KUASİLİNEER DALGA DENKLEMİNİN UZUN ZAMAN DAVRANIŞI

LONG TIME BEHAVIOUR OF A QUASILINEAR WAVE EQUATION

ZEHRA ŞEN

PROF. DR. AZER HANMEHMETLİ

TEZ DANIŞMANI

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

DOKTORA TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2018

ZEHRA ŞEN'in hazırladığı "**Kuasilineer Dalga Denkleminin Uzun Zaman Davranışı**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Abdullah ÖZBEKLER
Başkan ....

Prof. Dr. Azer HANMEHMETLİ
Danışman ....

Prof. Dr. Yeter ŞAHİNER
Üye ....

Doç. Dr. Meryem KAYA
Üye ....

Dr. Öğr. Üyesi Aysun TEZEL ÖZTURAN
Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından DOKTORA TEZİ olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

☐ **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**
(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

☒ **Tezimin/Raporumun 15.05.2020 tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**
(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım taktirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

☐ **Tezimin/Raporumun .... tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

☐ **Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

15 / 05 / 2018

Zehra ŞEN

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

11/05/2018

ZEHRA ŞEN

ÖZET

KUASİLİNEER DALGA DENKLEMİNİN UZUN ZAMAN DAVRANIŞI

Zehra ŞEN

Doktora, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Azer HANMEHMETLİ

Mayıs 2018, 106 sayfa

Bu tezde, sınırlı bölgede, bir boyutlu kuvvetli sönümlü doğrusal olmayan

$$u_{tt} - u_{txx} - \frac{\partial}{\partial x}\left(|u_x|^{p-2} u_x\right) + f(u) = g(x) \tag{1}$$

dalga denklemi ile sınırlı olmayan bölgede, yerel sönüm terimine sahip, bir boyutlu kuvvetli sönümlü doğrusal olmayan

$$u_{tt} - u_{txx} - u_{xx} - \frac{\partial}{\partial x}\left(|u_x|^{p-2} u_x\right) + a(x) u_t + f(u) = g(x) \tag{2}$$

dalga denkleminin uzun zaman davranışı ele alınmıştır. Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, kuvvetli sönümlü dalga denklemlerinin uzun zaman dinamikleri ile ilgili yapılmış çalışmalara ve tezin amacına yer verilmiştir. İkinci bölüm ise, tezde kullanılacak temel teoremlere ve tanımlara ayrılmıştır. Üçüncü bölümde, (1) denklemi için ele aldığımız başlangıç sınır değer probleminin iyi konulmuş bir problem olduğu gösterilmiş ve bu problemin ürettiği yarıgrubun $W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$'de düzgün kuvvetli yerel olmayan çekiciye sahip olduğu ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde ise, (2) denklemi için incelenen başlangıç değer probleminin iyi konulmuş bir problem olduğu elde edilmiş ve bu problemin ürettiği yarıgrubun $(W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})) \times L^2(\mathbb{R})$'de zayıf yerel çekicilere sahip olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Dalga Denklemi, p-Laplasyan, Çekiciler

ABSTRACT

LONG-TIME BEHAVIOUR OF A QUASILINEAR WAVE EQUATION

Zehra ŞEN

Doctor of Philosophy, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Azer HANMEHMETLI

May 2018, 106 pages

In this thesis, we concern the long time behaviours of the one dimensional strongly damped nonlinear wave equation

$$u_{tt} - u_{txx} - \frac{\partial}{\partial x}\left(|u_x|^{p-2}\, u_x\right) + f(u) = g(x) \tag{1}$$

in bounded domain and the one dimensional strongly damped nonlinear wave equation with localized damping term

$$u_{tt} - u_{txx} - u_{xx} - \frac{\partial}{\partial x}\left(|u_x|^{p-2}\, u_x\right) + a(x)\, u_t + f(u) = g(x) \tag{2}$$

in unbounded domain. The thesis consists of four sections. In the first section, the previous studies about the long time dynamics of the strongly damped wave equations and the main purpose of the thesis are mentioned. Second section is devoted to the main theorems and definitions. In the third section, we prove the well-posedness of the initial boundary value problem for equation (1) and the existence of regular strong global attractor in $W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$ for the semigroup generated by the problem. In the fourth section, we obtain the well-posedness of the initial value problem for equation (2) and the existence of weak local attractors in $\left(W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})\right) \times L^2(\mathbb{R})$ for the semigroup generated by the problem.

Keywords: Wave Equation, p-Laplacian, Attractors

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim boyunca yaptığım akademik çalışmalarımda, yüksek bilgi ve tecrübesini esirgemeyen, gelecekteki meslek hayatımda da vermiş olduğu değerli bilgilerden faydalanacağıma inandığım saygıdeğer hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Azer HANMEHMETLİ'ye doktora tezimin planlanması ve yürütülmesinde verdiği destekten dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Vermiş olduğu beş yıllık doktora bursu ile doktora süresince sağladığı maddi destek için TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Ayrıca, tez çalışmamın her aşamasında yanımda olup güç veren sevgili eşim, annem, babam, kardeşlerim ve hayatıma ayrı bir anlam katan canım oğluma verdikleri büyük emek, destek, sabır ve hoşgörü için sonsuz teşekkür ederim.

Yine tez yazım aşamasında desteğini ve yardımlarını esirgemeyen Arş. Gör. Dr. Sema YAYLA ve Arş. Gör. Esra KORKMAZ'a da teşekkürlerimi sunarım.

İçindekiler

1 GİRİŞ

Bu tezde amacımız, sınırlı bölgede, p-Laplasyan terimine sahip, bir boyutlu kuvvetli sönümlü (*strongly damped*) doğrusal olmayan

$$u_{tt} - u_{txx} - \frac{\partial}{\partial x}\left(|u_x|^{p-2} u_x\right) + f(u) = g(x) \tag{1.1}$$

dalga denklemi ile sınırlı olmayan bölgede, yerel sönüm (*locally damping*) ve p-Laplasyan terimlerine sahip, bir boyutlu kuvvetli sönümlü doğrusal olmayan

$$u_{tt} - u_{txx} - u_{xx} - \frac{\partial}{\partial x}\left(|u_x|^{p-2} u_x\right) + a(x) u_t + f(u) = g(x) \tag{1.2}$$

dalga denkleminin zayıf çözümlerinin uzun zaman davranışını çekiciler vasıtasıyla incelemektir.

Kuvvetli sönümlü dalga denklemleri, 1960'lı yıllardan bu yana incelenmektedir. Isı iletimi, katı cisim mekaniği gibi fiziksel alanlarda önemli rol oynayan bu denklemler çoğu matematikçinin ilgisini çekmiştir. Örneğin, bir ve iki boyutta, sırasıyla, homojen bir telin enine titreşiminin ve homojen bir çubuğun boyuna titreşiminin modellenmesinde karşımıza çıkan (1.1) denkleminin farklı tipleri ile ilgili birçok makale bulunmaktadır. Son yıllarda, özellikle kuvvetli sönümlü dalga denklemlerinin uzun zaman davranışı dikkat çekmektedir. Evrimsel denklemlerin uzun zaman davranışı çekiciler vasıtasıyla ifade edilebildiğinden dolayı, çekicilerin varlığı ve özellikleri üzerine çalışmalar yapılmaktadır (Bkz. [1-17]).

Sınırlı bölgede, (1.1) denkleminin $p = 2$ durumu için çekiciler, çok boyutlu uzayda, farklı koşullar altında, birçok yazar tarafından ele alınmıştır. Özel olarak, [1-11] çalışmalarında doğrusal kuvvetli sönüm terimine sahip dalga denklemi incelenmiştir. Örneğin, Dell'Oro ve Pata [8] çalışmasında, düzgün sınıra sahip, sınırlı $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ bölgesinde

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + f(u_t(x,t)) \\ \qquad\qquad + g(u(x,t)) = h(x), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = a(x) \quad , \quad u_t(x,0) = b(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

başlangıç sınır değer probleminin, $h \in L^2(\Omega)$ ve $\lambda_1 > 0$ ile $-\Delta$ Laplace operatörünün birinci özdeğeri belirtilmek üzere, $c \geq 0$ ve $c_1 > 0$ sabitleri için, f fonksiyonu üzerine konulan

$$f \in C^1(\mathbb{R}), \ \ f(0) = 0, \ \ |f'(s)| \leq c\left(1 + |s|^4\right), \forall s \in \mathbb{R} \text{ ve } \liminf_{|s|\to\infty} f'(s) > -\lambda_1$$

kritik koşulu ile g fonksiyonu üzerine konulan

$$g \in C^1(\mathbb{R}), \, g(0) = 0, \ \ |g'(s)| \leq c\left(1 + |s|^{p-1}\right), \, p \in [1,5), \forall s \in \mathbb{R} \ \text{ ve}$$

$$\liminf_{|s|\to\infty} \frac{g(s)}{s} > -\lambda_1 \ \ , \ \liminf_{|s|\to\infty} \frac{sg(s) - c_1 \int\limits_0^s g(y)\,dy}{s^2} > -\frac{\lambda_1}{2}$$

kritik altı koşulu altında, $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$'de yerel olmayan çekiciye sahip olduğu ve $p \leq 4$ ek koşulu altında bu çekicinin optimal düzgünlüğü ispatlanmıştır.

Daha sonra, [9] makalesinde aynı yazarlar, (1.3) problemi için, [8]'de elde edilen sonucu, f ve g fonksiyonlarının her ikisinin de kritik olduğu ve $\inf_{x\in\mathbb{R}} f'(x) > -\lambda_1$ olduğu durumu için geliştirerek, $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$'de problemin sonlu boyutlu, düzgün üstel çekiciye sahip olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca, Khanmamedov [11], aynı problemin, düzgün sınıra sahip, sınırlı $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde, f ve g fonksiyonlarının üstel büyüyen fonksiyon olduğu durum için, $(H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times L^2(\Omega)$'de yerel olmayan çekiciye sahip olduğunu ispatlamıştır.

Diğer yandan, (1.1) denkleminin $p = 2$ durumu için bahsedilen bu çalışmalardan farklı olarak, [12-13] çalışmalarında doğrusal olmayan kuvvetli sönüm terimine sahip dalga denklemi incelenmiştir. Khanmamedov [12] çalışmasında, düzgün sınıra sahip, sınırlı $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ bölgesinde,

$$\begin{cases} w_{tt}(t,x) - \Delta w(t,x) - \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \beta_i\left(w_{tx_i}(t,x)\right) \\ \qquad\qquad + g\left(w_t(t,x)\right) + f\left(w(t,x)\right) = 0, \ (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega, \\ w(t,x) = 0, \ (t,x) \in (0,\infty) \times \partial\Omega, \\ w(0,x) = w_0(x) \ \ , w_t(0,x) = w_1(x), \, x \in \Omega \end{cases}$$

probleminin,

$$\beta_i \in C(\mathbb{R}), \, \beta_i(0) = 0, \, \beta_i \text{ kesin artan ve } |\beta_i(s) - \beta_i(t)| \leq c(1 + |s - t|), \forall s, t \in \mathbb{R},$$

$$g \in C^1(\mathbb{R}), \, g(0) = 0, \ \liminf_{|s|\to\infty} g'(s) > 0, \ |g'(s)| \leq c + c|s|^{p-1}, \, 1 \leq p < 5, \, \forall s \in \mathbb{R},$$

$$f \in C^1(\mathbb{R}), \ |f'(s)| \leq c + c|s|^{q-1}, \, 1 \leq q \leq 3, \, \forall s \in \mathbb{R} \text{ ve } \liminf_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{s} > -\lambda_1$$

koşulları altında, $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$'de yerel olmayan çekicisinin varlığını elde etmiştir.

Yukarıda bahsedilen çalışmalarda, doğrusal Laplasyan terimini içeren kuvvetli sönümlü dalga denklemlerinin çekicileriyle ilgilenilmiştir. Doğrusal olmayan Laplasyan terimini içeren kuvvetli sönümlü dalga denklemi ile ilgili yapılan çalışmalara [14] ve [15] çalışmalarını örnek verebiliriz. [14]'te Chen, Guo ve Wang,

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = \alpha u_{txx}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\sigma(u_x(x,t)) \\ \qquad - f(u(x,t)) + g(x), \ (x,t) \in (0,1) \times [0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), \ x \in (0,1), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \ t \in [0,\infty) \end{cases}$$

başlangıç sınır değer problemini, $\alpha, r_0 > 0$ sabit olmak üzere, σ fonksiyonu için konulan

$$\sigma \in C^1(\mathbb{R}) \text{ ve } \sigma'(s) \geq r_0, \ \forall s \in \mathbb{R}$$

koşulu ile düzgün doğrusal olmayan f fonksiyonu için konulan, $F(s) = \int\limits_0^s f(\tau)\, d\tau$ olmak üzere,

$$\liminf_{|s|\to\infty} \frac{F(s)}{s^2} \geq 0$$

ve

$$\liminf_{|s|\to\infty} \frac{sf(s) - wF(s)}{s^2} \geq 0 \text{ olacak şekilde } w > 0 \text{ sabiti vardır}$$

koşulları altında, düzgün H^2-çözümlerinin uzun zaman davranışını ele almıştır. σ fonksiyonu üzerindeki koşullar altında, $\frac{\partial}{\partial x}\sigma(u_x)$ doğrusal olmayan Laplasyan terimi H^2-çözümleri için u_{xx} gibi davrandığından, çözümler için asimptotik kompaktlığın ispatında ayırma metodu başarıyla uygulanabilmiş ve problemin kompakt, yerel olmayan, sonlu boyutlu çekiciye sahip olduğu ispatlanmıştır.

Diğer taraftan, Kalantarov ve Zelik [15] çalışmasında, sınırlı , düzgün $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ bölgesinde

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \gamma\Delta u_t(t,x) - \Delta u(t,x) + f(u(t,x)) \\ \qquad = \nabla \cdot \phi'(\nabla u(t,x)) + g(x), \ (t,x) \in [0,\infty) \times \Omega, \\ u(t,x) = 0, \ (t,x) \in [0,\infty) \times \partial\Omega, \\ \xi_u(0,x) := (u(0,x), u_t(0,x)) = \xi_0(x), \ x \in \Omega \end{cases}$$

probleminin, $\gamma > 0$, $g \in L^2(\Omega)$ olmak üzere, $\phi \in C^2(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$ ve $f \in C^2(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ fonksiyonları, a_i pozitif sabitler, $p \in [1,5)$ için

$$a_0 |\eta|^{p-1} \leq \phi''(\eta) \leq a_1 \left(1 + |\eta|^{p-1}\right), \ \forall \eta \in \mathbb{R}^3$$

ve $C > 0$, $a > 0$, $q > 0$ için

$$-C + a\,|s|^{q} \leq f'\,(s) \leq C\,(1 + |s|^{q})\,,\, \forall s \in \mathbb{R}$$

koşulları altında, sonlu boyutlu üstel ve yerel olmayan çekicilerinin varlığı ve düzgünlüğü gösterilmiştir. Bu çalışmada, daha genel doğrusal olmayan Laplasyan terimine sahip kuvvetli sönümlü dalga denkleminin zayıf çözümleri için (zayıf topolojide) çekiciler incelenmişse de, ele alınan denklem, (1.1) denklemi ile karşılaştırıldığında, ek olarak $-\Delta u$ terimini içermektedir. Bu terim, doğrusal olmayan dejenere Laplasyan terimi ile birlikte, non-dejenere Laplasyan terimini oluşturduğundan, çalışmada zayıf ve kuvvetli çözümler için bazı ek değerlenmeler elde edilebilmiştir.

Çalışmamızda incelediğimiz (1.1) denklemi, [14] ve [15] çalışmalarından farklı olarak, dejenere Laplasyan terimini içerdiğinden, özellikle kuvvetli yerel olmayan çekicinin varlığını incelerken, bu çalışmaların yaklaşımları uygulanamamaktadır. Diğer taraftan, [18-19]'daki asimptotik kompaktlık metotlarının uygulanmasında da bazı zorluklar ortaya çıkmaktadır. Bunlar, (1.1) denkleminin bir zayıf çözümü için enerji eşitliğinin ve iki zayıf çözümünün farkı için uygun enerji eşitsizliğinin olmamasından kaynaklanmaktadır. Tezimizde bu zorlukları ortadan kaldırmak için, p üzerine $p < 4$ ek koşulu getirilip bir boyutlu durumun özelliği kullanılarak, her $p > 2$ için varlığı ispatlanan zayıf yerel çekicilerin $W^{1,\infty}(0,1)\times W^{1,\infty}(0,1)$ uzayının sınırlı bir alt kümesi olduğu gösterilmiştir. Böylece, zayıf yerel çekicilere ait yörüngeler için enerji eşitliğinin sağlandığı sonucuna ulaşılmış ve [18-19]'da kullanılan metotları uygulanarak zayıf çözümlerin asimptotik kompaktlığı elde edilebilmiştir. Buradan, kesin Lyapunov fonksiyonunun varlığı ile birlikte, $W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$'de düzgün kuvvetli yerel olmayan çekicinin varlığı ispatlanmıştır.

Sınırlı olmayan bölgede, Sobolev kompakt gömülme teoremlerinin var olmaması, sınırlı bölgede kuvvetli sönümlü dalga denkleminin çözümünün uzun zaman davranışının incelenmesinde kullanılan yöntemlerin uygulanmasını zorlaştırmaktadır. Çalışmamızda, bu durumun etkisi, (1.2) denklemi için çarpma teknikleriyle elde edilen düzgün kuyruk değerlenmeleri sayesinde azaltılarak, $2 < p < 4$ koşulu altında zayıf yerel çekicilerin varlığı elde edilmiştir.

Çalışmamız dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan giriş bölümünde, kuvvetli sönümlü dalga denklemlerinin çekiciler vasıtasıyla belirlenen uzun zaman davranışı ile ilgili yapılmış olan çalışmalar ve tezin amacı hakkında kısaca bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde tez içerisinde kullanılacak temel teoremler ve tanımlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde, (1.1) denklemi için incelenen başlangıç sınır değer problemi ve koşullar tanımlanarak, bu problemin iyi konulmuşluğu Galerkin yöntemiyle elde edilmiş olup problemin ürettiği yarıgrubun $W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$'de düzgün kuvvetli yerel olmayan çekiciye sahip olduğu ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde ise, (1.2) denklemi için konulan başlangıç değer problemi ve koşullar verilerek, bu problemin iyi konulmuşluğu Galerkin yöntemiyle ispatlanmış ve problemin ürettiği yarıgrubun $(W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})) \times L^2(\mathbb{R})$'de zayıf yerel çekicilerinin varlığı gösterilmiştir.

2 ÖN BİLGİLER VE TEMEL TEOREMLER

Bu bölümde tez içerisinde kullanılacak bazı uzaylar, tanımlar, teoremler, gösterimler ve eşitsizlikler verilecektir.

Teorem 2.0.1 (Peano Varlık Teoremi) *([21]) t_0 ve y_0 verilen reel sayılar olmak üzere, a ve b pozitif reel sayıları için*

$$Q_b = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_o| \leq a,\ |x - y_o| \leq b\right\}$$

olsun. Kabul edelim ki $f : Q_b \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olup bir $K > 0$ sabiti için

$$|f(t,x)| \leq K,\ \ \forall (t,x) \in Q_b$$

sağlansın. Bu durumda, $c = \min\left\{a, \frac{K}{b}\right\}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = y_0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemi $[t_0 - c, t_0 + c]$ aralığında tanımlı sürekli türevlenebilir çözüme sahiptir.

Teorem 2.0.2 (Riesz Gösterim Teoremi) *([22]) X Hilbert uzayı olsun. X üzerinde tanımlı x^* lineer fonksiyonelinin X^* dual uzayına ait olması için gerekli ve yeterli koşul*

$$x^*(y) = (y,x)_X\,,\ \ \forall y \in X$$

olacak şekilde bir $x \in X$ elemanının var olmasıdır ve bu durumda $\|x^*\|_{X^*} = \|x\|_X$ olur. Dahası, x elemanı $x^* \in X^*$ tarafından teklikle belirlidir. Burada, $(\cdot,\cdot)_X$ ile X uzayındaki iç çarpım; $\|\cdot\|_X$ ile X uzayındaki norm işaret edilmektedir.

Tanım 2.0.3 *([23]) X lineer normlu uzay, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_X = 0$$

ise $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi x_0 elemanına kuvvetli yakınsar denir ve $x_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x_0$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.0.4 *([23]) X lineer normlu uzay, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ ve $x_0 \in X$ olsun. X^* uzayı X uzayının dual uzayı olmak üzere, her $f \in X^*$ için*

$$\lim_{n\to\infty} \langle f, x_n\rangle = \langle f, x_0\rangle$$

ise $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi x_0 elemanına zayıf yakınsar denir ve $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\rightarrow}} x_0$ şeklinde gösterilir. Burada, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ uygun dual formdur.

Önerme 2.0.5 *([23]) X lineer normlu uzay, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ olsun. Eğer $x_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{w}} x$ ise $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi sınırlı olup*

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X$$

sağlanır.

Tanım 2.0.6 *([23]) X lineer normlu uzay, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ ve $f_0 \in X^*$ olsun. Eğer her $x \in X$ için*

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, x\rangle = \langle f_0, x\rangle$$

ise X^* uzayında $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi f_0 elemanına zayıf$-*$ (zayıf yıldız) yakınsar denir ve $f_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{w^*}} f_0$ şeklinde gösterilir. Burada, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uygun dual formdur.

Önerme 2.0.7 *([23]) X lineer normlu uzay, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ olsun. Eğer $f_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{w^*}} f$ ise $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi sınırlı olup*

$$\|f\|_{X^*} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{X^*}$$

sağlanır.

Teorem 2.0.8 (Lebesgue Yakınsaklık Teoremi) *([24]) $E \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir küme, g fonksiyonu E üzerinde integrallenebilir fonksiyon ve $\{f_n\}$ dizisi E üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonlardan oluşan, E üzerinde $|f_n| \leq g$ ve hemen hemen her $x \in E$ için $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ olacak şekilde fonksiyon dizisi olsun. Bu durumda*

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx$$

sağlanır.

Tanım 2.0.9 *([24]) X metrik uzay olsun. Eğer keyfi $\varepsilon > 0$ için X uzayının ε yarıçaplı yuvarlardan oluşan sonlu örtüsü varsa X uzayına tamamen sınırlıdır denir.*

Teorem 2.0.10 *([24]) Bir X metrik uzayının kompakt olması için gerek ve yeter koşul bu uzayın tam ve tamamen sınırlı olmasıdır.*

Tanım 2.0.11 *([25]) X, Y Banach uzayları ve $T : X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer S kümesinin X uzayında sınırlı olması $T(S)$ görüntü kümesinin Y uzayında sınırlı olmasını gerektiriyorsa T operatörüne sınırlıdır denir.*

Önerme 2.0.12 *([25]) X, Y Banach uzayları olsun. Eğer $T : X \to Y$ sınırlı operatörü lineer ise*

$$\|Tx\|_Y \leq K \|x\|_X \,, \ \ \forall x \in X$$

sağlanacak şekilde bir $K > 0$ sabiti vardır.

Önerme 2.0.13 *([25]) X, Y Banach uzayları ve $\mathcal{L}(X, Y)$ ile X uzayından Y uzayına lineer sınırlı operatörlerin uzayını göstermek üzere, her $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ için*

$$\|T\| := \sup\left\{\|Tx\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\right\} = \sup\left\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X = 1\right\}$$

$$= \inf\left\{K : \|Tx\|_Y \leq K \|x\|_X \,,\, x \in X\right\}$$

ile tanımlı fonksiyon $\mathcal{L}(X, Y)$ uzayı üzerinde bir norm tanımlar. Bu normu $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.0.14 *([26]) X, Y Banach uzayları, $T : X \longrightarrow Y$ lineer operatör olsun. $\{T(\phi) : \phi \in X\}$ uzayı sonlu boyutlu ise T operatörü sonlu ranka sahiptir denir.*

Tanım 2.0.15 *([26]) H Hilbert uzayı ve $K \in \mathcal{L}(H, H)$ olmak üzere, $\|K_n - K\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ olacak şekilde sonlu ranka sahip operatörlerden oluşan $\{K_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(H, H)$ dizisi varsa K operatörüne kompakt operatör denir.*

Tanım 2.0.16 *([26]) H Hilbert uzayı ve $T \in \mathcal{L}(H, H)$ olmak üzere*

$$(T^*(\phi_2), \phi_1) = (\phi_2, T\phi_1), \quad \forall \phi_1, \, \phi_2 \in H$$

eşitliğini sağlayan $T^* : H \longrightarrow H$ operatörüne T operatörünün eşleniği denir ve

$$T(\phi) = T^*(\phi), \quad \forall \phi \in H$$

ise T operatörüne özeşlenik operatör denir. Burada, $(\cdot, \cdot)$ ile H uzayındaki iç çarpım ifade edilmektedir.

Teorem 2.0.17 (Spectral Teorem) *([26]) H Hilbert uzayı, $K \in \mathcal{L}(H, H)$ özeşlenik, kompakt operatör olsun. Bu durumda, her $x \in H$ için $K(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, x_n) x_n$ olacak şekilde, K operatörünün 0 dan farklı özdeğerlerinden oluşan $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ve bu özdeğerlere uygun özvektörlerden oluşan ortonormal $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır. Ayrıca $K_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} \lambda_n (x, x_n) x_n$ olarak tanımlarsak $\{x_n\}$ dizisi sonlu olduğunda $K = K_N$, sonsuz olduğunda $\|K - K_N\| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ olur.*

Sonuç 2.0.18 *([23]) H Hilbert uzayı, $K : H \to H$ özeşlenik, kompakt operatör ve* $\ker(K) = 0$ *ise H uzayında, K operatörünün özvektörlerinden oluşan tam ortonormal sistem mevcuttur.*

Tanım 2.0.19 *([27]) V yansımalı Banach uzayı ve V^* ise bu uzayın duali olsun. Bu durumda $A : \mathcal{D}(A) \subset V \to V^*$ operatörü*

$$\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 \rangle \geq 0, \; \forall v_1, \; v_2 \in \mathcal{D}(A)$$

ifadesini sağlıyorsa bu operatöre monoton operatör denir. Burada, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uygun dual formdur.

Tanım 2.0.20 *([27]) V yansımalı Banach uzayı ve V^* bu uzayın duali olsun. Bu durumda, her $u, v \in V$ için $t \to \langle A(u + tv), v \rangle$ reel değerli fonksiyonu sürekli ise $A : V \to V^*$ operatörüne hemisürekli operatör denir. Burada, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uygun dual formdur.*

Tanım 2.0.21 *([22]) a) $\alpha_i \in \mathbb{N}$ olacak şekilde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ elemanlarına çoklu indis (multi-index) denir. $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ ise α çoklu indisinin derecesini ifade etmektedir.*

b) $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ çoklu indis ve $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ olmak üzere,

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$$

operatörüne $|\alpha|$. mertebeden kısmi türev operatörü denir.

Tanım 2.0.22 *([22]) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge, $m \geq 0$ tamsayı olsun.*

a) $|\alpha| \leq m$ için, $|\alpha|$. mertebeden tüm $D^\alpha \phi$ kısmi türevleri Ω bölgesinde sürekli olan ϕ fonksiyonlarının oluşturduğu vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ şeklinde kısaltılacaktır. Ayrıca $C^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$ ile tanımlıdır.

b) $C^\infty(\Omega)$ uzayına ait, kompakt destekli (supportlu) fonksiyonların oluşturduğu test fonksiyonları uzayı $C_0^\infty(\Omega)$ (veya $\mathcal{D}(\Omega)$) ile gösterilir.

c) $0 \leq |\alpha| \leq m$ için $D^\alpha \phi$ tüm kısmi türevleri Ω bölgesinde sınırlı olacak şekilde $\phi \in C^m(\Omega)$ fonksiyonlar uzayına $C_b^m(\Omega)$ uzayı denir ve bu uzay

$$\|\phi\|_{C_b^m(\Omega)} := \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \phi(x)|$$

normuyla Banach uzayıdır.

d) $0 \leq |\alpha| \leq m$ *için tüm* $D^{\alpha}\phi$ *kısmi türevleri* Ω *bölgesinde sınırlı ve düzgün sürekli olan* $\phi \in C^{m}(\Omega)$ *fonksiyonlarının oluşturduğu vektör uzayı* $C^{m}(\overline{\Omega})$ *ile gösterilir. Bu uzay*

$$\|\phi\|_{C^{m}(\overline{\Omega})} := \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^{\alpha}\phi(x)|$$

normu ile Banach uzayıdır.

Tanım 2.0.23 *([23])* $p \geq 1$ *gerçel sayı olmak üzere,* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n}$ *bölgesinde*

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p}\, dx < \infty, \quad x \in \Omega$$

koşulunu sağlayan, ölçülebilir u fonksiyonlar uzayına, $L^{p}(\Omega)$ *uzayı denir. Bu uzay lineer normlu uzay olmakla birlikte üzerindeki norm,*

$$\|u\|_{L^{p}(\Omega)} := \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p}\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır. $L^{p}(\Omega)$ *uzayı Banach uzayıdır ve* $p = 2$ *durumunda*

$$(u, v) := \int\limits_{\Omega} u(x)\, v(x)\, dx$$

ile tanımlı iç çarpım ile Hilbert uzayıdır. Ayrıca $1 \leq p < \infty$ *durumunda ayrılabilir;* $1 < p < \infty$ *durumunda yansımalı uzaydır.*

Tanım 2.0.24 *([23])* $p = \infty$ *olmak üzere,* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n}$ *bölgesinde hemen hemen her yerde sınırlı ölçülebilir fonksiyonlar uzayına* $L^{\infty}(\Omega)$ *uzayı denir ve üzerindeki norm,*

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} := \underset{x\in\Omega}{ess\sup} |u(x)|$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzay bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.0.25 *([23])* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n}$ *bir bölge olsun. Her* $K \subset \Omega$ *kompakt kümesi için* $L^{p}(K)$ *uzayına ait olan fonksiyonların oluşturduğu uzay* $L^{p}_{loc}(\Omega)$ *ile gösterilir.*

Tanım 2.0.26 *([23])* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n}$ *boştan farklı açık bir küme ve* $u, w \in L^{1}_{loc}(\Omega)$ *olsun. Eğer her* $\varphi \in C^{\infty}_{0}(\Omega)$ *için*

$$\int\limits_{\Omega} u(x) D^{\alpha}\varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} w(x)\varphi(x) dx$$

eşitliği sağlanıyorsa, w fonksiyonuna, u fonksiyonunun Ω *bölgesinde* $|\alpha|$*. mertebeden genelleşmiş (zayıf) türevi denir ve* $w = D^{\alpha}u$ *ile gösterilir.*

Tanım 2.0.27 *([23]) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $m \geq 0$ tam sayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, m. mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L^p(\Omega)$ sınıfına ait olan fonksiyonlar uzayına Sobolev uzayı denir ve bu uzay $W^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzay üzerindeki norm, $1 \leq p < \infty$ için*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

şeklindedir. Bu uzaylar Banach uzaylarıdır ve $m = 0$ için $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ alınır. $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega)$ uzayı $H^m(\Omega)$ ile gösterilir ve üzerindeki

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) \; D^\alpha v(x)\, dx$$

ile tanımlı iç çarpım ile Hilbert uzayıdır. Ayrıca $1 \leq p < \infty$ durumunda ayrılabilir olup $1 < p < \infty$ yansımalı uzaydır.

Teorem 2.0.28 *([23]) $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ test fonksiyonlar uzayı $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ uzayında her yerde yoğundur.*

Tanım 2.0.29 *([23]) $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{m,p}(\Omega)$ uzayının normuyla kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir ve bu uzay $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ normuyla Banach uzayıdır. $p = 2$ ise $W_0^{m,2}(\Omega)$ uzayı $H_0^m(\Omega)$ ile gösterilir ve bu uzay $(\cdot,\cdot)_{H^m(\Omega)}$ iç çarpımıyla Hilbert uzayıdır.*

Teorem 2.0.30 (Genişletme) *([28]) $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ olmak üzere,*

$$\widetilde{u} = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ 0 & , x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega \end{cases}$$

fonksiyonu $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ uzayına aittir.

Tanım 2.0.31 *([22]) $m \geq 0$ tamsayı, $1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere, $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ uzayının duali $W^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir ve üzerindeki norm*

$$\|u\|_{W^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{\substack{\|v\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq 1 \\ v \neq 0}} |\langle u, v\rangle|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\langle \cdot,\cdot \rangle$ simgesi $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ ile $W^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$ uzayları arasındaki dual formu ifade etmektedir. Benzer şekilde, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayının duali $W^{-m,p'}(\Omega)$ ile gösterilir ve üzerindeki norm, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ simgesi $W^{-m,p'}(\Omega)$ ile $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayları arasındaki dual formu belirtmek üzere,

$$\|u\|_{W^{-m,p'}(\Omega)} := \sup_{\substack{\|v\|_{W_0^{m,p}(\Omega)}\leq 1 \\ v\neq 0}} |\langle u,v\rangle|$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.0.32 *([28]) $m \geq 1$ tam sayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere aşağıdaki sürekli gömülmeler geçerlidir:*

i) $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ *ise* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ *için* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$,

ii) $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ *ise her* $q \in [p,\ \infty)$ *için* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$,

iii) $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ *ise* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Son durumda,

$$k = \left[\left|m - \frac{n}{p}\right|\right]$$

ve

$$\theta = (m - \frac{n}{p}) - k$$

olmak üzere

$$|D^\alpha u|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\,|\alpha| \leq k$$

ve ayrıca $|\alpha| = k$ için,

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C\,|x-y|^\theta\,\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \qquad h.h.\ x,\, y \in \mathbb{R}^n,$$

olur. Özel olarak, $\|u\|_{C^k(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\,\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}$ sağlanır.

Yukarıdaki sonuçlar keyfi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi için $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayında; $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ veya sınırlı ve sınırı C^1 sınıfından olan Ω bölgesi için $W^{m,p}(\Omega)$ uzayında geçerlidir. Bu durumlarda, $\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} \leq C_2\,\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ sağlanır.

Teorem 2.0.33 (Rellich-Kondrasov) *([28]) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesi sınırlı ve sınırı C^1 sınıfından olmak üzere, aşağıdaki kompakt gömülmeler geçerlidir.*

i) $p < n$ *ise* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ 1 \leq q < p^*,\ p^* = \frac{np}{n-p}$,

ii) $p = n$ *ise* $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ 1 \leq q < \infty$,

iii) $p > n$ *ise* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

Yukarıdaki sonuçlar keyfi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bölgesi için, $W_0^{1,p}(\Omega)$ uzayında sağlanır.

Tanım 2.0.34 *([29])* $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *için*

$$\widehat{u}(y) = \mathcal{F}u(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} u(x)\, dx,\ y \in \mathbb{R}^n$$

ile tanımlanan dönüşüme u fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir. Burada $x \cdot y := \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$ *şeklindedir.* $\mathcal{F}$ *dönüşümü* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *uzayından* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *uzayına lineer izomorfizmadır ve* $\overline{\mathcal{F}}$ *ile bu dönüşümün tersi ifade edilmek üzere*

$$u(x) = \overline{\mathcal{F}}\widehat{u}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot y} \widehat{u}(y)\, dy,\ y \in \mathbb{R}^n$$

ile tanımlanır.

Önerme 2.0.35 *([29]) Her* $u \in \Im$ *için*

$$\mathcal{F}(D^\alpha u) = (iy)^\alpha \mathcal{F}u,\ \forall\alpha \text{ çoklu indis}$$

sağlanır. Burada $\Im = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{Her } \alpha, \beta \text{ çoklu indisi için, } x^\alpha D^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ *ile tanımlı Schwartz uzayı ve* $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$, $(iy)^\alpha = i^{|\alpha|} y_1^{\alpha_1} ... y_n^{\alpha_n}$ *şeklindedir.*

Teorem 2.0.36 *([29])* $m \geq 0$ *tamsayı olmak üzere,* $H^m(\mathbb{R}^n)$ *Sobolev uzayı,*

$$H^m(\mathbb{R}^n) := \{u \in \Im'(\mathbb{R}^n) : (1 + |y|^2)^{\frac{m}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

şeklinde de tanımlanabilir ve üzerinde

$$|||u|||_{H^m(\mathbb{R}^n)} := \left\|(1 + |y|^2)^{\frac{m}{2}} \widehat{u}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

ile tanımlanan norm $||\cdot||_{H^m(\mathbb{R}^n)}$ *normuna denktir. Burada,* $\Im'(\mathbb{R}^n)$ *uzayı* $\Im \equiv \Im(\mathbb{R}^n)$ *Schwartz uzayının duali olup* $|y| = y_1^2 + ... + y_n^2$ *şeklindedir.*

Tanım 2.0.37 *([29])* $s \in \mathbb{R}$ *için,* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *Sobolev uzayı*

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in \Im'(\mathbb{R}^n) : (1 + |y|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

ile tanımlanır. Bu uzay

$$||u||_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \left\|(1 + |y|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

normuyla Hilbert uzayı belirtir.

Not 2.0.38 *1) Her $\sigma < s$ için $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ sürekli gömülmesi geçerlidir.*

2) $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$ ve dolayısıyla $s > 0$ için $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ sürekli gömülmesi sağlanır.

3) Δ Laplacian operatörü için, $\Lambda := -\Delta + id$ operatörü $\Im'(\mathbb{R}^n)$ uzayı üzerinde $\Lambda u = \overline{\mathcal{F}}\left((1+|y|^2)\widehat{u}\right)$ eşitliğini sağlayan özeşlenik, pozitif operatör olmak üzere, yukarıdaki tanıma denk olarak

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \Im'(\mathbb{R}^n) : \Lambda^{\frac{s}{2}} u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

olup üzerindeki iç çarpım ve norm

$$(u,v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\Lambda^{\frac{s}{2}} u, \Lambda^{\frac{s}{2}} v\right)_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad ||u||_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left\|\Lambda^{\frac{s}{2}} u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

ifadesini sağlar. Ayrıca $(\Lambda^s)^{-1} = \Lambda^{-s}$ ve her s, t reel sayıları için $\Lambda^s \Lambda^t = \Lambda^{s+t}$ sağlanır.

Teorem 2.0.39 *([29]) $H^0(\mathbb{R}^n)$ uzayı duali ile özdeşleştirilmek üzere, her $s > 0$ reel sayısı için, $(H^s(\mathbb{R}^n))' = H^{-s}(\mathbb{R}^n)$'dir.*

Not 2.0.40 *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ test fonksiyonlar uzayı, her $s \in \mathbb{R}$ için, $H^s(\mathbb{R}^n)$ uzayında her yerde yoğundur.*

Teorem 2.0.41 *([30]) Kabul edelim ki $s \in \mathbb{R}$ ve $s > \frac{n}{2}$ olsun. Bu durumda, keyfi $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu, gerektiğinde sıfır ölçümlü kümede düzeltilmek üzere, düzgün sürekli ve sınırlı olup*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \leq C_1 \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, $C_1 > 0$ sabiti u fonksiyonuna bağlı değildir. Dahası, $0 < \upsilon < s - \frac{n}{2}$, $\upsilon > 1$ için, u fonksiyonu υ.mertebeden düzgün Hölder süreklidir ve

$$\sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\upsilon} \leq C_2 \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

sağlanır. Burada $C_2 > 0$ sabiti u fonksiyonuna bağlı değildir.

Teorem 2.0.42 *([30]) Eğer $0 < s < \frac{n}{2}$ ve $s \geq \frac{n}{2} - \frac{n}{p}$, $2 < p < \infty$ ise $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ sürekli gömülmesi geçerlidir.*

Tanım 2.0.43 *([29]) $s \geq 0$ reel sayı ve Ω ise $\mathbb{R}^n$'de sınırlı ve sınırı C^∞ sınıfından olan bir bölge olmak üzere, Ω bölgesi sınırının bir tarafında bulunsun. $H^s(\Omega)$ uzayı,*

$H^s(\mathbb{R}^n)$ uzayının elemanlarının Ω bölgesine kısıtlanmasıyla elde edilen fonksiyonların oluşturduğu uzay olarak tanımlanır ve bu uzay üzerinde norm

$$||u||_{H^s(\Omega)} := \inf ||U||_{H^s(\mathbb{R}^n)},\ U = u \text{ h.h.y. } \Omega\text{'da}$$

ile tanımlıdır.

Not 2.0.44 *1) $s = m$ tamsayı ise $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$ sağlanır.*

2) Her $\sigma < s$ için $H^s(\Omega) \hookrightarrow H^\sigma(\Omega)$ sürekli gömülmesi geçerlidir.

3) $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ ve dolayısıyla $s > 0$ için $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ sürekli gömülmesi sağlanır.

Tanım 2.0.45 *([29]) $s > 0$ reel sayısı için, $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $H^s(\Omega)$ uzayının normuyla kapanışı $H_0^s(\Omega)$ ile gösterilir.*

Teorem 2.0.46 *([29]) Her $s > 0$ reel sayısı için, $(H_0^s(\Omega))' = H^{-s}(\Omega)$'dir.*

Teorem 2.0.47 *([29]) Kabul edelim ki $s > \frac{n}{2}$ olsun. Bu durumda, $H^s(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ sürekli gömülmesi sağlanır.*

Teorem 2.0.48 *([30]) Eğer $s < \frac{n}{2}$ ve $s \geq \frac{n}{2} - \frac{n}{p}$, $2 < p < \infty$ ise $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ sürekli gömülmesi geçerlidir. Burada, $s > \frac{n}{2} - \frac{n}{p}$ ise bu gömülme kompakttır.*

Teorem 2.0.49 (İnterpolasyon) *([29])*

a) $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ ve $\theta \in (0,1)$ olmak üzere, $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$ için

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq c_1 \|u\|_{H^{s_1}(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta} \|u\|_{H^{s_2}(\mathbb{R}^n)}^{\theta}$$

olacak şekilde $c_1 = c_1(\theta, s_1, s_2) > 0$ sabiti vardır.

b) Ω, $\mathbb{R}^n$'de sınırlı ve sınırı C^∞ sınıfından olan bir bölge olmak üzere, Ω bölgesi sınırının bir tarafında bulunsun. Bu durumda, $s_1, s_2 > 0$, $s_2 < s_1$ ve $\theta \in (0,1)$ olmak üzere, $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$ için

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \leq c_2 \|u\|_{H^{s_1}(\Omega)}^{1-\theta} \|u\|_{H^{s_2}(\Omega)}^{\theta}$$

olacak şekilde $c_2 = c_2(\theta, s_1, s_2) > 0$ sabiti vardır.

Tanım 2.0.50 *([23]) X Banach uzayı, $0 < T < \infty$ ve $m \geq 0$ tamsayı olsun. $u^{(i)}$ fonksiyonu, u fonksiyonunun i. mertebeden türevi olmak üzere*

$$C^m\left([0,T];X\right) := \left\{u : [0,T] \longrightarrow X \mid i = 1,...,m \text{ olmak üzere } u^{(i)} \text{ süreklidir}\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzay $\|u\|_{C^m([0,T];X)} := \sum\limits_{i=0}^{m} \max\limits_{0\leq t\leq T} \left\|u^{(i)}(t)\right\|_X$ normu ile Banach uzayıdır. $u^{(0)}$ ile fonksiyonun kendisi anlaşılacak ve $C^0([0,T];X)$ yerine $C([0,T];X)$ yazılacaktır.

Tanım 2.0.51 *([23]) X Banach uzayı olmak üzere, $1 \leq p < \infty$ ve $0 < T < \infty$ olacak şekilde, $\int\limits_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt < \infty$ koşulunu sağlayan ölçülebilir $u : (0,T) \to X$ fonksiyonlarının oluşturduğu uzay $L^p(0,T;X)$ ile gösterilir ve üzerindeki norm*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int\limits_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır. $p = \infty$ olduğunda $L^\infty(0,T;X)$ uzayı hemen hemen her yerde sınırlı ölçülebilir $u : (0,T) \to X$ fonksiyonlarının oluşturduğu uzayıdır. Üzerindeki norm ise

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := ess \sup_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_X$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaylar belirtilen normlarla Banach uzayıdır. $p = 2$ için, X Hilbert uzayı olduğunda, $L^2(0,T;X)$ uzayı

$$(u,v) := \int\limits_0^T (u(t), v(t))_X \, dt$$

iç çarpımı ile Hilbert uzayıdır. Burada $(\cdot,\cdot)_X$ ile X uzayındaki iç çarpım kastedilmektedir. Ayrıca, $1 \leq p < \infty$ için X uzayı ayrılabilir ise $L^p(0,T;X)$ uzayı da ayrılabilir; $1 < p < \infty$ için X uzayı yansımalı ise $L^p(0,T;X)$ uzayı da yansımalı uzaydır.

Önerme 2.0.52 *([23]) X Banach uzayı, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. X^* uzayı X uzayının dual uzayı olmak üzere, $L^p(a,b;X)$ uzayının dual uzayı $L^q(a,b;X^*)$'dır.*

Tanım 2.0.53 *([23]) Y, Z Banach uzayları olmak üzere, $u \in L^1(0,T;Y)$ ve $w \in L^1(0,T;Z)$ olsun. Bu durumda*

$$\int\limits_0^T \varphi^{(n)}(t)\, u(t)\, dt = (-1)^n \int\limits_0^T \varphi(t)\, w(t)\, dt \ , \ \ \forall\varphi \in C_0^\infty(0,T)$$

eşitliğini sağlayan w fonksiyonuna u fonksiyonunun $(0,T)$ aralığında n. mertebeden genelleşmiş türevi denir ve $w = u^{(n)}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.0.54 *([23]) X Banach uzayı, $m > 0$ bir tam sayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,*

$$W^{m,p}(0,T;X) = \left\{ u : (0,T) \longrightarrow X \mid u^{(n)} \in L^p(0,T;X),\ 0 \leq n \leq m \ \right\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya Banach değerli Sobolev uzayı denir. Bu lineer uzay üzerindeki norm, $1 \leq p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{0 \leq n \leq m} \| \ u^{(n)} \|^p_{L^p(0,T;X)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(0,T;X)} = \max_{0 \leq n \leq m} \| \ u^{(n)} \|_{L^\infty(0,T;X)}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaylar Banach uzaylarıdır. $u^{(0)}$ ile fonksiyonun kendisi anlaşılacaktır ve $m = 0$ için $W^{0,p}(0,T;X) = L^p(0,T;X)$ alınır. $p = 2$ ve X Hilbert uzayı ise $W^{m,p}(0,T;X)$ uzayı Hilbert uzayıdır ve $H^m(0,T;X)$ ile gösterilir. Bu uzay üzerindeki iç çarpım

$$(u,v) = \sum_{0 \leq n \leq m} \int_0^T \left(u^{(n)}(t), v^{(n)}(t) \right)_X dt$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(\cdot,\cdot)_X$ ile X uzayındaki iç çarpım kastedilmektedir.

Önerme 2.0.55 *([23], [29]) X, Y, Z reel Banach uzayları ve $u : [0,T] \to X$ bir fonksiyon olmak üzere,*

$$W := \{ u \in L^p(0,T;X) : u' \in L^q(0,T;Z) \}$$

olsun. Burada u' ile $u = u(t)$ fonksiyonunun $(0,T)$'de genelleşmiş türevi ifade edilmektedir. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

a) $0 < T < \infty$, $1 \leq p,q \leq \infty$ ve $X \hookrightarrow Z$ sürekli gömülmesi sağlanıyorsa $W \hookrightarrow C([0,T];Z)$ gömülmesi süreklidir.

b) $p = 2$, $q = 2$, X ve Z Hilbert uzayları olmak üzere, $X \hookrightarrow Z$ sürekli gömülmesi sağlanıyorsa, $W \hookrightarrow C\left([0,T];[X,Z]_{\frac{1}{2}}\right)$ gömülmesi süreklidir. Burada $[X,Z]_{\frac{1}{2}}$ ile X ve Z uzaylarının ara uzayını ifade ediyoruz.

c) $0 < T < \infty$, $1 < p,q < \infty$, X ve Z yansımalı Banach uzayları olmak üzere, $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$ sürekli gömülmeleri ve $X \hookrightarrow Y$ kompakt gömülmesi sağlanıyorsa $W \hookrightarrow L^p(0,T;Y)$ gömülmesi kompakttır.

Burada W uzayı

$$\|u\|_W := \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \|u'\|_{L^q(0,T;Z)}$$

normu ile Banach uzayıdır.

Lemma 2.0.56 *([29]) X, Y Banach uzayları, X yansımalı uzay olmak üzere, $X \hookrightarrow Y$ sürekli gömülmesi sağlansın. $C_s(0,T;Y)$ uzayı, $L^\infty(0,T;Y)$ uzayına ait olan skaler sürekli $f:[0,T]\to Y$ fonksiyonlarının uzayı ise*

$$L^\infty(0,T;X)\cap C_s(0,T;Y)=C_s(0,T;X)$$

sağlanır. Burada skaler süreklilik ifadesi, Y^* ile Y uzayının dualini; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ simgesi ile Y ile Y^* uzayları arasındaki dual formu işaret etmek üzere, her $y^*\in Y^*$ için $t\to\langle f(t),y^*\rangle$ fonksiyonunun $[0,T]$ aralığında sürekli olması anlamına gelmektedir.

Tanım 2.0.57 *([27]) X uzayı ρ metriği ile tanımlı tam metrik uzay olsun ve X üzerinde tanımlı, sürekli $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ operatörler ailesi aşağıdaki koşulları sağlasın:*

(i) $S(0)=I$ (birim operatör),

(ii) $S(t+\tau)=S(t)S(\tau)$, $\forall t,\ \tau\geq 0$,

(iii) Her $x\in X$ için $\lim_{t\to 0^+}\rho(S(t)x,x)=0$.

Bu durumda, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ ailesine X üzerinde tanımlı yarıgrup; $(X,S(t))$ ikilisine ise dinamik sistem denir.

Tanım 2.0.58 *([27]) $(X,S(t))$ dinamik sistem ve $B\subset X$ kapalı küme olsun.*

• Eğer keyfi sınırlı D kümesi için

$$S(t)D\subset B,\quad \forall t\geq t_0(D)$$

olacak şekilde $t_0(D)$ zamanı varsa B kümesine yutan küme denir.

• Eğer $(X,S(t))$ dinamik sistemi sınırlı, yutan kümeye sahipse $(X,S(t))$ dinamik sistemine dissipatif denir.

• $(X,S(t))$ dinamik sistemi çeken kompakt K kümesine sahipse yani, her D sınırlı kümesi için

$$\lim_{t\to\infty} d_X\{S(t)D|K\}=0 \tag{2.1}$$

olacak şekilde K kompakt kümesi varsa $(X,S(t))$ dinamik sistemine asimptotik kompakt denir. Burada $d_X\{A|B\}=dist_X(x,B)=\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}d(x,y)$.

• Her $t>0$ için $S(t)D\subset D$ özelliğini sağlayan her D sınırlı kümesi için (2.1) sağlanacak şekilde, D kümesinin kapanışının içinde kalan bir K kompakt kümesi varsa $(X,S(t))$ dinamik sistemine asimptotik düzgün denir.

Tanım 2.0.59 *([27])* $(X, S(t))$ *dinamik sistem olsun.*

(i) Her $t \geq 0$ *için,* $S(t) D \subseteq D$ *ise* D *kümesine ileri değişmez denir.*

(i) Her $t \geq 0$ *için,* $S(t) D \supseteq D$ *ise* D *kümesine geri değişmez denir.*

(ii) Her $t \geq 0$ *için,* $S(t) D = D$ *ise* D *kümesine değişmez denir.*

Tanım 2.0.60 *([31])* $(X, S(t))$ *dinamik sistem olsun. Her* $\tau \in \mathbb{R}$ *ve* $t \geq 0$ *için* $S(t) u(\tau) = u(t+\tau)$ *olacak şekilde* $u(\tau) \in X$, $\tau \in \mathbb{R}$, *eğrisine değişmez yörünge denir.*

Önerme 2.0.61 *([31])* $(X, S(t))$ *dinamik sistem ve* $D \subset X$ *kümesi değişmez olsun. Bu durumda, her* $u_0 \in D$ *elemanından* $u(0) = u_0$ *olacak şekilde bir* $\{u(\tau) : \tau \in \mathbb{R}\} \subset D$ *değişmez yörüngesi geçer.*

Önerme 2.0.62 *([27])* X *Banach uzayı ve* $(X, S(t))$ *dissipatif dinamik sistem olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

•$(X, S(t))$ *asimptotik kompakttır.*

• $(X, S(t))$ *asimptotik düzgündür.*

• $S_1(t)$ *operatörü büyük t'ler için düzgün kompakttır yani; keyfi, sınırlı* D *kümesi için* $\gamma_1(D; t_0) := \cup_{\tau \geq t_0} S_1(\tau) D$ *kümesi* X *uzayında prekompakt olacak şekilde bir* $t_0 = t_0(D)$ *vardır ve* $S_2(t)$ *operatörü ise her sınırlı* D *kümesi için,*

$$\lim_{t\to\infty} r_D(t) = \lim_{t\to\infty} sup\left\{\|S_2(t)x\|_X : x \in D\right\} = 0$$

özelliğini sağlayan, X *uzayında sürekli operatör olmak üzere;* $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ *şeklinde ayrışım vardır.*

• *Ladyzhenskaya koşulu sağlanır: Her sınırlı* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *dizisi ve* $t_n \to \infty$ *dizisi için* $\{S(t_n)x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dizisi* X *uzayında prekompakttır.*

Önerme 2.0.63 *([27])* X *Banach uzayı ve* $(X, S(t))$ *dinamik sistem olsun. Kabul edelim ki Ladyzhenskaya koşulu sağlansın. Bu durumda,* $(X, S(t))$ *asimptotik düzgündür.*

Tanım 2.0.64 *([27])* X *bir lineer normlu uzay,* $(X, S(t))$ *dinamik sistem ve* B *ise* X *uzayının sınırlı bir alt kümesi olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa,* $\mathcal{A}_B \subset X$ *kümesine* B *kümesi ve* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *yarıgrubu için kuvvetli (zayıf) yerel çekici denir.*

· $\mathcal{A}_B$ *kümesi* X *uzayında kuvvetli (zayıf) kompakttır;*

· $\mathcal{A}_B$ *kümesi değişmezdir; yani,* $S(t)\mathcal{A}_B = \mathcal{A}_B$, $\forall t \geq 0$;

· $\mathcal{A}_B$ *kümesi* B *kümesinin görüntüsünü kuvvetli (zayıf) topolojide çeker; yani* $\mathcal{A}_B$ *kümesinin* X *uzayının kuvvetli (zayıf) topolojisindeki keyfi* $\mathcal{O}$ *komşuluğu için, öyle bir* $T = T(\mathcal{O}) > 0$ *vardır ki her* $t \geq T$ *için* $S(t)B \subset \mathcal{O}$ *sağlanır.*

Tanım 2.0.65 *([27])* X *bir lineer normlu uzay,* $(X, S(t))$ *dinamik sistem olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa,* $\mathcal{A} \subset X$ *kümesine* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *yarıgrubu için kuvvetli (zayıf) yerel olmayan çekici denir.*

· $\mathcal{A}$ *kümesi* X *uzayında kuvvetli (zayıf) kompakttır;*

· $\mathcal{A}$ *kümesi değişmezdir; yani,* $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, $\forall t \geq 0$;

· $\mathcal{A}$ *kümesi* X *uzayının her sınırlı alt kümesinin görüntüsünü kuvvetli (zayıf) topolojide çeker; yani her sınırlı* $B \subset X$ *kümesi ve* $\mathcal{A}$ *kümesinin* X *uzayının kuvvetli (zayıf) topolojisindeki keyfi* $\mathcal{O}$ *komşuluğu için, öyle bir* $T = T(B, \mathcal{O}) > 0$ *vardır ki her* $t \geq T$ *için* $S(t)B \subset \mathcal{O}$ *sağlanır.*

Tanım 2.0.66 *([27])* $\mathcal{N}$ *kümesi* $(X, S(t))$ *dinamik sisteminin sabit noktalar kümesi olsun; yani*

$$\mathcal{N} = \{v \in X : \text{ her } t \geq 0 \text{ için } S(t)v = v\}.$$

$\mathcal{N}$ *sabit noktala kümesinden doğan kararsız (unstable)* $\mathcal{M}^u(\mathcal{N})$ *manifoldu,*

$$\begin{cases} u(0) = y \text{ ve } \lim_{t\to-\infty} dist_X(u(t), \mathcal{N}) = 0 \text{ olacak şekilde} \\ \gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\} \text{ tam yörüngesi vardır,} \end{cases}$$

özelliğine sahip tüm $y \in X$ *elemanlarının oluşturduğu kümedir.*

Tanım 2.0.67 *([27]) Kabul edelim ki* $Y \subseteq X$ *kümesi* $(X, S(t))$ *dinamik sisteminde ileri değişmez olsun.*

• $\Phi(y)$ *fonksiyoneli* Y *kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli olmak üzere, eğer* $t \to \Phi(S(t)y)$ *fonksiyonu keyfi* $y \in Y$ *için artmayan fonksiyon ise* $\Phi(y)$ *fonksiyoneline* Y *üzerinde,* $(X, S(t))$ *dinamik sistemi için Lyapunov fonksiyonu denir.*

• *Eğer,* $y \in Y$ *olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \text{her } t &> 0 \text{ için } \Phi(S(t)y) = \Phi(y) \Longrightarrow \text{ her } t > 0 \text{ için } S(t)y = y, \text{ yani } y \text{ elemanı} \\ &\qquad (X, S(t)) \text{ dinamik sisteminin sabit noktası} \end{aligned}$$

ise $\Phi(y)$ *Lyapunov fonksiyonu* Y *kümesinde kesindir denir.*

- *Tüm X uzayında $(X, S(t))$ dinamik sistemi için kesin Lyapunov fonksiyonu varsa $(X, S(t))$ dinamik sistemi gradyenttir denir.*

Teorem 2.0.68 *([27]) Kabul edelim ki $(X, S(t))$ dinamik sistemi kompakt, yerel olmayan $\mathcal{A}$ çekicisine sahip olsun ve $\mathcal{A}$ üzerinde kesin Lyapunov fonksiyonu var olsun. Bu durumda $\mathcal{A} = \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$. Ayrıca, yerel olmayan $\mathcal{A}$ çekicisi*

$$\lim_{t\to-\infty} dist_X(u(t), \mathcal{N}) = 0 \text{ ve } \lim_{t\to\infty} dist_X(u(t), \mathcal{N}) = 0$$

özelliğini sağlayan $\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$ tam yörüngelerinden oluşur.

Sonuç 2.0.69 *([27]) $(X, S(t))$ gradyent, asimptotik düzgün dinamik sistem olsun. Kabul edelim ki bu sistemin $\Phi(x)$ Lyapunov fonksiyonu, X uzayının keyfi sınırlı alt kümesi üzerinde üstten sınırlıdır ve her R için $\Phi_R = \{x : \Phi(x) \leq R\}$ kümesi sınırlıdır. Eğer $(X, S(t))$ dinamik sisteminin, sabit noktalar kümesi $\mathcal{N}$ sınırlı ise $(X, S(t))$ dinamik sistemi kuvvetli yerel olmayan $\mathcal{A}$ çekicisine sahiptir ve $\mathcal{A} = \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$'dır.*

Teorem 2.0.70 (Banach-Alaoglu) *([23]) X ayrılabilir lineer normlu uzay, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ olmak üzere, her n için $\|f_n\|_{X^*} \leq M$ ise $f_{n_k} \xrightarrow{w^*} f_0$ olacak şekilde $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ alt dizisi ve $f_0 \in X^*$ vardır.*

Lemma 2.0.71 (Young Eşitsizliği) *([35]) $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0)$$

sağlanır ve her $\varepsilon > 0$ için

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

olacak şekilde $C(\varepsilon) > 0$ sabiti vardır. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$'dir.

Teorem 2.0.72 (Genel Hölder Eşitsizliği) *([35]) $1 \leq p_1, ..., p_m \leq \infty$ ve $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = 1$ olsun. $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$ ve $k = 1, ..., m$ ise*

$$\int_{\Omega} |u_1 ... u_m|\, dx \leq \prod_{k=1}^{m} \|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}$$

sağlanır.

3 SINIRLI BÖLGEDE DOĞRUSAL OLMAYAN DALGA DENKLEMİNİN ÇEKİCİSİ

Bu bölümde, sınırlı bölgede kuvvetli sönümlü doğrusal olmayan dalga denklemi için

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{txx}(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\left(|u_x(t,x)|^{p-2} u_x(t,x)\right) \\ \qquad\qquad + f(u(t,x)) = g(x), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad t \in (0,\infty), \\ u(0,x) = u_0(x) \quad , \ u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in (0,1) \end{cases} \tag{3.1}$$

ile verilen başlangıç sınır değer problemini

$$p > 2, \quad g \in L^2(0,1) \tag{3.2}$$

ve $\lambda = \inf\limits_{\substack{\varphi \in W_0^{1,p}(0,1) \\ \varphi \neq 0}} \frac{\|\varphi'\|_{L^p(0,1)}}{\|\varphi\|_{L^p(0,1)}}$ olmak üzere,

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \quad , \quad \liminf_{|s| \to \infty} \frac{f(s)}{|s|^{p-2} s} > -\lambda^p \tag{3.3}$$

koşulları altında ele alarak, bu problemin zayıf çözümünün uzun zaman davranışını çekiciler vasıtasıyla inceleyeceğiz.

3.1 Zayıf Çözümün Varlığı, Tekliği ve Başlangıç Verilere Sürekli Bağımlılığı

Bu kısımda, (3.1) probleminin iyi konulmuş bir problem olduğunu, yani problemin zayıf çözümünün varlığını, tekliğini ve başlangıç verilere sürekli bağımlı olduğunu ispatlayacağız. Öncelikle, (3.1) probleminin zayıf çözümünün tanımını verelim.

Tanım 3.1.1 *$u \in L^1(0,T; W_0^{1,p}(0,1))$, $u_t \in L^1(0,T; W_0^{1,\frac{p}{p-1}}(0,1)) \cap C([0,T]; W^{-1,\frac{p}{p-1}}(0,1))$ ile $u(0,x) = u_0(x)$, $u_t(0,x) = u_1(x)$ başlangıç koşullarını ve her $v \in W_0^{1,p}(0,1)$ için distribüsyon anlamında $(0,T)$'de*

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u_t(t,x)v(x)dx + \int_0^1 u_{tx}(t,x)v'(x)dx + \int_0^1 |u_x(t,x)|^{p-2} u_x(t,x)v'(x)dx$$

$$+ \int_0^1 f(u(t,x))v(x)dx = \int_0^1 g(x)v(x)dx$$

eşitliğini sağlayan $u(t,x)$ fonksiyonuna (3.1) probleminin $[0,T]\times[0,1]$'de zayıf çözümü denir.

Bu kısımda ispatlayacağımız ana teorem şu şekildedir:

Teorem 3.1.2 *(3.2)-(3.3) koşulları altında, her $T>0$ ve $u_0 \in W_0^{1,p}(0,1)$, $u_1 \in L^2(0,1)$ için, (3.1) problemi, $u \in L^\infty\left(0,T;W_0^{1,p}(0,1)\right)$, $u_t \in L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \cap L^2(0,T;H_0^1(0,1))$, $u_{tt} \in L^2\left(0,T;W^{-1,\frac{p}{p-1}}(0,1)\right)$ ve*

$$E(u(t)) + \int_s^t \|u_{tx}(\tau)\|^2_{L^2(0,1)} d\tau \leq E(u(s)),\ \forall t \geq s \geq 0 \tag{3.4}$$

enerji eşitsizliğini sağlayacak şekilde, tek $u(t,x)$ zayıf çözümüne sahiptir. Burada $E(u(t))$ $= \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{1}{p}\|u_x(t)\|^p_{L^p(0,1)} + \int_0^1 F(u(t,x))\,dx - \int_0^1 g(x)\,u(t,x)\,dx$ ve $F(u) = \int_0^u f(z)\,dz$ ile tanımlıdır. Dahası, eğer $v \in L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(0,1)) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(0,1)) \cap W^{1,2}(0,T;H_0^1(0,1)) \cap W^{2,2}\left(0,T;W^{-1,\frac{p}{p-1}}(0,1)\right)$ fonksiyonu (3.1) probleminin $(v_0,v_1) \in W_0^{1,p}(0,1)\times L^2(0,1)$ başlangıç koşuluna uygun zayıf çözümü ise, bu durumda

$$\begin{aligned} &\|u(t)-v(t)\|_{H_0^1(0,1)} + \|u_t(t)-v_t(t)\|_{H^{-1}(0,1)} \\ &\leq C\left(T, \|(u_0,u_1)\|_{W_0^{1,p}(0,1)\times L^2(0,1)}, \|(v_0,v_1)\|_{W_0^{1,p}(0,1)\times L^2(0,1)}\right) \\ &\quad\times\left(\|u_0-v_0\|_{H_0^1(0,1)} + \|u_1-v_1\|_{H^{-1}(0,1)}\right),\ \forall t\in[0,T] \end{aligned} \tag{3.5}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $C:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ her bir değişkene göre azalmayan fonksiyondur.

Bu teoremin ispatına geçmeden önce, p-Laplasyan operatörü olarak da bilinen $A : W_0^{1,p}(0,1) \to W^{-1,\frac{p}{p-1}}(0,1)$, $A\varphi = -\frac{\partial}{\partial x}(|\varphi'|^{p-2}\varphi')$ operatörünü tanımlayalım. Öncelikle,

$$\langle A\varphi,\psi\rangle = \int_0^1 |\varphi'(x)|^{p-2}\varphi'(x)\,\psi'(x)\,dx,\ \forall\psi\in W_0^{1,p}(0,1)$$

olup her $u \in C^1\left([0,T];W_0^{1,p}(0,1)\right)$ için

$$\langle Au(t),u_t(t)\rangle = \int_0^1 |u_x(t,x)|^{p-2}u_x(t,x)\,u_{tx}(t,x)\,dx$$

$$= \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(|u_x(t,x)|^p\right)dx = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u_x(t)\|^p_{L^p(0,1)} \tag{3.6}$$

sağlanır. Burada ve bundan sonra, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simgesi ile uygun uzaylar arasındaki dual formu işaret edeceğiz. Ayrıca, A operatörü $W_0^{1,p}(0,1)$'den $W^{-1,\frac{p}{p-1}}(0,1)$'e sınırlı, monoton ve hemisüreklidir. Gerçekten, keyfi $\varphi, \psi \in W_0^{1,p}(0,1)$ için, Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$|\langle A\varphi, \psi \rangle| \leq \int_0^1 |\varphi'(x)|^{p-1} |\psi'(x)|\, dx \leq \|\varphi'\|_{L^p(0,1)}^{p-1} \|\psi'\|_{L^p(0,1)}$$

alırız. Buradan, $\psi \neq 0$, $\|\psi\|_{W_0^{1,p}(0,1)} \leq 1$ üzerine supremuma geçerek

$$\|A\varphi\|_{W^{-1,\frac{p}{p-1}}(0,1)} \leq \|\varphi\|_{W_0^{1,p}(0,1)}^{p-1}$$

olup A'nın sınırlılığını elde ederiz. Diğer yandan,

$$\left(|a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b\right)(a-b) \geq 0, \;\; a, b \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

eşitsizliğini kullanarak, keyfi $\varphi, \psi \in W_0^{1,p}(0,1)$ için

$$\begin{aligned}
\langle A\varphi - A\psi, \varphi - \psi \rangle &= \langle A\varphi, \varphi \rangle - \langle A\varphi, \psi \rangle - \langle A\psi, \varphi \rangle + \langle A\psi, \psi \rangle \\
&= \int_0^1 |\varphi'(x)|^{p-2} \varphi'(x)\, \varphi'(x)\, dx - \int_0^1 |\varphi'(x)|^{p-2} \varphi'(x)\, \psi'(x)\, dx \\
&\quad - \int_0^1 |\psi'(x)|^{p-2} \psi'(x)\, \varphi'(x)\, dx + \int_0^1 |\psi'(x)|^{p-2} \psi'(x)\, \psi'(x)\, dx \\
&= \int_0^1 \left(|\varphi'(x)|^{p-2} \varphi'(x) - |\psi'(x)|^{p-2} \psi'(x)\right)(\varphi'(x) - \psi'(x))\, dx \geq 0
\end{aligned}$$

alırız ve böylece monotonluk özelliği ispatlanmış olur. Son olarak, $\varphi, \psi \in W_0^{1,p}(0,1)$ ve $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ ise bir $t_0 \in \mathbb{R}$ için $t_n \underset{n\to\infty}{\to} t_0$ olacak şekilde reel bir dizi olsun. Bu durumda, her $n \geq N_0$ için $|t_n| \leq |t_0| + 1$ olacak şekilde $N_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Öncelikle

$$\langle A(\varphi + t_n\psi), \psi \rangle = \int_0^1 |\varphi'(x) + t_n\psi'(x)|^{p-2} (\varphi'(x) + t_n\psi'(x))\, \psi'(x)\, dx \tag{3.8}$$

sağlanır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki integralin içindeki fonksiyon için,

$$|a+b|^{\rho} \leq \max\left\{1, 2^{\rho-1}\right\}(|a|^{\rho} + |b|^{\rho}), \;\; a, b \in \mathbb{R}, \rho > 0$$

eşitsizliğini kullanırsak, her $n \geq N_0$ için

$$\left| |\varphi' + t_n\psi'|^{p-2} (\varphi' + t_n\psi')\, \psi' \right| = |\varphi' + t_n\psi'|^{p-1} |\psi'|$$

$$\leq 2^{p-2}\left(|\varphi'|^{p-1}+(|t_0|+1)^{p-1}|\psi'|^{p-1}\right)|\psi'|\,, \text{ h.h.y } (0,1)\text{'de} \tag{3.9}$$

alırız. Ayrıca, Hölder eşitsizliğinden

$$\int_0^1\left(|\varphi'(x)|^{p-1}+(|t_0|+1)^{p-1}|\psi'(x)|^{p-1}\right)|\psi'(x)|\,dx$$

$$\leq \|\varphi'\|_{L^p(0,1)}^{p-1}\|\psi'\|_{L^p(0,1)}+(|t_0|+1)^{p-1}\|\psi'\|_{L^p(0,1)}^{p} \tag{3.10}$$

elde ederiz. Dahası, ortalama değer teoremine göre

$$\left||\varphi'+t_n\psi'|^{p-2}(\varphi'+t_n\psi')-|\varphi'+t_0\psi'|^{p-2}(\varphi'+t_0\psi')\right|$$

$$\leq (p-1)\left(\int_0^1|\varphi'+t_0\psi'+\tau(t_n-t_0)\psi'|^{p-2}\,d\tau\right)|t_n-t_0|\,|\psi'|$$

$$\leq (p-1)\max\left\{1,2^{p-3}\right\}\left(|\varphi'+t_0\psi'|^{p-2}+|t_n-t_0|^{p-2}|\psi'|^{p-2}\right)$$

$$\times|t_n-t_0|\,|\psi'|\,, \text{ h.h.y } (0,1)\text{'de}$$

eşitsizliğini ve dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}|\varphi'+t_n\psi'|^{p-2}(\varphi'+t_n\psi')\psi'=|\varphi'+t_0\psi'|^{p-2}(\varphi'+t_0\psi')\psi',\text{ h.h.y } (0,1)\text{'de}$$

alırız. Böylece, Lebesgue yakınsaklık teoremine göre, (3.8)-(3.10)'dan, $\langle A(\varphi+t_n\psi),\psi\rangle \underset{n\to\infty}{\to} \langle A(\varphi+t_0\psi),\psi\rangle$ yakınsamasını ve dolayısıyla A'nın hemisürekli olduğunu elde ederiz.

Şimdi, Teorem 3.1.2'nin ispatına geçelim. İspatı iki lemma şeklinde vereceğiz. İlk olarak, (3.1) probleminin zayıf çözümünün varlığı ile ilgili lemmayı ispatlayalım.

Lemma 3.1.3 *(3.2)-(3.3) koşulları altında, her* $T>0$ *ve* $u_0\in W_0^{1,p}(0,1)$, $u_1\in L^2(0,1)$ *için, (3.1) problemi,* $u\in L^\infty\left(0,T;W_0^{1,p}(0,1)\right)$, $u_t\in L^\infty\left(0,T;L^2(0,1)\right)\cap L^2\left(0,T;H_0^1(0,1)\right)$, $u_{tt}\in L^2\left(0,T;W^{-1,\frac{p}{p-1}}(0,1)\right)$ *olacak şekilde en az bir* $u(t,x)$ *zayıf çözümüne sahiptir.*

İspat. İspatı Galerkin yöntemini kullanarak yapacağız. Kabul edelim ki $\{w_1,w_2,...\}$ kümesi $H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$ uzayının, $\Lambda: H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)\subset L^2(0,1)\to L^2(0,1)$, $\Lambda=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ özeşlenik ve tersi kompakt operatör olmak üzere,

$$\begin{cases}\Lambda w_j=\lambda_j w_j, & (0,1)\text{'de,}\\ w_j(0)=w_j(1)=0\end{cases},\ j=1,2,...$$

ile verilen Dirichlet probleminin özfonksiyonlarından oluşan ortonormal bir tabanı olsun. Buradan, $(u_0, u_1) \in W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$ olduğundan, $H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ uzayının $W_0^{1,p}(0,1)$'de yoğun olduğunu kullanarak,

$$\begin{cases} u_{0n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{nk} w_k \quad , \quad u_{1n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_{nk} w_k, \\ u_{0n} \underset{n\to\infty}{\to} u_0 \;\; W_0^{1,p}(0,1)\text{'de}, \\ u_{1n} \underset{n\to\infty}{\to} u_1 \;\; L^2(0,1)\text{'de} \end{cases} \tag{3.11}$$

koşullarını sağlayan $u_{0n}, u_{1n} \in span\{w_1, ..., w_n\}$ bulabiliriz. Şimdi, (3.1) probleminin yaklaşım çözümünü

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{nk}(t) w_k$$

şeklinde oluşturalım. Burada $c_{nk}(t)$ fonksiyonları

$$\sum_{k=1}^{n} c''_{nk}(t) \langle w_k, w_j \rangle + \sum_{k=1}^{n} c'_{nk}(t) \langle \Lambda w_k, w_j \rangle + \left\langle A\left(\sum_{k=1}^{n} c_{nk}(t) w_k\right), w_j \right\rangle$$

$$+ \left\langle f\left(\sum_{k=1}^{n} c_{nk}(t) w_k\right), w_j \right\rangle = \langle g, w_j \rangle, \;\; j = 1, ..., n \tag{3.12}$$

ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemi ve

$$c_{nj}(0) = \alpha_{nj} \quad , \quad c'_{nj}(0) = \beta_{nj}, \quad j = 1, ..., n \tag{3.13}$$

başlangıç koşulları ile belirlidir. $\det(\langle w_k, w_j \rangle) \neq 0$, $f \in C(\mathbb{R})$ ve A operatörü hemisürekli olduğundan, Peano varlık teoremine göre, her n için, (3.12)-(3.13) problemi, $0 < t_n < T$ olmak üzere, bir $[0, t_n)$ aralığında tanımlı en az bir yerel çözüme sahiptir. Böylece, $[0, t_n)$ aralıklarında $u_n(t)$ fonksiyonlarını tanımlayabiliriz.

Şimdi, $(3.12)_j$ denklemini $c'_{nj}(t)$ fonksiyonu ile çarpıp $j = 1$'den $j = n$'e toplarsak, kısmi integrasyon ve (3.6)'dan

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u_{nt}(t)\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{1}{p}\|u_{nx}(t)\|^p_{L^p(0,1)} + \int_0^1 F(u_n(t,x))\,dx - \int_0^1 g(x)\,u_n(t,x)\,dx\right)$$

$$+ \|u_{ntx}(t)\|^2_{L^2(0,1)} = 0, \; \forall t \in [0, t_n)$$

elde ederiz. Bu denklemi $(0,t)$'de integre ederek

$$E(u_n(t)) + \int_0^t \|u_{ntx}(\tau)\|^2_{L^2(0,1)}\,d\tau \le E(u_n(0)), \; \forall t \in [0, t_n) \tag{3.14}$$

alırız. Şimdi bu eşitsizlikten bir ön değerlenme elde edelim. Öncelikle, (3.3)'ü göz önüne alarak, yeterince büyük $\delta > 0$ için

$$\frac{f(s)}{|s|^{p-2} s} \geq -\mu^p, \ |s| > \delta$$

olacak şekilde $0 < \mu < \lambda$ sayısının varlığını elde ederiz. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $|s|^p$ ile çarparsak

$$sf(s) \geq -\mu^p |s|^p, \ |s| > \delta$$

sağlanır. Buradan, f'in sürekliliğini göz önüne alarak, $s > \delta$ durumunda

$$F(s) = \int_0^\delta f(z)\, dz + \int_\delta^s f(z)\, dz$$

$$\geq -c_1 - \mu^p \int_\delta^s z^{p-1} dz \geq -c_1 - \frac{\mu^p}{p} s^p + \frac{\mu^p}{p} \delta^p$$

eşitsizliği; $s < -\delta$ durumunda ise

$$F(s) = -\int_{-\delta}^0 f(z)\, dz - \int_s^{-\delta} f(z)\, dz$$

$$\geq -c_2 - \mu^p \int_s^{-\delta} (-z)^{p-1}\, dz \geq -c_2 + \frac{\mu^p}{p} \delta^p - \frac{\mu^p}{p} (-s)^p$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $c_1, c_2 > 0$ sabitleri vardır. Böylece, $c_3 := \max\{c_1, c_2\}$ olmak üzere

$$F(s) \geq -\frac{\mu^p}{p} |s|^p - c_3, \ |s| > \delta \tag{3.15}$$

sağlanır. Diğer yandan, yine f'in sürekliliğinden, bir $c_4 > 0$ sabiti için

$$F(s) \geq -\int_0^s |f(z)|\, dz \geq -\int_0^\delta |f(z)|\, dz \geq -c_4, \ |s| \leq \delta$$

olup (3.15) ile birlikte, $C_0 := \max\{c_3, c_4\}$ olmak üzere

$$F(s) \geq -\frac{\mu^p}{p} |s|^p - C_0, \ \forall s \in \mathbb{R}$$

olduğunu elde ederiz. Buradan,

$$\int_0^1 F(u_n(t,x))\, dx \geq -\frac{\mu^p}{p} \int_0^1 |u_n(t,x)|^p\, dx - C_0$$

$$\geq -\frac{1}{p}\frac{\mu^p}{\lambda^p}\|u_{nx}(t)\|^p_{L^p(0,1)} - C_0,\ \forall t \in [0, t_n) \tag{3.16}$$

eşitsizliğini buluruz. Ayrıca, $F(0) = 0$ olduğundan, ortalama değer teoremini kullanarak, $W_0^{1,p}(0,1) \hookrightarrow L^\infty(0,1)$ sürekli gömülmesi ve (3.3)'ten

$$\int_0^1 F(u_n(0,x))\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 F'(\tau u_n(0,x))\,d\tau\right) u_n(0,x)\,dx$$

$$\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(\tau u_n(0,x))|\,d\tau\right) |u_n(0,x)|\,dx$$

$$\leq C_1 \|u_n(0)\|_{L^\infty(0,1)} \leq C_2 \|u_n(0)\|_{W_0^{1,p}(0,1)} \tag{3.17}$$

alırız. Diğer taraftan, Hölder ve Young eşitsizliklerini kullanarak, keyfi $\varepsilon > 0$ için, (3.2)'ye göre

$$\int_0^1 g(x)\,u_n(t,x)\,dx \leq \|g\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(0,1)} \|u_n(t)\|_{L^p(0,1)}$$

$$\leq C(\varepsilon)\|g\|^{\frac{p}{p-1}}_{L^2(0,1)} + \varepsilon \|u_n(t)\|^p_{L^p(0,1)}$$

$$\leq C(\varepsilon)\|g\|^{\frac{p}{p-1}}_{L^2(0,1)} + \frac{\varepsilon}{\lambda^p}\|u_{nx}(t)\|^p_{L^p(0,1)},\ \forall t \in [0, t_n) \tag{3.18}$$

elde ederiz. Dahası, yine Hölder eşitsizliğinden, (3.2)'ye göre

$$\int_0^1 g(x)\,u_n(0,x)\,dx \leq \|g\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(0,1)} \|u_n(0)\|_{L^p(0,1)}$$

$$\leq C_3 \|g\|_{L^2(0,1)} \|u_n(0)\|_{W_0^{1,p}(0,1)}$$

sağlanır. Son eşitsizlikle birlikte (3.16)-(3.18)'i, (3.14)'te göz önüne alırsak

$$\frac{1}{2}\|u_{nt}(t)\|^2_{L^2(0,1)} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p}\frac{\mu^p}{\lambda^p} - \frac{\varepsilon}{\lambda^p}\right)\|u_{nx}(t)\|^p_{L^p(0,1)} + \int_0^t \|u_{ntx}(\tau)\|^2_{L^2(0,1)}\,d\tau$$

$$\leq \frac{1}{2}\|u_{nt}(0)\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{1}{p}\|u_{nx}(0)\|^p_{L^p(0,1)} + C_2\|u_n(0)\|_{W_0^{1,p}(0,1)}$$

$$+C(\varepsilon)\|g\|^{\frac{p}{p-1}}_{L^2(0,1)} + C_3\|g\|_{L^2(0,1)}\|u_n(0)\|_{W_0^{1,p}(0,1)} + C_0,\ \forall t \in [0, t_n)$$

olur ve $\varepsilon < \frac{\lambda^p}{p}\left(1 - \frac{\mu^p}{\lambda^p}\right)$ seçersek, $(3.11)_1$ ve (3.13)'ten

$$\|u_{nt}(t)\|^2_{L^2(0,1)} + \|u_{nx}(t)\|^p_{L^p(0,1)} + \int_0^t \|u_{ntx}(\tau)\|^2_{L^2(0,1)}\,d\tau$$

$$\leq C\left(\|(u_{0n},u_{1n})\|_{W_0^{1,p}(0,1)\times L^2(0,1)},\|g\|_{L^2(0,1)}\right),\ \ \forall t\in[0,t_n)$$

alırız. Burada $C:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ her bir değişkene göre azalmayan bir fonksiyondur. Son eşitsizlikte, $(3.11)_2$-$(3.11)_3$'e göre $\{(u_{0n},u_{1n})\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $W_0^{1,p}(0,1)\times L^2(0,1)$'de (u_0,u_1)'e yakınsak olduğunu dikkate alırsak

$$\|u_{nt}(t)\|_{L^2(0,1)}^2+\|u_{nx}(t)\|_{L^p(0,1)}^p+\int_0^t\|u_{ntx}(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2\,d\tau$$

$$\leq\widetilde{C}\left(\|(u_0,u_1)\|_{W_0^{1,p}(0,1)\times L^2(0,1)},\|g\|_{L^2(0,1)}\right),\ \ \forall t\in[0,t_n)$$

elde ederiz. Böylece, $u_n(\cdot)$ fonksiyonunun $[0,T]$ aralığına genişletilebildiğini alırız. Bu durumda,

$$E(u_n(t))+\int_0^t\|u_{ntx}(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2\,d\tau\leq E(u_n(0)),\ \forall t\in[0,T] \tag{3.19}$$

ve

$$\|u_{nt}(t)\|_{L^2(0,1)}^2+\|u_{nx}(t)\|_{L^p(0,1)}^p+\int_0^t\|u_{ntx}(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2\,d\tau$$

$$\leq\widetilde{C}\left(\|(u_0,u_1)\|_{W_0^{1,p}(0,1)\times L^2(0,1)},\|g\|_{L^2(0,1)}\right),\ \forall t\in[0,T] \tag{3.20}$$

sağlanır. Diğer taraftan, $(3.12)_j$ denklemini, $\frac{1}{\lambda_j^2}c''_{nj}(t)$ fonksiyonu ile çarpıp $j=1$'den $j=n$'e toplarsak

$$\left\langle u_{ntt}(t),\Lambda^{-2}u_{ntt}(t)\right\rangle+\left\langle\Lambda u_{nt}(t),\Lambda^{-2}u_{ntt}(t)\right\rangle+\left\langle Au_n(t),\Lambda^{-2}u_{ntt}(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle f(u_n(t)),\Lambda^{-2}u_{ntt}(t)\right\rangle=\left\langle g,\Lambda^{-2}u_{ntt}(t)\right\rangle,\ \forall t\in[0,T]$$

elde ederiz. Burada Λ operatörünün özeşlenik olduğunu göz önüne alırsak

$$\left\|\Lambda^{-1}u_{ntt}(t)\right\|_{L^2(0,1)}^2\leq\left|\left\langle g,\Lambda^{-2}u_{ntt}(t)\right\rangle\right|+\left|\left\langle u_{nt}(t),\Lambda^{-1}u_{ntt}(t)\right\rangle\right|$$

$$+\left|\left\langle Au_n(t),\Lambda^{-2}u_{ntt}(t)\right\rangle\right|+\left|\left\langle f(u_n(t)),\Lambda^{-2}u_{ntt}(t)\right\rangle\right|,\forall t\in[0,T] \tag{3.21}$$

eşitsizliğini alırız. Şimdi, bu eşitsizliğin sağ tarafını değerlendirelim. İlk terim için, Hölder eşitsizliği ve (3.2)'den

$$\left|\left\langle g,\Lambda^{-2}u_{ntt}(t)\right\rangle\right|\leq\|g\|_{L^2(0,1)}\left\|\Lambda^{-2}u_{ntt}(t)\right\|_{L^2(0,1)}$$

$$\leq C_4\left\|\Lambda^{-1}u_{ntt}(t)\right\|_{L^2(0,1)},\forall t\in[0,T] \tag{3.22}$$

elde ederiz. (3.21) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terimi dikkate alırsak, Hölder eşitsizliği ve (3.20)'den

$$\left|\left\langle u_{nt}(t), \Lambda^{-1}u_{ntt}(t)\right\rangle\right| \leq \|u_{nt}(t)\|_{L^2(0,1)} \left\|\Lambda^{-1}u_{ntt}(t)\right\|_{L^2(0,1)}$$
$$\leq C_5 \left\|\Lambda^{-1}u_{ntt}(t)\right\|_{L^2(0,1)}, \forall t \in [0,T] \tag{3.23}$$

alırız. (3.21) eşitsizliğinin sağ tarafındaki üçüncü terim için Hölder eşitsizliği uygulayıp (3.20) ve $H^1(0,1) \hookrightarrow L^p(0,1)$ sürekli gömülmesini göz önüne alırsak

$$\left|\left\langle Au_n(t), \Lambda^{-2}u_{ntt}(t)\right\rangle\right| \leq \|u_{nx}(t)\|_{L^p(0,1)}^{p-1} \left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda^{-2}u_{ntt}(t)\right)\right\|_{L^p(0,1)}$$
$$\leq C_6 \left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda^{-2}u_{ntt}(t)\right)\right\|_{H^1(0,1)}$$
$$\leq C_7 \left\|\Lambda^{-1}u_{ntt}(t)\right\|_{L^2(0,1)}, \forall t \in [0,T] \tag{3.24}$$

buluruz. (3.20) eşitsizliğinin sağ tarafındaki son terimi dikkate alalım. Hölder eşitsizliğini kullanarak, (3.3) ve (3.20)'den

$$\left|\left\langle f(u_n(t)), \Lambda^{-2}u_{ntt}(t)\right\rangle\right| \leq C_8 \left\|\Lambda^{-2}u_{ntt}(t)\right\|_{L^2(0,1)}$$
$$\leq C_9 \left\|\Lambda^{-1}u_{ntt}(t)\right\|_{L^2(0,1)}, \forall t \in [0,T] \tag{3.25}$$

alırız. Böylece, (3.22)-(3.25)'i (3.21)'de göz önüne alırsak

$$\left\|\Lambda^{-1}u_{ntt}(t)\right\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C_{10} \left\|\Lambda^{-1}u_{ntt}(t)\right\|_{L^2(0,1)}, \ \forall t \in [0,T]$$

ve buradan

$$\|u_{ntt}(t)\|_{H^{-2}(0,1)} \leq C_{10}, \ \forall t \in [0,T] \tag{3.26}$$

elde ederiz. (3.20), (3.26) ve A'nın sınırlılığından, Banach-Alaoglu teoremine göre, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{u_{nt}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{u_{ntt}\}_{n=1}^{\infty}$ dizilerinin zayıf ve zayıf$-*$ yakınsak alt dizilerine geçebiliriz. Genelliği bozmadan, bu alt dizileri yine $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{u_{nt}\}_{n=1}^{\infty}$,$\{u_{ntt}\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterirsek,

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to\infty]{w^*} u & L^{\infty}\left(0,T;W_0^{1,p}(0,1)\right)\text{'de,} \\ u_{nt} \xrightarrow[n\to\infty]{w^*} u_t & L^{\infty}\left(0,T;L^2(0,1)\right)\text{'de,} \\ u_{nt} \xrightarrow[n\to\infty]{w} u_t & L^2\left(0,T;H_0^1(0,1)\right)\text{'de,} \\ u_{ntt} \xrightarrow[n\to\infty]{w^*} u_{tt} & L^{\infty}\left(0,T;H^{-2}(0,1)\right)\text{'de,} \\ Au_n \xrightarrow[n\to\infty]{w^*} \chi & L^{\infty}\left(0,T;W^{-1,\frac{p}{p-1}}(0,1)\right)\text{'de} \end{cases} \tag{3.27}$$

yakınsamaları sağlanacak şekilde $u \in L^\infty\left(0,T;W_0^{1,p}(0,1)\right) \cap W^{1,\infty}\left(0,T;L^2(0,1)\right) \cap W^{1,2}\left(0,T;H_0^1(0,1)\right) \cap W^{2,\infty}\left(0,T;H^{-2}(0,1)\right)$ ve $\chi \in L^\infty\left(0,T;W^{-1,\frac{p}{p-1}}(0,1)\right)$ fonksiyonları vardır. Dahası, $(3.27)_1$-$(3.27)_4$'e göre

$$\begin{cases} \|u\|_{L^\infty\left(0,T;W_0^{1,p}(0,1)\right)} \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^\infty\left(0,T;W_0^{1,p}(0,1)\right)}, \\ \|u_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|u_{nt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}, \\ \|u_t\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(0,1)\right)} \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|u_{nt}\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(0,1)\right)}, \\ \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;H^{-2}(0,1))} \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|u_{ntt}\|_{L^\infty(0,T;H^{-2}(0,1))} \end{cases}$$

olduğundan, (3.20) ve (3.26)'yı toplayıp $n \to \infty$ iken limite geçerek

$$\|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;H^{-2}(0,1))} + \|u_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + \|u_t\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(0,1)\right)} + \|u\|_{L^\infty\left(0,T;W_0^{1,p}(0,1)\right)}$$
$$\le \widetilde{\widetilde{C}}\left(\|(u_0,u_1)\|_{W_0^{1,p}(0,1)\times L^2(0,1)}, \|g\|_{L^2(0,1)}\right) \tag{3.28}$$

elde ederiz.

Şimdi, u fonksiyonunun (3.1) probleminin zayıf çözümü olduğunu görelim. $(3.27)_1$-$(3.27)_2$'den, $H^1((0,T)\times(0,1))$ uzayında

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} u$$

yakınsamasını ve buradan, $H^1((0,T)\times(0,1)) \hookrightarrow L^2((0,T)\times(0,1))$ kompakt gömülmesine göre, $L^2((0,T)\times(0,1))$ uzayında

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \tag{3.29}$$

alırız. Böylece, ortalama değer teoremi ve $W_0^{1,p}(0,1) \hookrightarrow L^\infty(0,1)$ sürekli gömülmesinden, (3.3), (3.20) ve (3.28)'den

$$\left(\int_0^T \int_0^1 |f(u_n(t,x)) - f(u(t,x))|^2\, dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \left(\int_0^T \int_0^1 \left(\int_0^1 |f'(u(t,x) + \tau(u_n(t,x) - u(t,x)))|^2\, d\tau\right)^2 |u_n(t,x) - u(t,x)|^2\, dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C_{11}\|u_n - u\|_{L^2((0,T)\times(0,1))}$$

olup (3.29)'a göre, $L^2((0,T)\times(0,1))$ uzayında

$$f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(u) \tag{3.30}$$

yakınsaması sağlanır. $(3.12)_j$ denkleminde $n \to \infty$ iken limite geçersek, (3.27) ve (3.30)'u kullanarak

$$\langle u_{tt}(t), w_j\rangle + \langle \Lambda u_t(t), w_j\rangle + \langle \chi(t), w_j\rangle + \langle f(u(t)), w_j\rangle$$

$$= \langle g, w_j\rangle, \text{ h.h.y. } (0,T)\text{'de, } j = 1,2,... \tag{3.31}$$

elde ederiz. Burada $span\{w_1, w_2, ...\}$ kümesinin $H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ uzayında yoğun olduğunu göz önüne alırsak, her $v \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ için $v_n \in span\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ ve $H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ uzayında

$$v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$$

olacak şekilde $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır. Böylece, (3.31)'e göre

$$\langle u_{tt}(t), v_n\rangle + \langle \Lambda u_t(t), v_n\rangle + \langle \chi(t), v_n\rangle + \langle f(u(t)), v_n\rangle = \langle g, v_n\rangle, \text{ h.h.y. } (0,T)\text{'de}$$

olduğundan, burada $n \to \infty$ iken limite geçerek, her $v \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ için

$$\langle u_{tt}(t), v\rangle + \langle \Lambda u_t(t), v\rangle + \langle \chi(t), v\rangle + \langle f(u(t)), v\rangle = \langle g, v\rangle, \text{ h.h.y. } (0,T)\text{'de}$$

alırız. Buradan, $u_{tt} \in L^2\left(0,T; W^{-1,\frac{p}{p-1}}(0,1)\right)$ olduğunu ve $L^2\left(0,T; W^{-1,\frac{p}{p-1}}(0,1)\right)$ uzayında

$$u_{tt}(t) - u_{txx}(t) + \chi(t) + f(u(t)) = g \tag{3.32}$$

eşitliğinin sağlandığını elde ederiz. Bu durumda, u'nun $(3.1)_1$ denklemini çözdüğünü göstermek için, $\chi = Au$ olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak, Önerme 2.0.55'e göre, $u \in L^\infty(0,T; W_0^{1,p}(0,1))$, $u_t \in L^2(0,T; H_0^1(0,1))$ olduğundan $u \in C([0,T]; H_0^1(0,1))$ olduğunu ve $u_t \in L^\infty(0,T; L^2(0,1))$, $u_{tt} \in L^\infty(0,T; H^{-2}(0,1))$ olduğundan $u_t \in C([0,T]; H^{-1}(0,1))$ olduğunu göz önüne alalım. Bu durumda, Lemma 2.0.56'yı uygularsak, $u \in C_s\left(0,T; W_0^{1,p}(0,1)\right)$ ve $u_t \in C_s(0,T; L^2(0,1))$ olduğunu alırız. Burada Y^* uzayı Y uzayının duali olmak üzere

$$C_s(0,T;Y) = \{u : u \in L^\infty(0,T;Y),\ \langle u, \varphi\rangle \in C[0,T], \forall \varphi \in Y^*\}$$

şeklindedir. Böylece, $(3.12)_j$ denklemini $c_{nj}(t)$ fonksiyonuyla çarpıp, $j = 1$'den $j = n$'e toplayıp elde edilen denklemi $(0,T)$'de integre edersek, kısmi integrasyondan

$$\int_0^T \langle Au_n(t), u_n(t)\rangle\, dt = \langle u_{nt}(0), u_n(0)\rangle - \langle u_{nt}(T), u_n(T)\rangle$$

$$+\int_0^T \|u_{nt}(t)\|^2_{L^2(0,1)}\,dt - \frac{1}{2}\|u_{nx}(T)\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{1}{2}\|u_{nx}(0)\|^2_{L^2(0,1)}$$

$$-\int_0^T \langle f(u_n(t)), u_n(t)\rangle\,dt + \int_0^T \langle g, u_n(t)\rangle\,dt$$

olur ve bu eşitlikte $(3.27)_1$-$(3.27)_4$ ve Önerme 2.0.55'e göre

$$\begin{cases} u_n \underset{n\to\infty}{\to} u & C([0,T]; H_0^1(0,1))\text{'de}, \\ u_{nt} \underset{n\to\infty}{\to} u_t & C([0,T]; H^{-1}(0,1))\text{'de}, \\ u_{nt} \underset{n\to\infty}{\to} u_t & L^2(0,T; L^2(0,1))\text{'de} \end{cases} \tag{3.33}$$

olduğunu göz önüne alırsak, (3.29) ve (3.30)'dan

$$\limsup_{n\to\infty}\int_0^T \langle Au_n(t), u_n(t)\rangle\,dt \le \langle u_t(0), u(0)\rangle - \langle u_t(T), u(T)\rangle$$

$$+\int_0^T \|u_t(t)\|^2_{L^2(0,1)}\,dt - \frac{1}{2}\|u_x(T)\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{1}{2}\|u_x(0)\|^2_{L^2(0,1)}$$

$$-\int_0^T \langle f(u(t)), u(t)\rangle\,dt + \int_0^T \langle g, u(t)\rangle\,dt \tag{3.34}$$

alırız. Diğer yandan, (3.32) denklemini u ile $(0,T)\times(0,1)$'de test ederek

$$\int_0^T \langle \chi(t), u(t)\rangle\,dt = \langle u_t(0), u(0)\rangle - \langle u_t(T), u(T)\rangle$$

$$+\int_0^T \|u_t(t)\|^2_{L^2(0,1)}\,dt - \frac{1}{2}\|u_x(T)\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{1}{2}\|u_x(0)\|^2_{L^2(0,1)}$$

$$-\int_0^T \langle f(u(t)), u(t)\rangle\,dt + \int_0^T \langle g, u(t)\rangle\,dt$$

buluruz. Buradan, (3.34) ile birlikte

$$\limsup_{n\to\infty}\int_0^T \langle Au_n(t), u_n(t)\rangle\,dt \le \int_0^T \langle \chi(t), u(t)\rangle\,dt$$

olur. Buradan, A operatörü monoton olduğundan

$$\limsup_{n\to\infty}\int_0^T \langle Av(t) - Au_n(t), v(t) - u_n(t)\rangle\,dt \ge 0,\ \forall v \in L^p\left(0,T; W_0^{1,p}(0,1)\right)$$

olup $(3.27)_1$ ve $(3.27)_5$'e göre

$$\int_0^T \langle Av(t)-\chi(t), v(t)-u(t)\rangle\, dt = \int_0^T \langle Av(t), v(t)\rangle\, dt - \int_0^T \langle Av(t), u(t)\rangle\, dt$$

$$-\int_0^T \langle \chi(t), v(t)\rangle\, dt + \int_0^T \langle \chi(t), u(t)\rangle\, dt$$

$$\geq \limsup_{n\to\infty}\left[\int_0^T \langle Av(t), v(t)\rangle\, dt - \int_0^T \langle Av(t), u_n(t)\rangle\, dt\right.$$

$$\left.-\int_0^T \langle Au_n(t), v(t)\rangle\, dt + \int_0^T \langle Au_n(t), u_n(t)\rangle\, dt\right]$$

$$= \limsup_{n\to\infty}\int_0^T \langle Av(t)-Au_n(t), v(t)-u_n(t)\rangle\, dt \geq 0$$

alırız. Şimdi, son eşitsizlikte, keyfi $w\in L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(0,1)\right)$ ve $\tau>0$ için, $v=u-\tau w$ alırsak

$$\int_0^T \langle A(u(t)-\tau w(t))-\chi(t), -\tau w(t)\rangle\, dt \geq 0$$

olup

$$\int_0^T \langle A(u(t)-\tau w(t))-\chi(t), w(t)\rangle\, dt \leq 0$$

sağlanır ve burada $\tau\to 0$ iken limite geçersek, A'nın hemisürekliliğini göz önüne alarak

$$\int_0^T \langle Au(t)-\chi(t), w(t)\rangle\, dt \leq 0, \forall w\in L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(0,1)\right)$$

elde ederiz. Yukarıdaki prosedürü w yerine $-w$ alarak tekrar edersek elde ettiğimiz son eşitsizliğin tersini alırız. Böylece

$$\int_0^T \langle Au(t)-\chi(t), w(t)\rangle\, dt = 0,\ \forall w\in L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(0,1)\right)$$

ve dolayısıyla $\chi = Au$ olur.

Dahası, $(3.27)_1$-$(3.27)_4$'ten, Önerme 2.0.55'e göre, $C\left([0,T];L^2(0,1)\times H^{-1}(0,1)\right)$ uzayında

$$(u_n, u_{nt}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u, u_t) \tag{3.35}$$

sağlanır. Bu durumda, $(3.11)_1$ ve (3.13)'ten, özel olarak $L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$ uzayında

$$(u_{0n}, u_{1n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u(0), u_t(0))$$

yakınsamasını elde ederiz. Buradan, $(3.11)_2$-$(3.11)_3$'e göre, $W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1) \hookrightarrow L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$ sürekli gömülmesinden, $(u(0), u_t(0)) = (u_0, u_1)$ alırız. Böylece, u fonksiyonu $(3.1)_3$ başlangıç koşulunu sağlar ve dolayısıyla (3.1) probleminin $(u_0, u_1) \in W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$ başlangıç koşuluna uygun zayıf çözümüdür. ■

Şimdi, zayıf çözümün başlangıç verilere sürekli bağımlı ve tek olduğunu gösterelim.

Lemma 3.1.4 *(3.2)-(3.3) koşulları altında, (3.1) probleminin zayıf çözümü başlangıç verilere sürekli bağımlıdır ve tektir.*

İspat. Öncelikle, $u, v \in L^\infty(0,T; W_0^{1,p}(0,1)) \cap W^{1,\infty}(0,T; L^2(0,1)) \cap W^{1,2}(0,T; H_0^1(0,1)) \cap W^{2,\infty}(0,T; W^{-1,\frac{p}{p-1}}(0,1))$ fonksiyonları, (3.1) probleminin, sırasıyla (u_0, u_1), $(v_0, v_1) \in W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$ başlangıç koşullarına uygun zayıf çözümleri olmak üzere, $w(t) := u(t) - v(t)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{cases} w_{tt}(t,x) - w_{txx}(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\left(|u_x(t,x)|^{p-2} u_x(t,x) - |v_x(t,x)|^{p-2} v_x(t,x)\right) \\ \qquad\qquad + f(u(t,x)) - f(v(t,x)) = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times (0,1), \\ w(t,0) = w(t,1) = 0, \ t \in (0,T), \\ w(0,x) = u_0(x) - v_0(x), \ w_t(0,x) = u_1(x) - v_1(x), \ x \in (0,1) \end{cases} \tag{3.36}$$

problemini alırız. $(3.36)_1$ denklemini δw ile çarpıp $(0,1)$'de integre edersek, kısmi integrasyonla

$$\frac{d}{dt}\left(\delta \int_0^1 w_t(t,x) w(t,x)\, dx + \frac{\delta}{2} \|w_x(t)\|^2_{L^2(0,1)}\right)$$

$$+\delta \int_0^1 \left(|u_x(t,x)|^{p-2} u_x(t,x) - |v_x(t,x)|^{p-2} v_x(t,x)\right) w_x(t,x)\, dx$$

$$= \delta \|w_t(t)\|^2_{L^2(0,1)} - \delta \int_0^1 (f(u(t,x)) - f(v(t,x)))\, w(t,x)\, dx, \ \ \forall t \in [0,T] \tag{3.37}$$

elde ederiz. İlk olarak, bu denklemin sol tarafındaki ikinci terim için

$$\left(|a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b\right)(a-b) \geq \frac{1}{2}\left(|a|^{p-2} + |b|^{p-2}\right)|a-b|^2, \ \ a,b \in \mathbb{R} \tag{3.38}$$

eşitsizliğini kullanarak

$$\delta \int_0^1 \left(|u_x(t,x)|^{p-2} u_x(t,x) - |v_x(t,x)|^{p-2} v_x(t,x) \right) w_x(t,x)\, dx$$

$$\geq \frac{\delta}{2} \int_0^1 \left(|u_x(t,x)|^{p-2} + |v_x(t,x)|^{p-2} \right) |w_x(t,x)|^2 \, dx, \ \ \forall t \in [0,T] \qquad (3.39)$$

alırız. Diğer taraftan, (3.37)'nin sağ tarafındaki ikinci terimi göz önüne alırsak, ortalama değer teoremine göre, (3.3), (3.28) ve $W_0^{1,p}(0,1) \hookrightarrow L^\infty(0,1)$ sürekli gömülmesinden

$$-\delta \int_0^1 \left(f(u(t,x)) - f(v(t,x)) \right) w(t,x)\, dx$$

$$\leq \delta \int_0^1 \left(\int_0^1 |f'(v(t,x) + \tau (u(t,x) - v(t,x)))|\, d\tau \right) |w(t,x)|^2 \, dx$$

$$\leq C_1 \|w(t)\|^2_{L^2(0,1)}, \ \forall t \in [0,T]$$

sağlanır. Bu eşitsizlikle birlikte (3.39)'u (3.37)'de göz önüne alırsak

$$\frac{d}{dt} \left(\delta \int_0^1 w_t(t,x)\, w(t,x)\, dx + \frac{\delta}{2} \|w_x(t)\|^2_{L^2(0,1)} \right)$$

$$+ \frac{\delta}{2} \int_0^1 \left(|u_x(t,x)|^{p-2} + |v_x(t,x)|^{p-2} \right) |w_x(t,x)|^2 \, dx$$

$$\leq \delta \|w_t(t)\|^2_{L^2(0,1)} + C_1 \|w(t)\|^2_{L^2(0,1)}, \ \ \forall t \in [0,T] \qquad (3.40)$$

elde ederiz. Diğer yandan, Λ operatörü Lemma 3.1.3'te tanımlanan özeşlenik operatör olmak üzere, $(3.36)_1$ denklemini $\Lambda^{-1} w_t$ ile çarpıp $(0,1)$'de integre edersek, kısmi integrasyon ve Λ'nin özeşlenik olduğunu kullanarak

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left\| \Lambda^{-\frac{1}{2}} w_t(t) \right\|^2_{L^2(0,1)} \right) + \|w_t(t)\|^2_{L^2(0,1)}$$

$$= - \left\langle \left(|u_x(t)|^{p-2} u_x(t) - |v_x(t)|^{p-2} v_x(t) \right), \frac{\partial}{\partial x} \left(\Lambda^{-1} w_t(t) \right) \right\rangle$$

$$- \left\langle f(u(t)) - f(v(t)), \Lambda^{-1} w_t(t) \right\rangle, \ \ \forall t \in [0,T] \qquad (3.41)$$

alırız. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terimi değerlendirelim. Hölder ve Young eşitsizliğine göre, keyfi $\mu > 0$ için

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\Lambda^{-1} w_t(t,x) \right) \right|^2 = \int_0^x \frac{d}{d\xi} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\Lambda^{-1} w_t(t,\xi) \right) \right|^2 d\xi$$

$$= 2\int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda^{-1}w_t(t,\xi)\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\Lambda^{-1}w_t(t,\xi)\right)d\xi$$

$$\leq 2\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda^{-1}w_t(t)\right)\right\|_{L^2(0,1)}\|w_t(t)\|_{L^2(0,1)}$$

$$\leq 2\left(C(\mu)\left\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}w_t(t)\right\|^2_{L^2(0,1)} + \mu\|w_t(t)\|^2_{L^2(0,1)}\right),\ \ \forall x \in (0,1)\,,\ \forall t \in [0,T]$$

sağlandığından

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda^{-1}w_t(t)\right)\right\|^2_{L^\infty(0,1)} \leq 2\left(C(\mu)\left\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}w_t(t)\right\|^2_{L^2(0,1)} + \mu\|w_t(t)\|^2_{L^2(0,1)}\right),\ \forall t \in [0,T]$$

olup ortalama değer teoremini kullanarak, Hölder, Young eşitsizliği ve (3.28)'den, keyfi $\varepsilon > 0$ için

$$-\left\langle\left(|u_x(t)|^{p-2}u_x(t) - |v_x(t)|^{p-2}v_x(t)\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda^{-1}w_t(t)\right)\right\rangle$$

$$\leq \left\||u_x(t)|^{p-2}u_x(t) - |v_x(t)|^{p-2}v_x(t)\right\|_{L^1(0,1)}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda^{-1}w_t(t)\right)\right\|_{L^\infty(0,1)}$$

$$\leq (p-1)\left\|\left(\int_0^1 |v_x(t) + \tau(u_x(t) - v_x(t))|^{p-2}d\tau\right)w_x(t)\right\|_{L^1(0,1)}$$

$$\times\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda^{-1}w_t(t)\right)\right\|_{L^\infty(0,1)}$$

$$\leq C_3\left\|\left(|u_x(t)|^{p-2} + |v_x(t)|^{p-2}\right)w_x(t)\right\|_{L^1(0,1)}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda^{-1}w_t(t)\right)\right\|_{L^\infty(0,1)}$$

$$= C_3\left(\int_0^1\left(|u_x(t,x)|^{p-2} + |v_x(t,x)|^{p-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.\times\left(|u_x(t,x)|^{p-2} + |v_x(t,x)|^{p-2}\right)^{\frac{1}{2}}|w_x(t,x)|\,dx\right)\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda^{-1}w_t(t)\right)\right\|_{L^\infty(0,1)}$$

$$\leq C_3\left(\int_0^1\left(|u_x(t,x)|^{p-2} + |v_x(t,x)|^{p-2}\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\int_0^1\left(|u_x(t,x)|^{p-2} + |v_x(t,x)|^{p-2}\right)|w_x(t,x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda^{-1}w_t(t)\right)\right\|_{L^\infty(0,1)}$$

$$\leq C_4\left(\varepsilon\int_0^1\left(|u_x(t,x)|^{p-2} + |v_x(t,x)|^{p-2}\right)|w_x(t,x)|^2\,dx\right.$$

$$\left.+\mu C(\varepsilon)\|w_t(t)\|^2_{L^2(0,1)} + \widehat{C}(\mu,\varepsilon)\left\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}w_t(t)\right\|^2_{L^2(0,1)}\right),\ \forall t \in [0,T] \qquad (3.42)$$

elde ederiz. (3.41) eşitsizliğinin sağındaki ikinci terimi ele alalım. Ortalama değer teoremi, $W_0^{1,p}(0,1) \hookrightarrow L^\infty(0,1)$ sürekli gömülmesi, (3.3), (3.28), Hölder ve Young eşitsizliğine göre

$$
\begin{aligned}
&-\left\langle f(u(t)) - f(v(t)), \Lambda^{-1} w_t(t) \right\rangle \\
&\leq \|f(u(t)) - f(v(t))\|_{L^2(0,1)} \left\|\Lambda^{-1} w_t(t)\right\|_{L^2(0,1)} \\
&\leq \left\| \left(\int_0^1 |f'(v(t) + \tau(u(t) - v(t)))| \, d\tau \right) w(t) \right\|_{L^2(0,1)} \left\|\Lambda^{-1} w_t(t)\right\|_{L^2(0,1)} \\
&\leq C_5 \|w(t)\|_{L^2(0,1)} \left\|\Lambda^{-1} w_t(t)\right\|_{L^2(0,1)} \\
&\leq C_5 \left(\|w(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \left\|\Lambda^{-\frac{1}{2}} w_t(t)\right\|_{L^2(0,1)}^2 \right), \quad \forall t \in [0,T]
\end{aligned}
$$

olur. Bu eşitsizlikle birlikte (3.42)'yi (3.41)'de kullanırsak

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \left\|\Lambda^{-\frac{1}{2}} w_t(t)\right\|_{L^2(0,1)} \right) + \|w_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \\
&\leq C_6 \left(\varepsilon \int_0^1 \left(|u_x(t,x)|^{p-2} + |v_x(t,x)|^{p-2} \right) |w_x(t,x)|^2 \, dx \right. \\
&\quad + \mu C(\varepsilon) \|w_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \widehat{C}(\mu, \varepsilon) \left\|\Lambda^{-\frac{1}{2}} w_t(t)\right\|_{L^2(0,1)}^2 \\
&\quad \left. + \|w(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \left\|\Lambda^{-\frac{1}{2}} w_t(t)\right\|_{L^2(0,1)}^2 \right), \quad \forall t \in [0,T] \qquad (3.43)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. (3.40) ile (3.43) eşitsizliklerini toplayıp ε, μ ve δ'yı yeterince küçük seçersek

$$
\frac{d\Phi(t)}{dt} \leq C_7 \left(\|w(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \left\|\Lambda^{-\frac{1}{2}} w_t(t)\right\|_{L^2(0,1)} \right), \quad \forall t \in [0,T] \qquad (3.44)
$$

alırız. Burada $\Phi(t) := \delta \int_0^1 w_t(t,x) w(t,x) \, dx + \frac{\delta}{2} \|w_x(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2} \left\|\Lambda^{-\frac{1}{2}} w_t(t)\right\|_{L^2(0,1)}^2$ şeklindedir. Hölder ve Young eşitsizliklerine göre, Λ'nin özeşlenikliğinden

$$
\begin{aligned}
\left| \delta \int_0^1 w_t(t,x) w(t,x) \, dx \right| &= \delta \left| \left\langle \Lambda^{-\frac{1}{2}} w_t(t), \Lambda^{\frac{1}{2}} w(t) \right\rangle \right| \\
&\leq \delta \left\|\Lambda^{-\frac{1}{2}} w_t(t)\right\|_{L^2(0,1)} \left\|\Lambda^{\frac{1}{2}} w(t)\right\|_{L^2(0,1)} \\
&\leq \frac{1}{4} \left\|\Lambda^{-\frac{1}{2}} w_t(t)\right\|_{L^2(0,1)}^2 + \delta^2 \left\|\Lambda^{\frac{1}{2}} w(t)\right\|_{L^2(0,1)}^2, \quad \forall t \in [0,T]
\end{aligned}
$$

olup δ yeterince küçük olduğundan

$$
C_8 \left(\|w(t)\|_{H_0^1(0,1)}^2 + \|w_t(t)\|_{H^{-1}(0,1)}^2 \right) \leq \Phi(t)
$$

$$\le C_9\left(\|w(t)\|^2_{H^1_0(0,1)}+\|w_t(t)\|^2_{H^{-1}(0,1)}\right),\quad \forall t\in[0,T] \tag{3.45}$$

elde ederiz. (3.45)'i (3.44)'te göz önüne alırsak

$$\frac{d\Phi(t)}{dt}\le C_{10}\Phi(t),\quad \forall t\in[0,T]$$

sağlanır. Bu eşitsizliği $e^{-C_{10}t}$ ile çarpıp 0'dan t'ye integre edersek

$$\Phi(t)\le e^{C_{10}T}\,\Phi(0),\ \forall t\in[0,T]$$

olup (3.45)'i dikkate alırsak

$$\|w(t)\|^2_{H^1_0(0,1)}+\|w_t(t)\|^2_{H^{-1}(0,1)}$$

$$\le C_{11}e^{C_{10}T}\left(\|w(0)\|^2_{H^1_0(0,1)}+\|w_t(0)\|^2_{H^{-1}(0,1)}\right),\quad \forall t\in[0,T]$$

elde ederiz. Burada C_i $(i=\overline{1,11})$ sabitleri $\|(u_0,u_1)\|_{W_0^{1,p}(0,1)\times L^2(0,1)}$, $\|(v_0,v_1)\|_{W_0^{1,p}(0,1)\times L^2(0,1)}$ normlarına bağlıdır. Böylece, çözüm başlangıç verilere sürekli bağımlı olup özel olarak tektir. ■

Şimdi, (3.19) ve (3.27)'den, Lemma 3.1.3 ile belirli zayıf çözümün, $s=0$ için, (3.4) eşitsizliğini sağladığını söyleriz. Lemma 3.1.4'e göre çözümün tek olduğunu da dikkate alırsak, her $t\ge s\ge 0$ için (3.4) eşitsizliğinin sağlandığını elde ederiz. Böylece, Lemma 3.1.3 ve Lemma 3.1.4'ten Teorem 3.1.2'yi alırız.

Sonuç olarak, u fonksiyonu (3.1) probleminin zayıf çözümü olmak üzere, (3.1) problemi $W_0^{1,p}(0,1)\times L^2(0,1)$'de $S(t)(u_0,u_1)=(u(t),u_t(t))$ formülü ile tanımlı zayıf sürekli $\{S(t)\}_{t\ge0}$ yarıgrubunu üretir. Burada zayıf süreklilikle, $W_0^{1,p}(0,1)\times L^2(0,1)$ uzayında $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\to} \varphi$ ise bu uzayda $S(t)\varphi_n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\to}} S(t)\varphi$ olduğu kastedilmektedir.

3.2 Yerel Olmayan Çekicinin Varlığı

Bu bölümde, $\{S(t)\}_{t\ge0}$ yarı grubunun düzgün kuvvetli yerel olmayan çekicisinin varlığını ispatlayacağız. Burada ispatlayacağımız ana teoremleri verelim:

Teorem 3.2.1 *(3.2)-(3.3) koşulları sağlansın. Bu durumda, her sınırlı $B\subset W_0^{1,p}(0,1)\times L^2(0,1)$ kümesi için, (3.1) probleminin ürettiği $\{S(t)\}_{t\ge0}$ yarıgrubu $W_0^{1,p}(0,1)\times L^2(0,1)$ uzayında $\mathcal{A}_B$ zayıf yerel çekicisine sahiptir. Dahası, $\mathcal{A}_B$ zayıf yerel çekicisi, B kümesinin görüntüsünü $H_0^1(0,1)\times L^2(0,1)$'in kuvvetli topolojisinde çeker.*

Teorem 3.2.2 *(3.2)-(3.3) koşullarına ek olarak, $p < 4$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarıgrubu $W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$ uzayında $\mathcal{A}$ kuvvetli yerel olmayan çekicisine sahiptir ve $\mathcal{A} = \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$ sağlanır. Dahası, $\mathcal{A}$ yerel olmayan çekicisi $W^{1,\infty}(0,1) \times W^{1,\infty}(0,1)$'de sınırlıdır. Burada $\mathcal{M}^u(\mathcal{N})$ kümesi $\mathcal{N}$ sabit noktalar kümesinden başlayan kararsız (unstable) manifoldtur.*

3.2.1 Zayıf Yerel Çekicilerin Varlığı

Burada Teorem 3.2.1'i ispatlayacağız. Bunun için bazı yardımcı lemmaları verelim. Öncelikle, aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 3.2.3 *(3.2)-(3.3) koşulları sağlansın ve B kümesi $W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$'in sınırlı alt kümesi olsun. Bu durumda, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B$, $t_k \to \infty$ olmak üzere, $\{S(t_k)\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ şeklindeki her dizi $H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$'de yakınsak alt diziye sahiptir.*

İspat. Öncelikle, B'nin sınırlı olduğunu kullanırsak, (3.2)-(3.4)'e göre,

$$\|S(t)\varphi\|_{W_0^{1,p}(0,1)\times L^2(0,1)} \leq C_B < \infty, \ \forall \varphi \in B, \forall t \geq 0 \qquad (3.46)$$

olacak şekilde $C_B := C(B) > 0$ sabiti vardır. Şimdi $(u_0, u_1) \in B$ ve $(u(t), u_t(t)) = S(t)(u_0, u_1)$ olsun. $v := u_t$ şeklinde işaretlersek, (3.1)'den

$$\begin{cases} v_t + \Lambda v = h, \\ v(0) = u_1 \end{cases} \qquad (3.47)$$

problemini elde ederiz. Burada, Λ operatörü Lemma 3.1.3'te tanımlanan özeşlenik operatör ve $h := \frac{\partial}{\partial x}\left(|u_x|^{p-2} u_x\right) - f(u) + g$'dir. Böylece, parametrelerin değişimi formülüne göre, (3.47)'den

$$v(t) = e^{-t\Lambda}u_1 + \int_0^t e^{-(t-\tau)\Lambda} h(\tau)\, d\tau \qquad (3.48)$$

sağlanır. Öncelikle, keyfi $\psi \in H_0^{1+\frac{p-2}{2p}}(0,1)$ için, kısmi integrasyonla

$$|\langle h(t), \psi\rangle|$$
$$\leq \left|\left\langle |u_x(t)|^{p-2} u_x(t), \psi'\right\rangle\right| + |\langle f(u(t)), \psi\rangle| + |\langle g, \psi\rangle|, \ \forall t \geq 0 \qquad (3.49)$$

alırız. Bu eşitsizliğin sağ tarafını değerlendirelim. İlk terimi ele alalım. Hölder eşitsizliği ve (3.46)'dan, $H_0^{\frac{p-2}{2p}}(0,1) \hookrightarrow L^p(0,1)$ sürekli gömülmesine göre

$$\left|\left\langle |u_x(t)|^{p-2} u_x(t), \psi'\right\rangle\right| \leq \|u_x(t)\|_{L^p(0,1)}^{p-1} \|\psi'\|_{L^p(0,1)}$$

$$\leq C_1 \|\psi'\|_{H_0^{\frac{p-2}{2p}}(0,1)} \leq C_1 \|\psi\|_{H_0^{1+\frac{p-2}{2p}}(0,1)}, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.50}$$

elde ederiz. (3.49)'un sağ tarafındaki ikinci terim için, $W_0^{1,p}(0,1) \hookrightarrow L^\infty(0,1)$ sürekli gömülmesi, (3.3) ve (3.46)'dan, Hölder eşitsizliği ve $H_0^{1+\frac{p-2}{2p}}(0,1) \hookrightarrow L^2(0,1)$ sürekli gömülmesine göre

$$|\langle f(u(t)), \psi\rangle| \leq C_2 \|\psi\|_{L^2(0,1)} \leq C_3 \|\psi\|_{H_0^{1+\frac{p-2}{2p}}(0,1)}, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.51}$$

sağlanır. (3.49)'un sağ tarafındaki son terim için, Hölder eşitsizligi, (3.2) ve $H_0^{1+\frac{p-2}{2p}}(0,1)$ $\hookrightarrow L^2(0,1)$ sürekli gömülmesinden

$$|\langle g, \psi\rangle| \leq \|g\|_{L^2(0,1)} \|\psi\|_{L^2(0,1)} \leq C_4 \|\psi\|_{H_0^{1+\frac{p-2}{2p}}(0,1)}, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.52}$$

olur. (3.50)-(3.52)'yi (3.49)'da kullanıp $\psi \neq 0$, $\|\psi\|_{H_0^{1+\frac{p-2}{2p}}(0,1)} \leq 1$ üzerine supremuma geçersek

$$\|h(t)\|_{H^{-1-\frac{p-2}{2p}}(0,1)} \leq C_5, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.53}$$

elde ederiz. (3.48)'e göre, $\delta \in \left(0, 1 - \frac{p-2}{2p}\right]$ olmak üzere,

$$\|v(t)\|_{H^{1-\frac{p-2}{2p}-\delta}(0,1)} \leq \left\|e^{-t\Lambda} u_1\right\|_{H^{1-\frac{p-2}{2p}-\delta}(0,1)} + \int_0^t \left\|e^{-(t-\tau)\Lambda} h(\tau)\right\|_{H^{1-\frac{p-2}{2p}-\delta}(0,1)} d\tau \tag{3.54}$$

sağlanır. Şimdi, bu eşitsizliğin sağ tarafını değerlendirelim. Öncelikle, [[32], syf.116]'daki yöntemi kullanarak

$$\begin{aligned} &\left\|e^{-t\Lambda}\right\|_{\mathcal{L}(D(\Lambda^s), D(\Lambda^\sigma))} \\ &\leq M e^{-\omega t} t^{-(\sigma - s)}, \quad M \geq 1,\, \omega > 0,\, t > 0,\, s \leq \sigma \end{aligned} \tag{3.55}$$

sönüm değerlenmesini elde ederiz. Burada, $D(\Lambda^\tau) = \begin{cases} H^{2\tau}(0,1), & \tau \in \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right], \\ H_0^{2\tau}(0,1), & \tau \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \end{cases}$ şeklindedir. Şimdi, (3.54)'ün sağ tarafındaki ilk terimi değerlendirelim. (3.55)'ten, $\delta \in \left(0, 1 - \frac{p-2}{2p}\right]$ için

$$\begin{aligned} \left\|e^{-t\Lambda} u_1\right\|_{H^{1-\frac{p-2}{2p}-\delta}(0,1)} &\leq \left\|e^{-t\Lambda}\right\|_{\mathcal{L}\left(D(\Lambda^0), D\left(\Lambda^{\frac{1}{2}-\frac{p-2}{4p}-\frac{\delta}{2}}\right)\right)} \|u_1\|_{D(\Lambda^0)} \\ &\leq M e^{-\omega t} t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{p-2}{2p}-\delta\right)} \|u_1\|_{L^2(0,1)}, \ \forall t > 0 \end{aligned} \tag{3.56}$$

alırız. Öte yandan, (3.54)'ün sağ tarafındaki ikinci terim için, (3.55)'ten, $\delta \in \left(0, 1 - \frac{p-2}{2p}\right]$ için

$$\int_0^t \left\|e^{-(t-\tau)\Lambda} h(\tau)\right\|_{H^{1-\frac{p-2}{2p}-\delta}(0,1)} d\tau$$

$$\leq \int_0^t \left\| e^{-(t-\tau)\Lambda} \right\|_{\mathcal{L}\left(D\left(\Lambda^{-\frac{1}{2}-\frac{p-2}{4p}}\right), D\left(\Lambda^{\frac{1}{2}-\frac{p-2}{4p}-\frac{\delta}{2}}\right)\right)} \|h(\tau)\|_{D\left(\Lambda^{-\frac{1}{2}-\frac{p-2}{4p}}\right)} d\tau$$

$$\leq M \int_0^t e^{-\omega(t-\tau)} (t-\tau)^{-1+\frac{\delta}{2}} \|h(\tau)\|_{H^{-1-\frac{p-2}{2p}}(0,1)} d\tau, \ \forall t > 0 \tag{3.57}$$

elde ederiz. (3.53) ve (3.56)-(3.57)'yi (3.54)'te kullanırsak

$$\|v(t)\|_{H^{1-\frac{p-2}{2p}-\delta}(0,1)} \leq C_6 \left(e^{-\omega t} t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{p-2}{2p}-\delta\right)} + \int_0^t e^{-\omega(t-\tau)} (t-\tau)^{-1+\frac{\delta}{2}} d\tau \right), \ \forall t > 0$$

sağlanır. Burada, $\delta \in \left(0, 1 - \frac{p-2}{2p}\right]$ için,

$$e^{-\omega t} t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{p-2}{2p}-\delta\right)} \leq 1, \quad \forall t \geq 1$$

olduğunu ve kısmi integrasyonla

$$\int_0^t e^{-\omega(t-\tau)} (t-\tau)^{-1+\frac{\delta}{2}} d\tau = \lim_{a \to t^-} \int_0^a e^{-\omega(t-\tau)} (t-\tau)^{-1+\frac{\delta}{2}} d\tau$$

$$= \lim_{a \to t^-} \left(-\frac{2}{\delta} e^{-\omega(t-a)} (t-a)^{\frac{\delta}{2}} + \frac{2}{\delta} e^{-\omega t} t^{\frac{\delta}{2}} + \frac{2\omega}{\delta} \int_0^a e^{-\omega(t-\tau)} (t-\tau)^{\frac{\delta}{2}} d\tau \right)$$

$$\leq c_\delta, \quad \forall t \geq 0$$

olduğunu kullanırsak

$$\|v(t)\|_{H^{1-\frac{p-2}{2p}-\delta}(0,1)} \leq \widehat{c}_\delta, \ \forall t \geq 1$$

elde ederiz. Sonuç olarak

$$\sup_{t \geq 1} \|u_t(t)\|_{H^{1-\varepsilon}(0,1)} \leq \widetilde{c}_\varepsilon, \quad \varepsilon \in \left(\frac{p-2}{2p}, 1\right] \tag{3.58}$$

alırız.

Diğer taraftan, (3.46)'dan, her $t \geq 0$ ve $\varphi \in B$ için $S(t)\varphi \in B_0$ olacak şekilde sınırlı $B_0 \subset W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$ kümesi vardır. O halde, $t_k \to \infty$ olduğundan, her $T_0 \geq 1$ için, $k \geq K$ iken $t_k \geq T_0$ ve $S(t_k - T_0)\varphi_k \in B_0$ olacak şekilde $K \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda, Banach-Alaoğlu teoreminden, $t_{k_m} \geq T_0$ ve $\left\{S(t_{k_m} - T_0)\varphi_{k_m}\right\}_{m=1}^{\infty} \subset B_0$ dizisi $W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$ uzayında zayıf yakınsak olacak şekilde $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır.

Böylece, (3.1), (3.2)-(3.4) ve (3.46)'dan,

$$\begin{cases} S\left(t_{k_m}-T_0\right)\varphi_{k_m} \underset{m\to\infty}{\overset{w}{\longrightarrow}} \varphi_0 \quad W_0^{1,p}(0,1)\times L^2(0,1)\text{'de,} \\ u_m \underset{m\to\infty}{\overset{w^*}{\longrightarrow}} u \qquad L^\infty\left(0,\infty;W_0^{1,p}(0,1)\right)\text{'de,} \\ u_{mt} \underset{m\to\infty}{\overset{w^*}{\longrightarrow}} u_t \quad L^\infty\left(0,\infty;L^2(0,1)\right)\text{'de,} \\ u_{mt} \underset{m\to\infty}{\overset{w}{\longrightarrow}} u_t \quad L^2\left(0,\infty;H_0^1(0,1)\right)\text{'de,} \\ u_{mtt} \underset{m\to\infty}{\overset{w^*}{\longrightarrow}} u_{tt} \quad L^\infty\left(0,\infty;H^{-2}(0,1)\right)\text{'de,} \\ u_m(t) \underset{m\to\infty}{\overset{w}{\longrightarrow}} u(t) \qquad W_0^{1,p}(0,1)\text{'de, } \forall t\geq 0, \\ u_{mt}(t) \underset{m\to\infty}{\overset{w}{\longrightarrow}} u_t(t) \quad L^2(0,1),\ \forall t\geq 0 \end{cases} \tag{3.59}$$

yakınsamaları sağlanacak şekilde $\varphi_0 \in W_0^{1,p}(0,1)\times L^2(0,1)$ ve $u \in L^\infty\left(0,\infty;W_0^{1,p}(0,1)\right)$ $\cap W^{1,\infty}(0,\infty;L^2(0,1)) \cap W^{1,2}(0,\infty;H_0^1(0,1)) \cap W^{2,\infty}(0,\infty;H^{-2}(0,1))$ fonksiyonları vardır. Burada $(u_m(t),u_{mt}(t)) = S(t+t_{k_m}-T_0)\varphi_{k_m}$ ile tanımlıdır. Şimdi, $(3.1)_1$ denklemindeki u'yu u_m ve u_n ile değiştirip, elde edilen denklemleri birbirinden çıkararak

$$\begin{gathered} u_{mtt}(t,x)-u_{ntt}(t,x)-(u_{mtxx}(t,x)-u_{ntxx}(t,x)) \\ -\frac{\partial}{\partial x}(|u_{mx}(t,x)|^{p-2}u_{mx}(t,x)-|u_{nx}(t,x)|^{p-2}u_{nx}(t,x)) \\ +f(u_m(t,x))-f(u_n(t,x))=0 \end{gathered}$$

denklemini alalım. Bu denklemi $(0,T)\times(0,1)$'de $2t(u_m-u_n)$ ile test edersek

$$\begin{gathered} 2T\int_0^1 (u_{mt}(T,x)-u_{nt}(T,x))(u_m(T,x)-u_n(T,x))\,dx \\ -2\int_0^T\int_0^1 (u_{mt}(t,x)-u_{nt}(t,x))(u_m(t,x)-u_n(t,x))\,dxdt \\ -2\int_0^T t\,\|u_{mt}(t)-u_{nt}(t)\|_{L^2(0,1)}^2\,dt \\ +T\,\|u_{mx}(T)-u_{nx}(T)\|_{L^2(0,1)}^2-\int_0^T \|u_{mx}(t)-u_{nx}(t)\|_{L^2(0,1)}^2\,dt \\ +2\int_0^T\int_0^1 \left(|u_{mx}(t,x)|^{p-2}u_{mx}(t,x)-|u_{nx}(t,x)|^{p-2}u_{nx}(t,x)\right) \\ \times t\,(u_{mx}(t,x)-u_{nx}(t,x))\,dxdt \end{gathered}$$

$$+2\int_0^T\int_0^1 \left(f\left(u_m(t,x)\right)-f\left(u_n(t,x)\right)\right)t\left(u_m\left(t,x\right)-u_n\left(t,x\right)\right)dxdt=0,\forall T\geq 0$$

elde ederiz. Bu eşitliğin sol tarafındaki altıncı terim için

$$\left(\left|a\right|^{p-2}a-\left|b\right|^{p-2}b\right)\left(a-b\right)\geq c\left|a-b\right|^{p},\ a,b\in\mathbb{R} \tag{3.60}$$

eşitsizliğini kullanırsak

$$T\left\|u_{mx}\left(T\right)-u_{nx}\left(T\right)\right\|_{L^2(0,1)}^2+C_7\int_0^T t\left\|u_{mx}\left(t\right)-u_{nx}\left(t\right)\right\|_{L^p(0,1)}^p dt$$

$$\leq\int_0^T\left\|u_{mx}\left(t\right)-u_{nx}\left(t\right)\right\|_{L^2(0,1)}^2 dt+2\int_0^T t\left\|u_{mt}\left(t\right)-u_{nt}\left(t\right)\right\|_{L^2(0,1)}^2 dt$$

$$-2T\int_0^1\left(u_{mt}\left(T,x\right)-u_{nt}\left(T,x\right)\right)\left(u_m\left(T,x\right)-u_n\left(T,x\right)\right)dx$$

$$+2\int_0^T\int_0^1\left(u_{mt}\left(t,x\right)-u_{nt}\left(t,x\right)\right)\left(u_m\left(t,x\right)-u_n\left(t,x\right)\right)dxdt$$

$$-2\int_0^T\int_0^1\left(f\left(u_m(t,x)\right)-f\left(u_n(t,x)\right)\right)t\left(u_m\left(t,x\right)-u_n\left(t,x\right)\right)dxdt,\ \forall T\geq 0 \tag{3.61}$$

alırız. Şimdi, (3.61)'in sağ tarafındaki ilk terimi göz önüne alırsak, $Q:=\{t\in(0,T):\left\|u_{mx}\left(t\right)-u_{nx}\left(t\right)\right\|_{L^2(0,1)}^{p-2}\geq\frac{1}{C_7 t}\Big\}$ olmak üzere,

$$\int_0^T\left\|u_{mx}\left(t\right)-u_{nx}\left(t\right)\right\|_{L^2(0,1)}^2 dt$$

$$=\int_0^1\left\|u_{mx}\left(t\right)-u_{nx}\left(t\right)\right\|_{L^2(0,1)}^2 dt+\int_1^T\left\|u_{mx}\left(t\right)-u_{nx}\left(t\right)\right\|_{L^2(0,1)}^2 dt$$

$$\leq C_8+\int_Q\left\|u_{mx}\left(t\right)-u_{nx}\left(t\right)\right\|_{L^2(0,1)}^{2-p}\left\|u_{mx}\left(t\right)-u_{nx}\left(t\right)\right\|_{L^2(0,1)}^{p}dt$$

$$+\int_{[1,T]\setminus Q}\left\|u_{mx}\left(t\right)-u_{nx}\left(t\right)\right\|_{L^2(0,1)}^2 dt$$

$$\leq C_8+C_7\int_Q t\left\|u_{mx}\left(t\right)-u_{nx}\left(t\right)\right\|_{L^2(0,1)}^{p}dt+\int_1^T\left(\frac{1}{C_7 t}\right)^{\frac{2}{p-2}}dt$$

$$\leq C_7 \int\limits_Q t \left\| u_{mx}(t) - u_{nx}(t) \right\|_{L^2(0,1)}^p dt + C_9 \left(T^{\max\left\{0, \frac{p-4}{p-2}\right\}} + \ln T \right), \quad \forall T \geq 1 \qquad (3.62)$$

elde ederiz. (3.62)'yi (3.61)'de kullanırsak, Hölder eşitsizliği ile

$$\left\| u_{mx}(T) - u_{nx}(T) \right\|_{L^2(0,1)}^2$$

$$\leq C_9 \frac{\left(T^{\max\left\{0, \frac{p-4}{p-2}\right\}} + \ln T \right)}{T} + 2 \int\limits_0^T \left\| u_{mt}(t) - u_{nt}(t) \right\|_{L^2(0,1)}^2 dt$$

$$-2 \int\limits_0^1 \left(u_{mt}(T,x) - u_{nt}(T,x) \right) \left(u_m(T,x) - u_n(T,x) \right) dx$$

$$+\frac{2}{T} \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \left(u_{mt}(t,x) - u_{nt}(t,x) \right) \left(u_m(t,x) - u_n(t,x) \right) dx dt$$

$$-\frac{2}{T} \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \left(f(u_m(t,x)) - f(u_n(t,x)) \right) t \left(u_m(t,x) - u_n(t,x) \right) dx dt, \ \forall T \geq 1$$

alırız. Burada, (3.29)-(3.30) ve (3.59)'u göz önüne alıp Önerme 2.0.55'e göre

$$\begin{cases} u_{mt} \underset{m\to\infty}{\to} u_t & L^2\left(0,T; L^2(0,1)\right)\text{'de} \\ u_m \underset{m\to\infty}{\to} u & C\left([0,T]; L^2(0,1)\right)\text{'de} \end{cases}$$

yakınsamalarının sağlandığını da dikkate alırsak

$$\limsup_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \left\| u_{mx}(T) - u_{nx}(T) \right\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{C_9 \left(T^{\max\left\{0, \frac{p-4}{p-2}\right\}} + \ln T \right)}{T}, \ \forall T \geq 1$$

alırız. Burada $T = T_0$ seçersek, $P : W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1) \to W_0^{1,p}(0,1)$, $P(\varphi, \psi)$ $= \varphi$ ile tanımlı izdüşüm operatörü olmak üzere,

$$\limsup_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \left\| PS(t_{k_m}) \varphi_{k_m} - PS(t_{k_n}) \varphi_{k_n} \right\|_{H_0^1(0,1)}^2$$

$$\leq \frac{C_{10} \left(T_0^{\max\left\{0, \frac{p-4}{p-2}\right\}} + \ln T_0 \right)}{T_0}, \ \forall T_0 \geq 1$$

ve böylece

$$\liminf_{k\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \left\| PS(t_k) \varphi_k - PS(t_n) \varphi_n \right\|_{H_0^1(0,1)}$$

$$\leq \frac{C_{11} \left(T_0^{\max\left\{0, \frac{p-4}{p-2}\right\}} + \ln T_0 \right)^{\frac{1}{2}}}{T_0^{\frac{1}{2}}}, \ \forall T_0 \geq 1$$

elde ederiz. Son eşitsizlikte $T_0 \to \infty$ iken limite geçersek

$$\liminf_{k\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \|PS(t_k)\varphi_k - PS(t_n)\varphi_n\|_{H_0^1(0,1)} = 0$$

buluruz. Ayrıca, yukarıda yaptığımız işlemleri tekrar ederek, keyfi $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi için

$$\liminf_{m\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \left\|PS(t_{k_m})\varphi_{k_m} - PS(t_{k_n})\varphi_{k_n}\right\|_{H_0^1(0,1)} = 0 \tag{3.63}$$

elde ederiz. Şimdi, $\{PS(t_k)\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin $H_0^1(0,1)$'de yakınsak alt diziye sahip olduğunu görelim. Tersini varsayalım. Bu durumda, $H_0^1(0,1)$ uzayı tam olduğundan, söz konusu dizi tamamen sınırlı olamaz ve dolayısıyla

$$\left\|PS(t_{k_m})\varphi_{k_m} - PS(t_{k_n})\varphi_{k_n}\right\|_{H_0^1(0,1)} \geq \varepsilon_0,\ m \neq n$$

sağlanacak şekilde $\varepsilon_0 > 0$ ve $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır ve bu ise (3.63) ile çelişir. Sonuç olarak, (3.58) ile birlikte istenen elde edilir. ■

Şimdi, bir $B \subset W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$ kümesinden çıkan yörüngelerin zayıf ω-limit kümesini şu şekilde tanımlayalım:

$$\omega_w(B) := \bigcap_{\tau\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq\tau} S(t)B}^{w}$$

Burada küme üzerindeki çizgi $W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$ uzayındaki zayıf kapanışı ifade etmektedir. Öyleyse,

$$\begin{aligned} \varphi \in \omega_w(B) \Longleftrightarrow W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1) \text{ uzayında } S(t_k)\varphi_k \underset{k\to\infty}{\overset{w}{\to}} \varphi \text{ olacak} \\ \text{şekilde } \{t_k\}_{k=1}^{\infty}, t_k \to \infty \text{ ve } \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B \text{ dizileri vardır.} \end{aligned} \tag{3.64}$$

Gerçekten, $\varphi \in \omega_w(B)$ olsun. Bu durumda, her $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\varphi \in \overline{\bigcup_{t\geq k} S(t)B}^{w}$ olur. Yani, $\|S(t_k)\varphi_k - \varphi\|_{L^2(0,1)\times H^{-1}(0,1)} \leq \frac{1}{k}$ olacak şekilde $t_k \geq k$ ve $\varphi_k \in B$ vardır. Buradan, $L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$ uzayında $S(t_k)\varphi_k \underset{k\to\infty}{\to} \varphi$ yakınsamasını elde ederiz. Diğer taraftan, $\{S(t_k)\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi, (3.46)'ya göre, yansımalı $W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$ uzayında sınırlı olduğundan, söz konusu uzayda $S(t_k)\varphi_k \underset{k\to\infty}{\overset{w}{\to}} \varphi$ sağlanır. Tersine, $W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$'de $S(t_k)\varphi_k \underset{k\to\infty}{\overset{w}{\to}} \varphi$ olacak şekilde $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $t_k \to \infty$ ve $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B$ dizilerinin var olduğunu kabul edelim. O halde, her $\tau \geq 0$ ve yeterince büyük k için $t_k \geq \tau$ olur. Bu durumda, yeterince büyük k için, $S(t_k)\varphi_k \in \bigcup_{t\geq\tau} S(t)B$ olur. Böylece, her $\tau \geq 0$ için $\varphi \in \overline{\bigcup_{t\geq\tau} S(t)B}^{w}$ olup $\varphi \in \omega_w(B)$ alırız.

Şimdi, $\omega_w(B)$ kümesinin değişmezlik özelliğini sağladığını gösterelim.

Lemma 3.2.4 *Her sınırlı $B \subset W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$ kümesi için, $\omega_w(B)$ kümesi değişmezdir.*

İspat. Kabul edelim ki $\psi \in \omega_w(B)$ ve $t \geq 0$ için $z = S(t)\psi$ olsun. Bu durumda, (3.64)'ten, $W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$'de $S(t_k)\psi_k \xrightarrow[k\to\infty]{w} \psi$ olacak şekilde $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $t_k \to \infty$ ve $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B$ dizileri vardır. Ayrıca, Lemma 3.2.3'ü kullanırsak, $H_0^1(0,1)$'de $PS(t_{k_m})\psi_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} P\psi$ olacak şekilde $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisinin varlığını elde ederiz. Bu durumda, $\tau_{k_m} := t + t_{k_m}$ile işaretlersek, (3.5)'ten

$$S(\tau_{k_m})\psi_{k_m} = S(t)S(t_{k_m})\psi_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{w} S(t)\psi = z \;\; W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)\text{'de}$$

olup $z \in \omega_w(B)$ olduğunu elde ederiz. Böylece, $S(t)\omega_w(B) \subset \omega_w(B)$ sağlanır.

Diğer yandan, $\psi \in \omega_w(B)$ ise, yine (3.64)'ten, $W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$'de $S(t_k)\psi_k \xrightarrow[k\to\infty]{w} \psi$ olacak şekilde $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $t_k \to \infty$ ve $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B$ dizileri vardır. $t_k \geq t \geq 0$ için $\varphi_k := S(t_k - t)\psi_k$ şeklinde tanımlarsak, (3.46)'dan, bir $\varphi \in W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$ için $W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$'de $\varphi_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{w} \varphi$ olacak şekilde $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. Buradan, $\varphi \in \omega_w(B)$ olduğunu elde ederiz. Dahası, Lemma 3.2.3'e göre, alt diziye geçerek, $H_0^1(0,1)$'de $P\varphi_{k_{m_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} P\varphi$ alırız.

$$S\left(t_{k_{m_n}}\right)\psi_{k_{m_n}} = S(t)S\left(t_{k_{m_n}} - t\right)\psi_{k_{m_n}} = S(t)\varphi_{k_{m_n}}$$

olduğundan, (3.5)'ten, $W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$'de $S\left(t_{k_{m_n}}\right)\psi_{k_{m_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{w} S(t)\varphi$ elde ederiz. Böylece, $\psi = S(t)\varphi$ olup $\omega_w(B) \subset S(t)\omega_w(B)$ alırız. ■

Sonuç olarak, Lemma 3.2.3 ve Lemma 3.2.4'e göre, $\mathcal{A}_B := \omega_w(B)$ kümeleri Teorem 3.2.1'in ifadesindeki özellikleri sağlayan yerel çekicidir.

3.2.2 Düzgün Kuvvetli Yerel Olmayan Çekicinin Varlığı

Bu kısımda, Teorem 3.2.2'yi ispatlayacağız. Öncelikle, ispatta kullanacağımız bazı yardımcı lemmaları verelim.

Lemma 3.2.5 *Eğer $f \in H^{-\varepsilon}(0,1)$ ve $f' \in H^{-\varepsilon}(0,1)$ ise $f \in C[0,1]$ olup*

$$\|f\|_{C[0,1]} \leq c\left(\|f\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} + \|f'\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)}\right) \tag{3.65}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $\varepsilon \in [0, \frac{1}{2})$'dir.

İspat. Öncelikle, $\mathcal{D}[0,1]$ uzayının,

$$\|f\|_X := \|f\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} + \|f'\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)}$$

normu ile lineer normlu uzay olan $X := \{f : f \in H^{-\varepsilon}(0,1),\ f' \in H^{-\varepsilon}(0,1)\}$ uzayında yoğun olduğunu gösterelim. Riesz gösterim teoremine göre X üzerinde, keyfi ϕ lineer sürekli fonksiyoneli, $u_0, u_1 \in H^{\varepsilon}(0,1)$ olmak üzere,

$$\phi(v) := \langle u_0, v\rangle + \langle u_1, v'\rangle$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $\langle\cdot,\cdot\rangle$ simgesi $H^{\varepsilon}(0,1)$ ile $H^{-\varepsilon}(0,1)$ uzayları arasındaki dual formu ifade etmektedir. Her $\varphi \in \mathcal{D}[0,1]$ için

$$\phi(\varphi) = 0 \tag{3.66}$$

olduğunu kabul edelim. $\overline{\mathcal{D}[0,1]}^X = X$ olduğunu göstermek için, her $v \in X$ için

$$\phi(v) = 0 \tag{3.67}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi, (3.67)'nin sağlandığını gösterelim. Bunun için, öncelikle, $i = 0, 1$ için,

$$\widehat{u}_i(x) := \begin{cases} u_i(x), & x \in (0,1), \\ 0, & \mathbb{R}\setminus(0,1) \end{cases}$$

fonksiyonlarını ve $\varphi \in \mathcal{D}[0,1]$ olmak üzere,

$$\widehat{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & x \in [0,1], \\ \varphi(1), & x > 1, \\ \varphi(0), & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Ayrıca, $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ve $x \in [0,1]$ için $\rho(x) = 1$ olmak üzere, $\widetilde{\varphi}(x) := \rho(x)\widehat{\varphi}(x)$ şeklinde işaretleyelim. Bu durumda, $\widetilde{\varphi} \in H^1(\mathbb{R})$ olur. Gerçekten,

$$\int_{\mathbb{R}} |\widetilde{\varphi}(x)|^2 dx = |\varphi(0)|^2 \int_{-\infty}^{0} |\rho(x)|^2 dx + \int_0^1 |\varphi(x)|^2 dx + |\varphi(1)|^2 \int_1^{\infty} |\rho(x)|^2 dx$$

ve keyfi $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ için

$$\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\varphi}(x)\psi'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \rho(x)\varphi(0)\psi'(x)\,dx + \int_0^1 \varphi(x)\psi'(x)\,dx + \int_1^{\infty} \rho(x)\varphi(1)\psi'(x)\,dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} \rho'(x)\,\varphi(0)\,\psi(x)\,dx - \int_{0}^{1} \varphi'(x)\,\psi(x)\,dx - \int_{1}^{\infty} \rho'(x)\,\varphi(1)\,\psi(x)\,dx$$

olup, $\widetilde{\varphi}'$ ile $\widetilde{\varphi}$'nin $\mathbb{R}$'de distribüsyon anlamında türevini işaret etmek üzere,

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\widetilde{\varphi}'(x)\right|^2 dx = |\varphi(0)|^2 \int_{-\infty}^{0} |\rho'(x)|^2\,dx + \int_{0}^{1} |\varphi'(x)|^2\,dx + |\varphi(1)|^2 \int_{1}^{\infty} |\rho'(x)|^2\,dx$$

sağlandığından $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\varphi}' \in L^2(\mathbb{R})$ alırız. Böylece, (3.66)'dan

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{u}_0(x)\,\widetilde{\varphi}(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}_1(x)\,\frac{d}{dx}\widetilde{\varphi}(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{1} u_0(x)\,\varphi(x)\,dx + \int_{0}^{1} u_1(x)\,\frac{d}{dx}\varphi(x)\,dx$$
$$= \langle u_0, \varphi\rangle + \langle u_1, \varphi'\rangle = \phi(\varphi) = 0$$

ve dolayısıyla

$$\frac{d}{dx}\widehat{u}_1(x) = \widehat{u}_0(x)$$

sağlanır. Son eşitlikten $\widehat{u}_1 \in H^{1+\varepsilon}(\mathbb{R})$ ve buradan $u_1 \in H_0^{1+\varepsilon}(0,1)$ olur. Böylece, ϕ'nin tanımından, kısmi integrasyonla, her $v \in X$ için

$$\phi(v) = \langle u_0, v\rangle + \langle u_1, v'\rangle = \langle u_0, v\rangle - \langle u_1', v\rangle = \langle u_0 - u_1', v\rangle = 0$$

olup (3.67)'yi elde ederiz.

İspatı tamamlamak için, her $f \in \mathcal{D}[0,1]$ için (3.65) eşitsizliğinin sağlandığını ispatlamak yeterlidir. Gerçekten, eğer her $f \in \mathcal{D}[0,1]$ için (3.65) eşitsizliği sağlanıyorsa, keyfi $g \in X$ için, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}[0,1]$ dizisi X uzayında $f_n \underset{n\to\infty}{\to} g$ olacak şekilde dizi olmak üzere,

$$\|f_n\|_{C[0,1]} \le c\left(\|f_n\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} + \|f_n'\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)}\right)$$

olacağından $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $C[0,1]$'de Cauchy dizisi olur. Buradan, $g \in C[0,1]$ olup son eşitsizlikte limite geçerek

$$\|g\|_{C[0,1]} \le c\left(\|g\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} + \|g'\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)}\right)$$

eşitsizliğini ve dolayısıyla tüm X üzerinde (3.65)'in sağlandığını elde etmiş oluruz. Şimdi, $f \in \mathcal{D}[0,1]$ olsun ve $\alpha \in \mathcal{D}[0,1)$ fonksiyonu $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için $\alpha(x) = 1$ eşitliğini sağlasın. $\widetilde{f}(x) := \begin{cases} \alpha(x) f(x), & x \in [0,1), \\ 0 & , x > 1 \end{cases}$ ve $\Phi(x) := \begin{cases} \widetilde{f}(x), & x > 0, \\ \widetilde{f}(-x), & x \leq 0 \end{cases}$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu durumda, $\Phi \in H^1(\mathbb{R})$ olur. Gerçekten,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\Phi(x)|^2 dx = \int\limits_0^{\infty} \left|\widetilde{f}(x)\right|^2 dx + \int\limits_{-\infty}^{0} \left|\widetilde{f}(-x)\right|^2 dx = 2\int\limits_0^1 |\alpha(x) f(x)|^2 dx$$

ve keyfi $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ için,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \Phi(x)\psi'(x)\,dx = \int\limits_0^{\infty} \widetilde{f}(x)\psi'(x)\,dx + \int\limits_{-\infty}^{0} \widetilde{f}(-x)\psi'(x)\,dx$$

$$= \int\limits_0^1 \alpha(x) f(x)\psi'(x)\,dx + \int\limits_{-1}^{0} \alpha(-x) f(-x)\psi'(x)\,dx$$

$$= -\int\limits_0^1 (\alpha'(x) f(x) + \alpha(x) f'(x))\psi(x)\,dx$$

$$+ \int\limits_{-1}^{0} (\alpha'(-x) f(-x) + \alpha(-x) f'(-x))\psi(x)\,dx$$

olup, Φ' ile Φ'nin $\mathbb{R}$'de distribüsyon anlamında türevini işaret etmek üzere,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\Phi'(x)|^2 dx = \int\limits_0^1 |\alpha'(x) f(x) + \alpha(x) f'(x)|^2 dx$$

$$+ \int\limits_{-1}^{0} |(\alpha'(-x) f(-x) + \alpha(-x) f'(-x))|^2 dx$$

$$= 2\int\limits_0^1 |\alpha'(x) f(x) + \alpha(x) f'(x)|^2 dx$$

sağlandığından $\Phi, \Phi' \in L^2(\mathbb{R})$ alırız. Ayrıca, keyfi $v \in H^{\varepsilon}(\mathbb{R})$ için

$$|\langle \Phi, v\rangle| = \left|\int\limits_0^1 \alpha(x) f(x) v(x)\,dx + \int\limits_{-1}^{0} \alpha(-x) f(-x) v(x)\,dx\right|$$

$$\leq \int\limits_0^1 |\alpha(x) f(x) v(x)|\,dx + \int\limits_0^1 |\alpha(x) f(x) v(-x)|\,dx$$

$$\leq c_0 \|f\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} \|v\|_{H^{\varepsilon}(\mathbb{R})}$$

olduğundan, $v \neq 0$, $\|v\|_{H^{\varepsilon}(\mathbb{R})} \leq 1$ üzerine supremuma geçersek

$$\|\Phi\|_{H^{-\varepsilon}(\mathbb{R})} \leq c_0 \|f\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)}$$

ve

$$|\langle \Phi', v \rangle| \leq \left| \int_0^1 (\alpha'(x) f(x) + \alpha(x) f'(x)) v(x) \, dx \right|$$

$$+ \left| \int_{-1}^0 (\alpha'(-x) f(-x) + \alpha(-x) f'(-x)) v(x) \, dx \right|$$

$$\leq \int_0^1 |(\alpha'(x) f(x) + \alpha(x) f'(x)) v(x)| \, dx$$

$$+ \int_0^1 |(\alpha'(x) f(x) + \alpha(x) f'(x)) v(-x)| \, dx$$

$$\leq c_1 \left(\|f\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} + \|f'\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} \right) \|v\|_{H^{\varepsilon}(\mathbb{R})}$$

olduğundan, yine $v \neq 0$, $\|v\|_{H^{\varepsilon}(\mathbb{R})} \leq 1$ üzerine supremuma geçerek

$$\|\Phi'\|_{H^{-\varepsilon}(\mathbb{R})} \leq c_1 \left(\|f\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} + \|f'\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} \right)$$

elde ederiz ve böylece

$$\|\Phi\|_{H^{-\varepsilon}(\mathbb{R})} + \|\Phi'\|_{H^{-\varepsilon}(\mathbb{R})} \leq c_2 \left(\|f\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} + \|f'\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} \right) \tag{3.68}$$

alırız. Diğer taraftan, Fourier dönüşümü ile

$$\|\Phi\|^2_{H^{1-\varepsilon}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left(1 + |y|^2\right)^{1-\varepsilon} |\mathcal{F}\Phi(y)|^2 \, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(1 + |y|^2\right)^{-\varepsilon} |\mathcal{F}\Phi(y)|^2 \, dy + \int_{\mathbb{R}} \left(1 + |y|^2\right)^{-\varepsilon} |y|^2 |\mathcal{F}\Phi(y)|^2 \, dy$$

$$= \|\Phi\|^2_{H^{-\varepsilon}(\mathbb{R})} + \int_{\mathbb{R}} \left(1 + |y|^2\right)^{-\varepsilon} |(iy) \mathcal{F}\Phi(y)|^2 \, dy$$

$$= \|\Phi\|^2_{H^{-\varepsilon}(\mathbb{R})} + \|\Phi'\|^2_{H^{-\varepsilon}(\mathbb{R})}$$

olduğundan

$$\|\Phi\|_{H^{1-\varepsilon}(\mathbb{R})} \leq c_3 \left(\|\Phi\|_{H^{-\varepsilon}(\mathbb{R})} + \|\Phi'\|_{H^{-\varepsilon}(\mathbb{R})} \right)$$

olup $H^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_b(\mathbb{R})$ sürekli gömülmesini dikkate alarak, (3.68) ile birlikte

$$\|\alpha f\|_{C[0,1]} \leq c_4 \left(\|f\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} + \|f'\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} \right)$$

elde ederiz. Yukarıdaki prosedürü, $\widetilde{f}(x) := \begin{cases} (1-\alpha(x)) f(x), & x \in [0,1), \\ 0 & , x > 1 \end{cases}$ olarak tanımlayıp tekrar edersek

$$\|(1-\alpha) f\|_{C[0,1]} \leq c_5 \left(\|f\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} + \|f'\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} \right)$$

sağlanır. Böylece, son iki eşitsizlikle birlikte (3.65) eşitsizliğini elde ederiz. ■

Lemma 3.2.6 *Kabul edelim ki $f \in L^\infty(0,1)$ ve $p > 2$ olsun. Bu durumda,*

$$\left| u'(t) + |u(t)|^{p-2} u(t) \right| \leq f(t), \text{ h.h.y } (0,1) \text{ 'de} \tag{3.69}$$

olacak şekilde her $u \in W^{1,1}(0,1)$ için

$$\|u\|_{C[s_0,1]} \leq \left(\frac{p}{p-2} + \|f\|_{L^\infty(0,1)} \right)^{\frac{1}{p-2}} \tag{3.70}$$

ve

$$\|u'\|_{L^\infty(s_0,1)} \leq \left(\frac{p}{p-2} + \|f\|_{L^\infty(0,1)} \right)^{\frac{p-1}{p-2}} + \|f\|_{L^\infty(0,1)} \tag{3.71}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $s_0 = 1 - \frac{\left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{1}{p-2}} - 1}{\left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} + \|f\|_{L^\infty(0,1)}}$ 'dır.

İspat. Öncelikle, (3.69)-(3.70)'e göre

$$\begin{aligned} |u'(t)| &\leq \left| u'(t) + |u(t)|^{p-2} u(t) \right| + \left| |u(t)|^{p-2} u(t) \right| \\ &\leq f(t) + |u(t)|^{p-1} \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(0,1)} + \left(\frac{p}{p-2} + \|f\|_{L^\infty(0,1)} \right)^{\frac{p-1}{p-2}}, \forall t \in (s_0, 1) \end{aligned}$$

olup (3.71) eşitsizliği elde edileceğinden, ispat için (3.70) eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. Bunun için, iki durumu inceleyeceğiz:

1.Durum. $|u(1)| \leq 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $E := \left\{ t \in [0,1) : s \in [t,1] \text{ için } |u(s)| < \left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{1}{p-2}} \right\}$ kümesi boştan farklıdır. $\alpha := \inf E$ olsun. Eğer $\alpha = 0$ ise,

$$s_0 := 1 - \frac{\left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{1}{p-2}} - 1}{\left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} + \|f\|_{L^\infty(0,1)}} > 1 - \frac{\left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{1}{p-2}}}{\left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}} = 1 - \frac{p-2}{p} = \frac{2}{p} > 0$$

olduğundan, $t_0 \leq s_0$ olacak şekilde bir $t_0 \in E$ vardır. Böylece, E'nin tanımından, $s_0 < 1$ olduğunu da göz önüne alırsak

$$|u(s)| < \left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{1}{p-2}} < \left(\frac{p}{p-2} + \|f\|_{L^\infty(0,1)}\right)^{\frac{1}{p-2}}, \forall s \in [s_0, 1]$$

sağlanır ve (3.70)'i elde ederiz. Öte yandan, eğer $\alpha \in (0,1)$ ise, E'nin tanımından ve u'nun sürekliliğinden

$$|u(\alpha)| = \left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{1}{p-2}}, \tag{3.72}$$

$$|u(t)| < \left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{1}{p-2}}, \ \forall t \in (\alpha, 1] \tag{3.73}$$

sağlanır. Böylece, (3.69) ve (3.73)'ten

$$\begin{aligned} |u'(t)| &\leq f(t) + |u(t)|^{p-1} \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(0,1)} + \left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}, \text{ h.h. } t \in (\alpha, 1) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği, (3.72) ile birlikte göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{1}{p-2}} = |u(\alpha)| &= \left| u(1) - \int_\alpha^1 u'(t)\, dt \right| \\ &\leq |u(1)| + \int_\alpha^1 |u'(t)|\, dt \\ &\leq 1 + \left(\left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} + \|f\|_{L^\infty(0,1)} \right)(1-\alpha) \end{aligned}$$

olup $\alpha \leq s_0$ alırız. Böylece, (3.73)'ten

$$\begin{aligned} |u(t)| &< \left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{1}{p-2}} \\ &< \left(\frac{p}{p-2} + \|f\|_{L^\infty(0,1)}\right)^{\frac{1}{p-2}}, \ \forall t \in [s_0, 1] \end{aligned}$$

ve dolayısıyla (3.70)'i elde ederiz.

2.Durum. Kabul edelim ki $|u(1)| > 1$ olsun. Bu durumda, $\widetilde{E} := \{t \in [0,1) : s \in (t,1]$ için $|u(s)| > 1\}$ kümesi boştan farklıdır. $\beta := \inf \widetilde{E}$ olsun. (3.69)'un her iki tarafını $(p-2)\,|u(t)|^{p-3}\, e^{(p-2)\int_0^t |u(\tau)|^{p-2} d\tau}$ ile çarparak

$$\frac{d}{dt}\left(|u(t)|^{p-2}\, e^{(p-2)\int_0^t |u(\tau)|^{p-2} d\tau} \right)$$

$$= \left((p-2) |u(t)|^{p-3} \frac{u(t)}{|u(t)|} u'(t) + (p-2) |u(t)|^{2p-4} \right) e^{(p-2) \int_0^t |u(\tau)|^{p-2} d\tau}$$

$$= (p-2) |u(t)|^{p-3} \frac{u(t)}{|u(t)|} \left(u'(t) + |u(t)|^{p-2} u(t) \right) e^{(p-2) \int_0^t |u(\tau)|^{p-2} d\tau}$$

$$\leq (p-2) |u(t)|^{p-3} e^{(p-2) \int_0^t |u(\tau)|^{p-2} d\tau} \left| u'(t) + |u(t)|^{p-2} u(t) \right|$$

$$\leq \left((p-2) |u(t)|^{p-3} e^{(p-2) \int_0^t |u(\tau)|^{p-2} d\tau} \right) f(t)$$

alırız. Bu eşitsizliği (s, T)'de integre edersek

$$|u(T)|^{p-2} \leq e^{-(p-2) \int_s^T |u(t)|^{p-2} dt} |u(s)|^{p-2}$$

$$+ (p-2) \|f\|_{L^\infty(0,1)} \int_s^T e^{-(p-2) \int_t^T |u(\tau)|^{p-2} d\tau} |u(t)|^{p-3} dt, \ \beta \leq s \leq T \leq 1 \tag{3.74}$$

elde ederiz. Şimdi, bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terimi değerlendirelim. Öncelikle, β'nın tanımından, her $t \in (\beta, 1]$ için $|u(t)| > 1$ olup her $s \in [\beta, T]$ için

$$(p-2) \int_s^T e^{-(p-2) \int_t^T |u(\tau)|^{p-2} d\tau} |u(t)|^{p-3} dt$$

$$\leq (p-2) \int_s^T e^{-(p-2) \int_t^T |u(\tau)|^{p-2} d\tau} |u(t)|^{p-2} dt$$

$$= \int_s^T \frac{d}{dt} e^{-(p-2) \int_t^T |u(\tau)|^{p-2} d\tau} dt$$

$$= 1 - e^{-(p-2) \int_s^T |u(\tau)|^{p-2} d\tau} \leq 1$$

olur. Bu eşitsizliği (3.74)'te göz önüne alırsak

$$|u(T)|^{p-2} \leq e^{-(p-2) \int_s^T |u(t)|^{p-2} dt} |u(s)|^{p-2} + \|f\|_{L^\infty(0,1)}, \ \beta \leq s \leq T \leq 1 \tag{3.75}$$

alırız. Öte yandan, $\beta \in (0, 1)$ ise, u'nun sürekliliği ve $\widetilde{E}$'nın tanımından, $u(\beta) = 1$ elde ederiz. Eğer $\beta \in (0, s_0]$ ise, (3.75)'te $s = \beta$ seçip $u(\beta) = 1$ olduğunu kullanırsak,

$$|u(T)|^{p-2} \leq e^{-(p-2) \int_\beta^T |u(t)|^{p-2} dt} + \|f\|_{L^\infty(0,1)}$$

$$\leq 1 + \|f\|_{L^\infty(0,1)}$$

$$\leq \frac{p}{p-2} + \|f\|_{L^\infty(0,1)}, \ \forall T \in [\beta, 1]$$

olup buradan (3.70)'i elde ederiz. Eğer $\beta \in (s_0, 1)$ ise, yine (3.75)'te $s = \beta$ seçip $u(\beta) = 1$ olduğunu göz önüne alarak

$$|u(T)|^{p-2} \leq 1 + \|f\|_{L^\infty(0,1)}, \forall T \in [\beta, 1]$$

alırız. 1.durumdaki prosedürü $t = 1$ yerine $t = \beta$ alıp uygularsak, $u(\beta) = 1$ olduğundan, her $t \in [s_0, \beta]$ için

$$|u(t)|^{p-2} \leq \frac{p}{p-2}$$

elde ederiz. Böylece, son iki eşitsizlikten yine (3.70)'i alırız. Eğer $\beta = 0$ ise, (3.75)'i $[0, T]$'de s'e göre integre edersek

$$T|u(T)|^{p-2} \leq \int_0^T e^{-(p-2)\int_s^T |u(t)|^{p-2}dt} |u(s)|^{p-2} ds + T\|f\|_{L^\infty(0,1)}$$

$$= \frac{1}{p-2} \int_0^T \frac{d}{ds}\left(e^{-(p-2)\int_s^T |u(t)|^{p-2}dt}\right) ds + T\|f\|_{L^\infty(0,1)}$$

$$= \frac{1}{p-2}\left(1 - e^{-(p-2)\int_0^T |u(t)|^{p-2}dt}\right) + T\|f\|_{L^\infty(0,1)}$$

$$\leq \frac{1}{p-2} + T\|f\|_{L^\infty(0,1)}$$

ve buradan her $T \in [s_0, 1]$ için, $s_0 > \frac{2}{p}$ olduğunu göz önüne alarak

$$|u(T)|^{p-2} \leq \frac{1}{T(p-2)} + \|f\|_{L^\infty(0,1)} \leq \frac{1}{s_0(p-2)} + \|f\|_{L^\infty(0,1)}$$

$$< \frac{p}{2(p-2)} + \|f\|_{L^\infty(0,1)} < \frac{p}{p-2} + \|f\|_{L^\infty(0,1)}$$

elde ederiz. Son eşitsizlikten (3.70)'i alırız. ∎

Şimdi, aşağıdaki düzgünlük ile ilgili sonucu verelim:

Lemma 3.2.7 *(3.2)-(3.3) koşullarına ek olarak,* $p < 4$ *ve* $B \subset W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$ *sınırlı küme olsun. Bu durumda,* $\omega_w(B)$ *kümesi* $W^{1,\infty}(0,1) \times W^{1,\infty}(0,1)$*'de sınırlıdır.*

İspat. Kabul edelim ki $(u_0, u_1) \in \omega_w(B)$ olsun. $\omega_w(B)$ kümesinin değişmezlik özelliğinden, Önerme 2.0.61'e göre,

$$(u(0), u_t(0)) = (u_0, u_1) \tag{3.76}$$

sağlanacak şekilde $\{(u(t), u_t(t)) : t \in \mathbb{R}\} \subset \omega(B)$ değişmez yörüngesi vardır. u fonksiyonu $(3.1)_1$ denkleminin çözümü olduğundan, (3.2)-(3.4)'ten

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{W_0^{1,p}(0,1)\times L^2(0,1)} + \int_s^t \|u_{tx}(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \le C_1,\ \forall t \ge s \tag{3.77}$$

olur ve C_1 sabiti $\omega_w(B)$ kümesine bağlı olup $\{(u(t), u_t(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ yörüngesine bağlı değildir.

Şimdi, Lemma 3.2.3'ün ispatındaki gibi $v(t) := u_t(t)$ ile işaretlersek, $(3.1)_1$'e göre, $h := \frac{\partial}{\partial x}\left(|u_x|^{p-2} u_x\right) - f(u) + g$ olmak üzere

$$v_t + \Lambda v = h \tag{3.78}$$

denklemi sağlanır. (3.58)'i elde ederken yaptığımız gibi, $\delta \in \left(0, 1 - \frac{p-2}{2p}\right]$ olmak üzere,

$$\|v(t)\|_{H^{1-\frac{p-2}{2p}-\delta}(0,1)} \le C_2\left((t-s)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{p-2}{2p}-\delta\right)} + 1\right),\ \forall t \ge s$$

ve burada $s \to -\infty$ iken limite geçersek

$$\|u_{tx}(t)\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} \le C_2,\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.79}$$

elde ederiz. Burada $\varepsilon \in \left(\frac{p-2}{2p}, 1\right]$'dir.

Benzer şekilde, $\widehat{v}(t) := v_t(t)$ ile işaretlersek, (3.78)'den

$$\widehat{v}_t + \Lambda\widehat{v} = h'$$

olup

$$\widehat{v}(t) = e^{-\Lambda(t-s)}\widehat{v}(s) + \int_s^t e^{-\Lambda(t-\tau)}h'(\tau)\,d\tau,\ \ \forall t \ge s \tag{3.80}$$

buluruz. Diğer yandan,

$$h'(t) = (p-1)\frac{\partial}{\partial x}\left(|u_x(t)|^{p-2} u_{tx}(t)\right) - f'(u(t))\,u_t(t)$$

olduğundan, keyfi $\psi \in H_0^{1+\frac{p-2}{p}}(0,1)$ için

$$|\langle h'(t), \psi\rangle|$$

$$\le (p-1)\left|\left\langle |u_x(t)|^{p-2} u_{tx}(t), \psi'\right\rangle\right| + |\langle f'(u(t))\,u_t(t), \psi\rangle|, \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.81}$$

alırız. Bu eşitsizliğin sağındaki ilk terim için, $p < 4$ olduğundan, Hölder eşitsizliği, (3.77) ve $H_0^{\frac{p-2}{p}}(0,1) \hookrightarrow L^{\frac{2p}{4-p}}(0,1)$ sürekli gömülmesinden

$$(p-1)\left|\left\langle |u_x(t)|^{p-2} u_{tx}(t), \psi'\right\rangle\right|$$

$$\leq (p-1)\left\|u_x(t)\right\|_{L^p(0,1)}^{p-2}\left\|u_{tx}(t)\right\|_{L^2(0,1)}\left\|\psi'\right\|_{L^{\frac{2p}{4-p}}(0,1)}$$

$$\leq C_3\left\|u_{tx}(t)\right\|_{L^2(0,1)}\left\|\psi'\right\|_{H_0^{\frac{p-2}{p}}(0,1)}$$

$$\leq C_3\left\|u_{tx}(t)\right\|_{L^2(0,1)}\left\|\psi\right\|_{H_0^{1+\frac{p-2}{p}}(0,1)}, \forall t\in\mathbb{R} \tag{3.82}$$

alırız. (3.81)'in sağ tarafındaki ikinci terim için de, $W_0^{1,p}(0,1)\hookrightarrow L^\infty(0,1)$ sürekli gömülmesi, (3.3) ve (3.77)'den, Hölder eşitsizliği ve $H_0^{1+\frac{p-2}{p}}(0,1)\hookrightarrow L^2(0,1)$ sürekli gömülmesine göre

$$\left|\left\langle f'(u(t))\,u_t(t),\psi\right\rangle\right|\leq C_4\left\|u_t(t)\right\|_{L^2(0,1)}\left\|\psi\right\|_{L^2(0,1)}$$

$$\leq C_5\left\|u_{tx}(t)\right\|_{L^2(0,1)}\left\|\psi\right\|_{H_0^{1+\frac{p-2}{p}}(0,1)}, \forall t\in\mathbb{R} \tag{3.83}$$

elde ederiz. (3.82)-(3.83)'ü (3.81)'de göz önüne alıp $\psi\neq 0$, $\left\|\psi\right\|_{H_0^{1+\frac{p-2}{p}}(0,1)}\leq 1$ üzerine supremuma geçersek

$$\left\|h'(t)\right\|_{H^{-1-\frac{p-2}{p}}(0,1)}\leq C_6\left\|u_{tx}(t)\right\|_{L^2(0,1)},\ \forall t\in\mathbb{R}$$

alırız. Böylece, (3.55)'i (3.80)'e uygulayıp (3.28), (3.77) ve $D\left(\Lambda^{-1}\right)\subset H^{-2}(0,1)$ olduğunu göz önüne alırsak, Hölder eşitsizliği ile,

$$\left\|\widehat{v}(t)\right\|_{H^{-\frac{p-2}{p}-\delta}(0,1)}\leq\left\|e^{-A(t-s)}\widehat{v}(s)\right\|_{H^{-\frac{p-2}{p}-\delta}(0,1)}+\int_s^t\left\|e^{-A(t-\tau)}h'(\tau)\right\|_{H^{-\frac{p-2}{p}-\delta}(0,1)}d\tau$$

$$\leq\left\|e^{-A(t-s)}\right\|_{\mathcal{L}\left(D(\Lambda^{-1}),D\left(\Lambda^{-\frac{p-2}{2p}-\frac{\delta}{2}}\right)\right)}\left\|\widehat{v}(s)\right\|_{D(\Lambda^{-1})}$$

$$+\int_s^t\left\|e^{-A(t-\tau)}\right\|_{\mathcal{L}\left(D\left(\Lambda^{-\frac{1}{2}-\frac{p-2}{2p}}\right),D\left(\Lambda^{-\frac{p-2}{2p}-\frac{\delta}{2}}\right)\right)}\left\|h'(\tau)\right\|_{D\left(\Lambda^{-\frac{1}{2}-\frac{p-2}{2p}}\right)}d\tau$$

$$\leq C_7(t-s)^{-1+\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{p}+\delta\right)}\left\|\widehat{v}(s)\right\|_{D(\Lambda^{-1})}$$

$$+C_7\int_s^t e^{-\omega(t-\tau)}(t-\tau)^{-\frac{1-\delta}{2}}\left\|u_{tx}(\tau)\right\|_{L^2(0,1)}d\tau$$

$$\leq C_7(t-s)^{-1+\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{p}+\delta\right)}\left\|u_{tt}(s)\right\|_{D(\Lambda^{-1})}$$

$$+C_7\left(\int_s^t\left\|u_{tx}(\tau)\right\|_{L^2(0,1)}^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_s^t e^{-2\omega(t-\tau)}(t-\tau)^{-(1-\delta)}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_8\left[e^{-\omega(t-s)}(t-s)^{-1+\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{p}+\delta\right)}+\left(\int_s^t e^{-2\omega(t-\tau)}(t-\tau)^{-(1-\delta)}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

alırız. Bu eşitsizliğin sağ tarafında

$$\int_s^t e^{-2\omega(t-\tau)} (t-\tau)^{-(1-\delta)} d\tau = \lim_{a\to t^-} \int_s^a e^{-2\omega(t-\tau)} (t-\tau)^{-(1-\delta)} d\tau$$

$$= \lim_{a\to t^-} \left(-\frac{1}{\delta} e^{-2\omega(t-a)} (t-a)^{\delta} + \frac{1}{\delta} e^{-2\omega(t-s)} (t-s)^{\delta} + \int_s^a \frac{2\omega}{\delta} e^{-2\omega(t-\tau)} (t-\tau)^{\delta} d\tau \right)$$

$$\leq c_\delta$$

olduğunu dikkate alırsak

$$\|\widehat{v}(t)\|_{H^{-\frac{p-2}{p}-\delta}(0,1)} \leq C_9 \left((t-s)^{-1+\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{p}+\delta\right)} + 1 \right), \forall t \geq s$$

elde ederiz. Burada $\delta \in (0,1]$ ve C_9 sabiti, önceki C_i $(i = \overline{1,8})$ sabitleri gibi, $\{(u(t), u_t(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ yörüngesinden bağımsızdır. Son eşitsizlikte $s \to -\infty$ iken limite geçersek, $\varepsilon \in \left(\frac{p-2}{p}, \frac{p-2}{p}+1\right]$ olmak üzere,

$$\|u_{tt}(t)\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} \leq C_9, \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.84}$$

buluruz.

Şimdi, $w(t,x) := u_x(t-1,x)$ ile işaretlersek, $(3.1)_1$'den, $\kappa(t,x) := u_{tt}(t-1,x) - f(u(t-1,x)) - g(x)$ olmak üzere,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(w_t(t,x) + |w(t,x)|^{p-2} w(t,x) \right) = \kappa(t,x) \tag{3.85}$$

denklemi sağlanır. $\varepsilon \in \left(\frac{p-2}{p}, \frac{1}{2}\right)$ seçersek, (3.79)'a göre $w_t \in L^\infty(\mathbb{R}; H^{-\varepsilon}(0,1))$ olur. Ayrıca, keyfi $\varphi \in H^\varepsilon(0,1)$ için, Hölder eşitsizliği, $H^\varepsilon(0,1) \hookrightarrow L^{\frac{2}{1-2\varepsilon}}(0,1)$ sürekli gömülmesi ve (3.77)'den

$$\left| \left\langle |w(t,x)|^{p-2} w(t,x), \varphi(x) \right\rangle \right| \leq \|w(t)\|^{p-1}_{L^{\frac{2}{1+2\varepsilon}(p-1)}(0,1)} \|\varphi\|_{L^{\frac{2}{1-2\varepsilon}}(0,1)}$$

$$\leq C_{10} \|u_x(t-1)\|^{p-1}_{L^p(0,1)} \|\varphi\|_{H^\varepsilon(0,1)} \leq C_{11} \|\varphi\|_{H^\varepsilon(0,1)}, \forall t \in \mathbb{R}$$

olup bu eşitsizlikte $\varphi \neq 0$, $\|\varphi\|_{H^\varepsilon(0,1)} \leq 1$ üzerine supremuma geçerek, $|w|^{p-2} w \in L^\infty(\mathbb{R}; H^{-\varepsilon}(0,1))$ alırız. Diğer yandan, (3.2)-(3.3), (3.77), (3.84) ve $W_0^{1,p}(0,1) \hookrightarrow L^\infty(0,1)$ sürekli gömülmesine göre

$$\|\kappa(t)\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} \leq C_{12} \left(\|u_{tt}(t-1)\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} + \|f(u(t-1))\|_{L^2(0,1)} + \|g\|_{L^2(0,1)} \right)$$

$$\leq C_{13}, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

olup $\kappa \in L^{\infty}(\mathbb{R}; H^{-\varepsilon}(0,1))$ elde ederiz. Böylece, Lemma 3.2.5 'i uygulayarak, (3.85)'ten, $\left(w_t + |w|^{p-2} w\right) \in L^{\infty}(\mathbb{R}; C[0,1])$ ve

$$\left|w_t(t,x) + |w(t,x)|^{p-2} w(t,x)\right| \leq \widehat{\kappa}(t), \ \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times [0,1] \tag{3.86}$$

alırız. Burada $\widehat{\kappa}(t) := \left\|w_t(t) + |w(t)|^{p-2} w(t)\right\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)} + \|\kappa(t)\|_{H^{-\varepsilon}(0,1)}$'dır. Yukarıda bahsedildiği gibi,

$$\widehat{\kappa}(t) \leq C_{14}, \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

sağlanır. O halde, Lemma 3.2.6'yı (3.86)'ya uygularsak, $s_0 \in \left(\frac{2}{p}, 1\right)$ olmak üzere, her $t \in [s_0, 1]$ için

$$|w_t(t,\cdot)| + |w(t,\cdot)| \leq C_{15}, \quad \text{h.h.y } [0,1]\text{'de}$$

olur. Son eşitsizlikte $t = 1$ seçersek, (3.76) ve $w(t,x)$'in tanımından

$$\|u_{0x}\|_{L^{\infty}(0,1)} + \|u_{1x}\|_{L^{\infty}(0,1)} \leq C_{15}$$

alırız. C_{15} sabiti (u_0, u_1)'den bağımsız olduğundan, son eşitsizlikle birlikte ispatı bitirmiş oluruz. ■

Şimdi, asimptotik kompaktlık ile ilgili sonucu verelim:

Lemma 3.2.8 *Lemma 3.2.7'nin koşulları sağlansın. Bu durumda, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B$, $t_k \to \infty$ olmak üzere, $\{S(t_k)\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ şeklindeki her dizi $W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$'de yakınsak alt diziye sahiptir.*

İspat. Lemma 3.2.3'e göre $\{S(t_k)\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$'de yakınsak alt diziye sahip olduğundan, $\{PS(t_k)\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin $W_0^{1,p}(0,1)$'de yakınsak alt diziye sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi, $u_m(t,x)$ ve $u(t,x)$ fonksiyonları Lemma 3.2.3'te ele alınan fonksiyonlar olsun. O halde, Lemma 3.2.3'ten, (3.59)'un yanısıra, $H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ uzayında

$$S(t_{k_m} - T_0)\varphi_{k_m} \underset{m\to\infty}{\rightarrow} \varphi_0 \in \omega_w(B)$$

olup (3.5)'ten

$$(u(t), u_t(t)) = S(t)\varphi_0 \ \text{ ve } u_m(t) \underset{m\to\infty}{\rightarrow} u(t) \quad H_0^1(0,1)\text{'de}, \ \forall t \geq 0 \tag{3.87}$$

alırız. (3.1) probleminde u yerine u_m yazarak, (3.2)-(3.4)'ten

$$\|u_m(t)\|_{W_0^{1,p}(0,1)} + \|u_{mt}(t)\|_{L^2(0,1)} + \int_0^t \|u_{mtx}(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \leq C_1, \ \ \forall t \geq 0 \tag{3.88}$$

elde ederiz. Ayrıca, $(3.1)_1$ denkleminde u yerine u_m yazıp elde edilen denklemi u_m ile $(0,t)\times(0,1)$'de test edersek

$$\int_0^t \|u_{mx}(\tau)\|_{L^p(0,1)}^p d\tau + \int_0^t\int_0^1 f(u_m(\tau,x))\,u_m(\tau,x)\,dxd\tau$$

$$-\int_0^t\int_0^1 g(x)\,u_m(\tau,x)\,dxd\tau = \int_0^t \|u_{mt}(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau$$

$$-\int_0^1 u_{mt}(t,x)\,u_m(t,x)\,dx + \int_0^1 u_{mt}(0,x)\,u_m(0,x)\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\|u_{mx}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2}\|u_{mx}(0)\|_{L^2(0,1)}^2, \quad \forall t\geq 0$$

alırız. Buradan, (3.88) ile birlikte, Hölder eşitsizliğinden

$$\left|\frac{1}{2}\int_0^t \|u_{mt}(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \frac{1}{p}\int_0^t \|u_{mx}(\tau)\|_{L^p(0,1)}^p d\tau\right.$$

$$\left.+\frac{1}{p}\int_0^t\int_0^1 f(u_m(\tau,x))\,u_m(\tau,x)\,dxd\tau - \frac{1}{p}\int_0^t\int_0^1 g(x)\,u_m(\tau,x)\,dxd\tau\right|$$

$$=\left|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}\right)\int_0^t \|u_{mt}(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau - \frac{1}{p}\int_0^1 u_{mt}(t,x)\,u_m(t,x)\,dx\right.$$

$$\left.+\frac{1}{p}\int_0^1 u_{mt}(0,x)\,u_m(0,x)\,dx - \frac{1}{2p}\|u_{mx}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2p}\|u_{mx}(0)\|_{L^2(0,1)}^2\right|$$

$$\leq C_2\int_0^t \|u_{mtx}(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \frac{1}{p}\|u_{mt}(t)\|_{L^2(0,1)}\|u_m(t)\|_{L^2(0,1)}$$

$$+\frac{1}{p}\|u_{mt}(0)\|_{L^2(0,1)}\|u_m(0)\|_{L^2(0,1)} + \frac{1}{2p}\left(\|u_{mx}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u_{mx}(0)\|_{L^2(0,1)}^2\right)$$

$$\leq C_3, \quad \forall t\geq 0 \tag{3.89}$$

buluruz. Benzer şekilde, $u(t,x)$ için

$$\left|\frac{1}{2}\int_0^t \|u_t(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \frac{1}{p}\int_0^t \|u_x(\tau)\|_{L^p(0,1)}^p d\tau\right.$$

$$\left.+\frac{1}{p}\int_0^t\int_0^1 f(u(\tau,x))\,u(\tau,x)\,dxd\tau - \frac{1}{p}\int_0^t\int_0^1 g(x)\,u(\tau,x)\,dxd\tau\right| \leq C_4, \quad \forall t\geq 0$$

olup (3.89) ile birlikte

$$\frac{1}{2}\int_0^t \|u_{mt}(\tau)\|^2_{L^2(0,1)}\,d\tau+\frac{1}{p}\int_0^t \|u_{mx}(\tau)\|^p_{L^p(0,1)}\,d\tau$$

$$\leq C_3-\frac{1}{p}\int_0^t\int_0^1 f(u_m(\tau,x))\,u_m(\tau,x)\,dxd\tau+\frac{1}{p}\int_0^t\int_0^1 g(x)\,u_m(\tau,x)\,dxd\tau$$

$$\leq C_3+C_4+\frac{1}{2}\int_0^t \|u_t(\tau)\|^2_{L^2(0,1)}\,d\tau+\frac{1}{p}\int_0^t \|u_x(\tau)\|^p_{L^p(0,1)}\,d\tau$$

$$+\frac{1}{p}\int_0^t\int_0^1 [f(u(\tau,x))\,u(\tau,x)-g(x)\,u(\tau,x)$$

$$-f(u_m(\tau,x))\,u_m(\tau,x)+g(x)\,u_m(\tau,x)]\,dxd\tau$$

ve buradan

$$\int_0^t E(u_m(\tau))\,d\tau\leq C_3+C_4+\int_0^t E(u(\tau))\,d\tau+\Lambda_m(t)\,,\ \ \forall t\geq 0 \tag{3.90}$$

alırız. Burada

$$\Lambda_m(t):=\frac{1}{p}\int_0^t\int_0^1 [f(u(\tau,x))\,u(\tau,x)-f(u_m(\tau,x))\,u_m(\tau,x)]\,dxd\tau$$

$$+\frac{p-1}{p}\int_0^t\int_0^1 g(x)\,(u(\tau,x)-u_m(\tau,x))\,dxd\tau$$

$$+\int_0^t\int_0^1 [F(u_m(\tau,x))-F(u(\tau,x))]\,dxd\tau$$

sağlanır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki son terim için, ortalama değer teoremi, $W_0^{1,p}(0,1)$ $\hookrightarrow L^\infty(0,1)$ sürekli gömülmesi, (3.3)-(3.4), (3.88) ve Hölder eşitsizliği ile

$$\int_0^t\int_0^1 (F(u_m(\tau,x))-F(u(\tau,x)))\,dxd\tau$$

$$\leq\int_0^1\left(\int_0^1 |f(u(\tau,x)+\tau(u_m(\tau,x)-u(\tau,x)))|\,d\tau\right)|u_m(\tau,x)-u(\tau,x)|\,dx$$

$$\leq C_5\int_0^t \|u_m(\tau)-u(\tau)\|_{L^2(0,1)}\,d\tau$$

olduğunu da göz önüne alırsak, (3.2), (3.29) ve (3.30)'dan

$$\lim_{m\to\infty} \Lambda_m(t) = 0, \ \forall t \geq 0$$

elde ederiz. (3.90)'da limite geçersek

$$\limsup_{m\to\infty} \int_0^t E(u_m(\tau))\,d\tau \leq C_6 + \int_0^t E(u(\tau))\,d\tau, \ \forall t \geq 0 \tag{3.91}$$

alırız. $\varphi_0 \in \omega_w(B)$ olduğundan, $\omega_w(B)$ kümesinin değişmezlik özelliğinden ve Lemma 3.2.7'den, $(u(t), u_t(t)) \in \omega_w(B) \subset W^{1,\infty}(0,1) \times W^{1,\infty}(0,1)$ olur. Böylece, $(3.1)_1$ denklemini u_t ile $(0,t)\times(0,1)$'de test edersek

$$E(u(t)) + \int_\tau^t \|u_{tx}(s)\|^2_{L^2(0,1)}\,ds = E(u(\tau)), \ \ 0 \leq \tau \leq t \tag{3.92}$$

enerji eşitliğini alırız. Şimdi, u_m için (3.4) enerji eşitsizliğini (3.91)'in sol tarafına uygulayıp (3.59)'u kullanırsak

$$\limsup_{m\to\infty} \int_0^t E(u_m(\tau))\,d\tau \geq \limsup_{m\to\infty} \left(\int_0^t E(u_m(t))\,d\tau + \int_0^t \int_\tau^t \|u_{mtx}(s)\|^2_{L^2(0,1)}\,ds d\tau \right)$$

$$\geq \limsup_{m\to\infty} tE(u_m(t)) + \int_0^t \int_\tau^t \|u_{tx}(s)\|^2_{L^2(0,1)}\,ds d\tau$$

ve (3.92) enerji eşitliğini (3.91)'in sağ tarafına uygularsak

$$C_6 + \int_0^t E(u(\tau))\,d\tau = C_6 + \int_0^t E(u(t))\,d\tau + \int_0^t \int_\tau^t \|u_{tx}(s)\|^2_{L^2(0,1)}\,ds d\tau$$

$$= C_6 + tE(u(t)) + \int_0^t \int_\tau^t \|u_{tx}(s)\|^2_{L^2(0,1)}\,ds d\tau$$

elde ederiz. Böylece, (3.91)'e göre

$$\limsup_{m\to\infty} tE(u_m(t)) \leq C_6 + tE(u(t))$$

eşitsizliğini ve buradan (3.59)'a göre

$$\limsup_{m\to\infty} \|u_{mx}(t)\|^p_{L^p(0,1)} = \limsup_{m\to\infty} \left(pE(u_m(t)) - \frac{p}{2} \|u_{mt}(t)\|^2_{L^2(0,1)} \right.$$

$$\left. -p \int_0^1 F(u_m(t,x))\,dx + p \int_0^1 g(x)\, u_m(t,x)\,dx \right)$$

$$\le \frac{pC_6}{t} + pE(u(t)) - \frac{p}{2}\|u_t(t)\|^2_{L^2(0,1)} - p\int_0^1 F(u(t,x))\,dx + p\int_0^1 g(x)\,u(t,x)\,dx$$

$$= \frac{pC_6}{t} + \|u_x(t)\|^p_{L^p(0,1)}, \quad \forall t > 0 \tag{3.93}$$

elde ederiz. $(3.59)_6$ ve (3.87)'den

$$\limsup_{m\to\infty}\int_0^1 \left(|u_{mx}(t,x)|^{p-2}u_{mx}(t,x) - |u_x(t,x)|^{p-2}u_x(t,x)\right)$$

$$\times(u_{mx}(t,x) - u_x(t,x))\,dx = \limsup_{m\to\infty}\int_0^1 \left(|u_{mx}(t,x)|^p - |u_{mx}(t,x)|^{p-2}u_{mx}(t,x)\,u_x(t,x)\right.$$

$$\left. - |u_x(t,x)|^{p-2}u_x(t,x)\,u_{mx}(t,x) + |u_x(t,x)|^p\right)dx$$

$$= \limsup_{m\to\infty}\left(\|u_{mx}(t)\|^p_{L^p(0,1)} - 2\|u_x(t)\|^p_{L^p(0,1)} + \|u_x(t)\|^p_{L^p(0,1)}\right)$$

$$= \limsup_{m\to\infty}\|u_{mx}(t)\|^p_{L^p(0,1)} - \|u_x(t)\|^p_{L^p(0,1)}$$

buluruz. Bu eşitlikle birlikte, (3.60) ve (3.93)'ten

$$\limsup_{m\to\infty}\|u_{mx}(t) - u_x(t)\|_{L^p(0,1)} \le C_7\limsup_{m\to\infty}\left(\|u_{mx}(t)\|^p_{L^p(0,1)} - \|u_x(t)\|^p_{L^p(0,1)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{C_8}{t^{\frac{1}{p}}}, \ \forall t > 0$$

ve buradan

$$\limsup_{k\to\infty}\limsup_{m\to\infty}\|u_{mx}(t) - u_{kx}(t)\|_{L^p(0,1)}$$

$$\le \limsup_{m\to\infty}\|u_{mx}(t) - u_x(t)\|_{L^p(0,1)} + \limsup_{k\to\infty}\|u_{kx}(t) - u_x(t)\|_{L^p(0,1)}$$

$$\le \frac{2C_8}{t^{\frac{1}{p}}}, \ \forall t > 0$$

elde ederiz. Son eşitsizlikte $t = T_0$ alıp $T_0 \to \infty$ iken limite geçersek

$$\liminf_{k\to\infty}\liminf_{m\to\infty}\|PS(t_m)\varphi_m - PS(t_k)\varphi_k\|_{W_0^{1,p}(0,1)} = 0$$

alırız. Buradan, Lemma 3.2.3'ün ispatının sonunda yapılan işlemleri tekrarlayarak, $\{PS(t_k)\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin $W_0^{1,p}(0,1)$'de yakınsak alt diziye sahip olduğunu elde ederiz. ■

Diğer taraftan, (3.4)'e göre, (3.1) problemi $W_0^{1,p}(0,1) \times L^2(0,1)$'de

$$L(u,v) = \frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{1}{p}\|u_x\|^p_{L^p(0,1)} + \int_0^1 F(u(x))\,dx - \int_0^1 g(x)\,u(x)\,dx$$

kesin Lyapunov fonksiyonuna sahiptir. Böylece, Lemma 3.2.7, Lemma 3.2.8 ve Sonuç 2.0.69'e göre Teorem 3.2.2'yi elde ederiz.

4 SINIRLI OLMAYAN BÖLGEDE YEREL SÖNÜM TERİMİNE SAHİP DOĞRUSAL OLMAYAN DALGA DENKLEMİNİN ÇEKİCİSİ

Bu bölümde, sınırlı olmayan bölgede, yerel sönüm terimine sahip, kuvvetli sönümlü doğrusal olmayan dalga denklemi için

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{txx}(t,x) - u_{xx}(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\left(|u_x(t,x)|^{p-2} u_x(t,x)\right) \\ \qquad + a(x) u_t(t,x) + f(u(t,x)) = g(x), \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \ u_t(0,x) = u_1(x), \ x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.1}$$

başlangıç değer problemini,

$$p > 2\ , \ \ g \in L^2(\mathbb{R}) \tag{4.2}$$

ve belli bir $r_0, \lambda > 0$ için,

$$a \in L^1(\mathbb{R}), \ a(\cdot) \geq 0 \ \text{ h. h. y. } \mathbb{R}\text{'de,} \tag{4.3}$$

$$a(\cdot) \geq a_0 > 0 \text{ h. h. y. } \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq r_0\}\text{'de,} \tag{4.4}$$

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \ , \ \ sf(s) \geq \lambda s^2, \ \forall s \in \mathbb{R} \text{ için} \tag{4.5}$$

koşulları altında ele alıp bu problemin zayıf çözümünün uzun zaman davranışını çekiciler vasıtasıyla inceleyeceğiz.

4.1 Zayıf Çözümün Varlığı, Tekliği ve Başlangıç Verilere Sürekli Bağımlılığı

Bu kısımda, (4.1) probleminin iyi konulmuş bir problem olduğunu, yani zayıf çözümünün varlığını, tekliğini ve başlangıç verilere sürekli bağımlı olduğunu ispatlayacağız. Öncelikle, (4.1) probleminin zayıf çözümünün tanımını verelim.

Tanım 4.1.1 *$u \in L^1(0,T; W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R}))$, $u_t \in L^1(0,T; H^1(\mathbb{R})) \cap C([0,T]; W^{-1,\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}) + H^{-1}(\mathbb{R}))$ ile $u(0,x) = u_0(x)$, $u_t(0,x) = u_1(x)$ başlangıç koşullarını ve her $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ için distribüsyon anlamında $(0,T)$'de*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u_t(t,x)v(x)dx + \int_{\mathbb{R}} u_{tx}(t,x)v'(x)dx + \int_{\mathbb{R}} u_x(t,x)v'(x)dx$$

$$+\int_{\mathbb{R}} |u_x(t,x)|^{p-2}\, u_x(t,x)v'(x)dx + \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} a\left(x\right) u\left(t,x\right) v\left(x\right) dx$$

$$+\int_{\mathbb{R}} f(u(t,x))v(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)v(x)dx$$

eşitliğini sağlayan $u\left(t,x\right)$ fonksiyonuna (4.1) probleminin $[0,T]\times\mathbb{R}$'de zayıf çözümü denir.

Bu kısımda ispatlayacağımız ana teoremi verelim.

Teorem 4.1.2 *(4.2)-(4.5) koşulları altında, her $T>0$ ve $u_0\in W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1\left(\mathbb{R}\right)$, $u_1\in L^2(\mathbb{R})$ için, (4.1) problemi, $u\in L^\infty\left(0,T;W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1\left(\mathbb{R}\right)\right)$, $u_t\in L^\infty\left(0,T;L^2\left(\mathbb{R}\right)\right)$ $\cap L^2\left(0,T;H^1\left(\mathbb{R}\right)\right)$, $u_{tt}\in L^2\left(0,T;W^{-1,\frac{p}{p-1}}\left(\mathbb{R}\right)+H^{-1}\left(\mathbb{R}\right)\right)$ ve*

$$\widetilde{E}\left(u\left(t\right)\right)+\int_s^t \left\|u_{tx}\left(\tau\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} d\tau+\int_s^t\int_{\mathbb{R}} a\left(x\right)\left|u_t\left(\tau,x\right)\right|^2 dxd\tau \leq \widetilde{E}\left(u\left(s\right)\right),\ \forall t\geq s \quad (4.6)$$

enerji eşitsizliğini sağlayacak şekilde, tek $u\left(t,x\right)$ zayıf çözümüne sahiptir. Burada $\widetilde{E}(u(t))$ $=\frac{1}{2}\left\|u_t\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\frac{1}{2}\left\|u_x\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\frac{1}{p}\left\|u_x\left(t\right)\right\|^p_{L^p(\mathbb{R})}+\int_{\mathbb{R}} F\left(u\left(t,x\right)\right)dx-\int_{\mathbb{R}} g\left(x\right)u\left(t,x\right)dx$ ve $F\left(u\right)=\int_0^u f\left(z\right)dz$ şeklinde tanımlıdır. Dahası, eğer $v\in L^\infty\left(0,T;W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1\left(\mathbb{R}\right)\right)\cap$ $W^{1,\infty}\left(0,T;L^2\left(\mathbb{R}\right)\right)\cap W^{1,2}\left(0,T;H^1\left(\mathbb{R}\right)\right)\cap W^{2,2}\left(0,T;W^{-1,\frac{p}{p-1}}\left(\mathbb{R}\right)+H^{-1}\left(\mathbb{R}\right)\right)$ fonksiyonu da (4.1) probleminin $\left(v_0,v_1\right)\in\left(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1\left(\mathbb{R}\right)\right)\times L^2\left(\mathbb{R}\right)$ başlangıç koşuluna uygun zayıf çözümü ise, bu durumda

$$\left\|u\left(t\right)-v\left(t\right)\right\|_{H^1(\mathbb{R})}+\left\|u_t\left(t\right)-v_t\left(t\right)\right\|_{H^{-1}(\mathbb{R})}$$

$$\leq C\left(T,\left\|\left(u_0,u_1\right)\right\|_{(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})},\left\|\left(v_0,v_1\right)\right\|_{(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})}\right)$$
$$\times\left(\left\|u_0-v_0\right\|_{H^1(\mathbb{R})}+\left\|u_1-v_1\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\right),\ \forall t\in[0,T] \quad (4.7)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $C:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ her bir değişkene göre azalmayan fonksiyondur.

Şimdi, Teorem 4.1.2'nin ispatını iki lemma şeklinde vereceğiz. İlk olarak, (4.1) probleminin zayıf çözümünün varlığı ile ilgili lemmayı ispatlayacağız. Bu ispatta düzgün değerlenmeler elde etmek için, önce şu yardımcı lemmayı ispatlayalım.

Lemma 4.1.3 *$u \in H^2(-n,n)$ için*

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(-n,n)} \leq C \|u\|_{H^2(-n,n)}$$

olacak şekilde n'e bağlı olmayan bir $C > 0$ sabiti vardır.

İspat. Öncelikle, Hölder eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 - |u(0)|^2 &= \int_0^t \frac{d}{dx} |u(x)|^2 dx \\ &= 2\int_0^t u(x) u_x(x) dx \\ &\leq 2 \|u\|_{L^2(-n,n)} \|u_x\|_{L^2(-n,n)}, \forall t \in (-n,n) \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq |u(0)| + \sqrt{2} \|u\|_{L^2(-n,n)}^{\frac{1}{2}} \|u_x\|_{L^2(-n,n)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(-1,1)} + \sqrt{2} \|u\|_{L^2(-n,n)}^{\frac{1}{2}} \|u_x\|_{L^2(-n,n)}^{\frac{1}{2}}, \forall t \in (-n,n) \end{aligned}$$

alırız. Buradan, $u \in H^2(-n,n)$ olduğundan $u \in H^1(-1,1)$ olup $H^1(-1,1) \hookrightarrow L^\infty(-1,1)$ sürekli gömülmesine göre

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(-n,n)} &\leq c\|u\|_{H^1(-1,1)} + \sqrt{2} \|u\|_{L^2(-n,n)}^{\frac{1}{2}} \|u_x\|_{L^2(-n,n)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c\|u\|_{H^1(-n,n)} + \sqrt{2} \|u\|_{L^2(-n,n)}^{\frac{1}{2}} \|u_x\|_{L^2(-n,n)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_1 \|u\|_{H^1(-n,n)} \end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer şekilde u_x fonksiyonu için de

$$\begin{aligned} \|u_x\|_{L^\infty(-n,n)} &\leq c\|u_x\|_{H^1(-1,1)} + \sqrt{2} \|u_x\|_{L^2(-n,n)}^{\frac{1}{2}} \|u_{xx}\|_{L^2(-n,n)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c\|u_x\|_{H^1(-n,n)} + \sqrt{2} \|u_x\|_{L^2(-n,n)}^{\frac{1}{2}} \|u_{xx}\|_{L^2(-n,n)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_1 \|u\|_{H^2(-n,n)} \end{aligned}$$

eşitsizliğini alırız. Böylece, istenen sonuç elde edilir. ■

Şimdi, zayıf çözümünün varlığı ile ilgili sonucu verelim.

Lemma 4.1.4 *(4.2)-(4.5) koşulları altında, her $T > 0$ ve $u_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$, $u_1 \in L^2(\mathbb{R})$ için, (4.1) problemi, $u \in L^\infty(0,T; W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R}))$, $u_t \in L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{R})) \cap L^2(0,T; H^1(\mathbb{R}))$, $u_{tt} \in L^2\left(0,T; W^{-1,\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}) + H^{-1}(\mathbb{R})\right)$ olacak şekilde en az bir $u(t,x)$ zayıf çözümüne sahiptir.*

İspat. İlk olarak, kesme *(cut-off)* fonksiyonları kullanarak, $(W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})) \times L^2(\mathbb{R})$ uzayında (u_0, u_1)'e yakınsak olan $\{(u_{0n}, u_{1n})\}_{n=1}^{\infty} \subset W_0^{1,p}(-2n, 2n) \times L^2(-2n, 2n)$ fonksiyon dizisini oluşturalım. Şimdi, $\zeta \in C^{\infty}(\mathbb{R}), 0 \leq \zeta(\cdot) \leq 1$ ve

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & 0 < |x| < 1 \text{ için,} \\ 0, & |x| \geq 2 \text{ için} \end{cases}$$

olacak şekilde $\zeta(\cdot)$ kesme fonksiyonu alıp

$$\zeta_n(x) = \zeta\left(\frac{x}{n}\right), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlayalım. Böylece, $0 \leq \zeta_n(\cdot) \leq 1$ ve

$$\zeta_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 < |x| < n \text{ için,} \\ 0, & |x| \geq 2n \text{ için} \end{cases}$$

sağlanır ve

$$u_{0n}(x) = u_0(x)\zeta_n(x), \ u_{1n}(x) = u_1(x)\zeta_n(x)$$

olarak tanımlarsak $(u_{0n}, u_{1n}) \in W_0^{1,p}(-2n, 2n) \times L^2(-2n, 2n)$ olur. Şimdi

$$u_{0n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_0 \quad W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})\text{'de, } u_{1n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_1 \ L^2(\mathbb{R})\text{'de} \tag{4.8}$$

olduğunu gösterelim.

$$\|u_{1n} - u_1\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |u_1(x)\zeta_n(x) - u_1(x)|^2 dx$$

$$= \int_{-n}^{n} |u_1(x)\zeta_n(x) - u_1(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}\setminus(-n,n)} |u_1(x)\zeta_n(x) - u_1(x)|^2 dx$$

$$\leq 2 \int_{\mathbb{R}\setminus(-n,n)} \left(|u_1(x)\zeta_n(x)|^2 + |u_1(x)|^2\right) dx$$

$$\leq 4 \int_{\mathbb{R}\setminus(-n,n)} |u_1(x)|^2 dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

olur. Diğer yandan,

$$\|u_{0n} - u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)\zeta_n(x) - u_0(x)|^2 dx$$

$$= \int_{-n}^{n} |u_0(x)\zeta_n(x) - u_0(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}\setminus(-n,n)} |u_0(x)\zeta_n(x) - u_0(x)|^2 dx$$

$$\leq 2 \int\limits_{\mathbb{R}\diagdown(-n,n)} \left(\left|u_0(x)\zeta_n(x)\right|^2 + \left|u_0(x)\right|^2\right) dx$$

$$\leq 4 \int\limits_{\mathbb{R}\diagdown(-n,n)} \left|u_0(x)\right|^2 dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ve

$$\|u_{0n} - u_0\|^p_{L^p(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left|u_0(x)\zeta_n(x) - u_0(x)\right|^p dx$$

$$= \int\limits_{-n}^{n} \left|u_0(x)\zeta_n(x) - u_0(x)\right|^p dx + \int\limits_{\mathbb{R}\diagdown(-n,n)} \left|u_0(x)\zeta_n(x) - u_0(x)\right|^p dx$$

$$\leq 2^{p-1} \int\limits_{\mathbb{R}\diagdown(-n,n)} \left(\left|u_0(x)\zeta_n(x)\right|^p + \left|u_0(x)\right|^p\right) dx$$

$$\leq 2^p \int\limits_{\mathbb{R}\diagdown(-n,n)} \left|u_0(x)\right|^p dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

alırız. Ayrıca

$$\left\|\frac{du_{0n}}{dx} - \frac{du_0}{dx}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$= \int\limits_{-n}^{n} \left|\frac{d}{dx}\left(u_0(x)\zeta_n(x)\right) - \frac{du_0(x)}{dx}\right|^2 dx$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}\diagdown(-n,n)} \left|\frac{d}{dx}\left(u_0(x)\zeta_n(x)\right) - \frac{du_0(x)}{dx}\right|^2 dx$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}\diagdown(-n,n)} \left|\frac{d}{dx}\left(u_0(x)\right)\zeta_n(x) + \frac{1}{n}u_0(x)\frac{d\zeta}{dx}\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{du_0(x)}{dx}\right|^2 dx$$

$$\leq 4 \int\limits_{\mathbb{R}\diagdown(-n,n)} \left(\left|\frac{d}{dx}\left(u_0(x)\right)\zeta_n(x)\right|^2 + \frac{1}{n^2}\left|u_0(x)\frac{d\zeta}{dx}\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2 + \left|\frac{du_0(x)}{dx}\right|^2\right) dx$$

$$\leq 8 \int\limits_{\mathbb{R}\diagdown(-n,n)} \left|\frac{du_0(x)}{dx}\right|^2 dx + \frac{4}{n^2} \int\limits_{\mathbb{R}\diagdown(-n,n)} \left|u_0(x)\frac{d\zeta}{dx}\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2 dx$$

$$\leq 8 \int\limits_{\mathbb{R}\diagdown(-n,n)} \left|\frac{du_0(x)}{dx}\right|^2 dx + \frac{4}{n^2}\max_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{d\zeta(x)}{dx}\right|^2 \int\limits_{\mathbb{R}\diagdown(-n,n)} \left|u_0(x)\right|^2 dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ve

$$\left\|\frac{du_{0n}}{dx} - \frac{du_0}{dx}\right\|^p_{L^p(\mathbb{R})}$$

$$= \int_{-n}^{n} \left| \frac{d}{dx} (u_0(x) \zeta_n(x)) - \frac{du_0(x)}{dx} \right|^p dx$$

$$+ \int_{\mathbb{R} \setminus (-n,n)} \left| \frac{d}{dx} (u_0(x) \zeta_n(x)) - \frac{du_0(x)}{dx} \right|^p dx$$

$$= \int_{\mathbb{R} \setminus (-n,n)} \left| \frac{d}{dx} (u_0(x)) \zeta_n(x) + \frac{1}{n} u_0(x) \frac{d\zeta}{dx} \left(\frac{x}{n} \right) - \frac{du_0(x)}{dx} \right|^p dx$$

$$\leq 2^{2p-2} \int_{\mathbb{R} \setminus (-n,n)} \left(\left| \frac{d}{dx} (u_0(x)) \zeta_n(x) \right|^p + \frac{1}{n^p} \left| u_0(x) \frac{d\zeta}{dx} \left(\frac{x}{n} \right) \right|^p + \left| \frac{du_0(x)}{dx} \right|^p \right) dx$$

$$\leq 2^{2p-1} \int_{\mathbb{R} \setminus (-n,n)} \left| \frac{du_0(x)}{dx} \right|^p dx + \frac{2^{2p-2}}{n^p} \int_{\mathbb{R} \setminus (-n,n)} \left| u_0(x) \frac{d\zeta}{dx} \left(\frac{x}{n} \right) \right|^p dx$$

$$\leq 2^{2p-1} \int_{\mathbb{R} \setminus (-n,n)} \left| \frac{du_0(x)}{dx} \right|^p dx + \frac{2^{2p-2}}{n^p} \max_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{d\zeta(x)}{dx} \right|^p \int_{\mathbb{R} \setminus (-n,n)} |u_0(x)|^p dx \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

olur. Bu yakınsamalardan (4.8)'in sağlandığını elde ederiz.

Şimdi, sınırlı bölgede

$$\begin{cases} u_{ntt}(t,x) - u_{ntxx}(t,x) - u_{nxx}(t,x) - \frac{\partial}{\partial x} \left(|u_{nx}(t,x)|^{p-2} u_{nx}(t,x) \right) \\ \qquad + a(x) u_{nt}(t,x) + f(u_n(t,x)) = g(x), \quad (t,x) \in (0,T) \times (-2n, 2n), \\ u_n(t,-2n) = u_n(t,2n) = 0, \quad t \in (0,T), \\ u_n(0,x) = u_{0n}(x), \ \ u_{nt}(0,x) = u_{1n}(x), \ x \in (-2n, 2n) \end{cases} \tag{4.9}$$

problemini ele alalım. Lemma 3.1.3'te yapıldığı gibi Galerkin yöntemiyle, (4.2)-(4.5)'e göre, (4.9) probleminin $u_n \in L^\infty\left(0,T; W_0^{1,p}(-2n,2n)\right)$, $u_{nt} \in L^\infty(0,T; L^2(-2n,2n)) \cap L^2(0,T; H_0^1(-2n,2n))$, $u_{ntt} \in L^2\left(0,T; W^{-1,\frac{p}{p-1}}(-2n,2n)\right)$ olacak şekilde,

$$\widehat{E}(u_n(t)) + \int_0^t \|u_{ntx}(\tau)\|_{L^2(-2n,2n)}^2 d\tau + \int_0^t \int_{-2n}^{2n} a(x) |u_{nt}(\tau,x)|^2 dx d\tau$$

$$\leq \widehat{E}(u_n(0)), \ \ \forall t \in [0,T] \tag{4.10}$$

eşitsizliğini sağlayan u_n zayıf çözümünün varlığı elde edilebilir. Burada $\widehat{E}(u(t)) = \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_{L^2(-2n,2n)}^2 + \frac{1}{2} \|u_x(t)\|_{L^2(-2n,2n)}^2 + \frac{1}{p} \|u_x(t)\|_{L^p(-2n,2n)}^p + \int\limits_{-2n}^{2n} F(u(t,x))\, dx - \int\limits_{-2n}^{2n} g(x) u(t,x)\, dx$'dir. Şimdi, (4.10)'dan düzgün ön değerlenme elde edelim. (4.5)'e göre, $s > 0$ ise,

$$F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau \geq \lambda \int_0^s \tau d\tau = \frac{\lambda}{2} s^2$$

eşitsizliği; $s < 0$ ise

$$F(s) = -\int_s^0 f(\tau)\,d\tau \geq -\lambda \int_s^0 \tau d\tau = \frac{\lambda}{2} s^2$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece, $F(0) = 0$ olduğunu da göz önüne alarak

$$F(s) \geq \frac{\lambda}{2} s^2, \ \forall s \in \mathbb{R}$$

olup

$$\int_{-2n}^{2n} F(u_n(t,x))\,dx \geq \frac{\lambda}{2} \|u_n(t)\|^2_{L^2(-2n,2n)}, \ \ \forall t \in [0,T] \tag{4.11}$$

eşitsizliğini buluruz. Ayrıca, yine $F(0) = 0$ ve $f(0) = 0$ olduğundan, ortalama değer teoremi, $W_0^{1,p}(-2n,2n) \hookrightarrow L^\infty(-2n,2n)$ sürekli gömülmesi ve (4.5)'e göre

$$\begin{aligned}
\int_{-2n}^{2n} F(u_n(0,x))\,dx &= \int_{-2n}^{2n} \left(\int_0^1 F'(\tau u_n(0,x))\,d\tau \right) u_n(0,x)\,dx \\
&= \int_{-2n}^{2n} \left(\int_0^1 f(\tau u_n(0,x))\,d\tau \right) u_n(0,x)\,dx \\
&\leq \int_{-2n}^{2n} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |f'(s\tau u_n(0,x))|\,ds \right) |\tau u_n(0,x)|\,d\tau \right) |u_n(0,x)|\,dx \\
&\leq C_1 \|u_n(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

alırız. Diğer yandan, Hölder ve Young eşitsizliklerini kullanarak, keyfi $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\int_{-2n}^{2n} g(x)\,u_n(t,x)\,dx &\leq \|g\|_{L^2(-2n,2n)} \|u_n(t)\|_{L^2(-2n,2n)} \\
&\leq C(\varepsilon)\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \varepsilon \|u_n(t)\|^2_{L^2(-2n,2n)}, \ \ \forall t \in [0,T]
\end{aligned} \tag{4.13}$$

elde ederiz. Dahası, yine Hölder eşitsizliğinden

$$\int_{-2n}^{2n} g(x)\,u_n(0,x)\,dx \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u_n(0)\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

sağlanır. Bu eşitsizliği, (4.11)-(4.13) ile birlikte, (4.10)'da göz önüne alırsak

$$\frac{1}{2}\|u_{nt}(t)\|^2_{L^2(-2n,2n)} + \frac{1}{2}\|u_{nx}(t)\|^2_{L^2(-2n,2n)}$$

$$+\frac{1}{p}\left\|u_{nx}(t)\right\|_{L^p(-2n,2n)}^p+\left(\frac{\lambda}{2}-\varepsilon\right)\left\|u_n(t)\right\|_{L^2(-2n,2n)}^2$$

$$+\int_0^t\left\|u_{ntx}(\tau)\right\|_{L^2(-2n,2n)}^2 d\tau+\int_0^t\int_{-2n}^{2n} a(x)\left|u_{nt}(\tau,x)\right|^2 dxd\tau$$

$$\leq\frac{1}{2}\left\|u_{nt}(0)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2+\frac{1}{2}\left\|u_{nx}(0)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2+\frac{1}{p}\left\|u_{nx}(0)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p+C_1\left\|u_n(0)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

$$+C(\varepsilon)\left\|g\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2+\left\|g\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|u_n(0)\right\|_{L^2(\mathbb{R})},\ \forall t\in[0,T]$$

olur. $\varepsilon<\frac{\lambda}{2}$ seçerek, $(4.9)_4$-$(4.9)_5$'ten

$$\left\|u_{nt}(t)\right\|_{L^2(-2n,2n)}^2+\left\|u_{nx}(t)\right\|_{L^2(-2n,2n)}^2+\left\|u_{nx}(t)\right\|_{L^p(-2n,2n)}^p+\left\|u_n(t)\right\|_{L^2(-2n,2n)}^2$$

$$+\int_0^t\left\|u_{ntx}(\tau)\right\|_{L^2(-2n,2n)}^2 d\tau+\int_0^t\int_{-2n}^{2n} a(x)\left|u_{nt}(\tau,x)\right|^2 dxd\tau$$

$$\leq C\left(\left\|(u_{0n},u_{1n})\right\|_{(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})},\left\|g\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\right),\ \forall t\in[0,T] \tag{4.14}$$

elde ederiz. Burada $C:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ her bir değişkene göre azalmayan fonksiyondur. Diğer taraftan, $\widetilde{\Lambda}:H^2(-2n,2n)\cap H_0^1(-2n,2n)\to L^2(-2n,2n)$, $\widetilde{\Lambda}\varphi=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\varphi$ özeşlenik operatörünü tanımlayalım. $(4.9)_1$ denklemini, A operatörü bir önceki bölümde tanımlanan p-Laplasyan operatörü olmak üzere,

$$u_{ntt}+\left(\widetilde{\Lambda}u_{nt}-u_{nt}\right)+\left(\widetilde{\Lambda}u_n-u_n\right)-Au_n+a(x)u_{nt}+f(u_n)=g(x)$$

şeklinde yazarak bu denklemi $\widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}$ ile $(0,t)\times(-2n,2n)$'de test edip $\widetilde{\Lambda}$ operatörünün özeşlenik olduğunu kullanırsak

$$\int_0^t\left\|\widetilde{\Lambda}^{-1}u_{ntt}(\tau)\right\|_{L^2(-2n,2n)}^2 d\tau\leq\int_0^t\left|\left\langle g,\widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau)\right\rangle\right|d\tau+\int_0^t\left|\left\langle u_{nt}(\tau),\widetilde{\Lambda}^{-1}u_{ntt}(\tau)\right\rangle\right|d\tau$$

$$+\int_0^t\left|\left\langle u_{nt}(\tau),\widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau)\right\rangle\right|d\tau+\int_0^t\left|\left\langle u_n(\tau),\widetilde{\Lambda}^{-1}u_{ntt}(\tau)\right\rangle\right|d\tau$$

$$+\int_0^t\left|\left\langle u_n(\tau),\widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau)\right\rangle\right|d\tau+\int_0^t\left|\left\langle Au_n(\tau),\widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau)\right\rangle\right|d\tau$$

$$+\int_0^t\left|\left\langle au_{nt}(\tau),\widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau)\right\rangle\right|d\tau$$

$$+\int_0^t\left|\left\langle f(u_n(\tau)),\widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau)\right\rangle\right|d\tau,\ \ \forall t\in(0,T) \tag{4.15}$$

eşitsizliğini alırız. Şimdi, bu eşitsizliğin sağ tarafını değerlendirelim. İlk terim için, Hölder eşitsizliği ve (4.2)'den

$$\int_0^t \left|\left\langle g, \widetilde{\Lambda}^{-2} u_{ntt}(\tau)\right\rangle\right| d\tau \leq \|g\|_{L^2(-2n,2n)} \int_0^t \left\|\widetilde{\Lambda}^{-2} u_{ntt}(\tau)\right\|_{L^2(-2n,2n)} d\tau$$

$$\leq C_2\sqrt{T}\left(\int_0^t \left\|\widetilde{\Lambda}^{-1} u_{ntt}(\tau)\right\|^2_{L^2(-2n,2n)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t \in (0,T) \tag{4.16}$$

olur. (4.15) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terim için, Hölder eşitsizliği ve (4.14)'ten

$$\int_0^t \left|\left\langle u_{nt}(\tau), \widetilde{\Lambda}^{-1} u_{ntt}(\tau)\right\rangle\right| d\tau \leq \int_0^t \|u_{nt}(\tau)\|_{L^2(-2n,2n)} \left\|\widetilde{\Lambda}^{-1} u_{ntt}(\tau)\right\|_{L^2(-2n,2n)} d\tau$$

$$\leq C_3\sqrt{T}\left(\int_0^t \left\|\widetilde{\Lambda}^{-1} u_{ntt}(\tau)\right\|^2_{L^2(-2n,2n)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t \in (0,T) \tag{4.17}$$

elde ederiz. (4.15) eşitsizliğinin sağ tarafındaki üçüncü terimi dikkate alırsak, Hölder eşitsizliği ve (4.14)'ten

$$\int_0^t \left|\left\langle u_{nt}(\tau), \widetilde{\Lambda}^{-2} u_{ntt}(\tau)\right\rangle\right| d\tau \leq \int_0^t \|u_{nt}(\tau)\|_{L^2(-2n,2n)} \left\|\widetilde{\Lambda}^{-2} u_{ntt}(\tau)\right\|_{L^2(-2n,2n)} d\tau$$

$$\leq C_4\sqrt{T}\left(\int_0^t \left\|\widetilde{\Lambda}^{-1} u_{ntt}(\tau)\right\|^2_{L^2(-2n,2n)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t \in (0,T) \tag{4.18}$$

alırız. (4.15) eşitsizliğinin sağ tarafındaki dördüncü terim için, Hölder eşitsizliği ve (4.14)'ten

$$\int_0^t \left|\left\langle u_n(\tau), \widetilde{\Lambda}^{-1} u_{ntt}(\tau)\right\rangle\right| d\tau \leq \int_0^t \|u_n(\tau)\|_{L^2(-2n,2n)} \left\|\widetilde{\Lambda}^{-1} u_{ntt}(\tau)\right\|_{L^2(-2n,2n)} d\tau$$

$$\leq C_5\sqrt{T}\left(\int_0^t \left\|\widetilde{\Lambda}^{-1} u_{ntt}(\tau)\right\|^2_{L^2(-2n,2n)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t \in (0,T) \tag{4.19}$$

elde ederiz. (4.15) eşitsizliğinin sağ tarafındaki beşinci terimi dikkate alırsak, Hölder eşitsizliği ve (4.14)'ten

$$\int_0^t \left|\left\langle u_n(\tau), \widetilde{\Lambda}^{-2} u_{ntt}(\tau)\right\rangle\right| d\tau \leq \int_0^t \|u_n(\tau)\|_{L^2(-2n,2n)} \left\|\widetilde{\Lambda}^{-2} u_{ntt}(\tau)\right\|_{L^2(-2n,2n)} d\tau$$

$$\leq C_6\sqrt{T}\left(\int\limits_0^t \left\|\widetilde{\Lambda}^{-1}u_{ntt}(\tau)\right\|^2_{L^2(-2n,2n)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t\in(0,T) \tag{4.20}$$

sağlanır. (4.15) eşitsizliğinin sağ tarafındaki altıncı terimi göz önüne alalım. $\widetilde{\Lambda}$ operatörünün tanımından aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını kolayca kontrol edebiliriz:

$$c_1\|u\|_{H^2(-n,n)} \leq \left\|\widetilde{\Lambda}u\right\|_{L^2(-n,n)} \leq c_2\|u\|_{H^2(-n,n)},\ \forall u\in H^2(-n,n)\cap H_0^1(-n,n) \tag{4.21}$$

Burada pozitif c_1, c_2 sabitleri n'e bağlı değildir. Hölder eşitsizliği, (4.14) ve (4.21)'den, Lemma 4.1.3'e göre

$$\int\limits_0^t \left|\left\langle Au_n(\tau), \widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau)\right\rangle\right| d\tau \leq \int\limits_0^t\int\limits_{-2n}^{2n} |u_{nx}(\tau,x)|^{p-1}\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau,x)\right)\right| dx d\tau$$

$$\leq \int\limits_0^t \|u_{nx}(\tau)\|^{p-1}_{L^p(-2n,2n)}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau)\right)\right\|_{L^p(-2n,2n)} d\tau$$

$$\leq C_7\int\limits_0^t\left(\int\limits_{-2n}^{2n}\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau,x)\right)\right|^2\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau,x)\right)\right|^{p-2} dx\right)^{\frac{1}{p}} d\tau$$

$$\leq C_7\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau)\right)\right\|^{\frac{2}{p}}_{L^2(-2n,2n)}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau)\right)\right\|^{\frac{p-2}{p}}_{L^\infty(-2n,2n)} d\tau$$

$$\leq C_8\int\limits_0^t\left\|\widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau)\right\|^{\frac{2}{p}}_{H^2(-2n,2n)}\left\|\widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau)\right\|^{\frac{p-2}{p}}_{H^2(-2n,2n)} d\tau$$

$$= C_8\int\limits_0^t\left\|\widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau)\right\|_{H^2(-2n,2n)} d\tau$$

$$\leq C_9\sqrt{T}\left(\int\limits_0^t\left\|\widetilde{\Lambda}^{-1}u_{ntt}(\tau)\right\|^2_{L^2(-2n,2n)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \forall t\in(0,T) \tag{4.22}$$

buluruz. (4.15) eşitsizliğinin sağ tarafındaki yedinci terim için, Hölder eşitsizliği ve Lemma 4.1.3'ü kullanarak, (4.3), (4.14) ve (4.21)'den

$$\int\limits_0^t\left|\left\langle au_{nt}(\tau), \widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau)\right\rangle\right| d\tau \leq \int\limits_0^t \|au_{nt}(\tau)\|_{L^1(-2n,2n)}\left\|\widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau)\right\|_{L^\infty(-2n,2n)} d\tau$$

$$\leq C_{101}\int\limits_0^t\left(\int\limits_{-2n}^{2n}\sqrt{a(x)}\sqrt{a(x)}\,|u_{nt}(\tau,x)|\,dx\right)\left\|\widetilde{\Lambda}^{-2}u_{ntt}(\tau)\right\|_{H^2(-2n,2n)} d\tau$$

$$\leq C_{11} \|a\|_{L^1(-2n,2n)}^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \left(\int\limits_{-2n}^{2n} a(x) |u_{nt}(\tau,x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \widetilde{\Lambda}^{-1} u_{ntt}(\tau) \right\|_{L^2(-2n,2n)} d\tau$$

$$\leq C_{12} \left(\int\limits_0^t \int\limits_{-2n}^{2n} a(x) |u_{nt}(\tau,x)|^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^t \left\| \widetilde{\Lambda}^{-1} u_{ntt}(\tau) \right\|_{L^2(-2n,2n)}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_{13} \left(\int\limits_0^t \left\| \widetilde{\Lambda}^{-1} u_{ntt}(\tau) \right\|_{L^2(-2n,2n)}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall t \in (0,T) \tag{4.23}$$

alırız. (4.15) eşitsizliğinin sağ tarafındaki son terim için, (4.5)'e göre, $f(0) = 0$ olduğundan, ortalama değer teoremi, Hölder eşitsizliği ve $W_0^{1,p}(-2n,2n) \hookrightarrow L^\infty(-2n,2n)$ sürekli gömülmesini kullanarak, (4.14)'ten

$$\int\limits_0^t \left| \left\langle f(u_n(\tau)), \widetilde{\Lambda}^{-2} u_{ntt}(\tau) \right\rangle \right| d\tau$$

$$= \int\limits_0^t \left| \left\langle \left(\int\limits_0^1 f'(su_n(\tau)) ds \right) u_n(\tau), \widetilde{\Lambda}^{-2} u_{ntt}(\tau) \right\rangle \right| d\tau$$

$$\leq C_{14} \int\limits_0^t \|u_n(\tau)\|_{L^2(-2n,2n)} \left\| \widetilde{\Lambda}^{-2} u_{ntt}(\tau) \right\|_{L^2(-2n,2n)} d\tau$$

$$\leq C_{15} \sqrt{T} \left(\int\limits_0^t \left\| \widetilde{\Lambda}^{-1} u_{ntt}(\tau) \right\|_{L^2(-2n,2n)}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall t \in (0,T) \tag{4.24}$$

alırız. Böylece, (4.16)-(4.20) ve (4.22)-(4.24)'ü (4.15)'te göz önüne alırsak

$$\int\limits_0^t \left\| \widetilde{\Lambda}^{-1} u_{ntt}(\tau) \right\|_{L^2(-2n,2n)}^2 d\tau$$

$$\leq C_{16} \left(1 + \sqrt{T} \right) \left(\int\limits_0^t \left\| \widetilde{\Lambda}^{-1} u_{ntt}(\tau) \right\|_{L^2(-2n,2n)}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t \in (0,T)$$

ve buradan

$$\|u_{ntt}\|_{L^2(0,T;H^{-2}(-2n,2n))} \leq C_{16} \left(1 + \sqrt{T} \right) \tag{4.25}$$

elde ederiz. Burada C_{16} sabiti n'e bağlı değildir.

Öte yandan, $u_n \in L^\infty(0,T; W_0^{1,p}(-2n,2n))$ ve $u_{nt} \in L^2(0,T; H_0^1(-2n,2n))$ olduğundan, Önerme 2.0.55'e göre $u_n \in C([0,T]; H_0^1(-2n,2n))$ olur ve böylece u_n fonksiyonunu $(0,T) \times (-2n,2n)$ kümesi dışında sıfır ile genişletebiliriz. Bu genişlemeyi de yine

u_n ile gösterirsek, (4.10)'dan

$$\widetilde{E}\left(u_n(t)\right)+\int_0^t \left\|u_{ntx}(\tau)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 d\tau$$

$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} a(x)\left|u_{nt}(t,x)\right|^2 dxd\tau \le \widetilde{E}\left(u_n(0)\right),\ \forall t\in[0,T] \tag{4.26}$$

enerji eşitsizliğini ve (4.3), $(4.9)_3$-$(4.9)_4$, (4.14) ve (4.25)'ten

$$\left\|u_{ntt}\right\|_{L^2(0,T;H^{-2}(-r,r))}+\left\|u_{nt}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))}$$

$$+\left\|u_{nt}\right\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}))}+\left\|u_n\right\|_{L^\infty(0,T;W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))}$$

$$\le \widehat{C}\left(\left\|(u_{0n},u_{1n})\right\|_{(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})},\left\|g\right\|_{L^2(\mathbb{R})},T\right),\ \forall n>\frac{r}{2}$$

sağlanır. Buradan, (4.8)'e göre $\{(u_{0n},u_{1n})\}_{n=1}^\infty$ dizisi $(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})$'de (u_0,u_1)'e yakınsak olduğundan

$$\left\|u_{ntt}\right\|_{L^2(0,T;H^{-2}(-r,r))}+\left\|u_{nt}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))}$$

$$+\left\|u_{nt}\right\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}))}+\left\|u_n\right\|_{L^\infty(0,T;W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))}$$

$$\le \widehat{\widehat{C}}\left(\left\|(u_0,u_1)\right\|_{(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})},\left\|g\right\|_{L^2(\mathbb{R})},T\right),\ \forall n>\frac{r}{2} \tag{4.27}$$

alırız. O halde, $n>\frac{r}{2}$ için $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, $\{u_{nt}\}_{n=1}^\infty$, $\{u_{ntt}\}_{n=1}^\infty$ dizileri sırasıyla $L^\infty(0,T;W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))$, $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))\cap L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}))$ ve $L^2(0,T;H^{-2}(-r,r))$'de sınırlıdır ve A'nın sınırlılığından, Banach-Alaoğlu teoremine göre zayıf ve zayıf* yakınsak alt dizileri vardır. Genelliği bozmadan bu alt dizileri de $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, $\{u_{nt}\}_{n=1}^\infty$, $\{u_{ntt}\}_{n=1}^\infty$ ile gösterirsek,

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to\infty]{w^*} u & L^\infty\left(0,T;W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R})\right)\text{'de,}\\ u_{nt} \xrightarrow[n\to\infty]{w^*} u_t & L^\infty\left(0,T;L^2(\mathbb{R})\right)\text{'de,}\\ u_{nt} \xrightarrow[n\to\infty]{w} u_t & L^2\left(0,T;H^1(\mathbb{R})\right)\text{'de,}\\ u_{ntt} \xrightarrow[n\to\infty]{w} u_{tt} & L^2\left(0,T;H^{-2}(-r,r)\right)\text{'de, } \forall r>0,\\ Au_n \xrightarrow[n\to\infty]{w^*} \chi & L^\infty\left(0,T;W^{-1,\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R})\right)\text{'de} \end{cases} \tag{4.28}$$

yakınsamaları sağlanacak şekilde $u\in L^\infty(0,T;W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\mathbb{R}))\cap W^{1,2}(0,T;H^1(\mathbb{R}))\cap W^{2,2}(0,T;H^{-2}(-r,r))$ ve $\chi\in L^\infty\left(0,T;W^{-1,\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R})\right)$ fonksiyonları vardır. Böylece, (4.27)'de önce $n\to\infty$ iken, daha sonra $r\to\infty$ iken limite geçersek

$$\left\|u_{tt}\right\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}))}+\left\|u_t\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))}$$

$$+\left\|u_t\right\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}))}+\left\|u\right\|_{L^\infty(0,T;W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))}$$
$$\leq \widehat{\widehat{C}}\left(\left\|(u_0,u_1)\right\|_{(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})},\left\|g\right\|_{L^2(\mathbb{R})},T\right) \tag{4.29}$$

elde ederiz.

Şimdi, u fonksiyonunun (4.1) probleminin zayıf çözümü olduğunu görelim. (3.29)-(3.30)'u elde ederken yaptığımız işlemleri tekrarlayarak, (4.5), (4.27), $(4.28)_1$-$(4.28)_2$ ve (4.29)'dan, $L^2\left((0,T)\times(-r,r)\right)$ uzayında

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \tag{4.30}$$

ve $L^2\left((0,T)\times(-r,r)\right)$ uzayında

$$f\left(u_n\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f\left(u\right) \tag{4.31}$$

alırız. Keyfi $v\in W_0^{1,p}\left(-r,r\right)$ için

$$\frac{d}{dt}\left\langle u_{nt}\left(t\right),v\right\rangle-\left\langle u_{ntxx}\left(t\right),v\right\rangle-\left\langle u_{nxx}\left(t\right),v\right\rangle+\left\langle Au_n\left(t\right),v\right\rangle$$
$$+\frac{d}{dt}\left\langle au_n\left(t\right),v\right\rangle+\left\langle f\left(u_n\left(t\right)\right),v\right\rangle=\left\langle g,v\right\rangle$$

denkleminde (4.28) ve (4.31) yakınsamalarını kullanarak, $n\to\infty$ iken limite geçersek

$$\frac{d}{dt}\left\langle u_t\left(t\right),v\right\rangle-\left\langle u_{txx}\left(t\right),v\right\rangle-\left\langle u_{xx}\left(t\right),v\right\rangle+\left\langle \chi\left(t\right),v\right\rangle$$
$$+\frac{d}{dt}\left\langle au\left(t\right),v\right\rangle+\left\langle f\left(u\left(t\right)\right),v\right\rangle=\left\langle g,v\right\rangle \tag{4.32}$$

elde ederiz. İspatın başında tanımladığımız ζ kesme fonksiyonu yardımıyla

$$\zeta_{r_m}\left(x\right)=\zeta\left(\frac{2x}{r_m}\right)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Keyfi $v\in W^{1,p}\left(\mathbb{R}\right)\cap H^1\left(\mathbb{R}\right)$ için $v_{r_m}\left(x\right)=v\left(x\right)\zeta_{r_m}\left(x\right)$ şeklinde tanımlarsak, ispatın başında gösterdiğimiz gibi, $W^{1,p}\left(\mathbb{R}\right)\cap H^1\left(\mathbb{R}\right)$ uzayında

$$v_{r_m} \underset{r_m\to\infty}{\longrightarrow} v$$

sağlanır. $v_{r_m}\in W_0^{1,p}\left(-r_m,r_m\right)$ olduğundan (4.32) denklemini $\{v_{r_m}\}$ dizisi için yazıp $m\to\infty$ iken limite geçersek, her $v\in W^{1,p}\left(\mathbb{R}\right)\cap H^1\left(\mathbb{R}\right)$ için

$$\frac{d}{dt}\left\langle u_t\left(t\right),v\right\rangle-\left\langle u_{txx}\left(t\right),v\right\rangle-\left\langle u_{xx}\left(t\right),v\right\rangle+\left\langle \chi\left(t\right),v\right\rangle$$
$$+\frac{d}{dt}\left\langle au\left(t\right),v\right\rangle+\left\langle f\left(u\left(t\right)\right),v\right\rangle=\left\langle g,v\right\rangle$$

alırız. Böylece, $u_{tt} \in L^2\left(0,T;W^{-1,\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R})+H^{-1}(\mathbb{R})\right)$ olduğunu ve $L^2\left(0,T;W^{-1,\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R})\right.$ $\left.+H^{-1}(\mathbb{R})\right)$ uzayında

$$u_{tt}-u_{txx}-u_{xx}+\chi+a(x)u_t+f(u)=g \tag{4.33}$$

eşitliğinin sağlandığını elde ederiz. Buradan, u fonksiyonunun $(4.1)_1$ denklemini çözdüğünü göstermek için, $\chi = Au$ olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak, Önerme 2.0.55'e göre, $u \in L^\infty(0,T;W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))$, $u_t \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}))$ olduğundan $u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ olduğunu ve $u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$, $u_{tt} \in L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}))$ olduğundan $u_t \in C([0,T];H^{-1}(\mathbb{R}))$ olduğunu göz önüne alalım. Bu durumda, Lemma 2.0.56'ya göre, $u \in C_s(0,T;W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))$ ve $u_t \in C_s(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ olduğunu elde ederiz. Böylece, ζ ile ispata başlarken tanımladığımız kesme fonksiyonunu almak üzere, $\zeta_r(x)=\zeta\left(\frac{x}{r}\right)$ için, $(4.9)_1$ denklemini $\zeta_r u_n(t)$ fonksiyonuyla $(0,T)\times\mathbb{R}$'de test edersek, (4.3)'ü de göz önüne alarak

$$\int_0^T \langle Au_n(t),\zeta_r u_n(t)\rangle\,dt$$

$$=\langle u_{nt}(0),\zeta_r u_n(0)\rangle-\langle u_{nt}(T),\zeta_r u_n(T)\rangle+\int_0^T\left\|\sqrt{\zeta_r}u_{nt}(t)\right\|^2_{L^2(-2r,2r)}dt$$

$$-\int_0^T\langle u_{ntx}(t),\zeta_r' u_n(t)\rangle\,dt-\frac{1}{2}\left\|\sqrt{\zeta_r}u_{nx}(T)\right\|^2_{L^2(-2r,2r)}+\frac{1}{2}\left\|\sqrt{\zeta_r}u_{nx}(0)\right\|^2_{L^2(-2r,2r)}$$

$$-\int_0^T\langle u_{nx}(t),\zeta_r' u_n(t)\rangle\,dt-\int_0^T\left\|\sqrt{\zeta_r}u_{nx}(t)\right\|^2_{L^2(-2r,2r)}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-2r}^{2r}a(x)\zeta_r(x)\left|u_n(T,x)\right|^2dx+\frac{1}{2}\int_{-2r}^{2r}a(x)\zeta_r(x)\left|u_n(0,x)\right|^2dx$$

$$-\int_0^T\langle f(u_n(t)),\zeta_r u_n(t)\rangle\,dt+\int_0^T\langle g,\zeta_r u_n(t)\rangle\,dt$$

olur ve bu eşitliğin sağ tarafındaki dokuzuncu terim için, ortalama değer teoremi, (4.3), (4.27), (4.29), $W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ ve $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ sürekli gömülmelerine göre

$$-\frac{1}{2}\int_{-2r}^{2r}a(x)\zeta_r(x)\left(\left|u_n(T,x)\right|^2-\left|u(T,x)\right|^2\right)dx$$

$$\leq \int_{-2r}^{2r} a(x)\,\zeta_r(x)\left(\int_0^1 |u(T,x)+\tau(u_n(T,x)-u(T,x))|\,d\tau\right)|u_n(T,x)-u(T,x)|\,dx$$

$$\leq C_{18}\,\|a\|_{L^1(\mathbb{R})}\,\|u_n(T)-u(T)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_{19}\,\|u_n(T)-u(T)\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

olduğundan, (3.33), (4.30), (4.31)'i elde ederken yaptığımız işlemleri de dikkate alırsak, (4.28)'den

$$\limsup_{n\to\infty}\int_0^T \langle Au_n(t)\,,\zeta_r u_n(t)\rangle\,dt$$

$$\leq \langle u_t(0)\,,\zeta_r u(0)\rangle - \langle u_t(T)\,,\zeta_r u(T)\rangle + \int_0^T \left\|\sqrt{\zeta_r}u_t(t)\right\|^2_{L^2(-2r,2r)}dt$$

$$-\int_0^T \langle u_{tx}(t)\,,\zeta_r' u(t)\rangle\,dt - \frac{1}{2}\left\|\sqrt{\zeta_r}u_x(T)\right\|^2_{L^2(-2r,2r)} + \frac{1}{2}\left\|\sqrt{\zeta_r}u_x(0)\right\|^2_{L^2(-2r,2r)}$$

$$-\int_0^T \langle u_x(t)\,,\zeta_r' u(t)\rangle\,dt - \int_0^T \left\|\sqrt{\zeta_r}u_x(t)\right\|^2_{L^2(-2r,2r)}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-2r}^{2r} a(x)\,\zeta_r(x)\,|u(T,x)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{-2r}^{2r} a(x)\,\zeta_r(x)\,|u(0,x)|^2\,dx$$

$$-\int_0^T \langle f(u(t)),\zeta_r u(t)\rangle\,dt + \int_0^T \langle g,\zeta_r u(t)\rangle\,dt \qquad (4.34)$$

alırız. Diğer yandan, (4.33) denklemini $\zeta_r u$ ile $(0,T)\times\mathbb{R}$'de test ederek

$$\int_0^T \langle \chi(t)\,,\zeta_r u(t)\rangle\,dt$$

$$= \langle u_t(0)\,,\zeta_r u(0)\rangle - \langle u_t(T)\,,\zeta_r u(T)\rangle + \int_0^T \left\|\sqrt{\zeta_r}u_t(t)\right\|^2_{L^2(-2r,2r)}dt$$

$$-\int_0^T \langle u_{tx}(t)\,,\zeta_r' u(t)\rangle\,dt - \frac{1}{2}\left\|\sqrt{\zeta_r}u_x(T)\right\|^2_{L^2(-2r,2r)} + \frac{1}{2}\left\|\sqrt{\zeta_r}u_x(0)\right\|^2_{L^2(-2r,2r)}$$

$$-\int_0^T \langle u_x(t)\,,\zeta_r' u(t)\rangle\,dt - \int_0^T \left\|\sqrt{\zeta_r}u_x(t)\right\|^2_{L^2(-2r,2r)}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-2r}^{2r} a(x)\,\zeta_r(x)\,|u(T,x)|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{-2r}^{2r} a(x)\,\zeta_r(x)\,|u(0,x)|^2\,dx$$

$$-\int_0^T \langle f(u(t)),\zeta_r u(t)\rangle\,dt+\int_0^T \langle g,\zeta_r u(t)\rangle\,dt \tag{4.35}$$

buluruz. (4.34)-(4.35)'ten

$$\limsup_{n\to\infty}\int_0^T \langle Au_n(t),\zeta_r u_n(t)\rangle\,dt\le\int_0^T \langle \chi(t),\zeta_r u(t)\rangle\,dt$$

olur. Böylece, (4.28)'e göre

$$\limsup_{n\to\infty}\int_0^T \langle Au_n(t)-Au(t),\zeta_r(u_n(t)-u(t))\rangle\,dt$$

$$=\limsup_{n\to\infty}\Bigg(\int_0^T \langle Au_n(t),\zeta_r u_n(t)\rangle\,dt-\int_0^T \langle Au_n(t),\zeta_r u(t)\rangle\,dt$$

$$-\int_0^T \langle Au(t),\zeta_r u_n(t)\rangle\,dt+\int_0^T \langle Au(t),\zeta_r u(t)\rangle\,dt\Bigg)$$

$$\le\int_0^T \langle \chi(t),\zeta_r u(t)\rangle\,dt-\int_0^T \langle \chi(t),\zeta_r u(t)\rangle\,dt$$

$$-\int_0^T \langle Au(t),\zeta_r u(t)\rangle\,dt+\int_0^T \langle Au(t),\zeta_r u(t)\rangle\,dt=0 \tag{4.36}$$

alırız. Diğer yandan,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_0^T \langle Au_n(t)-Au(t),\zeta_r(u_n(t)-u(t))\rangle\,dt$$

$$=\limsup_{n\to\infty}\int_0^T \left\langle |u_{nx}(t)|^{p-2}u_{nx}(t)-|u_x(t)|^{p-2}u_x(t),\zeta_r'(u_n(t)-u(t))\right\rangle dt$$

$$+\limsup_{n\to\infty}\int_0^T \left\langle |u_{nx}(t)|^{p-2}u_{nx}(t)-|u_x(t)|^{p-2}u_x(t),\zeta_r(u_{nx}(t)-u_x(t))\right\rangle dt \tag{4.37}$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim için, ortalama değer teoremi ve Hölder eşitsizliği ile (4.27) ve (4.29)'dan

$$\int_0^T \left\langle |u_{nx}(t)|^{p-2}u_{nx}(t)-|u_x(t)|^{p-2}u_x(t),\zeta_r'(u_n(t)-u(t))\right\rangle dt$$

$$= \int_0^T \left\langle \left(\int_0^1 |u_x(t) + \tau (u_{nx}(t) - u_x(t))|^{p-2} d\tau \right) (u_{nx}(t) - u_x(t)), \zeta_r' (u_n(t) - u(t)) \right\rangle dt$$

$$\leq \frac{C_{18}}{r} \int_0^T \left\langle \left(|u_x(t)|^{p-2} + |u_{nx}(t)|^{p-2} \right) |u_{nx}(t) - u_x(t)|, \zeta' \left(\frac{x}{r} \right) |u_n(t) - u(t)| \right\rangle dt$$

$$\leq \frac{C_{19}}{r} \int_0^T \|u_{mx}(t) - u_{nx}(t)\|_{L^p((-2r,2r)\setminus(-r,r))}$$

$$\times \|u_m(t) - u_n(t)\|_{L^p((-2r,2r)\setminus(-r,r))} dt$$

$$\leq \frac{C_{20}}{r} \int_0^T \|u_m(t) - u_n(t)\|_{L^p((-2r,2r)\setminus(-r,r))} dt, \ \forall T \geq 1$$

olduğundan, $(4.28)_1$-$(4.28)_2$ ve Önerme 2.0.55'e göre, $L^2(0,T; L^p((-2r,2r)\setminus(-r,r))$ uzayında

$$u_m \underset{m\to\infty}{\to} u$$

yakınsamasının sağlandığını göz önüne alarak,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^T \left\langle |u_{nx}(t)|^{p-2} u_{nx}(t) - |u_x(t)|^{p-2} u_x(t), \zeta_r' (u_n(t) - u(t)) \right\rangle dt = 0$$

alırız. Böylece, (3.60) eşitsizliğini de (4.37)'de göz önüne alarak

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^T \langle Au_n(t) - Au(t), \zeta_r (u_n(t) - u(t)) \rangle dt$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \int_0^T \left\langle |u_{nx}(t)|^{p-2} u_{nx}(t) - |u_x(t)|^{p-2} u_x(t), \zeta_r (u_{nx}(t) - u_x(t)) \right\rangle dt$$

$$\geq c \limsup_{n\to\infty} \int_0^T \|u_{nx}(t) - u_x(t)\|_{L^p(-r,r)}^p dt$$

elde ederiz. Buradan, (4.36)'ya göre, $L^p(0,T; L^p(-r,r))$ uzayında

$$u_{nx} \underset{n\to\infty}{\to} u_x$$

ve dolayısıyla $L^{\frac{p}{p-1}}\left(0,T; W^{-1,\frac{p}{p-1}}(-r,r)\right)$ uzayında

$$Au_n \underset{n\to\infty}{\to} Au$$

sağlanır. Böylece, $L^{\frac{p}{p-1}}\left(0,T;W^{-1,\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R})\right)$ uzayında $\chi = Au$ olur. Sonuç olarak, u fonksiyonu $(4.1)_1$ denklemini çözer.

Şimdi, u fonksiyonunun başlangıç koşullarını sağladığını görelim. $(4.28)_1$-$(4.28)_4$'ten, $C\left([0,T]\,;\,L^2(\mathbb{R})\times\left(W^{-1,\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R})+H^{-1}(\mathbb{R})\right)\right)$ uzayında

$$(u_n,u_{nt})\underset{n\to\infty}{\to}(u,u_t)$$

olur ve özel olarak $L^2(\mathbb{R})\times\left(W^{-1,\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R})+H^{-1}(\mathbb{R})\right)$ uzayında

$$(u_{0n},u_{1n})\underset{n\to\infty}{\to}(u(0),u_t(0))$$

yakınsamasını alırız. Buradan, (4.8)'i dikkate alırsak, $(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})\hookrightarrow L^2(\mathbb{R})\times\left(W^{-1,\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R})+H^{-1}(\mathbb{R})\right)$ sürekli gömülmesinden, $(u(0),u_t(0)) = (u_0,u_1)$ alırız. Böylece, u fonksiyonu $(4.1)_3$ başlangıç koşulunu sağlar. Yani u fonksiyonu (4.1) probleminin zayıf çözümüdür. ■

Şimdi, zayıf çözümün başlangıç verilere sürekli bağımlı olduğunu gösterelim.

Lemma 4.1.5 *(4.2)-(4.5) koşulları altında, (4.1) probleminin zayıf çözümü başlangıç verilere sürekli bağımlıdır ve tektir.*

İspat. Öncelikle, $u,v\in L^\infty(0,T;W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\mathbb{R}))\cap W^{1,2}(0,T;H^1(\mathbb{R}))$ $\cap W^{2,2}(0,T;W^{-1,\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R})+H^{-1}(\mathbb{R}))$ fonksiyonları, (4.1) probleminin, sırasıyla (u_0,u_1), $(v_0,v_1)\in(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})$ başlangıç koşullarına uygun zayıf çözümleri olmak üzere, $w(t)=u(t)-v(t)$ ile gösterelim. Bu durumda,

$$\begin{cases} w_{tt}(t,x)-w_{txx}(t,x)-w_{xx}(t,x) \\ \quad -\frac{\partial}{\partial x}\left(|u_x(t,x)|^{p-2}u_x(t,x)-|v_x(t,x)|^{p-2}v_x(t,x)\right) \\ \quad +a(x)w_t(t,x)+f(u(t,x))-f(v(t,x))=0,\ \ (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}, \\ w(0,x)=u_0(x)\ -v_0(x),\ \ w_t(0,x)=u_1(x)-v_1(x),\quad x\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{4.38}$$

problemini alırız. $(4.38)_1$ denklemini, δw ile çarpıp $\mathbb{R}$'de integre edersek, kısmi integrasyonla

$$\frac{d}{dt}\left(\delta\int_{\mathbb{R}}w_t(t,x)\,w(t,x)\,dx+\frac{\delta}{2}\|w_x(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}}a(x)\,|w(t,x)|^2\,dx\right)$$

$$+\delta\|w_x(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\delta\int_{\mathbb{R}}\left(|u_x(t,x)|^{p-2}u_x(t,x)-|v_x(t,x)|^{p-2}v_x(t,x)\right)w_x(t,x)\,dx$$

$$= \delta \left\| w_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \delta \int_{\mathbb{R}} \left(f\left(u\left(t,x\right)\right) - f\left(v\left(t,x\right)\right)\right) w\left(t,x\right) dx, \;\; \forall t \in [0,T] \qquad (4.39)$$

elde ederiz. İlk olarak, bu denklemin sol tarafındaki üçüncü terim için (3.38)'i kullanırsak

$$\delta \int_{\mathbb{R}} \left(\left|u_x(t,x)\right|^{p-2} u_x(t,x) - \left|v_x(t,x)\right|^{p-2} v_x(t,x) \right) w_x(t,x)\, dx$$

$$\geq \frac{\delta}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\left|u_x(t,x)\right|^{p-2} + \left|v_x(t,x)\right|^{p-2} \right) \left|w_x(t,x)\right|^2 dx, \;\; \forall t \in [0,T] \qquad (4.40)$$

sağlanır. Öte yandan, (4.39)'un sağ tarafındaki ikinci terimi göz önüne alırsak, ortalama değer teoremine göre, (4.5), (4.29) ve $W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ sürekli gömülmesinden

$$-\delta \int_{\mathbb{R}} \left(f\left(u\left(t,x\right)\right) - f\left(v\left(t,x\right)\right)\right) w\left(t,x\right) dx$$

$$\leq \delta \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \left| f'\left(v(t,x) + \tau\left(u(t,x) - v(t,x)\right)\right)\right| d\tau \right) \left|w(t,x)\right|^2 dx$$

$$\leq C_1 \left\| w(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \;\; \forall t \in [0,T]$$

olur. Bu eşitsizlikle birlikte (4.40)'ı (4.39)'da göz önüne alırsak

$$\frac{d}{dt} \left(\delta \int_{\mathbb{R}} w_t(t,x)\, w(t,x)\, dx + \frac{\delta}{2} \left\| w_x(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{\delta}{2} \int_{\mathbb{R}} a(x) \left|w(t,x)\right|^2 dx \right)$$

$$+\delta \left\| w_x(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{\delta}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\left|u_x(t,x)\right|^{p-2} + \left|v_x(t,x)\right|^{p-2} \right) \left|w_x(t,x)\right|^2 dx$$

$$\leq \delta \left\| w_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + C_1 \left\| w(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \;\; \forall t \in [0,T] \qquad (4.41)$$

elde ederiz. Şimdi, $(4.38)_1$ denklemini, $\widetilde{\Lambda}$ operatörü Lemma 4.1.4'te tanımlanan özeşlenik operatör olmak üzere,

$$w_{tt} + \left(\widetilde{\Lambda} w_t - w_t \right) + \left(\widetilde{\Lambda} w - w \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left|u_x\right|^{p-2} u_x - \left|v_x\right|^{p-2} v_x \right)$$

$$+a(x)\, w_t + f(u) - f(v) = 0$$

şeklinde yazalım. Bu denklemi, $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2} - \frac{p-2}{2p}\right)$ olmak üzere, $\widetilde{\Lambda}^{-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)} w_t$ ile $\mathbb{R}$'de test edersek, $\widetilde{\Lambda}$ operatörünün özeşlenikliğinden

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)} w_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{2} \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)\right)} w(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right)$$

$$+\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)\right)}w_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$=\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\left\langle\widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w(t),\widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right\rangle$$

$$-\left\langle\left(|u_x(t)|^{p-2}u_x(t)-|v_x(t)|^{p-2}v_x(t)\right),\frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{\Lambda}^{-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right)\right\rangle$$

$$-\left\langle aw_t(t),\widetilde{\Lambda}^{-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right\rangle$$

$$-\left\langle f(u(t))-f(v(t)),\widetilde{\Lambda}^{-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right\rangle,\ \forall t\in[0,T] \tag{4.42}$$

sağlanır. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terimi değerlendirelim. Hölder ve Young eşitsizliklerinden

$$\left\langle\widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w(t),\widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right\rangle$$

$$\le\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\le C_2\left(\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right),\ \forall t\in[0,T] \tag{4.43}$$

elde ederiz. (4.42)'nin sağ tarafındaki üçüncü terimi değerlendirelim. İnterpolasyon ve Young eşitsizliğinden, keyfi $\mu>0$ için

$$\|w_t(t)\|^2_{H^{1-\frac{p-2}{2p}-2\varepsilon}(\mathbb{R})}\le C_3\|w_t(t)\|^{2(1-\varepsilon)}_{H^{1-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}(\mathbb{R})}\|w_t(t)\|^{2\varepsilon}_{H^{-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}(\mathbb{R})}$$

$$\le C_4\left(\mu\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)\right)}w_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+C(\mu)\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right),\ \forall t\in[0,T]$$

olduğundan, $\widetilde{\Lambda}$'nin özeşlenikliği, Hölder, Young eşitsizliği ve ortalama değer teoremini kullanarak, (4.29) ve $L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R})\hookrightarrow H^{-\frac{p-2}{2p}}(\mathbb{R})$ sürekli gömülmesinden, keyfi $\beta>0$ için

$$-\left\langle\left(|u_x(t)|^{p-2}u_x(t)-|v_x(t)|^{p-2}v_x(t)\right),\frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{\Lambda}^{-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right)\right\rangle$$

$$=-\left\langle\widetilde{\Lambda}^{-\frac{p-2}{4p}}\left(|u_x(t)|^{p-2}u_x(t)-|v_x(t)|^{p-2}v_x(t)\right),\widetilde{\Lambda}^{\frac{p-2}{4p}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{B}^{-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right)\right)\right\rangle$$

$$\le\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{p-2}{4p}}\left(|u_x(t)|^{p-2}u_x(t)-|v_x(t)|^{p-2}v_x(t)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\times\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{p-2}{4p}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{\Lambda}^{-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$=\left\||u_x(t)|^{p-2}u_x(t)-|v_x(t)|^{p-2}v_x(t)\right\|_{H^{-\frac{p-2}{2p}}(\mathbb{R})}\|w_t(t)\|_{H^{1-\frac{p-2}{2p}-2\varepsilon}(\mathbb{R})}$$

$$\le C_5\left\||u_x(t)|^{p-2}u_x(t)-|v_x(t)|^{p-2}v_x(t)\right\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R})}\|w_t(t)\|_{H^{1-\frac{p-2}{2p}-2\varepsilon}(\mathbb{R})}$$

$$=C_5(p-1)\left\|\left(\int_0^1|v_x(t)+\tau(u_x(t)-v_x(t))|^{p-2}d\tau\right)w_x(t)\right\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R})}\|w_t(t)\|_{H^{1-\frac{p-2}{2p}-2\varepsilon}(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_6 \left\| \left(|u_x(t)|^{p-2} + |v_x(t)|^{p-2} \right) w_x(t) \right\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R})} \|w_t(t)\|_{H^{1-\frac{p-2}{2p}-2\varepsilon}(\mathbb{R})}$$

$$= C_6 \left(\int_{\mathbb{R}} \left(|u_x(t,x)|^{p-2} + |v_x(t,x)|^{p-2} \right)^{\frac{p}{2(p-1)}} \right.$$

$$\left. \times \left(|u_x(t,x)|^{p-2} + |v_x(t,x)|^{p-2} \right)^{\frac{p}{2(p-1)}} |w_x(t,x)|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \|w_t(t)\|_{H^{1-\frac{p-2}{2p}-2\varepsilon}(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_7 \left(\int_{\mathbb{R}} \left(|u_x(t)|^p + |v_x(t)|^p \right) dx \right)^{\frac{p-2}{2p}}$$

$$\times \left(\int_{\mathbb{R}} \left(|u_x(t,x)|^{p-2} + |v_x(t,x)|^{p-2} \right) |w_x(t,x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|w_t(t)\|_{H^{1-\frac{p-2}{2p}-2\varepsilon}(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_8 \left(\beta \int_{\mathbb{R}} \left(|u_x(t,x)|^{p-2} + |v_x(t,x)|^{p-2} \right) |w_x(t,x)|^2 dx + C(\beta) \|w_t(t)\|^2_{H^{1-\frac{p-2}{2p}-2\varepsilon}(\mathbb{R})} \right)$$

$$\leq C_8 \left(\beta \int_{\mathbb{R}} \left(|u_x(t,x)|^{p-2} + |v_x(t,x)|^{p-2} \right) |w_x(t,x)|^2 dx \right.$$

$$+ \mu C(\beta) \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)\right)} w_t(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\left. + \widehat{C}(\mu,\beta) \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)} w_t(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right), \quad \forall t \in [0,T] \tag{4.44}$$

elde ederiz. (4.42) eşitsizliğinin sağındaki dördüncü terim için, interpolasyon ve Young eşitsizliğinden

$$\|w_t(t)\|^2_{H^{1-2\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}(\mathbb{R})} \leq C_9 \|w_t(t)\|^{2\left(1-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)\right)}_{H^{1-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}(\mathbb{R})} \|w_t(t)\|^{2\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}_{H^{-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}L^2(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_9 \left(\mu \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)\right)} w_t(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + C(\mu) \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)} w_t(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right), \forall t \in [0,T]$$

sağlandığından, Hölder ve Young eşitsizliği, (4.3), (4.29), $H^{1-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ ve $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ sürekli gömülmelerine göre

$$-\left\langle a w_t(t), \widetilde{\Lambda}^{-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)} w_t(t) \right\rangle$$

$$\leq \|a\|_{L^1(\mathbb{R})} \|w_t(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)} w_t(t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_{10} \|w_t(t)\|_{H^{1-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}(\mathbb{R})} \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)} w_t(t) \right\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_{10} \left(\beta \|w_t(t)\|^2_{H^{1-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}(\mathbb{R})} + C(\beta) \|w_t(t)\|^2_{H^{1-2\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}(\mathbb{R})} \right)$$

$$\leq C_{11}\left(\beta\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)\right)}w_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\mu C(\beta)\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)\right)}w_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right.$$

$$\left.+\widehat{C}(\mu,\beta)\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right),\ \forall t\in[0,T] \tag{4.45}$$

alırız. (4.42)'nin sağındaki son terimi ele alalım. Hölder ve Young eşitsizlikleri ile ortalama değer teoremi, (4.5), (4.29), $W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R})\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ sürekli gömülmesini kullanarak

$$-\left\langle f(u(t))-f(v(t)),\widetilde{\Lambda}^{-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right\rangle$$

$$\leq\|f(u(t))-f(v(t))\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\leq\left\|\left(\int_0^1|f'(v(t)+\tau(u(t)-v(t)))|\,d\tau\right)w(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_{12}\|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_{13}\left(\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right),\ \forall t\in[0,T] \tag{4.46}$$

elde ederiz. (4.42)'de (4.43)-(4.46)'yı kullanırsak

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\frac{1}{2}\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)\right)}w(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right)$$

$$+\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)\right)}w_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_{14}\left(\beta\int_{\mathbb{R}}\left(|u_x(t,x)|^{p-2}+|v_x(t,x)|^{p-2}\right)|w_x(t,x)|^2\,dx\right.$$

$$+(\mu C(\beta)+\beta)\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)\right)}w_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\left.+\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\widehat{\widehat{C}}(\mu,\beta)\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right),\ \forall t\in[0,T] \tag{4.47}$$

sağlanır. (4.41) ile (4.47)'yi toplayıp β,μ ve δ'yı yeterince küçük seçersek

$$\frac{d\Phi(t)}{dt}\leq C_{15}\left(\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right),\ \forall t\in[0,T] \tag{4.48}$$

alırız. Burada

$$\Phi(t):=\delta\int_{\mathbb{R}}w_t(t,x)\,w(t,x)\,dx+\frac{\delta}{2}\|w_x(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}}a(x)\,|w(t,x)|^2\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)}w_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\frac{1}{2}\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)\right)}w(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

şeklindedir. Hölder ve Young eşitsizliklerine göre

$$\delta \int_{\mathbb{R}} w_t(t,x)\, w(t,x)\, dx \leq \delta \left\| w_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\| w(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_{16} \left(\left\| w_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \left\| w(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right), \ \forall t \in [0,T]$$

ve (4.3), Hölder eşitsizliği ve $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ sürekli gömülmesinden

$$\frac{\delta}{2} \int_{\mathbb{R}} a(x) \left| w(t,x) \right|^2 dx \leq \frac{\delta}{2} \left\| a \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \left\| w(t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2$$

$$\leq C_{17} \left\| w(t) \right\|_{H^1(\mathbb{R})}^2, \ \forall t \in [0,T]$$

olduğundan

$$\Phi(t) \leq C_{18} \left(\left\| w(t) \right\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \left\| w_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right), \ \forall t \in [0,T] \tag{4.49}$$

alırız. Diğer taraftan, $\widetilde{\Lambda}$'nın özeşlenikliği, Hölder ve Young eşitsizliğinden

$$\delta \int_{\mathbb{R}} w_t(t,x)\, w(t,x)\, dx = \delta \left\langle \widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)} w_t(t), \widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)} w(t) \right\rangle$$

$$\geq -\delta \left(\frac{1}{4\delta} \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)} w_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \delta \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)} w(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right)$$

$$\geq -\frac{1}{4} \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)} w_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - C_{19}\delta^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)\right)} w(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \ \forall t \in [0,T]$$

olup δ yeterince küçük olduğundan, (4.3) ile birlikte

$$\Phi(t) \geq C_{20} \left(\left\| w(t) \right\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{2p}+\varepsilon\right)} w_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right), \ \forall t \in [0,T] \tag{4.50}$$

elde ederiz. (4.50)'yi (4.48)'de göz önüne alırsak

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} \leq C_{21} \Phi(t), \ \forall t \in [0,T]$$

alırız. Bu eşitsizliği $e^{-C_{21}t}$ ile çarpıp 0'dan t'ye integre edersek

$$\Phi(t) \leq e^{C_{21}t}\, \Phi(0), \ \forall t \in [0,T]$$

olup (4.48)-(4.49)'u dikkate alırsak

$$\left\| w(t) \right\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \left\| w_t(t) \right\|_{H^{-1}(\mathbb{R})}^2$$

$$\leq C_{22} e^{C_{21}T} \left(\left\| w(0) \right\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \left\| w_t(0) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right), \ \forall t \in [0,T]$$

elde ederiz. Burada $C_i > 0$ $(i = \overline{1,22})$ sabitleri $\|(u_0, u_1)\|_{(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})}$ ve $\|(v_0, v_1)\|_{(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})}$ normlarına bağlıdır. Böylece, çözüm başlangıç verilere sürekli bağımlı olup özel olarak tektir. ■

Şimdi, (4.26) ve (4.28)'den, Lemma 4.1.4 ile belirli zayıf çözümün, $s = 0$ için, (4.6) eşitsizliğini sağladığını söyleriz. Lemma 4.1.5'e göre çözümün tek olduğunu da dikkate alırsak, her $t \geq s \geq 0$ için (4.6) eşitsizliğinin sağlandığını elde ederiz. Böylece, Lemma 4.1.4 ve Lemma 4.1.5'ten Teorem 4.1.2'yi alırız.

Böylece, u fonksiyonu (4.1) probleminin zayıf çözümü olmak üzere, (4.1) problemi $(W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})) \times L^2(\mathbb{R})$ uzayında $S(t)(u_0, u_1) = (u(t), u_t(t))$ formülü ile tanımlı zayıf sürekli $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarıgrubunu üretir. Burada zayıf süreklilikle, $(W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R}))$ $\times L^2(\mathbb{R})$ uzayında $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\to} \varphi$ ise bu uzayda $S(t)\varphi_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{w}} S(t)\varphi$ olduğu kastedilmektedir.

4.2 Zayıf Yerel Çekicilerin Varlığı

Bu bölümde, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarı grubunun zayıf yerel çekicilerinin varlığını ispatlayacağız. İspatlayacağımız ana teoremi verelim:

Teorem 4.2.1 *(4.2)-(4.5) koşullarına ek olarak $p < 4$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her sınırlı $B \subset (W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})) \times L^2(\mathbb{R})$ kümesi için, (4.1) probleminin ürettiği $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarıgrubu $(W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})) \times L^2(\mathbb{R})$'de $\mathcal{A}_B$ zayıf yerel çekicisine sahiptir. Dahası, $\mathcal{A}_B$ zayıf yerel çekicisi, B kümesinin görüntüsünü $H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$'nin kuvvetli topolojisinde çeker.*

Bu teoremi ispatlamadan önce bazı yardımcı lemmaları verelim. Öncelikle, aşağıdaki düzgün kuyruk değerlenmesini ifade eden lemmayı ispatlayalım.

Lemma 4.2.2 *(4.2)-(4.5) koşulları sağlansın ve $B \subset (W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})) \times L^2(\mathbb{R})$ sınırlı küme olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için*

$$\|S(t)\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}\setminus(-r,r))\times L^2(\mathbb{R}\setminus(-r,r))} < \varepsilon, \ \forall t \geq T, \forall r \geq R, \forall \varphi \in B$$

olacak şekilde $T = T(B, \varepsilon) > 0$ ve $R = R(B, \varepsilon) > 0$ vardır.

İspat. Öncelikle, (4.2)-(4.6)'ya göre, B'nin sınırlı olduğunu kullanırsak

$$\|S(t)\varphi\|_{(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})} \leq C_B < \infty, \ \forall t \geq 0, \forall \varphi \in B \tag{4.51}$$

olacak şekilde $C_B > 0$ sabiti vardır. Şimdi, $\varphi \in B$ için $(u(t), u_t(t)) = S(t)\varphi$ ile işaretleyelim. $(4.1)_1$ denklemini, $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \le \eta(\cdot) \le 1$, $\eta(x) = \begin{cases} 0, & |x| \le 1 \text{ için}, \\ 1, & |x| \ge 2 \text{ için} \end{cases}$, $\eta_r(x) = \eta\left(\frac{x}{r}\right)$ olmak üzere, $\delta\eta_r^2 u$ ile çarpıp $\mathbb{R}$'de integre edersek, kısmi integrasyonla

$$\frac{d}{dt}\left(\delta\int\limits_{\mathbb{R}} \eta_r^2(x)\, u_t(t,x)\, u(t,x)\, dx + \frac{\delta}{2}\left\|\eta_r u_x(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{\delta}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} a(x)\,\eta_r^2(x)\,|u(t,x)|^2\, dx\right)$$
$$+\delta\left\|\eta_r u_x(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \delta\left\|\sqrt[p]{\eta_r^2}u_x(t)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p - \delta\left\|\sqrt{\eta_r}u_t(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$
$$+\delta\int\limits_{\mathbb{R}} \eta_r^2(x)\, f(u(t,x))\, u(t,x)\, dx$$
$$= \delta\int\limits_{\mathbb{R}} \eta_r^2(x)\, g(x)\, u(t,x)\, dx - \frac{2\delta}{r}\int\limits_{\mathbb{R}} \eta_r(x)\,\eta'\left(\frac{x}{r}\right) u_{tx}(t,x)u(t,x)\, dx$$
$$-\frac{2\delta}{r}\int\limits_{\mathbb{R}} \eta_r(x)\,\eta'\left(\frac{x}{r}\right) u_x(t,x)u(t,x)\, dx$$
$$-\frac{2\delta}{r}\int\limits_{\mathbb{R}} \eta_r(x)\,\eta'\left(\frac{x}{r}\right) |u_x(t,x)|^{p-2}\, u_x(t,x)u(t,x)\, dx,\ \forall t \ge 0$$

olup (4.5) ve (4.51)'den, Hölder eşitsizliği ile

$$\frac{d}{dt}\left(\delta\int\limits_{\mathbb{R}} \eta_r^2(x)\, u_t(t,x)\, u(t,x)\, dx + \frac{\delta}{2}\left\|\eta_r u_x(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{\delta}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} a(x)\,\eta_r^2(x)\,|u(t,x)|^2\, dx\right)$$
$$+\delta\left\|\eta_r u_x(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \delta\left\|\sqrt[p]{\eta_r^2}u_x(t)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p + \delta\lambda\left\|\eta_r u(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \delta\left\|\eta_r u_t(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$
$$\le C_1\left\|g\right\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus(-r,r))}\left\|u(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$
$$+\frac{C_2}{r}\Big(\left\|u_{tx}(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|u(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\|u_x(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|u(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$
$$+\left\|u_x(t)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-1}\left\|u(t)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\Big)$$
$$\le C_3\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\left\|u_{tx}(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\|g\right\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus(-r,r))}\right),\ \forall t \ge 0 \tag{4.52}$$

elde ederiz. Diğer yandan, $(4.1)_1$ denklemini $\eta_r^2 u_t$ ile çarpıp $\mathbb{R}$'de integre edersek, kısmi integrasyonla

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|\eta_r u_t(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{2}\left\|\eta_r u_x(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{p}\left\|\sqrt[p]{\eta_r^2}u_x(t)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\right.$$
$$\left.+\int\limits_{\mathbb{R}} \eta_r^2(x)\, F(u(t,x))\, dx\right) + \left\|\eta_r u_{tx}(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \int\limits_{\mathbb{R}} a(x)\,\eta_r^2(x)\,|u_t(t,x)|^2\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \eta_r^2(x)\, g(x)\, u_t(t,x)\, dx - \frac{2}{r}\int_{\mathbb{R}} \eta_r(x)\, \eta'\left(\frac{x}{r}\right) u_{tx}(t,x) u_t(t,x)\, dx$$

$$-\frac{2}{r}\int_{\mathbb{R}} \eta_r(x)\, \eta'\left(\frac{x}{r}\right) u_x(t,x) u_t(t,x)\, dx$$

$$-\frac{2}{r}\int_{\mathbb{R}} \eta_r(x)\, \eta'\left(\frac{x}{r}\right) |u_x(t,x)|^{p-2} u_x(t,x) u_t(t,x)\, dx,\ \ \forall t \geq 0$$

olup Hölder eşitsizliği, (4.4), (4.51) ve $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R})$ sürekli gömülmesinden

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\eta_r u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{2}\|\eta_r u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{p}\left\|\sqrt[p]{\eta_r^2} u_x(t)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\right.$$

$$\left. + \int_{\mathbb{R}} \eta_r^2(x)\, F(u(t,x))\, dx\right) + a_0 \|\eta_r u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

$$\leq \|g\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus(-r,r))} \|u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$+\frac{C_4}{r}\Big(\|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$+ \|u_x(t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-1}\|u_t(t)\|_{L^p(\mathbb{R})}\Big)$$

$$\leq C_5\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{r}\|u_t(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|g\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus(-r,r))}\right)$$

$$\leq C_6\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|g\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus(-r,r))}\right),\ \ \forall r \geq r_0, \forall t \geq 0 \tag{4.53}$$

alırız. (4.52)-(4.53) eşitsizliklerini toplarsak, yeterince küçük δ için

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} + C_7\left(\|\eta_r u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \left\|\sqrt[p]{\eta_r^2} u_x(t)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\right.$$

$$\left. + \|\eta_r u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\eta_r u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\right)$$

$$\leq C_8\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|g\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus(-r,r))}\right),\ \ \forall r \geq r_0, \forall t \geq 0 \tag{4.54}$$

elde ederiz. Burada

$$\Phi(t) := \|\eta_r u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\eta_r u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \left\|\sqrt[p]{\eta_r^2} u_x(t)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p + \int_{\mathbb{R}} \eta_r^2(x)\, F(u(t,x))\, dx$$

$$+\delta\int_{\mathbb{R}} \eta_r^2(x)\, u_t(t,x)\, u(t,x)\, dx + \frac{\delta}{2}\|\eta_r u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}} a(x)\, \eta_r(x)\, |u(t,x)|^2\, dx$$

şeklindedir. $F(0) = 0$ olduğundan, ortalama değer teoremi, (4.5), (4.51) ve $W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ sürekli gömülmesinden

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_r^2(x)\, F(u(t,x))\, dx = \int_{\mathbb{R}} \eta_r^2(x)\left(\int_0^1 f(\tau u(t,x))\, d\tau\right) u(t,x)\, dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \eta_r^2(x) \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |f'(s\tau u(t,x))| \, ds \right) |\tau u(t,x)| \, d\tau \right) |u(t,x)| \, dx$$

$$\leq C_9 \|\eta_r u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \ \forall t \geq 0$$

eşitsizliği ile Hölder ve Young eşitsizliklerine göre

$$\delta \int_{\mathbb{R}} \eta_r^2(x) \, u_t(t,x) \, u(t,x) \, dx \leq \delta \|\eta_r u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\eta_r u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\leq \delta \left(\|\eta_r u_t(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|\eta_r u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right), \ \forall t \geq 0$$

sağlanır. Böylece, Hölder eşitsizliği, (4.3), (4.51) ve $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ sürekli gömülmesinden

$$\int_{\mathbb{R}} a(x) \, \eta_r(x) \, |u(t,x)|^2 \, dx \leq \|a\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\eta_r u(t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_{10} \|\eta_r u(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_{10} \left(\|\eta_r u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|\eta_r u_x(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|\eta_r' u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right)$$

$$\leq C_{11} \left(\|\eta_r u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|\eta_r u_x(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{r} \right), \ \forall t \geq 0$$

olduğunu da göz önüne alarak,

$$\Phi(t) \leq C_{12} \left(\|\eta_r u_t(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|\eta_r u_x(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right.$$

$$\left. + \left\| \sqrt[p]{\eta_r^2} u_x(t) \right\|^p_{L^p(\mathbb{R})} + \|\eta_r u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{r} \right), \ \forall t \geq 0 \tag{4.55}$$

sağlanır. Diğer yandan, (4.5)'ten

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_r^2(x) \, F(u(t,x)) \, dx \geq \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}} \eta_r^2(x) \, |u(t,x)|^2 \, dx = \frac{\lambda}{2} \|\eta_r u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \ \forall t \geq 0$$

eşitsizliği ile Hölder ve Young eşitsizliklerine göre

$$\delta \int_{\mathbb{R}} \eta_r^2(x) \, u_t(t,x) \, u(t,x) \, dx$$

$$\geq -\delta \left(\frac{1}{4\delta} \|\eta_r u_t(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta \|\eta_r u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right), \ \forall t \geq 0$$

sağlandığından, δ'nın yeterince küçük olduğunu kullanarak, (4.3)'e göre

$$\Phi(t) \geq C_{13} \left(\left\| \sqrt{\eta_r} u_t(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \left\| \sqrt{\eta_r} u_x(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right.$$

$$+\left\|\sqrt[p]{\eta_r^2}u_x(t)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p+\left\|\sqrt{\eta_r}u(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\Bigg),\ \forall t\geq 0 \tag{4.56}$$

alırız. (4.55)'i (4.54)'te kullanırsak

$$\frac{d\Phi(t)}{dt}+C_{14}\Phi(t)$$

$$\leq C_{15}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|g\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus(-r,r))}\right),\ \forall r\geq r_0, \forall t\geq 0$$

alırız. Bu eşitsizliği $e^{C_{14}t}$ ile çarpıp 0'dan t'ye integre edersek, (4.51), (4.55) ve Hölder eşitsizliğiyle

$$\Phi(t)\leq e^{-C_{14}t}\Phi(0)$$

$$+C_{15}\int_0^t e^{-C_{14}(t-\tau)}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|g\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus(-r,r))}\right)d\tau$$

$$\leq C_{16}\Bigg[e^{-C_{14}t}\left(\|\varphi\|_{(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})}+\frac{1}{r}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{r}+\|g\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus(-r,r))}\right)\left(\int_0^t e^{-C_{14}(t-\tau)}d\tau\right)$$

$$+\frac{1}{r}\left(\int_0^t e^{-2C_{14}(t-\tau)}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t\|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg]$$

$$\leq C_{17}\left(e^{-C_{14}t}+\frac{1}{r}+\|g\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus(-r,r))}\right),\ \forall r\geq r_0, \forall t\geq 0$$

elde ederiz. Burada $C_{17}>0$ sabiti önceki $C_i(i=\overline{1,16})$ sabitleri gibi B kümesine bağlı olup t ve r'den bağımsızdır. Son eşitsizliğin sağ tarafını göz önüne alırsak, (4.56) ile birlikte istenen sonucu elde ederiz. ■

Lemma 4.2.3 *(4.2)-(4.5) koşulları sağlansın ve* $B\subset(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})$ *sınırlı küme olsun. Bu durumda,* $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty\subset B$*,* $t_k\to\infty$ *olmak üzere,* $\{PS(t_k)\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ *şeklindeki her dizi,* $H^1(\mathbb{R})$*'de yakınsak alt diziye sahiptir. Burada* $P:(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})\to W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R})$*,* $P(\phi,\psi)=\phi$ *şeklinde tanımlı izdüşüm operatörüdür.*

İspat. Öncelikle, (4.51)'den, her $t\geq 0$ ve $\varphi\in B$ için $S(t)\varphi\in B_0$ olacak şekilde sınırlı $B_0\subset(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})$ kümesi vardır. O halde, $t_k\to\infty$ olduğundan, her $T_0\geq 1$ için, her $k\geq K$ için $t_k\geq T_0$ ve $S(t_k-T_0)\varphi_k\in B_0$ olacak şekilde $K\in\mathbb{N}$ vardır. Bu durumda, Banach-Alaoğlu teoreminden, $t_{k_m}\geq T_0$ ve $\left\{S(t_{k_m}-T_0)\varphi_{k_m}\right\}_{m=1}^\infty\subset B_0$

dizisi $(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})$ uzayında zayıf yakınsak olacak şekilde $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. Buradan, (4.2)-(4.6), (4.25) ve (4.51)'e göre,

$$\begin{cases} S(t_{k_m}-T_0)\varphi_{k_m} \underset{m\to\infty}{\overset{w}{\to}} \varphi_0 \quad (W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})\text{'de}, \\ u_m \underset{m\to\infty}{\overset{w^*}{\to}} u \quad L^\infty(0,\infty;W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\text{'de}, \\ u_{mt} \underset{m\to\infty}{\overset{w^*}{\to}} u_t \quad L^\infty(0,\infty;L^2(\mathbb{R}))\text{'de}, \\ u_{mt} \underset{m\to\infty}{\overset{w}{\to}} u_t \quad L^2(0,\infty;H^1(\mathbb{R}))\text{'de}, \\ u_{mtt} \underset{m\to\infty}{\overset{w}{\to}} u_{tt} \quad L^2(0,\infty;H^{-2}(-r,r))\text{'de}, \ \forall r>0, \\ u_m(t) \underset{m\to\infty}{\overset{w}{\to}} u(t) \quad W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R})\text{'de}, \ \forall t\ge 0, \\ u_{mt}(t) \underset{m\to\infty}{\overset{w}{\to}} u_t(t) \quad L^2(\mathbb{R})\text{'de}, \ \forall t\ge 0 \end{cases} \tag{4.57}$$

olacak şekilde $\varphi_0\in(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})$ ve $u\in L^\infty(0,\infty;W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\cap W^{1,\infty}(0,\infty;L^2(\mathbb{R}))\cap W^{1,2}(0,\infty;H^1(\mathbb{R}))\cap W^{2,2}(0,\infty;H^{-2}(-r,r))$ fonksiyonları vardır. Burada $(u_m(t),u_{mt}(t))=S(t+t_{k_m}-T_0)\varphi_{k_m}$ ile tanımlıdır.

Şimdi $(4.1)_1$ denkleminde u'yu u_m ve u_n ile değiştirip elde edilen denklemleri birbirinden çıkararak

$$\begin{aligned} &u_{mtt}(t,x)-u_{ntt}(t,x)-(u_{mtxx}(t,x)-u_{ntxx}(t,x))-(u_{mxx}(t,x)-u_{nxx}(t,x)) \\ &-\frac{\partial}{\partial x}(|u_{mx}(t,x)|^{p-2}u_{mx}(t,x)-|u_{nx}(t,x)|^{p-2}u_{nx}(t,x)) \\ &+a(x)(u_{mt}(t,x)-u_{nt}(t,x))+f(u_m(t,x))-f(u_n(t,x))=0 \end{aligned}$$

denklemini alalım. Bu denklemi, η_r bir önceki lemmada tanımlanan fonksiyon olmak üzere, $2(1-\eta_r)t(u_m-u_n)$ ile $(0,T)\times\mathbb{R}$'de test edersek

$$2T\int_{\mathbb{R}}(1-\eta_r(x))(u_{mt}(T,x)-u_{nt}(T,x))(u_m(T,x)-u_n(T,x))\,dx$$

$$-2\int_0^T\int_{\mathbb{R}}(1-\eta_r(x))(u_{mt}(t,x)-u_{nt}(t,x))(u_m(t,x)-u_n(t,x))\,dxdt$$

$$-2\int_0^T t\left\|\sqrt{1-\eta_r}(u_{mt}(t)-u_{nt}(t))\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt$$

$$-\frac{2}{r}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}t\eta'\left(\frac{x}{r}\right)(u_{mtx}(t,x)-u_{ntx}(t,x))(u_m(t,x)-u_n(t,x))\,dxdt$$

$$+T\left\|\sqrt{1-\eta_r}(u_{mx}(T)-u_{nx}(T))\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}-\int_0^T\left\|\sqrt{1-\eta_r}(u_{mx}(t)-u_{nx}(t))\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt$$

$$-\frac{2}{r}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} t\eta'\left(\frac{x}{r}\right)\left(u_{mx}(t,x)-u_{nx}(t,x)\right)\left(u_m(t,x)-u_n(t,x)\right)dxdt$$

$$+2\int_0^T t\left\|\sqrt{1-\eta_r}\left(u_{mx}(t)-u_{nx}(t)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt$$

$$-\frac{2}{r}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} t\eta'\left(\frac{x}{r}\right)\left(|u_{mx}(t,x)|^{p-2}u_{mx}(t,x)-|u_{nx}(t,x)|^{p-2}u_{nx}(t,x)\right)$$

$$\times\left(u_m(t,x)-u_n(t,x)\right)dxdt$$

$$+2\int_0^T\int_{\mathbb{R}} t\left(1-\eta_r(x)\right)\left(|u_{mx}(t,x)|^{p-2}u_{mx}(t,x)-|u_{nx}(t,x)|^{p-2}u_{nx}(t,x)\right)$$

$$\times\left(u_{mx}(t,x)-u_{nx}(t,x)\right)dxdt$$

$$+T\int_{\mathbb{R}} a(x)\left(1-\eta_r(x)\right)\left|\left(u_m(T,x)-u_n(T,x)\right)\right|^2 dx$$

$$-2\int_0^T\int_{\mathbb{R}} a(x)\left(1-\eta_r(x)\right)\left|\left(u_m(t,x)-u_n(t,x)\right)\right|^2 dxdt$$

$$+2\int_0^T\int_{\mathbb{R}} t\left(1-\eta_r(x)\right)\left(f(u_m(t,x))-f(u_n(t,x))\right)$$

$$\times\left(u_m(t,x)-u_n(t,x)\right)dxdt=0,\ \forall T\geq 0 \qquad (4.58)$$

alırız. Burada, eşitliğin sol tarafındaki altıncı terim için

$$\int_0^T\left\|\sqrt{1-\eta_r}\left(u_{mx}(t)-u_{nx}(t)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt$$

$$=\int_0^1\left\|\sqrt{1-\eta_r}\left(u_{mx}(t)-u_{nx}(t)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt+\int_1^T\left\|\sqrt{1-\eta_r}\left(u_{mx}(t)-u_{nx}(t)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt$$

$$\leq c_1+2\int_1^T t\left\|\sqrt{1-\eta_r}\left(u_{mx}(t)-u_{nx}(t)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} dt$$

$$\leq c_1+2\int_0^T t\left\|\sqrt{1-\eta_r}\left(u_{mx}(t)-u_{nx}(t)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} dt,\ \forall T\geq 1$$

eşitsizliğini ve onuncu terim için (3.7) eşitsizliğini göz önüne alırsak,

$$\left\|\sqrt{1-\eta_r}\left(u_{mx}(T)-u_{nx}(T)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

$$\leq \frac{c_1}{T} + \frac{2}{T}\int_0^T \left\| \sqrt{1-\eta_r}\left(u_{mt}(t) - u_{nt}(t)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt$$

$$-2\int_{\mathbb{R}} (1-\eta_r(x))\left(u_{mt}(T,x) - u_{nt}(T,x)\right)\left(u_m(T,x) - u_n(T,x)\right) dx$$

$$+\frac{2}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} (1-\eta_r(x))\left(u_{mt}(t,x) - u_{nt}(t,x)\right)\left(u_m(t,x) - u_n(t,x)\right) dxdt$$

$$+\frac{1}{T}\frac{2}{r}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \eta'\left(\frac{x}{r}\right)\left(u_{mtx}(t,x) - u_{ntx}(t,x)\right) t\left(u_m(t,x) - u_n(t,x)\right) dxdt$$

$$+\frac{1}{T}\frac{2}{r}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \eta'\left(\frac{x}{r}\right)\left(u_{mx}(t,x) - u_{nx}(t,x)\right) t\left(u_m(t,x) - u_n(t,x)\right) dxdt$$

$$+\frac{1}{T}\frac{2}{r}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \eta'\left(\frac{x}{r}\right)\left(\left|u_{mx}(t,x)\right|^{p-2} u_{mx}(t,x) - \left|u_{nx}(t,x)\right|^{p-2} u_{nx}(t,x)\right)$$

$$\times t\left(u_m(t,x) - u_n(t,x)\right) dxdt$$

$$+2\int_0^T\int_{\mathbb{R}} a(x)\left(1-\eta_r(x)\right)\left|\left(u_m(t,x) - u_n(t,x)\right)\right|^2 dxdt$$

$$+\frac{2}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} (1-\eta_r(x))\left(f(u_m(t,x)) - f(u_n(t,x))\right)$$

$$\times t\left(u_m(t,x) - u_n(t,x)\right) dxdt,\ \forall T \geq 1 \tag{4.59}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki yedinci terim için, ortalama değer teoremi, (4.51) ve Hölder eşitsizliği ile

$$\frac{1}{T}\frac{2}{r}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \eta'\left(\frac{x}{r}\right)\left(\left|u_{mx}(t,x)\right|^{p-2} u_{mx}(t,x) - \left|u_{nx}(t,x)\right|^{p-2} u_{nx}(t,x)\right)$$

$$\times t\left(u_m(t,x) - u_n(t,x)\right) dxdt$$

$$\leq \frac{1}{T}\frac{c_2}{r}\int_0^T\int_{(-2r,2r)\setminus(-r,r)} \left(\left|u_{mx}(t,x)\right|^{p-2} + \left|u_{nx}(t,x)\right|^{p-2}\right)$$

$$\times\left(u_{mx}(t,x) - u_{nx}(t,x)\right) t\left(u_m(t,x) - u_n(t,x)\right) dxdt$$

$$\leq \frac{c_3}{r}\int_0^T \left\|u_{mx}(t) - u_{nx}(t)\right\|_{L^p((-2r,2r)\setminus(-r,r))}$$

$$\times\left\|u_m(t) - u_n(t)\right\|_{L^p((-2r,2r)\setminus(-r,r))} dt,\ \forall T \geq 1$$

ve sekizinci terim için, (4.3), Hölder eşitsizliğinden

$$2\int_0^T\int_{\mathbb{R}} a(x)(1-\eta_r(x))\left|(u_m(t,x)-u_n(t,x))\right|^2 dxdt$$

$$\leq 2\int_0^T \|a\|_{L^1(\mathbb{R})}\|u_m(t)-u_n(t)\|^2_{L^\infty(-r,r)}\,dt$$

$$\leq c_4\|u_m-u_n\|^2_{L^2(0,T;L^\infty(-r,r))},\ \forall T\geq 1$$

sağlanır. Böylece, (4.59)'da (4.30)-(4.31) ve (4.57)'yi göz önüne alıp Önerme 2.0.55'e göre

$$\begin{cases} u_{mt} \underset{m\to\infty}{\rightarrow} u_t & L^2(0,T;L^2(-r,r))\text{'de,}\\ u_m \underset{m\to\infty}{\rightarrow} u & C([0,T];L^2(\mathbb{R}))\text{'de,}\\ u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u & L^2((0,T)\times((-2r,2r)\setminus(-r,r)))\text{'de,}\\ u_m \underset{m\to\infty}{\rightarrow} u & L^2(0,T;L^p((-2r,2r)\setminus(-r,r)))\text{'de,}\\ u_m \underset{m\to\infty}{\rightarrow} u & L^2(0,T;L^\infty(-r,r))\text{'de}\end{cases}$$

yakınsamalarının da sağlandığını kullanırsak

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\|u_{mx}(T)-u_{nx}(T)\|^2_{L^2(-r,r)}\leq\frac{c_1}{T},\quad\forall T\geq 1$$

elde ederiz. Buradan, Lemma 4.2.2 ile birlikte, $T=T_0$ alarak, keyfi $\varepsilon>0$ için

$$\liminf_{k\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\|PS(t_k)\varphi_k-PS(t_n)\varphi_n\|_{H^1(\mathbb{R})}<\frac{c_6}{\sqrt{T_0}}+\varepsilon,\quad\forall T_0\geq 1$$

elde ederiz. Burada $T_0\to\infty$ iken limite geçersek, ε keyfi olduğundan

$$\liminf_{k\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\|PS(t_k)\varphi_k-PS(t_n)\varphi_n\|_{H^1(\mathbb{R})}=0$$

alırız. Ayrıca yukarıda yaptığımız işlemleri tekrar ederek keyfi $\{k_m\}_{m=1}^\infty$ dizisi için

$$\liminf_{m\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\left\|PS(t_{k_m})\varphi_{k_m}-PS(t_{k_n})\varphi_{k_n}\right\|_{H^1(\mathbb{R})}=0$$

elde ederiz. Böylece, Lemma 3.2.3'ün ispatının sonunda yapılan işlemleri tekrarlayarak $\{PS(t_k)\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ dizisinin $H^1(\mathbb{R})$'de yakınsak alt diziye sahip olduğunu elde ederiz. ■

Lemma 4.2.4 *(4.2)-(4.5) koşullarına ek olarak $p<4$ olduğunu kabul edelim. Eğer u fonksiyonu (4.1) probleminin zayıf çözümü ise*

$$\sup_{t\geq 1}\|u_t(t)\|_{H^{1-\alpha}(\mathbb{R})}\leq c,\ \alpha\in\left[\frac{p-2}{p},\frac{1}{2}\right)$$

olacak şekilde $c>0$ sabiti vardır.

İspat. İlk olarak, $(4.1)_1$ denkleminin t'ye göre türevini alarak, $v := u_t$ ve $\widetilde{\Lambda}$ operatörü Lemma 4.1.5'te tanımlanan özeşlenik operatör olmak üzere,

$$v_{tt} + \left(\widetilde{\Lambda} v_t - v_t\right) + \left(\widetilde{\Lambda} v - v\right) - (p-1)\frac{\partial}{\partial x}\left(|u_x|^{p-2} u_{tx}\right) + a(x) v_t + f'(u) u_t = 0 \quad (4.60)$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemi, $\alpha \in \left[\frac{p-2}{p}, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere, $t^2 \widetilde{\Lambda}^{-\alpha} v_t$ ile $\mathbb{R}$'de test edersek, $\widetilde{\Lambda}$ operatörünün özeşlenik olduğunu göz önüne alarak

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2}\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{t^2}{2}\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right) + t^2\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$
$$= t\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + t^2\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + t\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$
$$+t^2\left\langle \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v(t), \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t)\right\rangle - (p-1)t^2\left\langle |u_x(t)|^{p-2} u_{tx}(t), \frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{\Lambda}^{-\alpha} v_t(t)\right)\right\rangle$$
$$-t^2\left\langle a v_t(t), \widetilde{\Lambda}^{-\alpha} v_t(t)\right\rangle - t^2\left\langle f'(u(t)) u_t(t), \widetilde{\Lambda}^{-\alpha} v_t(t)\right\rangle, \ \forall t \geq 0 \quad (4.61)$$

alırız. Öncelikle, interpolasyonla

$$\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_1\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v_t(t)\right\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{1+\alpha}{2}} v_t(t)\right\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}, \forall t \geq 0$$

olduğundan, (4.61)'in sağ tarafındaki ilk terim için, Young eşitsizliği ile keyfi $\varepsilon > 0$ için

$$t\left\|\Lambda^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \varepsilon t^2\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + C(\varepsilon)\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{1+\alpha}{2}} v_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \forall t \geq 0 \quad (4.62)$$

sağlanır. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terimi değerlendirmek için, $(4.1)_1$ denklemini kullanarak, keyfi $\varphi \in H^{1+\alpha}(\mathbb{R})$ için, kısmi integrasyon, ortalama değer teoremi, Hölder ve Young eşitsizlikleri, (4.2)-(4.3), (4.51), $W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$, $H^{1+\alpha}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ ve $H^\alpha(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R})$ sürekli gömülmelerinden

$$|\langle u_{tt}(t), \varphi\rangle| \leq |\langle u_{tx}(t), \varphi'\rangle| + |\langle u_x(t), \varphi'\rangle| + \left|\left\langle |u_x(t)|^{p-2} u_x(t), \varphi'\right\rangle\right|$$
$$+ |\langle a u_t(t), \varphi\rangle| + |\langle f(u(t)), \varphi\rangle| + |\langle g, \varphi\rangle|$$
$$\leq \|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\varphi'\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\varphi'\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|u_x(t)\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R})}\|\varphi'\|_{L^p(\mathbb{R})}$$
$$+ \|a\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R})}\left(\int_{\mathbb{R}} a(x)|u_t(t,x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$
$$+C_2\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}$$
$$\leq C_3\left[1 + \|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left(\int_{\mathbb{R}} a(x)|u_t(t,x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]\|\varphi\|_{H^{1+\alpha}(\mathbb{R})}, \ \forall t \geq 0$$

olup burada $\|\varphi\|_{H^{1+\alpha}(\mathbb{R})} \leq 1$, $\varphi \neq 0$ üzerine supremuma geçersek

$$\left\| \widetilde{\Lambda}^{-\frac{1+\alpha}{2}} v_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C_3 \left(1 + \|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \int_{\mathbb{R}} a(x) |u_t(t,x)|^2 dx \right), \ \forall t \geq 0$$

elde ederiz. Böylece, (4.62)'den

$$t \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C_4 \left(\varepsilon t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right.$$

$$\left. + C(\varepsilon) \left(1 + \|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \int_{\mathbb{R}} a(x) |u_t(t,x)|^2 dx \right) \right), \ \forall t \geq 0 \tag{4.63}$$

sağlanır. Benzer şekilde

$$t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C_4 \left(\varepsilon t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right.$$

$$\left. + C(\varepsilon) t^2 \left(1 + \|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \int_{\mathbb{R}} a(x) |u_t(t,x)|^2 dx \right) \right), \ \forall t \geq 0 \tag{4.64}$$

alırız. (4.61)'in sağ tarafındaki dördüncü terim için, Hölder ve Young eşitsizlikleriyle, (4.51)'den

$$t^2 \left\langle \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v(t), \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t) \right\rangle \leq t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_5 \left(C(\varepsilon) t^2 + \varepsilon t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right), \ \forall t \geq 0 \tag{4.65}$$

elde ederiz. (4.61)'in sağ tarafındaki beşinci terim için, Hölder ve Young eşitsizlikleri, (4.51) ve $H^{\frac{p-2}{p}}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^{\frac{2p}{4-p}}(\mathbb{R})$ sürekli gömülmesinden

$$-(p-1) t^2 \left\langle |u_x(t)|^{p-2} u_{tx}(t), \frac{\partial}{\partial x} \left(\widetilde{\Lambda}^{-\alpha} v_t(t) \right) \right\rangle$$

$$\leq (p-1) t^2 \|u_x(t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-2} \|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \left(\widetilde{\Lambda}^{-\alpha} v_t(t) \right) \right\|_{L^{\frac{2p}{4-p}}(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_6 t^2 \|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \left(\widetilde{\Lambda}^{-\alpha} v_t(t) \right) \right\|_{H^{\frac{p-2}{p}}(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_7 t^2 \|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|v_t(t)\|_{H^{1-2\alpha+\frac{p-2}{p}}(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_8 \left(C(\varepsilon) t^2 \|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \varepsilon t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right), \forall t \geq 0 \tag{4.66}$$

sağlanır. (4.61)'in sağ tarafındaki altıncı terimi göz önüne alırsak, interpolasyon ve Young eşitsizliğinden, keyfi $\mu > 0$ için

$$\|v_t(t)\|_{H^{1-2\alpha}(\mathbb{R})}^2 \leq C_9 \|v_t(t)\|_{H^{-\alpha}(\mathbb{R})}^{2\alpha} \|v_t(t)\|_{H^{1-\alpha}(\mathbb{R})}^{2(1-\alpha)}$$

$$\leq C_9\left(C(\mu)\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}}v_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\mu\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}}v_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right),\ \forall t\geq 0$$

sağlandığından, Hölder ve Young eşitsizliğiyle, (4.3), (4.64), $H^{1-\alpha}(\mathbb{R})\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ sürekli gömülmesine göre

$$-t^2\left\langle av_t(t),\widetilde{\Lambda}^{-\alpha}v_t(t)\right\rangle\leq t^2\|a\|_{L^1(\mathbb{R})}\|v_t(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\alpha}v_t(t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_{10}t^2\|v_t(t)\|_{H^{1-\alpha}(\mathbb{R})}\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\alpha}v_t(t)\right\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

$$=C_{10}t^2\|v_t(t)\|_{H^{1-\alpha}(\mathbb{R})}\|v_t(t)\|_{H^{1-2\alpha}(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_{10}\left(\beta t^2\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}}v_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\widehat{C}(\mu,\beta)t^2\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}}v_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right.$$

$$\left.+\mu C(\beta)t^2\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}}v_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right)$$

$$\leq C_{11}\left[\left(\beta+\mu C(\beta)+\varepsilon\widehat{C}(\mu,\beta)\right)t^2\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}}v_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right.$$

$$\left.+\widehat{\widehat{C}}(\mu,\beta,\varepsilon)t^2\left(1+\|u_{tx}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\int\limits_{\mathbb{R}}a(x)|u_t(t,x)|^2dx\right)\right],\ \forall t\geq 0 \qquad (4.67)$$

elde ederiz. (4.61)'in sağ tarafındaki son terim için, Hölder ve Young eşitsizliğiyle, (4.5), (4.51) ve $W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R})\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ sürekli gömülmesinden

$$-t^2\left\langle f'(u(t))u_t(t),\widetilde{\Lambda}^{-\alpha}v_t(t)\right\rangle\leq C_{12}t^2\|u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\alpha}v_t(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_{13}\left(C(\varepsilon)t^2+\varepsilon t^2\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}}v_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right),\ \forall t\geq 0 \qquad (4.68)$$

alırız. (4.63)-(4.68)'i (4.61)'de göz önüne alırsak

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2}\left\|\widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}}v_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\frac{t^2}{2}\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}}v(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right)+t^2\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}}v_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_{14}\left[\left(\beta+\varepsilon+\mu C(\beta)+\varepsilon\widehat{C}(\mu,\beta)\right)t^2\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}}v_t(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right.$$

$$+\widetilde{C}(\mu,\beta,\varepsilon)\left(\left(1+t+t^2\right)\left(1+\|u_{tx}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right)\right.$$

$$\left.\left.+\left(1+t^2\right)\int\limits_{\mathbb{R}}a(x)|u_t(t,x)|^2dx\right)\right],\ \forall t\geq 0 \qquad (4.69)$$

sağlanır.

Şimdi, (4.60) denklemini $\delta t^2\widetilde{\Lambda}^{-\alpha}v$ ile $\mathbb{R}$'de test edersek, kısmi integrasyonla, $\widetilde{\Lambda}$ operatörü özeşlenik olduğundan

$$\frac{d}{dt}\left(\delta t^2\left\langle\widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}}v_t(t),\widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}}v(t)\right\rangle+\frac{\delta}{2}t^2\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}}v(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right)+\delta t^2\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}}v(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \delta t \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \delta t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&+\delta \left(t^2+2t\right) \left\langle \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t), \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v(t) \right\rangle \\
&-\delta (p-1) t^2 \left\langle |u_x(t)|^{p-2} u_{tx}(t), \frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{\Lambda}^{-\alpha} v(t)\right) \right\rangle \\
&-\delta t^2 \left\langle a v_t(t), \widetilde{\Lambda}^{-\alpha} v(t) \right\rangle - \delta t^2 \left\langle f'(u(t)) u_t(t), \widetilde{\Lambda}^{-\alpha} v(t) \right\rangle, \ \forall t \geq 0
\end{aligned} \tag{4.70}
$$

elde ederiz. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki dördüncü terim için, Hölder,Young eşitsizliği ve (4.51)'den

$$
\begin{aligned}
&\delta \left(t^2+2t\right) \left\langle \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t), \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v(t) \right\rangle \\
&\leq \delta t (t+2) \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq \delta t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + C_{15} (t+2)^2, \ \forall t \geq 0
\end{aligned} \tag{4.71}
$$

alırız. (4.70)'in sağ tarafındaki beşinci terim için, Hölder ve Young eşitsizlikleri, (4.51) ve $H^{\frac{p-2}{p}}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^{\frac{2p}{4-p}}(\mathbb{R})$ sürekli gömülmesinden

$$
\begin{aligned}
&-\delta (p-1) t^2 \left\langle |u_x(t)|^{p-2} u_{tx}(t), \frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{\Lambda}^{-\alpha} v(t)\right) \right\rangle \\
&\leq \delta (p-1) t^2 \|u_x(t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-2} \|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\| \frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{\Lambda}^{-\alpha} v(t)\right) \right\|_{L^{\frac{2p}{4-p}}(\mathbb{R})} \\
&\leq C_{16} t^2 \|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\| \frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{\Lambda}^{-\alpha} v(t)\right) \right\|_{H^{\frac{p-2}{p}}(\mathbb{R})} \\
&\leq C_{16} t^2 \|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|v(t)\|_{H^{1-2\alpha+\frac{p-2}{p}}(\mathbb{R})} \\
&\leq C_{17} \left(t^2 \|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + t^2 \|u_t(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \right) \\
&\leq C_{18} \left(t^2 \|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + t^2 \|u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right) \\
&\leq C_{19} \left(t^2 \|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + t^2 \right), \ \forall t \geq 0
\end{aligned} \tag{4.72}
$$

sağlanır. (4.70)'in sağ tarafındaki altıncı terim için, Hölder ve Young eşitsizliğiyle, (4.3), (4.51), $H^{1-\alpha}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ ve $H^{1+\alpha}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ sürekli gömülmelerinden

$$
\begin{aligned}
-\delta t^2 \left\langle a v_t(t), \widetilde{\Lambda}^{-\alpha} v(t) \right\rangle &\leq \delta t^2 \|a\|_{L^1(\mathbb{R})} \|v_t(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\alpha} v(t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
&\leq \delta C_{20} t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq \delta t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v_t(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + C_{21} \left(t^2 \|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + t^2 \right), \ \forall t \geq 0
\end{aligned} \tag{4.73}
$$

elde ederiz. (4.70)'in sağ tarafındaki son terimi için, Hölder ve Young eşitsizliğiyle, (4.5), (4.51) ve $W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ sürekli gömülmesinden

$$\begin{aligned} -\delta t^2 \left\langle f'(u(t)) u_t(t), \widetilde{\Lambda}^{-\alpha} v(t) \right\rangle &\le C_{22} t^2 \|u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\alpha} v(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\le C_{23} t^2, \ \forall t \ge 0 \end{aligned} \tag{4.74}$$

alırız. Böylece, (4.71)-(4.74)'ü (4.70)'te göz önüne alırsak

$$\frac{d}{dt}\left(\delta t^2 \left\langle \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t), \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v(t) \right\rangle + \frac{\delta}{2} t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right) + \delta t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\le \delta C_{24} t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v_t(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + C_{25}\left(t + t^2\right) \|u_{tx}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + C_{26}\left(1 + t + t^2\right), \forall t \ge 0$$

olup bu eşitsizliği (4.69) ile toplarsak, yeterince küçük ε, μ, β ve δ için

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t)}{dt} &+ C_{27}\left(t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v_t(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right) \\ &\le C_{28}\left(1 + t + t^2\right)\left(1 + \|u_{tx}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right) \\ &+ C_{29}\left(1 + t^2\right) \int_{\mathbb{R}} a(x) |u_t(t,x)|^2 dx, \ \forall t \ge 0 \end{aligned} \tag{4.75}$$

alırız. Burada

$$\begin{aligned} \Phi(t) := \delta t^2 \left\langle \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t), \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v(t) \right\rangle &+ \frac{\delta}{2} t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ + \frac{t^2}{2} \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &+ \frac{t^2}{2} \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

ile tanımlıdır. δ yeterince küçük olduğundan, Hölder ve Young eşitsizliklerine göre

$$\begin{aligned} &C_{30}\left(t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right) \\ &\le \Phi(t) \le C_{31}\left(t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{-\frac{\alpha}{2}} v_t(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + t^2 \left\| \widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}} v(t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right), \ \forall t \ge 0 \end{aligned} \tag{4.76}$$

olacak şekilde $C_{30}, C_{31} > 0$ sabitleri vardır. (4.76)'yı (4.75)'te göz önüne alırsak

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} + C_{32}\Phi(t)$$

$$\le C_{33}\left(1 + t + t^2\right)\left(1 + \|u_{tx}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right) + C_{34}\left(1 + t^2\right) \int_{\mathbb{R}} a(x) |u_t(t,x)|^2 dx, \forall t \ge 0$$

olup bu eşitsizliği $e^{C_{32} t}$ ile çarpıp 0'dan t'ye integre edersek, (4.2)-(4.6)'dan

$$\Phi(t) \le e^{-C_{32} t}\Phi(0) + C_{33} \int_0^t \left(1 + s + s^2\right) e^{-C_{32}(t-s)} \left(1 + \|u_{tx}(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right) ds$$

$$+C_{34}\int\limits_0^t \left(1+s^2\right)e^{-C_{32}(t-s)}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} a(x)\left|u_t(s,x)\right|^2 dx\right)ds$$

$$\leq C_{35}\left(1+t+t^2\right)+C_{33}\left(1+t+t^2\right)\int\limits_0^t \left\|u_{tx}(s)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}ds$$

$$+C_{34}\left(1+t^2\right)\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} a(x)\left|u_t(s,x)\right|^2 dxds \leq C_{36}\left(1+t+t^2\right),\ \forall t\geq 0$$

alırız. Böylece, (4.76)'ya göre

$$\left\|\widetilde{\Lambda}^{\frac{1-\alpha}{2}}v(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\leq C_{37}\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\leq C_{38},\ \forall t\geq 1$$

olup istenen sonuç elde edilir. ■

Şimdi, bir $B\subset\left(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R})\right)\times L^2(\mathbb{R})$ kümesinden çıkan yörüngelerin zayıf ω-limit kümesini şu şekilde tanımlayalım:

$$\omega_w(B):=\bigcap_{\tau\geq 0}\overline{\bigcup_{t\geq\tau}S(t)B}^{w}.$$

Burada küme üzerindeki çizgi $\left(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R})\right)\times L^2(\mathbb{R})$ uzayındaki zayıf kapanışı ifade etmektedir. Öyleyse,

$$\begin{aligned}\varphi\in\omega_w(B)\Longleftrightarrow\ &(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R}))\times L^2(\mathbb{R})\text{ uzayında } S(t_k)\varphi_k\underset{k\to\infty}{\overset{w}{\to}}\varphi\\ &\text{olacak şekilde } \{t_k\}_{k=1}^{\infty},t_k\to\infty \text{ ve } \{\varphi_k\}_{k=1}\subset B\\ &\text{dizileri vardır.}\end{aligned}\tag{4.77}$$

ifadesinin sağlandığı kolayca gösterilebilir.

Şimdi, $\omega_w(B)$ kümesinin değişmezlik özelliğini sağladığını gösterelim.

Lemma 4.2.5 *Her sınırlı $B\subset W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R})$ kümesi için, $\omega_w(B)$ kümesi değişmezdir.*

İspat. Kabul edelim ki $\psi\in\omega_w(B)$ ve $t\geq 0$ için $z=S(t)\psi$ olsun. Bu durumda, (4.77)'den $W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R})$'de $S(t_k)\psi_k\underset{k\to\infty}{\overset{w}{\longrightarrow}}\psi$ olacak şekilde $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $t_k\to\infty$ ve $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}\subset B$ dizileri vardır. Ayrıca, Lemma 4.2.2, Lemma 4.2.3 ve Lemma 4.2.4'ü kullanırsak, $H^1(\mathbb{R})\times H^{-1}(\mathbb{R})$'de $S(t_{k_m})\psi_{k_m}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\psi$ olacak şekilde $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisinin varlığını elde ederiz. Bu durumda, $\tau_{k_m}:=t+t_{k_m}$ile işaretlersek, (4.7)'den

$$S(\tau_{k_m})\psi_{k_m}=S(t)S(t_{k_m})\psi_{k_m}\underset{m\to\infty}{\overset{w}{\longrightarrow}}S(t)\psi=z\quad\left(W^{1,p}(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R})\right)\times L^2(\mathbb{R})\text{'de}$$

olup $z \in \omega_w(B)$ olduğunu elde ederiz. Böylece, $S(t)\,\omega_w(B) \subset \omega_w(B)$ sağlanır.

Diğer yandan, $\psi \in \omega_w(B)$ ise, yine (4.77)'den, $W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$'de $S(t_k)\,\psi_k \underset{k\to\infty}{\overset{w}{\longrightarrow}} \psi$ olacak şekilde $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $t_k \to \infty$ ve $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B$ dizileri vardır. $t_k \geq t \geq 0$ için $\varphi_k := S(t_k - t)\,\psi_k$ şeklinde tanımlarsak, (4.51)'den, bir $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ için $W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$'de $\varphi_{k_m} \underset{m\to\infty}{\overset{w}{\longrightarrow}} \varphi$ olacak şekilde $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. Buradan, $\varphi \in \omega_w(B)$ olduğunu elde ederiz. Dahası, Lemma 4.2.2, Lemma 4.2.3 ve Lemma 4.2.4'e göre, alt diziye geçerek, $H^1(\mathbb{R}) \times H^{-1}(\mathbb{R})$'de $\varphi_{k_{m_n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ alırız.

$$S\left(t_{k_{m_n}}\right)\psi_{k_{m_n}} = S(t)\,S\left(t_{k_{m_n}} - t\right)\psi_{k_{m_n}} = S(t)\,\varphi_{k_{m_n}}$$

olduğundan, (4.7)'den, $\left(W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})\right) \times L^2(\mathbb{R})$'de $S\left(t_{k_{m_n}}\right)\psi_{k_{m_n}} \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\longrightarrow}} S(t)\,\varphi$ elde ederiz. Böylece, $\psi = S(t)\,\varphi$ olup $\omega_w(B) \subset S(t)\,\omega_w(B)$ alırız. ■

Sonuç olarak, Lemma 4.2.2, Lemma 4.2.3, Lemma 4.2.4 ve Lemma 4.2.5'e göre, $\mathcal{A}_B := \omega_w(B)$ kümesi Teorem 4.2.1'in ifadesindeki özellikleri sağlayan yerel çekicidir.

Kaynaklar

[1] Kalantarov, V., Attractors for some nonlinear problems of mathematical physics, *Zapiski Nauchnykh Seminarov Leningradskogo 0tdeleniya Matematicheskogo Instituta im. V. A. Steklova AN SSSR, (LOMI)*, (LOMI) 152, 50-54, **1986.**

[2] Ghidaglia, J.M., Marzocchi, A., Longtime behaviour of strongly damped wave equations, global attractors and their dimension, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 22, 879-895, **1991.**

[3] Zhou, S., Global attractor for strongly damped nonlinear wave equations, *Functional Differential Equations*, 6, 451-470, **1999.**

[4] Carvalho, A.N., Cholewa, JW., Attractors for strongly damped wave equations with critical nonlinearities, *Pacific Journal of Mathematics*, 207, 287-310, **2002.**

[5] Pata, V., Squassina, M., On the strongly damped wave equation, *Communications in Mathematical Physics*, 253, 511-533, **2005.**

[6] Pata, V., Zelik, S., Smooth attractors for strongly damped wave equations, *Nonlinearity*, 19, 1495-1506, **2006.**

[7] Yang, M., Sun, C., Attractors for strongly damped wave equations, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10, 1097-1100, **2009.**

[8] Dell'Oro, F., Pata, V., Long-term analysis of strongly damped nonlinear wave equations, *Nonlinearity*, 24, 3413-3435, **2011.**

[9] Dell'Oro, F., Pata, V., Strongly damped wave equations with critical nonlinearities, *Nonlinear Analysis*, 75, 5723-5735, **2012.**

[10] Khanmamedov, AK., Global attractors for strongly damped wave equations with displacement dependent damping and nonlinear source term of critical exponent, *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A*, 31, 119-138, **2011.**

[11] Khanmamedov, AK., Strongly damped wave equation with exponential nonlinearities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 419, 663-687, **2014.**

[12] Khanmamedov, AK., On the existence of a global attractor for the wave equation with nonlinear strong damping perturbed by nonmonotone term, *Nonlinear Analysis*, 69, 3372-3385, **2008.**

[13] Chueshov, I., Lasiecka, I., *Long time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping*, Memoirs of the American Mathematical Society, 195, **2008.**

[14] Chen, F., Guo, B., Wang, P., Long time behavior of strongly damped nonlinear wave equations, *Journal of Differential Equations*, 147, 231-241, **1998.**

[15] Kalantarov, V., Zelik, S., Finite-dimensional attractors for the quasi-linear strongly-damped wave equation, *Journal of Differential Equations*, 247, 1120-1155, **2009.**

[16] Arat Z., Khanmamedov, AK., Simsek, S., Global attractors for the plate equation with nonlocal nonlinearity in unbounded domains, *Dynamics of Partial Differential Equations*, 11, 361-379, **2014**.

[17] Arat Z., Khanmamedov, AK., Simsek, S., A unique continuation result for the plate equation and an application, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39, 744-761, **2016**.

[18] Ball, J.M., Global attractors for semilinear wave equations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A*, 10, 31-52, **2004.**

[19] Khanmamedov, AK., Global attractors for von Karman equations with nonlinear interior dissipation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 318, 92-101, **2006.**

[20] Khanmamedov, AK., Şen, Z., Attractors for the Strongly Damped Wave Equation with p-Laplacian, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40, 4436-4447, **2017.**

[21] Zeidler, E., *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: I: Fixed-Point Theorems*, Springer, **1985.**

[22] Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, **1975.**

[23] Zeidler, E., *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: II/ A: Linear Monotone Operators*, Springer, **1989.**

[24] Royden, H.L., *Real Analysis*, Macmillan, New York, **1968.**

[25] Showalter, R.E. , *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, **1997.**

[26] Porter, D., Stirling, David S.G., *Integral Equations: A Practical Treatment, from Spectral Theory to Applications (Cambridge Texts in Applied Mathematics)*, **1990.**

[27] Chueshov, I., Lasiecka, I., *Von Karman Evolution Equations:Well-posedness and long-time dynamics*, Springer: New York, **2010.**

[28] Kesevan, S., *Topics in functional analysis and applications*, Wiley, **1989.**

[29] Lions, J.L., Magenes, E., *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I,* Springer Berlin Heidelberg, **1972.**

[30] Agronovich, M.S., *Sobolev Spaces, Their Generalizations, and Elliptic Problems in Smooth and Lipschitz Domains*, Springer, Heidelberg, **2015.**

[31] Babin, A.V., Vishik, M.I., *Attractors for evolution equations*, North-Holland, Amsterdam, **1992.**

[32] Larsson, S., Thomee, V., *Partial Differential Equations with Numerical Methods*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1st edition, **2003.**

[33] Lusternik, L.A., Sobolev, V.J., *Elements of Functional Analysis*, John Wiley & Sons, New York, **1961.**

[34] Cazenave, T., Haraux, A., *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Clarandon Press Oxford, **1998.**

[35] Evans, C., *Partial Differential Equations*, Graduate studies in Mathematics, Vol 19, AMS, **1998.**

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı	: Zehra ŞEN
Doğum Yeri	: Ankara
Medeni Hali	: Evli
E-posta	: zarat@hacettepe.edu.tr
Adresi	: Süvari Mah. 1768. Cad. Burç Konutları Sitesi B Blok No:20 Etimesgut/Ankara

Eğitim

Lisans	: 2004-2005 Hacettepe Üniversitesi, Yabancı Diller Yüksek Okulu, İngilizce Hazırlık 2005-2009 Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	: 2009-2012 Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, ÜDS(Üniversiteler Arası Kurul Yabancı Dil Sınavı): 93.75

İş Deneyimi

2009-.. Araştırma görevlisi, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Deneyim Alanları

–

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

–

Tezden Üretilmiş Yayınlar

1- Khanmamedov, AK., Şen, Z., Attractors for the Strongly Damped Wave Equation with p-Laplacian, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40, 4436–4447, **2017.**

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

–

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 11/05/2018

Tez Başlığı / Konusu: KUASİLİNEER DALGA DENKLEMİNİN UZUN ZAMAN DAVRANIŞI

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 106 sayfalık kısmına ilişkin, 11/05/2018 tarihinde tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 8'dir.

Uygulanan filtrelemeler:
1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar hariç/~~dâhil~~
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

11/05/2018

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza

Adı Soyadı:	Zehra ŞEN
Öğrenci No:	N12143776
Anabilim Dalı:	Matematik
Programı:	Matematik-Doktora
Statüsü:	☐ Y.Lisans ☒ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Prof. Dr. Azer HANMEHMETLİ

(Unvan, Ad Soyad, İmza)