\right)$$

elde edilir. Ayrıca

$$e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid (0 :_E \gamma_1)) = n_1.n_2. \ldots n_s e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid (0 :_E \gamma_1))$$

olduğundan Önerme 3.2.9 ile $e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid (0 :_E \gamma_1)) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid E) = e_R(\gamma_1^{n_s}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid K)$ olur. Teorem 3.2.11 ve

$$\frac{K}{\gamma_1^{n_1} K + \cdots + \gamma_s^{n_s} K} \approx \frac{E}{(0 :_E \gamma_1) + \gamma_1^{n_1} E + \cdots + \gamma_s^{n_s} E}$$

izomorfizması ile

$$\begin{aligned} l_R \left\{ \frac{E}{\gamma_1^{n_1} E + \cdots + \gamma_s^{n_s} E} \right\} &= e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid K) \\ &\leq l_R \left\{ \frac{K}{\gamma_1^{n_1} K + \cdots + \gamma_s^{n_s} K} \right\} \\ &= l_R \left\{ \frac{E}{(0 :_E \gamma_1) + \gamma_1^{n_1} E + \cdots + \gamma_s^{n_s} E} \right\} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\gamma_1^{n_1} E + \cdots + \gamma_s^{n_s} E \subseteq (0 :_E \gamma_1) + \gamma_1^{n_1} E + \cdots + \gamma_s^{n_s} E \subseteq E$$

olduğundan

$$\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E = (0 :_E \gamma_1) + \gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E$$

elde edilir. Dolayısıyla keyfi $n_1, \ldots, n_s$ pozitif tam sayıları için $(0 :_E \gamma_1) \subseteq \gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E$ olur. Şimdi $A = \gamma_1 R + \cdots + \gamma_s R$ olsun. O zaman her $n$ pozitif tamsayısı için $(0 :_E \gamma_1) \subseteq \gamma_1^n E + \cdots + \gamma_s^n E \subseteq A^n E$ elde edilir. Ayrıca $A$, $R$ halkasının Jacobson radikalinde kapsandığından Teorem 1.3.14 ile $\bigcap_{n=1}^{\infty} A^n E = 0$ olur. Bu nedenle $(0 :_E \gamma_1) = 0$ elde edilir. $\overline{E} = E/\gamma_1 E$ olsun. $(0 :_E \gamma_1) = 0$ ve $E/\left(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E\right) \approx \overline{E}/\left(\gamma_2 \overline{E} + \cdots + \gamma_s \overline{E}\right)$ olduğundan

$$\begin{aligned} e_R(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid \overline{E}) =& e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \\ =& l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E}\right\} \\ =& l_R\left\{\frac{\overline{E}}{\gamma_2 \overline{E} + \cdots + \gamma_s \overline{E}}\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde tümevarım kabülünden $1 \leq i \leq s$ için $\left(\gamma_2 \overline{E} + \cdots + \gamma_i \overline{E} :_{\overline{E}} \gamma_{i+1}\right) = \gamma_2 \overline{E} + \cdots + \gamma_i \overline{E}$ elde edilir. Ayrıca $\gamma_2 \overline{E} + \cdots + \gamma_i \overline{E} = \left(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_i E\right)/\gamma_1 E$ olur. O halde $1 \leq i < s$ için

$$(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_i E :_E \gamma_{i+1}) = \gamma_1 E + \cdots + \gamma_i E$$

elde edilir. □

## 3.3 Lech Limit Formülü

$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$ çokkatlılık sembolü limit olarak ele alındığında C. Lech ve P. Samuel tarafından verilen iki farklı formülle ifade edilmektedir. İlk olarak C. Lech'e ait olan limit fomülü ele alınacaktır.

$E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma$, $R$ halkasının bir elemanı olsun. Ayrıca $\gamma$ elemanı $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem oluştursun. O zaman

$$(0 :_E \gamma) \subseteq (0 :_E \gamma^2) \subseteq (0 :_E \gamma^3) \subseteq \ldots \tag{3.3.1}$$

dizisi $E$ modülünün alt modüllerinin bir artan dizisidir. $E$ Noether olduğundan 3.3.1 dizisi durmalıdır. Dolayısıyla her $n \geq m$ için $(0 :_E \gamma^n) = (0 :_E \gamma^m)$ olacak şekilde bir $m$ tamsayısı vardır. Bu nedenle $n \geq m$ iken

$$n.e_R(\gamma \mid E) = e_R(\gamma^n \mid E) = l_R(E/\gamma^n E) - l_R(0 :_E \gamma^n) = l_R(E/\gamma^n E) - l_R(0 :_E \gamma^m)$$

olur. Buradan her $n \geq m$ için $l_R\left(E/\gamma^n E\right) = n.e_R(\gamma \mid E) + C$ olur. Ayrıca elde edilen son eşitlikte $C$, $n$ tamsayısından bağımsızdır. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_R(E/\gamma^n E)}{n} = e_R(\gamma \mid E) \tag{3.3.2}$$

yazılabilir. 3.3.2 eşitliği Lech formülünün en basit durumudur. Genel sonuç ise aşağıdaki teorem ile verilecektir.

**Teorem 3.3.1.** *[1, Theorem 10, §7.5] E bir Noether R–modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, E üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. O zaman*

$$\lim_{\min(n_i)\to\infty} \frac{l_R\{E/(\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E)\}}{n_1.n_2\ldots n_s} = e_R(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \tag{3.3.3}$$

*elde edilir.*

*Kanıt.* $s$ üzerine tümevarım uygulanacaktır. $s = 1$ durumu 3.3.2 eşitliğinde gösterildi. O halde $s > 1$ olsun. Ayrıca 3.3.3 eşitliği $s-1$ elemanlı çokkatlı sistemler için doğru olsun. Şimdi Lemma 3.2.10 ile $F = E/(0 :_E \gamma_1^p)$ olmak üzere $(0 :_F \gamma_1) = 0$ olacak şekilde yeterince büyük bir $p$ tamsayısı alınabilir. Buradan

$$0 \to (0 :_E \gamma_1^p) \to E \to E/(0 :_E \gamma_1^p) = F \to 0$$

tam dizisi ile

$$e_R(\gamma_{1\cdots s} \mid E) = e_R(\gamma_{1\cdots s} \mid F) + e_R(\gamma_{1\cdots s} \mid (0 :_E \gamma_1^p))$$

elde edilir. Ayrıca $\gamma_1^p(0 :_E \gamma_1^p) = 0$ olduğundan Önerme 3.2.9 ile $e_R(\gamma_{1\cdots s} \mid (0 :_E \gamma_1^p)) = 0$ olur. Dolayısıyla

$$e_R(\gamma_{1\cdots s} \mid E) = e_R(\gamma_{1\cdots s} \mid F) \tag{3.3.4}$$

olur. Şimdi

$$\frac{F}{\gamma_1^{n_1}F + \cdots + \gamma_s^{n_s}F} \approx \frac{E}{(0 :_E \gamma_1^p) + \gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E}$$

izomorfizması ile

$$\begin{aligned}
0 &\leq l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E}\right\} - l_R\left\{\frac{F}{\gamma_1^{n_1}F + \cdots + \gamma_s^{n_s}F}\right\} \\
&= l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E}\right\} - l_R\left\{\frac{E}{(0 :_E \gamma_1^p) + \gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E}\right\} \\
&= l_R\left\{\frac{(0 :_E \gamma_1^p) + \gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E}{\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E}\right\} \\
&= l_R\left\{\frac{(0 :_E \gamma_1^p)}{(0 :_E \gamma_1^p) \cap (\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E)}\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\gamma_2^{n_2}(0 :_E \gamma_1^p) + \cdots + \gamma_s^{n_s}(0 :_E \gamma_1^p) \subseteq (0 :_E \gamma_1^p) \cap (\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E)$ olduğundan Önerme 3.1.2 ile $C = l_R\left\{\frac{(0:_E\gamma_1^p)}{\gamma_2\left(0:_E\gamma_1^p\right)+\cdots+\gamma_s\left(0:_E\gamma_1^p\right)}\right\}$ olmak üzere

$$l_R\left\{\frac{(0:_E \gamma_1^p)}{(0:_E \gamma_1^p)\cap(\gamma_1^{n_1}E+\cdots+\gamma_s^{n_s}E)}\right\}\leq n_2n_3\ldots n_s l_R\left\{\frac{(0:_E \gamma_1^p)}{\gamma_2\,(0:_E \gamma_1^p)+\cdots+\gamma_s\,(0:_E \gamma_1^p)}\right\}$$
$$= n_2n_3\ldots n_s C$$

olsun.

İddia: $C$ sonludur: $\gamma_2,\ldots,\gamma_s$ elemanlarının $(0:_E \gamma_1^p)$ üzerinde bir çokkatlı sistem olduğunu göstermek yeterlidir. $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_s$ elemanları $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olduğundan $E$–modülünün her altmodülü üzerinde bir çokkatlı sistem olur. Sonuç 3.2.14 ile $\gamma_1^p,\ldots,\gamma_s$ elemanları $(0:_E \gamma_1^p)$ altmodülü üzerinde bir çokkatlı sistemdir. Ayrıca $\gamma_1^p(0:_E \gamma_1^p)=0$ olduğundan $\gamma_2,\ldots,\gamma_s$ elemanları $(0:_E \gamma_1^p)$ üzerinde bir çokkatlı sistem olur. Bu gözlemler ile

$$0\leq\frac{l_R\left\{E/(\gamma_1^{n_1}E+\cdots+\gamma_s^{n_s}E)\right\}-l_R\left\{F/(\gamma_1^{n_1}F+\cdots+\gamma_s^{n_s}F)\right\}}{n_1.n_2\ldots n_s}\leq\frac{C}{n_1}\qquad(3.3.5)$$

elde edilir. 3.3.5 eşitsizliğinde $n_1\to\infty$ iken limite geçilsin. O halde 3.3.4 eşitliği ile

$$\lim_{\min(n_i)\to\infty}\frac{l_R\{E/(\gamma_1^{n_1}E+\cdots+\gamma_s^{n_s}E)\}}{n_1.n_2\ldots n_s}=e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s\mid E)$$

yerine

$$\lim_{\min(n_i)\to\infty}\frac{l_R\{F/(\gamma_1^{n_1}F+\cdots+\gamma_s^{n_s}F)\}}{n_1.n_2\ldots n_s}=e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s\mid F)$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Dolayısıyla kanıtın kalan kısmında $(0:_E \gamma_1)=0$ alınabilir. $\overline{E}=E/\gamma_1E$ olsun. O zaman Sonuç 3.2.15, Önerme 3.1.2 ve

$$\frac{E}{\gamma_1E+\gamma_2^{n_2}E+\cdots+\gamma_s^{n_s}E}\approx\frac{\overline{E}}{\gamma_2^{n_2}\overline{E}+\cdots+\gamma_s^{n_s}\overline{E}}$$

izomorfizması ile

$$\begin{aligned}0&\leq n_1.n_2\ldots n_s e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s\mid E)\\&\leq l_R\left\{E/(\gamma_1^{n_1}E+\cdots+\gamma_s^{n_s}E)\right\}\\&\leq n_1.l_R\left\{E/(\gamma_1E+\gamma_2^{n_2}E+\cdots+\gamma_s^{n_s}E)\right\}\\&=n_1.l_R\left\{\overline{E}/(\gamma_2^{n_2}\overline{E}+\cdots+\gamma_s^{n_s}\overline{E})\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s\mid E)\leq\frac{l_R\left\{E/(\gamma_1^{n_1}E+\cdots+\gamma_s^{n_s}E)\right\}}{n_1.n_2\ldots n_s}\leq\frac{l_R\left\{\overline{E}/(\gamma_2^{n_2}\overline{E}+\gamma_s^{n_s}\overline{E})\right\}}{n_2\ldots n_s}\qquad(3.3.6)$$

olur. 3.3.6 eşitsizliğinde $\min(n_i)\to\infty$ iken limite geçilsin. O halde tümevarım kabülünden

$$e_R(\gamma_1,\dots,\gamma_s \mid E) \leq \lim_{\min(n_i)\to\infty} \frac{l_R\left\{E/\gamma_1^{n_1}E+\cdots+\gamma_s^{n_s}E\right\}}{n_1.n_2\dots n_s} \leq e_R(\gamma_2,\dots,\gamma_s \mid \overline{E})$$

olur. Ayrıca $(0 :_E \gamma_1) = 0$ olduğundan $e_R(\gamma_1,\dots,\gamma_s \mid E) = e_R(\gamma_2,\dots,\gamma_s \mid \overline{E})$ elde edilir. □

## 3.4 Yerelleştirme ve Genişleme

Bu kısımda $R$ bir halka, $E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1,\dots,\gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olarak alınacaktır. Bu durumda $E/\left(\gamma_1E+\cdots+\gamma_sE\right)$ bir sonlu üretilmiş $R$–modül olur. Ayrıca bu bölüm modülü sonlu uzunluğa sahiptir. Buradan $I = \operatorname{Ann}_R\left\{E/\left(\gamma_1E+\cdots+\gamma_sE\right)\right\}$ olmak üzere $R/I$ bir Artin halka olur. Bu nedenle $I$ idealini içeren sonlu sayıda asal ideal vardır ve bu asal ideallerin tümü maksimaldir. Dolayısıyla 1.4.3 gereğince $I$ idealini içeren asal idealler ile

$$(\operatorname{Ann}_R E, \gamma_1,\dots,\gamma_s) = \operatorname{Ann}_R E + (\gamma_1,\dots,\gamma_s)$$

idealini içeren asal idealler aynıdır. Bu nedenle $(\operatorname{Ann}_R E, \gamma_1,\dots,\gamma_s)$ idealini içeren sonlu sayıda asal ideal vardır. Bu ideallerin tümü maksimaldir.

İddia 1: $R/(\operatorname{Ann}_R E, \gamma_1,\dots,\gamma_s)$ bir Artin halkadır:

$$\frac{R}{\operatorname{Ann}_R E + (\gamma_1,\dots,\gamma_s)} \approx \frac{R/\operatorname{Ann}_R E}{\operatorname{Ann}_R E + (\gamma_1,\dots,\gamma_s)/\operatorname{Ann}_R E}$$

olduğundan $R/\left(\operatorname{Ann}_R E + (\gamma_1,\dots,\gamma_s)\right)$ bir Noether halkadır. Sonuç 1.3.11 (0) idealine uygulanırsa $R/\left((\operatorname{Ann}_R E, \gamma_1,\dots,\gamma_s)\right)$ halkası Artin olur.

Şimdi $\overline{R} = R/\operatorname{Ann}_R E$ ve $\overline{\gamma}_i$ de $\gamma_i$ elemanının $\overline{R}$ halkasındaki görüntüsü olsun. O halde

$$\frac{\overline{R}}{(\overline{\gamma}_1,\dots,\overline{\gamma}_s)} \approx \frac{R}{(\operatorname{Ann}_R E, \gamma,\dots,\gamma_s)}$$

olduğundan $\overline{R}/(\overline{\gamma}_1,\dots,\overline{\gamma}_s)$ bir Artin halkadır. Bu nedenle $l_R\left\{\overline{R}/(\overline{\gamma}_1,\dots,\overline{\gamma}_s)\right\} < \infty$ olur. Ayrıca $\overline{R} = R/\operatorname{Ann}_R E$ bir Noether halkadır. $\overline{R}$ halkası kendisi üzerinde modül olarak alınırsa $\overline{\gamma}_1,\dots,\overline{\gamma}_s$ elemanları $\overline{R}$ üzerinde bir çokkatlı sistem olur. Dolayısıyla $e_{\overline{R}}(\overline{\gamma}_1,\dots,\overline{\gamma}_s \mid \overline{R})$ tanımlıdır.

$E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1,\dots,\gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. $M$ ile $R$ halkasının bir maksimal ideali gösterilsin. $R$'den, $R$'nin $M$ ile yerelleştirilmesi ile elde edilen $R_M$ halkasına olan, $\phi_M : R \to R_M$ doğal dönüşümü bir halka homomorfizmasdır. Ayrıca

$$0 \to (\gamma_1,\dots,\gamma_s)E \to E \to E/(\gamma_1,\dots,\gamma_s)E \to 0$$

tam dizisi ile

$$0 \to ((\gamma_1, \ldots, \gamma_s)E)_M \to E_M \to (E/(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)E)_M \to 0$$

tam dizisi elde edilir. Bu nedenle

$$\left(\frac{E}{(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)E}\right)_M \approx \frac{E_M}{((\gamma_1, \ldots, \gamma_s)E)_M}$$

$R_M$–izomorfizması vardır. Ayrıca Önerme 1.2.4'nin (2) ve (3) şıkları gereğince

$$((\gamma_1, \ldots, \gamma_s)E)_M = (\gamma_1, \ldots, \gamma_s)_M E_M = ((\phi_M(\gamma_1), \ldots, \phi_M(\gamma_s))\, E_M$$

olduğu söylenebilir. Bu nedenle

$$\left(\frac{E}{(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)E}\right)_M \approx \frac{E_M}{(\phi_M(\gamma_1), \ldots, \phi_M(\gamma_s))E_M}$$

olur. Buradan Teorem 1.2.5 gereğince

$$l_{R_M}\left\{\frac{E}{(\phi_M(\gamma_1), \ldots, \phi_M(\gamma_s))E_M}\right\} \leq l_R\left\{\frac{E}{(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)E}\right\} < \infty$$

yazılabilir.

Şimdi yukarıda yapılan gözlemler birleştirilirse, $E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem ise $M$ maksimal ideali keyfi alındığından, her $M$ maksimal ideali için $E_M$ bir Noether $R_M$–modül ve $\phi_M(\gamma_1), \ldots, \phi_M(\gamma_s)$, $E_M$ üzerinde bir çokkatlı sistem olduğu söylenebilir. Buradan yukarıdaki uyarılar dikkate alınırsa, koşullar belirtildiği gibi ise, $e_{R_M}(\phi_M(\gamma_1), \ldots, \phi_M(\gamma_s) \mid E_M)$ her $M$ maksimal ideali için tanımlıdır.

İddia 2: Eğer $\operatorname{Ann}_R E \nsubseteq M$ ise o zaman $E_M = 0$ ve $e_{R_M}(\phi_M(\gamma_1), \ldots, \phi_M(\gamma_s) \mid E_M) = 0$ olur: $\operatorname{Ann}_R E \nsubseteq M$ ise o zaman $r \notin M$ iken $r \in \operatorname{Ann}_R E$ olacak şekilde en az bir $r \in R$ vardır. $e/m \in E_M$ olsun.

$$\frac{e}{m} = \frac{re}{rm} = \frac{0}{rm} = 0$$

ve $e/m$, $E_M$ modülünün keyfi elemanı olduğundan iddia elde edilir.

Şimdi eğer $(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) \nsubseteq M$ ise o zaman $(\phi_M(\gamma_1), \ldots, \phi_M(\gamma_s)) = R_M$ ve bu nedenle

$$E_M = (\phi_M(\gamma_1), \ldots, \phi_M(\gamma_s))\, E_M$$

olur. Dolayısıyla Sonuç 3.2.12 gereğince $e_{R_M}(\phi_M(\gamma_1), \ldots, \phi_M(\gamma_s) \mid E_M) = 0$ olur. Geriye

$$(\operatorname{Ann}_R E, \gamma_1, \ldots, \gamma_s) \subseteq M$$

durumunu incelemek kalır. Bu durum da daha önce incelendiğinden

$$e_{R_M}\left(\phi_M(\gamma_1),\ldots,\phi_M(\gamma_s) \mid E_M\right) \neq 0$$

koşulunu sağlayan sadece sonlu sayıda $M$ maksimal ideali vardır, bunlar da $(\operatorname{Ann}_R E, \gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ idealini içeren maksimal ideallerdir.

**Teorem 3.4.1.** *(Çokkatlılar için yerelleştirme ilkesi)[5, Theorem 3] $R$ bir halka, $E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. O zaman*

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) = \sum_M e_{R_M}\left(\phi_M(\gamma_1),\ldots,\phi_M(\gamma_s) \mid E_M\right)$$

*olur. Burada $M$'ler $R$–halkasının maksimal idealleri ve $\phi_M$ dönüşümü de $R$'den $R_M$ halkasına standart dönüşümdür.*

Bu teorem birazdan kanıtlanacak genişleme formülünün özel bir durumudur. Dolayısıyla ayrı bir kanıt verilmeyecektir.

Şimdi $S$ bir halka olmak üzere, $R$ halkasının bir integral genişlemesi olsun. $\Pi$ ile $S$'nin bir maksimal ideali gösterilsin. Teorem 1.1.32 ile $\Pi \cap R$, $R$ halkasının bir maksimal ideali olur. $S/\Pi$ bir $R$–modüldür ve $\Pi \cap R$ ile sıfırlanır. Bu yüzden $R/(\Pi \cap R)$ cismi üzerinde $S/\Pi$ modülü bir vektör uzay olarak göz önüne alınabilir. $\left[\frac{S}{\Pi} : \frac{R}{\Pi \cap R}\right]$ ile bu vektör uzayının boyutu gösterilecektir. Son olarak herhangi bir $S$–modülün bir $R$–modül olduğu şu şekilde gösterilebilir: $R \subseteq S$, $r \in S$ ve $e \in E$ olsun. O zaman $re \in E$ olacağı için $E$ bir $R$–modül olur. Bu gözlemlerden sonra çokkatlılar için genişleme formülü ele alınabilir.

**Teorem 3.4.2.** *[5, Theorem 6] $S$ bir halka olmak üzere, $R$ halkasının bir integral genişlemesi olsun. $E$ bir $S$–modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $R$ halkasının elemanları olsun. Ayrıca*

1. *$E$ hem $R$–modül hem de $S$– modül olarak Noetherdir ve*

2. *$E$ hem $R$–modül hem de $S$–modül olarak göz önüne alındığında $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistemdir*

*koşulları sağlansın. O halde*

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) = \sum_{\Pi} e_{S_\Pi}\left(\phi_\Pi(\gamma_1),\ldots,\phi_\Pi(\gamma_s) \mid E_\Pi\right)\left[\frac{S}{\Pi} : \frac{R}{\Pi \cap R}\right]$$

*olur. Burada $\Pi$, $S$ halkasının maksimal idealleri arasında değişmek üzere $\phi : S \to S_\Pi$ standart dönüşümdür.*

*Kanıt.* İlk olarak eğer $\Pi$ ideali $e_{S_\Pi}\left(\phi_\Pi(\gamma_1),\ldots,\phi_\Pi(\gamma_s) \mid E\right) = 0$ olacak şekilde alınırsa ve $\left[\frac{S}{\Pi} : \frac{R}{\Pi \cap R}\right] = \infty$ ise o zaman çarpımları sıfır olarak alınacaktır. Ayrıca bu teoremde

$S = R$ ve $\Pi$ yerine de $\Pi \cap R$ alınırsa o zaman Teorem 3.4.1 elde edilebilir. Son olarak teoremin ifadesindeki (1) ve (2) koşulları yerine aşağıdaki durum alınabilir:

E bir $R$–modül olarak göz önüne alındığında Noether ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistemdir. Bu şu şekilde görülebilir: $E$, $S$–modül olarak Noether ve

$$l_S \left\{ \frac{E}{\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E} \right\} \leq l_R \left\{ \frac{E}{\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E} \right\}$$

olduğundan $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E$, $S$–modülü üzerinde de bir çokkatlı sistem olur. Bu gözlemlerden sonra kanıta başlanabilir.

Kanıt $s$–üzerine tümevarım uygulanarak yapılacaktır. $s = 0$ olsun. O zaman

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = l_R(E)$$

ve

$$e_{S_\Pi} \left( \phi_\Pi(\gamma_1), \ldots, \phi_\Pi(\gamma_s) \mid E_\Pi \right) = l_{R_\Pi}(E_\Pi)$$

olur. Teorem 1.2.10 gereğince

$$l_R(E) = \sum_{\Pi} l_{R_\Pi}(E_\Pi) \left[ \frac{S}{\Pi} : \frac{R}{\Pi \cap R} \right]$$

olduğundan teorem $s = 0$ durumunda doğru olur. Şimdi $s \geq 1$ olsun ve $s - 1$ elemanlı çokkatlı sistemler için teorem doğru olsun. $E/\gamma_1 E$ ve $(0 :_E \gamma_1)$ hem $R$ hem de $S$–modül olarak ele alınabilir. Ayrıca $(E/\gamma_1 E)_\Pi \approx E_\Pi / \phi_\Pi(\gamma_1) E_\Pi$, $R_\Pi$–modül izomorfizması ve $(0 :_E \gamma_1)_\Pi = (0 :_{E_\Pi} \phi_\Pi(\gamma_1))$ de vardır. Bu nedenle tümevarım hipotezinden

$$e_R \left( \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid \frac{E}{\gamma_1 E} \right) = \sum_{\Pi} e_{S_\Pi} \left( \phi_\Pi(\gamma_2), \ldots, \phi_\Pi(\gamma_s) \mid \frac{E_\Pi}{\phi_\Pi(\gamma_1) E_\Pi} \right) \left[ \frac{S}{\Pi} : \frac{R}{\Pi \cap R} \right]$$

ve

$$e_R \left( \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid (0 :_E \gamma_1) \right) = \sum_{\Pi} e_{S_\Pi} \left( \phi_\Pi(\gamma_2), \ldots, \phi_\Pi(\gamma_s) \mid (0 :_{E_\Pi} \phi_\Pi(\gamma_1)) \right) \left[ \frac{S}{\Pi} : \frac{R}{\Pi \cap R} \right]$$

olur. Buradan 3.2.2 eşitliği de göz önüne alınırsa o zaman

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = \sum_{\Pi} e_{S_\Pi} \left( \phi_\Pi(\gamma_1), \ldots, \phi_\Pi(\gamma_s) \mid E_\Pi \right) \left[ \frac{S}{\Pi} : \frac{R}{\Pi \cap R} \right]$$

elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır. □

**Önerme 3.4.3.** *[1, Proposition 7, §7.8] $R$ bir yerel halka ve $R$–halkasının birim olmayan $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları $R$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. O zaman $s \geq \dim R$ olur. Ayrıca $s = \dim R$'dir ancak ve ancak $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid R) > 0$ elde edilir.*

*Kanıt.* $\dim R = d$ olsun $M$ $R$–halkasının bir maksimal ideali olsun. $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları $R$ üzerinde bir çokkatlı sistem olduğundan $l_R\{R/(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)\} < \infty$ olur. Sonuç 1.3.11 ile $(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)$ idealini içeren her asal ideal maksimal olur. Ancak $M$, $R$–halkasının tek maksimal idealidir. Bu nedenle $(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)$ bir $M$–asıl ideal olur. Dolayısıyla Teorem 1.4.9 gereğince $s \geq d$ olur. Kanıtın kalan kısmında $s = d$ ve $s > d$ durumları ayrı ayrı incelenecektir.

$s = d$ olsun. Bu durum için $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ elemanları bir parametreler sistemi olur. $e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) > 0$ olduğu gösterilsin. Bu ise $s$ üzerine tümevarım uygulanarak yapılacaktır. $s = 0$ durumunda

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid R) = l_R(R) > 0$$

olacağı için bu durumda hipotez açıktır. Şimdi $s \geq 1$ olsun ve $s-1$ elemanlı çokkatlı sistemler için tümevarım hipotezi doğru olsun. Ayrıca $\dim R = s$ olsun. Bu durumda $\dim(R/P) = s$ olacak şekilde $R$'nin bir $P$ asal ideali vardır.

$$0 \to P \to R \to R/P \to 0$$

tam dizisinden

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid R) = e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid P) + e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid R/P)$$

elde edilir. O halde $\phi : R \to R/P$ doğal dönüşüm olmak üzere

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid R) \geq e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid R/P) = e_{R/P}(\phi(\gamma_1),\ldots,\phi(\gamma_s) \mid R/P)$$

olur. Bu nedenle $e_{R/P}(\phi(\gamma_1),\ldots,\phi(\gamma_s) \mid R/P) > 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Dolayısıyla kanıtın kalan kısmında $R$ halkası bir tamlık bölgesi olarak alınabilir. Fakat bu durumda $\gamma_1$, $R$ halkasının sıfır bölen olmayan bir elemanıdır. Bu nedenle $(0 :_E \gamma_1) = 0$ olur. Böylece $\overline{\gamma}_i$'ler $\gamma_i$ elemanlarının $R/(\gamma_i)$ halkasındaki görüntüleri olmak üzere

$$\begin{aligned} e_R(\gamma_1\ldots,\gamma_s \mid R) &= e_R(\gamma_2,\ldots,\gamma_s \mid R/(\gamma_1)) - e_R(\gamma_2,\ldots,\gamma_s \mid (0 :_E \gamma_1)) \\ &= e_R(\gamma_2,\ldots,\gamma_s \mid R/(\gamma_1)) \\ &= e_{R/(\gamma_1)}(\overline{\gamma}_2,\ldots,\overline{\gamma}_s \mid R/(\gamma_1)) \end{aligned}$$

yazılabilir. $\gamma_i$ elemanları birim olmadığından ve $R$ yerel halkasının tek maksimal ideali $M$ olduğundan bu elemanlar $M$ idealine aittir. Burada $\gamma_i$ elemanları sıfır bölen olmadığından Önerme 1.4.11 ile $R/(\gamma_1)$, $s-1$ boyutlu bir yerel halkadır. Ayrıca $\overline{\gamma}_2,\ldots,\overline{\gamma}_s$ bu halkada birim olmayan elemanlardır. Bu nedenle tümevarım hipotezinden $e_{R/(\gamma_1)}(\overline{\gamma}_2,\ldots,\overline{\gamma}_s \mid R/(\gamma_1)) > 0$ olur.

Şimdi $s > d$ olsun ve $e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid R) = 0$ olduğu gösterilsin. Bunun için $d$

üzerine tümevarım uygulanacaktır. Eğer $d = 0$ ise o zaman $R$ boyutu sıfır olan bir yerel halkadır. Dolayısıyla tek maksimal ideali vardır. Bu ideal $M$ olsun. O halde $(0)$, $R$ halkasının bir tanım ideali olur. Dolayısıyla $M^n \subseteq (0)$ olacak şekilde bir $n$ tamsayısı vardır. $\gamma_1 \in M$ olduğundan $\gamma_1^n = 0$ elde edilir. O halde $\gamma_1$ elemanı üstel sıfır olur. Dolayısıyla $\gamma_1^n R = 0$ olur. Bu nedenle Önerme 3.2.9 gereğince $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid R) = 0$ elde edilir. Şimdi $d \geq 1$ ve $d$ değerinden küçük boyutlu yerel halkalar için hipotez doğru olsun. Eğer $\gamma_1$ üstel sıfır ise o zaman Önerme 3.2.9 gereğince $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid R) = 0$ olur. Dolayısıyla $\gamma_1$ üstel sıfır iken aranılan sonuç elde edilir.

$\gamma_1$ üstel sıfır olmasın. $\gamma_1$, $R' = R/(0 :_E \gamma_1^p)$ üzerinde bir sıfır bölen olmayacak şekilde bir $p$ tamsayısı seçilsin. Bu seçimin yapılabileceği Lemma 3.2.10 sayesinde söylenebilir. Ayrıca $\gamma_1$ üstel sıfır olmadığından $R'$, $\dim R' \leq \dim R < s$ olacak şekilde bir yerel halka olur. Şimdi Önerme 3.2.9 ile $e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid (0 :_E \gamma_1^p)\right) = 0$ olur. Sonuç olarak $\gamma_i'$ elemanları $\gamma_i$'lerin $R'$ halkasındaki görüntüleri olmak üzere

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid R) = e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid R') = e_{R'}(\gamma_1', \ldots, \gamma_s' \mid R')$$

elde edilir. $\gamma_1', \ldots, \gamma_s'$ elemanları $R'$ halkasında birim ve $\gamma_1'$ sıfır bölen değildir. Bu nedenle kanıtın kalan kısmında $\gamma_1$ elemanı $R$ halkasında sıfır bölen olmayan bir eleman olarak alınabilir. O zaman $\overline{R} = R/(\gamma_1)$ ve $\overline{\gamma}_i$ elemanları $\gamma_i$'lerin $\overline{R}$ halkasındaki görüntüleri olmak üzere

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid R) = e_R\left(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid \frac{R}{(\gamma_1)}\right) = e_{\overline{R}}(\overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_s \mid \overline{R})$$

elde edilir. Fakat $\overline{R}$ bir yerel halka, $\overline{\gamma}_i$ elemanları birim değil ve $\dim \overline{R} = \dim R - 1 < s - 1$ olur. Bu nedenle tümevarım hipotezinden $e_{\overline{R}}(\overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_s \mid \overline{R}) = 0$ elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır. □

**Önerme 3.4.4.** *$R$ bir halka, $E$ bir Noether $R$–modül ve $s \geq 0$ için $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E$–üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. $(\operatorname{Ann}_R E, \gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ idealini içeren her $M$ maksimal ideali için* $\operatorname{Rank}(M/\operatorname{Ann}_R E) < s$ *olduğu varsayılsın. O zaman $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$ olur.*

*Kanıt.* $\overline{R} = R/\operatorname{Ann}_R E$ ve $\overline{\gamma}_i$, $\gamma_i$ elemanının $\overline{R}$ halkasındaki doğal görüntüsü olsun. O zaman daha önce yapılan uyarılar ile $\overline{R}$ bir Noether halkadır ve $\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_s$ elemanları $\overline{R}$ halkası üzerinde bir çokkatlı sistemdir. Ayrıca $(\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_s)$ idealini içeren her $\overline{M}$ maksimal ideali için $\operatorname{Rank} \overline{M} = \operatorname{Rank}(M/\operatorname{Ann}_R E) < s$ ve

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = e_{\overline{R}}(\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_s \mid E)$$

olur. Sonuç olarak $e_{\overline{R}}(\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_s \mid E) = 0$ olduğu gösterilirse önerme de kanıtlanmış olur. $E$ bir $\overline{R}$–modül olarak sonlu üretilmiştir. Dolayısıyla $m$ tane eleman tarafından üretilsin. O zaman $E$ modülünün $\underbrace{\overline{R} \oplus \overline{R} \oplus \ldots \oplus \overline{R}}_{m}$ dik toplamının bir homomorfik görüntüsü olduğu söylenebilir. Sonuç olarak $e_{\overline{R}}(\overline{\gamma}_1, \dots, \overline{\gamma}_s \mid \overline{R}) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Buradan kanıtın kalan kısmında $R$ halkası Noether ve $E = R$ kabul edilebileceği söylenebilir. Bunlar da göz önüne alınırsa Teorem 3.4.1 gereğince

$$e_R(\gamma_1, \dots, \gamma_s \mid R) = \sum_M e_{R_M} \left(\phi_M(\gamma_1), \dots, \phi_M(\gamma_s) \mid R_M\right)$$

olur. Ayrıca bu toplamda sadece $(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ idealini içeren $M$ maksimal idealleri göz önüne alındı. Bu şekildeki bir $M$ ideali için $\phi_M(\gamma_1), \dots, \phi_M(\gamma_s)$'ler $R_M$'de birim değildir ve $\dim R_M = \operatorname{Rank} M < s$'dir. Bu nedenle Önerme 3.4.4 gereğince

$$e_{R_M} \left(\phi_M(\gamma_1), \dots, \phi_M(\gamma_s) \mid R_M\right) = 0$$

olur. Böylece kanıt tamamlanır. □

## 3.5 Çokkatlıların Birleşme Özelliği

Bu kısımda $R$ bir Noether halka olmak üzere $R$ üzerinde bir çokkatlı sistem oluşturan, $R$'nin $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ elemanları ile ilgilenecektir. $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, $R$ üzerinde bir çokkatlı sistem olduğundan

$$l_R \left\{R/(\gamma_1, \dots, \gamma_s)\right\} < \infty$$

olur. Dolayısıyla $R/(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ bir Artin halkasıdır. Bu nedenle $e_R(\gamma_1, \dots, \gamma_s \mid E)$, her sonlu üretilmiş $E$, $R$–modülü için tanımlıdır. Ayrıca $(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ idealini içeren herhangi bir asal ideal $R$ halkasının bir maksimal idealidir. Dolayısıyla bu asal idealler $(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ idealinin birer minimal asal idealidir. O halde Teorem 1.4.2 gereğince eğer $M$ böyle bir asal ideal ise o zaman $\operatorname{Rank} M \leq s$ olur.

**Önerme 3.5.1.** *$R$ bir Noether halka, $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, $R$ üzerinde bir çokkatlı sistem ve $E \neq 0$ sonlu üretilmiş bir $R$–modül olsun. Eğer* $\operatorname{Rank}(\operatorname{Ann}_R E) > 0$ *ise o zaman*

$$e_R(\gamma_1, \dots, \gamma_s \mid E) = 0$$

*olur. Özel olarak eğer $A$,* $\operatorname{Rank} A > 0$ *olan bir öz ideal ise o zaman*

$$e_R\left(\gamma_1, \dots, \gamma_s \mid R/A\right) = 0$$

*elde edilir.*

*Kanıt.* Eğer $M$, $(\operatorname{Ann}_R E, \gamma_1, \dots, \gamma_s)$ idealini içeren bir maksimal ideal ise o zaman $M$, $(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ idealini içeren bir maksimal idealdir. Bu nedenle yukarıda yapılan açıklamalardan dolayı $\operatorname{Rank} M \leq s$ olur. Fakat o zaman $\operatorname{Rank}(\operatorname{Ann}_R E) > 0$ olduğundan $\operatorname{Rank}(M/\operatorname{Ann}_R E) < s$ elde edilir. Önerme 3.4.4 gereğince

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$$

olur. Özel olarak $A$ bir öz ideal ve Rank $A > 0$ ise o zaman

$$e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid R/A\right) = 0$$

olduğunu söylemek için $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanlarının $R/A$ halkası üzerinde çokkatlı sistem olduğunu söylemek yeterlidir. $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $R$ üzerinde bir çokkatlı sistem olduğundan

$$0 \to A \to R \to R/A \to 0$$

tam dizisi ile $R/A$ üzerinde de çokkatlı sistem olduğu elde edilir. $R$, Noether ve $R/A$ sonlu üretilmiş olur dolayısıyla Önerme 3.4.4 uygulanabilir. Böylece kanıt tamamlanır. □

**Önerme 3.5.2.** *$R$ bir Noether halka, $E$ sonlu üretilmiş bir $R$–modül ve $K \lneq E$ olsun. O zaman $E$'nin elemanlarının öyle bir sonlu $e_1, \ldots, e_m$ dizisi vardır ki $E_i = K + Re_1 + Re_2 + \cdots + Re_i$ ve $E_0 = K$ için*

1. *$E_m = E$ ve*
2. *her $i = 1, \ldots, m$ için $P_i$ bir asal ideal olmak üzere $(E_{i-1} : e_i) = P_i$*

*olur. Buna göre her $i = 1, \ldots, m$ için $R$–modüllerin bir $R/P_i \approx E_i/E_{i_{-1}}$ izomorfizması vardır.*

*Yukarıdaki gibi bir*

$$K = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_m = E \tag{3.5.1}$$

*dizisine $E$'nin bir asal filtrasyonu denir. $S = \{P_1, \ldots, P_m\}$ kümesi $E$ ile tek türlü belirli değildir. Ancak $S$'nin minimal elemanları ile* Ass$(E)$*'nin minimal elemanları aynıdır. Eğer $P$,* Ass$(E)$*'nin bir minimal elemanı ise o zaman $P$ idealinin $E$'nin herhangi bir asal filtrasyonunda görülme sayısı $l_{R_P}(M_P)$'dir.*

*Kanıt.* $\Omega$ ile $e \in E$, $e \notin K$ olacak şekilde $(K : e)$ şeklindeki bütün ideallerin kümesi gösterilsin. $E$ Noether olduğundan alt modüllerin boştan farklı her ailesi bir maksimal eleman içerir. Dolayısıyla $(K : e_1) = P_1$, $\Omega$ kümesinin maksimal elemanı olmak üzere $e_1 \in E$ ve $e_1 \notin K$ olacak şekilde bir $e_1$ elemanı vardır.

İddia: $P_1$ ideali asaldır: $a, b \in R$ için $ab \in P_1$ ve $b \notin P_1$ olsun. O zaman $b \notin P_1 = (K : e_1)$ olduğunudan $be_1 \notin K$ olur. Ancak $(K : e_1) \subseteq (K : be_1)$'dir. Ayrıca $e_1$ elemanı, $(K : e_1)$ bu şekildeki ideallerin maksimali olacak şekilde alınmıştı. Dolayısıyla $(K : e_1) = (K : be_1) = P_1$ olur. Buradan $ab \in P_1$ olduğundan $abe_1 \in K$ elde edilir.

Sonuç olarak $a \in (K : be_1) = P_1$ olur. Bu nedenle $P_1$ ideali asaldır. Dolayısıyla iddia doğrudur.

$K + Re_1 = E_1$ alt modülü $K = E_0$ alt modülünü öz olarak kapsar. Eğer $E_1 = E$ ise o zaman diziyi devam ettirmeye gerek yoktur. Eğer değilse o zaman $E_1$ yerine $K$ yazarak devam edilebilir. $(K : e_2) = P_2$ ve $P_2$ bir asal ideal olacak şekilde bir $e_2 \in E$ vardır. O zaman $E_2 = K + Re_1 + Re_2$, $E_1$ alt modülünü öz olarak kapsar. Eğer $E_2 = E$ ise o zaman dizi durur. Eğer değilse $(E_2 : e_3) = P_3$ ve $P_3$ asal ideal olacak şekilde bir $e_3 \in E$ bulunabilir. Bu şekilde devam edilirse sonuç olarak $E_M = E$ olacak şekilde bir $E_M$ modülüne ulaşılır. Aksi halde $E_1, E_2, \ldots$ öz olarak artan sonsuz bir dizi olur. Bu durum ise $E$ modülünün Noether olmasıyla çelişir. Şimdi $1 \leq i \leq m$ olsun ve $\overline{e}_i$ ile $e_i$ elemanının $E_i/E_{i-1}$ bölüm modülündeki görüntüsü gösterilsin. $\psi : R \to E_i/E_{i-1}$, $\psi(r) = r\overline{e}_i$ dönüşümü çekirdeği $P_i$ olan bir epimorfizmadır. Bu nedenle izomorfizma teoremleri ile $R/P_i \approx E_i/E_{i-1}$ olacak şekilde bir $R$–modül izomorfizması vardır.

Şimdi $S$ ve $\mathrm{Ass}(E)$'nin minimal elemanlarının kümeleri sırasıyla $Min(S)$ ve $Min(\mathrm{Ass}(M))$ ile gösterilsin. O halde

$$\mathrm{Ann}_R\, E \subseteq P \Leftrightarrow \text{bir } 1 \leq i \leq m \text{ için } \mathrm{Ann}_R\, E_i/E_{i-1} \subseteq P \Leftrightarrow \text{bir } 1 \leq i \leq m \text{ için } P_i \subseteq P$$

olur. Bu nedenle $Min(S) = Min(\mathrm{Ass}(E))$ elde edilir.

Şimdi $P \in Min(\mathrm{Ass}(E))$ olsun. O zaman $(E_i/E_{i-1})_P = 0$ ya da $R_P/PR_P$ olur. Bu nedenle 3.5.1 dizisi $P$ ile yerelleştirilirse o zaman $E_P$, $R_P$–modülü için bir kompozisyon serisi elde edilir. Ayrıca $l_{R_P}(E_P)$ sıfırdan farklı faktörlerin dolayısıyla $R/P$'nin 3.5.1 dizisindeki görülme sayısı olur. □

Daha sonra Hilbert fonksiyonlar teorisi ele alınırken bu önermenin kademeli halka ve modüllere uyarlamasına ihtiyaç duyulacaktır. Dolayısıyla bu uyarlama aşağıdaki sonuç ile verilecektir.

**Sonuç 3.5.3.** *$R$ bir Noether halka, $E$ sonlu üretilmiş bir $R$–modül ve $K \subsetneq E$ olsun. Ayrıca*

1. *$R$ bir kademeli halka,*
2. *$E$, $R$ kademeli halkası üzerinde bir kademeli modül ve*
3. *$K$, $E$ modülünün bir homojen alt modülü*

*olsun. Son olarak da $R$ halkası ve $E$ modülü kademeli modül yapılırken kullanılan monoid burulmasız olsun. Bu koşullar altında Önerme 3.5.2'deki gibi $e_1, \ldots, e_m$ elemanları bulunabilir. Ek olarak $e_1, \ldots, e_m$ elemanları homojen olacak şekilde seçilebilir. Böylece $i = 0, 1, \ldots, m$ için Önerme 3.5.2'deki $E_i$ alt modülleri $E$'nin homojen alt modülleri ve $P_i$'ler de homojen asal idealler olur. Öte yandan doğal bölüm kademesine sahip $R/P_i$*

*ve $E_i/E_{i-1}$ kademeli modülleri için, $R/P_i$'nin homojen elemanlarının derecesini $e_i$ elemanının derecesi kadar artıran $R/P_i \approx E_i/E_{i-1}$ izomorfizması vardır.*

*Kanıt.* $\Omega$ ile $e \in E$, $e \notin K$ ve $e$ bir homojen eleman olmak üzere $(K : e)$ şeklindeki bütün ideallerin kümesi gösterilsin. $K \subsetneq E$ olduğundan $e \in E$ ve $e \notin K$ olacak şekilde bir $e$ homojen elemanı vardır. Dolayısıyla $\Omega \neq \varnothing$ olur. $R$ halkası Noether olduğundan $e_1 \in E$, $e_1 \notin K$ ve $(K : e_1) = P_1$, $\Omega$ kümesinin bir maksimal elemanı olacak şekilde seçilebilir. Daha önce olduğu gibi $P_1$ bir asal idealdir. Bunun için Lemma 2.3.2'yi kullanarak $a$ ve $b$, $R$ halkasının homojen elemanları olmak üzere $ab \in P_1$ ve $b \notin P_1$ iken $a \in P_1$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a$ ve $b$, $R$ halkasının homojen elemanları olmak üzere $ab \in P_1$ ve $b \notin P_1$ olsun. O halde $(K : e_1) \subseteq (K : be_1)$ ve $(K : e_1)$ maksimal olduğundan $(K : e_1) = (K : be_1)$ elde edilir. $ab \in P_1 = (K : e_1)$, dolayısıyla da $abe_1 \in K$ olur. Buradan $a \in (K : be_1) = (K : e_1) = P_1$ elde edilir. O halde $a \in P_1$ olur. Dolayısıyla $P_1$ ideali asaldır. Kalan kısım ise Önerme 3.5.2'nin kanıtı ile aynı şekilde yapılabilir. □

Bir sonraki sonuç çokkatlılar için birleşme özelliğinin özel bir durumudur. Bu sonuç birleşme özelliğini genel durumda kanıtlamak için kullanılacaktır.

**Önerme 3.5.4.** *[1, Proposition 11, §7.9]R bir Noether halka, E bir sonlu üretilmiş R–modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, R üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. O zaman*

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = \sum_P l_{R_P}(E_P) e_{R/P}\left(\psi_P(\gamma_1), \ldots, \psi_P(\gamma_s) \mid R/P\right)$$

*olur. Burada $\psi_P : R \to R/P$ doğal dönüşümdür. Ayrıca toplam, rankı sıfır olan asal idealler üzerinden alınacaktır.*

*Kanıt.* Rankı sıfır olan asal idealler sadece sıfır idealinin minimal asal idealleridir. Ayrıca Noether halkaların sadece sonlu tane minimal asal ideali vardır. Dolayısıyla önermenin ifadesindeki toplam sadece sonlu sayıda terim içerir.

Önerme 3.5.2 gereğince $E$ modülünün aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde $E_0, \ldots, E_m$ alt modülleri ve $P_1, \ldots, P_m$ asal idealleri vardır.

1. Her $1 \leq i \leq m$ için $0 = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \ldots \subseteq E_m = E$ 'dir.
2. Her $1 \leq i \leq m$ için $E_i/E_{i-1} \approx R/P_i$ olacak şekilde bir $R$–modül izomorfizması vardır.

Bundan dolayı 3.2.2 ve Sonuç 3.2.4 sayesinde

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = \sum_{i=1}^{m} e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid R/P_i\right)$$

yazılabilir. Ayrıca Önerme 3.5.1 gereğince, rankı sıfırdan büyük olan asal idealler için $e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid R/P_i\right) = 0$ olacağından yukarıdaki toplamda sadece rankı sıfır olan $P_i$

asal ideallerini göz önüne almak yeterlidir. Şimdi $P$, rankı sıfır olan bir asal ideal olsun. Ayrıca $\lambda_P$ ile $P$ idealinin $\{P_1,\ldots,P_m\}$ dizisinde yer alma sayısı gösterilsin. O zaman yukarıda yapılan gözlemler ile

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) = \sum_P \lambda_P e_R\left(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid R/P\right)$$

ve

$$l_{R_P}(E_P) = \sum_{i=1}^{m} l_{R_P}\left\{(E_i/E_{i-1})_P\right\} = \sum_{i=1}^{m} l_{R_P}\left\{(R/P_i)_P\right\}$$

olduğu söylenebilir. Şimdi eğer $P \neq P_i$ ise o zaman $(R/P_i)_P$, sıfır $R_P$–modülüdür. Eğer $P = P_i$ ise o zaman $(R/P_i)_P$, basit bir $R_P$–modülü olur. Buradan $l_{R_P}(E_P) = \lambda_P$ elde edilir. Bu nedenle

$$\begin{aligned} e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) &= \sum_P l_{R_P}(E_P) e_R\left(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid R/P\right) \\ &= \sum_P l_{R_P}(E_P) e_{R/P}\left(\psi_P(\gamma_1),\ldots,\psi_P(\gamma_s) \mid R/P\right) \end{aligned}$$

olur. Böylece kanıt tamamlanır. □

Bir sonraki teorem çokkatlıların genel birleşme özelliğidir.

**Teorem 3.5.5.** *[5, Theorem 5]$R$ bir Noether halka, $E$ sonlu üretilmiş bir $R$–modül ve $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$, $R$ halkası üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. Eğer $i$, $0 \leq i \leq s$ olacak şekilde herhangi bir tamsayı ise o zaman*

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) = \sum_p e_{R_P}\left(\phi_P(\gamma_1),\ldots,\phi_p(\gamma_i) \mid E_P\right) e_{R/P}\left(\psi_P(\gamma_{i+1}),\ldots,\psi_P(\gamma_s) \mid R/P\right)$$

*olur. Burada $P$ idealleri $(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)$ idealinin bütün minimal asal idealleri üzerinde değişir. Ayrıca $\phi_P : R \to R_P$ ve $\psi_P : R \to R/P$ doğal dönüşümlerdir.*

*Kanıt.* $P$, $(\gamma_1,\ldots,\gamma_i)$ idealinin bir minimal asal ideali ise o zaman $R_P$ kendisi üzerinde bir modül olarak alındığında $\phi_P(\gamma_1),\ldots,\phi_P(\gamma_i)$, $R_P$ üzerinde bir çokkatlı sistem olur. Bu şu şekilde gösterilebilir:

$$(\phi_P(\gamma_1),\ldots,\phi_P(\gamma_i)) \subseteq Q$$

ve $Q$ bir asal ideal olsun. $Q$ idealinin maksimal olduğunu göstermek yeterlidir. $(\gamma_1,\ldots,\gamma_i)$ $\subseteq \phi_P^{-1}(Q) = Q^c$ yazılabilir. Buradan $P$, $(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)$'in minimal asal ideali olduğundan $P \subseteq Q^c$ yazılabilir. O halde $P^e \subseteq Q^{ce} = Q$ olur. $P^e$, $R_P$ yerel halkasının tek maksimal ideali olduğundan $P^e = Q$ elde edilir. Dolayısıyla $Q$ ideali maksimal olur. Buradan Sonuç 1.3.11 gereğince $l_{R_P}\left\{R_P/\left(\phi_P(\gamma_1),\ldots,\phi_P(\gamma_s)\right)\right\} < \infty$ olur. O halde $\phi_P(\gamma_1),\ldots,\phi_P(\gamma_s)$ dizisi $R_P$ üzerinde bir çokkatlı sistemdir.

Şimdi $s$ üzerine tümevarım uygulanacaktır. Ancak tümevarıma başlamadan önce $i=0$ özel durumunda da teorem doğrudur. Önerme 3.5.4 ile bu söylenebilir. $i=0$ ise

$$e_{R_P}\left(\phi_P(\gamma_1),\ldots,\phi_P(\gamma_i)\mid E_P\right)=l_{R_P}(E_P)$$

olur ve

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s\mid E)=\sum_P L_{R_P}(E_P)e_{R/P}\left(\psi_P(\gamma_1),\ldots,\psi_P(\gamma_s)\mid R/P\right)$$

elde edilir. Ayrıca $P$ idealleri $(\gamma_1,\ldots,\gamma_i)$ idealinin minimal asal idealleri olduğundan $i=0$ durumunda $P$, $(0)$ idealinin minimal asal ideali olur. Buradan $\operatorname{Rank} P=0$ elde edilir. Toplam rankı sıfır olan $P$ asal idealleri üzerinden alınır. Dolayısıyla $s=0$ durumunda $i=0$ olacağından teorem gerçekten doğrudur. Şimdi $s\geq 1$ olduğu ve $s-1$ elemanlı çokkatlı sistemler için teoremin doğru olduğu kabul edilsin. Ayrıca $1\leq i\leq s$ olsun. $i=0$ durumunda doğru olduğu gösterildiği için bu kabül yapılabilir. $R'=R/(\gamma_1)$ ve $\gamma_i'$, $\gamma_i$ elemanının $R'$ halkasındaki doğal görüntüsü olsun. O zaman

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s\mid E)=e_{R'}\left(\gamma_2',\ldots,\gamma_s'\mid E/\gamma_1E\right)-e_R'\left(\gamma_2',\ldots,\gamma_s'\mid(0:_E\gamma_1)\right)$$

yazılabilir. $P$, $(\gamma_1,\ldots,\gamma_i)$ idealinin bir minimal asal ideali ve $P/(\gamma_1)=P'$ olsun. O zaman $P'$, $(\gamma_2',\ldots,\gamma_s')$ idealinin bir minimal asal idealidir. $\phi_{P'}:R'\to R'_{P'}$ doğal dönüşüm olsun. O zaman tümevarım hipotezinden

$$\begin{aligned}&e_{R'}\left(\gamma_2',\ldots,\gamma_s'\mid E/\gamma_1E\right)\\&\quad=\sum_P e_{R'_{P'}}\left(\phi_{P'}(\gamma_2'),\ldots,\phi_{P'}(\gamma_i')\mid(E/\gamma_1E)_{P'}\right)e_{R'/P'}\left(\psi_{P'}(\gamma_{i+1}),\ldots,\psi_{P'}(\gamma_s)\mid R'/P'\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&e_{R'}\left(\gamma_2',\ldots,\gamma_s'\mid(0:_E\gamma_1)\right)\\&\quad=\sum_P e_{R'_{P'}}\left(\phi_{P'}(\gamma_2'),\ldots,\phi_{P'}(\gamma_i')\mid(0:_E\gamma_1)_{P'}\right)e_{R'/P'}\Big(\psi_{P'}(\gamma_{i+1}'),\ldots,\psi_{P'}(\gamma_s')\mid R'/P'\Big)\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $R'/P'$ ve $R/P$ halkaları $f:R'/P'\to R/P$, $f\Big(\psi_{P'}(\gamma_j')\Big)=\psi_P(\gamma_j)$ izomorfizması altında izomorf olur. Bundan dolayı

$$e_{R'/P'}\Big(\psi_{P'}(\gamma_{i+1}'),\ldots,\psi_{P'}(\gamma_s')\mid R'/P'\Big)=e_{R/P}\left(\psi_P(\gamma_{i+1}),\ldots,\psi_P(\gamma_s)\mid R/P\right)$$

elde edilir. Önerme 1.2.7 sayesinde $R_P/\phi_P(\gamma_1)R_P$ ve $(R/(\gamma_1))_{P/(\gamma_1)}$ doğal yolla tanımlanabilir. Ayrıca $\overline{R}_P=R_P/\phi_P(\gamma_1)R_P$ olmak üzere $\overline{\phi_P(\gamma_j)}$ ile $\phi_P(\gamma_j)$'nin $\overline{R}_P$ halkasındaki görüntüsü gösterilsin. O zaman halkaların tanımından $\overline{\phi_P(\gamma_j)}$ ve $\phi_{P'}(\gamma_j')$ elemanları da tanımlı olur. $\overline{R}_P$ ve $R'_{P'}$ halkalarının tanımlandığı varsayılsın. O zaman $(E/\gamma_1E)_{P'}$,

$R'_{P'}$–modülü ve $E_P/\phi(\gamma_1)E_P$, $\overline{R}_P$–modülü izomorf olur. Benzer şekilde $(0 :_E \gamma_1)_{P'}$, $R'_{P'}$–modülü ile $(0 :_{E_P} \phi_P(\gamma_1))$, $\overline{R}_P$–modülü izomorf olur. Buradan

$$\begin{aligned}
e_{R'_{P'}}\left(\phi_{P'}(\gamma'_2), \ldots, \phi_{P'}(\gamma'_i) \mid (E/\gamma_1 E)_{P'}\right) &= e_{\overline{R}_P}\left(\overline{\phi_P(\gamma_2)}, \ldots, \overline{\phi_P(\gamma_i)} \mid E_P/\phi_P(\gamma_1)E_P\right) \\
&= e_{R_P}\left(\phi_P(\gamma_2), \ldots, \phi_P(\gamma_i) \mid E_P/\phi_P(\gamma_1)E_P\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca benzer şekilde

$$\begin{aligned}
e_{R'_{P'}}\left(\phi_{P'}(\gamma'_2), \ldots, \phi_{P'}(\gamma'_i) \mid (0 :_E \gamma_1)_{P'}\right) &= e_{\overline{R}_P}\left(\overline{\phi_P(\gamma_2)}, \ldots, \overline{\phi_P(\gamma_i)} \mid (0 :_{E_P} \phi_P(\gamma_1))\right) \\
&= e_{R_P}\left(\phi_P(\gamma_2), \ldots, \phi_P(\gamma_i) \mid (0 :_{E_P} \phi_P(\gamma_1))\right)
\end{aligned}$$

olur. Bu nedenle elde edilen son iki eşitliğin farkı alınırsa

$$\begin{aligned}
e_{R'_{P'}}\left(\phi_{P'}(\gamma'_2), \ldots, \phi_{P'}(\gamma'_i) \mid (E/\gamma_1 E)_{P'}\right) - e_{R'_{P'}}\left(\phi_{P'}(\gamma'_2), \ldots, \phi_{P'}(\gamma'_i) \mid (0 :_E \gamma_1)_{P'}\right) \\
= e_{R_P}\left(\phi_P(\gamma_1), \ldots, \phi_P(\gamma_i) \mid E_P\right)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\sum_P e_{R_P}\left(\phi_P(\gamma_1), \ldots, \phi_P(\gamma_i) \mid E_P\right) e_{R_P}\left(\psi_P(\gamma_{i+1}), \ldots, \psi_P(\gamma_s) \mid R/P\right) \\
&= e_{R'}\left(\gamma'_2, \ldots, \gamma'_s \mid E/\gamma_1 E\right) - e_{R'}\left(\gamma'_2, \ldots, \gamma'_s \mid (0 :_E \gamma_1)\right) \\
&= e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır. □

# Bölüm 4

# HİLBERT FONKSİYONLARI

## 4.1 Hilbert Fonksiyonu ve Hilbert Polinomu

Bu kısım boyunca $x_1, \dots, x_s$, 1–dereceli homojen elemanlar olmak üzere $R = R_0[x_1, \dots, x_s]$ bir kademeli halka olacaktır. Ayrıca $R_0$, $R$'nin 0–dereceli homojen elemanlarından oluşan bir alt halkasıdır. $(x_1, \dots, x_s)$ yerine $X$ alarak $R = R[X]$ kısaltması da kullanılacaktır. $M = M_0 \oplus M_1 \oplus \dots$ bir kademeli $R$–modül olsun. Her $n \geq 0$ için $H_M(n) = l_{R_0}(M_n)$ olsun. O zaman $H_M(n)$ negatif olmayan tamsayıların bir fonksiyonu olur. Ayrıca $H_M(n)$ ya pozitif tamsayı değeri alır ya da $+\infty$ olur. $H_M(n)$ fonksiyonuna kademeli $M$, $R$–modülünün *Hilbert fonksiyonu* denir. Ayrıca

$$HS_M(n) = \sum_{i=0}^{n} H_{M_i}(n)$$

fonksiyonu tanımlanabilir. $HS_M(n)$ fonksiyonuna $M$ modülünün *Hilbert-Samuel fonksiyonu* denir.

**Örnek 4.1.1.** $k$ bir cisim olmak üzere $R = k[x_1 \dots, x_s]$ polinom halkası, üzerindeki standart kademe ile düşünülürse

$$H_R(n) = \binom{n+s-1}{s-1} = \frac{(n+s-1)(n+s-2)\dots(n+1)}{(s-1)!}$$

olarak elde edilir.

*Kanıt.* $n + s$ üzerine tümevarım uygulanacaktır. Eğer $n = 0$ ya da $s = 1$ ise o zaman sonuç açıktır. Bu nedenle $n > 0$, $s > 1$ ve $S = k[x_1, \dots, x_{s-1}]$ olsun ve $k$–uzaylarının

$$0 \to R_{n-1} \xrightarrow{x_s} R_n \to S_n \to 0$$

tam dizisi ele alınsın. Burada $R_{n-1} \to R_n$ homomorfizması, $x_s$ ile çarpma etkisi,

$R_n \to S_n$ homomorfizması ise her $x_1^{a_1} \dots, x_{s-1}^{a_{s-1}} x_s^{a_s} \in R_n$ için

$$x_1^{a_1} \dots, x_{s-1}^{a_{s-1}} x_s^{a_s} \mapsto \begin{cases} x_1^{a_1} \dots, x_{s-1}^{a_{s-1}}, & a_s = 0 \text{ ise} \\ 0, & a_s \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. O zaman

$$\begin{aligned} H_R(n) &= \dim_k R_n \\ &= \dim_k R_{n-1} + \dim_k S_n \\ &= \binom{n+s-2}{s-1} + \binom{n+s-2}{s-2} \\ &= \binom{n+s-1}{s-1} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Yukarıdaki örnekten görüldüğü gibi cisimler üzerindeki polinom halkalarının Hilbert fonksiyonları birer polinom olarak ifade edilebilir. Bu kısımda bu durumun daha genel kademeli modüller için gerçekleştiği gösterilecektir.

$N$, $M$ modülünün bir homojen alt modülü olsun. O zaman $N$ ve $M/N$, birer kademeli $R$–modül yapılabilir. Ayrıca kademeli $R$–modüllerin

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$

kısa tam dizisi ile, her $n \geq 0$ için $R_0$–modüllerin

$$0 \to N_n \to M_n \to (M/N)_n \to 0$$

kısa tam dizisi elde edilebilir. Bu nedenle her $n \geq 0$ için

$$H_M(n) = H_N(n) + H_{M/N}(n)$$

yazılabilir. Daha genel olarak $0 \to N \to M \to K \to 0$, $R$–modüllerin bir tam dizisi ise o zaman

$$H_M(n) = H_N(n) + H_K(n)$$

olur. Buradan

$$HS_M(n) = HS_N(n) + HS_K(n)$$

elde edilir.

**Tanım 4.1.2.** $M$ bir kademeli $R$–modül olmak üzere eğer

1. $M$ sonlu üretilmiş bir $R$–modül ve

2. her $n \geq 0$ için $H_M(n) < \infty$

koşulları sağlanıyor ise o zaman $M$ modülüne bir *Hilbert $R$–modülü* denir.

Bölümün kalan kısmında $R$ halkası Noether halka kabul edilecektir. Bu durumda $R_0$ halkası Noether alınacaktır. Şimdi $M$ bir Hilbert $R$–modül olsun. $M$ modülünün $p$–dereceli homojen bir $u$ elemanı alınsın. $R_0 u \subseteq M_p$ olduğundan

$$l_{R_0}(R_0 u) \leq l_{R_0}(M_p) < \infty$$

elde edilir. $R_0 \to R_0 u$ doğal homomorfizmasının çekirdeği $I$ olsun. Ayrıca $J$ ideali $R$ halkasının $I$ tarafından üretilen homojen ideali olarak alınsın. Buradan her $y \in R$ için

$$\psi : R/J \to Ru \, , \, \psi(y + J) = yu$$

dönüşümü bir $R$–epimorfizması olur. Dolayısıyla $Ru$ bir Noether $R$–modüldür. Şimdi $U = Ru$ olsun. O zaman

$$U = R_0 u \oplus R_1 u \oplus R_2 u \oplus \dots$$

ve

$$x_1 U + x_2 U + \dots + x_s U = R_1 u \oplus R_2 u \oplus \dots$$

elde edilir. Bu nedenle

$$l_R \left( \frac{U}{x_1 U + \dots + x_s U} \right) = l_{R_0} \left( \frac{U}{x_1 U + \dots + x_s U} \right) = l_{R_0} \left( R_0 u \right) < \infty$$

yazılabilir. Buradan $x_1, \dots, x_s$ elemanları $Ru$ üzerinde bir çokkatlı sistem olur. Ayrıca $M$ bir Hilbert $R$–modül olduğundan sonlu üretilmiştir. Dolayısıyla $u_1, \dots, u_t$, $M$–modülünün elemanları olmak üzere $M = Ru_1 + \dots + Ru_t$ yazılabilir. Yukarıda yapılan uyarılar ile her $i = 1, \dots, t$ için $Ru_i$ bir Noether $R$–modül olur. Ayrıca buradan $x_1, \dots, x_s$ elemanlarının her $i = 1, \dots, t$ için $Ru_i$ üzerinde bir çokkatlı sistem olduğu söylenebilir. Buradan $x_1, \dots, x_s$ elemanlarının $M$ üzerinde de bir çokkatlı sistem olduğu elde edilir. Dolayısıyla aşağıdaki önerme ve sonuç kanıtlanmış olur.

**Önerme 4.1.3.** *$M$ bir Hilbert $R$–modül olsun. O zaman $M$ bir Noether $R$–modüldür ve $x_1, \dots, x_s$ elemanları $M$ modülü üzerinde bir çokkatlı sistemdir.*

**Sonuç 4.1.4.** *$M$ bir Hilbert $R$–modül olmak üzere $N$, $M$–modülünün bir alt modülü olsun. O zaman $N$ ve $M/N$, birer Hilbert $R$–modüllerdir.*

**Teorem 4.1.5.** *[1, Theorem 11, §7.6]$M$ bir Hilbert $R$–modül olsun. O zaman yeterince büyük $n$ değerleri için $H_M(n)$, $n$'nin derecesi en fazla $s - 1$ olan bir polinomudur.*

*Kanıt.* Yeterince büyük tüm $n$ değerleri için

$$H_M(n) = \sum_{i=0}^{s-1} c_i \binom{n+i}{i}$$

olacak şekilde $n$'den bağımsız $c_0, \ldots, c_s$ katsayılarının varlığı gösterilecektir. $s$ üzerine tümevarım uygulansın. İlk olarak $s = 0$ olsun. O zaman $R = R_0$ olur. Dolayısıyla $M$, $R$–modül olarak sonlu uzunluğa sahiptir. Bu nedenle yeterince büyük tüm $n$ değerleri için $l_R(M_n) = 0$ olur. Eğer boş toplamlar sıfır olarak alınırsa o zaman $s = 0$ için teorem doğru olur. Şimdi $s \geq 1$ olsun ve $s-1$ için hipotez doğru olsun. Şimdi $\lambda$, $M$ modülünün elemanlarını $x_s$ ile çarpma işlemi olmak üzere

$$0 \to (0 :_M x_s) \to M \xrightarrow{\lambda} M \to M/x_sM \to 0$$

tam dizisi göz önüne alınsın. Dolayısıyla $\lambda$, $M$ modülünün bir endomorfizmasıdır. Ayrıca tam dizideki diğer dönüşümler içerim dönüşümü ve doğal dönüşümdür. $(0 :_M x_s)$ ve $x_sM$, $M$–modülünün alt modülleri olduğundan $M$–modülü üzerinde kademeli modül yapılabilir. Şimdi $n = 0$ iken $(0 :_M x_s)_{n-1}$ ve $M_{n-1}$ alt modülleri 0 olmak üzere, her $n$ için $R_0$–modüllerin

$$0 \to (0 :_M x_s)_{n-1} \to M_{n-1} \to M_n \to (M/x_sM)_n \to 0$$

tam dizisi elde edilir. Ayrıca bütün $R_0$–modüller sonlu uzunluğa sahiptir. Bu yüzden $n = 0$ için $H_M(n-1) = 0$ olmak üzere

$$l_{R_0}\left((M/x_sM)_n\right) - l_R\left((0 :_M x_s)_{n-1}\right) = H_M(n) - H_M(n-1)$$

elde edilir. Önerme 4.1.4 ile $(0 :_M x_s)$ ve $M/x_sM$ Hilbert $R$–modüllerdir ve $x_s$ ile sıfırlanırlar. Dolayısıyla $R_0[x_1, \ldots, x_{s-1}]$–modül olarak göz önüne alınabilirler. Ayrıca $R_0[x_1, \ldots, x_{s-1}]$ halkası üzerinde Hilbert $R$–modüllerdir. Şimdi $a_i$ ve $b_i$, $n$'den bağımsız tamsayılar olmak üzere, tümevarım hipotezi ile yeterince büyük her $n$ için

$$l_{R_0}\left((M/x_sM)_n\right) = \sum_{i=0}^{s-2} a_i \binom{n+i}{i}$$

ve

$$l_{R_0}\left((0 :_M x_s)_n\right) = \sum_{i=0}^{s-2} b_i \binom{n+i}{i}$$

olur. Ayrıca $\binom{n+i}{i} - \binom{n+i-1}{i-1} = \binom{n-1+i}{i}$ olduğundan yeterince büyük bütün $n$ değerleri ve her $n \geq 1$, $i \geq 1$ için

$$l_R\left((0 :_M x_s)_{n-1}\right) = b_0 + \sum_{i=1}^{s-2} b_i \left[\binom{n+i}{i} - \binom{n+i-1}{i-1}\right]$$

elde edilir. Bu nedenle $d_0, \ldots, d_{s-2}$, $n$'den bağımsız tamsayılar olmak üzere yeterince büyük bütün $n$ değerleri için

$$H_M(n) - H_M(n-1) = \sum_{i=0}^{s-2} d_i \binom{n+i}{i}$$

olur. O halde uygun bir $p$ için $k \geq p$ iken $\omega_k = 0$ olmak üzere

$$H_M(k) - H_M(k-1) = \sum_{i=0}^{s-2} d_i \binom{n+i}{i} + \omega_k \tag{4.1.1}$$

yazılabilir. Şimdi $n \geq p$ olmak üzere 4.1.1 eşitliğinin her iki tarafında $k = 0, 1, 2, \ldots$ üzerinden toplam alınırsa

$$\begin{aligned} H_M(n) &= \sum_{i=0}^{s-2} d_i \sum_{k=0}^{n} \binom{k+i}{i} + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \\ &= \sum_{i=0}^{s-2} d_i \binom{n+i+1}{i+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \\ &= \sum_{i=0}^{s-1} d'_i \binom{n+i}{i} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $d_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k$ ve her $1 \leq i \leq s-1$ için $d'_i = d_{i-1}$ olur. □

Yukarıda elde edilen sonuç ile $M$ bir Hilbert $R$–modül iken yeterince büyük tüm $n$ değerleri için

$$H_M(n) = \sum_{i=0}^{s-1} h_i(M) \binom{n+i}{i} \tag{4.1.2}$$

olacak şekilde tek türlü belirli

$$h_0(M), h_1(M), \ldots, h_{s-1}(M)$$

tamsayıları vardır. $h_i(M)$ tamsayılarına *$M$ modülünün Hilbert katsayıları* denir. 4.1.2 eşitliğinden her $k \geq 0$ için

$$H_M(k) = \sum_{i=0}^{s-1} h_i(M) \binom{k+i}{i} + \nu_k \tag{4.1.3}$$

elde edilir. Burada $\nu_0, \nu_1, \ldots$ tamsayı dizisidir ve bu dizide yeterince büyük $k$ değerleri için $\nu_k = 0$ olur. Her $k > q$ için $\nu_k = 0$ olsun. Eğer $n > q$ ve 4.1.3 eşitliği üzerinden $k = 0, 1, 2, \ldots$ için toplam alınırsa o zaman

$$HS_M(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k + \sum_{i=0}^{s-1} h_i(M) \binom{n+i+1}{i+1}$$

elde edilir. O halde $n$ yeterince büyük iken

$$HS_M(n) = \sum_{i=0}^{s} h_i^*(M)\binom{n+i}{i}$$

olacak şekilde tek türlü belirli $h_0^*(M), h_1^*(M), \ldots, h_s^*(M)$ tamsayıları vardır. Ayrıca $h_0(M), h_1(M), \ldots, h_{s-1}(M)$ değerleri sırasıyla $h_1^*(M), h_2^*(M), \ldots, h_s^*(M)$ tamsayılarına eşittir. $s \geq 1$ olsun. Şimdi

$$0 \to (0 :_M x_s) \to M \to M \to M/x_sM \to 0$$

tam dizisi kullanılarak her $m \geq 0$ için

$$H_{M/x_sM}(m) - H_{(0:_M x_s)}(m-1) = H_M(m) - H_M(m-1)$$

yazılabilir. $m = 0, 1, 2, \ldots$ değerleri üzerinden toplama geçilirse her $n$ için

$$HS_{M/x_sM}(n) - HS_{(0:_M x_s)}(n-1) = H_M(n)$$

elde edilir. Fakat $n$ yeterince büyük iken bu fonksiyonların herbirinin $n$'nin bir polinomu olarak ifade edilebileceği gösterilecektir. $+\cdots$ ile daha düşük dereceli terimler gösterilmek üzere yeterince büyük tüm $n$ değerleri için

$$HS_{M/x_sM}(n) = h_{s-1}^*(M/x_sM)\frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + \cdots$$

$$HS_{(0:_M x_s)}(n) = h_{s-1}^*((0 :_M x_s))\frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + \cdots$$

ve

$$H_M(n) = h_{s-1}(M)\frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + \cdots$$

olur. O halde

$$HS_{(0:_M x_s)}(n-1) = h_{s-1}^*((0 :_M x_s))\frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + \cdots$$

olduğundan $s \geq 1$ için

$$h_s^*(M) = h_{s-1}^*(M/x_sM) - h_{s-1}^*((0 :_M x_s))$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.6.** *$M$ bir Hilbert $R$–modül olsun. O zaman $h_s^*(M) = e_R(x_1, \ldots, x_s \mid M)$ olur.*

*Kanıt.* $s$ üzerine tümevarım uygulanacaktır. Eğer $s = 0$ ise o zaman $R = R_0$ ve

$$e_R(x_1, \ldots, x_s \mid M) = e_{R_0}(. \mid M) = l_{R_0}(M)$$

olur. Diğer taraftan yeterince büyük tüm $n$ değerleri için $HS_M(n) = l_{R_0}(M)$ elde edilir. Bu nedenle yeterince büyük tüm $n$ değerleri için $HS_M(n)$ polinomu

$$h_s^*(M) = l_{R_0}(M)$$

sabit polinomu olur. Şimdi $s \geq 1$ ve sonuç $s - 1$ üreteçli durumda doğru olsun. $x_1, \ldots, x_s$ elemanlarının $M$ üzerinde bir çokkatlı sistem olduğu biliniyor. Bu nedenle $e_R(x_1, \ldots, x_s \mid M)$ tanımlıdır.

$$e_R(x_1, \ldots, x_s \mid M) = e_R\left(x_1, \ldots, x_{s-1} \mid M/x_sM\right) - e_R\left(x_1, \ldots, x_{s-1} \mid (0:_M x_s)\right)$$

olur. $M/x_sM$ ve $(0 :_M x_s)$, $R_0\left[x_1, \ldots, x_{s-1}\right]$ halkası üzerinde kademeli modüller olduğundan tümevarım ile

$$e_R\left(x_1, \ldots, x_{s-1} \mid M/x_sM\right) = h_{s-1}^*\left(M/x_sM\right)$$

ve

$$e_R\left(x_1, \ldots, x_{s-1} \mid (0:_M x_s)\right) = h_{s-1}^*\left((0:_M x_s)\right)$$

elde edilir. Buradan $e(x_1, \ldots, x_s \mid M) = h_s^*(M)$ olur. Böylece kanıt tamamlanır. $\square$

**Örnek 4.1.7.** $k$ bir cisim olmak üzere $R = k[x, y, z]$ polinom halkası ve $I = (x^3 - y^2z)$ ideali alınsın. $R$'nin standart kademeli halka yapısı düşünülecektir. $I$, $R$'nin bir homojen ideali olduğundan $M = R/I$ bir kademeli $R$–modüldür. $H_M(n)$ fonksiyonu hesaplansın. $I^{(n)} = R^{(n)} \cap I$ denirse $I = I^{(0)} \oplus I^{(1)} \oplus I^{(2)} \oplus \cdots$ olacağından

$$R/I \approx k \oplus R^{(1)} \oplus R^{(2)} \oplus \left(R^{(3)}/I^{(3)}\right) \oplus \left(R^{(4)}/I^{(4)}\right) \oplus \cdots$$

yazılabilir. Buna göre $H_M(0) = 1$, $H_M(1) = 3$ ve $H_M(2) = 6$ olduğu görülebilir. Ayrıca $n \geq 3$ için

$$H_M(n) = l_k\left(R^{(n)}/I^{(n)}\right) = \dim_k\left(R^{(n)}/I^{(n)}\right) = \dim_k(R^{(n)}) - \dim_k(I^{(n)})$$

olur. Örnek 4.1.1'de olduğu gibi

$$\dim_k(R^{(n)}) = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

elde edilir. Öte yandan $I^{(n)} \approx \bigoplus_{q+b+c=n-3} kx^a y^b z^c$ olacağından

$$\dim_k(I^{(n)}) = \binom{n-3+2}{2} = \binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

yazılabilir. Böylece $n \geq 3$ için $H_M(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 3n$ bulunur.

**Örnek 4.1.8.** $k$ bir cisim olmak üzere $R = k[x,y]$ polinom halkası ile onun $I = (x^3, y^2)$ ideali alınsın. $R/I$ bir Noether $R$–modül, $\mathfrak{m} = (x,y)$, $R$'nin bir maksimal ideali ve $\mathfrak{m}^3 \subseteq I$ olduğundan Önerme 1.3.10 gereğince $R/I$ bir Artin $R$–modüldür. Dolayısıyla Teorem 2.1.28'den yeterince büyük $n$ tamsayıları için (aslında her $n > 3$ için) $H_{R/I}(n) = 0$ olur. Bunu yukarıdaki örnekte olduğu gibi doğrudan görmek de mümkündür.

Teorem 4.1.5 ile $x_1, \ldots, x_s$, 1–dereceli homojen elemanlar olmak üzere $R = R_0[x_1, \ldots, x_s]$ kademeli halkası üzerindeki bir Hilbert $M$ modülü için $n$'nin yeterince büyük değerlerinde $H_M(n)$ fonksiyonunun $n$'ye bağlı bir polinoma eşit olduğu görüldü. Aşağıdaki örnek ile en az bir $i$ için $\operatorname{der} x_i \neq 1$ olması halinde $H_M(n)$'nin bir polinoma eşit olmak zorunda olmadığı görülecektir.

**Örnek 4.1.9.** $k$ bir cisim olsun.

(i) $R = k[x^3]$, Örnek 2.1.8'de ele alınan kademeli halka olsun. Her $n \geq 0$ için

$$R^{(n)} = \begin{cases} k[x]^{(n)}, & 3 \mid n \text{ ise} \\ 0, & 3 \nmid n \text{ ise} \end{cases}$$

olduğundan $R$ bir Hilbert $R$–modüldür. Ayrıca

$$H_R(n) = \begin{cases} 1, & 3 \mid n \text{ ise} \\ 0, & 3 \nmid n \text{ ise} \end{cases}$$

olacağından $H_R(n)$ bir polinom olamaz.

(ii) $R = k[x, y^2]$, Örnek 2.1.9'da ele alınan kademeli halka olsun. Dikkat edilirse her $n \geq 0$ için $\dim_k(R^{(n)}) < \infty$ olduğundan $R$ bir Hilbert $R$–modül olur.

$$R^{(n)} = \{\sum_{a,b} c_{a,b} x^a y^{2b} : c_{a,b} \in k \text{ ve } a + 2b = n\}$$

olduğundan $\dim_k(R^{(n)})$, $\{x^a y^{2b} : a, b \geq 0 \text{ ve } a + 2b = n\}$ kümesinin eleman sayısıdır. Bu kümenin eleman sayısı $2 \mid n - a$ olacak şekildeki $a \geq 0$ sayılarının sayısıdır. Bu ise $[\![\cdot]\!]$ tam değer fonksiyonunu göstermek üzere $[\![\frac{n}{2}]\!] + 1$ sayısıdır. Dolayısıyla

$$H_R(n) = \left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right] + 1$$

bir polinoma eşit değildir.

Şimdi $R_0$, bir Artin halka ve $M$ bir kademeli $R$–modül olsun. $n \geq 0$ için $n$–dereceli homojen elemanların oluşturduğu alt modül $M_n$ ile gösterilsin. Eğer $k \in \mathbb{Z}^-$ ise o zaman $M_k$ modülünü sıfır $R$–modülü olarak almak uygun olacaktır. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $H_M(n) = l_{R_0}(M_n)$ olsun. Buradan $n \geq 0$ için $H_M(n)$, $M$ modülünün Hilbert fonksiyonudur ve tanım bütün negatif tam sayılar için fonksiyon değeri sıfır alınarak genişletilebilir. Şimdi $M$ sonlu üretilmiş kademeli bir $R_0[x_1, \dots, x_s]$–modül olsun. $R_0$ Artin halka olduğundan Noetherdir. Dolayısıyla $R_0[x_1, \dots, x_s]$ sonlu üretilmiş $R_0$–cebiri de Noether olur. Buna göre $M$ bir Noether $R$–modüldür ve dolayısıyla Teorem 2.1.26 ile her $n \geq 0$ için $M_n$ Noether $R_0$–modül olur. Bu nedenle $n \geq 0$ için $M_n$'ler sonlu üretilmiş $R_0$–modüldür. Buradan her $n \geq 0$ için $H_M(n) = l_{R_0}(M_n) < \infty$ olur. O halde $R_0$ bir Artin halka iken her sonlu üretilmiş kademeli $R_0[x_1, \dots, x_s]$–modülün bir Hilbert $R_0[x_1, \dots, x_s]$–modül olduğu elde edilebilir.

**Lemma 4.1.10.** *$R_0$ bir Artin halka olmak üzere $R = R_0[x_1, \dots, x_n]$ kademeli bir halka olsun. $P$ ile $R$ halkasının bir homojen asal ideali gösterilsin. O zaman* $\dim P = 0$ *ancak ve ancak $(x_1, \dots, x_n) \subseteq P$ olur.*

*Kanıt.* İlk olarak $\dim P = 0$ alınarak $(x_1, \dots, x_s) \subseteq P$ olduğu gösterilecektir. Aksi doğru olsun. Bu nedenle bir $i = 1, \dots, n$ için $x_i \notin P$ olur. $P$ homojen bir ideal ve $x_i$, 1–dereceli homojen eleman olduğundan $(P, x_i)$ ideali bir homojen idealdir ve $1 \notin (P, x_i)$ olduğu açıktır. Şimdi eğer $P'$ $(P, x_i)$'nin herhangi bir minimal asal ideali ise o zaman $P \subsetneqq P'$ ve bu yüzden $\dim P > 0$ olur. Dolayısıyla çelişki elde edilir. O halde $(x_1, \dots, x_s) \subseteq P$ olur.

Şimdi $(x_1, \dots, x_n) \subseteq P$ olsun. O zaman $i$ içerim dönüşümü ve $\pi$ doğal dönüşüm olmak üzere halka homomorfizmalarının $R_0 \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\pi} R/P$ bileşkesi bir halka epimorfizması olur. Bileşke dönüşümün çekirdeği $R_0 \cap P$ idealidir. Buradan

$$R_0/(R_0 \cap P) \approx R/P$$

elde edilir. $R_0 \cap P$, $R_0$ Artin halkasının bir asal ideali olduğundan $R_0/(R_0 \cap P)$ bir cisim olur. Dolayısıyla $R/P$ bir cisimdir. Buradan $\dim P = 0$ olur. Böylece kanıt tamamlanır $\square$

**Lemma 4.1.11.** *$R_0$ bir Artin halka ve $R = R_0[x_1, \dots, x_s]$ olmak üzere $M$ sıfırdan farklı, sonlu üretilmiş bir kademeli $R$–modül olsun. O zaman $H_M(n)$ Hilbert fonksiyonu yeterince büyük tüm $n$ değerleri için sıfırdır ancak ve ancak* $\dim M = 0$ *olur.*

*Kanıt.* $\dim M = \dim (R_0[x_1, \dots, x_s]/ \operatorname{Ann}_R(M))$ olduğundan $P$ idealleri $\operatorname{Ann}_{R_0} M$ idealinin minimal asal idealleri olmak üzere $\dim M = \max_P(\dim P)$'dir ya da denk olarak $P$ idealleri $M$ modülünün sıfır alt modülüne ait olan minimal asal idealler olmak üzere

$\max\limits_{P} \dim P = \dim M$ olur. Teorem 2.3.6 ile bütün bu asal idealler homojendir. Bu uyarılardan sonra kanıta geçilebilir.

Şimdi her $n \geq q$ için $H_M(n) = 0$ olsun. O zaman derecesi $q$ ya da daha fazla olan sıfırdan farklı homojen eleman yoktur. Bu nedenle $(x_1, \ldots, x_s)^q M = 0$ olur. $P$, $\mathrm{Ann}(M)$ idealinin bir minimal asal ideali olsun. O zaman $P$ homojendir ve $(x_1, \ldots, x_s) \subseteq P$'dir. Buradan Lemma 4.1.10 ile $\dim P = 0$ olur. Dolayısıyla $\dim M = 0$ olduğu elde edilir.

Şimdi $\dim M = 0$ olsun. O zaman $\mathrm{Ann}_R(M)$ idealinin her minimal asal ideali sıfır boyutlu olur. Ayrıca bu minimal asal idealler homojen olduğundan Lemma 4.1.10 ile herbirinin $(x_1, \ldots, x_s)$ idealini içerdiği söylenebilir. Böylece $(x_1, \ldots, x_s) \subseteq \mathrm{Rad}\,\mathrm{Ann}_R(M)$ olur. Bu nedenle bir $l \in \mathbb{Z}^+$ için $(x_1, \ldots, x_s)^l M = 0$ elde edilir. $M$ sonlu üretilmiş olduğundan $1 \leq i \leq p$ için $e_i$'ler $m_i$–dereceli homojen elemanlar olmak üzere $M = R_0 e_1 + \cdots + R e_p$ yazılabilir. Eğer $n \geq \max\{l + m_1, \ldots, l + m_p\}$ ise o zaman $n$–dereceli her homojen eleman sıfırdır. Bu $H_M(n) = 0$ olur. Böylece kanıt tamamlanır. □

**Teorem 4.1.12.** *[1, Theorem 19, §7.10] $R_0$ bir Artin halka, $M$, $R = R_0[x_1, \ldots, x_s]$ halkası üzerinde sıfırdan farklı sonlu üretilmiş bir kademeli modül olsun. O zaman yeterince büyük $n$ değerleri için $H_M(n)$, $n$'nin* $\dim M - 1$ *dereceli bir polinomudur.*

*Kanıt.* Bu sonuç için sıfır polinomunun derecesi $-1$ olarak alınacaktır Şimdi $\dim M = d$ olsun ve $d$–üzerine tümevarım uygulansın. $d = 0$ iken Lemma 4.1.11 ile teorem doğrudur. $d \geq 1$ olsun ve $d - 1$ boyutlu Artin halkaları için hipotez doğru olsun. Önerme 3.5.3 ile

$$M = M_q \supseteq M_{q-1} \supseteq \ldots \supseteq M_1 \supseteq M_0 = 0$$

ve

$$R_0[x_1, \ldots, x_s]/P_i \approx M_i/M_{i-1} \tag{4.1.4}$$

olacak şekilde $M_0, \ldots, M_q$ homojen alt modülleri ve $P_0, \ldots, P_q$ homojen asal idealleri vardır. 4.1.4 izomorfizmasındaki dönüşüm ile $R_0[x_1, \ldots, x_s]/P_i$ halkasının bir homojen elemanının derecesi sabit bir $k_i$ değeri kadar artar. Bu nedenle

$$H_M(n) = \sum_{i=1}^{q} H_{M_i/M_{i-1}}(n)$$

olur. Buradan

$$H_M(n) = \sum_{i=1}^{q} H_{R/P_i}(n - k_i) \tag{4.1.5}$$

yazılabilir. $\mathrm{Ann}(M)$, $Mi/M_{i-1}$ bölüm modülünü sıfırlar. Ayrıca $M_i/M_{i-1} \approx R/P_i$ izomorfizması ile $\mathrm{Ann}(M) \subseteq P_i$ olur. Şimdi $P$ asal ideali $\mathrm{Ann}(M)$ idealini kapsasın. O zaman $P_i\,(M_i/M_{i-1}) = 0$ olduğundan $P_i M_i \subseteq M_{i-1}$ elde edilir. Bu nedenle

$P_1P_2\dots P_qM = 0$ olur. Buradan $P_1P_2\dots P_q \subseteq \mathrm{Ann}(M) \subseteq P$ elde edilir. O halde bir $j$ için $P_j \subseteq P$ olduğu söylenebilir. Buradan $\mathrm{Ann}(M)$ idealinin minimal asal idealleri özel olarak $1 \leq i \leq q$ için $P_i$ asal idealleridir. Ayrıca bu asallar $P_1, P_2, \dots, P_q$ dizisinin başka bir öğesini öz olarak içermez. Şimdi

$$d = \max\{\dim P_1, \dim P_2, \dots, \dim P_q\} \tag{4.1.6}$$

ve $P$, $d$–boyutlu homojen bir asal ideal olsun. $d \geq 1$ olduğundan Lemma 4.1.10 gereğince $x_j \notin P$ olacak şekilde bir $1 \leq j \leq s$ bulunabilir.

$$0 \to R_0[x_1,\dots,x_s]/P \to R_0[x_1,\dots,x_s]/P \to R_0[x_1,\dots,x_s]/(P,x_j) \to 0 \tag{4.1.7}$$

tam dizisi göz önüne alınsın. $R/P \to R/P$ dönüşümü $x_j$ ile çarpma dönüşümüdür. Eğer 4.1.7 dizisindeki her modül kademeli modül haline getirilirse o zaman $R/P \to R/P$ dönüşümü $x_j$ ile çarpma dönüşümü ve $\mathrm{der}(x_j) = 1$ olduğundan homojen elemanın derecesini bir arttırır.

İddia 1: $\phi : R/P \to R/P$, $x_j$ ile çarpma dönüşümünün birebirdir: $r_1, r_2 \in R$ için $\phi(r_1 + P) = \phi(r_2 + P)$ olsun. O halde $x_j(r_1 + P) = x_j(r_2 + P)$ elde edilir. Buradan

$$x_jr_1 + P = x_jr_2 + P \Rightarrow x_jr_1 - x_jr_2 \in P \Rightarrow x_j(r_1 - r_2) \in P$$

olur. $x_j \notin P$ ve $P$ bir asal ideal olduğundan $(r_1 - r_2) \in P$ elde edilir. Dolayısıyla $\phi$ dönüşümü birebirdir. Böylece iddia elde edilir.

Şimdi $R/P \to R/(P,x_j)$ dönüşümü dereceyi korur. Buradan

$$0 \to (R/P)_{n-1} \to (R/P)_n \to (R/(P,x_j))_n \to 0$$

tam dizisi vardır. Bu nedenle

$$H_{R/P}(n) - H_{R/P}(n-1) = H_{R/(P,x_j)}(n)$$

yazılabilir. Teorem 4.1.5 gereğince yeterince büyük $n$ değeri için $H_{R/P}(n)$, $n$'nin $\delta$–dereceli bir polinomu olsun. Ayrıca $\dim(R/P) = \dim(P) \geq 1$ olduğundan Lemma 4.1.11 'den $\dim(R/P) \neq 0$ olur. Buradan $H_{R/P}(n)$, yeterince büyük tüm $n$ değerleri için sıfırdan farklıdır. $\delta > 0$ olsun. O halde yeterince büyük $n$ için $H_{R/P}(n) - H_{R/P}(n-1)$, $n$'nin $(\delta - 1)$–dereceli bir polinomu olur. $P$ homojen olduğundan $R/(P,x_j)$ sıfırdan farklı bir modüldür. Ayrıca $\dim(R/(P,x_j)) = \dim(P,x_j)$ ve $P \subsetneqq (P,x_j)$ olduğundan $\dim(P,x_j) < \dim(P) \leq d$ olur. $(P,x_j)$'nin boyutu kesin olarak $d$ değerinden daha küçüktür. Bu nedenle tümevarım hipotezinden yeterince büyük $n$ değerleri için $H_{R/(P,x_j)}(n)$, $n$'nin derecesi $\dim(R/(P,x_j)) - 1$ olan bir polinomdur. O halde $\delta = \dim(R/(P,x_j))$ olur. Şimdi $P'$, $(P,x_j)$ idealinin herhangi bir minimal asal ideali olsun. O zaman Rank $(P'/P) \leq 1$ olur. Ayrıca $R/P$ bir tamlık bölgesi olduğundan (0) ideali asaldır. $P'/P \neq 0$ olduğundan Rank$(P'/P) \geq 1$ olur. Dolayısıyla Rank$(P'/P) = 1$ elde edilir. Bu nedenle $P$ ile $P'$ arasında öz olarak kapsanan bir asal ideal yoktur. $R_0$ bir Artin halka ve $R = R_0[x_1, \ldots, x_s]$ kademeli ve Noether halka ile der$(x_i) = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} S = R_0[X_1, \ldots, X_s] &\xrightarrow{\varphi} R \\ X_i &\longmapsto x_i \\ a \in R_0 &\longmapsto a \in R_0 \end{aligned}$$

dönüşümü vardır. Ayrıca bu dönüşüm bir halka epimorfizmasıdır. O halde $P$ ve $P'$, $R$ halkasının iki asal ideali iken bunlara $S$ halkasında karşılık gelen $\varphi^{-1}(P)$ ve $\varphi^{-1}(P')$ asal ideallerdir. Ayrıca

$$P \subset P' \Rightarrow \varphi^{-1}(P) \subseteq \varphi^{-1}(P')$$

olur. Eğer $P$ ile $P'$ arasında öz olarak kapsanan bir asal ideal yok ise $\varphi^{-1}(P)$ ile $\varphi^{-1}(P')$ arasında da öz olarak kapsanan bir asal ideal yoktur. Şimdi $P \subset P'$ ve $P$ ile $P'$ arasında öz olarak kapsanan bir asal ideal olmasın ve $\varphi^{-1}(P) \subsetneqq P'' \subsetneqq \varphi^{-1}(P')$ olacak şekilde $S$ halkasının bir $P''$ asal ideali var olsun. $\varphi(P'')$ bir asal idealdir $\varphi(a)\varphi(b) \in \varphi(P'')$ ve $\varphi(a) \notin P''$ iken $a \notin P''$ olur. Şimdi $\varphi(ab) = \varphi(c)$ olacak şekilde bir $c \in P''$ vardır. O halde $\varphi(ab - c) = 0$ elde edilir. Buradan $ab - c \in \ker \varphi \subseteq \varphi^{-1}(P) \subseteq P''$ olur. Buradan $ab \in P''$ ve $P''$ asal ideal olduğundan $b \in P'' \Rightarrow \varphi(b) \in \varphi(P'')$ elde edilir. O halde $P \subseteq \varphi(P'') \subseteq P'$ olacağı için $P$ ile $P'$ arasında asal ideal yoktur kabulü ile çelişir. Dolayısıyla $P$ ile $P'$ arasında öz olarak kapsanan bir asal ideal yoktur.

İddia 2: $\psi : S/\varphi^{-1}(P) \to R/P$ dönüşümü birebir ve örtendir: İlk olarak dönüşümün iyi tanımlı olduğu gösterilecektir. $f_1 + \varphi^{-1}(P) = f_2 + \varphi^{-1}(P)$ olsun.

$$f_1 - f_2 \in \varphi^{-1}(P) \Rightarrow \varphi(f_1 - f_2) \in P \Rightarrow \varphi(f_1) - \varphi(f_2) \in P \Rightarrow \varphi(f_1) + P = \varphi(f_2) + P$$

elde edilir. Dolayısıyla $\psi$ iyi tanımlıdır. Ayrıca $f + \varphi^{-1}(P) \in \ker \psi$ olsun. O halde $\varphi(f) + P = 0$ olur. Buradan $f \in \varphi^{-1}(P)$ elde edilir. Dolayısıyla $\psi$ birebirdir. Örtenlik ise açıktır. Böylece iddia elde edilir.

Şimdi Teorem 1.4.13 sayesinde $\dim(\varphi^{-1}(P')) = \dim(\varphi^{-1}(P)) - 1$ olur. Ayrıca

$$\dim(R/P) = \dim\left(S/\varphi^{-1}(P)\right) = \dim\left(\varphi^{-1}(P)\right) \tag{4.1.8}$$

ve

$$\dim(R/P') = \dim\left(S/\varphi^{-1}(P')\right) = \dim\left(\varphi^{-1}(P')\right) \tag{4.1.9}$$

yazılabilir. Dolayısıyla 4.1.8 ve 4.1.9 denklemleri ile $\dim P' = \dim P - 1 = d - 1$ olduğu söylenebilir. Buradan $\dim(R/(P, x_j)) = d - 1$ olur. Bu nedenle $\delta = d - 1$ elde edilir.

O halde gözlemler birleştirilirse, eğer $P$, $d$–boyutlu bir homojen asal ideal ise o zaman yeterince büyük $n$ değerleri için $H_{R/P}\,(n)$, $n$'nin $d-1$ dereceli polinomuna eşittir. Her $n$ için $H_{R/P}\,(n) \geq 0$ olduğundan ve polinomdaki $\left(n^{d-1}\right)$'li terimin polinomdaki katsayısı sıfır olmadığından katsayı pozitif olmalıdır. O halde 4.1.6 ile her $i$ için $\dim{(R/P)} \leq d$ olduğu elde edilir. Bu nedenle yeterince büyük $n$ değerleri için $H_{R/P_i}\,(n-k_i)$, $n$'nin derecesi $\dim{(R/P_i)}-1$ olan polinomuna eşittir. $\dim{(R/P_i)}-1$ ifadesindeki $i$ değerleri değiştirilirse $\dim{(R/P_i)}-1 < d-1$ olabilir. Ancak $d-1$ olduğu en az bir durum vardır. Bu durumda polinomda $\left(n^{d-1}\right)$'li terimin katsayısı pozitif olur. Buradan $n$ yeterince büyük iken $H_M(n)$, $n$'nin derecesi $d-1$ olan bir polinomuna eşit olduğu elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır. □

$R_0$ bir Artin halka, $M$, $R = R_0[x_1, \ldots, x_s]$ halkası üzerinde sıfırdan farklı sonlu üretilmiş bir kademeli modül olsun. Kabul edelim ki $\dim M = d$ olsun. Yukarıdaki teoremden dolayı yeterince büyük $n$ değerleri için $H_M(n)$ fonksiyonu derecesi $d-1$ olan bir polinomdur. $H_M(n)$ polinomunun $h_{d-1}(M)$ katsayısına *$M$'nin çokkatlısı* denir ve $e(M)$ ile gösterilir. Buna göre

$$H_M(n) = \frac{e(M)}{(d-1)!}n^{d-1} + \cdots$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi $P_1, \ldots, P_q$ ve $M_0, M_1, \ldots, M_q$, sırasıyla, Teorem 4.1.12'nin kanıtında ortaya çıkan homojen asal idealler ile homojen alt modüller olsun.

$$I = \{i : 1 \leq i \leq q \text{ ve } \dim P_i = d\}$$

kümesi tanımlansın. Her $1 \leq j \leq q$ ve $j \notin I$ için $\dim{(R/P_j)} < d$ olacağından 4.1.5 eşitliği gereğince

$$e(M) = \sum_{i \in I} e(R/P_i)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi $P$ $d$–boyutlu herhangi bir homojen asal ideal ve $\lambda_P$, $P$'nin $P_1, \ldots, P_q$ listesindeki tekrar sayısı olsun. O zaman yukarıdaki eşitlikten

$$e(M) = \sum_{P} \lambda_P e(R/P) \tag{4.1.10}$$

bulunur. Ayrıca

$$l_{R_P}(M_P) = \sum_{i=1}^{q} l_{R_P}\left\{(M_i/M_{i-1})_P\right\} = \sum_{i=1}^{q} l_{R_P}\left\{(R/P_i)_P\right\}$$

yazılabilir. $\dim P_i \leq d$ olduğundan $P_i = P$ ya da $P_i \nsubseteq P$ olmak zorundadır. Eğer $P_i \nsubseteq P$ ise $(R/P_i)_P = 0$ olur. Öte yandan $P_i = P$ ise $l_{R_P}\left\{(R/P_i)_P\right\} = 1$ olur. Dolayısıyla

$l_{R_P}(M_P) = \lambda_P$ elde edilir. 4.1.10 eşitliğinde yerine konursa aşağıdaki teorem ile verilen $e(M)$ çokkatlısı için birleşme özelliği kanıtlanmış olur.

**Teorem 4.1.13.** *[1, Theorem 20] [4, Theorem 7.4] $R_0$ bir Artin halka, $M$, $R = R_0[x_1, \ldots, x_s]$ halkası üzerinde sıfırdan farklı sonlu üretilmiş bir kademeli modül olsun. Kabul edelim ki* $\dim M \geq 1$ *olsun. O zaman*

$$e(M) = \sum_P l_{R_P}(M_P)e(R/P)$$

*olur. Burada $P$'ler,* $\dim(R/P) = \dim M$ *eşitliğini sağlayan homojen asal idealler üzerinde değişmektedir.*

## 4.2 Bir Çeşitlemin Boyutu ve Hilbert-Samuel Polinomları

Bu bölümde Hilbert-Samuel polinomlarının Cebirsel Geometri'nin önemli araçlarından biri olan çeşitlemlerin boyutlarını tanımlamada nasıl kullanılabileceği gösterilecektir. Bunun için Cebirsel Geometri'de öne çıkan bazı kavramlar tanıtılacaktır.

$k$ bir cisim ve $n$ bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$k^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in k\}$$

kümesi tanımlansın. $k^n$ kümesine $k$ üzerindeki $n$–boyutlu *afin uzay* adı verilir. $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ olsun. Bu polinomlara bağlı olarak

$$V(f_1, \ldots, f_s) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in k^n : f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0\}$$

şeklinde tanımlanan $k^n$'nin alt kümesine $f_1, \ldots, f_s$ polinomları ile tanımlanan *afin çeşitlem* (ya da kısaca *çeşitlem*) denir. Kolayca görülebilir ki $I = (f_1, \ldots, f_s)$, $f_1, \ldots, f_s$ polinomları tarafından üretilen ideal ise

$$V(f_1, \ldots, f_s) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in k^n : \text{ her } f \in I \text{ için } f(a_1, \ldots, a_n) = 0\}$$

yazılabilir. Buna göre $V(f_1, \ldots, f_s)$ yerine $V(I)$ gösterimi de kullanılacaktır. $x_1, \ldots, x_n$ bilinmeyenlerinin herhangi bir alt kümesi ile tanımlanan afin çeşitleme bir *koordinat alt uzayı* denir.

$I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ bir ideal olsun. Eğer $I$, $k[x_1, \ldots, x_n]$ halkasının bazı monomları tarafından üretiliyorsa o zaman $I$'ya bir *monom ideali* denir. $k[x_1, \ldots, x_n]$'in bir monom ideali ile tanımlanan afin çeşitlem sonlu adet koordinat alt uzayının birleşimi olarak yazılabilir (bkz. [6, Proposition 1, §9.1]). Dolayısıyla $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_s]$ bir monom ideali ise

$$V(I) = V_1 \cup \ldots \cup V_p$$

ve $i \neq j$ iken $V_i \nsubseteq V_j$ olacak şekilde $V_1, \ldots, V_p$ koordinat alt uzayları vardır. Aslında $V(I)$'nın bu şekildeki yazımı tek türlüdür. Burada $k^n$ uzayının $V_1, \ldots, V_p$ alt uzaylarının boyutlarının en büyüğüne $V(I)$ *çeşitleminin boyutu* denir ve $\dim V(I)$ şeklinde gösterilir.

Hilbert'in 1890 yılında yayımlanan meşhur çalışmasında (bkz. [7]) elde ettiği temel sonuçlardan biri de bir $I$ monom idealinin tanımladığı çeşitlemin boyutunun, dereceler artarken $I$ ideali içine düşmeyen monomların sayısının davranışı ile karakterize edilebildiğidir. Daha açık olarak $I$ içine düşmeyen ve derecesi en fazla $s$ olan monomların sayısı, yeterince büyük $s$ değerleri için, $s$'ye bağlı bir polinom vermektedir ve bu polinomun derecesi $V(I)$ çeşitleminin boyutudur (bkz. [6, Proposition 7, §9.2]). Bu ilginç sonuç kademeli halkalar üzerinden tanımlanan Hilbert fonksiyonu ve Hilbert Polinomu hakkında yukarıda verilen Teorem 4.1.12'ün de esin kaynağı olarak onun özel bir halini yansıtır. Bunu görmek için $k$ bir cisim olmak üzere $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ polinom halkası standart kademeli halka olarak ele alınsın. $I \subsetneqq k[x_1, \ldots, x_n]$ bir monom ideali ise (yani $I$, $k[x_1, \ldots, x_n]$ polinom halkasının monomları ile üretilen bir ideal ise) $E = k[x_1, \ldots, x_n]/I$ bölüm modülü de $k[x_1, \ldots, x_n]$ üzerinde bir kademeli modül olur. Aslında her $i = 0, 1, \ldots$ için $I_i$, $k[x_1, \ldots, x_n]$ kademeli halkasının $I$ içine düşen $i$ dereceli monomları tarafından gerilen $k$–uzayını gösterirse

$$E = k[x_1, \ldots, x_n]/I \approx k \oplus (R_1/I_1) \oplus (R_2/I_2) \oplus \cdots$$

yazılabilir. Dikkat edilirse her $i = 0, 1, \ldots$ için $\dim_k(R_i/I_i)$, $k[x_1, \ldots, x_n]$ kademeli halkasının $I$ içine düşmeyen $i$ dereceli monomlarının sayısını verir. Dolayısıyla derecesi en fazla $s$ olan ve $I$ içine düşmeyen monomların sayısı

$$\sum_{i=0}^{s} \dim_k(R_i/I_i) = HS_E(s)$$

olarak bulunur. Böylece $I$ içine düşmeyen ve derecesi en fazla $s$ olan monomların sayısı, yeterince büyük $s$ değerleri için, $s$'ye bağlı bir polinom olur ve bu polinom $E$'nin $R$ üzerindeki Hilbert-Samuel polinomudur. Teorem 4.1.12'den dolayı $HS_E(s)$ polinomunun derecesi $k[x_1, \ldots, x_n]/I$ halkasının (Krull) boyutuna eşittir.

Şimdi aşağıdaki örnek ile bazı monom idealleri için Hilbert-Samuel polinomu hesaplansın.

**Örnek 4.2.1.** $k$ bir cisim ve $I \subsetneqq k[x, y]$ bir monom ideali olsun. $E = k[x, y]/I$, yukarıda olduğu gibi, $k[x, y]$ üzerindeki kademeli modül olsun. Dikkat edilirse $V(I)$ aşağıdaki kümelerden birine eşittir:

(a) $\{(0,0)\}$

(b) $x$–ekseni

(c) $y$–ekseni

(d) $x$–ekseni ile $y$–ekseninin birleşimi

Eğer $V(I) = \{(0,0)\}$ ise o zaman $x^a \in I$ ve $y^b \in I$ olacak şekilde $a, b > 0$ tamsayıları vardır. Dolayısıyla $I$ idealinin içine düşemeyen monomların sayısı sonludur ve $C_0 \leq ab$ olacak şekilde bir $C_0$ sayısına eşittir. Bu durumda $s > a + b$ için $HS_E(s)$ bir sabit polinoma eşittir.

Eğer (b) durumu gerçekleşirse o zaman $I$ ideali $x$'in hiçbir kuvvetini içermez. Ayrıca $y$–ekseni $V(I)$ tarafından içerilmediğinden $y^b \in I$ olacak şekilde bir $b > 0$ tamsayı vardır. $\ell$, $I$ içindeki monomlar arasında $y$'nin kuvvetlerinin en küçüğü olsun. Buna göre $I$ içine düşmeyen monomlar sonlu sayıdaki bazı monomlara ek olarak

$$\mathcal{A} = \{x^i y^j : i \geq 0 \text{ ve } 0 \leq j \leq \ell - 1\}$$

kümesinin elemanlarıdır. Kolayca görülebilir ki $s > \ell$ için $\mathcal{A}$'nın derecesi en fazla $s$ olan elemanlarının sayısı

$$\ell(s+1) - (1 + 2 + \cdots + \ell - 1)$$

şeklinde verilebilir. Dolayısıyla yeterince büyük $s$ değerleri için derecesi en fazla $s$ olan ve $I$ içine düşmeyen monomların sayısı $C_0$ bir sabit olmak üzere $\ell s + C_0$ şeklinde verilebilir. Böylece $x^a y^\ell \in I$ ise her $s \geq a+b$ için $HS_E(s) = \ell s + C_0$ olur. (c) durumunda da benzer şekilde bir Hilbert-Samuel fonksiyonu hesaplanabilir.

Son olarak (d) durumunda ise $I$ sadece $x^a y^b$ $(a, b > 0)$ tipindeki monomları içerir. $m$ ve $\ell$ sırasıyla $I$ içindeki monomlar arasında $x$'in ve $y$'nin en düşük kuvvetlerini göstersin. Buna göre $I$ içine düşmeyen monomlar, sonlu sayıdaki bazı monomlara ek olarak

$$\mathcal{A} = \{x^i y^j : 0 \leq i \leq m - 1 \text{ ve } j \geq 0\}$$

ve

$$\mathcal{B} = \{x^i y^j : i \geq 0 \text{ ve } 0 \leq j \leq \ell - 1\}$$

kümelerinin elemanlarıdır. (b) durumundakine benzer bir hesap ile yeterince büyük $s$ tamsayıları için (örneğin $s > a + b$ için) derecesi en fazla $s$ olan ve $I$ içine düşmeyen monomların sayısı $C_0$ bir sabit olmak üzere $(m + \ell)s + C_0$ şeklinde verilebilir. Böylece $s > a + b$ için $HS_E(s) = (m + \ell)s + C_0$ olur.

Daha somut bir örnek için aşağıdaki örnek verilebilir.

**Örnek 4.2.2.** $k$ bir cisim olmak üzere $k[x,y]$ halkasının $I = (x^4y^3, x^2y^5)$ monom ideali ele alınsın. $E = k[x,y]/I$ için $HS_E(s)$ polinomu hesaplanacaktır. Bunun için $I$ içine düşmeyen monomlar belirlensin.

$$x^ay^b \quad \Leftrightarrow \quad x^4y^3 \mid x^ay^b \quad \text{veya} \quad x^2y^5 \mid x^ay^b$$

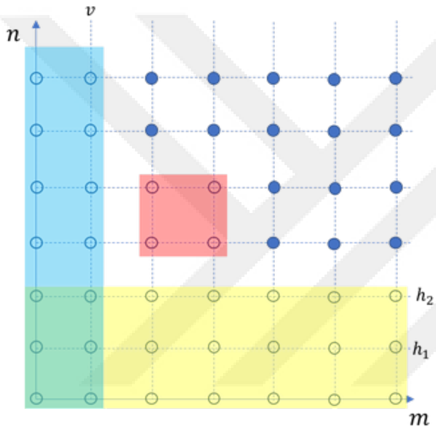
olduğundan $I$ ideali içine düşmeyen monomlar $\{x^2y^3, x^2y^4, x^3y^3, x^3y^4\}$ monomlarına ek olarak

$$\{x^iy^j : i = 0, 1 \text{ ve } j \geq 0\}$$

ve

$$\{x^iy^j : i \geq 0 \text{ ve } j = 0, 1, 2\}$$

kümelerinin elemanlarıdır. Bu durum aşağıdaki grafik ile daha net görülebilir.




$(m, n) \leftrightarrow x^my^n$

Grafikte $I$ idealinin dışında kalan monomlar içi boş dairelerle, $I$ idealinin içinde kalan monomlar ise içi dolu dairelerle temsil edilmiştir. Dikkat edilirse sarı ve yeşil ile boyalı bölgede $s \geq 7$ için derecesi en fazla $s$ olan toplam $(s+1) + s + (s-1) = 3s$ adet monom bulunur. Diğer taraftan mavi ve kırmızı ile boyalı bölgede ise $s \geq 7$ için derecesi en fazla $s$ olan toplam $(s-2) + (s-3) + 4 = 2s - 1$ adet monom vardır. Böylece $s \geq 7$ için $I$ idealinin dışında kalan ve derecesi en fazla $s$ olan monomların sayısı $3s + (2s-1) = 5s - 1$ olarak bulunur. Dolayısıyla $s \geq 7$ için $HS_E(s) = 5s - 1$ dir. Dikkat edilirse $V(I)$ çeşitlemi $x$ ve $y$–eksenlerinin birleşimidir. Buna göre $V(I)$ çeşitleminin boyutu 1 olur. Öte yandan $V(I)$ çeşitleminin boyutunun 1 olduğunu $E$'nin $k[x,y]$ üzerindeki Hilbert-Samuel polinomunun derecesinden de bulunabilir.

$k[x_1, \ldots, x_n]$ polinom halkasının, $\mathbb{N}^n$ kademe monoidine göre bir kademeli halka olarak tanımlanabileceği daha önce de söylenmişti (bkz. Örnek 2.1.5). Ayrıca kademe monoidi üzerinde tanımlanan bir tam sıralamanın kademeli halkayı incelemede ne kadar kolaylık sağladığı da görüldü. Bu nedenle, $\mathbb{N}^n$ kademe monoidi üzerinde, belirli türden bir sıralama düşünülerek incelemeler, monom idealleri dışındaki idealleri de içine alacak şekilde genişletilecektir. Bunun için önce aşağıdaki tanım verilsin.

**Tanım 4.2.3.** $\leq$, $\mathbb{N}^n$ üzerinde, monoid yapısıyla uyumlu bir tam sıralama bağıntısı olsun. Eğer

(i) $\mathbb{N}^n$, $\leq$ bağıntısına göre bir iyi sıralı küme ve

(ii) her $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ için $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n < \beta_1 + \cdots + \beta_n = |\beta|$ iken $\alpha < \beta$

oluyorsa $\leq$ bağıntısına $\mathbb{N}^n$ üzerinde bir *kademeli sıralama* denir.

Dikkat edilirse $\mathbb{N}^n$ kademe monoidinin her $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ elemanı, $k[x_1, \dots, x_n]$'nin $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ monomu ile birebir eşleşir. Buna göre $\mathbb{N}^n$ üzerinde tanımlı bir $\leq$ kademeli sıralaması verildiğinde her $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ için $\alpha < \beta$ iken $x^\alpha < x^\beta$ yazılırsa $k[x_1, \dots, x_n]$'nin monomları arasında da bir sıralama tanımlanmış olur. Burada $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ olmaktadır. Fakat bilinmeyenler arasında farklı sıralamalar tanımlanarak, $\mathbb{N}^n$ üzerindeki kademeli sıralama sayesinde monomlar üzerinde farklı sıralamalar da verilebilir. Monomların kümesi üzerinde bu şekilde tanımlanan bir sıralama, $\mathbb{N}^n$ üzerindeki sıralama ile eşdeğerdir. Bu nedenle monomların kümesi üzerinde yukarıdaki gibi elde edilen bir sıralamaya, çoğunlukla, $k[x_1, \dots, x_n]$ üzerindeki bir *kademeli monom sıralaması* denilecektir. Buna göre $\mathbb{N}^n$ üzerindeki bir kademeli sıralama ile ona eşdeğer olan $k[x_1, \dots, x_n]$ üzerindeki kademeli monom sıralaması, birbirinin yerine geçecek şekilde, aynı anlamda kullanılacaktır.

**Örnek 4.2.4** (Sözlük Sıralaması)**.** $\mathbb{N}^n$ üzerinde $\leq_{\text{söz}}$ ile gösterilen bir bağıntı şöyle tanımlansın: Her $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ için $\alpha \leq_{\text{söz}} \beta$ ancak ve ancak $\alpha = \beta$ veya $\alpha - \beta$ sıralı $n$–lisinin soldan sağa sıfırdan farklı ilk bileşeni bir negatif tamsayıdır. Bu şekilde tanımlanan $\leq_{\text{söz}}$ bağıntısı $\mathbb{N}^n$ üzerinde bir tam sıralama bağıntısıdır. Üstelik $\leq_{\text{söz}}$ bağıntısı $\mathbb{N}^n$'nin monom yapısı ile uyumludur ve $\mathbb{N}^n$, $\leq_{\text{söz}}$ bağıntısına göre iyi sıralıdır. Ancak kolayca görülebilir ki $\leq_{\text{söz}}$ bağıntısı $\mathbb{N}^n$ üzerinde bir kademeli sıralama değildir.

**Örnek 4.2.5** (Kademeli Sözlük Sıralaması)**.** $\mathbb{N}^n$ üzerinde $\leq_{\text{k.söz}}$ ile gösterilen bir bağıntı şöyle tanımlansın: Her $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ için $\alpha \leq_{\text{k.söz}} \beta$ ancak ve ancak $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i < |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$ veya $|\alpha| = |\beta|$ ve $\alpha \leq_{\text{söz}} \beta$. Buna göre $\leq_{\text{k.söz}}$ bağıntısı $k[x_1, \dots, x_n]$ üzerinde bir kademeli sıralama tanımlar. Bu kademeli sıralamaya *kademeli sözlük sıralaması* adı verilir.

$\mathbb{N}^n$ kademe monoidi üzerinde bir kademe sıralaması alarak $k[x_1, \dots, x_n]$ polinom halkasını $\mathbb{N}^n$ kademe monoidine göre bir kademeli halka olarak ele almak, $k[x_1, \dots, x_n]$ halkasını incelemede büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Bunun en iyi örneği Bölme Algoritmasının verilmesi ve Gröbner tabanlarının hesaplanmasında görülür.

$\leq$, $k[x_1, \dots x_n]$ üzerinde bir kademeli monom sıralaması olsun. Bir $0 \neq f \in k[x_1, \dots, x_n]$ verildiğinde $f$'yi oluşturan monomlar arasında $\leq$ bağıntısına göre en büyük olan monoma *$f$'nin baş monomu*; $f$'nin baş monomunun katsayısına ise *$f$'nin başkatsayı* denir ve sırasıyla $BM(f)$ ve $BK(f)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $BK(f).BM(f)$ çarpımına da *$f$'nin baş terimi* denir ve $BT(f)$ ile gösterilir. Eğer $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ sıfırdan farklı bir ideal ise $BT(I)$ kümesini $I$'nın sıfırdan farklı elemanlarının baş terimlerinin kümesi olarak tanımlansın. Genelde $BT(I)$ kümesi bir ideal değildir. Bu nedenle $k[x_1, \ldots, x_n]$ halkasının $BT(I)$ kümesi tarafından üretilen $< BT(I) >$ ideali düşünülecektir. $< BT(I) >$ ideali bir monom idealidir ve $< BT(I) >= (BT(f_1), \ldots, BT(f_s))$ olacak şekile sonlu tane sıfırdan farklı $f_1, \ldots, f_s \in I$ elemanları vardır. Bu şekildeki $f_1, \ldots f_s$ elemanlarının kümesine $I$ idealinin bir *Gröbner tabanı* denir. Dikkat edilirse $< BT(I) >$ monom ideali ile $I$'nın Gröbner tabanları, $k[x_1, \ldots, x_n]$ üzerindeki monom sıralamasına bağlıdır. Gröbner tabanları bir polinomun sıfırdan farklı bir ideal tarafından içerilip içerilmediğinin belirlenmesinde azımsanamayacak derecede büyük kolaylık sağlamaktadır.

$I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ bir öz ideal olsun. Her $s \geq 0$ tamsayısı için $k[x_1, \ldots, x_n]_{\leq s}$ ile $k[x_1, \ldots, x_n]$ kademeli halkasının standart kademeli yapısına göre derecesi en fazla $s$ olan polinomların kümesi; $I_{\leq s}$ ile de $I$ ideali içinde derecesi en fazla $s$ olan elemanların kümesi gösterilsin. Buna göre $k[x_1, \ldots, x_n]_{\leq s}$ bir sonlu boyutlu $k$–uzayıdır ve $I_{\leq s}$, $k[x_1, \ldots, x_n]_{\leq s}$ uzayının bir alt uzayıdır. Pozitif tamsayılar üzerinde

$$\begin{aligned} {}^{a}H_I(s) &= \dim_k \left(k[x_1, \ldots, x_n]_{\leq s}/I_{\leq s}\right) \\ &= \dim_k(k[x_1, \ldots, x_n]_{\leq s}) - \dim_k(I_{\leq s}) \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın. ${}^{a}H_I$ fonksiyonuna *$I$ idealinin afin Hilbert fonksiyonu* denir. Aşağıdaki sonuç herhangi bir $I \subsetneqq k[x_1, \ldots, x_n]$ idealinin afin Hilbert fonksiyonunun $s$'nin yeterince büyük tamsayıları için bir polinoma eşit olacağını söylemektedir.

**Teorem 4.2.6** (Macaulay)**.** *[6, Proposition 4, §9.3] $I \subsetneqq k[x_1, \ldots, x_n]$ bir ideal olsun. $J$, $k[x_1, \ldots, x_n]$ üzerindeki bir kademeli monom sıralamasına göre belirlenen $< BT(I) >$ monom idealini göstersin. Buna göre $I$'nın afin Hilbert fonksiyonu ${}^{a}H_I$ ile $k[x_1, \ldots, x_n]/J$ kademeli modülünün $k[x_1, \ldots, x_n]$ üzerindeki Hilbert-Samuel fonksiyonu aynıdır.*

$I \subsetneqq k[x_1, \ldots, x_n]$ bir ideal olsun. ${}^{a}H_I$ fonksiyonunun yeterince büyük $s$ tamsayıları için eşit olduğu polinoma *$I$'nın afin Hilbert polinomu* denir.

$V$ bir afin çeşitlem olmak üzere

$$\mathcal{I}(V) = \{f \in k[x_1, \ldots, x] : \text{her } (a_1, \ldots, a_n) \in V \text{ için } f(a_1, \ldots, a_n) = 0\}$$

kümesi tanımlansın. Kolayca görülebilir ki $\mathcal{I}(V)$, $k[x_1, \ldots, x_n]$'nin bir idealidir. ${}^{a}H_{\mathcal{I}(V)}(s)$ afin Hilbert polinomunun derecesine *$V$ çeşitleminin boyutu* denir.

**Teorem 4.2.7.** *[6, Theorem 8, §9.3] $I \subsetneqq k[x_1, \ldots, x_n]$ olmak üzere $V = V(I)$ olsun. Eğer $k$ cismi cebirsel kapalı ise o zaman $V$'nin boyutu ${}^{a}H_I$ polinomunun derecesine* *eşittir. Dolayısıyla $J$, $k[x_1, \ldots, x_n]$ üzerindeki bir kademeli monom sıralamasına göre belirlenen $< BT(I) >$ monom idealini gösterirse, $V$'nin boyutu ile $k[x_1, \ldots, x_n]/J$ halkasının Krull boyutu aynıdır.*

**Örnek 4.2.8.** $k[x, y, z, w]$ halkasının $I = (x^3 - yzw, xy - z^2, x^2z - y^2w)$ ideali alınsın. Her $s \geq 0$ tamsayısı için $k[x_1, \ldots, x_n]_s$ $s$–dereceli homojen polinomların kümesi olmak üzere $I_s = I \cap k[x_1, \ldots, x_n]_s$ olsun. $I$ bir homojen ideal olduğundan $I_{\leq s} = \bigoplus_{j=0}^{s} I_j$ olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} {}^aH_I(s) &= \dim_k \left(k[x_1, \ldots, x_n]_{\leq s}/I_{\leq s}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{s} \dim_k \left(k[x_1, \ldots, x_n]_j/I_j\right) \\ &= HS_{k[x_1,\ldots,x_n]/I}(s) \end{aligned}$$

olur. $x > y > z > w$ olmak üzere $k[x, y, z, w]$ üzerinde kademeli sözlük monom sıralaması alınsın. Buna göre $I$ idealinin bir Gröbner tabanı

$$\{y^4w - z^5, xz^3 - y^3w, xy - z^2, x^2z - y^2w, x^3 - yzw\}$$

şeklinde verilebilir. Dolayısıyla $J =< BT(I) >= (y^4w, xz^3, xy, x^2z, x^3)$ yazılabilir. Şimdi $H_{k[x_1,\ldots,x_n]/J}$ fonksiyonu hesaplansın. Bunun için $J$ monom ideali dışında kalan monomların belirlenmesi gerekir. Kolayca görülebilir ki $J$ idealinin dışında kalan monomlar

$$\mathcal{A} = \{y^az^bw^c : a < 4 \text{ veya } c = 0\},$$

$$\mathcal{B} = \{xy^az^bw^c : a = 0 \text{ ve } b < 3\},$$

$$\mathcal{C} = \{x^2y^az^bw^c : a = b = 0\}$$

kümelerinin elemanlarıdır. Dikkat edilirse $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{C}$ kümeleri ikişer ikişer ayrıktır. $s \geq 3$ için $\mathcal{A}$ kümesindeki derecesi en fazla $s$ olan monomların sayısı

$$2\binom{s+2}{2} + \binom{s+1}{2} + \binom{s}{2} + \binom{s-1}{2} - [(s+1) + s + (s-1) + (s-2)] = \frac{5}{2}s^2 + \frac{3}{2}s + 5$$

olarak bulunur. Öte yandan $s \geq 2$ için $\mathcal{B}$ kümesindeki derecesi en fazla $s$ olan monomların sayısı

$$s + (s-1) + (s-2) = 3s - 3$$

şeklinde bulunur. Son olarak $s \geq 2$ için $\mathcal{C}$ kümesindeki derecesi en fazla $s$ olan monomların sayısı ise $s-1$ dir. Böylece Teorem 4.2.6 sayesinde $s \geq 3$ için

$$\begin{aligned} HS_{k[x_1,\dots,x_n]/I}(s) = {}^{a}H_I(s) = HS_{k[x_1,\dots,x_n]/J}(s) &= \left(\frac{5}{2}s^2 + \frac{3}{2}s + 5\right) + (3s-3) + s - 1 \\ &= \frac{5}{2}s^2 + \frac{11}{2}s + 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

## 4.3 Uygulama I: Samuel Limit Formülü

Daha önce elde edilen sonuçlar, bu bölümde genel çokkatlılığın özelliklerini geliştirmek için kullanılacaktır. $E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1,\dots,\gamma_s$ elemanları $E$–modülü üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. $A = \gamma_1 R + \cdots + \gamma_s R$ olarak alınsın. O halde $A$ sonlu üretilmiş bir idealdir. $x_1,\dots,x_s$ elemanları bilinmeyenleri göstemek için kullanılsın. Çokkatlı sistemin her elemanı için bir bilinmeyen vardır. Eğer $n \geq 0$ ise o zaman $\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E \subseteq A^nE$ olur.

İddia 1: Bu nedenle her $n$ için $l_R\left\{E/A^nE\right\} < \infty$ olur: $\gamma_1^{n_1}E+\cdots+\gamma_s^{n_s}E \subseteq A^nE \subseteq E$ olduğundan

$$l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E}\right\} = l_R\left\{\frac{E}{A^nE}\right\} + l_R\left\{\frac{A^{nE}}{\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E}\right\}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sol tarafı sonlu olduğundan her $n$ için $l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1^{n_1}E+\cdots+\gamma_s^{n_1}E}\right\} < \infty$ olur.

Şimdi

$$M = \left(\frac{E}{AE}\right) \oplus \left(\frac{AE}{A^2E}\right) \oplus \left(\frac{A^2E}{A^3E}\right) \oplus \cdots$$

olsun.

İddia 2: $M$ kademeli $R[x_1,\dots,x_s]$–modül yapısına sahiptir. $n$. dereceden homojen eleman grubu sadece $A^nE/A^{n+1}E$ olur. Bu yapıyı açıklamak için $\eta \in A^nE/A^{n+1}E$ ve $y \in A^nE$ elemanı $\eta$'nın temsilcisi olarak alınsın. Ayrıca

$$\phi(x) = \sum_{\mu_1+\cdots+\mu_s=m} r_{\mu_1\dots\mu_s} x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\dots x_s^{\mu_s}$$

$R[x_1,\dots,x_s]$–halkasının $m$–dereceli homojen bir elemanı olsun. O zaman $\phi(x)\eta \in A^{m+n}E/A^{m+n+1}E$ olur ve

$$\phi(x)\eta = \sum_{\mu_1+\cdots+\mu_s=m} r_{\mu_1\dots\mu_s}\gamma_1^{\mu_1}\dots\gamma_s^{\mu_s}y$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Dolayısıyla $M$ bu yolla bir kademeli $R[x_1,\dots,x_s]$–modül yapılabilir. Burada modül işlemi $\cdot : R[x_1,\dots,x_s]\times M \to M$,

$$
\begin{aligned}
\phi(x)\eta &= \left(\sum_{\mu_1+\cdots+\mu_s=m} r_{\mu_1\ldots\mu_s} x_1^{\mu_1}\ldots x_s^{\mu_s}\right).\left(y+A^{n+1}E\right)\\
&= \sum_{\mu_1+\cdots+\mu_s=m} r_{\mu_1\ldots\mu_s}\gamma_1^{\mu_1}\ldots\gamma_s^{\mu_s} y + A^{n+1}E \in A^{m+n}E/A^{m+n+1}E \subseteq M
\end{aligned}
$$

olur. $M$ kademeli olduğu için tanımından $M=\sum_\gamma M^{(\gamma)}$ ve $M^{(\gamma)}=A^{(\gamma)}E/A^{(\gamma+1)}E$ yazılabilir. Modül işleminin tanımı gereği her $\gamma,\gamma' \in \mathbb{N}$ için $R^{(\gamma)}M^{(\gamma')} \subseteq M^{(\gamma)+(\gamma')}$ olur. $E$ bir Noether $R$–modül olduğundan sonlu üretilmiştir. O halde $e_1,\ldots,e_q \in E$ için $E=Re_1+\cdots+Re_q$ olsun ve $\widetilde{e_i}$ ile $e_i$ elemanının $E/AE$ alt modülündeki doğal görüntüsü gösterilsin. Bu nedenle $\widetilde{e_i}$, $M$ modülünün 0–dereceli homojen elemanıdır. O zaman

$$M=R[x_1,\ldots,x_s]\widetilde{e_1}+\cdots+R[x_1,\ldots,x_s]\widetilde{e_q}$$

elde edilir. $R[x_1,\ldots,x_s]$ yerine $R[x]$ kısaltması kullanılacaktır. $l_R(M_n)=l_R\left\{A^nE/A^{n+1}E\right\} < \infty$ olur. Bu nedenle $M$ bir kademeli $R[x]$–modül olarak göz önüne alındığında yukarıda tanımlanan durumda bir Hilbert $R[x]$–modül olur. Ayrıca $E \supseteq AE \supseteq A^2E \supseteq \ldots \supseteq A^nE$ ve $l_R(M_n)=l_R\left\{A^nE/A^{n+1}E\right\}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
l_R\left\{E/A^nE\right\} =& l_R\left\{E/AE\right\}+l_R\left\{AE/A^2E\right\}+\cdots+l_R\left\{A^{n-1}E/A^nE\right\}\\
=& l_R(M_0)+l_R(M_1)+\cdots+l_R(M_{n-1})
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $l_R\left\{E/A^nE\right\}=HS_M(n-1)$ olur. O halde

$$HS_M(n)=\sum_{\nu=0}^{s} h_\nu^*(M)\binom{n+v}{v} \tag{4.3.1}$$

ile $n$ yeterince büyük olduğunda $+\cdots$ $n$'nin derecesi $s$'den daha küçük olan bir polinomunu göstermek üzere $l_R\left\{E/A^nE\right\}=h_s^*(M)\frac{n^s}{s!}+\cdots$ yazılabilir.

$$e(s,A,E)=\lim_{n\to\infty}\frac{l_R(E/A^nE)}{n^s/s!}=h_s^*(M)$$

olsun.

İddia: $e(s,A,E)=e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E)$ olur: $s=0$ iken $e(0,(0),E)=l_R(E)$ tanımdan direkt elde edilir. Dolayısıyla $s=0$ durumunda idda doğrudur. $s\geq 1$ olsun ve $\overline{E}=\frac{E}{\gamma_1E}$ , $\overline{A}=\gamma_2R+\ldots+\gamma_sR$ olarak alınsın. O zaman $E$ Noether $R$–modül olduğundan $E$'nin bir $\overline{E}$ bölüm modülü bir Noether $R$–modül olur. Ayrıca $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_s$ elemanları $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olduğundan bu elemanlar $\overline{E}$ üzerinde bir çokkatlı sistemdir. Ayrıca $\gamma_1$, $E/\gamma_1E$ bölüm modülünü sıfırladığından $\gamma_1$ diziden çıkarılabilir. Dolayısıyla $\gamma_2,\ldots,\gamma_s$, $\overline{E}$ üzerinde bir çokkatlı sistem olur. $\gamma_1$, $\overline{E}$ modülünü sıfırladığından

$$(\overline{A})^n\overline{E} = A^n\overline{E} = A^n\left(E/(\gamma_1 E)\right) = (A^nE + \gamma_1 E)/\gamma_1 E$$

olur. Buradan

$$\overline{E}/\left((\overline{A})^n\overline{E}\right) = (E/\gamma_1 E)\,/\,((A^nE + \gamma_1 E)/\gamma_1 E) \approx E/\left(A^nE + \gamma_1 E\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} l_R\left\{\overline{E}/(\overline{A})^n\overline{E}\right\} = l_R\left\{E/\left(A^nE + \gamma_1 E\right)\right\} \\ &= l_R\left\{E/A^nE\right\} - l_R\left\{\left(\gamma_1 E + A^nE\right)/A^nE\right\} \\ &= l_R\left\{E/A^nE\right\} - l_R\left\{\gamma_1 E/\left(\gamma_1 E \cap A^nE\right)\right\} \\ &= l_R\left\{E/A^nE\right\} - l_R\left\{\gamma_1 E/\left(\gamma_1(A^nE :_E \gamma_1)\right)\right\} \end{aligned}$$

olur. $E \to \gamma_1 E$ epimorfizması $\gamma_1$ ile çarpma işlemidir. Ayrıca $\gamma_1\left(A^nE :_E \gamma_1\right)$ alt modülünün öngörüntüsü $\left(A^nE :_E \gamma_1\right)$ olur. Bu nedenle $\gamma_1 E/\gamma_1\left(A^nE :_E \gamma_1\right) \approx E/\left(A^nE :_E \gamma_1\right)$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} l_R\left\{\overline{E}/(\overline{A})^n\overline{E}\right\} &= l_R\left\{E/A^nE\right\} - l_R\left\{E/(A^nE :_E \gamma_1)\right\} \\ &\geq l_R\left\{E/A^nE\right\} - l_R\left\{E/A^{n-1}E\right\} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $+\ldots$ ile $n$'nin derecesi $s$'den daha küçük olan bir polinomu gösterilsin. O halde $l_R\left\{E/A^nE\right\} = h_s^*(M)\left(n^s/s!\right) + \cdots$ ve $e(s,A,E) = \lim_{n\to\infty} \frac{l_R\{E/A^nE\}}{n^s/s!} = h_s^*(M)$ olduğu göz önüne alınırsa, yeterince büyük $n$ için $l_R\left\{E/A^nE\right\} = e(s,A,E)\left(n^s/s!\right) + \cdots$ olur. Buradan $n$ yeterince büyük iken

$$l_R\left\{E/A^nE\right\} - l_R\left\{E/A^{n-1}E\right\} = e(s,A,E)\left(n^{s-1}/(s-1)!\right)$$

elde edilir. Bu nedenle

$$l_R\left\{\overline{E}/(\overline{A})^n\overline{E}\right\} \geq l_R\left\{E/A^nE\right\} - l_R\left\{E/A^{n-1}E\right\} = e(s,A,E) + \cdots\left(n^{s-1}/(s-1)!\right)$$

olur. Yukarıda elde edilen eşitliğin her iki tarafı $n^{s-1}/(s-1)!$ ile çarpılıp $n \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\lim{}_{n\to\infty}\frac{l_R\left\{\overline{E}/(\overline{A})^n\overline{E}\right\}}{n^{s-1}/(s-1)!} \geq \lim{}_{n\to\infty} e(s,A,E)$$

olur. Dolayısıyla $e(s-1,A,E) \geq e(s,A,E)$ elde edilir. Eğer $s \geq 2$ ise o zaman yukarıdaki argüman tekrar edilebilir. O halde $\overline{\overline{A}} = \gamma_3 R + \ldots + \gamma_s R$ ve $\overline{\overline{E}} = \overline{E}/\gamma_2\overline{E}$ olmak üzere

$e(s-2,\overline{\overline{A}},\overline{\overline{E}}) \geq e(s-1,\overline{A},\overline{E})$ olur. Ayrıca $\overline{\overline{E}} = (E/\gamma_1 E)/\gamma_2(E/\gamma_1 E) \approx E/(\gamma_1 E + \gamma_2 E)$ olduğundan

$$e(s,A,E) \leq e\left(s-1,\overline{A},E/\gamma_1 E\right) \leq e\left(s-2,\overline{\overline{A}},E/(\gamma_1 E+\gamma_2 E)\right)$$

elde edilir. Ayrıca $e(0,(0),E) = l_R(E)$ olduğu da göz önüne alınırsa o zaman

$$e(s,A,E) \leq e(0,(0),E/(\gamma_1 E+\cdots+\gamma_s E)) = l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1 E+\cdots+\gamma_s E}\right\}$$

olur. Notasyonlar değiştirilirse

$$e(s,A,E) = \lim{}_{n\to\infty}\frac{l_R\{E/A^n E\}}{n^s/s!} \leq l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1 E+\cdots+\gamma_s E}\right\}$$

yazılabilir. Elde edilen ilişkide $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ yerine, $p$ keyfi bir pozitif tamsayı olmak üzere$\gamma_1^p,\ldots,\gamma_s^p$ alınsın. Ayrıca

$$\left(\gamma_1^p R+\cdots+\gamma_s^p R\right)^n E \subseteq (\gamma_1 R+\cdots+\gamma_s R)^{np} E \subseteq E$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
e(s,A,E) &= \lim{}_{n\to\infty}\frac{l_R\{E/(\gamma_1 R+\cdots+\gamma_s R)\}}{(np)^s/s!}\\
&\leq \lim_{n\to\infty}\frac{l_R\{E/\left(\gamma_1^p R+\cdots+\gamma_s^p R\right)^n E\}}{(np)^s/s!}\\
&\leq \frac{l_R\{E/\left(\gamma_1^p E+\cdots+\gamma_s^p E\right)\}}{p^s}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $p\to\infty$ olsun ve Teorem 3.3.1 uygulansın. O halde

$$e(s,A,E) \leq \lim{}_{p\to\infty}\frac{l_R\{E/\left(\gamma_1^p E+\cdots+\gamma_s^p E\right)\}}{p^s} = e_R\left(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E\right)$$

elde edilir. Şimdi $e(s,A,E) \leq e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E)$ eşitsizliği gösterilsin. $n_1,\ldots,n_s$ pozitif tamsayılar ve

$$U = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\left\{\left(A^n E \cap \left(A^{n+1}E+\gamma_1^{n_1}E+\cdots+\gamma_s^{n_s}E\right)\right)/A^{n+1}E\right\}$$

olsun. $U$ kümesi $M$ modülünün bir homojen $R[X]$–altmodülüdür ve $x_1^{n_1}M+x_2^{n_2}M+\cdots+x_s^{n_s}M \subseteq U \subseteq M$ olur. Bu nedenle $l_R\{M/\left(x_1^{n_1}M+\cdots+x_s^{n_s}M\right)\} \geq l_R\{M/U\}$ elde edilir. $F = \gamma_1^{n_1}E+\cdots+\gamma_s^{n_s}E$ olsun. O zaman

$$\frac{M}{U} = \frac{\bigoplus_{n=0}^{\infty}\left(A^n E/A^{n+1}E\right)}{\bigoplus_{n=0}^{\infty}\left\{\left(A^n E\cap\left(A^{n+1}E+F\right)\right)/A^{n+1}E\right\}} \approx \bigoplus_{n=0}^{\infty}\left\{A^n E/\left(A^n E\cap\left(A^{n+1}E+F\right)\right)\right\}$$

olduğundan

$$M/U \approx \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left\{A^nE/\left(A^nE \cap \left(A^{n+1}E + F\right)\right)\right\}$$

$R$–modül izomorfizması vardır. Ayrıca

$$\begin{aligned}\frac{A^nE}{A^nE \cap (A^{n+1}E+F)} &\approx \frac{A^nE + A^{n+1}E + F}{A^{n+1}E+F}\\ &\approx \frac{A^nE+F}{A^{n+1}E+F}\end{aligned}$$

olduğundan $M/U \approx \bigoplus_{n=0}^{\infty} (A^nE+F)/(A^{n+1}E+F)$ elde edilir. $n \geq n_1 + n_2 + \cdots + n_s$ iken $A^nE \subseteq F = (\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E)$ olur. Bu nedenle $A^nE + F = F$ elde edilir. Buradan

$$l_R\{M/U\} = \sum_{n\geq 0} l_R\left\{\frac{A^nE+F}{A^{n+1}E+F}\right\} = l_R\{E/F\}$$

olur. Dolayısıyla

$$l_R\left\{\frac{E}{\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E}\right\} \leq l_R\left\{\frac{M}{x_1^{n_1}M + \cdots + x_s^{n_s}M}\right\}$$

yazılabilir. Bir sonraki adımda

$$l_R\{M/(x_1^{n_1}M + \cdots + x_s^{n_s}M)\} = l_{R[X]}\{M/(x_1^{n_1}M + \cdots + x_s^{n_s}M)\}$$

olduğu gösterilecektir.

Şimdi kanıta devam etmeden önce elde etdilen sonuçlar göz önüne alınsın.

$$\begin{aligned}\frac{l_R\{E/(\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E)\}}{n_1n_2\ldots n_s} &\leq \frac{l_R\{M/(x_1^{n_1}M + \cdots + x_s^{n_s}M)\}}{n_1n_2\ldots n_s}\\ &= \frac{l_{R[X]}\{M/(x_1^{n_1}M + \cdots + x_s^{n_s}M)\}}{n_1n_2\ldots n_s}\end{aligned}$$

olduğundan Lemma 3.3.1 gereğince $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \leq e_{R[X]}(x_1, \ldots, x_s \mid M)$ olur. Ayrıca Teorem 4.1.6 ve $e(s, A, E) = \lim_{n\to\infty} \frac{l_R\{E/A^nE\}}{n^s/s!} = h_s^*(M)$ ile

$$e_{R[X]}(x_1, \ldots, x_s \mid M) = h_s^*(M) = e(s, A, E)$$

olur. Bu nedenle

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \leq e(s, A, E)$$

elde edilir. Daha önce

$$e(s, A, E) \leq e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$$

olduğu söylenmişti. O halde elde edilen sonuç ile bir sonraki teoreme geçilebilir.

**Teorem 4.3.1.** *[1, Theorem 13, §7.7] E bir Noether $R$– modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. Eğer şimdi $A = \gamma_1 R + \cdots + \gamma_s R$ ise o zaman*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_R\left\{E/A^n E\right\}}{n^s/s!} = e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$$

*olur. Ayrıca $M$ bir $R[x_1, \ldots, x_s]$–modül olmak üzere*

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = e_{R[X]}(x_1, \ldots, x_s \mid M)$$

*elde edilir.*

*Kanıt.* Teoremin ifadesinde $e(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$ değerine eşit olan $\lim_{n\to\infty} \frac{l_R\{E/A^n E\}}{n^s/s!}$ limit formülü P. Samuel limit formülüdür. Daha önce yaıpılan açıklamalardan sonra

$$l_R\left\{\frac{M}{x_1^{n_1}M + \cdots + x_s^{n_s}M}\right\} = l_{R[X]}\left\{\frac{M}{x_1^{n_1}M + \cdots + x_s^{n_s}M}\right\}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. O halde $I$, $x_1, \ldots, x_s$ ile üretilen bir $R[X]$–ideal olsun ve $n$ tamsayısı $n \geq n_1 + \cdots + n_s$ olacak şekilde alınsın. O zaman $I^n M \subseteq x_1^{n_1}M + \cdots + x_s^{n_s}M$ olur. Şimdi

$$l_R\left\{\frac{M}{x_1^{n_1}M + \cdots + x_s^{n_s}M}\right\} \geq l_{R[X]}\left\{\frac{M}{x_1^{n_1}M + \cdots + x_s^{n_s}M}\right\}$$

ve

$$l_R\left\{\frac{x_1^{n_1}M + \cdots + x_s^{n_s}M}{I^n M}\right\} \geq l_{R[X]}\left\{\frac{x_1^{n_1}M + \cdots + x_s^{n_s}M}{I^n M}\right\}$$

olur. Çünkü her $R[X]$–modül ayrıca bir $R$–modüldür. Bundan dolayı eğer

$$l_R\left\{M/I^n M\right\} = l_{R[X]}\left\{M/I^n M\right\} < \infty$$

olduğu gösterilirse aranılan sonuç da elde edilecektir. Şimdi

$$l_R\left\{M/I^n M\right\} = \sum_{\nu=0}^{n-1} l_R\left\{I^\nu M/I^{\nu+1}M\right\}$$

ve

$$l_{R[X]}\left\{M/I^nM\right\} = \sum_{\nu=0}^{n-1} l_{R[X]}\left\{I^\nu M/I^{\nu+1}M\right\}$$

olur. Ayrıca her $1 \leq i \leq s$ için $x_i$ elemanı $I^\nu M/I^{\nu+1}M$ bölüm modülünü sıfırlar. Bu nedenle $I^\nu M/I^{\nu+1}M$ modülünün $R[X]$–alt modülleri ile $R$–alt modülleri aynıdır. O halde

$$l_R\left\{I^\nu M/I^{\nu+1}M\right\} = l_{R[X]}\left\{I^\nu M/I^{\nu+1}M\right\}$$

olur. Ayrıca $l_{R[X]}\left\{I^\nu M/I^{\nu+1}M\right\} < \infty$ elde edilir. Çünkü Önerme 4.1.3 gereğince $x_1, \ldots, x_s$ elemanları $M$ üzerinde bir çokkatlı sistemdir. Böylece kanıt tamamlanır. □

**Teorem 4.3.2.** *$E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ ile $\gamma_1', \ldots, \gamma_s'$ $E$ üzerinde çokkatlı sistemler olsun. Ayrıca*

$$\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E \subseteq \gamma_1' E + \cdots + \gamma_s' E$$

*olsun. O zaman $K$, $E$–modülünün herhangi bir alt modülü ya da bölüm modülü olmak üzere*

$$e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid K\right) \geq e_R\left(\gamma_1', \ldots, \gamma_s' \mid K\right)$$

*elde edilir.*

*Kanıt.* $s = 0$ için $e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid K\right) = e_R\left(\gamma_1', \ldots, \gamma_s' \mid K\right) = l_R(K)$ olduğundan $s > 0$ kabülü yapılabilir. $\gamma_1 R + \cdots + \gamma_s R = A$ ve $\gamma_1' R + \cdots + \gamma_s' R = A'$ olsun. O zaman $AE \subseteq A'E$ olur. Bu nedenle

$$A^2E = AAE \subseteq AA'E = A'AE \subseteq A'^2E$$

elde edilir. Daha genel durumda $A^nE \subseteq A'^nE \subseteq E$ yazılabilir. Bu nedenle $l_R\left\{E/A^nE\right\} \geq l_R\left\{E/A^nE\right\}$ olur. Eşitsizliğin her iki tarafı $1/\left(n^s/s!\right)$ ile çarpılıp $n \to \infty$ iken limit alınsın. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_R\left\{E/A^nE\right\}}{n^s/s!} = e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E\right)$$

eşitliği ile $e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E\right) \geq e_R\left(\gamma_1', \ldots, \gamma_s' \mid E\right)$ elde edilir. Şimdi $K$, $E$ modülünün bir bölüm modülü olsun. O zaman

$$\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E \subseteq \gamma_1' E + \cdots + \gamma_s' E$$

ile

$$\gamma_1 K + \cdots + \gamma_s K \subseteq \gamma_1' K + \cdots + \gamma_s' K$$

olur. Bu nedenle $e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid K\right) \geq e_R\left(\gamma_1', \ldots, \gamma_s' \mid K\right)$ elde edilir. Son olarak $K \leq E$ olsun. O zaman

$$A'\left(A'^{q}E \cap K\right) = A'^{q+1}E \cap K$$

olacak şekilde bir $q$–tamsayısı vardır. Şimdi $\gamma_1'^{q}\left(K/A'^{q}E \cap K\right) = 0$ olur. ${\gamma_1}^{q}K \subseteq A^{q}E \cap K \subseteq A'^{q}E \cap K$ olduğundan ${\gamma_1}^{q}\left(K/A'^{q}E \cap K\right) = 0$ elde edilir. Buradan Önerme 3.2.9 ile

$$e_R\left(\gamma_1', \ldots, \gamma_s' \mid K\right) = e_R\left(\gamma_1', \ldots, \gamma_s' \mid A'^{q}E \cap K\right) \tag{4.3.2}$$

ve

$$e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid K\right) = e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid A'^{q}E \cap K\right) \tag{4.3.3}$$

elde edilir. O halde

$$A\left(A'^{q}E \cap K\right) \subseteq AA'^{q}E \cap K = A'^{q}AE \cap K \subseteq A'^{q+1}E \cap K = A'\left(A'^{q}E \cap K\right)$$

olur. Bu nedenle

$$\gamma_1\left(A'^{q}E \cap K\right) + \cdots + \gamma_s\left(A'^{q}E \cap K\right) \subseteq \gamma_1'\left(A'^{q}E \cap K\right) + \cdots + \gamma_s'\left(A'^{q}E \cap K\right)$$

elde edilir. Buradan

$$e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid A'^{q}E \cap K\right) \geq e_R\left(\gamma_1', \ldots, \gamma_s' \mid A'^{q}E \cap K\right)$$

olur. Ayrıca 4.3.2 ve 4.3.3 eşitlikleri kullanılarak

$$e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid K\right) \geq e_R\left(\gamma_1', \ldots, \gamma_s' \mid K\right)$$

elde edilir. $\square$

**Sonuç 4.3.3.** *$E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ ile $\gamma_1', \ldots, \gamma_s'$ $E$–üzerinde iki çokkatlı sistem olsun. Eğer şimdi*

$$\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E = \gamma_1' E + \cdots + \gamma_s' E$$

*ise o zaman $K$, $E$ modülünün bir alt modülü ya da bölüm modülü olmak üzere*

$$e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid K\right) = e_R\left(\gamma_1', \ldots, \gamma_s' \mid K\right)$$

*elde edilir.*

$\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E \subseteq \gamma_1' E + \cdots + \gamma_s' E$, $\gamma_1' E + \cdots + \gamma_s' E$ kapsamaları ve Teorem 4.3.2 ile $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid K) \leq e_R(\gamma_1', \ldots, \gamma_s' \mid K)$, $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid K) \geq e_R(\gamma_1', \ldots, \gamma_s' \mid K)$ yazılabilir. Buradan $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid K) = e_R(\gamma_1', \ldots, \gamma_s' \mid K)$ elde edilir.

**Sonuç 4.3.4.** *$R$ halkasının*

$$\gamma_1 R + \cdots + \gamma_s R = \gamma_1^{'} R + \cdots + \gamma_s^{'} R$$

*olacak şekilde $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ ve $\gamma_1^{'}, \ldots, \gamma_s^{'}$ elemanları alınsın. O zaman $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ ve $\gamma_1^{'}, \ldots, \gamma_s^{'}$ elemanlarının üzerinde bir çokkatlı sistem olduğu her Noether $E$, $R$–modülü için*

$$e_R\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E\right) = e_R\left(\gamma_1^{'}, \ldots, \gamma_s^{'} \mid E\right)$$

*olur.*

$R$ halkası kendisi üzerinde bir modül olarak alınırsa Teorem 4.3.2 ile sonuç elde edilir.

## 4.4 Uygulama II

Bu bölüm boyunca $R$ bir yarı yerel halka, $I$, $R$'nin bir tanım ideali ve $M$ bir sonlu üretilmiş $R$–modül olsun. Kabul edelim ki $\dim M = d$ olsun. Bu bölümde, yeterince büyük her $n$ tamsayısı için $M/I^nM$ modüllerinin uzunluklarının bir polinom belirttiği gösterilecektir. Bu nedenle daha önce Hilbert fonksiyonları için elde edilen sonuçları kullanmak amacıyla ilgili kademeli halkalar ele alınacaktır.

**Tanım 4.4.1.** $gr_I(R) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} I^n/I^{n+1}$ ilgili kademeli halkası üzerinde bir $gr_I(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^nM/I^{n+1}M$ ilgili kademeli modülü alınsın. Burada $n = 0$ iken $I^n = R$'dir. $M$ sonlu üretilmiş bir $R$–modül olsun. O zaman $M$ modülünün $I$ idealine göre Hilbert-Samuel fonksiyonu $HS_{M,I}(n) = l\left(\frac{M}{I^{n+1}M}\right)$ olarak tanımlanır.

$$0 \to \frac{I^nM}{I^{n+1}M} \to \frac{M}{I^{n+1}M} \to \frac{M}{I^nM} \to 0 \tag{4.4.1}$$

dizisi ele alınsın.

İddia: 4.4.1 dizisi tamdır:

$$I^{n+1}M \subseteq I^nM \subseteq M \Rightarrow I^nM/I^{n+1}M \subseteq M/I^{n+1}M$$

ve $\left(\left(M/I^{n+1}M\right)/\left(I^nM/I^{n+1}M\right)\right) \approx M/I^nM$ olur. Dolayısıyla içerim dönüşümü ve doğal epimorfizma ile tam dizi elde edilir.

Ayrıca 4.4.1 dizisi tam olduğundan $l\left(M/I^{n+1}M\right) = l\left(I^nM/I^{n+1}M\right) + l\left(M/I^nM\right)$ yazılabilir. O halde

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\leq n} l\left(\frac{I^jM}{I^{j+1}M}\right) &= l\left(\frac{M}{IM}\right) + l\left(\frac{IM}{I^2M}\right) + \cdots + \left(\frac{I^nM}{I^{n+1}M}\right) \\
&= l\left(\frac{M}{IM}\right) + l\left(\frac{M}{I^2M}\right) - l\left(\frac{M}{IM}\right) + l\left(\frac{M}{I^3M}\right) + \cdots + l\left(\frac{M}{I^{n+1}M}\right) - l\left(\frac{M}{I^nM}\right) \\
&= l\left(\frac{M}{I^{n+1}M}\right) \\
&= HS_{M,I}(n)
\end{aligned}
$$

olur. Diğer taraftan

$$
HS_{gr_I(M)}(n) = \sum_{j\leq n} H_{gr_I(M)}(j) = \sum_{j\leq n} l([gr_I(M)]_j) = \sum_{j\leq n} l\left(I^jM/I^{j+1}M\right) = HS_{M,I}(n)
$$

yazılabilir. Dolayısıyla $HS_{M,I}(n) = H_{gr_I(M),1}(n)$ elde edilir. O halde yukarıda yapılan gözlemler ve Teorem 4.1.12 gereğince

$$
\begin{aligned}
\operatorname{der}(HS_M(n)) &= \dim(gr_I(M)) - 1 + 1 \\
&= \dim(gr_I(M)) \\
&= d
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla $M$ modülünün Hilbert-Samuel fonksiyonu derecesi $d$ olan bir polinomdur.

Şimdi $R$ bir yarı-yerel halka, $M$ sonlu üretilmiş bir $R$–modül ve $\mathfrak{m} = Jac(R)$ olsun. $R$'nin bir $I$ tanım ideali alınsın ve $\operatorname{der}(HS_{M,I}) = \dim M$ olduğu gösterilsin. Burada $HS_{M,I}$ , $M$ modülünün $I$ ile belirli Hilbert-Samuel polinomudur. Ayrıca $\operatorname{der}(HS_{M,I}) = \dim(gr_I(M))$ olduğu da bilinmektedir. Dolayısıyla $\dim M = \dim(gr_I(M))$ olduğunu göstermek yeterlidir. O halde $\widetilde{d}_M = \operatorname{der}(HS_{M,I})$ olsun.

İddia 1: $\widetilde{d}_M$, $I$ idealine bağlı değildir: İlk olarak her $n$ için

$$
\mathfrak{m}^{n\theta+1} \subseteq I^{n+1} \subseteq \mathfrak{m}^{n+1} \tag{4.4.2}
$$

olduğu gösterilsin. Bunun için $n$ üzerine tümevarım uygulansın. $n = 0$ için $\mathfrak{m} \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$ dolayısıyla $\mathfrak{m} = I$ elde edilir. $\mathfrak{m}$ ideali bir tanım ideali olduğundan doğrudur. $n-1$ için doğru olsun ve $n$ için doğru olduğu gösterilsin. $\mathfrak{m}^{(n-1)\theta+1} \subseteq I^n \subseteq \mathfrak{m}^n$ olsun. O halde

$$
\mathfrak{m}^{(n-1)\theta+1}\mathfrak{m}^\theta \subseteq I^n\mathfrak{m}^\theta \subseteq I^nI = I^{n+1}
$$

ve

$$
I^nI \subseteq \mathfrak{m}^nI \subseteq \mathfrak{m}^n\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{n+1}
$$

olur. Dolayısıyla tümevarım ile her $n$ için $\mathfrak{m}^{n\theta+1} \subseteq I^{n+1} \subseteq \mathfrak{m}^{n+1}$ elde edilir.

Şimdi

$$HS_{M,\mathfrak{m}}(n) \leq HS_{M,I}(n) \leq HS_{M,\mathfrak{m}}(n\theta)$$

olduğu gösterilsin. $M/\mathfrak{m}^{n\theta+1} \xrightarrow{f} M/I^{n+1} \xrightarrow{g} M/\mathfrak{m}^{n+1}$ dönüşümleri ele alınsın. $f : \frac{M}{\mathfrak{m}^{n\theta+1}} \to \frac{M}{I^{n+1}}$, $f(\alpha + \mathfrak{m}^{n\theta+1}) = \alpha + I^{n+1}$ dönüşümü örten olduğundan

$$\left(M/\mathfrak{m}^{n\theta+1}\right) / \ker f \approx f\left(M/I^{n+1}\right) = M/I^{n}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$l\left(\left(M/\mathfrak{m}^{n\theta+1}\right)/\ker f\right) = l\left(\frac{M}{I^{n+1}}\right) \Rightarrow l\left(\frac{M}{\mathfrak{m}^{n\theta+1}}\right) - l(\ker f) = l\left(\frac{M}{I^{n+1}}\right)$$

Buradan $HS_{M,\mathfrak{m}}(n\theta) \geq HS_{M,I}(n)$ olur. Benzer şekilde $g : \frac{M}{I^{n+1}} \to \frac{M}{\mathfrak{m}^{n+1}}$ , $g(\alpha + I^{n+1}) = \alpha + \mathfrak{m}^{n+1}$ dönüşümü örten olduğundan

$$\left(M/I^{n+1}\right) / \ker g \approx \frac{M}{\mathfrak{m}^{n+1}}$$

elde edilir. O halde

$$l\left(\frac{M}{I^{n+1}}\right) - l(\ker g) = l\left(\frac{M}{\mathfrak{m}^{n+1}}\right) \Rightarrow HS_{M,\mathfrak{m}}(n) \leq HS_{M,I}(n)$$

olur. Dolayısıyla $HS_{M,\mathfrak{m}}(n) \leq HS_{M,I}(n) \leq HS_{M,\mathfrak{m}}(n\theta)$ olduğu söylenebilir.

Şimdi

$$\operatorname{der}\left(HS_{M,\mathfrak{m}}(n)\right) = \operatorname{der}\left(HS_{M,\mathfrak{m}}(n\theta)\right)$$

ve

$$\operatorname{der}\left(HS_{M,m}(n)\right) \leq \operatorname{der}\left(HS_{M,I}(n)\right) \leq \operatorname{der}\left(HS_{M,m}(n\theta)\right)$$

olduğundan

$$\operatorname{der}\left(HS_{M,\mathfrak{m}}(n)\right) = \operatorname{der}\left(HS_{M,I}(n)\right)$$

olur. Buradan $\widetilde{d}_M$ değerinin $I$ idealine bağlı olmadığı söylenebilir. Ayrıca $I$, $R$ için herhangi bir tanım ideali olduğundan $\widetilde{d}_M$ $I$'ya bağlı değildir. Böylece iddia kanıtlanmış olur. Ayrıca

$$\operatorname{der}\left(HS_{M,\mathfrak{m}}(n\theta)\right) = d_1, \operatorname{der}\left(HS_{M,I}(n)\right) = d_2, \operatorname{der}\left(HS_{M,\mathfrak{m}}(n)\right) = d_3$$

ise o zaman $d_1 \geq d_2 \geq d_3$ yazılabilir.

**Önerme 4.4.2.** *[2, Proposition 13.15] $R \subseteq S$ bir halka genişlemesi ve $M$ bir $S$–modül olsun. Skalerler daraltılarak $M$ aynı zamanda bir $R$–modül olarak da görülebilir. $M$'nin,*

*$R$–modül olarak, $n$ adet eleman ile sonlu üretilmiş olduğu kabul edilsin. $s \in S$ ve $I$, $R$'nin bir ideali olmak üzere $sM \subseteq IM$ olsun. Bu takdirde*

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n \in (0 :_S M)$$

*olacak şekilde $a_i \in I^i$ $(1 \leq i \leq n)$ elemanları vardır.*

**Teorem 4.4.3.** *[8, Theorem 1.8] $R$ bir yarı-yerel halka, $M$ sonlu üretilmiş bir $R$–modül olsun. Ayrıca $1 \leq i \leq k$ için $M_i$'ler $R$ halkasının maksimal idealleri olmak üzere*

$$\mathfrak{m} = Jac(R) = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k$$

*olsun. $R$'nin bir $I$ tanım ideali alınsın ve $\widetilde{d}_M = \dim(gr_I(M))$ olsun. O zaman $\dim M = \widetilde{d}_M$ olur.*

*Kanıt.* $\operatorname{der}(HSP_{M,I}(n))$ değeri tanım idealine bağlı olmadığından $I = \mathfrak{m}$ alınabilir. İlk olarak $\widetilde{d}_M \geq \dim M$ olduğu gösterilsin. Bunun için $\widetilde{d}_M$ üzerine tümevarım uygulanacaktır. $\widetilde{d}_M = \dim(gr_{\mathfrak{m}}M) = 0$ dolayısıyla $gr_{\mathfrak{m}}(M)$ modülü Artindir. Dolayısıyla

$$gr_{\mathfrak{m}}(M) = \left(\frac{M}{\mathfrak{m}M}\right) \oplus \left(\frac{\mathfrak{m}M}{\mathfrak{m}^2M}\right) \oplus \left(\frac{\mathfrak{m}^2M}{\mathfrak{m}^3M}\right) \oplus \cdots$$

modülünün

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\frac{\mathfrak{m}M}{\mathfrak{m}^2M}\right) \oplus \left(\frac{\mathfrak{m}^2M}{\mathfrak{m}^3M}\right) \oplus \cdots \\ I_2 &= \left(\frac{\mathfrak{m}M}{\mathfrak{m}^2M}\right) \oplus \left(\frac{\mathfrak{m}^2M}{\mathfrak{m}^3M}\right) \oplus \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

olmak üzere $I_i$ idealleri için $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ azalan zinciri durmalıdır. Buradan

$$\frac{\mathfrak{m}^nM}{\mathfrak{m}^{n+1}M} = 0 \Rightarrow \mathfrak{m}^nM = \mathfrak{m}^{n+1}M$$

elde edilir. O halde Lemma 1.3.15 gereğince $\mathfrak{m}^nM = 0$ olur. Dolayısıyla

$$\mathfrak{m}^nM = 0 \Rightarrow \mathfrak{m}^n \subseteq \operatorname{Ann}_R(M) \Rightarrow \mathfrak{m}^n \subseteq \operatorname{Ann}_R(M) \subset P \Rightarrow \mathfrak{m} \subset P$$

yazılabilir. $\mathfrak{m} = M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_n \subset P$ olduğundan en az bir $1 \leq i \leq n$ için $M_i \subseteq P$ ve $M_i$ maksimal olduğundan $M_i = P$ olur. Dolayısıyla $P$ ideali maksimal olduğundan $M$ Artindir. Buradan $\dim M = 0$ olur.

Şimdi $\widetilde{d}_M > 0$, $\operatorname{Ann}_R(M) \subset P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_n$, $R$, halkasının asal ideallerinin bir zinciri ve $\dim M = n$ olsun. Bir $x \in P_1/P_0$ alınsın ve $B = M/(P_0M + xM)$ olsun.

İddia 1: $\dim B \geq n-1$'dir:

$$\begin{aligned}\dim(B) &= \dim\left(M/\left(P_0M + xM\right)\right) = \dim\left(R/\operatorname{Ann}\left(M/P_0 + xM\right)\right)\\ &= \dim\left(\operatorname{Ann}\left(M/(P_0M + xM)\right)\right)\end{aligned}$$

olur. O halde $\dim\left(\operatorname{Ann}\left(M/(P_0M + xM)\right)\right) \geq n-1$ olduğunu göstermek yeterlidir.

İddia 2: $P_0 \subseteq \operatorname{Ann}\left(M/P_0M + xM\right)$'dir: $p \in P_0$ olsun. $p\left(M/P_0M + xM\right) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Keyfi $m \in M$ için $pm \in P_0M$ olacağından

$$p(m + P_0M + xM) = pm + P_0M + xM = 0$$

elde edilir.

Şimdi $P_0 \subseteq \operatorname{Ann}\left(M/P_0M + xM\right) \subset P_1 \subset P_2 \subset ...$ kapsamasının doğruluğu araştırılacaktır. $r \in \operatorname{Ann}\left(M/P_0M + xM\right)$ olsun. O halde $r\left(M/P_0M + xM\right) = 0$ elde edilir. Buradan her $m \in M$ için $rm \in P_0M + xM$ yazılabilir. Buradan $rM \subseteq P_0M + xM = (P_0 + xR)M$ olur. O halde Önerme 4.4.2 ile $r^n \in \operatorname{Ann}(M) + (P_0 + xR) \subseteq P_1$ ve $P_1/P_0$ asal ideal olduğundan $r \in P_1$ olur. O halde $\dim B \geq n-1$ elde edilir.

$$0 \to \frac{M}{P_0M} \xrightarrow{f} \frac{M}{P_0M} \xrightarrow{g} \frac{M}{P_0M + xM} \to 0 \tag{4.4.3}$$

dizisinin tam olduğu gösterilecektir. Burada $f$ dönüşümü

$$f : \frac{M}{P_0M} \to \frac{M}{P_0M}, f(m + P_0M) = xm + P_0M$$

olmak üzere $x$ ile çarpma dönüşümüdür ve $g$ dönüşümü de

$$g : \frac{M}{P_0M} \to \frac{M}{P_0M + xM}, g(m + P_0M) = m + P_0M + xM$$

şeklindedir. O halde $\ker g = \operatorname{Im} f$ olduğu gösterilsin. Bunun için ilk olarak $\alpha \in \ker g$ olsun. O halde $\alpha = m + P_0M$ olacak şekilde $m \in M$ vardır ve $g(\alpha) = 0$ olur. O halde

$$g(\alpha) = g(m + P_0M) = m + (P_0M + xM) = 0 \Rightarrow m \in P_0M + xM$$

olur. Dolayısıyla $m = p_0m' + xm''$ olacak şekilde $m', m'' \in M$ ve $p_0 \in P_0$ vardır.

$$\alpha = m + P_0M = p_0m' + xm'' + P_0M = xm'' + P_0M = f(m'')$$

elde edilir. Buradan $\alpha \in \operatorname{Im} f$ olur. Dolayısıyla $\ker g \subseteq \operatorname{Im} f$ olduğu gösterilmiş olur. Şimdi diğer kapsama için $\alpha \in \operatorname{Im} f$ olsun. O zaman $\alpha = f(m + P_0M)$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. Buradan

$$\alpha = f(m + P_0M) = xm + P_0M \Rightarrow g(\alpha) = g(xm + P_0M) = xm + P_0M + xM$$

ve $xm \in xM$ olduğundan $g(\alpha) = 0$ elde edilir. Bu nedenle $\operatorname{Im} f \subseteq \ker g$ olur. Dolayısıyla $\ker g = \operatorname{Im} f$ 'dir. Dolayısıyla yukarıdaki dizinin tam olduğu söylenebilir.

İddia 3: $\widetilde{d}_{M/P_0M} = \max\left\{\widetilde{d}_{M/P_0M}, \widetilde{d}_B\right\}$'dır: Bu iddia daha genel durum için kanıtlansın. $R$ yarı yerel halka, $I$, $R$ için bir tanım ideali ve $M, M', M''$ sonlu üretilmiş $R$–modüller olmak üzere

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

tam dizi olsun. O zaman $\widetilde{d}_M, \widetilde{d}_{M'}, \widetilde{d}_{M''}$ sırasıyla $M, M'$ ve $M''$ modüllerinin Hilbert-Samuel polinomlarının dereceleri olmak üzere $\widetilde{d}_M = \max\{\widetilde{d}_{M'}, \widetilde{d}_{M''}\}$ olduğu gösterilsin. Burada $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ dizisi tam olduğundan $M' \leq M$ ve $M'' = M/M'$ şeklinde alınabilir. Dolayısıyla $M''/I^nM'' = (M/M')/I^n(M/M') = M/I^nM + M'$ olur. Buradan

$$0 \to \frac{I^{nM} + M'}{I^nM} \to \frac{M}{I^nM} \to \frac{M}{I^nM + M'} \to 0$$

dizisi sırasıyla içerim dönüşümü ve doğal epimorfizma ile bir tam dizidir. Ayrıca $M' + I^nM \subseteq M$ olduğundan $(I^nM + M')/I^nM \leq M/I^nM$ ve $(M/I^nM)/((I^nM + M')/I^nM) \approx M/I^nM + M'$ olur. Dolayısıyla yukarıdaki dizinin tam olduğu söylenebilir. O halde

$$\begin{aligned}
l\left(\frac{M}{I^nM}\right) =& l\left(\frac{I^nM + M'}{I^nM}\right) + \left(\frac{M}{I^nM + M'}\right) \\
=& l\left(\frac{I^nM + M'}{I^nM}\right) + l\left(\frac{M"}{I^nM''}\right) \\
=& l\left(\frac{M'}{M' \cap I^nM}\right) + \left(\frac{M''}{I^nM''}\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $\phi(n) = l\left(\frac{M'}{M' \cap I^nM}\right)$ denilirse $\phi(n)$ iki polinomun farkı olduğundan bir polinom olur. Ayrıca her $n$ için $\phi(n) \geq 0$'dır. Bu nedenle $\widetilde{d}_M = \max\{\widetilde{d}_{M''}, \widetilde{d}_{M'}\}$ elde edilir. O halde $\operatorname{der} \phi = \widetilde{d}_{M'}$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Teorem 2.1.18 gereğince her $i \geq 0$ ve bir $k$ için $I^i\left(I^kM \cap M'\right) = I^{k+i}M \cap M'$ olduğu söylenebilir. Şimdi belirli bir $k$ ve yeterince büyük $n$ için

$$I^{n+1}M' \subseteq M' \cap I^{n+1}M \subseteq I^{n-k+1}M'$$

olduğu gösterilecektir. Teorem 2.1.18'den

$$I^{k+1}M \cap M' \subseteq I\left(I^kM \cap M'\right) \subseteq IM'$$

ve

$$I^{k+2}M \cap M' \subseteq I^2\left(I^kM \cap M' \subseteq IM'\right)$$

olduğu söylenebilir. Buradan her $m$ için

$$I^{m+k}M \cap M' \subseteq M' \subseteq I^mM'$$

olur. Bu nedenle $I^{n+1}M' \subseteq M'$ ve

$$I^{n+1}M' \subseteq I^{n+1}M \Rightarrow I^{n+1}M' \subseteq M' \cap I^{n+1}M \subseteq I^{n-k+1}M'$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\frac{M'}{I^{n+1}M'} \to \frac{M'}{M' \cap I^{n+1}M} \to \frac{M'}{I^{n-k+1}M'}$$

dönüşümleri örtendir. Buradan $HS_{M',I}(n) \geq \phi(n) \geq HS_{M',I}(n-k)$ olur. Dolayısıyla

$$\widetilde{d}_{M'} = \operatorname{der} HSP_{M',I} = \operatorname{der} \phi$$

elde edilir. O halde iddia kanıtlanmış olur.

Ayrıca $l\left(M/I^nM\right) = l\left(M''/I^nM''\right) + \phi(n)$ olur. Buradan

$$HS_{M',I}(n) = HS_{M'',I}(n) + \phi(n) \tag{4.4.4}$$

olur.

Şimdi elde edilen bu sonuç 4.4.3 tam dizisine uygulanırsa $\widetilde{d}_{M/P_0M} = \max\left\{\widetilde{d}_{M/P_0M}, \widetilde{d}_B\right\}$ elde edilir. Dolayısıyla $\widetilde{d}_B \leq \widetilde{d}_{M/P_0M}$ olur. Ayrıca $\operatorname{der}\phi(n) = \operatorname{der}\widetilde{d}_{M/P_0M}$ ve $\phi(n)$'in başkatsayısı ile $HSP_{M/P_0M,I}$'nun başkatsayısı aynı olur. Ayrıca 4.4.4 eşitliği, 4.4.3 tam dizisi için ele alınırsa o zaman $HSP_{B,I}$ ile $HSP_{M/P_0M} - HSP_{M/P_0M}$'nin başkatsayıları aynı olur. Dolayısıyla $\widetilde{d}_B < \widetilde{d}_{M/P_0M}$ elde edilir.

$\widetilde{d}_{M/P_0M} \leq \widetilde{d}_M$ olduğu gösterilsin. Bunun için

$$M/\mathfrak{m}^nM \xrightarrow{f} M/\left(\mathfrak{m}^nM + P_0M\right) = \left(M/P_0M\right)/\mathfrak{m}^n\left(M/P_0M\right)$$

dönüşümü göz önüne alınsın. $f$ dönüşümü örten olduğundan $l\left(\left(M/\mathfrak{m}^nM\right)/\ker f\right) = l\left(M/\left(\mathfrak{m}^nM + P_0M\right)\right)$ olur. Buradan $l\left(M/\mathfrak{m}^nM\right) - l(\ker f) = l\left(M/\left(\mathfrak{m}^nM + P_0M\right)\right)$ elde edilir. O halde $l\left(M/\mathfrak{m}^nM\right) = \widetilde{d}_M$ ve $l\left(M/\left(\mathfrak{m}^nM + P_0M\right)\right) = \widetilde{d}_{M/P_0M}$ olduğundan $\widetilde{d}_{M/P_0M} \leq \widetilde{d}_M$ yazılabilir. Buradan $\widetilde{d}_B < \widetilde{d}_M$ olur. Dolayısıyla tümevarım kabülünden $\widetilde{d}_B \geq \dim B$ elde edilir. O halde $n-1 \leq \dim B \leq \widetilde{d}_B \leq \widetilde{d}_M - 1$ yazılabilir. Buradan $\widetilde{d}_M \geq \dim M = n$ olur

Şimdi $\dim M \geq \widetilde{d}_M$ olduğu gösterilecektir. Bunun için $\dim M$ üzerine tümevarım uygulansın. İlk olarak $\dim M = 0$ olsun. O halde $M$ sonlu üretilmiş ve $\dim M = 0$

olduğundan Artin olur. Dolayısıyla $l(M) < \infty$ elde edilir. Buradan $l\left(M/m^nM\right) \leq l(M)$'dir. Hilbert-Samuel polinomu sabit polinom olur. Dolayısıyla $\widetilde{d}_M = 0$'dır. Şimdi $\dim M = s > 0$ olsun. $\dim M = \dim\left(R/\operatorname{Ann}(M)\right) = s > 0$. $R$ yarı yerel halka olduğundan $\pi : R/R/\operatorname{Ann}_R(M)$ epimorfizması ile $\overline{R} = R/\operatorname{Ann}(M)$ halkasının da yarı-yerel olduğu söylenebilir. Dolayısıyla Teorem 1.4.9 gereğince $\overline{R}$ halkasının bir tanım idealini üreten $s$ tane eleman vardır. Bu elemanlar $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s$ olsun. Ayrıca Önerme 1.4.12 ile1 $\leq i \leq s$ olmak üzere $\dim\left(\overline{R}/\left(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i\right)\right) = s - i$ olur. Şimdi bir $1 \leq i \leq s$ için $\dim\left(M/\left(x_1, \ldots, x_i\right)M\right) = s - i$ olduğu gösterilsin. $M/\left(x_1, \ldots, x_i\right)M = M_i$ olsun.

$$r \in \operatorname{Ann}(M_i) \Rightarrow rM \subseteq (x_1, ..., x_i)M \Rightarrow r^k \in (x_1, ..., x_i) + \operatorname{Ann}(M)$$

yazılabilir. Buradan Önerme 4.4.2 ile

$$(x_1, ..., x_i) + \operatorname{Ann}(M) \subseteq \operatorname{Ann}(M_i) \subseteq \sqrt{(x_1, ..., x_i) + \operatorname{Ann}(M)}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\operatorname{Ann}\left(M_i\right)$'yi kapsayan asal idealler $(x_1, ..., x_i) + \operatorname{Ann}(M)$'yi de kapsar. Tersine $(x_1, ..., x_i)+\operatorname{Ann}(M)$'yi kapsayan asal idealler $\sqrt{(x_1, ..., x_i) + \operatorname{Ann}(M)}$'yi de kapsayacağından $\operatorname{Ann}\left(M_i\right)$ idealini kapsar. Bu gözlemler ile $\operatorname{Ann}\left(M_i\right)$ ile $(x_1, ..., x_i) + \operatorname{Ann}(M)$'nin boyutlarının aynı olduğu söylenebilir. Dolayısıyla her $1 \leq i \leq s$ için $\dim M_i = \dim M - i = s - i$ olur. Ayrıca izomorfizma teoremlerinden $l\left(M_1/\mathfrak{m}^nM_1\right) = l\left(M/\left(x_1M + \mathfrak{m}^nM\right)\right)$ elde edilir. Ayrıca

$$0 \to \frac{x_1M + \mathfrak{m}^nM}{\mathfrak{m}^nM} \to \frac{M}{\mathfrak{m}^nM} \to \frac{M}{x_1M + \mathfrak{m}^nM} \to 0$$

dizisi tam olduğundan

$$l\left(M/\mathfrak{m}^nM\right) - l\left(\left(x_1M + \mathfrak{m}^nM\right)/\mathfrak{m}^nM\right) = l\left(M/\left(x_1M + \mathfrak{m}^nM\right)\right)$$

elde edilir. İzomorfizma teoremleri ile

$$l\left(M/\mathfrak{m}^nM\right) - l\left(x_1M/\left(x_1M \cap \mathfrak{m}^nM\right)\right) = l\left(M/\left(x_1M + \mathfrak{m}^nM\right)\right)$$

olur. $(\mathfrak{m}^nM :_E x_1) = \{m \in M \mid x_1m \in \mathfrak{m}^nM\}$ kümesi ve

$$\varphi : M \to x_1M/\left(x_1M \cap \mathfrak{m}^nM\right), \varphi(m) = x_1m + \left(x_1M \cap \mathfrak{m}^nM\right)$$

dönüşümü ele alınsın. Buradan

$$\ker\varphi = \{m \in M \mid \overline{x_1m} = 0\} = \{m \mid x_1m \in \mathfrak{m}^nM\} = (\mathfrak{m}^nM :_E x_1)$$

olur. Ayrıca $\phi$dönüşümü örten olduğundan izomorfizma teoremleri ile $M/\ker\phi \approx \varphi(M) =$

$x_1M/\left(x_1M \cap \mathfrak{m}^n M\right)$ elde edilir. Buradan

$$M/(\mathfrak{m}^n M :_E x_1) \approx x_1M/\left(x_1M \cap \mathfrak{m}^n M\right) \Rightarrow l\left(M/(\mathfrak{m}^n M :_E x_1)\right) = l\left(x_1M/\left(x_1M \cap \mathfrak{m}^n M\right)\right)$$

olur.

Şimdi $x_1 \in \mathfrak{m}$ olduğundan $x_1\mathfrak{m}^{n-1}M \subseteq \mathfrak{m}^n M$ elde edilir. Dolayısıyla $\mathfrak{m}^{n-1}M \subseteq (\mathfrak{m}^n M :_E x_1)$ olur. Bu nedenle

$$0 \to \frac{(\mathfrak{m}^n M_E : x_1)}{\mathfrak{m}^{n-1}M} \to \frac{M}{\mathfrak{m}^{n-1}M} \to \frac{M}{(\mathfrak{m}^n M :_E x_1)} \to 0$$

dizisi tamdır. Buradan

$$\begin{aligned} l\left(M/\mathfrak{m}^{n-1}M\right) &= l\left(M/(\mathfrak{m}^n M :_E x_1)\right) + l\left((\mathfrak{m}^n M_E : x_1)/\mathfrak{m}^{n-1}M\right) \\ &\Rightarrow l\left(M/(\mathfrak{m}^n M :_E x_1)\right) \leq l\left(M/\mathfrak{m}^{n-1}M\right) \\ &\Rightarrow l\left(M/\mathfrak{m}^n M\right) - l\left(M/(\mathfrak{m}^{n-1} M :_E x_1)\right) \geq l\left(M/\mathfrak{m}^n M\right) - l\left(M/\mathfrak{m}^{n-1}M\right) \\ &\Rightarrow l\left(M_1/\mathfrak{m}^n M_1\right) \geq l\left(M/\mathfrak{m}^n M\right) - l\left(M/\mathfrak{m}^{n-1}M\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle $HSP_{M_1}(n) \geq HSP_M(n) - HSP_M(n-1)$ olur. Dolayısıyla $\widetilde{d}_{M_1} \geq \widetilde{d}_M - 1$. Fakat $\dim M_1 = \dim M - 1$'dir. Tümevarım hipotezinden $\dim M - 1 = \dim M_1 = \widetilde{d}_{M_1} \geq \widetilde{d}_M - 1$. Bu nedenle $\dim M \geq \widetilde{d}_M$ . Dolayısıyla $\dim M \geq \widetilde{d}_M$ ve $\widetilde{d}_M \geq \dim M$ eşitsizliklerinden $\dim M = \widetilde{d}_M$ elde edilir. □

Şimdi $d = \dim M$ olsun. Eğer $I \subseteq m = JacR\ M$ için bir tanım ideali ise o zaman Hilbert-Samuel polinomunun başkatsayısı $e\left(gr_I(M)\right)/d!$ olur.

**Sonuç 4.4.4.** *$R$ bir yarı yerel halka, $M$ sonlu üretilmiş $R$ modül ve $I$, $R$'nin bir tanım ideali ise $HS_{M,I}(n)$ yeterince büyük $n$ tamsayıları için derecesi* $\dim M$*'ye eşit olan bir polinomdur.*

**Tanım 4.4.5.** $R$ bir yarı yerel halka, $I$, $R$'nin bir tanım ideali ve $M$ bir sonlu üretilmiş $R$–modül olsun. $\dim M = d$ olarak kabul edilsin. Buna göre yeterince büyük $n$ değerleri için $HS_{M,I}(n)$ fonksiyonunun eşit olduğu polinomda $\frac{x^d}{d!}$ teriminin katsayısına (yani $e(gr_I(M))$ değerine) $M$ modülünün *$I$ tanım idealine göre çokkatlısı* denir ve $e(I, M) = e\left(gr_I(M)\right)$ ile gösterilir. $M$ modülünün $\mathfrak{m} = Jac(R)$ idealine göre çokkatlısına doğrudan *$M$ modülünün çokkatlısı* denir ve bu çokkatlı $e(M)$ ile gösterilir.

**Örnek 4.4.6.** $R$ bir Noether halka, $P$ bir asal ideal ve $Q$ bir $P$–asıl ideal olsun. Buna göre $QR_P$, $R_P$ halkasının bir $PR_P$ –asıl idealidir. $PR_P$, $R_P$'nin tek maksimal ideali olduğundan $QR_P$, $R_P$ halkasının bir tanım ideali olur. Böylece $e(QR_P, R_p)$ çokkatlısından bahsedilebilir. $S = gr_{QR_P}(R_P)$ olsun. $HS_S(n) = l_{R_P}(R_P/Q^{n+1}R_P)$, $Q^{(n+1)}$ sembolik kuvvetinden başlayarak $P$'de son bulan en uzun asıl ideal zincirinin uzunluğunun bir fazlasını verir. Ayrıca Teorem 4.1.12'den dolayı yeterince büyük $n$'ler için

$HS_S(n)$, derecesi $d = \dim R_P = \mathrm{Rank}\, P$ ve baş katsayısı $e(QR_P, R_P)/d!$ olan bir polinoma eşittir. Burada basitliğin hatırı için $e(QR_P, R_P)$ gösterimi yerine doğrudan $e(Q)$ yazılsın. Bazı kaynaklarda $e(Q)$ sayısından $Q$'nun $R$ içindeki çokkatlısı olarak bahsedilmektedir. Aslında bu kavram asıl ideallerden bütün öz ideallere genişletilebilir. $I$, $R$'nin herhangi bir öz ideali ve $P$, $I$'nın bir minimal asal ideal olsun. $I$'nın herhangi bir normal asıl ayrışımında bulunan $P$–asıl bileşeni $Q$ olsun. Bu durumda $e(Q)$ sayısına $I$ idealinin $P$ *asal idealine karşılık gelen çokkatlısı* denir ve $e(I; P)$ biçiminde gösterilir.

**Örnek 4.4.7.** Yukarıdaki örnekte tanımlanan bir asıl idealin çokkatlısı için somut bir örnek verilsin. $k$ bir cisim olmak üzere $R = k[x, y]$ ve $Q = (x^3, y)$ olsun. Buna göre $\mathfrak{m} = (x, y)$ denirse $Q$ bir $\mathfrak{m}$–asıl ideal olur. $\mathfrak{m}$, $R$'nin bir maksimal ideali olduğundan her $n \geq 0$ için $Q^{n+1}$ ve $\mathfrak{m}$ arasındaki her ideal yine bir $\mathfrak{m}$–asıl ideal olur. Dolayısıyla yukarıdaki örnekte de belirtildiği gibi $S = gr_{QR_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m})$ olmak üzere $HS_S(n) = l_{R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m}/Q^{n+1}R_\mathfrak{m}) = l_R(R/Q^{n+1})$ yazılabilir. Dolayısıyla $HS_S(n)$ fonksiyonunu hesaplamak için $l_R(R/Q^{n+1})$ uzunluklarını hesaplamak gerekir. Bunun için $H_S(n) = l_R(Q^n/Q^{n+1})$ uzunluklarını hesaplamak yeterlidir. Fakat bu uzunluk aslında $Q^n$ idealinde olup $Q^{n+1}$ idealinde bulunmayan monomların sayısıdır. Çünkü $Q^n \setminus Q^{n+1}$ kümesinde bulunan monomları dereceleri büyükten küçüğe olacak şekilde sıralayıp, $Q^{n+1}$ idealine derecesi en büyük olan monom tarafından üretilen ideal eklenir, sonra elde edilen ideale de monom kümesinde kalanlar arasından derecesi en büyük olan monom tarafından üretilen ideal eklenir ve bu şekilde devam edilirse $Q^{n+1}$ den başlayan ve $Q^n$ de biten bir kompozisyon serisi elde edilebilir. Herbir kompozisyon faktörü $k$ ile izomorftur. $Q^n$ de olup da $Q^{n+1}$ de olmayan monomlar

$$\begin{array}{ccccc} x^{3n} & x^{3n-3}y & \cdots & x^3y^{n-1} & y^n \\ x^{3n+1} & x^{3n-4}y & \cdots & x^4y^{n-1} & xy^n \\ x^{3n+2} & x^{3n-5}y & \cdots & x^5y^{n-1} & x^2y^n \end{array}$$

şeklinde listelenebileceğinden $H_S(n) = l_R(Q^n/Q^{n+1}) = 3(n+1)$ bulunur. Böylece her $n \geq 0$ için

$$HS_S(n) = \sum_{i=0}^{n} H_S(n) = \sum_{i=0}^{n} 3(i+1) = 3\frac{n(n+1)}{2} + 3(n+1) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{9}{2}n + 3$$

elde edilir. Buna göre $e(Q) = 3$ bulunur. $HS_S(n)$ polinomunun derecesi ile $\mathrm{Rank}(Q) = \mathrm{Rank}(\mathfrak{m}) = 2$ olacağı da görülebilir. Aslında bunu doğrudan görmek de mümkündür.

# Bölüm 5

# KOSZUL KOMPLEKSLERİ

## 5.1 Koszul Komplekslerin Yapısı

$E$ bir $R$–modül ve $s > 0$ için $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$, $R$ halkasının elemanları olsun. Bu elemanlar kullanılarak $R$–modüllerin bir kompleksi oluşturulacaktır. Bu yapıya *$E$'nin $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$' e göre Koszul kompleksi* denir ve $K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ ile gösterilir. Ayrıca eğer belirli bir $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ dizisi ile ilgileniliyorsa o zaman $K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ yerine $K(\gamma \mid E)$ gösterimi kullanılabilir.

**Tanım 5.1.1.** $K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ Koszul kompleksi

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow K_s(\gamma, E) \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_1(\gamma \mid E) \longrightarrow K_0(\gamma \mid E) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

şeklindedir. Dolayısıyla özel olarak bir sol komplekstir.

$0 \leq \mu \leq s$ için $\binom{s}{\mu}$ binom kaysatısı olmak üzere $K_\mu(\gamma \mid E)$, $E$ modülünün $\binom{s}{\mu}$ tane dik toplamıdır. Bu nedenle $s = 0$ iken $K(. \mid E)$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow E \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

şeklindedir. Burada $E = K_0(. \mid E)$'dir. $s \geq 1$ için sınır homomorfizmaları tanımlanmalıdır. Bunun için bazı özel notasyonlar belirlenebilir. $T_1, T_2, \ldots, T_s$ yeni semboller olsun ve

$$K_\mu(\gamma_{1\cdots s} \mid E) = \bigoplus_{i_1 < i_2 < \cdots < i_\mu} ET_{i_1}T_{i_2}...T_{i_\mu}$$

olarak alınsın. Burada $i_1, i_2, \ldots, i_\mu$ farklı tamsayılar olmak üzere $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_\mu \leq s$'dir. Dolayısıyla $0 \leq \mu \leq s$ için $K(\gamma \mid E)$, $\binom{s}{\mu}$ tane $E$'nin diktoplamı olacağından, bir elemanı $e_{i_1 i_2 \cdots i_\mu} \in E$ olmak üzere

$$\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_\mu} e_{i_1 i_2 \cdots i_\mu} T_{i_1} T_{i_2} ... T_{i_\mu}$$

şeklindedir. Buradan $K_0(\gamma_{1\cdots s} \mid E) = E$ olur.

Şimdi sınır homomorfizmaları şu şekilde tanımlanabilir: $0 \leq \mu \leq s$ için $d_\mu : K_\mu(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \longrightarrow K_{\mu-1}(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ olur. Bu nedenle $0 \leq \mu \leq s$ olmak üzere $i_1, i_2, \ldots, i_\mu$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_\mu$ olacak şekilde tamsayılar olsun. $K_\mu(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ modülünün her elemanı $e \in E$ olmak üzere $eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{i_\mu}$ biçimindeki elemanların toplamı şeklinde tek türlü ifade edilebileceğinden $d_\mu(eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{i_\mu})$ yazımı anlamlı olacaktır.

$$d_\mu(eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{i_\mu}) = \sum_{p=1}^{\mu}(-1)^{p-1}\gamma_{i_p}eT_{i_1}T_{i_2}\ldots\widehat{T}_{i_p}\ldots T_{i_\mu} \tag{5.1.1}$$

olsun. Burada $T_{i_p}$bilinmeyeninin üzerindeki $\wedge$ işareti o faktörün atlandığını gösterir. Bu dönüşüm bir $R$–lineer dönüşümdür. Buradan $\mu = 1$ iken

$$d_1(eT_{i_1}) = \gamma_{i_1}e \tag{5.1.2}$$

olduğu söylenebilir.

Şimdi

$$\cdots \longrightarrow K_{\mu+1}(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \xrightarrow{d_{\mu+1}} K_\mu(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \xrightarrow{d_\mu} K_{\mu-1}(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \longrightarrow \cdots$$

bir kompleks olduğunu göstermek için $d_{\mu-1}d_\mu = 0$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için $0 \leq \mu - 1 < \mu \leq s$ olsun. $d_{\mu-1}d_\mu(eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{i_\mu}) = 0$ olduğu gösterilecektir. Eğer $1 \leq p < q \leq \mu$ ise $d_{\mu-1}d_\mu(eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{i_\mu})$ ifadesinde $\gamma_{i_p}\gamma_{i_q}eT_{i_1}\ldots\widehat{T}_{i_p}\ldots\widehat{T}_{i_q}\ldots T_{i_\mu}$ terimi iki kez ortaya çıkar ve ilk durumda bu terimin katsayısı $(-1)^{p-1}(-1)^{q-1}$ ve ikinci durumda da $(-1)^{p-1}(-1)^{q-2}$ile çarpılır.Bu yüzden de toplamları 0 olur. $p$ ve $q$ keyfi tamsayılar olduğundan $1 \leq p < q \leq \mu$ olan her $(p, q)$ ikilisi için bu durum geçerlidir. Dolayısıyla $d_{\mu-1}d_\mu = 0$ elde edilir.

$K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ bir kompleks olduğundan homoloji modülleri oluşturulabilir. $\mu$. homoloji modülü $H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ ile gösterilecektir. Eğer $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ elemanları belirli ise $H_\mu K(\gamma \mid E)$ şeklinde yazılabilir. $\mu > 0$ ya da $\mu < 0$ iken $H_\mu K(\gamma \mid E) = 0$ olduğu açıktır. $K_1(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$'nin herhangi bir elemanı $e_i \in E$ ve olmak üzere $\sum_i e_iT_i$ şeklindedir. Dolayısıyla 5.1.2 eşitliği ile

$$d_1\left(\sum_{i=1}^{s} e_iT_i\right) = \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \cdots + \gamma_se_s$$

yazılabilir. Bu nedenle$\operatorname{Im} d_1 = \gamma_1E + \gamma_2E + \cdots + \gamma_sE$ olur. Ayrıca $K_{-1} = 0$ olduğu da göz önüne alınırsa o zaman

$$H_0K(\gamma_{1\cdots s} \mid E) = E/(\gamma_1E + \cdots + \gamma_sE) \tag{5.1.3}$$

elde edilir. $K_s(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$'in her elemanı $eT_1T_2\ldots T_s$ şeklindedir. Ayrıca 5.1.1 eşitliği de göz önüne alınırsa

$$d_s(eT_1T_2\dots T_s) = \sum_{p=1}^{s}(-1)^{p-1}\gamma_p eT_1\dots\widehat{T}_p\dots T_s$$

yazılabilir. Bu nedenle $d_s(eT_1T_2\dots T_s) = 0$'dır ancak ve ancak $i = 1, 2, \dots, s$ için $\gamma_i e = 0$ olur. O halde

$$\ker d_s = (0 :_E \gamma_1 R + \dots + \gamma_s R)$$

olur. Ayrıca $K_{s+1}(\gamma_{1\cdots s} \mid E) = 0$ olduğu da göz önüne alınırsa

$$H_s K(\gamma_{1\cdots s} \mid E) = (0 :_E (\gamma_1 R + \gamma_s R)) \tag{5.1.4}$$

elde edilir.

## 5.2 Koszul Komplekslerin Özellikleri

$E$ bir $R$–modül ve $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ $R$'nin elemanları olsun. Şimdi $K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ Koszul kompleksinin, $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s\}$ dizisi yeniden düzenlense de izomorfizma farkı ile aynı olacağı gösterilecektir.

**Önerme 5.2.1.** *$\{j_1, j_2, \dots, j_s\}$, $\{1, 2, \dots, s\}$ kümesinin bir permütasyonu olsun. O zaman $K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ ve $K(\gamma_{j_1\cdots j_s} \mid E)$ modülleri izomorf olur.*

*Kanıt.* $1 \le m < m+1 \le s$ olsun.

$$K(\gamma_{1\cdots m-1}, \gamma_m, \gamma_{m+1}, \dots, \gamma_s) \approx K(\gamma_{1\cdots m-1}, \gamma_{m+1}, \gamma_m, \dots, \gamma_s \mid E)$$

olduğu gösterilecektir. Dolayısıyla

$$\phi_\mu : K(\gamma_{1\cdots m-1}, \gamma_m, \gamma_{m+1\cdots s} \mid E) \to K_\mu(\gamma_{1\cdots m-1}, \gamma_{m+1}, \gamma_{m\cdots s} \mid E)$$

izomorfizmalarının varlığını göstermek yeterlidir. $\phi$ dönüşümün tanım ve değer kümeleri aynıdır ve $\bigoplus_{1\le i_1<i_2<\dots<i_\mu\le s} ET_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_\mu}$ kümesidir. Şimdi $\phi_\mu$ dönüşümü tanımlanacaktır. Bunun için $eT_{i_1}T_{i'}\dots T_{i_\mu}$elemanının görüntüsünü belirlemek yeterlidir. Bu görüntü için dört olasılık vardır. Bunlar:

1. $m, m+1 \notin \{i_1, i_2, \dots, i_\mu\}$.
2. $m \in \{i_1, i_2, \dots, i_\mu\}$ ve $m+1 \notin \{i_1, i_2, \dots, i_\mu\}$.
3. $m+1 \in \{i_1, i_2, \dots, i_\mu\}$ ve $m \notin \{i_1, i_2, \dots, i_\mu\}$.
4. $m, m+1 \in \{i_1, i_2, \dots, i_\mu\}$'dir.

$\phi_\mu$etkisi yukarıdaki durumlara bağlıdır.

$(i)$ durumunda $eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_\mu}$değişmeden kalsın, $(ii)$ durumunda $eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{i_\mu} = eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_m\ldots T_{i_\mu}$ elemanı için $\phi_\mu(eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_m\ldots T_\mu) = eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{m+1}\ldots T_{i_\mu}$, $(iii)$ durumunda $eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{i_\mu} = eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{m+1}\ldots T_{i_\mu}$elemanı için $\phi_\mu(eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{m+1}\ldots T_\mu) = eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_m\ldots T_{i_\mu}$ ve son olarak da $(iv)$ durumunda ise $\phi_\mu(eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_\mu) = -eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{i_\mu}$ olsun. Bu şekilde tanımlanan $\phi_\mu$dönüşümü bir izomorfizmadır. Şimdi sınır homomorfizmaları ile değişmeli olduğu gösterilsin. Dolayısıyla

$$\begin{tikzcd}
K\mu(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \arrow[r] \arrow[d, "d\mu"'] & K_\mu(\gamma_{1\cdots m-1}, \gamma_{m+1}, \gamma_m, \ldots, \gamma_s \mid E) \arrow[d, "d\mu-1"'] \\
K_{\mu-1}(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \arrow[r] & K_{\mu-1}(\gamma_{1\cdots m-1}, \gamma_{m+1}, \gamma_m, \ldots, \gamma_s \mid E)
\end{tikzcd}$$

diyagramının değişmeli olduğu gösterilecektir. $\phi_{\mu-1}d_\mu = d'_\mu\phi_\mu$olduğu gösterilsin. $(i), (ii), (iii)$ durumları için eşitlik kolayca görülebilir. Dolayısıyla $(iv)$ durumu incelenecektir:

$$\begin{aligned}
\phi_{\mu-1}d_\mu(eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{i_\mu}) &= \phi_{\mu-1}\Big( \sum_{\substack{p=1\\ p\neq\lambda,\lambda+1}}^{\mu} (-1)^{p-1}\gamma_{i_p}eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{i_\mu} \\
&\qquad + (-1)^{\lambda-1}\gamma_m eT_{i_1}T_{i_2}\ldots \widehat{T}_m T_{m+1}\ldots T_{i_\mu} \\
&\qquad + (-1)^{\lambda}\gamma_{m+1} eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_m\widehat{T}_{m+1}\ldots T_\mu\Big) \\
&= - \sum_{\substack{p=1\\ p\neq\lambda,\lambda+1}}^{\mu} (-1)^{p-1}\gamma_{i_p}eT_{i_1}T_{i_2}\ldots \widehat{T}_{i_p}\ldots T_{i_\mu} \\
&\qquad + (-1)^{\lambda-1}\gamma_m eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_m\widehat{T}_{m+1}\ldots T_\mu \\
&\qquad + (-1)^{\lambda}\gamma_{m+1} eT_{i_1}T_{i_2}\ldots \widehat{T}_m T_{m+1}\ldots T_{i_\mu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d'_\mu\phi_\mu(eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{i_\mu}) &= d'_\mu(-eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{i_\mu}) \\
&= - \sum_{\substack{p=1\\ p\neq\lambda,\lambda+1}}^{\mu} (-1)^{p-1}\gamma_{i_p}eT_{i_1}T_{i_2}\ldots \widehat{T}_{i_p}\ldots T_{i_\mu} \\
&\qquad + (-1)^{\lambda+1}\gamma_m eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_m\widehat{T}_{m+1}\ldots T_{i_\mu} \\
&\qquad + (-1)^{\lambda}\gamma_{m+1} eT_{i_1}T_{i_2}\ldots \widehat{T}_m T_{m+1}\ldots T_{i_\mu}
\end{aligned}$$

□

**Sonuç 5.2.2.** $\{j_1, \ldots, j_s\}$, $\{1, 2, \ldots, s\}$*kümesinin bir permütasyonu olsun. O zaman her* $\mu$*için* $H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \approx H_\mu K(\gamma_{j_1\cdots j_s} \mid E)$*, R–modül izomorfizması vardır.*

$s \geq 0$ için $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $R$'nin elemanları olsun. Ayrıca $E'$ ve $E$, $R$–modüller olsun. O halde $K(\gamma_{1\cdots s} \mid E')$ ve $K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ Koszul kompleksleri oluşturulabilir. $f : E' \to E$ bir

$R$–modül homomorfizması olsun. O halde $f$ ile

$$f_\mu : K_\mu(\gamma_{1\cdots s} \mid E') \to K_\mu(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$$

homomorfizmaları oluşturulabilir. Burada $e' \in E'$ olmak üzere

$$f_\mu(e'T_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_\mu}) = f(e')T_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_\mu} \tag{5.2.1}$$

ile tanımlanır. Dolayısıyla $f_\mu$ dönüşümleri $K_\mu(\gamma_{1\cdots s} \mid E')$ ve $K_\mu(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ Koszul komplekslerinin sınır homomorfizmaları ile değişmelidir. Bu nedenle her $E' \to E$ homomorfizması ile Koszul kompleksler arasındaki $K(\gamma \mid E') \to K(\gamma \mid E)$ dönüşüm elde edilebilir. Son olarak

$$0 \to E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \to 0 \tag{5.2.2}$$

$R$–modüllerin bir tam dizi olsun. O zaman $f$ ve $g$ dönüşümlerinden $K(\gamma \mid E') \to K(\gamma \mid E)$ ve $K(\gamma \mid E) \to K(\gamma \mid E'')$ dönüşümleri elde edilebilir. O halde 5.2.1 eşitliği ile bütün

$$0 \to K(\gamma \mid E') \xrightarrow{f_\mu} K(\gamma \mid E) \xrightarrow{g_\mu} K(\gamma \mid E'') \to 0$$

dizilerinin tam olduğu söylenebilir. Bu nedenle $R$–modüllerin 5.2.2 tam dizisinden komplekslerin

$$0 \to K(\gamma \mid E') \to K(\gamma \mid E) \to K(\gamma \mid E'') \to 0 \tag{5.2.3}$$

tam dizisi elde edilir.

**Teorem 5.2.3.** *[1, Theorem 2, §8.3] $\gamma_1, \dots \gamma_s$, $R$ halkasının elemanları ve $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$, $R$–modüllerin bir tam dizisi olsun. O zaman $E'$,$E$ ve $E''$ modüllerinin $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ elemanlarına göre Koszul komplekslerinin homoloji modülleri*

$$\begin{aligned}
&0 \to H_sK(\gamma \mid E') \to H_sK(\gamma \mid E) \to H_sK(\gamma \mid E'') \to \cdots \to H_\mu K(\gamma \mid E') \to H_\mu K(\gamma \mid E) \\
&\to H_\mu K(\gamma \mid E'') \to H_{\mu-1}K(\gamma \mid E') \to H_{\mu-1}K(\gamma \mid E) \to H_{\mu-1}K(\gamma \mid E'') \to \cdots \\
&\to H_0K(\gamma \mid E') \to H_0K(\gamma \mid E) \to H_0K(\gamma \mid E'') \to 0
\end{aligned}$$

*tam dizisi ile bağlıdır.*

*Kanıt.* $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ tam dizisi ile 5.2.3 tam dizisi elde edilebilir. Şimdi eğer 5.2.3 dizisinin tam homoloji dizisi ele alınıp $H_{s+1}K(\gamma \mid E'')$ ve $H_{-1}K(\gamma \mid E')$ modüllerinin sıfır modülü olduğu da göz önüne alınırsa o zaman teoremin ifadesindeki tam dizi elde edilir. □

Şimdi $E$ bir $R$–modül ve $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, $R$'nin elemanları olsun. $1 \le j \le s$ olacak şekilde bir $j$ tamsayısı alınsın. Her $\mu$ tamsayısı için $R$–modüllerin bir

$$\sigma_{\mu}^{(j)} : K_{\mu}(\gamma \mid E) \to K_{\mu+1}(\gamma \mid E) \tag{5.2.4}$$

homomorfizması tanımlanabilir. $0 \leq \mu < s$ değerleri için ve $e \in E$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_{\mu} \leq s$ olmak üzere

$$\sigma_{\mu}^{(j)}(eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{i_{\mu}}) \tag{5.2.5}$$

değerini belirlemek yeterlidir. Burada iki olasılık vardır:

1. $j \notin \{i_1, \ldots, i_{\mu}\}$ ve
2. $j \in \{i_1, \ldots, i_{\mu}\}$'dir.

O halde (1) durumunda $\nu$, $\{i_1, \ldots, i_{\mu}\}$ kümesinde $j$'den daha küçük olan tamsayıların sayısı olsun. O zaman

$$\sigma_{\mu}^{(j)}(eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{i_{\mu}}) = (-1)^{(\nu)}eT_{i_1}\ldots T_{i_{\nu}}T_jT_{i_{\nu+1}}\ldots T_{i_{\mu}} \tag{5.2.6}$$

olsun. (2) durumunda

$$\sigma_{\mu}^{(j)}(eT_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{i_{\mu}}) = 0$$

olsun. O halde 5.2.4 homomorfizmaları tanımlı olur. Bu homomorfizmaların önemini aşağıdaki lemmada daha iyi anlaşılacaktır.

**Lemma 5.2.4.** *$\mu$ keyfi bir tamsayı olmak üzere $x_{\mu}$, $K_{\mu}(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ modülünün bir elemanı olsun. O zaman*

$$d_{\mu+1}\sigma_{\mu}^{(j)}(x_{\mu}) = \gamma_j x_{\mu} - \sigma_{\mu-1}^{(j)}d_{\mu}(x_{\mu}) \tag{5.2.7}$$

*olur.*

*Kanıt.* $\mu > s$ ya da $\mu < 0$ iken $K_{\mu}(\gamma \mid E) = 0$ olacağından bu durumlarda $x_{\mu} = 0$ olur. Dolayısıyla 5.2.7 eşitliği doğrudur. O halde $0 \leq \mu < s$ ve $x_{\mu} = eT_{i_1}T_{i_2}...T_{i_{\mu}}$olsun. Buradaki notasyonlar 5.2.5 ifadesindeki notasyonlar ile aynıdır. İlk olarak $j \notin \{i_1, i_2, ..., i_{\mu}\}$ alınsın ve $v$ bu kümedeki $j$'den daha küçük olan elemanların sayısı olsun. O zaman

$$d_{\mu}(x_{\mu}) = \sum_{p=1}^{v}(-1)^{p-1}\gamma_{i_p}eT_{i_1}...\widehat{T}_{i_p}...T_{i_{\mu}} + \sum_{q=v+1}^{\mu}(-1)^{q-1}\gamma_{i_q}eT_{i_1}...\widehat{T}_{i_q}...T_{i_{\mu}}$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu-1}^{(j)}d_{\mu}(x_{\mu}) = (-1)^{v-1}&\sum_{p=1}^{v}(-1)^{p-1}\gamma_{i_p}eT_{i_1}...\widehat{T}_{i_p}...T_j...T_{i_{\mu}}\\ &+ (-1)^{v}\sum_{q=v+1}^{\mu}(-1)^{q-1}\gamma_{i_q}eT_{i_1}...T_j...\widehat{T}_{i_q}...T_{i_{\mu}}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\gamma_j x_\mu - \sigma^{(j)}_{\mu-1} d_\mu(x_\mu) = (-1)^v \sum_{p=1}^{v} (-1)^{p-1} \gamma_{i_p} e T_{i_1} ... \widehat{T}_{i_p} ... T_j ... T_{i_\mu} + (-1)^v (-1)^v \gamma_j e T_{i_1} ... \widehat{T}_j ... T_{i_\mu}$$
$$+ (-1)^v \sum_{q=v+1}^{\mu} (-1)^q \gamma_{i_q} e T_{i_1} ... T_j ... \widehat{T}_{i_q} ... T_{i_\mu}$$
$$= (-1)^\nu d_{\mu+1}(e T_{i_1} \dots T_{i_\nu} T_j T_{i_{\nu+1}} \dots T_{i_\mu}) = d_{\mu+1} \sigma^{(j)}_\mu (x_\mu)$$

olur. Şimdi $j \in \{i_1, i_2, ....i_\mu\}$ ve $j = i_t$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \sigma^{(j)}_{\mu-1} d_\mu(x_\mu) &= \sigma^{(j)}_{\mu-1}(\sum_{p=1}^{\mu} (-1)^{p-1} \gamma_{i_p} e T_{i_1} ... \widehat{T}_{i_p} ... T_{i_\mu}) \\ &= \sigma^{(j)}_{\mu-1}((-1)^{t-1} \gamma_{i_t} e T_{i_1} ... \widehat{T}_{i_t} ... T_{i_\mu}) \\ &= (-1)^{t-1}(-1)^{t-1} \gamma_{i_t} e T_{i_1} ... T_{i_t} ... T_{i_\mu} \\ &= \gamma_j x_\mu \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\gamma_j x_\mu - \sigma^{(j)}_{\mu-1} d_\mu(x_\mu) = 0$ olur. Geriye sadece $\mu = s$ durumu kalır. Bu durum için de son paragraftaki prosedür tekrarlanır. □

**Teorem 5.2.5.** *$E$ bir $R$–modül, $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, $R$ halkasının elemanları ve $A = \gamma_1 R + \dots + \gamma_s R$ olsun. O zaman $A$ ideali $E$ modülünün $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ elemanlarına göre Koszul komplekslerinin tüm homoloji modüllerini sıfırlar.*

*Kanıt.* $A \subseteq (0 :_E H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E))$ olduğu gösterilecektir. Bu nedenle her $1 \leq i \leq s$ için $\gamma_i \in (0 : H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E))$ olduğunu göstermek yeterlidir. $1 \leq j \leq s$ için $\gamma_j$ keyfi bir eleman ve $\zeta_\mu \in H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ olsun. $\gamma_j \zeta_\mu = 0$ olduğu gösterilirse kanıt tamamlanmış olur. Şimdi $\zeta_\mu$ için $d_\mu(x_\mu) = 0$ olacak şekilde bir $x_\mu \in K_\mu(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ alınsın. Lemma 5.2.4 gereğince $\gamma_j x_\mu = d_{\mu+1} \sigma^{(j)}_\mu (x_\mu)$ olur. Buradan $\gamma_j x_\mu \in \operatorname{Im} d_{\mu+1}$ elde edilir. Dolayısıyla $\gamma_j x_\mu$ elemanının $K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ modülünün bir $\mu$–sınırı olduğu söylenebilir. Buradan $\gamma_j x_\mu$, $H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ modülünün 0 elemanını temsil eder. Dolayısıyla $\gamma_j \zeta_\mu = 0$ olur. Böylece kanıt tamamlanır. □

**Sonuç 5.2.6.** *$E$ bir $R$–modül ve $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, $R$ halkasının elemanları olsun. Eğer $\gamma_1 R + \dots + \gamma_s R = R$ ise o zaman $E$ modülünün, $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ elemanlarına göre Koszul komplekslerinin tüm $H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ homoloji modülleri sıfırdır.*

*Kanıt.* Teorem 5.2.5 ile $A = R \subseteq (0 :_E H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)) \subseteq R$ dolayısıyla $R = (0 :_E HK(\gamma_{1\cdots s} \mid E))$ olur. $R$ birimli olduğundan $1 \in R$ dolayısıyla da $1 H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E) = 0$ olur $\mu$ tamsayısı keyfi alındığı için sonuç gösterilmiş olur. □

Şimdi $E$ bir $R$–modül ve $s \geq 1$ olmak üzere $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$, $R$ halkasının elemanları olsun. O halde $K_\mu(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \leq_K K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ olur. Bunu göstermek için aşağıdaki iki durum gösterilmelidir:

1. her $\mu$ için $K_\mu(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \leq K_\mu(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$'dir.

2. her $1 \leq \mu \leq s$ için $i_\mu$ içerim dönüşümü olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
K_\mu(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \arrow[r, "d'_\mu"] \arrow[d, "i_\mu"'] & K_{\mu-1}(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \arrow[d, "i_{\mu-1}"'] \\
K_\mu(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \arrow[r, "d_\mu"] & K_{\mu-1}(\gamma_{1\cdots s} \mid E)
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

(1) durumu açıktır. (2)'yi göstermek için $i_{\mu-1}d'_\mu = d_\mu i_\mu$ olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
i_{\mu-1}d'_\mu(eT_{i_1}...T_{i_\mu}) &= i_{\mu-1}(\sum_{p=1}^{\mu}(-1)^{p-1}\gamma_{i_p}eT_{i_1}...\widehat{T}_{i_p}...T_{i_\mu}) \\
&= \sum_{p=1}^{\mu}(-1)^{p-1}\gamma_{i_p}eT_{i_1}...\widehat{T}_{i_p}...T_{i_\mu}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
d_\mu i_\mu(eT_{i_1}...T_{i_\mu}) &= d_\mu(eT_{i_1}...T_{i_\mu}) \\
&= \sum_{p=1}^{\mu}(-1)^{p-1}\gamma_{i_p}eT_{i_1}...\widehat{T}_{i_p}...T_{i_\mu}
\end{aligned}$$

olduğundan (2)'yi elde edilir. Böylece $K_\mu(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E)$, $K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$'nin bir alt kompleksi olur.

Ayrıca her $\mu$ için

$$0 \to K_\mu(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \xrightarrow{f_\mu} K_\mu(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \xrightarrow{g_\mu} K_{\mu-1}(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \to 0$$

dizisi tamdır. Burada $f_\mu$ içerim dönüşümü ve $g_\mu$ de

$$g_\mu(eT_{i_1}...T_{i_\mu}) = \begin{cases} 0 & , i_\mu < s \\ eT_{i_1}...T_{i_\mu} & , i_\mu = s \end{cases}$$

dönüşümüdür. $\ker g_\mu = \{\sum_{1\leq i_1<...<i_\mu\leq s} e_{i_1...i_\mu}T_{i_1}...T_{i_\mu} : e_{i_1...i_\mu} \in E\} = \operatorname{Im} f_\mu$ ve $f_\mu$ içerim dönüşümü dolayısıyla birebir, $g_\mu$ dönüşümü de örten olduğu için dizi tam olur.

Şimdi

$$\begin{tikzcd}
K_\mu(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \arrow[r, "g_\mu"] \arrow[d, "d_\mu"'] & K_{\mu-1}(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \arrow[d, "d'_{\mu-1}"'] \\
K_{\mu-1}(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \arrow[r, "g_{\mu-1}"] & K_{\mu-2}(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E)
\end{tikzcd}$$

diyagramları değişmelidir. $X_\mu = K_{\mu-1}(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E)$ olsun. $d'_{\mu-1} : X_\mu \to X_{\mu-1}$ sınır homomorfizmaları diyagramdaki gibi olsun. O zaman $X$ bir komplekstir. Ayrıca $f_\mu$ ve $g_\mu$ dönüşümleri $K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \to K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ ve $K(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \to X$ dönüşümlerini verir. $0 \to K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \xrightarrow{f} K(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \xrightarrow{g} X \to 0$ komplekslerin bir tam dizisi olur. $H_\mu(X) = H_{\mu-1}K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E)$'dir.

**Önerme 5.2.7.** *$E$ bir $R-$ modül ve $s \geq 1$ olmak üzere $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $R$–halkasının elemanları olsun. O zaman $K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ Koszul komplekslerinin homoloji modülleri*

$$\begin{aligned}\cdots \to H_{\mu+1}K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \to H_{\mu+1}K(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \to H_\mu K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \to H_\mu K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \\ \to H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \to H_{\mu-1}K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \to \cdots\end{aligned}$$

*tam dizisi boyunca bağlıdır. Ayrıca $\triangle : H_\mu K(\gamma_{1\ldots s-1} \mid E) \to H_\mu K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E)$ bağlantı homomorfizması $(-1)^\mu \gamma_s$ ile çarpmadan oluşur.*

*Kanıt.* $0 \to K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \to K(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \to X \to 0$ tam dizisinden homoloji modüllerin tam dizisi elde edilebilir. Ayrıca $H_\mu K(X) = H_{\mu-1}K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E)$ olduğu da göz önüne alınırsa önermenin ilk iddası gösterilmiş olur. Şimdi $\triangle$ bağlantı homomorfizması ele alınsın. $\zeta_{\mu+1} \in H_{\mu+1}(X) = H_\mu K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E)$ olsun. O zaman $\zeta_{\mu+1}$, $X_{\mu+1} = K_\mu(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E)$ modülünün bir elemanı ile temsil edilir. Bu eleman

$$x_{\mu+1} = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_\mu \leq s-1} e_{i_1 i_2 \ldots i_\mu} T_{i_1} \ldots T_{i_\mu}$$

olsun. O halde $x_{\mu+1} \in \ker d'_\mu$ olduğundan $d'_\mu(x_{\mu+1}) = 0$ olur. Buradan

$$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_\mu \leq s-1} \sum_{p=1}^{\mu} (-1)^{p-1} \gamma_{i_p} e_{i_1 i_2 \ldots i_\mu} T_{i_1} \ldots \widehat{T}_{i_p} \ldots T_{i_\mu} = 0$$

elde edilir.

$$0 \to K_{\mu+1}(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \xrightarrow{f_{\mu+1}} K_{\mu+1}(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \xrightarrow{g_{\mu+1}} K_\mu(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \to 0$$

dizisi tam ve $x_{\mu+1} \in K_\mu(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E)$ olduğundan $x_{\mu+1} = g_{\mu+1}(y_{\mu+1})$ olacak şekilde

$$y_{\mu+1} = \sum_{1 \leq i_1 \ldots < i_\mu \leq s-1} e_{i_1 \ldots i_\mu} T_{i_1} \ldots T_\mu T_s$$

vardır. O halde

$$\begin{aligned}
d_{\mu+1}(y_{\mu+1}) &= \sum_{1\le i_1<...<i_\mu\le s-1}\sum_{p=1}^{\mu+1}(-1)^{p-1}\gamma_{i_p}e_{i_1...i_\mu}T_{i_1}...\widehat{T}_{i_p}...T_{i_\mu}T_s \\
&= \sum_{1\le i_1<...<i_\mu\le s-1}\sum_{p=1}^{\mu}(-1)^{p-1}\gamma_{i_p}e_{i_1...i_\mu}T_{i_1}...\widehat{T}_{i_p}...T_{i_\mu}T_s \\
&+ (-1)^{\mu}\gamma_s\sum_{1\le i_1<...<i_\mu\le s-1}e_{i_1...i_\mu}T_{i_1}...T_{i_\mu}\widehat{T}_s \\
&= (-1)^{\mu}\gamma_s x_{\mu+1} \\
&= f_\mu((-1)^{\mu}\gamma_s x_{\mu+1})
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle $\triangle(\zeta_{\mu+1})$, $(-1)^{\mu}\gamma_s x_{\mu+1}$ elemanının $H_\mu K(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_{s-1}\mid E)$ bölüm modülündeki görüntüsüdür. $\triangle(\zeta_{\mu+1})=(-1)^{\mu}\gamma_s\zeta_{\mu+1}$'dir. Böylece kanıt tamamlanır. □

Son olarak bir sonuç daha ele alınacaktır. Böylece Koszul kompleksleri ile daha önce yapılan gözlemler ile ilişkilendirilecektir. $(0:_E\gamma_s)=0$ (ya da denk olarak $\gamma_s$ sıfır bölen değil) iken $K(\gamma_{1\cdots s}\mid E)$ modülünün homoloji modülleri ile ilgilenilecektir. $K(\gamma_{1\cdots s}\mid E)$ kompleksinde $\gamma_s$ yerine $R$ halkasının birim elemanını alarak $K(\gamma_{1\cdots s-1},1\mid E)$ kompleksi oluşturulsun. Bu iki kompleks aynı bileşenlere sahiptir. Her iki durumda da $\mu$. bileşen $\bigoplus_{1\le i_1<...<i_\mu\le s}ET_{i_1}...T_{i_\mu}$ olur.

Şimdi $f_\mu : K_\mu(\gamma_{1\cdots s}\mid E)\to K_\mu(\gamma_{1\cdots s-1},1\mid E)$,

$$f_\mu(eT_{i_1}...T_{i_\mu})=\begin{cases}\gamma_s eT_{i_1}...T_{i_\mu} & ,\ (i_\mu=s)\\ eT_{i_1}...T_{i_\mu} & ,\ (i_\mu<s)\end{cases}$$

homomorfizma olsun.$\gamma_s$, $E$ üzerinde sıfır bölen olmadığı için $f_\mu$ bir monomorfizmadır. Ayrıca bu varsayım olmasa da

$$\begin{tikzcd}
K_\mu(\gamma_{1\cdots s}\mid E) \arrow[r, "f_\mu"] \arrow[d, "d_\mu"'] & K_\mu(\gamma_{1\cdots s-1},1\mid E) \arrow[d, "d'_\mu"'] \\
K_{\mu-1}(\gamma_{1\cdots s}\mid E) \arrow[r, "f_{\mu-1}"] & K_{\mu-1}(\gamma_{1\cdots s-1},1\mid E)
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olur. Bu nedenle $f_\mu$, $f : K(\gamma_{1\cdots s}\mid E)\to K(\gamma_{1\cdots s-1},1\mid E)$ komplekslerinin bir dönüşümünü oluşturur.

$\overline{E}=E/\gamma_s E$ ve her $e\in E$ için $\overline{e}$, $e$ elemanının $\overline{E}$'deki görüntüsü olsun. Şimdi

$$X_\mu=\bigoplus_{1\le i_1<...<i_{\mu-1}\le s-1}\overline{E}T_{i_1}...T_{i_{\mu-1}}=K_{\mu-1}(\gamma_{1\cdots s-1}\mid\overline{E})$$

ve $\delta_\mu : X \to X_{\mu-1}$ homomorfizması

$$\delta_\mu(\overline{e}T_{i_1}...T_{i_{\mu-1}}) = \sum_{p=1}^{\mu-1}(-1)^{p-1}\gamma_{i_p}\overline{e}T_{i_1}...\widehat{T}_{i_p}...T_{i_{\mu-1}}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $\cdots \to X_{\mu+1} \xrightarrow{\delta_{\mu+1}} X_\mu \xrightarrow{\delta_\mu} X_{\mu-1} \to \cdots$ kompleks olur. $K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid \overline{E}) = X$'dir. $d_{\mu-1}d_\mu = 0$ olduğu daha önce gösterilmişti. Dolayısıyla $\delta_{\mu-1}\delta_\mu = 0$ olduğu da benzer şekilde gösterilebilir. Bu nedenle $H_\mu(X) = H_{\mu-1}K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid \overline{E})$ 'dir. Her $\mu$ için $g_\mu : K_\mu(\gamma_{1\cdots s-1}, 1 \mid E) \to X_\mu$homomorfizmaları

$$g_\mu(eT_{i_1}...T_{i_\mu}) = \begin{cases} 0 & , (i_\mu < s) \\ \overline{e}T_{i_1}...T_{i_{\mu-1}} & , (i_\mu = s) \end{cases}$$

olacak şekilde alınsın. O halde $g_\mu$ bir epimorfizmadır ve $\ker g_\mu = \operatorname{Im} f_\mu$ olur. Buradan

$$\begin{tikzcd} K(\gamma_{1\cdots s-1}, 1 \mid E) \arrow[r, "g_\mu"] \arrow[d, "d_\mu"'] & X_\mu \arrow[d, "\delta_{\mu-1}"'] \\ K_{\mu-1}(\gamma_{1\cdots s-1}, 1 \mid E) \arrow[r, "g_{\mu-1}"] & X_{\mu-1} \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Bu nedenle, $g_\mu$, $g : K(\gamma_{1\cdots s-1}, 1 \mid E) \to X$ kompleksleri arasında bir dönüşüm oluşturur. Son olarak eğer $\gamma_s$, $E$ üzerinde bir sıfır bölen değil ise o zaman $0 \to K(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \xrightarrow{f} K(\gamma_{1\cdots s}, 1 \mid E) \xrightarrow{g} X \to 0$ komplekslerin bir tam dizisi olur.

**Teorem 5.2.8.** *[1, Theorem 4, §8.4] $E$ bir $R$– modül ve $s \geq 1$ için $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $R$ halkasının elemanları olsun. Eğer şimdi $\gamma_s$, $E$–üzerinde bir sıfır bölen değil ise o zaman her $\mu$ için*

$$H_\mu K\left(\gamma_{1\cdots s} \mid E\right) \approx H_\mu K\left(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E/\gamma_s E\right)$$

*$R$–modül izomorfizması vardır.*

*Kanıt.* Eğer $0 \to K\left(\gamma_{1\cdots s} \mid E\right) \xrightarrow{f} K\left(\gamma_{1\cdots s-1}, 1 \mid E\right) \xrightarrow{g} X \to 0$ tam dizisinden her $\mu$ için

$$H_{\mu+1}K\left(\gamma_{1\cdots s-1}, 1 \mid E\right) \to H\left(X\right) \to H_\mu K\left(\gamma_{1\cdots s} \mid E\right) \to H_\mu K\left(\gamma_{1\cdots s-1}, 1 \mid E\right)$$

tam dizisi elde edilebilir. Ancak Sonuç 5.2.6 gereğince $H_{\mu+1}K\left(\gamma_{1\cdots s-1}, 1 \mid E\right)$ ve $H_\mu K\left(\gamma_{1\cdots s-1}, 1 \mid E\right)$ sıfır modülleri olur. Dolayısıyla da $H_{\mu+1}\left(X\right) \approx H_\mu K\left(\gamma_{1\cdots s} \mid E\right)$ olur. Burada

$$H_\mu K\left(\gamma_{1\cdots s-1} \mid \overline{E}\right) = H_{\mu+1}\left(X\right)$$

olduğundan istenen sonuç elde edilir. □

**Tanım 5.2.9.** $E$ bir $R$–modül ve $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in R$ olsun. O halde eğer

1. $E \neq (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)E$ ve

2. her $1 \leq i \leq s$ için $\alpha_i$, $E/\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}\right) E$ üzerinde bir sıfır bölen değil ise

o zaman $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ elemanlarına bir *$E$–dizisi* denir.

**Tanım 5.2.10.** $I$, $R$ halkasının bir ideali, $E$ bir $R$–modül ve $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ bir $E$–dizisi olsun. Eğer

1. her $1 \leq i \leq s$ için $\alpha_i \in I$ ve

2. her $\beta \in I$ için $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta$ dizisi bir $E$–dizisi değil ise

o zaman $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ dizisine *$I$'da bir maksimal $E$–dizisi* denir.

**Önerme 5.2.11.** *$I$, $R$ halkasının bir ideali, $E$ bir Noether $R$–modül ve $IE \neq E$ olsun. O zaman $I$'daki her $E$–dizisi, $I$'da bir maksimal $E$–dizisine genişletilebilir.*

*Kanıt.* $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, $I$'da bir $E$–dizisi olsun. Eğer $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ dizisi $I$'da bir maksimal $E$–dizisi ise o zaman aranılan genişleme dizinin kendisi olur. Bu nedenle $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ dizisi $I$'da bir maksimal $E$–dizisi olmasın. O halde $E/(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)E$, $R$–modülü üzerinde sıfır bölen olmayan bir $\alpha_{s+1} \in I$ vardır. Eğer $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ dizisi $I$'da maksimal değilse o zaman $E/(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \alpha_{s+1})$, $R$–modülü üzerinde sıfır bölen olmayan bir $\alpha_{s+2} \in I$ elemanı vardır. Bu şekilde devam ederek $I$'nın elemanlarının, $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ dizisi $I$'da bir maksimal $E$–dizisi olacak şekilde, bir $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n$ dizisi olur. Buradan $E$'nin alt modüllerinin öz olarak artan bi

$$(\alpha_1)E \subset (\alpha_1, \alpha_2)E \subset \ldots \subset (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)E \subset \ldots$$

dizisi elde edilir. $E$, Noether olduğundan $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n, \ldots$ dizisi sonlu olmalıdır. Dolayısıyla bu dizi $I$'da maksimal bir dizi olur. Böylece kanıt tamamlanır. □

**Teorem 5.2.12.** *[9, Theorem 1.7] $R$ bir Noether halka ve $E$ sonlu üretilmiş bir $R$–modül olsun. $R$'nin $JE \neq E$ olacak şekilde bir $J$ ideali alınsın. Ayrıca $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $J$'de bir maksimal $E$–dizisi ve $L = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \subseteq J$ ideali, bir $k > 0$ tamsayısı için $J^k \subseteq L + \operatorname{Ann}_R E$ olacak şekilde alınsın. O zaman $q$, $H_q K(\beta_{1\cdots n} \mid E) \neq 0$ koşulunu sağlayan en büyük tamsayı olmak üzere $s + q = n$ olur.*

*Ayrıca eğer $J \subset L \subset \operatorname{Ann}_R E$ ise o zaman*

$$H_q K(\beta_{1\cdots n} \mid E) \approx \left((\gamma_1, \ldots, \gamma_s)E :_E L\right) / (\gamma_1, \ldots, \gamma_s)E$$

*olur.*

*Kanıt.* $\operatorname{Ann}_R E$ ve $L$ idealleri $HK(\beta_{1\cdots n} \mid E)$ modülünü sıfırladığından bunların toplamı da aynı modülü sıfırlar. Dolayısıyla $J^k \subseteq L + \operatorname{Ann}_R E$ olduğundan $J^k$ ideali de

$HK(\beta_{1\cdots n} \mid E)$ modülünü sıfırlayacaktır.Bu nedenle $J$ 'nin her elemanı, her $H_pK(\beta_{1\cdots n} \mid E)$ modülü için bir sıfır bölen olur. $s$ üzerine tümevarım uygulanacaktır. $s = 0$ ise $J$'nin her elemanı dolayısıyla $L$'nin her elemanı $E$ modülünün bir sıfır bölenidir. Bu nedenle Teorem 1.4.14 ile

$$H_nK(\beta_{1\cdots n} \mid E) = (0 :_E L) \neq 0$$

olur.

Şimdi $s = t \geq 0$ için hipotez doğru olsun ve $s = t + 1$ için doğru olduğu gösterilsin.

İddia: $\gamma_2, \dots, \gamma_s$, $J$'de bir maksimal $(E/\gamma_1 E)$–dizisidir: $\beta \in J$ olmak üzere $\gamma_2, \dots, \gamma_s, \beta$, $J$'de bir $(E/\gamma_1 E)$–dizisi olsun ve $\gamma_1, \dots, \gamma_s, \beta$, $J$'de bir $E$–dizisi olmasın. O halde $y$, $E/(\gamma_1, \dots, \gamma_s)E$'de bir sıfır bölendir. Ancak

$$\frac{E/\gamma_1 E}{(\gamma_1, \dots, \gamma_s)E/\gamma_1 E} = \frac{E/\gamma_1 E}{(\gamma_1, \dots, \gamma_s)\,(E/\gamma_1 E)}$$

olduğundan çelişki elde edilir. Dolayısıyla iddia doğrudur.

Bu nedenle tümevarım hipotezi $E/\gamma_1 E$ için doğru olur.

$$0 \to E \xrightarrow{\gamma_1} E \to E/\gamma_1 E \to 0$$

tam dizisinden

$$0 \to H_{q+1}K\,(y_{1\cdots n} \mid (E/\gamma_1 E)) \to H_qK\,(y_{1\cdots n} \mid E) \xrightarrow{\gamma_1} H_qK\,(y_{1\cdots n} \mid E)$$

tam dizisi elde edilir. $\gamma_1 \in J$ olduğundan $\gamma_1^k \in J^k$ olur. Diğer taraftan $J^k \subseteq L + \operatorname{Ann}_R E$, $L$ ve $\operatorname{Ann}_R K$ ,$H_qK(\beta_{1\cdots n} \mid E)$'yi sıfırladığından $\gamma_1$ de bu modülü sıfırlar. Dolayısıyla $\gamma_1$, $H_qK(\beta_{1\cdots n} \mid E)$'nin bir sıfır bölenidir. Buradan

$$\gamma_1^k = \gamma_1.\, \gamma_1^{k-1}.\, H_qK(\beta_{1\cdots n} \mid E) = 0$$

olacağından $\gamma_1$ ile çarpma işleminin birebir olmadığı elde edilir. Bu nedenle $H_{q+1}K\,(\beta_{1\cdots n} \mid E/\gamma_1 E) \neq 0$ olur. $p > q + 1$ için $H_pK\,(\beta_{1\cdots n} \mid E/\gamma_1 E) = 0$ olur. Bu nedenle $s + q = t + (q + 1) = n$ elde edilir. Eğer $J \subseteq L + \operatorname{Ann}_R E$ ise o zaman $x_1 H_qK(\beta_{1\cdots n} \mid E) = 0$ olur. Buradan

$$H_{q+2}K(\beta_{1\cdots n} \mid E) \to H_{q+1}K\,(\beta_{1\cdots n} \mid (E/\gamma_1 E)) \to H_qK(\beta_{1\cdots n} \mid E) \xrightarrow{\gamma_1} H_qK/(\beta_{1\cdots n} \mid E)$$

tam dizisi ele alınsın. $H_{q+2}K(\beta_{1\cdots n} \mid E) = 0$ ve daha önce elde ettiğimiz $\alpha x H_qK(\beta_{1\cdots n} \mid E) = 0$ eşitliği ile

$$H_{q+1}K\,(\beta_{1\dots n} \mid E/\gamma_1 E) \approx H_qK\,(\beta_{1\cdots n} \mid E)$$

olur. Yine $s$ üzerine tümevarım yaparak

$$\begin{aligned} H_qK(\beta_{1\cdots n} \mid E) &\approx H_{q+1}K\left(\beta_{1\cdots n} \mid E/\gamma_1 E\right) \\ &\approx \frac{((\gamma_1,\ldots,\gamma_s)E/\gamma_1E :_E L)}{(\gamma_2,\ldots,\gamma_s)E/\gamma_1E} \\ &\approx \frac{((\gamma_1,\ldots,\gamma_s)E :_E L)}{(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)E} \end{aligned}$$

elde edilir. □

**Sonuç 5.2.13.** *[9, Corollary 1.8] $R$ bir Noether halka, $E$ sonlu üretilmiş bir $R$–modül olsun. $R$'nin bir $J$ idealini alalım. O zaman $J$'deki bütün maksimal $E$–dizilerinin uzunlukları aynı olur. Eğer bir $K$ ideali $J \subseteq K + \operatorname{Ann}_R E$ ve $K \subseteq J$ olacak şekilde alınırsa o zaman*

$$\left((\gamma_1,\ldots,\gamma_k)E :_E K\right)/(\gamma_1\ldots,\gamma_k)E \approx \left((\gamma_1',\ldots,\gamma_k')E :_E K\right)/(\gamma_1',\ldots,\gamma_k')E$$

*elde edilir. Burada $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ ve $\gamma_1',\ldots,\gamma_k'$ dizileri $J$'de herhangi iki maksimal $E$–dizisidir.*

*Kanıt.* $R$ halkası Noether olduğundan $J$ ideali sonlu üretilmiştir. O halde $J = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$ olacak şekilde $1 \le i \le n$ için $y_i \in J$ vardır. Teorem 5.2.12 $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ ve $\gamma_1',\ldots,\gamma_s'$ maksimal $E$–dizilerine uygulanacaktır. Ayrıca $q$'nun, $s + q = n$ olacak şekildeki en büyük tamsayı olduğu da göz önüne alınırsa

$$H_qK(\beta_{1\ldots n} \mid E) \approx \left((\gamma_1,\ldots,\gamma_s)E :_E K\right)/(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)E$$

ve

$$H_qK\left(\beta_{1\ldots n} \mid E\right) \approx \left((\gamma_1',\ldots,\gamma_s')E :_E K\right)/(\gamma_1',\ldots,\gamma_s')E$$

olur. Böylece istenen elde edilir. □

*Açıklama.* $E$ bir Noether $R$–modül, $R$'nin bir $B$ ideali için $BE \neq E$ ve $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$, $B$ ideali içinde bir maksimal $E$–dizisi olsun. Bu durumda $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ elemanlarının $R/\operatorname{Ann}_R E$ içindeki doğal görüntüleri $\overline{\gamma}_1,\ldots,\overline{\gamma}_s$, $(B + \operatorname{Ann}_R E)/\operatorname{Ann}_R E$ içinde bir maksimal $E$–dizisi olur. Dolayısıyla Sonuç 5.2.13, $E$ modülü Noether $R$–modül olarak alınınca da verilebilir.

**Tanım 5.2.14.** $R$ bir Noether halka ve $E$ sonlu üretilmiş bir $R$–modül ve $A$, $R$'nin bir ideali olsun. $A$' daki $E$–dizilerinin uzunluklarının supremumuna *$E$ 'nin $A$–yan boyutu* denir ve $A$–codim$(E)$ ile gösterilir. Bu değer sonludur ya da $+\infty$ olur.

Eğer $AE \neq E$ ise o zaman $E$'nin $A$–yan boyutu sonludur ve $A$'daki bütün maksimal $E$–dizileri aynı uzunluğa sahiptir.

**Sonuç 5.2.15.** *$R$ bir halka, $E$ bir Noether $R$–modül olsun. $AE \neq E$ olmak üzere $R$'nin sonlu üretilmiş bir $A$ ideali alınsın ve $s = A$–codim$(E)$ olsun. Eğer $A = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ ise o zaman $H_{n-s}K(\gamma_{1\cdots n} \mid E) \neq 0$ ve her $\mu > n-s$ için $H_\mu K(\gamma_{1\cdots n} \mid E) = 0$ olur.*

**Sonuç 5.2.16.** *[1, Theorem 7, §8.5] $R$ bir halka, $E$ bir $R$–modül ve $s \geq 0$ olmak üzere $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $R$– halkasının elemanları olsun. Ayrıca her $i$ $(1 \leq i \leq s)$ için $\gamma_i$ elemanı $E/(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_{i-1}E)$ üzerinde sıfır bölen olmasın. O zaman her $\mu \neq 0$ için $H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E) = 0$ olur.*

*Kanıt.* $s$ üzerine tümevarım uygulanacaktır. İlk olarak $s = 0$ olsun. $s = 0$ için $K(. \mid E)$ $\cdots \to 0 \to\to 0 \to E \to 0 \to 0 \to \cdots$ olduğundan her $\mu \neq 0$ için $K_\mu(. \mid E) = 0$ dolayısıyla da her $\mu \neq 0$ için $H_\mu K(. \mid E) = 0$ olur. Şimdi $s \geq 1$ ve $s$ tamsayısından küçük her değer için teorem doğru olsun ve $s$ için doğru olduğu gösterilsin. O zaman her $\mu$ için $H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \approx H_\mu K(\gamma_{2\cdots s}, \gamma_1 \mid E) \approx H_\mu K(\gamma_2 \mid E/\gamma_1 E)$ olduğu söylenebilir. Fakat eğer $\overline{E} = E/\gamma_1 E$ ise o zaman $2 \leq i \leq s$ için $\gamma_i$ $\overline{E}/(\gamma_2\overline{E} + \ldots + \gamma_{i-1}\overline{E})$ üzerinde bir sıfır bölen değildir. Bu nedenle tümevarım hipotezinden her $\mu \neq 0$ için $H_\mu K(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E/\gamma_1 E) = 0$ ve $H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \approx H_\mu K(\gamma_{2\cdots s} \mid E/\gamma_1 E)$ olduğundan da her $\mu \neq 0$ için $0 = H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ elde edilir. □

**Lemma 5.2.17.** *$R$ bir halka, $E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1, \ldots \gamma_s$, $R$'nin elemanları olsun. Eğer $\gamma_s$, $R$'nin Jacobson radikalinde ve $H_pK(\gamma_{1\cdots s-1}, \gamma_s \mid E) = 0$ ise o zaman $H_pK(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) = 0$ olur.*

*Kanıt.* Önerme 5.2.7 gereğince

$$H_pK(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \to H_pK(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \to H_pK(\gamma_{1\cdots s-1}, \gamma_s \mid E)$$

tam dizisi vardır. Burada ilk dönüşüm $(-1)^p\gamma_s$ ile çarpma dönüşümüdür. O halde $H_pK(\gamma_{1\cdots s-1}, \gamma_s \mid E) = 0$ olduğundan yukarıdaki dizinin tamlığı ile

$$H_pK(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) = \gamma_s H_pK(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$H_pK(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\gamma_s)^n H_pK(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E)$$

yazılabilir. $H_pK(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E)$'in $E$ modülünün sonlu sayıda dik toplamının bir bölüm modülü olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla $H_pK(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E)$ bir Noether $R$–modüldür. O halde $H_pK(\gamma_{1\cdots s} \mid E) = 0$ elde edilir. □

**Teorem 5.2.18.** *[9, Proposition 2.8] $R$ bir halka, $E$ bir Noether $R$–modül ve $\mathfrak{m}$, $R$'nin*

*Jacobson radikali olsun. Ayrıca $s \geq 1$ için $\mathfrak{m}$'nin $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elemanları alınsın. O zaman aşağıdaki durumlar denktir:*

1. *$\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ bir $E$–dizisidir.*
2. *her $p > 0$ için $H_pK(\gamma_{1\cdots s} \mid E) = 0$'dır.*
3. *$H_1K(\gamma_{1\cdots s} \mid E) = 0$ olur.*

*Kanıt.* Sonuç 5.2.16 ile (1) $\Rightarrow$ (2) ve (2) $\Rightarrow$ (3) sağlanır. Dolayısıyla geriye (3) $\Rightarrow$ (1) olduğunu göstermek kalır. Bunun için $s$ üzerine tümevarım uygulanacaktır. $s = 1$ olsun. Bu durumda kabulden $H_1K(\gamma_1 \mid E) = 0$ olur. Ayrıca $H_1K(\gamma_1 \mid E) = (0 :_E \gamma_1)$ olduğundan $(0 :_E \gamma_1) = 0$ olur. Bu ise $\gamma_1$'in $E$'de bir sıfır bölen olmadığını ve dolayısıyla $E$–dizisi olduğunu söyler. Şimdi $s > 1$ ve $s-1$ eleman içeren durumlarda hipotez doğru olsun. Lemma 5.2.17 $H_1K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ modülüne uygulanarak her $i = 1, 2, \ldots, s$ için $H_1K(\gamma_{1\cdots i} \mid E)$ modüllerinin sıfır olduğu elde edilir. Daha açık olarak $H_1K(\gamma_1 \mid E) = 0$ iken $\gamma_1$, $E$ üzerinde bir sıfır bölen değildir. O zaman $\overline{E} = E/\gamma_1 E$ olmak üzere, Sonuç 5.2.2 ve Teorem 5.2.8 ile

$$H_1K(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \approx H_1K(\gamma_{2\cdots s}, \gamma_1 \mid E) \approx H_1K(\gamma_{2\cdots s} \mid \overline{E})$$

izomorfizmaları vardır. Bu nedenle $H_1K(\gamma_{2\cdots s} \mid \overline{E}) = 0$ ve buradan tümevarım hipotezi ile $2 \leq i \leq s$ için $\gamma_i$'ler $\overline{E}/(\gamma_2\overline{E} + \cdots + \gamma_{i-1}\overline{E})$ üzerinde sıfır bölen olmaz. Ayrıca $\overline{E}/(\gamma_2\overline{E} + \cdots + \gamma_{i-1}\overline{E}) \approx E/(\gamma_1 E + \gamma_2 E + \cdots + \gamma_{i-1}E)$ olduğundan $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ dizisinin bir $E$–dizisi olduğu elde edilir. □

**Sonuç 5.2.19.** *$R$ bir halka ve $E$ bir Noether $R$–modül olsun. Eğer $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ bir $E$–dizisi ve $\pi$, $\{1, \ldots, s\}$'in herhangi bir permütasyonu ise o zaman $\gamma_{\pi(1)}, \ldots, \gamma_{\pi(s)}$ de bir $E$–dizisidir.*

*Sonuç 5.2.2 gereğince $H_pK(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \approx H_pK(\gamma_{\pi(1)\cdots\pi(s)} \mid E)$ izomorfizması vardır. Dolayısıyla Önerme 5.2.18 ile $\gamma_{\pi(1)}, \ldots, \gamma_{\pi(s)}$'nin bir $E$–dizisi olduğu elde edilir.*

## 5.3 Koszul Komplekslerin Çokkatlılık Teorisi İle Bağlantısı

Koszul kompleksler $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$ çokkatlılık sembolü için yeni bir tanım vermede kullanılabilir. Ancak bunun için önce bazı lemma ve önteoremler ele alınmalıdır.

**Lemma 5.3.1.** *$E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. O zaman her $H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$, $R$–modülü sonlu uzunluğa sahiptir.*

*Kanıt.* Her $\mu$ için $K_\mu(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ modülü sonlu sayıda $E$'nin diktoplamıdır. Bu yüzden Noetherdir ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ bir çokkatlı sistem olarak alınabilir. $H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$, $K_\mu(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ modülünün bir bölüm modülü olduğundan Önerme 3.1.4 gereğince $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ $H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ üzerinde bir çokkatlı sistem olur. Ancak Teorem 5.2.5 ile her $1 \leq i \leq s$ için $\gamma_i$, $H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ modülünü sıfırlar. Dolayısıyla

$$l_R\left(\frac{H_\mu K(\gamma_{1\ldots s} \mid E)}{\gamma_1 H_\mu K(\gamma_{1\ldots s|E}) + \cdots + \gamma_s H_\mu K(\gamma_{1\ldots s} \mid E)}\right) < \infty$$

olur. Buradan $l_R(H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)) < \infty$ elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır □

$E$ bir Noether $R$–modül ve $(s \geq 0)$ olmak üzere $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. Lemma 5.3.1 gereğince her $H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ homoloji modülü sonlu uzunluğa sahiptir. Bu yüzden

$$\chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = \sum_\mu (-1)^\mu l_R\{H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)\}$$

yazılabilir. Aslında $\mu > s$ ya da $\mu < 0$ iken toplam sıfır olacağı için yukarıdaki toplam sonludur.

$$\chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$$

olduğu gösterilebilir. $s = 0$ için $\chi_R(. \mid E) = l_R(E) = e_R(. \mid E)$ olduğundan bu durumda yukarıdaki eşitlik sağlanır. Şimdi $s$–üzerine tümevarım uygulanarak genel sonuç kanıtlanacaktır. Ancak öncesinde terminoloji ile ilgili bazı bilgiler verilsin. $(X, d)$, bütün bileşen modülleri sonlu uzunluğa sahip ve en fazla sonlu tanesi sıfırdan farklı olan, $R$–modüllerin bir kompleksi olsun. O zaman $\sum_\mu (-1)^\mu l_R(X_\mu)$ iyi tanımlıdır ve buna $X$ 'in *Euler-Poincare karakteristiği* denir. Koszul kompleks durumunda $H_\mu K\left(\gamma_{1\cdots s} \mid E\right)$ homoloji modülleri dışında sınır homomorfizmaları 0 dönüşümü olan komplekse $K\left(\gamma_{1\cdots s} \mid E\right)$ modülünün *homoloji kompleksi* denir.

Şimdi $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$ çokkatlılık sembolünün $K\left(\gamma_{1\cdots s} \mid E\right)$ modülünün homoloji kompleksinin Euler-Poincare karakteristiğine eşit olduğu gösterilsin. Bunu için önce iki lemma kanıtlanmalıdır.

**Lemma 5.3.2.** $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ *Noether $R$–modüllerin bir tam dizisi ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, dizinin her terimi için bir çokkatlı sistem olsun. O zaman*

$$\chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = \chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E') + \chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E'')$$

*olur.*

*Kanıt.* Lemma 5.3.1 ile

$$
\begin{aligned}
&0 \to H_s K(\gamma \mid E') \to H_s K(\gamma \mid E) \to H_s K(\gamma \mid E'') \to \cdots \\
&\ \to H_\mu K(\gamma \mid E') \to H_\mu K(\gamma \mid E) \to H_\mu K(\gamma \mid E'') \to H_{\mu-1} K(\gamma \mid E') \\
&\ \to H_{\mu-1} K(\gamma \mid E) \to H_\mu K(\gamma \mid E'') \to \cdots \to H_0 K(\gamma \mid E') \to H_0 K(\gamma \mid E) \to H_0 K(\gamma \mid E'') \to 0
\end{aligned}
$$

tam dizisindeki tüm modüllerin sonlu uzunluğa sahip olduğu söylenebilir. Bu diziye Teorem 1.1.17 uygulanırsa

$$\chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = \chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E') + \chi_R(\gamma_1, \ldots \gamma_s \mid E'')$$

elde edilir. □

**Lemma 5.3.3.** *$E$ bir Noether $R-$ modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. Eğer $m > 0$ iken $\gamma_s^m E = 0$ ise o zaman $\chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$ olur.*

*Kanıt.* $\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, \gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olduğundan $\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, \gamma_s^m$ dizisi de bir çokkatlı sistemdir. Fakat $\gamma_s^m$, $E$ modülünü sıfırladığı için $\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}$ dizisi $E$ üzerinde çokkatlı sistem olur. Buradan Lemma 5.3.1 gereğince $H_\mu K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E)$ ve $H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)$ modülleri sonlu uzunluğa sahiptir. Bu yüzden Teorem 1.1.17

$$
\begin{aligned}
\cdots \to H_{\mu+1} K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \to H_{\mu+1} K(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \to H_\mu K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \to H_\mu K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \\
\to H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E) \to H_{\mu-1} K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \to H_{\mu-1} K(\gamma_{1\cdots s-1} \mid E) \to \cdots
\end{aligned}
$$

tam dizisine uygulanırsa

$$\sum_{\mu=0}^{s} (-1)^\mu l_R(H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E)) = 0$$

olur. Ayrıca

$$\chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = \sum_\mu (-1)^\mu l_R(H_\mu K(\gamma_{1\cdots s} \mid E))$$

olduğundan $\chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$ elde edilir □

Bu kısımda ele alınan lemmalar sonuçlar kısmında kullanılacaktır.

# Bölüm 6

# SONUÇLAR

**Teorem 6.0.1.** *[1, Theorem 5, §8.4] $E$ bir Noether $R$–modül ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olsun. O zaman*

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = \chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$$

*olur.*

*Kanıt.* $s$–üzerine tümevarım uygulanacaktır. $s = 0$ durumunda

$$e_R(. \mid E) = l_R(E) = \chi_R(. \mid E)$$

olduğundan bu durumda teorem doğrudur. Bu yüzden $s > 0$ olsun ve teorem $s-1$ elemanlı çokkatlı sistemler için doğru olsun. $F = E/(0 :_E \gamma_s^m)$ ve $m$ tamsayısı da $\gamma_s$, $F$ üzerinde bir sıfır bölen olmayacak şekilde yeterince büyük alınsın. Lemma 3.2.10 ile böyle bir seçim yapılabileceği söylenebilir. O zaman Lemma 5.3.2

$$0 \to (0 :_E \gamma_s^m) \to E \to F \to 0$$

tam dizisine uygulanırsa

$$\chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = \chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid (0 :_E \gamma_s^m)) + \chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid F)$$

elde edilir.

İddia: $\chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = \chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid F)$'dir: $\gamma_s^m.(0 :_E \gamma_s^m) = 0$ olduğundan $\chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid (0 :_E \gamma_s^m)) = 0$ elde edilir. $\gamma_s$, $F$ üzerinde bir sıfır bölen olmadığı için $H_\mu K(\gamma_{1\cdots s}) \approx H_\mu K\,(\gamma_{1\cdots s-1} \mid F/\gamma_s F)$, $R$–modül izomorfizması vardır. Buradan

$$\chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1} \mid F) = \chi_R\,(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1} \mid F/\gamma_s F)$$

olur. Buradan

$$\chi_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) = \chi_R\left(\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-1} \mid F/\gamma_s F\right)$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan $e_R\left(\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-1} \mid F/\gamma_s F\right) = e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid F)$ olur. O halde

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid F) = e_R\left(\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-1} \mid F/\gamma_s F\right) - e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-1} \mid (0 :_E \gamma_s))$$

ve $\gamma_s(0 :_F \gamma_s) = 0$ olduğundan $e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-1} \mid (0 :_F \gamma_s)) = 0$ olur. Dolayısıyla

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid F) = e_R\left(\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-1} \mid F/\gamma_s F\right)$$

olur. Ayrıca $0 \to (0 :_E \gamma_s^m) \to E \to E/(0 :_E \gamma_s^m) \to 0$ tam dizisinden

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) = e_R\left(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E/(0 :_E \gamma_s^m)\right) + e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid (0 :_E \gamma_s^m))$$

yazılabilir. Buradan $\gamma_s^m(0 :_E \gamma_s^m) = 0$ olduğundan $e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid (0 :_E \gamma_s^m)) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) = e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid F)$$

olur. Son olarak tümevarım kabülü ile

$$e_R\left(\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-1} \mid F/\gamma_s F\right) = \chi_R\left(\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-1} \mid F/\gamma_s F\right)$$

olduğu söylenebilir. Dolayısıyla $e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) = \chi_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E)$ olur. □

$R$ bir Noether halka ve $E$ bir sonlu üretilmiş $R$–modül olsun. $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olmak üzere $I = (\gamma_1,\ldots,\gamma_s)$ ise o zaman her $n$ için $l_R(E/I^nE) < \infty$ olacağından $HS_{M,I}(n)$ fonksiyonu yeterince büyük $n$ değerleri için derecesi en fazla $s$ olan $n$'ye bağlı bir polinoma eşittir. Aşağıdaki teorem sayesinde $HS_{M,I}(n)$ polinomunun $\epsilon\frac{n^s}{s!}$ terimi için $e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) = \epsilon$ olduğu görülebilir. Teoremin kanıtı spektral dizilerin kullanımını gerektirdiğinden tezde kanıtı verilmeden ifade edilecektir.

**Teorem 6.0.2.** *[9, Theorem 3.6] $R$ bir Noether halka ve $E$ bir sonlu üretilmiş $R$–modül olsun. $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistem olmak üzere $I = (\gamma_1,\ldots,\gamma_s)$ olsun. O zaman yeterince büyük $n$ değerleri için elde edilen $HS_{M,I}(n)$ polinomunun $\epsilon\frac{n^s}{s!}$ terimi için*

$$e_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) = \chi_R(\gamma_1,\ldots,\gamma_s \mid E) = \epsilon$$

*olur.*

**Sonuç 6.0.3.** *[9, Teorem 4.1] $R$ bir yarı yerel halka, $E$ bir sonlu üretilmiş $R$–modül ve $\overline{R} = R/\operatorname{Ann}(E)$ olsun. Ayrıca $\dim E = d$ olduğu kabul edilsin. Eğer $\overline{\gamma}_1,\ldots,\overline{\gamma}_d$, $\overline{R}$*

*halkasının bir parametreler sistemi olmak üzere $I = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ ise o zaman*

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_d \mid E) = \chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_d \mid E) = e(I, E)$$

*olur.*

*Kanıt.* $\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_d$, $\overline{R}$ halkasının bir parametreler sistemi olduğundan $\dim E = d$ olur. Kolayca görülebilir ki $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$, $E$ üzerinde bir çokkatlı sistemdir. $\overline{I} = (I + \operatorname{Ann} E)/\operatorname{Ann} E$ olsun. Buna göre her $n$ için $l_R(E/I^{n+1}E) = l_{\overline{R}}(E/\overline{I}^{n+1}E)$ olacağından $HS_{E,I}(n) = HS_{E,\overline{I}}(n)$ olur. Burada, eşitliğin sol tarafındaki Hilbert-Samuel fonksiyonu $E$'nin $\overline{R}$–modül yapısına göre tanımlanmaktadır. Dolayısıyla $HS_{E,\overline{I}}(n)$, yeterince büyük $n$ değerleri için derecesi $d$ olan bir polinomdur. Bu polinomun en yüksek dereceli terimi $\epsilon\frac{n^d}{d!}$ şeklindedir. Buna göre tanımdan $\epsilon = e(I, E)$ elde edilir. Öte yandan

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_d \mid E) = e_{\overline{R}}(\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_d \mid E)$$

ve $\chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_d \mid E) = \chi_{\overline{R}}(\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_d \mid E)$ olacağından yukarıdaki teoremden dolayı istenilen elde edilir. $\square$

**Sonuç 6.0.4.** *$R$ bir yarı yerel halka ve $\dim R = d$ olsun. Eğer $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$, $R$ halkasının bir parametreler sistemi olmak üzere $I = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ ise o zaman*

$$e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_d \mid R) = \chi_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_d \mid R) = e(I, R)$$

*olur.*

# Kaynakça


[1] Northcott, D. G., *Lessons on Rings, Modules and Multiplicities*, Cambridge University Press, London, **1968.**

[2] Sharp, R. Y., *Steps in Commutative Algebra*, Second Edition, London Mathematical Society Student Texts, 51. Cambridge University Press, Cambridge, **2000**.

[3] Northcott, D. G., *An Introduction to Homological Algebra*, Reprint of the 1960 original, Cambridge University Press, Cambridge, **2008**.

[4] Marley, T., Graded Rings and Modules, https://www.math.unl.edu/~tmarley1/905notes.pdf (Nisan,**2017**).

[5] Wright, D. J., General Multiplicity Theory, *Proc. London Math. Soc.*, 15 (3), 269–288 , **1965.**

[6] Cox, D., Little, J., O'Shea, D., *Ideals, Varieties, and Algorithms*, *An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Third edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, **2007**.

[7] Hilbert, David, Über die Theorie der algebraischen Formen, *Math. Ann.*, **36** (4), 473–534, **1890.**

[8] Georgia State University, Lecture 21, The Hilbert-Samuel Function, http://www2.gsu.edu/~matfxe/commalglectures/lect21.pdf (Nisan, **2017**)

[9] Auslander, M. and Buchsbaum, D. A., Codimension and Multiplicity, *Ann. of Math.*, 68 (2), 625–657, **1958.**

**ÖZGEÇMİŞ**

**Kimlik Bilgileri**

Adı Soyadı : Damla ACAR
Doğum Yeri : Yıldırım/BURSA
Medeni Hali : Bekar
E-posta : acrdamla@gmail.com
Adresi : Ortabağlar Mahallesi Menekşe Sokak No.17/3, 16310 Yıldırım, BURSA

**Eğitim**

Lisans : Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü (2009-2013)
Yüksek Lisans : Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü (2014-2017)

**Yabancı Dil ve Düzeyi**

İngilizce (Orta)
Almanca (Başlangıç)

**İş Deneyimi**

-

**Deneyim Alanları**

-

**Tezden Üretilmiş Yayınlar**

-

**Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar**

-

**HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU**

**HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA**

Tarih: 12/04/2017

Tez Başlığı / Konusu: KADEMELİ HALKALAR, MODÜLLER VE ÇOKKATLILIK

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 146 sayfalık kısmına ilişkin, 12/04/2017 tarihinde tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 4 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza
12/04/2017

| | |
|---|---|
| **Adı Soyadı:** | DAMLA ACAR |
| **Öğrenci No:** | N14123141 |
| **Anabilim Dalı:** | MATEMATİK |
| **Programı:** | MATEMATİK-TEZLİ YÜKSEK LİSANS |
| **Statüsü:** | ☒ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr. |

**DANIŞMAN ONAYI**

UYGUNDUR.

Doç.Dr.BÜLENT SARAÇ

(Unvan, Ad Soyad, İmza)