T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ İSPATLA İLGİLİ ALAN VE PEDAGOJİK ALAN BİLGİLERİNİ GELİŞTİRMEYE YÖNELİK BİR DERS TASARIMI

FİKRET CİHAN
(Doktora Tezi)

İstanbul – 2019

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ İSPATLA İLGİLİ ALAN VE PEDAGOJİK ALAN BİLGİLERİNİ GELİŞTİRMEYE YÖNELİK BİR DERS TASARIMI

FİKRET CİHAN
(Doktora Tezi)

Danışman
Doç. Dr. Hatice Akkoç

İstanbul - 2019

ONAY

Fikret Cihan tarafından hazırlanan "Matematik Öğretmen Adaylarının İspatla İlgili Alan ve Pedagojik Alan Bilgilerini Geliştirmeye Yönelik Bir Ders Tasarımı" konulu bu çalışma, ..21../.06./2019 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda jüri tarafından başarılı bulunmuş ve doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

	Adı Soyadı	İmza
TEZ DANIŞMANI	Doç. Dr. Hatice AKKOÇ	
JÜRİ ÜYESİ	Prof. Dr. İlyas YAVUZ	
JÜRİ ÜYESİ	Dr. Öğr. Üyesi Yeşim İMAMOĞLU	
JÜRİ ÜYESİ	Doç. Dr. Fatma ASLAN TUTAK	
JÜRİ ÜYESİ	Doç. Dr. Hülya KILIÇ	

ÖZGEÇMİŞ

2003	Balıkesir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Lisans Programından mezuniyet
2008	Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisans Programından mezuniyet
2008	Kırklareli Üniversitesi Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu'na Öğretim Görevlisi olarak atanma
2011	Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programından mezuniyet
2015	Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı Doktora Programına Giriş

AKADEMİK ÇALIŞMALAR

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında (proceedings) basılan bildiriler

Cihan, F. ve Akkoç, H. (2018, Mayıs). İspata Yönelik Alan ve Pedagojik Alan Bilgisi Geliştirmeye Yönelik Bir Ders Tasarımı. Vth International Eurasian Educational Research Congress (EJER-2018)(Tam Metin Bildiri/Sözlü Sunum).

Cihan, F., & Akkoç, H. (2018, June). Investigating Preservice Mathematics Teachers' Proving Skills. International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2018)(Özet Bildiri/Sözlü Sunum).

Cihan, F., & Akkoç, H. (2018, June). Investigation of Secondary Pre-service Mathematics Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Proof. International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2018)(Özet Bildiri/Sözlü Sunum).

Cihan, F., & Akkoç, H. (2018, June). Investigation of Secondary Pre-service Mathematics Teachers' Difficulties with Proving. International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2018)(Özet Bildiri/Sözlü Sunum).

Cihan, F. ve Akkoç, H. (2018, Eylül). Ortaöğretim Matematik Öğretmen Adaylarının İspatlamaya Yönelik Görüşlerinin İncelenmesi. 13. Uluslararası Balkan Eğitim ve Bilim Kongresi (BES-2018)(Özet Bildiri/Sözlü Sunum).

Cihan, F. ve Akkoç, H. (2017, Nisan). İspatla İlgili Türkiye'de Matematik Eğitimi Alanında Yapılmış Lisansüstü Tezlerin Doküman İncelemesi. VII. Uluslararası Eğitimde Araştırmalar Kongresi (ULEAD-2017) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum).

Yayınlanmamış Bildiriler

Cihan, F., & Akkoç, H. (2019, February). Developing Preservice Mathematics Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Proof Schemes: An Intervention Study. Paper presented at The Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11).

Ulusal Projeler

Cihan, F. Matematik Öğretmen Adaylarının İspata Yönelik Pedagojik Alan Bilgilerinin Geliştirilmesi ve İncelenmesi. Yükseköğretim Kurumları tarafından destekli bilimsel araştırma projesi. (Marmara BAP- Araştırmacı) (Yürütücü Doç. Dr. Hatice AKKOÇ) (12.04.2018-**Devam Ediyor**).

İLETİŞİM BİLGİLERİ

Gsm : 0 505 812 02 97

E-Mail : fikret_cihan@hotmail.com

ÖNSÖZ

Bu çalışmada ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik kapsamlı ve sürdürülebilir bir lisans dersi tasarlanmıştır. Amacına uygun, kasıtlı ve tutarlı bir şekilde hazırlanan bu ders tasarımının ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının hem kalan öğrencilik süreçlerine hem de gelecekteki öğretmenlik süreçlerine olumlu katkılar sağlayacağı umulmaktadır. Bu çalışmanın benzer ders tasarımı yapmak isteyen araştırmacılar ve akademisyenlere rehber nitelikte bir araştırma olduğu söylenebilir.

Doktora öğrenimime başladığım günden bu zorlu süreci tamamladığım bu güne kadar bana her konuda tüm asaletiyle destek olan, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum değerli bilim insanı, tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Hatice AKKOÇ'a,

doktora eser izleme jüri üyeliğimi kabul ederek verdikleri dönütlerle tezime değer katan değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. İlyas YAVUZ ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Yeşim İMAMOĞLU'na,

doktora eser savunma jüri üyeliği davetimizi kabul ederek görüşlerini sunan değerli hocalarım Sayın Doç. Dr. Fatma ASLAN TUTAK ve Sayın Doç. Dr. Hülya KILIÇ'a,

doktora tezimin uygulama aşamasında bize her türlü desteği veren değerli hocam Sayın Öğr. Gör. Dr. Hande GÜLBAĞCI DEDE'ye,

ve hayatımın her aşamasında bana destek olan değerli AİLEM'E şükranlarımı sunarım.

Bu doktora tezi Marmara Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu Başkanlığı tarafından EGT-C-DRP-120418-0202 numaralı proje ile desteklenmiştir.

Fikret CİHAN

ÖZET

Bu araştırmanın amacı ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarlamaktır. Bu araştırmada araştırmanın özüne ve doğasına en uygun yöntem olarak tasarım tabanlı araştırma yöntemi kullanılmıştır. Tasarım tabanlı bu araştırmada model olarak Analiz, Tasarım, Geliştirme, Uygulama ve Değerlendirme aşamalarından oluşan ADDIE Modeli tercih edilmiştir.

Bu araştırma veri analiz teknikleri ve verilerin yorumlanması bakımından değerlendirildiğinde karma yöntem desenlerinden açımlayıcı sıralı karma yöntem desenine göre desenlenmiştir.

Çalışmanın nicel aşaması için örneklem uygun örnekleme tekniği ile belirlenmiştir. Dersin uygulamasında 2017-2018 Eğitim Öğretim Yılı Bahar Döneminde Marmara Üniversitesi Matematik Öğretmenliği Programı ikinci sınıfında dersi alan 22 öğretmen adayı çalışmanın örneklemini oluşturmuştur. Çalışmanın nitel aşaması için çalışma grubu teorik örnekleme tekniği ile belirlenmiştir. İspatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerine göre dört öğretmen adayı araştırmanın nitel çalışma grubunu oluşturmuştur.

Bu araştırma kapsamında veri toplama aracı olarak doküman, ders gözlem formu, anket, gözlem ve mülakat gibi araçlar kullanılmıştır. Ders tasarımına ait bulgulara ulaşmak için dokümanlar kullanılmıştır. Uygulama aşamasına ait bulgulara ulaşmak için Ders Gözlem Formları ile kamera kayıtları kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerini belirlemek için İspat Alan Bilgi Anketi (İSABA), ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini belirlenmek için de İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi (İSPABA) geliştirilmiştir. Dersin değerlendirilmesi için ise Ders Değerlendirme Anketi hazırlanmıştır.

Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini derinlemesine incelemek için yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır.

Bu karma yöntem araştırmasında nicel ve nitel veri analiz teknikleri kullanılmıştır. Dersin tasarımı oluşturulurken dokümanlar doküman analizi ile analiz edilmiştir. İSABA ve İSPABA'den elde edilen veriler SPSS 16.0 paket programından faydalanılarak doğrudan ve kestirisel analiz ile analiz edilmiştir. Ders Değerlendirme Anketi, gözlem ve yarı yapılandırılmış mülakatlar betimsel ve içerik analizi ile analiz edilmiştir. Nitel veri analizi için NVivo 12 programı kullanılmıştır.

Araştırmanın sonunda iki hedef ve altı kazanımdan oluşan kapsamlı ve sürdürülebilir bir ders tasarımına ulaşılmıştır. Ders tasarımı ispatın modern bileşenleri, ispat şemaları, ispat yöntemleri, ispatla ilgili öğrenci güçlükleri, bu güçlüklerin nedenleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri gibi konuları içermektedir.

Araştırmanın nicel bulguları tasarlanan dersin öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirdiğini ortaya koymuştur. Araştırmanın nitel bulguları da nicel bulgularını desteklemektedir.

Bu ders tasarımının farklı üniversitelerde ve matematikle ilgili farklı bölümlerde uygulanması tavsiye edilmektedir. Bu araştırmanın farklı alanlarda benzer müdahaleler tasarlamak isteyen araştırmacılar ve akademisyenlere rehber ve yol gösterici nitelikte bir araştırma olduğu söylenebilir.

Anahtar Kelimeler: İspat, ispatlama, ispatla ilgili alan bilgisi, ispatla ilgili pedagojik alan bilgisi, ispat öğretimi, tasarım tabanlı araştırma, ders tasarımı, ADDIE Modeli, öğretmen eğitimi, ortaöğretim matematik öğretmen adayı

ABSTRACT

The aim of this research is to design a course for developing secondary pre-service mathematics teachers' content knowledge and the pedagogical content knowledge of proof. In this research, the design-based research method has been used, which is the most suitable method per the essence and nature of the research. In this design-based design, ADDIE Model which is composed of Analysis, Design, Development, Application and Evaluation stages has been preferred as a model.

When this research have been evaluated in terms of data analysis techniques and data interpretation, it has been designed according to explanatory sequential mixed method design among mixed method designs.

For the quantitative phase of the study, sample has been determined by convenience sampling technique. At implementation of course, the sample of the study constitutes 22 pre-service mathematics teachers taking the course in the second year of Secondary Mathematics Teaching Department at Marmara University in 2017-2018 Academic Year, Spring Semester. For the qualitative phase of the study, participants have been determined by theoretical sampling technique. Four pre-service teachers were selected based on their content knowledge and pedagogical content knowledge about proof.

In the scope of this research, data collection tools such as document, course observation form, survey, observation and interview have been used. Documents have been used to reach the findings regarding course design. Course Observation Forms and video-camera recordings have been used to reach the findings regarding implementation phase. The Content Knowledge of Proof Survey (CK-P Survey) has been developed to determine pre-service teachers' content knowledge of proof, and The Pedagogical Content Knowledge of Proof Survey (PCK-P Survey) has been developed to determine their pedagogical content knowledge of proof. Besides, The Course Evaluation Survey has been prepared to evaluate the course.

Semi-structured interviews have been carried out to examine pre-service teachers' content knowledge and pedagogical content knowledge of proof thoroughly.

Qualitative and quantitative data analysis techniques were used in this mixed method research. While creating the course design, the documents were analysed by document analysis. Data obtained from CK-P Survey and PCK-P Survey have been analysed by direct and predictive analysis by making use of SPSS 16.0 packaged software. The Course Evaluation Survey, observation and semi-structured interviews were analysed by descriptive and content analysis. For the qualitative data analysis, the NVivo 12 program was used.

At the end of the research, a comprehensive and sustainable course design has been obtained comprising of two targets and six learning outcomes. The course design includes topics such as modern components of proof, proof schemes, proof methods, students' difficulties regarding proof, reasons of these difficulties and teaching strategies to overcome these difficulties.

The quantitative findings of the research have revealed that the designed course has developed pre-service teachers' content knowledge and pedagogical content knowledge of proof. Additionally, qualitative findings of the research support quantitative findings.

This course design is recommended to to be used in different universities and mathematics-related departments. It can be said that this research is in a quality of being both a guide and a guiding spirit for the researchers and academicians who are willing to design similar interventions in different areas.

Key Words: Proof, proving, content knowledge about proof, pedagogical content knowledge about proof, proof teaching, design-based research, course design, ADDIE Model, teacher education, secondary pre-service mathematics teacher

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

KISALTMALAR

ADDIE	: Analysis, Design, Development, Implementation, Evaluation
AEF	: Atatürk Eğitim Fakültesi
Bkz	: Bakınız
CCSS	: Common Core State Standards
CCSSO	: Council of Chief State School Officers
DGY	: Dinamik Geometri Yazılımları
İSABA	: İspat Alan Bilgi Anketi
İSPABA	: İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi
MEB	: Millî Eğitim Bakanlığı
MÖ	: Milattan Önce
MÜ	: Marmara Üniversitesi
NAEYC	: National Association for the Education of Young Children
NGA	: National Governors Association
NBPTS	: National Board for Professional Teaching Standards
NCTM	: National Council of Teachers of Mathematics
NRC	: National Research Council
OECD	: Organization of Economic Co-operation and Development
PIRLS	: Progress in International Reading Literacy Study
PISA	: Programme for International Student Assessment
PSSM	: Principles and Standards for School Mathematics
SPSS	: Statistical Package for the Social Sciences
TDK	: Türk Dil Kurumu
TIMMS	: Trends in International Mathematics and Science Study
TtA	: Tasarım Tabanlı Araştırma

MATEMATİKSEL VE İSTATİSTİKSEL SEMBOLLER

$\forall$	: Her (Evrensel Niceleyici)
$\exists$	: En Az Bir (Varlıksal Niceleyici)
$\exists!$	: Sadece ve sadece bir (Teklik Niceleyici)
$N^{+}(Z^{+})$	: Sayma Sayıları Kümesi (Pozitif Tam Sayılar Kümesi)
Z^{-}	: Negatif Tam Sayılar Kümesi
$N(Z_{\geq 0})$	: Doğal Sayılar Kümesi
Z	: Tam Sayılar Kümesi
Q	: Rasyonel Sayılar Kümesi
R	: Reel (Gerçel) Sayılar Kümesi
$R^{+}(R_{>0})$	: Pozitif Reel (Gerçel) Sayılar Kümesi
R^{-}	: Negatif Reel (Gerçel) Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık Sayılar Kümesi
$\in$	: Elemanıdır İşareti
$\notin$	: Elemanı Değildir İşareti
$\mid (:)$	: Öyle ki İşareti
$\mid$	: Böler İşareti
$\nmid$	: Bölmez İşareti
$\perp$	: Diklik İşareti
$=$	: Eşittir İşareti
$\neq$	: Eşit Değildir İşareti
$\equiv$	: Denk (Mantıksal Eşdeğer) İşareti
$\not\equiv$	: Denk Değil (Mantıksal Eşdeğer Değil) İşareti
$\cong (\approx)$	: Yaklaşık İşareti
$,$	: Ondalık İşareti
dd	: Doğruluk Değeri
p	: Olasılık Değeri
r	: Etki Büyüklüğü
$\bar{x}$	: Ortalama
ss	: Standart Sapma
Min	: Minimum Değer

Max	: Maksimum Değer
N	: Katılımcı Sayısı
T	: Totoloji
Ç	: Çelişki
$\neg$	: Değilleme Eklemi
$\vdash$	: Mantıksal Anlam Eklemi
$\wedge$	: Tümel Evetleme Eklemi (Ve İşareti)
$\vee$	: Tikel Evetleme Eklemi [Veya İşareti (Dâhili Veya İşareti)]
$\veebar$ $(\oplus)$	: Harici Veya İşareti
$\Rightarrow$	: Koşul Eklemi (İse İşareti)
$\Leftarrow$	: Koşul Eklemi
$\Leftrightarrow$	: Karşılıklı Koşul Eklemi (Ancak ve Ancak İşareti)
$\emptyset$	: Boş Küme İşareti
E	: Evrensel Küme İşareti
$s(A)$	: A Kümesinin Eleman Sayısı
A'	: A Kümesinin Tümleyen Kümesi Gösterimi
$\subset$	: Altküme İşareti
$\subseteq$	: Altküme veya Eşit Küme İşareti
$\supset$	: Kapsar İşareti
$\nsubseteq$	: Altküme ve Eşit Küme Değil İşareti
$\cup$	: Birleşim Kümesi İşareti
$\cap$	: Kesişim Kümesi İşareti
$\setminus$	: Fark Kümesi İşareti
$<$	: Küçük İşareti
$\leq$	: Küçük Eşit İşareti
$>$	: Büyük İşareti
$\geq$	: Büyük Eşit İşareti
(a, b)	: $\{x \mid \mathrm{a} < \mathrm{x} < \mathrm{b}\}$
$[a, b]$	: $\{x \mid \mathrm{a} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b}\}$
∞	: Sonsuz İşareti
%	: Yüzde İşareti

!	: Faktöriyel İşareti
$\sum$	: Toplam Sembolü (Sigma Harfi)
Π	: Çarpım Sembolü
π	: Pi Sayısı İşareti
e	: e Sayısı İşareti
α	: Alfa Harfi
Mod	: Aritmetik Modül
i	: $\sqrt{-1}$
$\overline{w}$	: w Karmaşık Sayısının Eşleniği
$P(n)$	: n Değişkenine Bağlı Önerme
f	: Frekans (Sıklık)
f^{-1}	: f Fonksiyonunun Tersi
f_n	: Fibonacci Sayı Dizisinin Bir Elemanı
L_n	: Lucas Sayı Dizisinin Bir Elemanı
o	: Bileşke İşareti
$a^n, a \in R$	: n Değişkenine Bağlı Üstel Fonksiyon
sin	: Sinüs Fonksiyonu
cos	: Cosinüs Fonksiyonu
tan	: Tanjant Fonksiyonu
cot	: Kotanjant Fonksiyonu
sec	: Sekant Fonksiyonu
$cosec$	: Kosekant Fonksiyonu
log	: Logaritma Fonksiyonu
ln	: e Tabanında Logaritma Fonksiyonu
$\frac{d}{dx}f$	: f Fonksiyonunun x Değişkenine Göre Birinci Türevi
$\|x\|$	: Mutlak Değer x
X_{2x2}	: $2x2$ Tipinden Bir Matris
I_{2X2}	: $2x2$ Tipinden Birim Matris
$[\![x]\!]$	: Tam Değer x
X^T	: X Matrisinin Transpozezi

İNGİLİZCE TÜRKÇE TERİMLER

Content knowledge	: Alan bilgisi
Design-based research	: Tasarım tabanlı araştırma
Direct proof	: Doğrudan ispat
Disprove	: Çürütmek
Indirect proof	: Dolaylı ispat
Mixed research method	: Karma araştırma yöntemi
Pedagogical content knowledge	: Pedagojik alan bilgisi
Principle of mathematical induction	: Matematiksel tümevarım prensibi
Probability value	: Olasılık değeri
Proof by cases	: Durum yoluyla ispat
Proof by contradiction	: Çelişki ile ispat
Proof by contrapositive	: Olmayana ergi yoluyla ispat
Proof by counterexample	: Aksine örnek verme yoluyla ispat
Proof by deductive	: Tümdengelimle ispat
Proof by exhaustion	: Tüketerek ispat
Proof by induction	: Tümevarımla ispat
Proof methods	: İspat yöntemleri
Proof schemes	: İspat şemaları
Proof teaching	: İspat öğretimi
Strong induction	: Güçlü tümevarım
Student difficulties	: Öğrenci güçlükleri
Teaching strategies	: Öğretim stratejileri
Weak induction	: Zayıf tümevarım
Wilcoxon signed rank test	: Wilcoxon işaretli sıralar testi

BÖLÜM I: GİRİŞ

Matematiksel akıl yürütme ve ispat insanların olaylar ve olgular hakkındaki fikirlerini geliştirip onlara bu fikirleri ifade etmenin farklı ve güçlü yollarını sunmaktadır (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Matematikçilerin ve matematik eğitimcilerin hem fikir olduğu bir konu matematiksel akıl yürütme ve ispatın birbirinden bağımsız düşünülemeyeceği konusudur. Matematiksel akıl yürütme ve ispat birbirlerinin gerekliliğidir. Çünkü ispat fikir ve sezgileri içeren bir dizi resmi adımlardan oluşmaktadır (Hanna ve De Villiers, 2012). Burada atılan tüm adımlar gerekli olmalı ve bu adımlar arasında boşluk bulunmamalıdır (Duval, 2007). Her bir adım ek matematiksel bilgilerle desteklenerek sonraki adımlar oluşturulur (Heinze ve Reiss, 2003). Bu resmi adımlar akıl yürütmenin bir ürünüdür. İspatlama bu haliyle karmaşık bir süreç (Hoyles ve Healy, 2007) ve pek çok öğrenci için de zorlukların kökeni olduğundan dolayı matematik eğitimi içinde ayrıcalıklı bir çalışma alanı olarak görülmektedir (Arsac, 2007).

Bu bölümde araştırmanın problem durumuna, amacına, problem cümlesine, araştırma sorularına, önemine, sınırlılıklarına, sayıltılarına ve tanımlarına yer verilmiştir.

1.1. Problem Durumu

Tarih boyunca insanlar iddialarını ispatlama ihtiyacı duymuşlardır. Bu yüzdendir ki ispat kavramı geçmişten günümüze günlük hayatta kullanılagelmiş bir kavramdır. Bilimsel gelişmelerle birlikte bilimin belki de en önemli amacına istinaden ispat kavramı farklı anlamlarıyla bilim dallarının içinde de kendine yer bulmuştur. İspat kavramı farklı bilim dallarının kendine özgü prensipleri içinde yine kendine özgü şekilleriyle anlamlandırılmıştır. Nihayetinde ispat kavramı hukuk, tıp, mühendislik, temel bilimler, eğitim bilimleri ve hatta sosyal bilimlerde kullanılan bir kavram haline gelmiştir. Özellikle matematik, geometri ve bunların eğitiminde ispat kavramı önemli bir yer tutmaktadır. Kısacası bir fikrin, bir iddianın veya bir önermenin olduğu her yerde ispat kavramından bahsetme gerekliliği doğmaktadır. İstisnai olarak bazı kabullenmeleri hariç tutarsak bir önermenin olduğu her durumda bu önermenin doğruluğunu gösterecek bir ispata veya yanlışlığını gösterecek bir çürütmeye ihtiyaç vardır (Gossett, 2003).

Matematikçiler açısından incelendiğinde, matematikçiler bazı önermelerin doğru veya yanlış olduğunu söyleyebilecekleri içgüdüsel ve sezgisel bir hisse sahip olsalar da ispat bu hislerin onları aldatıp aldatmadığının saptanmasını sağlamaktadır (Plumpton, Perry ve Shipton, 1984). İspat sezgi, inanç, kişisel görüş ve sosyal normlardan etkilenir ancak matematiksel olgularla, sonuçlarla, görsel ve deneysel delillerle koordineli mantıksal ve tümdengelimli argümanlara dayandırılmalıdır (Hoyles ve Healy, 2007). Çünkü ispatın amacı herhangi bir ifadenin doğru veya yanlış olduğunu gösterip, onu bütün durumlara genellemektir (Baki, 2015). İspat doğrulamanın bir şekli olmakla birlikte her doğrulamanın da ispat olmadığı bir gerçektir (National Research Council [NRC], 2001). Doğrulama ispatın yalnızca ilk gerekliliğidir (Bell, 1976). Mason, Burton ve Stacey (1982) doğrulama süreçlerini kendini, bir arkadaşını ve bir düşmanını ikna etme olarak ifade etmiştir. İspatın da diğer bir amacı ikna etmektir (Hersh, 1993). Bunu yaparken ispatlar ikna edici delillere dayandırılmalıdır (Hanna, 1991). İspat kelimesi farklı bilim dallarında farklı anlamlar içerse de hepsinin ortak özelliği ikna edici argümanlardan oluşmasıdır (Bloch, 2011). Yani ispat bir önermenin doğru veya yanlış olduğunu göstermekle kalmayıp onun doğru ise neden doğru, yanlış ise neden yanlış olduğunu da göstermelidir (Hanna, 2000) ki ikna edici olsun. Örneğin Öklid geometrisine ait ispatlar açıklık konusunda eleştiriye mahal vermeyecek şekilde okuyucuyu ikna etmeyi amaçlar (Arsac, 2007). Teoremlerin ispatlarını gereği kadar açıklayıcı ve geçerli bulmayan matematikçiler ise bu önermeler için daha açıklayıcı ve daha geçerli ispatlar bulmaya çalışmışlardır (Erdoğan, 2009). Özellikle ikna edilmesi gereken kişiler öğrenciler ise aşikârlık konusu üzerinde düşünülmesi gereken bir konudur. Öğrencilerin ispatları daha iyi anlayabilmeleri için öğretmenlerin de sınıflarında teoremler için daha açıklayıcı ispatları seçmeleri gerekmektedir. Yani matematik öğretmenlerinin görevlerinden birisi ispatı anlatmaksa da bu ispatları onların anlayacağı açıklıkta yapmak da onların görevlerinden birisidir.

İspat matematiğin merkezinde (Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002; Stylianou, Chae ve Blanton, 2006; Arsac, 2007; Ko, 2010) ve pratiğinde (Bleiler, Thompson ve Krajcevski, 2014; Lai ve Weber, 2014; Dawson, 2015; Samkoff ve Weber, 2015) önemli yer tutar ki bu yüzden matematiğin kalbi olarak nitelendirilir (Güven, Çelik ve Karataş, 2005). İspatlama ise matematikte oldukça gerekli bir aktivitedir (Almeida, 2000, 2001). Çünkü yeni teoremleri keşfi ve ispatı matematiğin zirve noktası gibi düşünülebilir (Tall, Yevdokimov, Koichu, Whiteley, Kondratieva ve Cheng, 2012). Matematiğin ilerlemesi ancak matematiksel hiyerarşiye bağlı olarak yeni teoremlerin keşfi ve bunların ispatı ile mümkündür. İspat matematik biliminde olduğu kadar matematiğin öğrenimi (Selden ve Selden, 1987; Knuth, 2002a) ve öğretimi (Hanna, 1990) açısından da çok önemli ve ayrı bir yere sahiptir. İspat matematik eğitiminde kendine hem amaç hem de araç olarak yer bulmaktadır. İspatın öğrenilmesi kendi başına bir amaç olduğu gibi diğer tüm matematiksel konuların anlaşılmasına katkı sağlayabileceğinden dolayı da ispat matematik eğitiminde bir araçtır. İspat açıklayıcı işlevi sayesinde matematiğin anlamlandırılarak öğrenilmesi için katkılar sağlayan bir araçtır (Knuth, 2002a). Matematiksel anlayışı geliştirmek için bir araç olarak kullanılması gereken ispat matematik eğitiminin de vazgeçilmez bir bileşeni olmalıdır (Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002).

İspat kavramı ile matematiksel akıl yürütme (matematiksel muhakeme) kavramları matematik eğitimi alanında sıklıkla birbirleriyle ilişkilendirilerek kullanılırlar (Hemmi, Lepik ve Viholainen, 2013). Matematiksel akıl yürütme birçok temele dayanır ki bunlardan birisi de matematiksel ispattır (Peltomäki ve Back, 2009). Çünkü ispat matematiksel akıl yürütmenin resmi bir biçimidir (NCTM, 2000). Buna karşılık matematiksel ispatı doğru bir şekilde yapabilmek için matematiksel akıl yürütme fonksiyonlarına ihtiyaç vardır. Çünkü matematikçiler ispat yaparken en iyi tanımlanmış muhakeme ilkelerini kullanırlar (Cunningham, 2012). Ayrıca kalıcı ve geliştirilebilir bir matematiksel bilgi de ancak matematiksel akıl yürütme ile sağlanabilir (Umay ve Kaf, 2005). Aynı şekilde ispatın amaçlarından birisi de budur (Güler ve Dikici, 2012).

Öğrencilerin matematiksel akıl yürütmeyi başarılı bir şekilde gerçekleştirebilmeleri için matematiği enstrümantal (işlemsel) anlamadan ziyade ilişkilendirerek (ilişkisel) anlamalarına ihtiyaçları vardır. Matematik öğretiminde en çok karşılaşılan sorunlardan birisi olan anlama kavramını Bergen Üniversitesi'nden Profesör Stieg Mellin-Olsen *ilişkilendirerek-ilişkisel (relational) anlama ve enstrümantal- işlemsel (instrumental) anlama* olarak ikiye ayırmıştır (Skemp, 1976). Skemp (1976) makalesinde bu sınıflamaya derinlemesine anlam kazandırmış, bu iki anlamayı tanımlayıp, olumlu ve olumsuz yönlerini açıkça ortaya koymuştur. İlişkilendirerek-ilişkisel (relational) anlama öğrencilerin matematiği anlayarak öğrenmelerinin sayesinde matematiksel bilgi üretmede kendi yaratıcılığını kullandığı ve matematiksel kavramları, tanımları, formülleri birbiriyle ilişkili düşünceler ağı olarak gördüğü anlamadır (Baki, 2015). Matematiksel akıl yürütme ve ispat yapma süreçlerinde gerekli olan anlama da budur. Çünkü matematiksel akıl yürütme ve ispat öğrenciler için anaokulu öğreniminden başlayıp lise öğreniminin sonuna kadar tüm matematiksel deneyimlerinin tutarlı bir parçası olmalı (NCTM, 2000) ve diğer matematiksel bilgileriyle zihinsel bir ağ kurmalıdır. Zaten matematiksel bir tanım yapılırken veya bir teorem ifade edilip ispatlanırken önceki matematiksel tanımlardan ve teoremlerden faydalanılır (Gossett, 2003). Bu ispatın kendisine daha geniş bir alan bulduğu geometri için de geçerlidir. Amerika Birleşik Devletleri'ndeki birçok eyaletinin hem fikir olduğu ortak temel eyalet standartlarına (Common Core State Standards [CCSS]) göre öğrenciler lise hayatları boyunca daha önceki öğrenim hayatlarındaki geometri bilgilerini daha resmi bir dille kullandıkları gibi tanımları daha eksiksiz, ispatları da daha titiz bir şekilde yaparlar (National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers [NGA Center & CCSSO], 2010).

NCTM (2000) "Principles and Standards for School Mathematics" [PSSM] adlı raporunda öğretim programlarının, öğrenim hayatlarının başından üniversiteye kadar tüm öğrencilere kazandırması gereken akıl yürütme ve ispat standartlarını aşağıdaki gibi belirlemiştir. Buna göre öğrenciler (NCTM, 2000, s. 56)

- Akıl yürütme ve ispatı matematiğin temel unsurları olarak kabul eder,
- Matematiksel hipotezler kurabilir ve bunları sorgulayabilir,
- Matematiksel iddiaları ve ispatları geliştirebilir ve değerlendirebilir,
- Çeşitli akıl yürütme ve ispat yöntemlerini seçebilir ve kullanabilirler.

5-16 yaş arası öğrencilere ulusal bir öğretim programının uygulandığı İngiltere'de matematik öğretim programının amaçlarından birisi "tüm öğrencilerin bir dizi sorgulamalar yaparak, matematiksel ilişkiler ile genellemeleri tahmin ederek ve matematiksel dil kullanıp bir iddia, doğrulama veya ispat geliştirerek matematiksel sonuçlara ulaşmasını sağlamaktır" (Department for Education, 2014). Anahtar kademe 1, anahtar kademe 2, anahtar kademe 3 ve anahtar kademe 4 adı verilen dört "anahtar kademeden" oluşan (Department for Education, 2014) bu öğretim programında akıl yürütme anahtar kademe 1 ile birlikte (Department for Education, 2013a), ispat ise anahtar kademe 3 ile birlikte (Department for Education, 2013b) programda yerini almaktadır. Ülkemizde de eğitimle ilgili karar alıcı merci olarak Millî Eğitim Bakanlığı'nın [MEB] ilkokul ve ortaokul öğretim programında akıl yürütme ile ilgili, lise öğretim programında ise akıl yürütme ve ispatla ilgili öğrenciler için hedeflediği davranışlar ve kazanımlar bulunmaktaydı (MEB, 2015, MEB, 2013a, MEB, 2013b). Ancak mevcut ortaöğretim programında ispatla ilgili sadece “Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar” kazanımına (MEB, 2018, s. 18) yer verilmiştir.

Yukarıdaki ifadelerden de anlaşılacağı gibi uluslararası öğretim programlarında akıl yürütme ve ispatla ilgili öğrenciler için bazı standartlar, hedefler ve kazanımlar bulunmaktadır. Bu standartlar, hedefler ve kazanımlar öğrencilerin başarıları için oldukça önemli bir basamaktır. Tüm ülkelerdeki eğitimle ilgili karar alıcılar ve onu uygulayanlar için öğrencilerin ulusal ve uluslararası başarı düzeylerinin arttırılması önemli hedeflerden biridir. Öğrencilerin başarılarını uluslararası düzeyde ölçen PISA (Programme for International Student Assessment), TIMMS (Trends in International Mathematics and Science Study) ve PIRLS (Progress in International Reading Literacy Study) gibi sınavlarda ülkemiz öğrencilerinin aldığı sonuçların ortalaması genel başarı ortalamasının altında kalmaktadır (MEB, 2017). PISA 2015 uygulamasında tüm ülkelerin (72 ülke) matematik okuryazarlığı ortalama puanı 461 ve OECD (Organization of Economic Co-operation and Development) üyesi ülkelerin (35 ülke) matematik okuryazarlığı ortalama puanı 490 iken Türkiye ortalaması 420’de kalmıştır (MEB, 2016a). TIMMS 2015 araştırmasına 4. sınıf düzeyinde katılan 49 ülke arasında Türkiye 483 puan ile matematikte 36. sırada, 8. sınıf düzeyinde katılan 39 ülke arasından ise 458 puan ile matematikte 24. sırada yer almaktadır (MEB, 2016b). PISA öğrencilerin matematik performanslarını “matematiksel durumları formüle etme, matematiksel kavramları, olguları, işlemleri ve akıl yürütmeyi kullanma ile matematiksel sonuçları yorumlama, kullanma ve değerlendirme” ile ilgili sorular aracılığıyla ölçmektedir (Organization of Economic Co-operation and Development [OECD], 2016, s. 14). TIMMS her iki düzey matematik başarı testinde de soruları öğrencilerin “bilme, uygulama ve akıl yürütme” bilişsel düzeylerine göre hazırlamaktadır (MEB, 2016b). Öğrencilerin matematik ve fen başarı düzeylerini uluslararası düzeyde ölçen bu sınavlarda da matematiksel akıl yürütmenin önemi ortaya çıkmaktadır. Matematiksel akıl yürütmenin ispattan ayrı düşünülemeyeceği ve bu sınavlara giren öğrencilerin yaş grupları da dikkate alındığında ispat öğretiminin ülkemizdekinin aksine daha küçük yaşlarda başlamasının gerekliliği görülmektedir. NCTM’in (2000) PSSM raporunda ki anaokulu vurgusuna tezat ülkemizde öğrenciler ispatlamayla lisans derslerinde karşılaşılmaktadır. İşte derslerdeki ispata bu ani, hızlı ve altyapısız geçiş öğrencilerde öğrenme güçlüklerine sebebiyet vermektedir (Moore, 1994).

Öğrencilerin hedef davranışları kazanmasında önemli bir etken öğretim programları iken diğer önemli ve aktif etken de öğretmendir. Bu yüzden öğrencilere kazandırılması beklenen hedef davranışlar konusunda öğretmenlerin yeterli olması gerekmektedir. Öğretmenlik mesleğine ait "Öğretmenlik Mesleği Genel Yeterlikleri" (MEB, 2008) ve ilköğretim öğretmenlerinin branşlarına ait "Öğretmenlik Mesleği Özel Alan Yeterlikleri" (MEB, 2008) Millî Eğitim Bakanlığı tarafından belirlenmiştir. Bunlara ek olarak bakanlık bünyesindeki Öğretmen Yetiştirme ve Eğitimi Genel Müdürlüğü'nce ortaöğretim alan öğretmenleri için de "Öğretmenlik Mesleği Özel Alan Yeterlikleri (Ortaöğretim)" (MEB, 2011b) belirlenmiştir. MEB'in (2011b) belirlediği bu özel alan yeterlikleri 4 ana yeterlik ve 14 alt yeterlikten oluşmaktadır. Bu ana yeterliklerden birincisini '"matematik alan bilgisi" oluşmaktadır ki bu ana yeterliğin alt yeterliklerinden biri "matematiksel süreçleri kullanarak matematiksel bilgi oluşturabilme" olarak belirlenmiştir. Bu alt yeterliğin 9 performans göstergesi ise aşağıdaki gibi belirlenmiştir (MEB, 2011b, s. 5).

- Matematiksel düşünce, fikir ve kavramları ifade ederken farklı yollar (cebirsel, geometrik, grafiksel, tablo, sözel vb.) kullanır.
- Matematiksel önermeleri doğrulamak için tümevarım, olmayana ergi, doğrudan ispat gibi uygun ispat yöntemlerini kullanır.
- Sezgisel akıl yürütme ve biçimsel ispatın matematiksel düşünmedeki tamamlayıcı ilişkisini örnekleriyle açıklar.
- Verilen önermelerden tümdengelim yöntemini kullanarak geçerli çıkarımlar yapar.
- Matematiksel ispat sürecinde gerek ve yeter şartları belirler.
- Bir problemi çözmek için uygun stratejileri (şema, tablo vb. çizmek, liste hazırlamak, örüntü aramak, problemi sadeleştirmek, vb.) kullanır.
- Bir problemi çözmek için uygun araç ve teknolojileri kullanır.
- Matematiksel problemleri farklı yollarla çözer.

Benzer şekilde Amerika'da öğretmenler tarafından kurulan ve başarılı öğretmenleri sertifikalandıran meslek kuruluşu National Board for Professional Teaching Standards (NBPTS) 11-18+ yaş arası öğrencilerin matematik öğretmenlerinin başarı standartları için 10 standart belirlemiştir ve bunlardan birisi de matematik bilgisidir (NBPTS, 2010). Öğretmenlerin matematik bilgisi içinde ispatla ilgili sahip olması gereken standartlar ise aşağıdaki gibi belirlenmiştir (NBPTS, 2010, s. 23-26).

- Öğretmenler ispatın önemini bilirler, gerçeği ortaya koymada ve diğer disiplinlerden ayrı olarak matematiği düzenlerken standart bir titizlik sağlamasında onun nasıl işlediğini anlarlar (s. 23).
- Bir aritmetik dizinin toplam formülünü ve binom teoremi gibi teoremlerin ispatlarını yazmak için tümevarım tekniğini kullanabilirler (s. 25-26).
- Başarılı öğretmenler, ispatın varlığının geometri ile sınırlı izole bir olay olmadığını bildiği gibi, ispatın matematiğin bir bütün olarak ayrılmaz bir parçası olduğu kadar birçok matematik dışı alanın da ayrılmaz bir parçası olduğunu bilirler (s. 26).
- Herhangi bir ispatın en önemli yönünün, varsayılan hipotezden ispatlanacak hükme kadar atılan her adımında açıklık olması gerektiğini bilirler (s. 26).

İspatı iyi öğretmek için öğretmenlerin ispat hakkındaki konu alan bilgileri iyi olmalıdır (Jones, 1997). Bu ifadenin doğruluğu yukarıdaki öğretmen yeterliklerinden ve standartlarından da açıkça görülmektedir. Öğretmenlerin ispatla ilgili alan bilgilerinin iyi olması için öğretmenler ispat yöntemlerini iyi bilmeli ve onlar ispat yaparken Harel ve Sowder'in (1998) sınıflamasına göre analitik ispat şemalarını kullanmalıdır. Tabii ki konuyu iyi bilmek o konuyu öğrenciye iyi aktarabilmek için tek başına yeterli değildir (Shulman, 1986, 1987). Yani ispat hakkında iyi konu alan bilgisi olan bir öğretmen öğrencilere bu bilgilerini aktarırken başka nelere ihtiyaç duyar? MEB'in (2011b) belirlediği bu özel alan yeterliklerinden ikinci ana yeterliği "alan eğitimi bilgisi" oluşturmaktadır ve bu ana yeterliğin alt yeterliklerinden birisi de "matematik öğretim sürecini planlayabilme ve uygulayabilme" olarak belirlenmiştir ki bu alt yeterliğe ait yedi performans göstergesinden ikisi aşağıdaki gibidir (MEB, 2011b, s. 6)

- Matematik dersinin amaçlarını gerçekleştirmeye yönelik çeşitli ve etkin öğretim strateji, yöntem ve teknikleri kullanır.
- Öğrencilerin matematikteki öğrenme zorluklarını ve kavram yanılgılarını gidermeye yönelik uygulamalar yapar.

Bu performans göstergelerinin ilki NBPTS'nin (2010) başarılı matematik öğretmenleri için belirlediği standartlardan "öğretimi uygulama bilgisi" standartına, ikincisi ise "öğrenci bilgisi" standartına karşılık gelmektedir. Bu performans göstergeleri ve standartların ilk kaynağının Shulman'ın (1986) pedagojik alan bilgisindeki, "öğrenci güçlükleri" ile "öğretim stratejileri ve temsilleri" bilgileri olduğu söylenebilir. O halde öğretmenlerin ispat konusunu öğrencilere daha iyi aktarabilmeleri için öğretmenler öğrencilerin ispatla ilgili öğrenme güçlüklerini ve bunların arkasındaki nedenleri bilmeli ve bunları dikkate alarak öğretim stratejileri ve temsilleri geliştirmelilerdir. Öğretmenler bu yeterlikleri genellikle ya öğretmen adayıyken lisans eğitimlerinde ya da öğretmenlik yıllarındaki tecrübeleriyle kazanmaktadırlar. Ancak akıl yürütme ile bu kadar iç içe olan ve matematiğin tüm konularıyla ilişkili olan ispatla ilgili öğretmen adaylarının *bütün bu yeterlikleri kazanacakları böylesine kapsamlı* bir lisans dersinin ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümlerinde bulunmaması büyük bir sorundur.

1.2. Araştırmanın Amacı

Araştırma sürecinin birinci ve en önemli basamağı olan amaç, araştırmaları sevk ve idare eden bir güçtür (Patton, 2014). Araştırmaların amaç cümleleri araştırmanın tüm gayesini açık ve net bir şekilde ifade edip okuyucuyu araştırmayla ilgili eksiksiz bilgilendirmeyi hedeflemeli (Creswell, 2014) ve yanlış anlaşılmaya mahal vermeyecek titizlikte olmalıdır (Karasar, 2014).

Bu araştırmanın amacı matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik kapsamlı ve sürdürülebilir bir lisans dersi tasarlamaktır. Ayrıca tasarım araştırmalarında tasarımın amacına ne derece ulaştığı önem arz eden bir konu olduğundan, diğer bir amaç uygulaması yapılacak olan bu dersin sonunda öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerinin nasıl gelişim gösterdiğini incelemektir.

1.3. Araştırmanın Problem Cümlesi

Matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders nasıl tasarlanır ve hangi aşamalara dayanmalıdır?

1.4. Araştırma Soruları

Araştırmalar için araştırma soruları ve hipotezler büyük önem taşımaktadırlar. Nicel araştırmalarda araştırma soruları veya hipotezler, nitel araştırmalarda araştırma soruları, iyi tasarlanmış karma yöntem araştırmalarında ise hem nitel hem de nicel araştırma soruları belirlenir (Creswell, 2014). Bunun dışında nitel ve nicel bulguların karşılaştırılıp bütünleştirilmesine yönelik karma yöntemleri yansıtan araştırma sorularına da yer verilmelidir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Tasarım araştırmalarında ise tasarımın tüm aşamalarına ait araştırma sorularına yer verilmelidir (Plomp, 2010). Bir tasarım modeli olan Addie Modelinde analiz, tasarım, geliştirme, uygulama ve değerlendirme aşamalarına ait araştırma soruları yazılmalı ve her bir aşamada yapılanlar bulgular kısmında sunulmalıdır (Bkz. Arkün ve Akkoyunlu, 2018; Arı-Korkusuz, 2007; Hebebci, 2014; Uğur-Erdoğmuş, 2015; Kızılaslan, 2016; Yazıcı, 2017).

Bu araştırmaya ait araştırma soruları aşağıdaki gibidir.

1. Dersin analiz aşamasında neler yapılmıştır?
    - 1.1. Derse ait hedefler nelerdir?
    - 1.2. Derse ait öğrenci kazanımları nelerdir?
    - 1.3. Dersin kuramsal altyapısı nasıldır?
2. Dersin tasarım aşamasında neler yapılmıştır?
    - 2.1. Dersin içeriği ve ders akışı nasıldır?
    - 2.2. Dersin işlenişine dair öğrenme-öğretme durumları nasıldır?
    - 2.3. Dersin matematik öğretmenliği program çıktılarına katkı düzeyleri nedir?
    - 2.4. Dersin değerlendirme sistemi ve değerlendirme araçları nasıldır?
3. Dersin geliştirme aşamasında neler yapılmıştır?
4. Dersin uygulama aşamasında neler yapılmıştır?
5. Dersin değerlendirme aşamasında neler yapılmıştır?
    - 5.1. Ders tasarımı öğretmen adaylarının dersin kazanımlarına ulaşma durumlarına nasıl etki etmiştir?
        - 5.1.1. Ders tasarımı öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerine ait kazanımlarına ulaşma durumlarına nasıl etki etmiştir?
            - 5.1.1.1. Ders tasarımı "*öğretmen adayı farklı ispat yöntemlerini bilir ve uygular*" kazanımına nasıl etki etmiştir?
            - 5.1.1.2. Ders tasarımı "*öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır*" kazanımına nasıl etki etmiştir?
        - 5.1.2. Ders tasarımı öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerine ait kazanımlarına ulaşma durumlarına nasıl etki etmiştir?
            - 5.1.2.1. Ders tasarımı "*öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit eder*" kazanımına nasıl etki etmiştir?
            - 5.1.2.2. Ders tasarımı "*öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklar*" kazanımına nasıl etki etmiştir?

5.1.2.3. Ders tasarımı “*öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirler*” kazanımına nasıl etki etmiştir?

5.1.2.4. Ders tasarımı “*öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder*” kazanımına nasıl etki etmiştir?

5.2. Ders tasarımı öğretmen adaylarının dersin hedeflerine ulaşma durumlarına nasıl etki etmiştir?

5.2.1. Ders tasarımı öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerine nasıl etki etmiştir?

5.2.2. Ders tasarımı öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerine nasıl etki etmiştir?

5.3. Öğretmen adaylarının dersin kazanımlarına ilişkin öz-değerlendirmeleri nasıldır?

5.3.1. Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgisi kazanımlarına ilişkin öz-değerlendirmeleri nasıldır?

5.3.2. Öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgisi kazanımlarına ilişkin öz-değerlendirmeleri nasıldır?

5.4. Öğretmen adaylarının uygulama sürecine yönelik değerlendirmeleri nasıldır?

5.4.1. Öğretmen adaylarının ders içeriğine ilişkin değerlendirmeleri nasıldır?

5.4.2. Öğretmen adaylarının dersin veriliş yöntemine ilişkin değerlendirmeleri nasıldır?

5.4.3. Öğretmen adaylarının dersin değerlendirme sistemi ve değerlendirme araçlarına ilişkin görüşleri nasıldır?

5.4.4. Öğretmen adaylarının dersin daha faydalı olması için önerileri nelerdir?

6. Dersin yeniden analiz aşamasında neler yapılmıştır?
7. Dersin yeniden tasarım aşamasında neler yapılmıştır?

1.5. Araştırmanın Önemi

“İspat matematikte birçok amaca hizmet eder” (Dickerson ve Doerr, 2014, s. 711). Matematik derslerinde ispat konusuna gereken önemin verilmesi kanısı eğitimle ilgili karar alıcılar tarafından kabul edilen bir fikir haline gelmiştir (Tabach, Levenson, Barkai, Tsamir, Tirosh ve Dreyfus, 2011). Matematik ve matematik eğitimindeki gelişmelere müteakiben ispatın öneminin son yıllarda giderek artmasıyla (Aydoğdu-İskenderoğlu ve Baki, 2011) birlikte araştırmacıların ispat konusundaki çalışmaları da artmıştır (Brown, 2014; Mejia-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads ve Samkoff, 2012). CERME (Thematic working group teams, 2018) ve ICME (Topic study groups at ICME-13, 2017) gibi matematik eğitimi derneklerinin uluslararası kongrelerinde matematik eğitimi ile ilgili birçok konuda çalışma grupları oluşturulmuştur ve bu konulardan birisi de ispattır. Özellikle yurt dışında ispatla ilgili çok sayıda çalışma yapılmasına rağmen ülkemizde bu konu ile ilgili çalışmalar sınırlı sayıda kalmıştır (Özer ve Arıkan, 2002). Ayrıca ülkemizde matematik eğitimi alanında yapılmış lisansüstü tezler incelendiğinde bu konu ile ilgili çok az sayıda lisansüstü tez yapıldığı görülmektedir (Cihan ve Akkoç, 2017). Bu araştırma en azından bu konudaki bir eksikliği giderecektir.

Matematik eğitiminde üniversiteyi ilköğretim ve ortaöğretimden ayıran en önemli özelliklerden biri ispatı anlama ve ispat yapma zorunluluğudur (Almeida, 2003). Üniversite matematik derslerinin merkezinde olan ispat (Jones, 2000) ileri matematik derslerinde bir ifadeyi açıklamanın en iyi yolu olarak görülür (Mejia-Ramos ve Weber, 2014). Buna rağmen matematikle ilgili bölümlerde öğrenim görenler dâhil olmak üzere üniversite öğrencileri için bile ispat yapmak zor bir aktivitedir (Almeida, 2000, 2003; NCTM, 2000; Jones, 2000; Weber, 2001; Öçal ve Güler, 2010). Üniversitelerin ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümünde okuyan öğrenciler alan derslerinde birçok teorem ve bu teoremlerin ispatlarıyla karşılaşırlar. Geleneksel sınıflarda ispat yapılırken ispatı öğretmen öğrencilerin düşünmesine ve yapmasına olanak tanımaksızın teoremden sonra hemen tahtaya yazmaktadır (Aydoğdu-İskenderoğlu, Baki ve Palancı, 2011). Bu öğrencilerin matematiksel akıl yürütmelerini geliştirmeleri noktasında bir engeldir. Çünkü matematiksel akıl yürütme ispatlamada önemli bir işlev görür (Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002). Etkili ispat öğretimi için öğretmen adaylarının ispat yöntemlerini iyi bilmesi ve onları uygulayabilmesi gerekir. Ayrıca öğretmen adaylarının ispat yaparken Harel ve Sowder'in (1998) sınıflamasına göre analitik ispat şemalarını kullanmaları gerekir. Bu yüzden öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarlamak önemlidir. Ayrıca öğretmen adaylarının alan bilgilerini geliştirmek onların yetiştireceği öğrencilerin de bu konuyla ilgili öğreneceklerini etkileyecektir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgileri

- Farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgileri
- Sahip oldukları ana ispat şemaları

bileşenlerinde incelenecektir.

Ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümünde okuyan öğrenciler geleceğin öğretmenleridir. Onlar sınıflarında öğrencilerine ispat yapacaklardır. Öğrencilerin ispat konusunda yaşadıkları güçlükler ile öğretmenlerin bu konuyu onlara öğretirken karşı kaşıya kaldıkları güçlükler hakkında daha detaylı bilgiye ve daha detaylı araştırmalara ihtiyaç vardır (Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002). Çünkü öğretmenler için ispatın nasıl öğretileceği onlar için üstesinden gelinmesi güç bir konudur (Heinze ve Reiss, 2004; Knipping ve Reid, 2015). İspatla ilgili kendi güçlüklerinin üstesinden gelmekte zorlanan öğretmenler öğrencilerine bu konuda yardımcı olmada yetersiz kalmaktadır. İspatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin farkında olmayan ve bu güçlüklerin nedenlerini açıklayamayan öğretmenler ispatlamaya yönelik etkili öğretim stratejilerini de belirleyememektedirler. Bu yüzden öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarlamak önemlidir. Böylece belki de öğretmenlik yapacakları yıllar içerisinde yaşayacakları deneyimlerle farkında olacakları öğrenci güçlüklerinin ve nedenlerinin farkına varacaklar ve mesleğe başlamadan önce bu konuya yönelik etkili öğretim stratejilerini belirleyecekler ve bu stratejileri mesleğe başlamalarıyla birlikte sınıflarında uygulayacaklardır.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgileri;

- İspatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgileri
- İspatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgileri
- İspatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgileri
- Öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgileri

bileşenlerinde incelenecektir.

Bu araştırma kapsamında öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik kapsamlı ve sürdürülebilir bir ders tasarımı yapılacaktır. Eğitim Fakültelerinin Matematik Öğretmenliği bölümlerinde tüm bunları içeren böylesine kapsamlı bir lisans dersi bulunmamaktadır. Bu yüzden bu araştırmanın bu konudaki ciddi bir eksikliği gidereceği umulmaktadır. Diğer bir açıdan bakıldığında bu araştırmanın gelecekte benzer ders tasarımlarının nasıl yapılacağına dair fikir vermesi ve yol göstermesi de beklenmektedir.

1.6. Sınırlılıklar

Araştırmadan elde edilen bulgular;

1. Konu açısından, matematiksel ispatla ilgi alan bilgisi ve matematiksel ispatla ilgili pedagojik alan bilgisi ile sınırlıdır. Ayrıca matematiksel ispatla ilgili pedagojik alan bilgisi sadece teori üzerinde yürütülen çalışmalarla sınırlıdır.
2. Zaman açısından, 2017-2018 eğitim öğretim yılı bahar dönemi ile sınırlıdır.
3. Örneklem açısından Marmara Üniversitesi (M.Ü.) Atatürk Eğitim Fakültesi (A.E.F.) Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümü 2. sınıfında öğrenim gören öğrencilerle sınırlıdır.

1.7. Sayıltılar

1. Katılımcıların anket ve mülakat sorularına verdikleri cevaplarda subjektif, içten ve ciddi oldukları varsayılmıştır.
2. Katılımcıların anket ve mülakatlarda verdikleri cevapların kendi bilgi ve düşüncelerini yansıttıkları varsayılmıştır.
3. Katılımcıların tüm uygulamalara bilgi, beceri ve düşüncelerini tam olarak yansıtabildikleri varsayılmıştır.
4. Katılımcıların istenmeyen ve önlenemeyen dış etkenlere aynı seviyede maruz kaldıkları ve eşit seviyede etkilendikleri varsayılmıştır.
5. Kontrol edilemeyen istenmedik değişkenlerin araştırmayı etkilemediği varsayılmıştır.
6. Seçilen örneklemin evreni temsil edici nitelikte olduğu varsayılmıştır.

1.8. Tanımlar

Akıl Yürütme (Muhakeme): “Muhakeme, bütün etmenleri dikkate alarak düşünüp akılcı bir sonuca ulaşma sürecidir” (Umay, 2003, s. 234).

Aksiyom: Doğruluğu ispata gerek olmaksızın apaçık olan önermelere aksiyom denir (Rossi, 2006).

Alan Bilgisi: Alan bilgisi “öğretmenin zihnindeki bilginin miktarı ve onun düzenlenmesi” olarak ifade edilir (Shulman, 1986, s. 9).

Çürütme: “Bir önermenin doğru olmadığını belirten eksiksiz ve kısaca yazılmış argümandır” (Campbell, 2012, s. 28).

İspat: İspat “bir ifadeyi doğrulamak için gerekli olan ve ikna edici olduğu sürece birkaç farklı formda olabilen argümandır” (Hanna, 1991, s. 56).

İspatlama: Bir önermenin doğruluğu veya yanlışlığı üzerindeki şüpheleri ortadan kaldırmaya çalışan bir kişinin veya topluluğun zihinsel eylem sürecidir (Harel ve Sowder, 1998, 2007; Harel ve Rabin, 2010). Literatürde ispatlama ifadesi yerine ispat yapma ifadesi de kullanılmaktadır.

İspat Şeması: İspatlama sürecinin bilişsel bir karakteristiği olan ispat şeması bir kişinin kendisini ve başkalarını bir önermenin doğruluğuna veya yanlışlığına ikna etmek için kullandığı gerekçelendirme biçimidir (Harel ve Sowder, 1998; Harel, 2008a).

Lemma: Lemma “ana amacı başka bir teoremi ispatlamaya yardım etmek olan herhangi bir teoremdir” (Hammack, 2013, s. 88).

Matematiksel Akıl Yürütme: “Matematiksel akıl yürütme yeni fikirleri keşfetmek ve ortaya çıkarmak için bir sorgulama aracı olarak hizmet edebilir, sorgulama mantığı olarak adlandırdığımız bir süreçtir” (Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002, s. 909).

Önerme: Önerme “doğru ya da yanlış olan bir tümcedir (fakat her ikisi birden değil)” (Eccles, 2007, s. 3).

Pedagojik Alan Bilgisi: “Alan ve pedagojinin özel bir karışımı olan pedagojik alan bilgisi eşsiz olarak öğretmenlerin uzmanlık alanıdır, onların sahip oldukları mesleki bilgilerinin özel bir formudur” (Shulman, 1987, s. 8).

Postulat: Postulat “doğrulukları ispatlanamayan ancak doğru kabul edilen önermelerdir” (Baki, 2015, s. 38).

Sonuç: “Sonuç önemli bir teorem ispatlandıktan sonra kolayca ispatlanabilen bir önermedir” (Downing, 2009, s. 69).

Tanım: Tanım “bir sözcük ya da sözcük grubunun anlamını açıklayan veya aydınlatan ifade” dir (Thompson, 2010, s. 45).

Teorem: “İspatlanmış bir önermeye teorem denir” (Gerstein, 2012, s. 2).

Varsayım: “Varsayım makul olduğuna inandığımız bir önermedir” (Sundstrom, 2014, s. 86). Dilimizde varsayım ifadesi yerine sanı veya kestirim ifadeleri de kullanılmaktadır.

BÖLÜM II: LİTERATÜR TARAMASI

Araştırmanın tanımlanmasında ve sınırlarının çizilmesinde önemli bir yere sahip olan literatür taramasının amacı araştırmaya bir çerçeve oluşturmaktır (Karasar, 2014). Literatür taramasıyla araştırma probleminin evvelki araştırmalar da çalışıp çalışılmadığı belirlenir (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016). Literatür taramasında araştırmayla alakalı olan diğer araştırmalar ve bu araştırmaların sonuçlarından bahsedilir (Creswell, 2014).

Bu bölümde ispatın modern bileşenleri tanıtıldıktan sonra ispat ve ispatlamanın ne olduğu açıklanıp ispat öğretiminin dayanak noktalarına değinilmiş, daha sonrasında ise ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgisine özgü literatür taramasıyla araştırmanın kavramsal çerçevesine yer verilmiştir.

2.1. İspatın Modern Bileşenleri

Bu bölüme başlarken şu soruyu sormalıyız? Bir ispat neleri içerir? (Bloch, 2011). "Modern aksiyomatik matematiksel sistemin bileşenleri aksiyomlar, tanımlar, varsayımlar, ispatlar, teoremler, sonuçlar, lemmalar ve karşı örneklerdir" (Rossi, 2006, s. 4). Aslında bunlara tanımsız terimlerin, postulatların, önermelerin de eklenmesi yerinde olacaktır. "Aksiyomatik yöntem önceki kavramlardan çıkarım tekniğidir" (Gossett, 2003, s. 91). Aksiyomatik sistemde bir önermenin ispatı veya çürütmesi yapılırken tanımsız terimlerden, tanımlardan, lemmalardan, aksiyomlardan, postulatlardan ve daha önce ispatlanmış teoremlerden faydalanılır (Downing, 2009; Sundstrom, 2014; Roberts, 2015). İspatın daha iyi anlaşılması için öncelikle ispatın modern bileşenleri olan tanımsız terimlerin, tanımların, aksiyomların, postulatların, lemmaların, önermelerin, teoremlerin, yanlış önermelerin, varsayımların ve sonuçların bilinmesi gerekmektedir. Şimdi aksiyomatik yapı içerisindeki öncelik sırasına göre bu bileşenleri inceleyelim.

Terimler belli bir alana özgü sözcük ya da sözcük gruplarıdır. Her şeyin tanımlanabilmesi olağan dışı olduğundan (Öner, 1986) bazı terimler tanımsızdırlar. Matematiğe özgü terimlerden matematiksel terimler olarak bahsedilir. Terimler tanımsız terimler ve tanımlar olmak üzere ikiye ayrılırlar.

Tanımsız terimler matematik dışı kelimelerle yani matematiksel olmayan bir dille tarif edilebilirler (Krantz, 2007) ancak matematiksel bir tanıma sahip değildirler. Her bilim dalı aksiyomatik yapısı içinde bazı temellere daha da ilerisinde başlangıç noktalarına dayandırılır (Gossett, 2003). Matematikte tanımsız terimler matematiğin temelindedirler ve matematiğin gelişimsel sürecinde başlangıç konumundadırlar. Matematiksel yapı öncelikle tanımsız terimler üzerine kuruludur. Matematikte tanımsız terimler, semboller ve tanımlar terminolojiye ve evrenselliğe katkıda bulunurlar. Öklid "Öğeler" adlı eserinin 13 kitabından ilkine tanımlarla başlamış ve ilk olarak noktayı "parçaya sahip olmayan" (Fitzpatrick, 2008, s. 6) şeklinde tanımlamıştır. Ancak bu tanım matematik dünyasında kabul görmediği için bir tarif olarak kalmıştır. Nokta, doğru ve düzlem (Plumpton, Perry ve Shipton, 1984; Gossett, 2003; Krantz, 2007; Dane, 2008) en bilindik tanımsız terim örnekleridir. Bunlar tanımsız olsalar da sezgisel açıdan çok açık ve net kavramlardır (Gossett, 2003).

Tanım "matematiksel bir sözcüğün ya da sözcük grubunun anlamının tam ve net bir açıklamasıdır" (Hammack, 2013, s. 87). Başka bir deyişle "matematiksel bir terimin yerleşik, genel kabul görmüş anlamı" tanımdır (Campbell, 2012, s. 28). Tanımlar terimlerin anlamlarına yönelik anlaşmalardır (Sundstrom, 2014). Tanımsız terimlerde bu anlaşmalar sezgilere dayalı olarak yapılmaktadır. Tanımlar tam ve açık olmalı ancak kısır döngü oluşturmamalıdır (Öner, 1986). Ayrıca tanımlar aşağıdaki tanım olma ölçütlerine uymalıdır (Çakıroğlu, 2013, s. 4).

Hiyerarşik kavram yapısını dikkate alması
Var olan/olabilen bir olguyu tanımlaması
Aynı kavrama yönelik farklı tanımların eşdeğer olduğunun ispatlanabilir olması
Aksiyomatik yapıya uyması
Gerekli ve yeterli koşulları belirtmesi
Ekonomik olması

Bir tanım yapılırken tanımsız terimlerden de faydalanılabilir. Ayrıca yeni bir tanım yapılırken daha önceki tanımlardan da faydalanılır (Dane, 2008). Herhangi bir alandaki tanımlar aslında o alanda çalışanların veya o alana ilgi duyanların kullanacağı bir dil yani bir terminoloji oluştururlar. Örneğin matematiksel tanımlar matematik yapanlar için matematiksel bir dil, matematiksel bir terminoloji oluştururlar (Krantz, 2007). Bu diğer alanlar için de böyledir. Bir alanda bilgi sahibi olmak için öncelikle o alandaki tanımlarla başlamak en iyi yoldur (Kane, 2016). O yüzden tanımlar her alan için öncelikli öneme sahiptir. İyi matematik yapmak için matematiksel tanımları iyi bilmek gereklidir.

Matematiği evrensel yapan şey matematiği oluşturan tanımların, kuralların, teoremlerin, ispatların, sonuçların evrensel olmasıdır. Gelişigüzel yapılmayan tanımlar (Solow, 1982; Sundstrom, 2014) ortak bir dil oluşturması sayesinde evrenselliğe katkıda bulunurlar. Çoğu ispatlamada tanımlar kullanılır (Sundstrom, 2014). "Ayrıca tanımların oluşturulması (tanımlanması) problem çözme, varsayım üretme, genelleme, özelleştirme, ispatlama gibi diğer işlemlerden daha az önemli olmayan matematiksel bir aktivitedir ve bu nedenle çoğu matematik öğretiminde ihmal edilmiş olması gariptir" (De Villiers, 1998, s. 249). Bu ihmaldendir ki yapılan araştırmalar hem ortaöğretim hem de lisans öğrencilerinin tanımları uygun şekilde kullanmada güçlük yaşadıklarını ayrıyeten de tanımların ispat oluşturmadaki rolünü anlamadıklarını ortaya koymuştur (Zazkis ve Leikin, 2008). Tanımlar ispatlamada kullanıldıkları gibi kendileri de ispatlanabilirdir. Zazkis ve Leikin (2008) çalışmalarında karenin birbirine eşdeğer ve ispatlanabilir on üç tanımını vermişlerdir. Bunlardan üç tanesi aşağıdadır.

Tüm kenar uzunlukları birbirine eşit olan dikdörtgene kare denir.

İki köşegen uzunluğu birbirine eşit olan eşkenar dörtgene kare denir.

Dört tane simetri eksenine sahip olan dörtgene kare denir.

Önerme "doğru ya da yanlış bir bildirim tümcesidir" (Rossi, 2006, s. 17). Yani bir önerme doğru olabileceği gibi yanlış da olabilir ancak ne hiçbiri ne de her ikisi olamaz (Garnier ve Taylor, 2009; Roberts, 2015). Bir ifade doğru olabilir (doğru ifadeler), yanlış olabilir (yanlış ifadeler), ne doğru ne de yanlış olabilir (belirsiz ifadeler), hem doğru hem de yanlış (paradokslar) olabilir. İki değerli mantık içerisinde doğru ve yanlış önermeler çok değerli mantık içerisinde bunlara ilaveten belirsiz ifadeler de göz önüne alınmaktadır. Bir ifadenin önerme olabilmesi için ya kesinlikle doğru olmalıdır ya da kesinlikle yanlış olmalıdır (Hammack, 2013). Diğer bir deyişle bir ifadenin önerme olabilmesi için doğruluk değeri bilinmelidir. Yalnızca doğru ya da yalnızca yanlış ifadelerin doğruluk değeri bilinebilir (Lay, 2014). Doğru önermelerin doğruluk değeri 1 iken, yanlış önermelerin de doğruluk değeri 0'dır. Bir önerme doğruysa herkese göre her zaman doğrudur, yanlışsa da herkese göre her zaman yanlıştır. Yani bazılarına göre doğru bazılarına göre yanlış ifadeler ve doğruluğu veya yanlışlığı kısmilik taşıyan ifadeler önerme değildirler. Ne doğru ne de yanlış olan ifadeler önerme olmadığı gibi hem doğru hem de yanlış olan ifadeler de önerme olamazlar. Bu tür ifadelerin doğruluk değerleri için karar verilemez denir. Örneğin göreceli ifadeler, belirsiz ifadeler, olasılık bildiren ifadeler, soru, emir, dilek, ünlem cümleleri ve de paradokslar önerme değildirler. Çünkü bunlar yargı bildiren bildirim cümleleri değildirler.

Kökeni Yunancadan gelen aksiyom kelimesi “değerli bir şey”, kökeni Latinceden gelen postulat kelimesi “talep etmek” anlamına gelmektedir (Krantz, 2007, s. 11). “Dictionary of Mathematics Terms” (Downing, 2009), “McGraw-Hill Dictionary of Mathematics” (McGraw-Hill, 2003), “The Concise Oxford Dictionary of Mathematics” (Clapham ve Nicholson, 2009) gibi birçok matematik sözlüğünde **aksiyom** ve **postulat** kelimelerinin eş anlamlı olduğu belirtilmiş, yine ispatla ilgili yazılmış birçok kitapta (Bkz. Plumpton, Perry ve Shipton, 1984; Gossett, 2003; Rossi, 2006; Krantz, 2007; Roberts, 2015) da bu kelimeler yine birbirlerinin yerine kullanılmışlardır. Ekseri matematikçiler aksiyom ve postulat terimleri arasında bir ayrım yapmasa da Öklid’in de dâhil olduğu bazı matematikçiler bu terimler arasında bir ayrım yapmıştır (Gossett, 2003). Bu ikisi arasındaki farkı özetleyecek olursak aksiyomlarda önermenin doğruluğu açıkken postulatlarda önermenin doğruluğu kabul edilir yani aradaki fark kuşkusuzluk ve şüphe farkıdır (Baki, 2015). Doğru kabul edilen veya varsayılan ifadeleri ikiye ayıran Öklid’e göre aksiyomlar daha genel veya daha açıktırlar (Roberts, 2015). İspatına gerek olmayan temel önermeler olan aksiyomlar (Previato, 2003) ispatlanabilir apaçık mantıksal gerçeklerdir (Lucas, 2000). Teoremlerin ispatları yapılırken “yapı taşları” olarak kullanılan aksiyomlar (Campbell, 2012, s. 28; Garnier ve Taylor, 2009, s. 52) ya doğruluğu çok açık önermelerdir ya da belirgin gerçeklerdir (Beck ve Geoghegan, 2010). Postulatların ise doğruluğunda bir kabullenme vardır. Bu araştırmada da aksiyom ve postulat kavramları birbirine yakın ama farklı kavramlar olarak düşünülecektir. Aksiyomlar ve postulatlar içerisinde tanımsız terimleri barındırabilirler (Plumpton, Perry ve Shipton, 1984). Aksiyomlar ispatına gerek olmasa da ispatlanabilir önermeler olduğundan onlar da birer teoremdir (Rotman, 2007). Bu yönden düşünülecek olursa postulatlar da birer teoremdirler. Aksiyomlar ispata dayalı teoremler iken postulatlar kabullenmeye dayalı teoremlerdir. Örneğin Öklid’in beş postulatından paralellik postulatı olarak da bilinen beşinci postulatının matematiksel bunalıma neden olduğu bilinmektedir. Matematik dünyası bu bunalımdan ancak zaman içerisinde Öklid dışı geometrinin inşasıyla çıkabilmiştir. Bu postulat Öklid geometrisi için doğruyken Öklid dışı geometrilerde doğru değildir. Ancak aksiyomlar matematiğin tüm alanları için doğrudur ki bu da aksiyom ve postulatların başka bir farkıdır. Aşağıdaki iki örnek bu farkların anlaşılmasına katkı sağlayacaktır.

Küme Eşitliği Aksiyomu: A ve B kümeleri eşitse bu kümeler aynı elemanlara sahiptirler (Cavagnaro ve Haight, 2001; Rossi, 2006).

Bertrand Postulatı: Her $m > 1$ pozitif tam sayısı için $m < a < 2m$ eşitsizliğini sağlayan en az bir a asal sayısı vardır (Gerstein, 2012).

Lemma "öncelikle başka bir teoremin ispatı için gerekli bir adım olarak kullanılan ispatlanabilir herhangi bir teoremdir" (Rossi, 2006, s. 48). Başka bir deyişle lemmaların öncelikli önemleri başka teoremlerin ispatlarında kullanılmalarıdır (Thompson, 2010). Başka teoremlerin ispatlanmasına yardımcı oldukları (Sundstrom, 2014) için lemmalar "yardımcı sonuç" olarak da anılırlar (Chartrand, Polimeni ve Zhang, 2013, s. 77). "Kısa teoremler" olan lemmalar (Gossett, 2003, s. 148) başka teoremlerin ispatlarında inşa adımları olarak kullanılırlar.

Öklid Lemması: x, y ve z tamsayıları için eğer $x \mid yz$ ve x ile y aralarında asal sayılar ise $x \mid z$ (Ferland, 2009; Dawson, 2015; Joshi, 2015).

Lemma çekimli diller grubuna dâhil olan Latince bir terim olup Latincede iki anlamına gelen "di" ön eki aldığında oluşan **dilemma** terimi (mantık ve felsefeye ait bir terim) ikilem anlamına gelmektedir. İkilem ise "insanı istenmeyen seçeneklerden birini, çoğunlukla iki seçenekten birini izlemeye zorlayan tartışma, sorun veya usa vurma durumu" olarak tanımlanmaktadır (Türk Dil Kurumu [TDK], 2018). "Mahkum çıkmazı" olarak da bilinen "tutsak ikilemi" en bilindik dilemma örneğidir.

Teorem doğruluğu mantıksal ve matematiksel argümanlarla ispatlanmış önermelere teorem denir (Rossi, 2006). Yani bir önermenin teorem olabilmesi için geçerli delillerle ispatlanmış olması gereklidir (Roberts, 2015). Örneğin 1637 yılında Pierre de Fermat'ın (1601-1665) ortaya attığı ve Fermat'ın Son Teoremi olarak anılan "Eğer m; 2'den büyük bir tam sayıysa $a^m + b^m = c^m$ denkleminin pozitif tam sayılar kümesinde çözümü yoktur" teoremi ölümünden yüzyıllar sonra Andrew Wiles (1953-) tarafından ispatlanarak teorem olmuştur (Rossi, 2006; Eccles, 2007; Sundstrom, 2014; Joshi, 2015). Onun öncesinde teorem bazı değerler için doğrulansa da kabul görmüş ispatı ancak 1995 yılında yapılabilmiştir (Sundstrom, 2014).

Fakat yine Fermat'ın ortaya attığı Fermat kestirimi *her Fermat sayısının ($m \in N$ için $2^{(2^m)} + 1$ biçiminde yazılan sayılar) asal sayı olduğunu* öngörmüştü ancak Euler (1707-1783) Fermat'ın ölümünden yaklaşık 74 yıl sonra bunu çürütmüştü (Chartrand, Polimeni ve Zhang, 2013). Böylece Fermat kestirimi teorem olamadı ve yanlış bir önerme olarak tarihte yerini aldı. Bir önerme çürütülmeden yanlış önerme olmaz, doğruluğu ispatlanmadan da asla teorem olmaz ancak doğruluğu ispatlandıktan sonra da sonsuza kadar teorem olarak kalır (Stefanowicz, 2014). Doğruluğu çürütülerek yanlış olduğu ispatlanan önermelere **yanlış önerme** denir. Yanlış önermeler doğruluğu ispatlanarak teorem olan önermeler kadar ilgi çekmedikleri için matematik dünyasında pek hatırlanmazlar (Rossi, 2006). Yine de "Fermat sayılarının tümü asal sayıdır" önermesi en bilindik yanlış bir önermedir.

Doğruluğu ispatlanarak teorem olan önermeler veya çürütülerek yanlış önerme olarak kalan önermeler dışında günümüzde matematik dünyasında hala doğruluğu veya yanlışlığı ispatlanamayan önermeler mevcuttur. Bu tür önermeler matematikte **kestirim**, **sanı** veya **varsayım** olarak anılmaktadır. Varsayımların doğruluğu önermelerden daha kuvvetlidir. Tanım itibarıyla varsayım "henüz ispatlanmamış ancak doğru olduğuna inanılan önermedir" (Campbell, 2012, s. 28). Varsayımlar mantıklı hipotezlerdir (Stylianides, 2009). Yani varsayımların doğru olduğu inancını destekleyen bazı deliller vardır (Cunningham, 2012). Örneğin Christian Goldbach (1690-1764) tarafından 1742 yılında ortaya atılan Goldbach kestiriminin doğruluğu ya da yanlışlığı halen ispatlanamamış durumdadır (Krantz, 2007). Birçok matematikçinin doğruluğuna inandığı Goldbach kestirimi *ikiden büyük her çift sayının iki asal sayının toplamı şeklinde yazılabileceğini* öngörür (Chartrand, Polimeni ve Zhang, 2013; Hammack, 2013; Rossi, 2006; Rotman, 2007; Clapham ve Nicholson, 2009; Gerstein, 2012; Sundstrom, 2014; Roberts, 2015). Akla gelecek ilk eşleştirmelerle de basitçe doğrulanabilecek bu kestirimin ispatı veya çürütmesi hala yapılamamış durumdadır (Swanson, 2017).

Kısaca

Önerme+Doğruluğunun İspatı = Teorem

Önerme+Yanlışlığının İspatı (Doğruluğunu Çürütme) = Yanlış Önerme

Önerme+İspatlanamama = Varsayım (Kestirim)

şeklinde formüle edilebilir.

Sonuç “başka bir teoremin ispatlanmasının ardından kolayca ispatlanan bir teoremi ifade etmek için” kullanılan bir terimdir (Sundstrom, 2014, s. 86). “Sonuç daha genel bir teoremin özel bir durumu olarak ifade edilebilen bir teoremdir” (Rossi, 2006, s. 47). Lemmaların ve sonuçların ispatları diğer teoremlerin ispatlarından daha zahmetsizdirler (D’Angelo ve West, 2000). İspatlanmış teoremle doğrudan alakalı olan sonuç (Hammack, 2013) o kadar açıktır ki ispata gerek bile duyulmayabilir (Roberts, 2015). Basitçe

Önerme→Doğruluğunun İspatı→Teorem→Sonuç(lar)

şeklinde gösterilebilir. Aşağıdaki sonuç ise Carl Friedrich Gauss’un (1777-1855) kendi adıyla anılan Gauss metodunun pozitif çift tam sayılar için özel bir durumudur.

$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$ $(n\in N^{+})$ (Rossi, 2006).

Bu bölümden özetle tanımsız terimler, tanımlar, lemmalar, aksiyomlar ve postulatlar önermelerin ispatlarını kolaylaştırmak için kullanılırlar. Hatta bazı önermelerin ispatları için bazı tanımlar (Sundstrom, 2014) bazı lemmalar, bazı sonuçlar ve başkaca teoremler birer lüzumattır (D’Angelo ve West, 2000). İspatlama da ispatın bu modern bileşenlerinin aksiyomatik bir yapı içerinde kullanılması matematikte olduğu kadar matematik eğitiminde de önemlidir.

2.2. İspat ve İspatlama

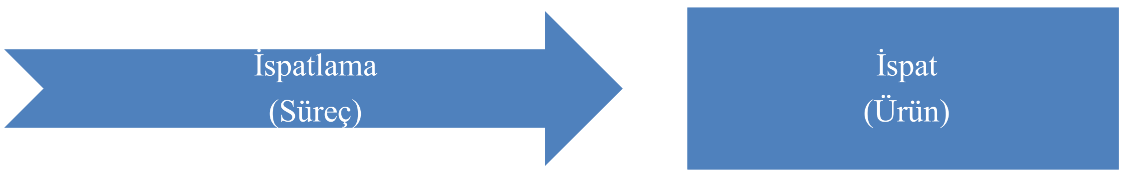
Matematiği anlamanın en önemli yollarından birisi de ispatı ve ispatlama sürecini bilmekten geçer (Sarı-Uzun ve Bülbül, 2013). Çünkü matematiğin ne olduğunun anlaşılması için ispatın doğasının anlaşılması gerekir (Goldberg, 1974). Geleneksel ispat öğretiminde matematik derslerinde önerme ve ispatı birlikte verilir. Böylece ispat öğrenciler için “anlamsız bir ritüel” olarak kalır (Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002, s. 907). Fakat ispat nedir sorusu sorulmaz (Hersh, 1993), ne değildir sorusu sorulmaz, ispatın amaçlarından ve işlevlerinden de bahsedilmez. Ayrıca ispatın epistemolojik boyutu dışındaki sosyal ve psikolojik boyutu yine geleneksel derslerdeki ispat öğretiminde eksik kalmaktadır. Araştırmanın birinci bölümünde ispatın ne olduğu ve amaçları hakkında geniş bilgi vermiştik. Birinci bölümden özetleyecek olursak **ispat** bir önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını nedenleriyle birlikte açık ve ikna edici bir şekilde gösteren mantıksal ve matematiksel argümanlar dizisidir (Hersh, 1993; Hanna, 1991; 2000; Rossi, 2006; Baki, 2015). Şimdi de ispatın işlevlerinden bahsedelim. Bell

(1976) ispatın üç işlevini doğrulama veya haklılığını gösterme, aydınlatma (açıklama) ve sistematik hale getirme şeklinde tanımlamıştır. De Villiers (1990, 1999a, 1999b) ise Bell'in (1976) çalışmasına dayanarak ispatın işlevlerini genişletmiştir. Hanna (2000, s. 8) ise Bell (1976), De Villiers (1990, 1999b) ve Hanna ve Jahnke'nin (1996) çalışmalarından ispatın sosyal boyutunu oluşturan işlevlerini aşağıdaki gibi bir liste haline getirmiştir.

- *doğrulama* (bir ifadenin doğruluğu ile ilgili)
- *açıklama* (niçin doğru olduğunun iç yüzünün anlaşılmasını sağlama)
- *sistematik hale getirme* (çeşitli sonuçların aksiyomlar, temel kavramlar ve teoremlerden oluşan tümdengelimli bir sistem içinde düzenlenmesi)
- *keşif* (yeni sonuçların keşfi ya da icadı)
- *iletişim* (matematiksel bilginin aktarımı)
- deneysel bir teori *inşa etme*
- bir tanımın anlamını veya bir varsayımın sonuçlarını *araştırma*
- iyi bilinen bir olgunun yeni bir çerçeve içine *katılması* ve böylece onu yeni bir perspektiften görme

Geçmişten günümüze ispatın işlevleri araştırmacılar tarafından geliştirilmiş ve genişletilmiştir. Ancak ispatın ne olduğuyla ilgili gelişimi henüz tamamlanmış değildir (Cadwallader-Olsker, 2011). Bunların dışında bir ispatta olması gereken özellikleri Lange (2016, s. 8-9) "estetik, kısalık, derinlik, incelik, açıklama gücü, verimlilik, genellenebilirlik, saflık, görselleştirilebilirlik" olarak ifade etmiştir.

İspatın modern bileşenleri, tanımı, ne olduğu, amaçları, işlevleri ve özelliklerinden sonra ispatlama hakkında bilgi verelim. **İspatlama** basitçe ispat yapma sürecidir. Bu süreç ne kadar iyi yönetilirse ortaya çıkan ürün de o kadar kaliteli olur. Öyleyse ispat da ispatlama sürecinin bilişsel ürünüdür ve süreç sonunda ortaya çıkar (Harel, 2008a).



Şekil 2.1. İspat ve İspatlama İlişkisi

İspatın tanımına bakılırsa **çürütme** de bir ispattır. Çürütmeler önermelerin yanlışlığının ispatıdır. Daha geniş anlamıyla önermelerin yanlış olduğunun basit ve inandırıcı ispatıdır (Hammack, 2013). Bazı kaynaklarda ispat önermenin doğruluğunun ispatı, çürütme de önermenin yanlışlığının ispatı olarak düşünülse de ekseri kaynaklarda olduğu gibi bu araştırmada da çürütme ispatın bir formu olarak düşünülecektir. Çürütmek ispatlamanın, çürütme de ispatın özel bir formu olarak düşünülmelidir. Çürütmek ispatlama gibi bir süreç, çürütme de ispat gibi üründür. İspat yöntemleri bölümünde bu konuya ayrıca değinilecektir. Matematiksel anlamda p önermesinin çürütülmesi $\neg p$ önermesinin doğruluğunun ispatıdır. Aynı şekilde p önermesinin doğruluğunun ispatı $\neg p$ önermesinin çürütülmesidir.

Bir ürün olarak iyi bir ispata ulaşmak için süreç olarak iyi bir ispatlama yapmak gerekmektedir. İspatlama yaparken aşağıdaki hususların bilinmesi ispatlama sürecine fayda sağlayacaktır.

- İspata dâhil olan içerik alanı iyi bilinmelidir (Knapp, 2005). İspat içinde kullanılacak tanımlar, tanımsız terimler, lemmalar, aksiyomlar, postulatlar, sonuçlar hakkında iyi bilgi sahibi olunmalıdır. Bu bileşenler her ispatta farklılaşacağı için iyi bir matematiksel bilgi gerektirir.
- Önermenin doğruluğundan veya yanlışlığından emin olunmalıdır. Uzun süre çalışılmasına rağmen doğruluğu ispatlanamıyorsa yanlışlığı ispatlanmaya yani çürütülmeye çalışılmalıdır (Rossi, 2006).
- İspata nereden başlanacağı iyi bilinmelidir (Moore, 1994). Varsayımları dile getirerek başlamak ispata başlamanın uygun bir yolu olabilir (Sundstrom, 2014).
- Öncelikle her ispat için başlangıç cümlesi söylenmelidir. Başlama cümlesinde hipotezden, hükümden ve ispatlamanın hangi yöntemle yapılacağından bahsedilmelidir.
  Örneğin $\log_a b = 2 \Rightarrow \log_b a^2 = 1$ önermesinin ispatı için $\log_a b = 2$ olsun. O halde $\log_b a^2 = 1$ olduğunu doğrudan ispat yöntemi ile ispatlayalım gibi bir cümle olabilir.
- İspat için uygun yöntem seçilmelidir. Uygun yöntem geçerli ispata ulaştırabilecek yöntemlerden biridir. En uygun yöntem ifadesi öznel olabilir. Ancak yine de en uygun yöntem ifadesinden bahsetmek gerekirse ispata en kısa yoldan en açık ve en anlaşılır şekilde ulaştırabilecek yöntem denilebilir.
- Baştan sona atılan tüm adımlar mantıksal bir düzen içinde (Campbell, 2012) matematiksel akıl yürütmeye dayalı (Sundstrom, 2014) matematiksel titizliğe ve ahenge uygun olmalıdır. Biçimciliğin (formalism) aydınlatmada önemli bir araç

olduğu düşünülerek gerekçelendirmeler uygun bir titizlikte yapılırsa öğrenmeye katkıda bulunurlar (Hanna, 1991).

- Tüm adımlar gerekli olmalı (Duval, 2007) ve ispatlama yapan kişi her adımı zihninde anlamlandırmalıdır (Stefanowicz, 2014).
- Atılan tüm adımlar ikna edici delillere dayandırılmalıdır (Hanna, 1991; Hersh, 1993).
- İspatlar belirsizlik ve şüphe içermezler (Solow, 1982). İspatlar muhatabının anlayacağı açıklıkta olmalıdır. Atılan her adımı sorabilecek birilerinin olduğu düşünülerek her adımda neler olduğunu açıklayan cümleler eklenmelidir ve unutulmamalıdır ki sadece sayı ve sembollerden oluşan ispatlar ancak kötü ispatlara bir örnek olurlar (Stefanowicz, 2014).
- Bizi istediğimiz sonuca götürecek adımlar atılmalıdır. Unutulmamalıdır ki atılan her doğru adım bizi istediğimiz sonuca götürmeyebilir.
- Gereksiz ayrıntılardan ve notlardan kaçınılmalıdır (Campbell, 2012, s27).
- Atılması gereken adımlar unutulmamalıdır. Özellikle ispatın herhangi bir adımı için aşikâr, bariz yazılıp bırakılmamalıdır. İspatlayan için aşikâr ve bariz olan bilgi okuyucu için aynı netlikte olmayabilir.
- Matematiğin sembol ağırlıklı bir alan olması (Chartrand, Polimeni ve Zhang, 2013), ispatın da matematiğin önemli bir bölümünü teşkil etmesi (Hanna, 2000) sebebiyle ispatlar yapılırken matematiksel dil ve sembolik dil kullanımına özen gösterilmelidir (Laborde, 1990; Campbell, 2012). Ayrıca ispatlamada kullanılan dilde zamir olarak “biz” ifadesi kullanılmalıdır (Sundstrom, 2014, s. 23).
- İspatın bir önermenin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemekten ötede başkalarına ispatın doğruluğunu açıklamak (Campbell, 2012) ve başkalarını ikna etmek (Baker ve Campbell, 2004; Sundstrom, 2014) gibi amaçlarının olduğu unutulmamalıdır. Çünkü ispat insanlar arasında matematiksel doğruların ve gerçeklerin iletim yöntemidir (Solow, 1982).
- İspatın işlevleri (Hanna, 2000) göz önünde bulundurulmalıdır.
- Analitik ispat şemaları (Harel ve Sowder, 1998; Sowder ve Harel, 1998) kullanılmalıdır.
- İspata başlama gibi ispatın sonlandırılması da önemlidir. İspatın tamamlandığını bir cümleyle okuyucuya söylemek fayda sağlayacaktır (Sundstrom, 2014). “Böylece teorem ispatlanmış olur”, “Böylece önermenin doğruluğu ispatlanmış olur”, “Böylece

önermenin yanlışlığı ispatlanmış olur", "Böylece önermenin doğruluğu çürütülmüş olur", "İspat tamamlandı", "İspat bitti" gibi cümleler kurulabilir.

Bunların dışında ispatlama için yaratıcılık, his, tecrübe (Solow, 1982), hayal gücü, sezgi ve de sıkı çalışma gerekir (Rossi, 2006). İspat yazmak kolay bir iş değildir (Stefanowicz, 2014). Bu yüzden ilk deneyimlerde iyi ispat yazma endişesi taşınmamalı ispatın doğruluğuna odaklanılmalıdır (Chartrand, Polimeni ve Zhang, 2013). Ancak öğrencilerin ispatın ne olduğunu veya ne olmadığını anlamaları için en önemlisi ispat yazmayı öğrenmeleri gerekmektedir (Goldberg, 1974). Bunun için iyi bir ispat öğretimi gerekmektedir.

2.3. İspat Öğretimi

İspat okul matematiğinde matematiksel düşünmeyi geliştirme, matematiği anlama ve anlamlandırma gibi birçok matematiksel pedagojik amaca hizmet eder (Dickerson ve Doerr, 2014). Matematik eğitiminde ispat öğretiminin amacı öğrenci için önemli fikirleri aydınlatmaktır (Hanna, 1990). Öğrenciler için ispat matematiğin öğreniminde bir kırılma noktası veya bir eşik olarak düşünülebilir (Duval, 2007). İspatın tüm eğitim seviyelerindeki öneminin (Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002) aksine ispatın tanımı, ne olduğu, ne anlama geldiği ve nasıl yapıldığına ilişkin bilgiler matematik eğitiminin tüm seviyelerinde eksik kalmıştır (Pasigna ve Herrera, 2014). Bu eksikliği gidermeye yönelik olarak ülkelerdeki eğitimle ilgili karar alıcılar başta olmak üzere kamu kurumları ve eğitimle ilgili kabul görmüş sivil topluluklar akıl yürütme ve ispatla ilgili öğrenciler için bazı standartlar, öğretmenler için de bazı yeterlikler belirlemişler ve bunları öğretim programlarına yansıtmışlardır. Etkili bir ispat öğretiminin üç dayanağının olduğunu söyleyebiliriz. Bunlar ülkelerin öğretim programları, öğretmen yeterlikleri ve öğrenci standartlarıdır.

Araştırmanın problem durumunda da bahsedildiği gibi öğretmenler ve öğrenciler için konulan bu standartlar ve yeterlikler ülkelere göre, öğrenciler için yaş gruplarına göre ve öğretmenler için eğitim verdikleri sınıf düzeylerine göre farklılık göstermektedirler. Çünkü dünyada öğretilen ve öğrenilen ispata ilişkin bağlamlar ülkelerin öğretim programları, öğrencilerin yaşları, öğrencilerin sınıf seviyeleri ve alan öğretmenlerinin bilgisi bakımından değişiklik gösterebilir (Jones ve Herbst, 2012). İspatın matematik,

matematik eğitimi, diğer bilimler ve öğrencilik dışı hayatta artan önemiyle birlikte ispat öğretiminin öğrencilerin öğrenim hayatlarında ne zaman başlaması gerektiği tartışılan bir konu haline gelmiştir. National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] ve National Association for the Education of Young Children [NAEYC] çocukların 3 ile 6 yaş arasında alacağı kaliteli matematik eğitiminin onların hayatlarındaki önemini vurgulamaktadır (NAEYC, 2010). Bu vurguya paralel olarak ispat öğretiminin öğrencilerin öğrenim hayatlarında ne zaman başlaması gerektiği ve tüm eğitim seviyelerinde ispat öğretimine yönelik eksikliklerin giderilmesi adına NCTM (2000) anaokulundan 2. sınıfa kadar olan sınıflar için, 3.sınıftan 5. sınıfa kadar olan sınıflar için, 6. sınıftan 8. sınıfa kadar olan sınıflar için ve 9. sınıftan 12. sınıfa kadar olan sınıflar için akıl yürütme ve ispat standartlarını belirlemiştir. Bu raporla birlikte matematik eğitimi camiasında ispat öğretiminin öğrencilerin öğrenim hayatlarıyla başlaması gerektiği ile ilgili görüş hâkim olmuştur. İspat öğretimi sınıf düzeylerine göre şekillendirilmelidir. Ancak ispat öğretiminin her seviyesinde ezberden kaçınılmalıdır. Çünkü zengin matematik bilgisine ve deneyimine sahip olmayan öğrenciler ispatları ezberleme eğilimindedirler (Güven ve Karataş, 2005). İspatlar öğrencilerin bilgi inşalarına katkı sağlamadığı sürece onlar için anlamsız ve amaçsızdırlar (Mariotti, 2006). İspat öğretiminde öğretim programları dışında öğretmen yeterlikleri de önem arz etmektedir. İspat öğretimi için öğretmenlerin sahip olması gereken bilgiler ve eğilimler Tablo 2.1’de verilmiştir.

Tablo 2.1. İspat Öğretimi İçin Öğretmenlerin Sahip Olması Gereken Bilgiler ve Eğilimler

Alanın öğretimi ve öğrenimine dair bilgi (Ball, 1988) • Olumlu görüşler • Olumlu tutumlar	Alan bilgisi (Shulman, 1986, 1987) • Ortak alan bilgisi (Ball, Thames ve Phelps, 2008) • Özel alan bilgisi (Ball, Thames ve Phelps, 2008)	Pedagojik alan bilgisi (Shulman, 1986, 1987) • Öğrencilerin ve alanın bilgisi (Ball, Thames ve Phelps, 2008) • Alan ve öğretimin bilgisi (Ball, Thames ve Phelps, 2008)	Öğretim programı bilgisi (Shulman, 1986, 1987) • Matematik dersi öğretim programı bilgisi	Ölçme ve değerlendirme bilgisi (Tamir, 1988) • Matematik dersine yönelik ölçme ve değerlendirme bilgisi
İspatın öğretimi ve öğrenimine dair bilgi • Olumlu görüşler • Olumlu tutumlar	İspatla İlgili Alan Bilgisi (Lesseig, 2011, 2016) • İspat öğretimi için ortak (genel) alan bilgisi • İspat öğretimi için özel (uzmanlaşmış) alan bilgisi	İspatla ilgili pedagojik alan bilgisi (Lesseig, 2011, 2016) • İspat öğretimi için alan ve öğrenci bilgisi • İspat öğretimi için alan ve öğretim bilgisi	Öğretim programında ispatın yerine ve önemine dair bilgi	İspatın öğrenimine yönelik ölçme ve değerlendirme bilgisi

Öğretimin her seviyesinde etkili ispat öğretimi için öğretmenlerin hem matematiğin öğretimi ve öğrenimi hakkında bilgilerinin, matematikle ilgili alan bilgilerinin, matematikle ilgili pedagojik alan bilgilerinin, matematik dersi öğretim programı bilgilerinin, matematiğin öğrenimine yönelik ölçme ve değerlendirme bilgilerinin hem de ispatın öğretimi ve öğrenimi hakkında bilgilerinin, ispatla ilgili alan bilgilerinin, ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin, öğretim programında ispatın yerine ve gerekliliğine dair bilgilerinin, ispatın öğrenimine yönelik ölçme ve değerlendirme bilgilerinin gelişmiş olması gerekmektedir.

İspat eğitimin her seviyesinde öğrenilmesi ve öğretilmesi güç bir konudur (Stylianides ve Stylianides, 2017). Öğrencilerin matematiksel ispatı anlamalarına ve ispat tekniklerini geliştirmelerine nasıl yardımcı olunacağı konusu matematik eğitimindeki en zor araştırma alanlarından biridir (Marrades ve Gutiérrez, 2000). Matematik öğretmeni yetiştirme programlarında ispatın öğretmen adaylarına en açık ve en etkili şekilde nasıl öğretileceği konusu göz önünde bulundurulmalıdır (Sears, Mueller ve Karadeniz, 2013). Matematik öğretmenleri lisans öğrenimlerinde soyut matematik öğrenirler “fakat bu dersler ispatların nasıl yazıldığına odaklanırlar, ispatların niçin yazıldığına veya lise sınıflarındaki ispatların en iyi nasıl kullanıldığına odaklanmazlar” (Dickerson ve Doerr, 2014, s. 728). Ortaöğretim öğrencilerine ispatın hangi özelliklerinin öğretilmesinin yararlı olacağı konusu öğretmenler için önemli bir konudur (Dickerson ve Doerr, 2014). Çoğu ülkelerdeki öğretmen eğitim programları öğretmen adaylarını ispat öğretmek için hazırlamazlar (IAS/PCMIIS, 2006). Bu eksiklikleri gidermek adına matematik öğretmen eğitimcilerinin öğretmen adaylarının ispatı öğrenmeleri için farklı fikirler geliştirmeleri gerekmektedir (Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007). Matematik öğretmenliği programlarında böyle derslerin ve öğretim materyallerinin eksikliği ispata dönük müdahale çalışmalarını gerektirmektedir. Özellikle de Tablo 2.1’de değinilen öğretmen adaylarının ispatla ilgili sahip olması gereken eğilim ve bilgilerin geliştirilmesine yönelik müdahale çalışmalarının yapılması elzemdir. Bu çalışmada öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerinin geliştirilmesi amaçlanmaktadır. Bu yüzden literatüre bu akışta devam edilmiştir.

2.4. İspatla İlgili Alan Bilgisi

Shulman (1986) bir öğretmenin sahip olması gereken bilgi formlarını “alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi ve öğretim programı bilgisi” olarak üç kategoriye ayırmış ve daha sonra bunu genişleten Shulman (1987, s. 8) öğretmenin sahip olması gereken bilgi formlarını yedi kategoriye ayırmıştır.

- Alan bilgisi
- Genel pedagojik bilgi
- Öğretim programı bilgisi
- Pedagojik alan bilgisi
- Öğrenenler ve onların kişisel özelliklerinin bilgisi
- Eğitimsel içerikler bilgisi
- Eğitim hedefleri, amaçları, değerleri ve de felsefi ve tarihsel temelleri bilgisi

Öğretmenler tarafından bir konunun öğretilebilmesi için öncelikle öğretmenin anlatacağı konuyu iyi bilmesi gerekir. Yani öğretmenin bilgi formları içinde yer alması gereken ilk öğe alan bilgisidir. Shulman (1986) alan bilgisini “öğretmenin zihnindeki bilginin miktarı ve onun düzenlenmesi” olarak tanımlamıştır. Mishra ve Koehler (2006, s. 1026) ise alan bilgisini “öğrenilmesi veya öğretilmesi gereken asıl konu ile ilgili bilgi” olarak tanımlamıştır. Matematik öğretmeni öğrencilerin öğreneceği, kendi öğreteceği konuya ait tanımları, teoremleri, ispatları, özellikleri, kuralları iyi bilmelidir. Çünkü varsayımlar, önermeler, tanımlar, aksiyomlar, postulatlar, lemmalar, teoremler ve sonuçlar matematiğin iskeletini oluştururlar (Heinze ve Reiss, 2003). Öğretmenler aynı zamanda anlatacakları konunun doğasını da iyi bilmelidirler (Mishra ve Koehler, 2006). Öğretmenler öğrencilerine öğrenecekleri konun neden önemli olduğunu da vurgulamalılardır (Shulman, 1986, 1987). Tüm bunlar alan bilgisi içinde değerlendirilir.

Ball, Thames ve Phelps'in (2008) öğretim için matematiksel bilgi çerçevesi alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi olmak üzere iki bilgi alanından oluşmaktadır. Alan bilgisi ise genel (ortak) alan bilgisi ve uzmanlaşmış (özelleşmiş) alan bilgisi olmak üzere iki alt bilgi alanına ayrılmıştır (Ball, Thames ve Phelps, 2008). Genel alan bilgisi öğretim dışındaki ortamlarda kullanılan matematiksel bilgi ya da beceridir (Ball, Thames ve Phelps, 2008). Uzmanlaşmış alan bilgisi ise öğretime özgü olan ve matematik sınıflarında kullanılan matematiksel bilgi ya da beceridir (Ball, Thames ve Phelps, 2008).

Steele ve Rogers (2012, s. 161) ispat öğretimi için matematiksel bilginin çerçevesini çizmiş ve ispat bilgisinin bileşenlerini "ispatı tanımlama", "ispatları ve ispat olmayanları belirleme", "matematiksel ispatları yaratma", "matematikte ispatın rollerini anlama" olarak belirlemiştir. Lesseig (2011, 2016) ise Ball, Thames ve Phelps (2008) tarafından geliştirilen öğretim için matematiksel bilgi çerçevesini ispata uyarlayarak "İspata yönelik öğretim için matematiksel bilgi" çerçevesini oluşturmuştur. Lesseig (2011) doktora tezinde ispat öğretimi için matematiksel bilgiyi "ispat öğretimi için konu alan bilgisi" ve "ispat öğretimi için pedagojik alan bilgisi" olmak üzere iki bilgi alanında incelemiştir. Lesseig (2011, 2016) yine ispat öğretimi için konu alan bilgisini de ispat öğretimi için genel alan bilgisi ve ispat öğretimi için uzmanlaşmış alan bilgisi olarak iki alt bilgi alanında incelemiştir. Bunlardan birincisi olan genel alan bilgisi matematiği kullanan kişilerin ispatla ilgili sahip olduğu bilgidir diğeri özel alan bilgisi ise ispatın öğretiminde sadece öğretmenlerin sahip olduğu eşsiz bilgidir (Lesseig, 2016). Öğretmenler hem ortak alan bilgisine hem de özel alan bilgisine sahip olmalıdır. Lesseig'in (2016) ispat öğretimi için konu alan bilgisinin bileşenlerine ait tablosu Tablo 2.2'de sunulmuştur.

Tablo 2.2. İspat Öğretimi İçin Matematiksel Bilginin Konu Alan Bilgisi Bileşenleri Çerçevesi (Lesseig, 2016, s. 255).

İspat Öğretimi için Konu Alan Bilgisi	
Genel Alan Bilgisi	*Uzmanlaşmış Alan Bilgisi*
Geçerli ispat oluşturma becerisi • Belirtilen varsayımları, tanımlamaları ve önceden yerleşmiş sonuçları anlama ve kullanma • Önermelerin mantıklı bir şekilde ilerlemesini sağlama • Durumlara göre durumları analiz etme • Karşıt örnekler kullanma *Gerekli ispat anlayışları* • Bir teoremin istisnai durumları yoktur • Bir ispat genel olmalıdır • Bir ispat önceden yerleşmiş olan matematiksel doğrulara dayanmaktadır • Bir ispatın geçerliliği mantık yapısına bağlıdır *İspatın işlevleri* • Bir önermenin doğruluğunu ispatlamak • Matematiksel bilgiyi iletmek ve sistemleştirmek	*İspat bileşenlerinin açık bir şekilde anlaşılması* Kabul edilen önermeler • Yararlı tanımlar veya teoremler dizisi • Dilin rolü ve tanımlanmış terimler Temsil biçimleri • Genel bir argüman sağlamak için çeşitli görsel sembolik yöntemler Argümantasyon modları • Hangi yöntemlerin (örn. tüketerek veya karşı örnekle ispat) yeterli ve etkili olduğunu ayırt etme • Deneysel ve tümdengelimli argümanların özelliklerini tanımlama (genel örnekler de dâhil olmak üzere) *İspatın ek işlevleri* • Önermenin niçin doğru olduğunun iç yüzünün anlaşılmasını sağlama • Matematiksel anlayış inşa etmek

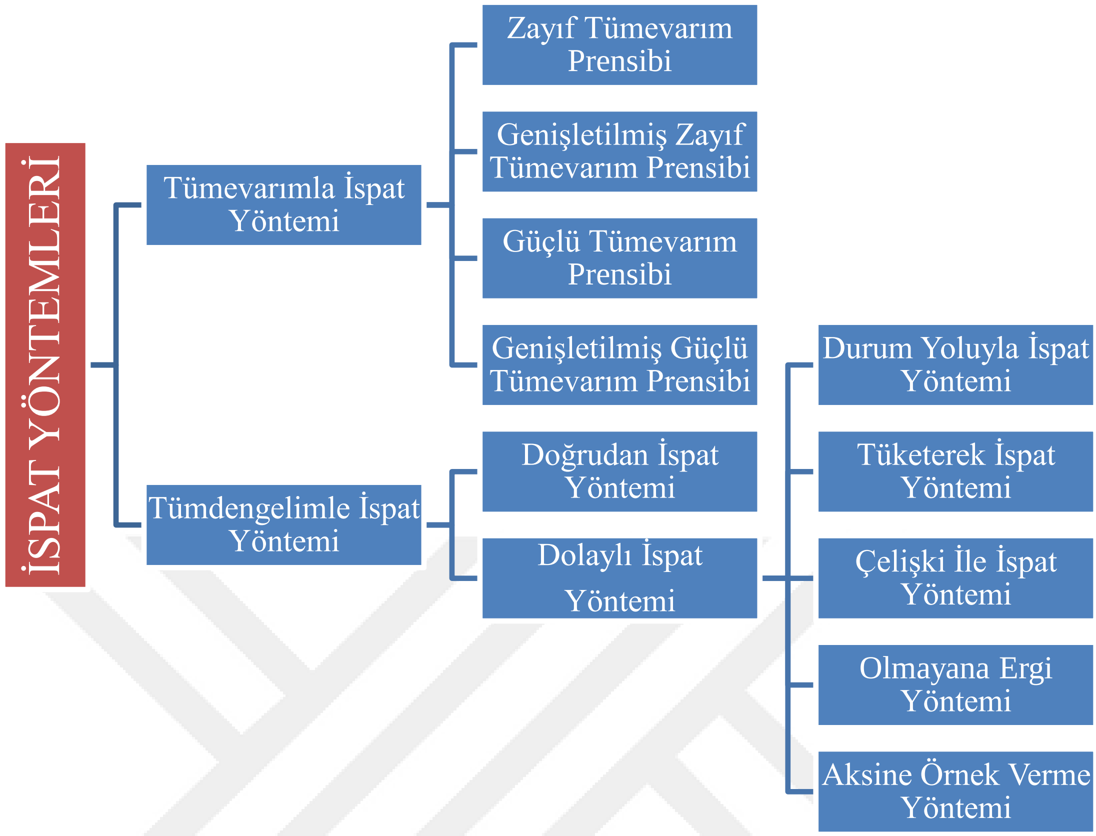
Tablo 2.2'den de görüldüğü gibi ispat öğretimi için uzmanlaşmış alan bilgisi, ispat öğretimi için genel alan bilgisinden daha kapsamlıdır. Öğretmenlerin ispatla ilgili hem genel alan hem de uzmanlaşmış alan bilgisine sahip olmaları gerekmektedir. Öğretmenlerin uzmanlaşmış alan bilgisi içerisinde ispat yöntemlerini bilmesi gerekir. Ayrıca öğretmenlerin deneysel argümanlardan sıyrılıp analitik şema seviyesinde ispat yapmaları gerekmektedir. Bu çalışmada öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgileri;

- Farklı ispat yöntemlerini bilip uygulayama bilgileri
- Sahip oldukları ana ispat şemaları

bileşenlerinde incelenecektir.

2.4.1. İspat Yöntemleri

İspat yapma yöntemleri evrensel (Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006; Köğce, 2012) olmakla birlikte literatürde çeşitli şekillerde sınıflandırılmıştır. Bazı teoremlerin ispatı için birden fazla yöntem uygun olduğu gibi bazı teoremlerin ispatları için de uygun yöntem bunlardan sadece birisidir (Rossi, 2006). Birden fazla yöntemin uygun olduğu sorularda bu uygun yöntemlerden hangisini seçeceği ispatlayıcıya kalmıştır. Ancak yine de kısalık, açıklık, estetik gibi özellikler göz önüne alınabilir. İspat yöntemlerini bilmek ispat yapmak için gerekli bir şarttır ancak yeterli şart değildir. İspat yöntemlerinden ispatlama teknikleri diye de bahsedilmektedir. Bu bölümde ispat yöntemleri ayrıntılı incelenmiştir. İspat yöntemleri öncelikle tümevarımla ispat yöntemi ve tümdengelimle ispat yöntemi olmak üzere ikiye ayrılmıştır. Tümevarımla ispat yöntemi zayıf tümevarım prensibi, genişletilmiş zayıf tümevarım prensibi, güçlü tümevarım prensibi ve genişletilmiş güçlü tümevarım prensibi olarak dörde ayrılmıştır. Tümdengelimle ispat yöntemi de yine doğrudan ispat yöntemi ve dolaylı ispat yöntemi olarak ikiye ayrılmıştır. Dolaylı ispat yöntemi ise durum yoluyla ispat yöntemi, tüketerek ispat yöntemi, çelişki ile ispat yöntemi, olmayana ergi yöntemi ve aksine (karşıt) örnek verme yöntemi olmak üzere beş başlık altında incelenmiştir.



Şekil 2.2. İspat Yöntemlerinin Sınıflaması

2.4.1.1. Tümevarımla İspat Yöntemi

Tümevarımla ispat yönteminde akıl yürütme özelden genele başka bir deyişle parçadan bütüne doğru ilerler. Tümevarımla ispat yönteminde verilen önermenin doğal sayılar veya sayma sayıları kümesinde yani iyi sıralı ve sonsuz elemanlı kümelerde geçerli olduğu ispatlanmaya çalışılır (Cunningham, 2012). Onun için bu yöntem doğal sayıları veya sayma sayılarını içeren önermeleri ispatlamada elverişlidir (Bloch, 2011). Doğal sayıları ve sayma sayılarını içeren önermelere ayrık matematikte ve sayılar teorisinde sıkça rastlandığından bu yöntem ayrık matematikte ve sayılar teorisinde çokça kullanılır (Harel, 2001). Tümevarımla ispat yöntemi diğer ispat yöntemlerine göre daha avantajlıdır çünkü aşağıda tümevarım prensiplerinde belirtildiği gibi izlenecek adımlar hep aynıdır (Rossi, 2006). Tümevarım prensibinin dört faklı versiyonu vardır. Literatürde farklı isimlerle bahsedilen bu formlardan bu araştırmada zayıf tümevarım prensibi, genişletilmiş zayıf tümevarım prensibi, güçlü tümevarım prensibi, genişletilmiş güçlü tümevarım prensibi olarak bahsedeceğiz.

2.4.1.1.1. Zayıf Tümevarım Yöntemi

$$P(1), P(2), P(3), \cdots, P(k), P(k+1), \cdots$$

önermelerini sonsuz domino zincirindeki domino taşları gibi düşünürsek zayıf tümevarım yönteminde öncelikle birinci domino taşının düştüğünü, daha sonra da her düşen taşın kendinden sonraki domino taşını düşürdüğünü gösteriyoruz ve böylece birden itibaren sonsuz sayıdaki domino taşının domino etkisiyle birbirini düşürdüğünü göstermiş oluyoruz (Ron ve Dreyfus, 2004; Sundstrom, 2014; MEB, 2005).

Tümevarım yönteminde n'e *tümevarım parametresi* denir (D'Angelo ve West, 2000). Zayıf tümevarım prensibinde *temel değer (başlangıç değeri)* $n = 1$'dir. Bu tezde $n = k$'ya *tümevarım değişkeni* diyeceğiz. Temel adım temel değerle atılan adımdır.

Zayıf tümevarım prensibinde $n = 1$ için $P(1)$ önermesini doğrulamaya *temel adım veya başlangıç adımı*, $n = k$ için $P(k)$ önermesinin doğruluğunu kabul etmeye *tümevarım hipotezi veya tümevarım varsayımı* ve $n = k$'nın varsayımından hareketle ardılı olan $n = k + 1$ için de $P(k + 1)$ önermesinin doğruluğunu göstermeye de *tümevarım adımı veya tümevarım basamağı* denir (D'Angelo ve West, 2000; Gossett, 2003; Rossi, 2006; Garnier ve Taylor, 2009; Hammack, 2013; Lay, 2014; Sundstrom, 2014; Roberts, 2015; Swanson, 2017). Tümevarım hipotezinin doğru kabul edilmesi ve tümevarım adımının uygulanabilmesi için öncelikle ilk adımın doğruluğunun gösterilmesi gerekmektedir (Doğan-Dunlap, Özdemir-Erdoğan ve Kılıç, 2013). Domino taşlarında temel adım ilk taşın düşmesidir (Gossett, 2003). Zayıf tümevarım prensibinde temel değer 1 için doğrulama yapıldıktan sonra 2, 3, … için de doğrulama yapılabilir. Bu adımlar ispatlayanın kendini *ikna adımlarıdır*. İspatlayan bu adımları ikna olana dek sürdürebilir. Matematiksel ifade ile zayıf tümevarım prensibini $n, k \in Z^+$ için

$\left[P(1) \wedge \left(\forall k, P(k) \Rightarrow P(k+1)\right)\right] \Rightarrow [\forall n, P(n)]$ şeklinde yazabiliriz (Gossett, 2003).

Tablo 2.3. Zayıf Tümevarım Prensibi

Zayıf Tümevarım Prensibi Varsayalım ki $P(n)$; $n \in Z^+$ değişkenine bağlı bir önerme olsun. O halde aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa $P(n)$ önermesi tüm pozitif tam sayılar için doğrudur. • $P(1)$ doğru • Tüm pozitif k tam sayıları için $P(k)$ doğru ise $P(k+1)$ doğru

Kaynak: Harel, 2001; Feil ve Krone, 2003; Eccles, 2007; Stirling, 2009; Beck ve Geoghegan, 2010; Garnier ve Taylor, 2009; Bloch, 2011; Chartrand, Polimeni ve Zhang, 2013; Roberts, 2015.

2.4.1.1.2. Genişletilmiş Zayıf Tümevarım Yöntemi

Zayıf tümevarım prensibinde temel değer 1 iken genişletilmiş zayıf tümevarım prensibinde temel değer m olur (Cunningham, 2012). Genişletilmiş zayıf tümevarım prensibinde temel değer m için doğrulama yapıldıktan sonra $m+1, m+2, \ldots$ için de doğrulama yapılabilir. Bu adımlar ispatlayanın kendini ikna adımlarıdır. İspatlayan bu adımları ikna olana dek sürdürebilir. Tümevarım varsayımı ve tümevarım adımı zayıf tümevarım prensibinde olduğu gibidir. Burada dikkat edilmesi gereken m 1'den farklı tam sayı olabilir. m 1 olduğunda zayıf tümevarım prensibi olur. Zaten zayıf tümevarım prensibi genişletilmiş zayıf tümevarım prensibinin özel bir formudur. Matematiksel ifadeyle genişletilmiş zayıf tümevarım prensibini $n, k, m \in Z$ ve $n \geq k \geq m$ için $\left[P(m) \wedge \left(\forall k, P(k) \Rightarrow P(k+1)\right)\right] \Rightarrow [\forall n, P(n)]$ şeklinde yazabiliriz.

Tablo 2.4. Genişletilmiş Zayıf Tümevarım Prensibi

Genişletilmiş Zayıf Tümevarım Prensibi Varsayalım ki $P(n)$; $n \in Z$ değişkenine bağlı bir önerme ve $n \geq k \geq m, m \in Z$ olsun. O halde aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa $P(n)$ önermesi m'den büyük tüm tam sayılar için doğrudur. • $P(m)$ doğru • Tüm $k \geq m$ tam sayıları için $P(k)$ doğru ise $P(k+1)$ doğru

Kaynak: Eccles, 2007; Beck ve Geoghegan, 2010; Garnier ve Taylor, 2009; Bloch, 2011; Epp, 2011; Chartrand, Polimeni ve Zhang, 2013; Cunningham, 2012; Lay, 2014; Sundstrom, 2014.

2.4.1.1.3. Güçlü Tümevarım Yöntemi

$$P(1), P(2), P(3), \cdots, P(k), P(k+1), \cdots$$

önermelerini domino zincirindeki domino taşları gibi düşünürsek güçlü tümevarım yönteminde öncelikle birinci domino taşının düştüğünü gösteriyoruz, ikinci, üçüncü, $\cdots$, $k-1$. ve k. taşların düştüğünü varsayıp daha sonra da bu varsayımlara dayanarak k'dan itibaren her düşen taşın kendinden sonraki domino taşını düşürdüğünü gösteriyoruz ve böylece birden itibaren sonsuz sayıdaki domino taşının domino etkisiyle birbirini düşürdüğünü göstermiş oluyoruz. Güçlü tümevarımda zayıf tümevarıma göre daha fazla varsayımda bulunulur. Bu prensip tam indüksiyon prensibi olarak da bilinir.

Güçlü tümevarım prensibinde de $n=1$ için $P(1)$ önermesini doğrulamaya *temel adım (başlangıç adımı)*, $n=2$ için $P(2)$, $n=3$ için $P(3), \cdots, n=k$ için $P(k)$ önermelerinin doğruluğunu kabul etmeye *tümevarım varsayımları (tümevarım hipotezleri)* ve $n = k$'nın ardılı olan $n = k + 1$ için $P(k + 1)$ önermesinin doğruluğunu göstermeye *tümevarım adımı (tümevarım basamağı)* denir (D'Angelo ve West, 2000; Chartrand, Polimeni ve Zhang, 2013). Daha özet ifadeyle güçlü tümevarım prensibini $\forall n, k \in Z^+$ için

$$[P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \cdots \wedge P(k) \Rightarrow P(k + 1)] \Rightarrow [\forall n, P(n)]$$

şeklinde yazabiliriz (Chartrand, Polimeni ve Zhang, 2013).

Tablo 2.5. Güçlü Tümevarım Prensibi

Güçlü Tümevarım Prensibi Varsayalım ki $P(n)$; $n \in Z^+$ değişkenine bağlı bir önerme ve $n \geq i \geq 1$ olsun. O halde aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa $P(n)$ önermesi tüm pozitif tam sayılar için doğrudur. • $P(1)$ doğru • $k \geq i \geq 1$ eşitsizliğini sağlayan her i pozitif tam sayısı için $P(i)$ doğru ise $P(k + 1)$ doğru

Kaynak: D'Angelo ve West, 2000; Rossi, 2006; Eccles, 2007; Stirling, 2009; Bloch, 2011; Chartrand, Polimeni ve Zhang, 2013; Hammack, 2013.

2.4.1.1.4. Genişletilmiş Güçlü Tümevarım Yöntemi

Güçlü tümevarım prensibinde temel değer 1 iken genişletilmiş güçlü tümevarım prensibinde temel değer m olur. Tümevarım varsayımları ve tümevarım adımı güçlü tümevarım prensibinde olduğu gibidir. Burada dikkat edilmesi gereken m 1'den farklı tam sayı olabilir. m 1 olduğunda güçlü tümevarım prensibi olur. Zaten güçlü tümevarım prensibi genişletilmiş güçlü tümevarım prensibinin özel bir formudur. Daha özet ifadeyle güçlü tümevarım prensibini $\forall n, k, m \in Z^+$ ve $n \geq m$ için

$$[P(m) \wedge P(m + 1) \wedge P(m + 2) \wedge \cdots \wedge P(k) \Rightarrow P(k + 1)] \Rightarrow [\forall n, P(n)]$$

şeklinde yazabiliriz (Cunningham, 2012).

Tablo 2.6. Genişletilmiş Güçlü Tümevarım Prensibi

Genişletilmiş Güçlü Tümevarım Prensibi Varsayalım ki $P(n)$; $n \in Z^+$ değişkenine bağlı bir önerme ve $n \geq k \geq m$, $m \in Z$ olsun. O halde aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa $P(n)$ önermesi m'den büyük tüm tam sayılar için doğrudur. • $P(m)$ doğru • $k \geq i \geq m$ eşitsizliğini sağlayan her i tam sayısı için $P(i)$ doğru ise $P(k + 1)$ doğru

Kaynak: Leung ve Cheung, 1988; Bloch, 2011; Epp, 2011; Cunningham, 2012; Stefanowicz, 2014; Sundstrom, 2014.

2.4.1.2. Tümdengelimle İspat Yöntemi

Tümdengelimle ispat yönteminde akıl yürütme genelden özele başka bir deyişle bütünden parçaya doğru ilerler. Tümdengelimle ispat yöntemleri tümevarımla ispat yönteminden daha karmaşık ve kendi içinde daha çeşitlidir. Tümevarım yöntemi gibi sistematiği yoktur. Tümdengelimle ispat yöntemi doğrudan ispat yöntemi ve dolaylı ispat yöntemi olarak ikiye ayrılır.

2.4.1.2.1. Doğrudan İspat Yöntemi

Doğrudan ispat yöntemi hipotez olan p önermesi ile başlayıp hüküm olan q önermesi ile biter (Bloch, 2011). $p \Rightarrow q$ bileşik önermesi doğrudan ispat yöntemi ile ispat edilirken ilk önerme olan p hipotezinin doğru olduğu varsayılarak ikinci önerme olan q hükmünün doğru olduğu sonucuna ulaşılmaya çalışılır (Feil ve Krone, 2003). Yani önermenin hipotezinden önermenin hükmüne bir dizi adımla ulaşılmaya çalışılır (Rossi, 2006; Bloch, 2011). Mantıksal ve matematiksel ilkelere dayanan bu adımlar bizi önermenin hükmüne götürebilecek bir takım delillere dayanır.

$i = 1,2,3, \cdots, k$ için a_i bu atılan adımlar ise doğrudan ispat yönteminin diyagramı

$$p \Rightarrow a_1 \Rightarrow a_2 \Rightarrow a_3 \Rightarrow \cdots \Rightarrow a_k \Rightarrow q$$

şeklinde olabilir (Gossett, 2003; Rossi, 2006). Burada atılan adımlarda önceki teoremler, lemmalar, aksiyomlar, postulatlar, sonuçlar, tanımlar, tanımsız terimler, kurallar veya matematiksel işlemler olabilir. Başka bir ifadeyle

p önermesi doğru kabul edilir $\Rightarrow$ bir dizi argüman $\Rightarrow q$ önermesinin doğru olduğu sonucuna ulaşılır (Bloch, 2011).

2.4.1.2.2. Dolaylı İspat Yöntemi

Ancak $p \Rightarrow q$ bileşik önermesi ispat edilirken bazen p önermesinin doğruluğundan hareketle q önermesinin doğruluğunun gösterilmesi zor olabilir (Cunningham, 2012). Bu gibi durumlarda alternatif ispat yöntemlerine yönelinir. Bu yöntemler genel ismiyle dolaylı ispat yöntemleri olarak adlandırılır. Dolaylı ispat yöntemleri doğrudan ispat yöntemine göre epistemolojik olarak daha karmaşıktır. Dolaylı ispat yöntemlerine öncelikle durum yoluyla ispat yöntemi ile başlayalım.

2.4.1.2.2.1. Durum Yoluyla İspat Yöntemi

Önermenin tanımlandığı kümede kümenin tüm elemanları için tek seferde ispatlama yapılamadığı takdirde tanımlanan küme parçalara ayrılıp, önerme bu alt kümelerde ayrı ayrı ispatlanabilir. Durum yoluyla ispatta bütün durum (hipotez) birkaç duruma bölünerek bölünen her durumun ispatı tek tek yapılır (Chartrand, Polimeni ve Zhang, 2013). Her durum için ayrı ayrı hükme ulaşılmaya çalışılır. Burada dikkat edilmesi gereken bölünen durumların tamamının tüm durumu, tüm durumunda bölünen durumların tamamını kapsaması gerektiğidir. Durum yoluyla ispatta en az iki durum incelenir. Ancak incelenecek durumların sayısında bir üst sınır yoktur (Stefanowicz, 2014). Örneğin Dört Renk Teoreminin bilgisayarla yapılan analizinde Kenneth Appel ve Wolfgang Haken (Appel ve Haken, 1976, 1977) 1936 farklı durumu analiz etmişlerdir (Benson, 1999).

Matematiksel ifade ile $k \in Z^+$, $p = p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \cdots \vee p_k$ olmak üzere $p \Rightarrow q$ önermesi ispatlanırken $p_1 \Rightarrow q$, $p_2 \Rightarrow q$, $p_3 \Rightarrow q$, $\cdots$, $p_k \Rightarrow q$ önermelerinin her biri tek tek ispatlanır. Yani p_1 varsayılır q ispatlanır, p_2 varsayılır q ispatlanır, p_3 varsayılır q ispatlanır, $\cdots$, p_k varsayılır q ispatlanır (Cunningham, 2012; Sundstrom, 2014). Buradan hareketle özetle söylenebilir ki durum yoluyla ispat yönteminin mantığı aşağıdaki denklikten açıktır.

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \cdots \vee p_k) \Rightarrow q \equiv (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge (p_3 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_k \Rightarrow q)$$

Çünkü

$$\begin{aligned}(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \cdots \vee p_k) \Rightarrow q &\equiv \neg(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \cdots \vee p_k) \vee q \\ &\equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \cdots \wedge \neg p_k) \vee q \\ &\equiv (\neg p_1 \vee q) \wedge (\neg p_2 \vee q) \wedge (\neg p_3 \vee q) \wedge \cdots \wedge (\neg p_k \vee q) \\ &\equiv (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge (p_3 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_k \Rightarrow q)\end{aligned}$$

2.4.1.2.2.2. Tüketerek İspat Yöntemi

Tüketerek ispat yönteminde önermenin tanımlandığı kümedeki elemanların önermeyi doğruladığı tek tek denenir (Aylar, 2014a). Kümedeki tüm elemanlar tüketildiği zaman önermenin doğruluğu ispatlanmış olur. Ancak bu yöntem aksine örnek (karşıt örnek) verme yöntemi ile karıştırılmamalıdır. Tüketerek ispat yöntemi ile önermenin doğruluğu ispat edilirken, aksine örnek (karşıt örnek) verme yöntemi ile ispatta önermenin doğruluğu çürütülür. Yani tüketerek ispat yönteminde önermenin sonlu ya da sonsuz kümedeki tüm elemanlar için doğrulandığı, aksine örnek (karşıt örnek) verme yöntemi ile ispatta ise önermenin sonlu ya da sonsuz kümedeki en az bir eleman için doğrulanmadığı (doğruluğunun çürütüldüğü) gösterilmeye çalışılır. Daha matematiksel bir ifadeyle $p(a) \Rightarrow q(a)$ önermesinin doğruluğu $\forall a \in A$ için, yanlışlığı ise $\exists a \in A$ için gösterilir.

Tüketerek ispatta üç farklı durumla karşılaşılabilir. Birincisi tüketilecek elemanlar sonlu kümede ve elemanlar bellidir. Bu durum en kolayıdır. Sonlu kümelerde eleman sayısı denenerek tüketilecek kadar az ise hepsi denenir. İkincisi tüketilecek elemanlar sonlu kümede ancak elamanlar belli değildir. Bu durumda öncelikle tüketilecek elemanlar bulunmalıdır. Üçüncüsü de tüketilecek elemanları sonsuz kümede olan sorulardır. Tüketilecek elemanlar sonsuz kümede ise o zaman birkaç eleman için deneme yapıldıktan sonra diğer kalan elemanlar için de önermenin doğruluğu açık hale getirilir. Bu durumda tüm elemanlar için tüketme yapılmış sayılır.

Bu çalışmada tüketerek ispat yöntemi ile durum yoluyla ispat yöntemi birbirinden farklı yöntemler olarak ele alınmıştır. Çünkü durum yoluyla ispat yönteminde durumlar, tüketerek ispat yönteminde elemanlar tüketilir. Elemanları tüketmek durumları tüketmekten çoğu zaman daha kolaydır.

2.4.1.2.2.3. Çelişki İle İspat Yöntemi

Çelişki ile ispat yönteminde $p \Rightarrow q$ önermesi ispat edilirken hipotez olan p aynen doğru kabul edilir ve hüküm olan q'nun da değili $(\neg q)$ doğru kabul edilir ve buradan hareketle bir çelişkiye ulaşılmaya çalışılır (Stefanowicz, 2014). Yani burada p' nin doğru ve q'nun yanlış olduğu varsayılır (Gossett, 2003). Bu varsayımdan hareketle bir çelişkiye ulaşılıp $p \wedge \neg q$ nin doğruluğu çürütülür. Yani $\neg(p \wedge \neg q)$ doğru olur. O halde $p \Rightarrow q$ önermesinin de doğru olduğu ispatlanmış olur. Çünkü $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$ denkliği vardır.

Çelişki ile ispat yöntemi sadece hükmün bulunduğu önermeler için de çok uygun bir ispat yöntemidir. Sadece q hükmü verilsin. Burada çelişki ile ispat yönteminde izlenecek yol şudur. q hükmünün değillemesi $\neg q$ doğru kabul edilir ve bir çelişkiye ulaşılmaya çalışılır, çelişkiye ulaşıldığında q önermesinin değillemesinin $\neg q$ doğru olduğu çürütülmüş olur ki o halde q önermesi doğruluğu ispatlanmış olur (Swanson, 2017).

Ancak çelişki ile ispat yönteminin iki zorluğu vardır ki bunlardan ilki nasıl bir çelişkiye ulaşılacağının bilinmemesi ikincisi de eğer yanlış bir önerme ispatlanmaya çalışılıyorsa çelişkiye ulaşılamaması durumlarıdır (Gossett, 2003).

2.4.1.2.2.4. Olmayana Ergi Yöntemi

Olmayana ergi yöntemi karşıt ters yöntemi olarak da bilinir. Olmayana ergi yöntemi ile ispat için öncelikle $p \Rightarrow q$ bileşik önermesi ile $\neg q \Rightarrow \neg p$ bileşik önermesinin mantıksal eşdeğerliliğinden (denkliğinden) hareketle q önermesinin değillemesinin doğruluğu kabul edilerek p önermesinin değillemesinin doğru olduğu sonucuna ulaşılmaya çalışılır (Feil ve Krone, 2003). Çünkü mantıksal eşdeğerlik geçerli teoremin karşıt tersinin de doğru olmasını gerektirir (Gossett, 2003). Buradan hareketle özetle söylenebilir ki olmayana ergi yöntemi ile ispatın mantığı aşağıdaki denklikten açıktır.

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$

Çünkü

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q \equiv q \vee \neg p \equiv \neg(\neg q) \vee \neg p \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$

İşleyiş şu şekildedir.

$\neg q$ doğru kabul edilir $\Rightarrow$ bir dizi delil $\Rightarrow$ $\neg p$ doğru olduğu sonucuna ulaşılır (Bloch, 2011).

Olmayana ergi yöntemi ile çelişki ile ispat yöntemi birbirine benzerdir. Ancak birinci fark şudur ki olmayana ergi yönteminde sadece $\neg q$ doğru kabul edilir. Çelişki ile ispatta $p \wedge \neg q$ doğru kabul edilir. İkinci fark ise olmayana ergi yönteminde $\neg p$ ne ulaşılmaya çalışılır. Çelişki ile ispat yönteminde ise alelade başka bir nitelemeyle genel bir çelişki bulunmaya çalışılır. Bu çelişki bazen $2 = 5$ gibi bazen $3 \neq 3$ gibi bazen de asal bir sayının kendinden başka pozitif bir tam sayı böleni olduğu gibi matematiksel genel bir çelişki olabilir.

2.4.1.2.2.5. Aksine Örnek Verme Yöntemi

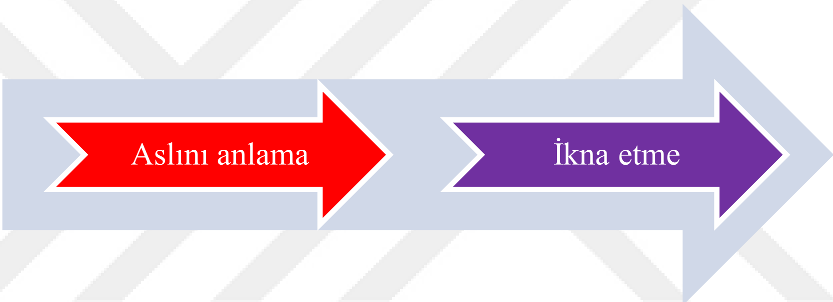
Aksine örnek verme yöntemiyle ispat için verilen önermenin tanımlandığı kümedeki bir eleman için sağlanmadığını bulmak yeterlidir (Stefanowicz, 2014; Swanson, 2017; Gürlü, 2013). Kısacası aksine örnek bir önermenin doğruluğunu çürüten yani onun yanlış olduğunu gösteren bir örnektir (Gossett, 2003). Bu yöntemde önermeyi doğrulayacak birçok örnek olmasına karşın önermenin teorem olmadığını yani yanlış olduğunu gösterecek en az bir örnek bulunmaya çalışılır. Aksine örnek bulmak bazen çok zahmetli olabilir çünkü güçlü bir sezgi gerektirir (Rossi, 2006). Bu yüzden aksine örneğin en zahmetsiz bulunan örnek olması aksine örnek (karşıt örnek) verme yöntemi ile ispatı kolaylaştırır. Aksine örnek verme ispatın bir işlevi olan genellemeyi ortadan kaldırır. Böylece önermenin doğruluğu çürütülmüş olur. Daha matematiksel bir ifadeyle $\forall a \in A, p(a) \Rightarrow q(a)$ önermesinin yanlış olduğunu ispatlamak için $\exists a \in A$ için $p(a)$ doğru iken $q(a)$'nın doğru olmadığının gösterilmesi yeterlidir (Epp, 2011). Böylece $\forall a \in A, p(a) \Rightarrow q(a)$ önermesi çürütülmüş olacaktır. Bu yönteme aksine örnek verme yöntemi ile ispat ya da karşıt örnek verme yöntemi ile ispat a'ya da aksine örnek ya da karşıt örnek denir (D'Angelo ve West, 2000; Rossi, 2006). Aksine örnek verme yöntemiyle ispat matematiksel akıl yürütmede büyük bir öneme sahiptir (Ko ve Knuth, 2013). Bir önermenin doğruluğunu çürütecek karşıt örnek sayısı bazen sadece bir bazen de sonsuz olabilir.

2.4.2. İspat Şemaları

İspat veya ispatlama seviyeleri arasındaki hiyerarşi Balacheff'in (1987, 1988) sınıflandırmaları ile gelişim kazanmıştır. Daha sonrasında ispatta kullanılan dil, ispatı anlama, ispatı değerlendirme, ispat yapma seviyeleri ve ispat yapma süreçlerine göre bu sınıflandırmalar çeşitlendirilmiştir (Bkz. Vinner, 1991; Harel ve Sowder, 1998; Miyazaki, 2000; Waring, 2000; Raman, 2003; Weber, 2004). Bu sınıflamalardan Harel ve Sowder'in (1998) iyi düşünülmüş sınıflaması bir önermenin ispatlanması sırasında öğrenciler tarafından verebilecek tüm cevap türlerini yani gerekçelendirme biçimlerini içerdiğinden dolayı literatürde sıklıkla başvurulan bir kaynaktır.

Harel ve Sowder (1998, s. 244) çalışmalarında lisans öğrencilerinin her birinin "öğrencilerin matematiksel gelişiminde bilişsel bir aşamayı ve entellektüel yeteneği temsil ettiği" ispat şemalarını keşfettiler. Harel ve Sowder (1998) ispat şemalarının var olduğunu ispatlamak ve de var olan bu şemaları sınıflandırmak için ekseriyeti matematik bölümünden olan üniversite öğrencileri ile sayılar teorisi, geometri, lineer cebir gibi alanlarda bir dizi öğretim deneyimi gözlemine dayanarak psikolojik bir çerçeve çizmişlerdir (Harel, 2007). İspat kavramının önce tarihsel ve bilişsel perspektifte incelendiği Harel ve Sowder'in (1998) çalışmasında altı öğretim deneyinde 128 öğrenci gözlemlendikten sonra öğrencilerin sahip oldukları ispat şemaları tanımlanıp sınıflandırılmıştır. Harel ve Sowder (1998) bu çalışmalarında ispatın epistemolojik ve sosyal boyutu dışında psikolojik boyutunu ele almışlardır.

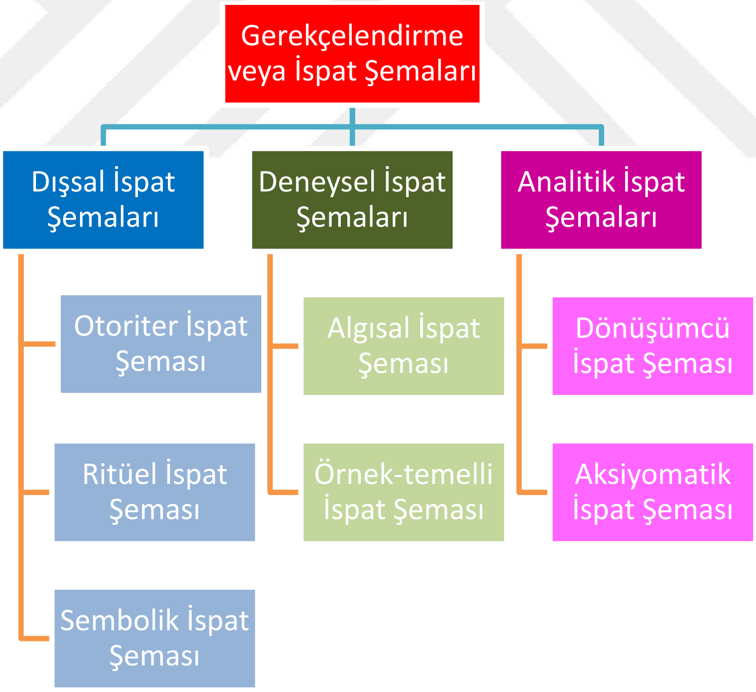
Doğası gereği ispat kendini ve başkalarını ikna etmeyi gerektirir (Flores, 2002). İspatlamayı bir iddianın doğruluğu ya da yanlışlığı üzerindeki şüpheleri ortadan kaldırmaya çalışan bir kişinin ortaya koyduğu süreç olarak tanımlayan Harel ve Sowder (1998) bu süreci kişinin kendi sahip olduğu şüpheleri ortadan kaldırmaya çalıştığı süreç olan "aslını anlama" ve kişinin başkalarının sahip olduğu şüpheleri ortadan kaldırmaya çalıştığı süreç olan "ikna etme" olarak iki alt sürece ayırmışlardır.



Şekil 2.3. Harel ve Sowder'e (1998) Göre İspatlama Sürecinin Alt Süreçleri

Öğrenciler bir önermenin doğruluğuna ya da yanlışlığına nasıl ikna oluyorlarsa başkalarını da aynı şekilde ikna edebileceklerini düşünürler. Bu öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını işaret eder. İspat şemaları bir kişinin bir önermeyi ispatlarken onu gerekçelendirme biçimlerini ve gerekçelendirme yöntemlerini içerir (Harel ve Sowder, 2005). Gerekçelendirmenin en iyi yolu da ispattır (Sowder ve Harel, 1998). Her ispat bir gerekçelendirmedir ancak her gerekçelendirme bir ispat değildir (NRC, 2001). İspat şemasının bir birey için tanımlandığı Harel ve Sowder (1998) ile Sowder ve Harel'in (1998) çalışmalarına benzer olarak ispat şeması Harel ve Sowder'in (2007) çalışmasında bileşenler aynı kalmak şartıyla genişletilip bir birey veya topluluk için tekrar tanımlanmıştır. "Bir bireyin (veya topluluğun) ispat şeması o birey (veya topluluk) için aslını anlamayı ve ikna etmeyi oluşturan şeylerden meydana gelir" (Harel ve Sowder, 2007, s. 809). İspat zihinsel bir süreç olan ispatlamanın sonunda ortaya çıkan bilişsel bir ürün iken, ispat şeması ise zihinsel bir süreç olan ispatlamanın bilişsel bir karakteristiğidir (Harel, 2008a).

Harel ve Sowder (1998) öğrencilerin ispat şemalarını ***dışsal, deneysel ve analitik ispat şemaları*** olarak üç ana sınıflamaya ayırmış, sonrasında ***dışsal ispat şemalarını*** *otoriter*, *ritüel* ve *sembolik* olmak üzere üç alt sınıflamaya, ***deneysel ispat şemalarını*** *tümevarımsal* ve *algısal* olmak üzere iki alt sınıflamaya, ***analitik ispat şemalarını*** *dönüşümcü* ve *aksiyomatik* olmak üzere iki alt sınıflamaya ayırmıştır**.** *Dönüşümcü ispat şemalarını içselleştirilmiş*, *öz-içselleştirilmiş* ve *kısıtlayıcı* olmak üzere üçe, *aksiyomatik ispat şemalarını* ise *sezgisel-aksiyomatik*, *yapısal* ve *aksiyom kurma* olmak üzere yine üçe ayırmışlardır. Sowder ve Harel (1998, s. 672) "*tümevarımsal ispat şeması*" ifadesi yerine "*örnek-temelli ispat şeması*" ifadesini kullanmışladır. Bu taksonomiyi Harel (2007) "*Students' proof schemes revisited*" adlı çalışmasında revize etmiştir. Araştırmamızda kullanacağımız ispat şemaları taksonomisini Sowder ve Harel'den (1998, s. 671) verelim.



Şekil 2.4. Gerekçelendirme veya İspat Şemalarının Bazı Tipleri (Sowder ve Harel, 1998).

Farklı bağlamlarda ve farklı zamanlarda kişiler farklı ispat şemalarına ait özellikler gösterebileceği gibi aynı anda ve aynı bağlamda da kişiler birden fazla ispat şemalarına ait özellikler gösterebilirler (Harel ve Sowder, 1998; Sowder ve Harel, 1998). Bir matematikçi bir teoremin ispatı için kendisini ikna ederken aksiyomatik ispat şemasını, meslektaşını ikna ederken bilimsel bir makaleye atıf yaparak otoriter ispat şemasını, öğrencilerini ikna ederken de örneklere başvurarak deneysel ispat şemasını kullanabilir (Cadwallader-Olsker, 2011). Öğretmenler bir önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını öğrencilerine anlatmak için bazı sınıflarda deneysel şemaya bazı sınıflarında ise analitik şemaya başvurabilirler. Çünkü deneysel şemalar gibi resmi olmayan ispatlar ispata yönelik bilişsel açıdan zayıf olan öğrencilerden oluşan sınıflarda yeterli olabilir (Schwarz ve Kaiser, 2009). Yeterli olmasının ötesinde belki de bu tür gösterimler anlatılmak istenen konunun hızlı bir şekilde anlaşılması için daha uygun olabilir.

Bazı ispat şemaları her ne kadar diğerlerinden gelişmiş görünse de bu şemalar arasında tam bir hiyerarşi bulunmamakla (Sowder ve Harel, 1998) birlikte çoğu kez kısmi bir hiyerarşiden bahsetmek mümkündür (Harel ve Sowder, 1998). Örneğin öğrenciler bir iddiayı gerekçelendirirken anlamsız sembol manipülasyonlarına başvururlarsa sembolik ispat şemasına sahip olurlar. Ancak sembolik akıl yürütmeyi doğru kullanıp, sembolleri bulunduğu bağlam içinde anlamlı kullanabilen öğrenciler dönüşümcü ispat şemasına sahip olurlar. Sadece bu iki şemadan söz edilecek bile olsa öğrencilerin sahip olması istenen ve daha üst seviye de olan ispat şeması dönüşümcü ispat şemasıdır. Yani dönüşümcü ispat şeması hiyerarşik olarak sembolik ispat şemasından daha üst seviyededir. Deneysel ispat şemalarının öğrencilerin ispat yapmalarında bir ilerleme olduğu (Knapp, 2005) düşünülürse deneysel ispat şemalarının dışsal ispat şemalarından hiyerarşi olarak daha üst düzeyde olduğu genel olarak düşünülebilir. Ayrıca matematiksel akıl yürütmeyi merkezine alan ispat şemaları öğrenciler için daha arzu edilen ispat şemalarıdır (Harel, 2008a, 2008b). Bu yüzden analitik ispat şemaları hiyerarşi olarak diğer ispat şemalarından üst seviyededir. Harel ve Sowder (1998) ve Sowder ve Harel'in (1998) taksonomisinde bulunan analitik ispat şemaları en üst seviyededir (Harel ve Sowder, 1998, Sowder ve Harel, 1998). Çünkü bu ispat şemaları akıl yürütmeyi merkeze almaktadırlar. Ayrıca Sowder ve Harel (1998) analitik ispat şemaları olan dönüşümcü ve aksiyomatik ispat şemalarını matematiksel ispat olarak kabul etmiş diğer ispat şemalarını ise gerekçelendirme olarak kabul etmişlerdir. Analitik ispat seviyelerinden aksiyomatik ispat şeması dönüşümcü ispat şemasının tüm gereksinimlerini kapsadığı ve bunlara ilaveten aksiyomatik bir yapıda ilerlediği ve de daha matematikçi gibi düşünmeyi ve hareket etmeyi gerektirdiğinden hiyerarşik olarak daha da üst seviyede olduğu söylenebilir.

2.4.2.1. Dışsal İspat Şemaları

Dışsal ispat şemasına sahip olan öğrenciler kendilerini ikna etmek ve kendi haklılıklarını başkalarına gösterip onları da ikna etmek için dışsal kaynaklara yönelirler (Sowder ve Harel, 1998). Yani öğrenciler otoriter, ritüel veya sembolik ispat şemasına sahip olduklarında bir önermenin doğruluğuna ya da yanlışlığına kendilerini ve başkalarını ikna etmek için dışsal kaynaklardan faydalanırlar ve bu dışsal kaynakları ikna için referans olarak gösterirler (Stylianou, Chae ve Blanton, 2006). Dışsal ispat şemalarına sahip öğrencilerin gerekçelendirmeleri ispat için yeterli değildir (Heinze ve Reiss, 2003).

2.4.2.1.1. Otoriter İspat Şeması

Öğrenciler kendi haklılıklarını göstermek için ders kitabında yazan bir bilgiye, öğretmeninin söylediklerine ya da matematik konusunda kendisinden daha başarılı bir sınıf arkadaşından edindikleri bilgiye sonuna kadar güvenebileceklerini başkalarının da buna güvenmeleri gerektiğini düşünürler (Sowder ve Harel, 1998). Otoriter ispat şemasına sahip öğrenciler önce kendilerini sonra da başkalarını ikna etmek için kitap gibi bir kaynağa, öğretmen ya da bu konuda kendisinden daha fazla bilgi sahibi kişi gibi herhangi bir otoriteye yönelirler (Harel, 2014). Bu şemaya sahip öğrenciler ilk otorite kaynağı olarak öğretmenleri ikincil kaynak olarak ders kitaplarını ve çok nadir de olsa teknolojiyi de otorite kaynağı olarak görmektedirler (Flores, 2006). Otoriter ispat şemasını kullanan öğrenciler gerekçelerini aynı zamanda kurallara dayandırabilmektedirler (Harel, 2001). Ezberledikleri kurallar onlar için geçerli bir gerekçelendirmedir ve bu yüzden akıl yürütmeye ihtiyaç da yoktur. Otoriter ispat şemasına sahip öğrenciler bir önermenin neden doğru ya da neden yanlış olduğuna dair akıl yürütmezler (Lee, 1999). Çocuklar anne, baba, ağabey, abla gibi kendinden büyük aile bireylerine ve kendilerine yakın diğer bireylere güvendikleri için onlardan öğrendikleri bilgilere de inanırlar bu yüzdendir ki onları otorite kaynağı olarak görürler (Flores, 2002). Altı yaşındaki bir çocuğa basit bir toplama işlemi sorulup cevabı alındıktan sonra bunun neden doğru olduğu sorulduğunda önce sessiz kalsa da bunu nasıl öğrendiği sorulduğunda “annem öyle söyledi” şeklinde bir cevap vermektedir (Flores, 2002, s. 270). Yaşı daha büyük öğrencilerin otorite kaynakları yaşı daha küçük öğrencilere göre daha okul içi kaynaklıdır (Flores, 2006).

Haklılıklarını savunma noktasında otoriteye başvurmak her ne kadar kötü bir durum olmasa da sadece bu yola başvurmanın en endişe verici yanı kendi mantıklarını ve akıl yürütmelerini kullanmamalarıdır (Sowder ve Harel, 1998). Bir diğer endişe verici yanı da otoriteden aldıkları bilgiyi doğru hatırlayıp hatırlamadıklarıdır. Öğrencilere bir önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını gerekçelendirme nedenleri sorulduğunda "kitapta böyle yazıyordu", "öğretmenimden böyle duymuştum", "arkadaşım böyle demişti", "zaten bu bir kural", "annem hiç yanılmaz, ondan duymuştum" veya "abimin matematiği iyidir bana o öğretti" gibi savunmalar yaparlar. Ancak neden doğru olduğuna veya neden yanlış olduğuna dair kendi fikirleri yoktur. Bunun nedeni ise kaynağa veya otoriteye duydukları güvendir. Sorgulama gereği duymadan kabullenme vardır. Flores (2006) Arizona Devlet Üniversitesi'nde matematik yöntemleri dersini alan öğretmen adayları aracılığıyla yürüttüğü çalışmasında öğrenim seviyeleri 5. ile 12. sınıf arasında değişen öğrencilerin ispat şemalarını Sowder ve Harel'in (1998) sınıflandırmasına göre belirlemeye çalışmıştır. Onlara seviyelerine göre sorular sorulduktan sonra doğruluklarını gerekçelendirmeleri istenmiştir. Otoriter ispat şemasına sahip öğrenciler kendilerine sorulan sorulara verdikleri cevapların doğruluğunu aşağıdaki cümlelerle gerekçelendirmişlerdir.

> "… Öğretmenim bana formülü söylemişti ve o kitapta yazılıydı. Nedenini sormayı hiç düşünmemiştim. Gerçekten neden böyle olduğunu bilmiyorum" (s. 127).
> "Öğretmenim bana öyle öğretti. Kitapta vardır" (s. 127).
> "Bunun doğru yol olduğunu biliyorum, çünkü öğretmenim bize nasıl olduğunu gösterdi ve onu üniversitedeki matematik öğretmeninden öğrendi, bu yüzden bu yol gerçekten akıllı insanlardan geldi. Bunun dışında niçin mantıklı olduğundan tam olarak emin değilim" (s. 127).
> "Öğretmenim bir şekil çizdi ve bir dikdörtgenin bir paralelkenarın özel bir durumu olduğunu söyledi" (s. 128).

Bu cevapların dışında bir öğrenci yine gerekçelendirme olarak öğretmenine atıfta bulunmuş ve derste pek çok örnekle yapıldığını ifade etmiştir. Bir öğrenci de bilgisayarda yapıldı diyerek otorite olarak teknolojiye atıfta bulunmuştur. Sorulara verilen yanıtlardan cevapların doğruluğuna referansın öğretmen ve kitap odaklı olduğu görülmektedir.

2.4.2.1.2. Ritüel İspat Şeması

Ritüel ispat şemasında öğrenciler önce kendilerini sonra da başkalarını ikna etmek için ispatın içeriğine değil de görünümüne, yapılış şekline yani biçimine yönelirler (Housman ve Porter, 2003; Harel, 2014). Yani ispatın sunumuna odaklanırlar (Harel ve Sowder, 1998). Bu ispat şemasına sahip öğrenciler argüman dizisinin biçimsel olarak ispata benzeyip benzemediğine bakarlar. Aslında bir ispatın geçerli olup olmaması onun mantık yapısına bağlıyken (Lesseig, 2011, 2016) bu öğrencileri ikna eden şey ise ispatın mantığından ziyade biçimidir (Harel ve Sowder, 1998; Sowder ve Harel, 1998). Öğrencilerde baskın olan şey ispatın biçimine yönelik önceden edinmiş oldukları alışkanlıklardır. Başka bir deyişle aşinalıklarıdır ("örneğin geometrideki ispatlar çift sütun formatında olmalıdır") (Harel, 2007, s. 67). Veya yeterince matematiksel ifade içermeyen ispatları sırf biçimlerinden dolayı ispat olarak bile görmeyebilirler (Flores, 2006). Aşina oldukları ispat süreçlerini kullanmaya çalışan ritüel ispat şemasına sahip öğrenciler bir önermenin neden doğru ya da neden yanlış olduğuna ilişkin yüzeysel deliller sunarlar ve deliller arasında sınırlı bir bağlantı kurarlar (Lee, 1999). Örneğin çok bilindik $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel sayı olmadığını çelişki ile ispatlamaya alışık öğrenciler bu teoremi ispatlarken çelişki ile ispatın adımlarını takip etmeye çalışırlar. Ancak doğru ve geçerli bir ispatlama yapamazlar. Çoğu yerde argümanlarda eksikler vardır ve argümanlar birbirinden kopuktur.

2.4.2.1.3. Sembolik İspat Şeması

Sembolik ispat şemasına sahip öğrenciler önce kendilerini sonra da başkalarını ikna etmek için sembollerin niceliksel ve uzaysal ilintilerini düşünmeksizin anlamsız sembol manipülasyonlarına başvururlar (Sowder ve Harel, 1998; Harel, 2014). Öğrencilerin sembolik ispat şemasına sahip olmalarının kötü yanı öğrencilerin sembolleri her şeyden bağımsız veya içinde bulundukları durumun nicelikleriyle ilişkisizmiş gibi düşünmeleri, iyi yanı ise sembollerin matematikte sahip olduğu güçtür (Sowder ve Harel, 1998). Sembolik ispat şemasına sahip öğrenciler sembollerin temsil ettiği şeyle ilgilenmeksizin sembollerle işlem yürütürler (Flores, 2006). Çünkü geçerli bir ispatın yalnızca sembollerle yapılacağına inanırlar (Lee, 1999). Sembollerin anlamsız ve yanlış kullanımı için aşağıdaki örnekler incelenebilir.

$\frac{k}{l}+\frac{m}{n}=\frac{k+m}{l+n}$, $x^y \cdot x^z=(x\cdot x)^{y\cdot z}$, $sin(a+b)=sina+sinb$, $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$ (Sowder ve Harel, 1998). $\frac{x+y}{z+y}$ ifadesindeki y'lerin sadeleştirilip $\frac{x}{z}$ yazılması yine birçok öğrencinin anlamsız sembol manipülasyonlarına örnektir (Harel, 2007; Harel ve Sowder, 2007).

Bunların dışında öğrencilerin sembolleri anlamsız ve yanlış kullandığı aşağıdaki örneklere sıkça rastlanılmaktadır.

- $\sqrt{(-x)^2} = -x$
- $a + 3 = 3a$
- $(f \cdot g)^/(x) = f^/(x) \cdot g^/(x)$
- $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$
- $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$
- $\frac{10!}{8!} = \frac{5!}{4!}$
- $(fog)^{-1}(x) = f^{-1}(x)og^{-1}(x)$
- $3x + 5y = 8xy$
- $a^b = a \cdot b$
- $(a+b)! = a! + b!$
- $s(A\backslash B) = s(A) - s(B)$
- $\log_x y + \log_x z = \log_x(y+z)$
- $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$
- $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge r$
- $(x+y)^3 = x^3 + y^3$
- $\frac{x^5}{5} = x$
- $x^2 + x^3 = x^5$
- $\frac{0}{0}$=0

Öğrenciler çoğunlukla sembolleri yanlış kullandıklarının farkında bile değildirler, çoğunlukla sembollerin bu yanlış kullanımları onların mantığına sembollerin doğru kullanımlarından daha fazla yatmaktadır. Yanlışlarının farkında oldukları ender durumlarda ise çözüme gidecek alternatif bir fikirleri olmadığından dolayı bu yanlış kullanımları çaresizliklerinden dolayı bile bile devam ettirmektedirler. Sembollerin matematikte özellikle de cebirdeki gücü ve sık kullanımı öğrencilere avantaj sağlayabilir, öğrenci attığı her adımı problem bağlamında anlamlandırmadan sembollerle işlemi yürütebilir (Sowder ve Harel, 1998). Örneğin bir öğrenci türevin fiziksel veya geometrik yorumu ile ilgili bir soruyu çözerken attığı her adımı problem bağlamında anlamlandıramayabilir. Daha basit bir örnekle bir öğrenci iki ondalıklı sayının bölümü sorulduğunda hem pay hem paydadaki ondalıklı sayının ondalık işaretini sağa doğru hareket ettirerek işlemi sürdürebilir fakat bunu neden yaptığını anlamlandıramayabilir (Flores, 2006). $\frac{0,21}{0,03}$=? işlemini öğrenci ondalık işaretini hem pay hem de payda da iki basamak sağa kaydırarak $\frac{21}{3} = 7$ biçiminde yapabilir. Ancak bunu neden yaptığını bilmeden ondalık işareti sembolünden yola çıkarak işlem yapar. Aslında $\frac{0,21}{0,03} = \frac{0,21 \cdot 100}{0,03 \cdot 100}$ şeklinde herhangi bir gerçel sayıyı sıfırdan farklı aynı sayı ile çarpıp bölmenin sonucu değiştirmeyeceğini bilmeyebilir, bunu zihninde anlamlandıramayabilir. Burada bir parantez açmak gerekirse sembolik akıl yürütmeyi doğru kullanabilen ve sembolleri bulunduğu problem içinde anlamlandırabilen bir kişi dönüşümcü ispat şemasına sahip olur (Sowder ve Harel, 1998).

2.4.2.2. Deneysel İspat Şemaları

Deneysel şemalarda "varsayımlar fiziksel gerçeklere veya duyusal deneyimlere başvurularak doğrulanır, şüphelenilir veya çürütülür" (Harel ve Sowder, 1998, s. 252). Yani önermelerin doğrulanması veya çürütülmesi için fiziksel gerçeklerden ya da duyusal deneyimlerden yararlanılmaktadırlar (Harel ve Sowder, 1998). Deneysel ispat şemalarında ispatlar cebirsel ifadelerde değişkenler yerine bir veya birkaç belirli sayının yazılarak denenmesine ya da algılara dayanmaktadır (Harel, 2007). Deneysel ispat şemasına sahip öğrencilerin gerekçelendirme biçimleri özel örneklere ya da algılanan kalıplara dayanmaktadır (Martin, McCrone, Bower ve Dindyal, 2005). Deneysel ispat şemaları mantıksal akıl yürütmeye dayanmadığından (Cadwallader-Olsker, 2011) deneysel ispat şemalarına sahip öğrencilerin gerekçelendirmeleri ispat için yeterli değildir (Heinze ve Reiss, 2003). Öğrenciler arasında en sık kullanılan ispat şeması deneysel ispat şemalarıdır, bunun öğretmenler için de böyle olduğu söylenebilir (Harel, 2008a).

2.4.2.2.1. Algısal İspat Şeması

Algısal ispat şemasında öğrenciler önce kendilerini sonra da başkalarını ikna etmek için hislerine, sezgilerine, algılarına başvururlar (Harel, 2014). Sezgiler matematik yapmada her ne kadar önemli olsa da burada bahsedilen matematikçilerin sahip olduğu matematiksel sezgiden ziyade öğrencilerin sahip olduğu sezgidir. Öğrenciler bir veya birkaç çizimle sonuca ulaşabileceği düşüncesine sahipseler ve bu düşünceyle başkalarını ikna etmeyi düşünüyorlarsa bu öğrenciler algısal ispat şemasına sahiptirler (Sowder ve Harel, 1998). Bu şemaya sahip öğrenciler zihinsel imgelere dayalı çıkarımlar yaparlar fakat bu imgeler tam gelişmediği gibi, nesneler üzerindeki dönüşümleri göremezler ya da bu dönüşümlerin sonuçlarını önceden kestiremezler (Harel ve Sowder, 1998). Mantıksal delilleri göz ardı eden öğrenciler hipotezler ile ispat basamaklarını çizimler aracılığıyla birleştirmeye çalışırlar (Lee, 1999). Algısal ispat şemasına sahip öğrencileri belirlemede özellikle geometri çalışmaları faydalı olabilir (Sowder ve Harel, 1998). Örneğin bir paralelkenarın tüm kenarlarının orta noktalarının birleştirilmesiyle oluşan şeklin alelade bir dörtgen mi, bir paralelkenar mı, bir dikdörtgen mi ya da bir kare mi olduğuna herhangi bir akıl yürütmeye gerek duymadan algılarıyla yanıt verebilirler. Ya da herhangi bir soruda ki üçgenin dik olup olmadığına sezgileriyle karar verebilirler. Geçerli bir gerekçelendirme yapamazlar ve yalnızca sezgilerinin kendilerini ve başkalarını ikna etmeye yeterli olduğunu düşünürler. İspat yapmada hisler ne kadar önemli olsalar da, mantıksal bir düzen içinde matematiksel delillere dayanmadıkça hislerin yanıltıcı olabileceği unutulmamalıdır. Bu yüzden hisler ispat yapmada belki bir hareket noktası olsa da gerekçelendirme için tek başına asla yeterli değildir.

2.4.2.2.2. Örnek-Temelli İspat Şeması

Öğrenciler örnek-temelli ispat şemasına sahip olduklarında bir önermenin doğruluğuna kendilerini ve başkalarını ikna etmek için örneklerden veya özel durumlardan faydalanırlar (Harel ve Sowder, 1998; Sowder ve Harel, 1998; Stylianou, Chae ve Blanton, 2006). Mantıksal delillerin bulunmadığı (Lee, 1999) örnek-temelli ispat şemasında öğrenciler önce kendilerini sonra da başkalarını ikna etmek için bir veya birkaç örneğe başvururlar (Sowder ve Harel, 1998; Harel, 2014). Öğrenciler genel bir durumu bir veya daha fazla örnekle doğrulamanın ikna edici bir ispat olduğunu düşündükleri (Housman ve Porter, 2003) için ispatın bir niteliği olan genelleme gereksiniminin farkında değildirler ya da genelleme yapamazlar. Yine de örnek-temelli ispat şeması öğrenciler için ispatın öğrenilmesinde doğal bir adım, doğal bir ilerleme olarak düşünülebilir (Knapp, 2005). Örneğin bir öğrenci $m \in N$ ve $a \neq 1$ için $\sum_{k=0}^{m} a^k = \frac{1-a^{m+1}}{1-a}$ (Beck ve Geoghegan, 2010) önermesinin ispatı için sadece $m = 0$ için $\sum_{k=0}^{0} a^k = a^0 = 1 = \frac{1-a^{0+1}}{1-a} = \frac{1-a}{1-a}$ doğrulamasını ikna edici bulabilir. Tabii ki bu bir ispat değildir. Unutulmamalıdır ki tek bir örnek ancak bir önermenin yanlışlığını gösterme yani çürütme de kullanılan aksine örnek verme yöntemi ile ispat için yeterli ve ikna edicidir. Onun için bu önermede tek bir örnekle doğruluğunu gösterme ne ikna edici bir argümandır ne de bu önermenin doğruluğunun bir ispatıdır. Bu yalnızca önermenin doğruluğu için atılmış temel bir adımdır. Başka bir öğrenci ise benzer şekilde küçük ve sıralı birkaç adımı mesela $m = 0$ için doğrulamaya ilaveten

$m = 1$ için $\sum_{k=0}^{1} a^k = a^0 + a^1 = 1 + a = \frac{1-a^{1+1}}{1-a} = \frac{1-a^2}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{(1-a)}$

$m = 2$ için $\sum_{k=0}^{2} a^k = a^0 + a^1 + a^2 = 1 + a + a^2 = \frac{1-a^{2+1}}{1-a} = \frac{1-a^3}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a+a^2)}{(1-a)}$

doğrulamayı ikna edici bulabilir.

Tabii ki bu bir ispat ve ikna edici bir gerekçelendirme olmadığı gibi daha büyük değerler veya daha özel durumlar için doğrulamalar da ispat ve ikna edici bir gerekçelendirme değildirler. Örneğin "herhangi iki satırı aynı elemanlardan oluşan kare matrislerin determinantı sıfırdır" teoreminin ispatı için birinci ve ikinci satırı aynı elemanlardan oluşan rastgele $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{3x3}$ matrisini seçip bunun determinantını alıp sıfır bulduktan sonra bunu gerekçelendirme için yeterli bulan öğrenciler de örnek-temelli ispat şemasına sahiptirler.

Bu ispat şeması Harel ve Sowder'ın (1998, 2007) çalışmalarında tümevarımsal ispat şeması olarak adlandırılmıştır. Ancak bu şema böyle adlandırıldığı için ispat yöntemlerinde bahsettiğimiz tümevarımla ispat yöntemi ile karıştırılmamalıdır (Cadwallader-Olsker, 2011).

2.4.2.3. Analitik İspat Şemaları

Analitik ispat şemaları gerekçelendirme tiplerinin en üst seviyesidir (Sowder ve Harel, 1998). Analitik ispat şemasına sahip öğrencilerin gerekçelendirmeleri matematiksel akıl yürütmeye ve genellemeye dayanır (Flores, 2006). Analitik ispat şemasına sahip öğrenciler gerekçelendirmeleri için mantıksal çıkarımlar yaparlar (Harel ve Sowder, 1998; Martin, McCrone, Bower ve Dindyal, 2005). Analitik ispat şeması Harel ve Sowder'ın (2007) çalışmalarında tümdengelimli ispat şeması olarak adlandırılmıştır.

2.4.2.3.1. Dönüşümcü İspat Şeması

Dönüşümcü ispat şemasına sahip öğrencilerin dönüşümcü gözlemleri ve buna dayalı dönüşümcü akıl yürütmeleri, nesneler üzerine işlemleri ve işlemlerin sonuçlarını tahmin etmeyi içerir (Harel ve Sowder, 1998). Öğrenciler dönüşümcü ispat şemasına sahip olduklarında hedef odaklı işlemleri içeren, imajları dönüştüren tümdengelimli bir sürece yönelirler (Stylianou, Chae ve Blanton, 2006). Dönüşümcü ispat şemasında sembolik ispat şemasının aksine semboller doğru kullanıldıkları gibi bulunduğu problem içindeki her adımda anlamlandırılabilir. Bu ispat şemasına sahip öğrenciler ispat yaparken tutarlı basamaklar oluştururlar (Lee, 1999). Algısal ispat şemasının aksine zihinsel imgeler tam gelişmiştir. Dönüşümcü ispat şeması "genelleme, işlemsel düşünme ve mantıksal çıkarım" gibi üç güçlü belirleyici niteliğe sahiptir (Harel, 2007, s. 67; Harel, 2008a, s. 491). Birinci nitelik olan genelleme iddiayı "her şey için" haklı çıkarmayı gerektirir (Harel, 2007, s. 67; Harel, 2008a, s. 491). Genellemede hiçbir durum izole edilmeyip tüm durumlar için doğrulanmaya odaklanılır, istisna kabul edilmez (Harel 2007; Harel, 2008a; Harel ve Sowder, 2007). İşlemsel düşünme bir öğrenci "hedefleri ve alt hedefleri oluşturur ve ispatlama sürecinde sonuçlarını tahmin etmeye çalışırsa" gerçekleşir. (Harel, 2007, s. 67; Harel, 2008a, s. 491). Yani bu düşünmeye sahip öğrenciler ispatlama işlemi sırasında hedefler ile birlikte alt hedefler koyarlar ve sonuçları önceden tahmin edip ona göre davranırlar (Harel ve Sowder, 2007; Harel, 2007; Harel, 2008a). Üçüncü nitelik olan mantıksal çıkarımda da ispatlamanın mantıksal çıkarım kurallarına dayanması gerekliliği hâkimdir (Harel ve Sowder, 2007; Harel, 2007; Harel, 2008a). Dönüşümcü ispat şeması genelleme, işlemsel düşünme ve mantıksal çıkarım niteliklerini gerektirdiğinden dolayı ritüel, otoriter, sembolik, örnek-temelli ve algısal ispat şemalarına göre daha fazla ayrıntı gerektirir (Harel ve Sowder, 2007). Ancak aksiyomatik ispat şeması kadar değil. Çünkü dönüşümcü ispat şemasına sahip öğrenciler bir önermenin ispatı için gerekli tüm mantıksal çıkarımları ve dönüşümleri yapsalar da bunu aksiyomatik sistemde düzenleyemezler (Cadwallader-Olsker, 2011). Bu yüzden dönüşümcü ispat şeması kısıtlı analitik ispat şemasıdır (Martin, McCrone, Bower ve Dindyal, 2005).

2.4.2.3.2. Aksiyomatik İspat Şeması

Aksiyomatik ispat şeması dönüşümcü ispat şemasından daha kapsamlıdır. Aksiyomatik ispat şeması dönüşümcü ispat şemasının sahip olduğu bu üç belirleyici niteliğe sahip olmakla birlikte bunların dışında bazı prensiplere de sahiptir (Harel, 2007; Harel, 2008a). Bu üç niteliğe ek olarak aksiyomatik ispat şemasında ispatlama süreçleri bir aksiyomatik sistem üzerine inşa edilmiştir ve bu nedenle "kabul edilmiş ilkelerden (aksiyomlar) başlamalıdır" (Harel, 2007, s. 67). Aksiyomatik ispat şemasına sahip öğrenciler yeni teoremleri ispatlamaya tanımsız terimlerden ve aksiyomlardan başlanacağının farkındadırlar (Harel ve Sowder, 1998; Harel, 2008a). Aksiyomatik ispat şemasında ispatın modern bileşenleri olan "tanımsız terimler, tanımlar, varsayımlar ve teoremler" kullanırlar (Sowder ve Harel, 1998, s. 674). Bu şemaya sahip öğrenciler ispat yaparken lineer yöntemleri kullanırlar ve geleneksel ispat süreçlerini takip ederler (Lee, 1999). Tüm şemalar alt şemaları ile birlikte düşünüldüğünde en üst gerekçelendirme seviyesi aksiyomatik ispat şemasına aittir.

2.4.3. İspatla İlgili Alan Bilgisine Yönelik Yapılan Çalışmalar

Birçok ülkede ispat yöntemlerini bilmek ve analitik düzeyde ispatlama yapabilmek öğretmenler için öğretmen yeterlikleri veya standartları, öğrenciler için de hedef davranışları veya kazanımları arasındadır. Bu kısımda öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerine yönelik literatür incelenmiştir.

Schwarz ve Kaiser'in (2009) Almanya, Hong Kong ve Avusturalya'daki üniversitelerden öğretmen adaylarıyla yaptıkları araştırmanın bulguları öğretmen adaylarının çok zor olmayan ortaöğretim düzeyindeki resmi ispatları bile gerçekleştiremediklerini ortaya koymuştur.

Şahin (2016) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiğin temel konularından biri olan bölünebilme ile ilgili ispat yapabilme becerilerini incelediği çalışmasını Elementer Sayı Kuramı dersini alan 29 son sınıf öğrencisiyle yürütmüştür. Verilerin gözlem formları, etkinlik kartları ve sesli düşünme protokolü tekniği ile toplandığı araştırmanın bulguları öğretmen adaylarının temel seviyedeki ispatlarda bile zorlandıklarını ortaya koymuştur.

Knuth (2002b) ortaöğretim matematik öğretmenlerinin ispat kavramlarını incelediği çalışmasında tecrübeleri 3 ile 20 yıl arasında değişen 16 öğretmeni araştırma grubu olarak belirlemiştir. Birincil veri kaynağı yarı yapılandırılmış görüşmeler olan araştırmanın bulguları öğretmen adaylarının doğrulamayı ispat sandıklarını, bir ispatı oluşturan şeylerin neler olduğunun anlaşılmadığını dolayısıyla ispatın doğasının anlaşılmadığını ortaya koymuştur.

Köğce (2012) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat düzeylerini yine Miyazaki'nin (2000) sınıflandırmasını kullanarak belirlemeye çalışmış ve bu çalışmayı 99 öğretmen adayıyla yürütmüştür. Miyazaki (2000) ispatı içerik olarak tümdengelimli akıl yürütme gerektiren, temsil olarak ise fonksiyonel dilin kullanıldığı İspat A, içerik olarak tümdengelimli akıl yürütme gerektiren, temsil olarak ise fonksiyonel dil dışındaki dillerin, çizimlerin ve/veya manipüle edilebilir nesnelerin kullanıldığı İspat B, içerik olarak tümevarımlı akıl yürütme gerektiren, temsil olarak ise fonksiyonel dil dışındaki dillerin, çizimlerin ve/veya manipüle edilebilir nesnelerin kullanıldığı İspat C, içerik olarak tümevarımlı akıl yürütme gerektiren, temsil olarak ise fonksiyonel dilin kullanıldığı İspat D seviyelerine ayırmıştır. Köğce'nin (2012) araştırmasının bulgularına göre öğretmen adaylarının dört bölü beşi İspat A seviyesinde kalan bir bölü beşi de İspat C seviyesindedir. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının bir bölü beşi kadarının bir önermeyi sayısal değerlerle doğrulamanın ispat için yeterli olduğuna inanmaları araştırmanın dikkat çeken bulgusudur. Benzer bir bulguya İmamoğlu ve Yontar-Toğrol (2010) çalışmalarında ulaşmışlardır. Miyazaki'nin (2000) sınıflamasının kullanıldığı bu çalışmada da öğretmen adaylarının çoğunluğu İspat A seviyesinde ispatlama yaparken, birinci sınıf öğrencileri bazı ispatlama sorularında ispatın genelleme işlevini göz ardı ederek sayısal örnekle doğrulama yoluna gitmişlerdir.

Stylianides, Stylianides ve Philippou (2007) ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat yöntemi hakkındaki bilgilerini inceledikleri araştırmalarını 95 katılımcıyla yürütmüşlerdir. Verilerin farklı ispat yöntemlerine ilişkin öğeleri içeren bir test ve yarı yapılandırılmış görüşmelerle toplandığı araştırmanın bulguları ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ilköğretim matematik öğretmen adaylarından daha fazla bilgiye sahip olmalarına rağmen her iki grubun da tümevarımla ispat yönteminin basamaklarında güçlükler yaşadığını ortaya çıkarmıştır.

Güler, Özdemir ve Dikici (2012) ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün üç ve dördüncü sınıfında öğrenim gören 151 öğretmen adayıyla yürüttükleri çalışmalarında öğretmen adaylarının tümevarım yoluyla ispat yapabilme becerilerini incelemişlerdir. Verilerin "Matematiksel Tümevarım Bilgi Testi" ile yarı yapılandırılmış mülakatlarla toplandığı araştırmanın bulgularına göre ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerilerinin beklenenden düşük düzeyde olduğu saptanmıştır. Araştırmanın diğer bir bulgusu da öğretmen adaylarının matematiksel tümevarımın sıralı basamaklarını zihinlerinde tam olarak anlamlandıramadığını aksine bunu sistematik bir yönerge gibi takip ettiklerini ortaya koymuştur.

İmamoğlu (2010) ortaöğretim matematik öğretmenliği, ilköğretim matematik öğretmenliği ve matematik bölümlerinde öğrenim gören 93'ü birinci, 82'si son sınıf öğrencisi toplamda 175 öğrenci ile yürüttüğü doktora tezinde bu bölümlerde öğrenim gören öğrencilerin ispat yapma yöntemleri ile ispat değerlendirmelerini araştırmıştır. Bu araştırmada öğrencilerin ispat yapma yöntemlerini belirlemek için "İspat Sınavı (İS)" ölçeği, verilen ispatları nasıl değerlendirdiklerini belirlemek amacıyla "İspat Değerlendirme Sınavı (İDS)" ölçeği geliştirilmiştir. Araştırmanın bulgularına göre İS puanlarında son sınıf öğrencilerinin lehine anlamlı bir fark bulunmuştur. Bununla birlikte birinci sınıf öğrencilerinin tümevarımsal yöntemler kullanarak ispat yapmayı tercih ettikleri buna karşın son sınıf öğrencilerinin ise tümdengelimsel yöntemler kullanarak ispat yapmayı tercih ettikleri belirlenmiştir. Araştırmanın diğer bir sonucu da hem ispat yapmada hem de ispat değerlendirmede matematik bölümü öğrencilerinin ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümleri öğrencilerine göre daha başarılı olduğudur. Yine İmamoğlu ve Yontar-Toğrol (2015) ilköğretim matematik öğretmenliği, ortaöğretim matematik öğretmenliği ve matematik bölümü öğrencilerinin ispat inşalarında ve ispat değerlendirmelerinde son sınıf öğrencilerinin birinci sınıf öğrencilerine göre daha başarılı olduklarını ancak her iki grubun da güçlükler yaşadıklarını saptamışlardır.

Güler ve Ekmekci (2016) çalışmalarını iki farklı üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü birinci sınıfında öğrenim gören 92 öğretmen adayıyla yürütmüşlerdir. Verilerin "İspat Değerlendirme Testi" ile toplandığı araştırmada öğretmen adaylarına ardışık pozitif tek sayıların toplam kuralına dair sekiz farklı doğru ispat sunulup bu ispatların doğruluklarını değerlendirmeleri istenmiştir. Araştırmanın bulgularına göre öğretmen adaylarının ispat değerlendirme becerileri beklenenin çok altında kalmıştır. Diğer bir bulguya göre genellikle öğretmen adayları bu testte yer alan ispatların doğru olduğunu belirlemelerine rağmen bu ispatların neden doğru olduğuna dair argüman geliştirememişlerdir.

Karahan (2013) ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının çift sütun ispat yöntemi ile ispat yapabilme yaklaşımlarını ve bu yönteme dair görüşlerini incelemeyi amaçladığı yüksek lisans tezinde bir devlet üniversitesinin ilgili bölümünün 4. sınıfında öğrenim gören 12 öğrenciyi araştırma grubu olarak belirlemiştir. Bu nitel araştırmanın bulgularına göre öğretmen adaylarının bu yöntemle ilgili görüşleri olumludur. Ayrıca çalışmada bu yöntemin öğretmen ve öğrenciler için avantaj ve dezavantajları ayrı ayrı belirlenmiştir. Bu yöntemi geometri dersleri için işlevsel bulan öğretmen adayları bu yöntemin ispatları anlamada yararlı bir yöntem olduğunu belirtmişlerdir.

Demiray (2013) ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispat yöntemlerindeki (aksine örnek verme yöntemi, olmayana ergi yöntemi ve çelişki ile ispat yöntemi) başarı düzeylerini, bu yöntemlerdeki yanlış anlamlandırmalarının nedenlerini ve geçerli ispat yapabilme seviyelerini belirlemeyi amaçladığı yüksek lisans tezini elverişli örneklem yöntemini kullanarak belirlediği Ankara'daki bir devlet üniversitesinde öğrenim gören 115 katılımcıyla yürütmüştür. Araştırmanın bulgularına göre öğretmen adaylarının aksine örnek verme yöntemi ile çelişkiyle ispat yöntemlerindeki başarı seviyelerinin yüksek olmayana ergi yöntemi ile ispatta başarı seviyelerinin düşük olduğu görülmüştür. Öğrencilerin yarısından daha fazlası verilen üç ifadeye geçerli bir ispat yapabilmiştir. Geçerli ispatlara bakıldığında verilen iki ifadede çoğunlukla tümevarım yönteminin diğer ifade de ise çoğunlukla doğrudan ispat yönteminin tercih edildiği belirlenmiştir. Geçersiz ispatlarda ise çoğunlukla sayıların kullanıldığı veya ifadelerin tekrarının yapıldığı görülmüştür.

Pekşen-Sağır (2013) matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerini incelemeyi amaçladığı yüksek lisans tezini 73 öğretmen adayıyla yürütmüştür. Araştırmanın verileri ispat gerektiren yedi soruluk bir set ile yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilmiştir. Araştırmanın bulguları öğretmen adaylarının ispat yöntemlerini ezbere kullandıklarını, ispat yöntemleri hakkındaki bilgilerinin eksik ve yanlış olduğunu, doğru yöntemi seçmekte oldukça zorlandıklarını, süreci tam yönetemediklerini ortaya koymuştur.

Miral (2013) ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemlerine yönelik görüşlerini incelediği yüksek lisans tezinde ölçüt örnekleme tekniğine başvurarak 10 öğrenciyi gönüllük esasına göre araştırma grubu olarak belirlemiştir. Nitel araştırma yöntemlerinin kullanıldığı araştırmanın bulguları öğretmen adaylarının ispat yöntemlerinin içeriğini tam olarak hatırlamasalar da isimlerini net olarak bildiklerini, ispat yöntemlerini bilmelerinin ve doğru ispat yöntemini seçebilmelerinin ispat yapmada önemli olduğunu bildiklerini göstermiştir.

Stylianou, Chae ve Blanton (2006) matematik bölümü öğrencilerinden ayrık matematik dersini alan 34 öğrenciyle yaptıkları çalışmalarında öğrencilere klinik görüşmelerde ispatla ilgili üç görev vererek onların sahip oldukları ispat şemalarını Harel ve Sowder'in (1998) sınıflandırmasına göre belirlemeye çalışmışlardır. Araştırmanın bulgularına göre öğrencilerin çoğu deneysel ispat şemalarına sahiptirler. Bu çoğunluğu dışsal ispat şemaları ve son olarak da öğrencilerin asıl sahip olmaları istenen analitik ispat şemaları izlemektedir.

Şengül ve Güner (2013) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kullandıkları ispat şemalarını belirlemek amacıyla yaptıkları çalışmayı bir devlet üniversitesinin ilgili bölümünün birinci ve sonuncu sınıfında öğrenim gören 135 öğrenciyle yürütmüşlerdir. Tarama modelinin kullanıldığı bu araştırmada öğrencilere genel matematik dersiyle alakalı seviyelerine uygun beş adet soru sorulmuştur. Harel ve Sowder'in (1998) sınıflamasının kullanıldığı bu çalışmanın bulgularına göre öğretmen adayları dışsal, deneysel ve analitik ispat şemalarının tümünü kullanmışlardır. Araştırmanın bir diğer sonucu da birinci sınıf öğrencilerinin en çok deneysel, sonuncu sınıf öğrencilerinin de en çok analitik ispat şemalarını kullandığıdır.

İskenderoğlu'nun (2010) doktora tezinin bir amacı öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerini incelemek diğer amacı öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları ispat şemalarını belirlemek diğer bir amacı da görüşler ile kullanılan şemalar arasında bir ilişki olup olmadığını belirlemektir. Araştırmanın bulgularına göre öğretmen adayları Sowder ve Harel'in (1998) sınıflandırmasındaki üç ispat şemasını da kullanmışlardır ve öğretmen adaylarının sınıf seviyelerinin artmasıyla birlikte analitik ispat şemalarının kullanımı da artmaktadır. Araştırmanın diğer bir bulgusu da ölçekte yer alan faktörler (güven, öz-değerlendirme, tutum-inanç ve zihinsel süreç) ile ispat şemaları arasında anlamlı bir fark olmasa da bazı faktörler ile ispat şemaları arasında paralellik olduğudur.

Çontay (2017) ortaokul matematik öğretmeni adaylarının sahip oldukları ispat şemalarını Sowder ve Harel'in (1998) sınıflandırmasına göre belirlemeyi amaçladığı doktora tezini

Elementer Sayı Kuramı dersini en yüksek, orta ve en düşük akademik ortalama ile geçmiş üç öğrenci ile yürütmüştür. Görev temelli görüşmeler ve ispatın doğasına ilişkin görüşmeler olmak üzere iki ana bölümden oluşan çalışmada öğretmen adaylarının her iki bölümde de kullandıkları ispat şemalarının sıklık sırası dışsal, analitik ve deneysel ispat şemalarıdır. Araştırmanın başka bir sonucu da bu dersten yüksek ve orta akademik ortalamaya sahip olan öğretmen adaylarının düşük akademik ortalamaya sahip olan öğretmen adayından daha çok analitik ispat şemasını kullanmış olmalarıdır.

Sarı, Altun ve Aşkar (2007) öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerini incelediği çalışmalarında bir üniversitenin matematik öğretmenliği bölümünde öğrenimine devam eden ve Analize Giriş II dersini alıp bu derste farklı akademik seviyelerde (düşük-orta-yüksek başarı) olan üç öğrenciyi katılımcı olarak belirlemişlerdir. Öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmelerde bu ders kapsamında sorulan bir ispatlama sorusunu yapmalarını istemişler ve öğretmen adaylarının verdikleri cevapları Harel ve Sowder'in (1998) sınıflamasına göre analiz etmişlerdir. Araştırma sonunda bir öğrencinin dönüşümcü ispat şemasına sahip olduğunu, bir öğrencinin tümevarımsal ispat şemasına sahip gibi davranırken sorulan sorularla dönüşümcü ispat şemasına sahip olduğunu ve bir öğrencinin de hem otoriter hem de algısal ispat şemasına sahip olduğunu gözlemlemişlerdir.

Oflaz, Bulut ve Akçakın'ın (2016) çalışmalarında sınıf öğretmeni adaylarının geometrik ispat yaparken sahip oldukları ispat şemalarını araştırmışlardır. Araştırma yöntemi olarak durum çalışmasının, örnekleme yöntemi olarak da amaçlı örnekleme yönteminin kullanıldığı araştırmada Temel Matematik I ve Temel Matematik II derslerini almış üç öğretmen adayı çalışma grubu olarak belirlenmiştir. Araştırmacılar tarafından öğretmen adaylarına basit bir geometri teoremi sorulmuş ve veriler Harel ve Sowder'ın (1998) sınıflamasına göre analiz edilmiştir. Araştırmanın bulguları iki öğrencinin dışsal bir öğrencinin ise deneysel ispat şemasına sahip olduğunu göstermiştir. Bu araştırma sınıf öğretmeni adaylarının çok basit düzeyde bir geometri teoremini ispatlamada zorlandıklarını göstermiştir.

Plaxco (2011) yüksek lisans tezinde lisans öğrencilerinin matematiksel tanım anlayışları ile onların Harel ve Sowder'in (1998) sınıflandırmasına göre sahip oldukları ispat şemaları arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Bu nitel araştırma için gönüllük esasına dayalı olarak dört öğrenci seçilmiş fakat bazı nedenlerden dolayı çalışma üç öğrenciyle yürütülmüştür. Araştırmanın bulgularına göre öğrencilerin matematiksel tanım anlayışlarındaki dolayısıyla matematiksel kavram imajlarındaki yetenekleri veya yetersizlikleri onların sahip oldukları ispat şemalarını geliştirmekte veya gelişimine mani olmaktadır.

Gökkurt, Deniz, Akgün ve Soylu (2014) ispat yapma süreciyle ilgili yapılmış araştırmaların derlemesini yaptıkları çalışmalarında öğretmenler üzerine yapılmış çalışmaların sayısının öğrenci ve öğretmen adayları ile yapılan çalışmaların sayısından az olduğunu belirtmişlerdir.

Literatür taramasından görüldüğü gibi öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerinin belirlenmesiyle ilgili çalışmalar yoğunlukta olup onların ispat yapma becerilerini geliştirmeye yönelik çalışmalar noksan kalmıştır.

Öğretmenlerin tüm ispat yöntemlerini biliyor olması ve önermelerin doğruluğunu veya yanlışlığını ispatlarken en uygun ispat yöntemini seçmesi ve de uygulayabilmesi beklenir. Ancak literatürdeki çalışmalar öğretmen adaylarının ispat yöntemlerini bilmede, seçmede ve uygulamada eksiklikleri olduğunu ortaya koymaktadır. Bu yüzden bu araştırmada matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerinin bir bileşeni olarak öğretmen adaylarının ispat yöntemleri ile ilgili bilgilerinin geliştirilmesi amaçlanmaktadır.

Ayrıca öğretmenlerin Sowder ve Harel'in (1998) taksonomisinde hiyerarşik olarak en üst seviyede olan analitik ispat şemasına sahip olması beklenir. Ancak literatürdeki çalışmalardan öğretmen adaylarının ispat şemalarının olması gereken seviyede olmadığı görülmektedir. Bu yüzden bu araştırmada matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerinin ikinci bir bileşeni olarak öğretmen adaylarının ispatlamada kullandıkları ispat şemalarının geliştirilmesi amaçlanmaktadır.

Bu çalışmada ispat yöntemleri ve ispat şemaları alan bilgisinin birer bileşeni olarak ele alınmıştır. Literatürden farklı olarak bu öğretmen bilgilerini geliştirmeye yönelik modüller içeren bir ders tasarlanmıştır.

2.5. İspatla İlgili Pedagojik Alan Bilgisi

Pedagojik alan bilgisi kavramından ilk olarak 1986 yılında Shulman "Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching" adlı eserinde bahsetmiştir. Pedagojik alan bilgisi öğretmenlerin alan bilgilerini nasıl aktardıklarına yönelik bilgidir (Shulman, 1986). Shulman'a (1987) göre "alan ve pedagojinin özel bir karışımı olan pedagojik alan bilgisi eşsiz olarak öğretmenlerin uzmanlık alanıdır, onların sahip oldukları mesleki bilgilerinin özel bir formudur" (s.8). Grossman (1990) merkeze yerleştirdiği pedagojik alan bilgisinin, konu alan bilgisi, genel pedagojik bilgi ve içerik bilgisinden beslediğini belirtmiştir. Mishra ve Koehler (2006) pedagojik alan bilgisini içerik ile pedagojinin kesişimine koyduğu için konu ile öğretimin kaynaşması gerektiğine vurgu yapmıştır. Hem öğretim yaklaşımları içerikle uyumlu olmalı hem de daha iyi öğretim için içeriğin nasıl düzenleneceği bilinmelidir (Mishra ve Koehler, 2006). En basit anlamıyla pedagojik alan bilgisi aşağıdaki bilgileri içerir.

- Konuların öğrenciler için daha anlaşılır olması amacıyla içeriğin temsil edilmesi ve formüle edilmesi (Shulman, 1986; Mishra ve Koehler, 2006),
- Konuların öğrenilmesini zorlaştıran ya da kolaylaştıran bilgilerin bilgisi (Shulman, 1986; Mishra ve Koehler, 2006),
- Öğrencilerin ön bilgileri hakkında bilgi (Shulman, 1986; Mishra ve Koehler, 2006),
- Epistemoloji teorileri (Mishra ve Koehler, 2006),
- Öğrencilerin kavram yanılgılarından oluşan ön bilgilerine karşı onların anlayışlarını yeniden düzenlemeye yardımcı olacak öğretim stratejilerine ilişkin bilgiler (Shulman, 1986)

Shulman'ın (1986, s. 7-9) "kayıp paradigma" olarak bahsettiği pedagojik alan bilgisi farklı araştırmacılar tarafından farklı bileşenleriyle ele alınmıştır. Shulman'ın (1986) makalesinde dikkat çeken iki bileşen öğrenci güçlükleri bileşeni ile öğretim stratejileri ve temsilleri bileşenidir (Park ve Oliver, 2008; Yeşildere ve Akkoç). Shulman'ın (1987) pedagojik alan bilgisinin bir bileşeni olarak tanımlamayıp öğretmen bilgi formları içerisinde belirttiği öğretim programı bilgisine ilaveten Tamir (1988) değerlendirme bilgisini de ilk kez pedagojik alan bilgisinin bir bileşeni olarak tanımlamıştır. Magnusson, Krajcik ve Borko (1999, s. 95) pedagojik alan bilgisini "öğretim için çeşitli bilgi tiplerinin *dönüşümü*" olarak tanımlamışlar, Grossman (1990) ve Tamir'in (1988) çalışmalarını referans alarak pedagojik alan bilgisini fen öğretimi için kavramsallaştırmışlar ve bu öğretmen bilgisini beş bileşende incelemişlerdir: "Fen öğretimine yönelik yönelimler", "Fen müfredatı bilgisi", "Öğrencilerin feni anlama bilgisi", "Öğretim stratejileri bilgisi", "Değerlendirme bilgisi" (s. 99-100).

Ball (1988) matematiksel pedagojinin amacını, öğrencilerin matematiği öğrenerek onu kullanabilmelerine yardımcı olmak olarak tanımlamış ve öğretmenler için gerekli olan matematiksel pedagojinin bileşenlerini "matematik konu alan bilgisi", matematiğin öğretimi ve öğrenimi hakkında bilgi", "matematiği öğrenen öğrenciler hakkında bilgi" ve "bağlam bilgisi" (s. 20) olarak belirlemiştir. Öğretim için matematiksel bilginin önemli parçalarından biri matematiksel pedagojik alan bilgisidir (Lenhart, 2010). Pedagojik alan bilgisi, alan bilgisi ile pedagojinin nasıl bir karışımı (Shulman, 1987) ise matematiksel pedagojik alan bilgisi de matematik öğretimi için matematik ve pedagojinin öyle bir karşımı ve etkileşimidir (Ball, 2000). Matematik öğretmenleri sadece hesaplama yapmazlar aynı zamanda yaptıkları işlemleri ve çözümleri öğrencilere açıklarlar, matematiksel kavramları ve prosedürleri öğrencilere anlatabilmek için diyagramları ve şekilleri nasıl kullanmaları gerektiğini bilirler (Hill, Rowan ve Ball, 2005). Matematiksel ispatın pedagojisini sorgulamaya "matematiksel ispatla ne kastediyoruz?" sorusu ile başlanmalıdır (Cadwallader-Olsker, 2011, s. 46). Matematiksel ispatı sadece matematiğin gelişimi açısından inceleyip matematiğin öğretimine katkısına değinilmezse pedagojik açıdan eksiklik oluşmaktadır. Hanna (1990) ispata yönelik farklı algılamaları resmi ispat, kabul edilir ispat ve ispat öğretimi olmak üzere üç farklı cepheden incelemiştir. İspat yapmak için nasıl çeşitli bilgi alanlarının kullanılması gerekliyse (Knapp, 2005) ispatın en etkili öğretimi için de şu üç şart gereklidir (Stylianides, 2011).

- İspatla ilgili alan bilgisi,
- Öğrencilerin ispat hakkındaki bilgileri,
- İspat öğretimi için pedagojik bilgi.

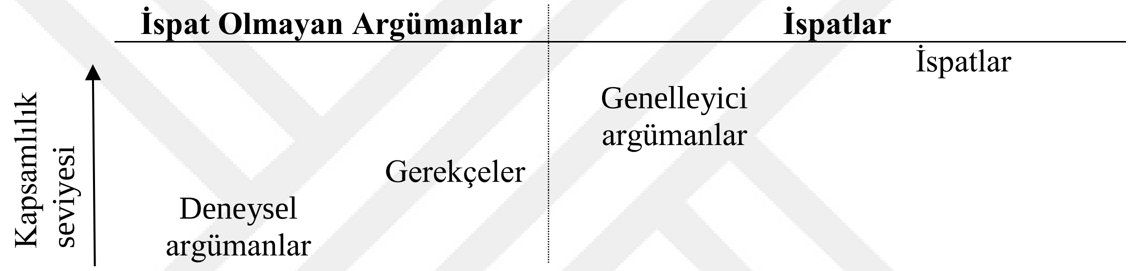
Yoo (2008) literatüre dayalı olarak matematik ve ispat hakkında iki farklı pedagojik görüş olan ürün-odaklı görüş ve süreç-odaklı görüşü karşılaştırmalı olarak özetlemiştir. Ürün-odaklı görüş içerik odaklı yaklaşıma sahiptir ve öğretimin amacı öğrencilere matematiksel bilgi ve prosedürleri aktarmaktır aksine süreç-odaklı görüş yapılandırmacı yaklaşıma sahiptir ve öğretimin amacı matematiksel bilgi ve anlayış oluşturmada öğrencilere rehberlik etmektir (Yoo, 2008). Yapılandırmacı yaklaşımda öğrenciler öğrenmeyi öğrenirler. (Hein, 1991). Ürün-odaklı görüşte ispat matematiğin bir konusu olmakla birlikte ispatın amacı doğruluğu bilinen matematiksel gerçeklerin doğruluğunu teyit etmek iken süreç-odaklı görüşte ispat matematik yapmak için bir araçtır ve ispatın amacı da matematiksel sonuçların ne olduğunu ve niçin doğru olduğunu anlamaktır (Yoo, 2008). Yapılandırmacı yaklaşımda öğrenciler bilgiyi yorumlar, sentezler ve keşfeder (Marlowe ve Page, 2005). Bu yüzden yapılandırmacı yaklaşıma dayanan süreç-odaklı görüşte öğrenciler matematiksel sonuçları yorumlamada, sentezlemede ve keşfetmede ispatı kullanırlar. Ayrıca ürün-odaklı görüşte öğretmen bilgi dağıtımcısı rolündeyken öğrenci kendisine aktarılan bilgiyi pasif alıcı rolündedir yani öğretmen merkezli bir yaklaşım vardır aksine süreç-odaklı görüşte öğretmen öğrencilerin öğrenmesini kolaylaştırıcı bir role sahip iken öğrenci aktif öğrenen rolündedir yani öğrenci merkezli bir yaklaşım vardır (Yoo, 2008). Yapılandırmacı yaklaşımın en temel ilkelerinden biri öğrenmenin aktif bir süreç olduğudur (Hein, 1991). Öğrenciler bu süreçte ne kadar aktif olurlarsa öğrenme de o kadar etkin ve kalıcı olur (Marlowe ve Page, 2005). Ürün-odaklı görüşte süreç-odaklı görüşün aksine ispat bir ürün olarak öğrenciye sunulmakta öğrenci bu sürece dâhil edilmemektedir. Bu sebepten dolayı öğrenciler akıl yürütmeyi kullanamazlar ve ispatlama yapamazlar. Stylianides (2008) akıl yürütme ve ispatlama ile ilgili analitik bir çerçeve çizmiştir.

Tablo 2.7. Akıl Yürütme-ve-İspatlamanın Analitik Çerçevesi (Stylianides, 2008, s. 10).

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">Akıl yürütme-ve-ispatlama</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Matematiksel Bileşen</td><td colspan="2">Matematiksel Genellemeler Yapmak</td><td colspan="2">Matematiksel Argümanlara Destek Sağlamak</td></tr>
<tr><td>Bir Örüntü Tasarlama</td><td>Bir Varsayım Yapmak</td><td>Bir İspat Sunmak</td><td>İspat Olmayan Bir Argüman Sunmak</td></tr>
<tr><td>•Akla Yatkın Örüntü
•Nihai Örüntü</td><td>•Varsayım</td><td>•Genelleyici Örnek
•İspatlama</td><td>•Deneysel Argüman
•Gerekçe</td></tr>
<tr><td>Psikolojik Bileşen</td><td colspan="4">Bir örüntünün/varsayımın/ispatın/ispat olmayan bir argümanın matematiksel doğası ile ilgili çözücülerin algısı nedir?</td></tr>
<tr><td>Pedagojik Bileşen</td><td colspan="4">Bir örüntünün/varsayımın/ispatın/ispat olmayan bir argümanın matematiksel doğası çözücülerin bu doğa hakkındaki algılarıyla nasıl kıyaslanır?
Bir örüntünün/varsayımın/ispatın/ispat olmayan bir argümanın doğası çözücüye nasıl şeffaflaşabilir?</td></tr>
</table>

Bu analitik çerçeve akıl yürütme ve ispatlamanın matematiksel, psikolojik ve pedagojik bileşenlerinden oluşmaktadır. Matematiksel bileşenler akıl yürütme ve ispatla ilgili matematiksel bilgileri içermektedir. Bu bileşende matematiği oluşturan örüntü, varsayım, ispat ve ispat olmayan argüman gibi terimler arasında bir ayrım yapılmaktadır (Stylianides, 2010). Matematiksel olarak neyin ispat olup neyin ispat olmadığı yani ispatın doğası bu bileşende açıkça ortaya konmuştur. Matematiksel kapsamlılık seviyelerine dayalı deliller hiyerarşisini Stylianides (2009) çalışmasında aşağıdaki gibi belirlemiştir.

Tablo 2.8. Matematiksel Kapsamlılık Seviyelerine Dayalı Argümanlar Hiyerarşisi (Stylianides, 2009, s. 280).



Stylianides'in (2010) çalışmasında öğrenci bileşeni olarak geçen psikolojik bileşen akıl yürütenlerin ve ispat yapanların algılarına (daha da açacak olursak akıl yürütenlerin ve ispat yapanların örüntü, varsayım, ispat ve ispat olmayan argüman gibi terimlere yönelik algılarına) odaklanır (Stylianides, 2008). Öğrenciye göre ispat olan şey nedir, ispat olmayan şey nedir?

Son olarak da pedagojik bileşen akıl yürütme ve ispatın doğası ile akıl yürütenlerin ve ispat yapanların algılarının bir noktada buluşmasına odaklanmaktadır. Öğrencilerin algıları ile örüntünün/varsayımın/ispatın/ispat olmayan bir argümanın matematiksel doğası arasında bir tutarsızlık varsa öğrencilerin algılarını bu matematiksel doğaya yöneltmek ve yakınlaştırmak için onlara yardımcı olacak etkinlikler planlanmalıdır (Stylianides, 2010). Pedagojik bileşende öğretmene büyük görev düşmektedir. Psikolojik bileşendeki öğrencilerin neyi ispat kabul edip neyi ispat kabul etmediği algısı matematiksel bileşendeki ispatın doğasıyla mümkün olduğunca birleştirilmelidir. Öğretmenler Stylianides'in (2008) hiyerarşisindeki deneysel delilleri ispat gibi algılayan öğrencilerin bu algısını gerçek ispata taşımalıdır. Öğrencilerin ispat kavramları hakkında iyi bilgi sahibi olan öğretmenler onların mevcut anlayışlarını ve bu konuda yaşadıkları güçlükleri değerlendirerek onları doğru ispat anlayışına taşıyacak öğretim tasarımları hazırlayabilirler (Stylianides, 2011). İyi bir ispat öğretimi için tüm bu bileşenler göz önüne alınmalıdır.

Ball, Thames ve Phelps'in (2008) matematiksel pedagojik alan bilgisini "alan ve öğrenci bilgisi" ile "alan ve öğretim bilgisi" olarak iki alt alana ayırmıştır. Lesseig (2011, 2016) ise bu alt alanları ispat öğretimine uyarlayarak bir çerçeve çizmiştir. Lesseig'in (2016) ispat öğretimi için pedagojik alan bilgisinin bileşenlerine ait çerçevesi Tablo 2.9'da sunulmuştur.

Tablo 2.9. İspat Öğretimi İçin Matematiksel Bilginin Pedagojik Alan Bilgisi Bileşenleri Çerçevesi (Lesseig, 2016, s. 257).

İspat Öğretimi için Pedagojik Alan Bilgisi	
Alan ve Öğrenci Bilgisi	*Alan ve Öğretim Bilgisi*
Öğrenci ispat şemaları için aşikâr bilgi • Dışsal, deneysel ve tümdengelimli ispat şemalarının özellikleri • Öğrencilerin otoriteye veya deneysel örneklere güvenme eğilimi • Tümevarımsal ispattan tümdengelimli ispata tipik ilerleme *İspatın gelişimsel yönleri* • Öğrencilere uygun tanımlar ve ifadeler • Öğrencilerin kavramsal erişimleri içindeki temsiller • Öğrencilerin seviyesine uygun tartışma biçimleri • Terimlerin matematiksel ve gündelik kullanımı arasındaki ilişki	*İspat şemaları ve öğretim arasındaki ilişki* • Soruları cevaplama, öğrenci fikirlerine yanıt verme, örnekler kullanma ve otoriter veya deneysel ispat şemalarını yükselten ya da azaltan öğretim metotları *Sorgulama stratejileri* • İşlemlerin ötesinde gerekçelendirmek • Genel durumu düşünmeye teşvik etmek *Önemli örneklerin veya karşıt örneklerin kullanımı* • Düşünceyi genişletmek, köprülemek veya iskele kurmak • İspattaki anahtar fikirlere odaklanmak *İspat bağlantıları bilgisi* • Görsel, sembolik ve sözlü ispatlar nasıl bağlanır? • Argümanlar kabul edilmiş tanımlara bağlı olarak nasıl yapılandırılır? • Sayısal bir örnek veya belirli diyagramdan genel bir argüman nasıl üretilir?

Tablo 2.9'dan da görüldüğü gibi Lesseig (2011, 2016) ispatın içeriğini öğrenci bilgisi ve öğretim bilgisiyle birleştirmiştir. İspatla ilgili pedagojik alan bilgisi düşünülürken öğrenci bilgisi ve öğretim stratejileri dikkate alınmalıdır. Bu araştırmada tasarlanan dersle birlikte öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin geliştirilmesi amaçlanmaktadır. Bu çalışmada öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgileri;

- İspatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgileri
- İspatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenleri açıklama bilgileri
- İspatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgileri
- Öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgileri

bileşenlerinde incelenecektir.

2.5.1. İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlükleri

Matematikte öğrenme güçlüğü matematikte alana özgü yetersizlikleri (Durmuş, 2007) ispatla ilgili öğrenci güçlükleri ise konuya özgü güçlükleri işaret etmektedir. Öğrenciler matematiğin her konusunda öğrenme güçlükleri yaşamaktadırlar. Öğrenci güçlükleri pedagojik alan bilgisinin nasıl bir bileşeni ise ispatlamaya yönelik öğrenci güçlükleri de ispatla ilgili pedagojik alan bilgisinin bir bileşenidir.

Matematiğin diğer konularında olduğu gibi öğrenciler ispat konusunda da büyük ölçüde güçlük yaşarlar (Weber, 2001). Çünkü öğrencilerin matematik ders başarıları ile ispat yapma başarıları arasında doğru bir orantı vardır (Sarı, Altun, Aşkar, 2007). İspatın matematikteki yerine binaen ispatın tüm matematik konularında kendine yer tutması nedeniyle ispatlamadaki başarısızlık diğer konulardaki başarısızlığı, diğer konulardaki başarısızlık da ispatlamadaki başarısızlığı tetiklemektedir.

Özer ve Arıkan (2002) çalışmalarında lise öğrencilerinin ispat yapma seviyelerini Balacheff'in (1987) ve Miyazaki (2000) sınıflandırmalarını kullanarak belirlemeye çalışmışlardır. Balacheff'in (1987) ispat yapma seviyeleri basitten gelişmişe doğru pragmatik, entelektüel ve demonstrasyon olmak üzere üç seviyeden, Miyazaki'nin çalışması ise yukarıda bahsedildiği gibi dört seviyeden oluşmaktadır. Özer ve Arıkan'ın

(2002) 10. sınıftan 110 öğrenciyle yürüttükleri araştırmanın bulgularına göre sorulan ispat sorularının çoğunda öğrencilerin ispat seviyeleri Balacheff'in (1988) en alt seviye olarak tanımladığı pragmatik ispat seviyesinde, Miyazaki'nin (2000) sınıflandırmasına göre ise İspat C seviyesinde kalmıştır. Araştırmanın bulguları öğrencilerin hem tümevarımla ispat yönteminde hem de tümdengelimle ispat yönteminde başarısız olduklarını buna ilaveten bir önermeyi ispatlamak yerine sayılarla doğruladıklarını ortaya koymuştur. Knuth (2002b) çalışmasında ortaöğretim matematik öğretmenlerinin neyin ispat olduğunu bilmediklerini, dolayısıyla ispatın doğasına yönelik görüşlerinin sınırlı olduğunu ve doğrulamayı ispat sandıklarını belirtmiştir. Benzer bir bulgu da Köğce'nin (2012) çalışmasında ortaya çıkmıştır. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının sayıca önemli sayılabilecek bir kısmının bir önermeyi sayılarla doğrulamayı ispat sanmaları dikkat çekicidir. Çontay ve Duatepe-Paksu (2019) çalışmalarında ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispatın doğasını anlamada güçlükler yaşadıklarını belirtmişlerdir.

Bir başka araştırmada Polat ve Akgün (2016) ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispat kavramının anlamını bilmediklerini belirtmişlerdir. Öğretmen adayları ispat kavramı dışında ispatın modern bileşenleri olan tanım, aksiyom, önerme gibi kavramlarda da güçlükler yaşamaktadırlar. Dane (2008) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının tanım, önerme, aksiyom, teorem, hipotez, özellik gibi kavramlarla ilgili kavram yanılgılarını incelemeyi amaçladığı çalışmasını 51 üçüncü sınıf öğrencisiyle yürütmüştür. Verilerin 10 soruluk "Matematik Kavram Testi" ile toplandığı araştırmada öğretmen adaylarının yarısından daha fazlası aksiyom kavramını, teorem kavramını, önerme kavramını, hipotez kavramını ve ispat kavramını doğru olarak tanımlayamadığı gibi yine öğretmen adaylarının yarısından daha fazlası ispatlama yaparken nelere ihtiyaç duyacağı sorusunu da doğru olarak yanıtlayamamışlardır. Matematiksel ispatı yapabilmek için matematiksel tanımları iyi bilmek gerekir (Lay, 2009). Öğrencilerin ispat yapabilmesi için öncelikle hipotez, hüküm, önerme, aksiyom, postulat, lemma, varsayım, teorem, ispat ve sonuç gibi kavramları bilmesi gerektiği aşikârdır. Çünkü kavramların eğitimdeki yeri büyük bir öneme sahiptir (Köksal, 2006). Bu kavramları bilmenin dışında bu kavramlar arasında zihinsel bir ağ oluşturmak da önemlidir. Öçal ve Güler (2010) çalışmalarında öğretmen adaylarının ispat hakkında ne anladıklarını incelemeyi amaçlamışlardır. Öncelikle 22 öğretmen adayı sınıfta beyin fırtınası etkinliğine katılıp ispatla ilgili 21 adet kelime türetmiştir. Daha sonra öğretmen adaylarından ispatla ilgili türettikleri bu kelimeleri kullanarak kavram haritası oluşturmaları istenmiştir. Araştırmanın bulguları öğretmen adaylarının ispatla ilgili bilgi eksikleri olduğunu, ispatla ilgili kavramlar arasındaki ilişkiyi zihinlerinde kuramadıklarını ortaya koymuştur. Tüm bunlar ispatın doğasına yönelik güçlüklerdir.

Knapp (2005) ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini literatürden inceleyerek önemli güçlükleri öğrencilerin dil kullanımındaki eksiklikler, mantıksal ve tümdengelimli akıl yürütmedeki güçlükler, ispata dâhil olan içerik alanı ve ispat yazma süreciyle ilişkili konulardaki güçlükler olarak ifade etmiştir. İspata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlükler bir önermenin hangi konu bağlamında olduğuyla alakalıdır. İspatın dâhil olduğu konu ile ilgili lazım gelen tanımlar, aksiyomlar, kurallar, önceki teoremler ve sonuçlar bilinmiyorsa o konuda güçlükler yaşanılması kaçınılmazdır.

Lise seviyesindeki öğrenciler önermelerin doğruluğu ve kabulü için farklı ispat yöntemlerini kullanabilme yeteneğine sahip olmalıdırlar (Dede ve Karakuş, 2014). Ancak Baki ve Kutluca (2009) 9. sınıf öğrencilerinin mantık konusu içinde en çok ispat yöntemlerini zor bulduklarını belirtmişlerdir. Bir teorem ispatlanırken uygun ispat yöntemini seçmek güç bir iştir (Rossi, 2006). Baker (1996) matematiksel tümevarımla ispat yaparken lise ve üniversite öğrencilerinin karşılaştığı zorlukları işlemsel bilgiyi kullanma, kavramsal bilgiyi kullanma ve uygulama bilgisini kullanma olarak üçe ayırmıştır. Köğce, Aydın ve Yıldız (2010) ortaöğretim öğrencilerinin ispat yapma düzeylerini Miyazaki'nin (2000) sınıflandırmasını kullanarak belirlemeye çalıştığı araştırmalarını 125 10. sınıf öğrencisiyle yürütmüşlerdir. Araştırmanın bulguları öğrencilerin ispat seviyelerinin hemen hemen yarısının İspat A seviyesinde, diğer yarısının da İspat C seviyesinde olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Araştırmanın bulguları öğrencilerin ispat yöntemlerine ve matematiksel dili kullanımlarına dair güçlükler yaşadıklarını ortaya koymuştur. Uygun ispat yöntemini seçememe veya ispat yöntemini uygulayamama (Pekşen-Sağır, 2013) ispat yöntemlerinin içeriğinin tam olarak hatırlanamaması (Miral, 2013) öğretmen adaylarının yöntem konusunda yaşadıkları güçlükler arasındadır. Öğrenciler tüm ispat yöntemlerinde güçlükler yaşamaktadırlar. Her yöntemin ortak güçlükleri olduğu gibi her yöntemin kendine has güçlükleri de vardır. Ancak bazı yöntemler literatürde daha sık çalışılmıştır. Demiray'ın (2013) çalışmasına göre öğretmen adaylarının olmayana ergi yöntemi ile ispatlamada başarı düzeyleri düşüktür. Öğretmen adaylarının tümevarımla ispat yönteminin adımlarında güçlükler yaşadıklarını ortaya koyan çalışmalar (Stylianides, Stylianides ve Philippou 2007; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012) mevcuttur. Tümevarım yoluyla ispat yönteminde en sık karşılaşılan öğrenci güçlükleri ilk adımın gereksiz olduğunu düşünme, ilk adımla diğer adımların ilişkisini kuramama, tümevarım hipotezini kuramama, tümevarım hipotezinin doğruluğunun kabulünü anlamlandıramama, tümevarım hipotezinin geçerliliği, tümevarım adımının uygulanması olarak sıralanabilir (Baker,1996; Ernest, 1984; Fischbein ve Engel, 1989; Doğan-Dunlap, Özdemir-Erdoğan ve Kılıç, 2013). Bunlardan farklı olarak öğretmen adayları tümevarım yoluyla ispat yönteminde matematiksel tümevarımın sıralı basamaklarını zihinlerinde tam olarak anlamlandıramama (Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Güler ve Ekmekci, 2016) ve tümevarım varsayımından faydalanılarak tümevarım adımını oluşturmada yeterli işlem becerisini yürütememe (Güler, Özdemir ve Dikici, 2012) gibi güçlükleri yaşamaktadırlar.

Öğrencilerin derslerde yapılan ispatları anlamamaları onları ispattan uzaklaştırır ve ezbere yöneltir. Doruk, Kıymaz, Horzum ve Morkoyunlu (2014) sınıf öğretmenliği öğrencilerinin ispatın matematik için önemini bildikleri halde ispat yapmaktan hoşlanmadıklarını, öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmelerden bunun derslerde yapılan ispatların anlaşılmadan, öğrenilmeden, ezberlenmiş olmasından kaynaklandığını belirtmişlerdir. İspattaki anahtar fikri benimseyemeyen öğrencilerin başarı için seçtiği yol ispatı öğrenmekten ziyade onu ezberlemektir ki bunun önüne geçmek için anahtar fikir üzerinde gereken ölçüde durulmalıdır (Doruk ve Kaplan, 2013). Weber (2001) üniversite öğrencilerinin ispat yapmadaki güçlüğün sebebini stratejik bilgi eksikliğine bağlamış ve bunun önüne geçmek için öğrencilere etkili stratejik bilgi kazandırmanın önemine vurgu yapmıştır. Yine Weber (2005) öğrencilerin problem çözme sürecinde yaşadıkları güçlüklerin ispatlama sürecinde yaşanan güçlüklere benzediğini belirtmiştir. D’Angelo ve West (2000) ise ispatlamadaki güçlüklerden birini de sağlam temele dayanmayan akıl yürütme olarak ifade etmiştir. Uygan, Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse’nin (2014) üç ilköğretim matematik öğretmen adayıyla yaptıkları nitel çalışmalarında öğretmen adaylarının matematiksel dil kullanımında ve ispat ile problem çözme arasındaki farkı anlamada güçlükleri olduğunu belirtmişlerdir. Öğretmen adayları ispat konusundaki kendi eksikliklerini ispatları ezberlemeleri, matematiksel dili kullanmadaki eksiklikleri, akıl yürütme becerilerindeki eksiklikleri, lisans öğrenimlerine kadar formal ispata yönelik yetersiz eğitim almaları olarak belirtmişlerdir.

Moore (1994) çalışmasında lisans öğrencilerinin resmi ispat yapmayı öğrenmedeki bilişsel güçlüklerini incelemiştir. Veriler 16 kişilik sınıfta yapılan gözlemlerden ve ikisi matematik, üçü matematik eğitimi lisans öğrencisi ile yapılan görüşmelerden elde edilmiştir. Araştırmanın bulgularına göre öğrencilerin karşılaştığı yedi güçlük bulunmaktadır (s. 251-252).

> G1.Öğrenciler tanımları bilmiyorlardı yani tanımları söyleyemediler.
> G2.Öğrenciler kavramlar hakkında çok az sezgisel anlayışa sahiptiler.
> G3.Öğrencilerin kavram imajları ispatları yapmak için yetersizdi.
> G4.Öğrenciler ispatların genel yapısını elde etmek için tanımları nasıl kullanacaklarını bilmiyorlardı.
> G5.Öğrenciler kendi örneklerini üretip kullanamadılar ya da isteksizdiler.
> G6.Öğrenciler matematiksel dil ve notasyonu anlayamadılar ve kullanamadılar.
> G7.Öğrenciler kanıtlara nasıl başlayacaklarını bilmiyorlardı.

Moore (1994) bu güçlüklerin kavram anlayışı, matematiksel dil ve notasyon kullanımı ve ispata başlama gibi üç ana kaynağının olduğunu belirtmiştir. İspatlamada matematiksel dil kullanımı ve sembollerle ifade etme önemlidir (Laborde, 1990). Öğrencilerin dil ile ilgili güçlük yaşadığı asıl konu sembolik dil kullanımıdır (Aylar, 2014b). Çünkü günlük dil kullanımı ile matematiksel dil kullanımı arasında farklılıklar vardır (Epp, 2003). D'Angelo ve West (2000) ispat yazmada öğrencilerin matematiksel dil kullanımına alışkın olmadıklarını vurgulamıştır. Alışkanlık kazanmak için yabancı bir dil öğrenmede uygulama yapmak ne kadar önemli ise matematikte de öyledir (Stefanowicz, 2014). Baker ve Campbell'e (2004) göre öğrenciler için ispatlama önermenin doğru olduğunu anladıkları anda bitmektedir yani öğrenciler ispatın bir işlevi olan iletişimi önemsemedikleri için ispat yazarken matematiksel dil kullanımında güçlükler yaşamaktadırlar. Çünkü ispatlama yalnızca kendini ikna etmekten ibaret değildir başkalarını ikna etmek için de ürünün matematiksel bir dille bir disiplin içinde sunulması gerekmektedir (Baker ve Campbell, 2004). Öğretmen adayları sadece ispat yapmada değil aynı zamanda ispat değerlendirmede de (İmamoğlu, 2010; Güler, 2013; Güler ve Ekmekci, 2016) güçlükler yaşamaktadırlar.

Sonuç olarak bir ispatlama süreci baştan sona düşünüldüğünde yaşanabilecek güçlükler aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir. İspatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini aşağıdaki **beş başlıkta** inceleyebiliriz.

1) İspatın doğasını kavrama güçlükleri (Balacheff 1988; Hoyles, 1997; Knuth, 2002b; Özer ve Arıkan, 2002; Dane, 2008; Köğce, 2012; Aylar, 2014a, 2014b; Polat ve Akgün, 2016; Çontay ve Duatepe-Paksu, 2019).

1a) İspat kavramını bilmeme (Balacheff 1988; Dane, 2008; Polat ve Akgün, 2016),

1b) Neyin ispat olup neyin ispat olmadığını bilmeme (Knuth, 2002b),

1c) İspatın amaçlarını ve işlevlerini bilmeme (Balacheff, 1988),

1d) Doğrulamayı ispat sanma (Balacheff, 1988; Hoyles, 1997; Knuth, 2002b; Özer ve Arıkan, 2002; Köğce, 2012; Aylar, 2014a, 2014b),

1e) İspatın modern bileşenlerini bilmeme (Dane, 2008).

2) İspata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlükler (Knapp, 2005).

Herhangi bir teoremin ispatı için o teoreme özgü olan kavramları, tanımları, kuralları, lemmaları, aksiyomları, önceki teoremleri ve sonuçları bilmeme.

3) İspat yöntemleri ile ilgili güçlükler (Ernest, 1984; Fischbein ve Engel, 1989; Baker, 1996; Rossi, 2006; Doğan-Dunlap, Özdemir-Erdoğan ve Kılıç, 2013; Baki ve Kutluca, 2009; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; İmamoğlu ve Yontar-Toğrol, 2015; Güler ve Ekmekci, 2016; Pekşen-Sağır, 2013; Miral, 2013).

3a) İspat yöntemlerini bilmeme (Miral, 2013),

3b) Uygun ispat yöntemini seçememe (Rossi, 2006; Pekşen-Sağır, 2013),

3c) İspat yöntemlerini uygulayamama (Baker, 1996),

3d) İspat yöntemlerinin basamaklarını zihinde anlamlandıramama (Baker,1996; Ernest, 1984; Fischbein ve Engel, 1989; Doğan-Dunlap, Özdemir-Erdoğan ve Kılıç, 2013; Güler ve Ekmekci, 2016; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012).

4) Problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlükler (D’Angelo ve West, 2000; Weber, 2001; Weber, 2005; Knapp, 2005; Doruk ve Kaplan, 2013; Uygan, Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse, 2014; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012).

4a) Sağlam temele dayanmayan akıl yürütme (D’Angelo ve West, 2000),

4b) Mantıksal ve tümdengelimli akıl yürütmedeki güçlükler (Knapp, 2005), 4c) İspatlamayı yürütecek işlem becerisine sahip olmama (Güler, Özdemir ve Dikici, 2012),

4d) Matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlükler (Uygan, Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse, 2014),

4e) Problem çözme sürecindeki güçlükler (Weber, 2005),

4f) Stratejik bilgi eksikliği (Weber, 2001),

4g) İspattaki anahtar düşüncenin farkında olmama (Doruk ve Kaplan, 2013).

5) Matematiksel dil kullanımındaki güçlükler (Laborde, 1990; Moore, 1994; D'Angelo ve West, 2000; Epp, 2003; Baker ve Campbell, 2004; Knapp, 2005; Aylar, 2014b; Uygan, Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse, 2014).

5a) Matematiksel dil kullanımına yönelik güçlükler (Laborde, 1990; Baker ve Campbell, 2004; Knapp,2005; Uygan, Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse, 2014),

5b) Matematiksel dil ve notasyon kullanımdaki güçlükler (Moore, 1994),

5c) Sembolik dil kullanımındaki güçlükler (Laborde, 1990; Aylar, 2014b),

5d) Günlük dil kullanımı ile matematiksel dil kullanımı arasında farklılıklardan kaynaklı güçlükler (Epp, 2003).

İspat yapmaya yönelik güçlüklerle ilgili öğretmen adaylarını ilgilendiren iki konu bulunmaktadır. Birincisi ispatla ilgili kendilerinin sahip oldukları güçlükler, diğeri de öğrencilerin sahip oldukları güçlüklerdir. Burada öğretmen adaylarının yapmaları gereken birinci şey ispatla ilgili kendi güçlüklerinin üstesinden gelmek, ikincisi ise öğrencilerin güçlüklerinin farkında olup bunların nedenlerini açıklamak ve de bunların üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirlemektir.

Literatür incelendiğinde ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin belirlenmesine yönelik çalışmalar ağırlıkta olup bu güçlüklerin nedenlerini belirlemeye yönelik çalışmalar ve bu güçlükleri gidermeye yönelik çalışmalar azınlıkta kalmaktadır. Bu çalışmada ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgisi pedagojik alan bilgisinin bir bileşeni olarak ele alınmıştır. Literatürden farklı olarak bu öğretmen bilgisini geliştirmeye yönelik bir modül içeren ders tasarlanmıştır.

2.5.2. İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerinin Nedenleri

Buraya kadar olan kısımda ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinden bahsedilmiştir. Her öğrenci güçlüğünün altında yatan en az bir neden vardır. Cornu (1991) güçlüklerin bilişsel nedenlerini psikolojik ve genetik nedenler, didaktik nedenler ve epistemolojik nedenler olmak üzere üç sınıfa ayırmıştır. Cornu (1991, s. 158) "öğrencinin kişisel gelişiminin bir sonucu olarak ortaya çıkan engeller" psikolojik ve genetik engeller, "öğretim ve öğretmenin niteliğinden kaynaklanan" didaktik engeller ve "matematiksel kavramların kendilerinin doğasından kaynaklanan" epistemolojik engeller şeklinde bir sınıflama yapmıştır. Öğrencilerin ispatlamaya yönelik yaşadıkları güçlüklerin nedenlerini de bu çerçeveden inceleyebiliriz.

Tablo 2.10. Öğrencilerin İspatlamaya Yönelik Güçlüklerinin Nedenleri

Öğrencilerin ispatlamaya yönelik güçlüklerinin psikolojik ve genetik nedenleri	Öğrencilerin ispata yönelik görüşleri Öğrencilerin ispata yönelik tutumları Öğrencilerin ispata yönelik inançları Öğrencilerin aşağıdaki konularda ön bilgi ve kavrama eksiklikleri ile kavram yanılgıları • İspatın doğası • İspatın modern bileşenleri • İspat türleri • İspat yöntemleri • İspat şemaları • Matematiksel akıl yürütmeye dayalı problem çözme, işlem yapma • Dil kullanımı • Genel matematiksel bilgiler
Öğrencilerin ispatlamaya yönelik güçlüklerinin didaktik nedenleri	Öğretmenlerin / öğretim elemanlarının ispata yönelik görüşleri Öğretmenlerin / öğretim elemanlarının ispata yönelik tutumları Öğretmenlerin / öğretim elemanlarının ispata yönelik inançları Öğretmenlerin / öğretim elemanlarının ispatla ilgili alan bilgilerinin yetersiz oluşu Öğretmenlerin / öğretim elemanlarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin yetersiz oluşu İspatla ilgili öğretim programlarındaki eksiklikler İspatla ilgili yeterli eğitim verilmemesi İspat becerilerini geliştiren değişkenlerin araştırılıp derslerde kullanılmaması İspatın öğretimine yönelik gerekli müdahalelerin tasarlanıp uygulanmaması
Öğrencilerin ispatlamaya yönelik güçlüklerinin epistemolojik nedenleri	Bazı teoremlerin, ispatların ve ispat yöntemlerinin kendi doğasından kaynaklanan nedenler İspatın karmaşık yapısı İspatlamada kullanılan tanımların, aksiyomların, başkaca teorem ve sonuçların zorluğu

Bu çalışmada ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgisi pedagojik alan bilgisinin bir bileşeni olarak ele alınmıştır. Literatürden farklı olarak bu öğretmen bilgisini geliştirmeye yönelik bir modül içeren ders tasarlanmıştır.

2.5.3. İspatlamaya Yönelik Öğretim Stratejileri

İspatlamayla ilgili öğrencilerin beklenen seviyeye ulaşamaması ve öğrencilerin yaşadığı güçlükler ve bu güçlüklerin nedenleri farklı öğretim stratejileri geliştirmeyi gerekli kılmıştır. Pedagojik alan bilgisinin diğer önemli bir bileşeni de öğretim stratejileridir (Shulman, 1986). Magnusson, Krajcik ve Borko (1999) bu bileşen için iki alt kategori tanımlamıştır: alana özgü stratejiler ve konuya özgü stratejiler. Alana özgü stratejiler belli bir alanın öğretimine yönelik stratejileri, konuya özgü stratejiler ise bu alana ait herhangi bir konunun veya kavramın öğretimine yönelik stratejileri kapsamaktadır (Magnusson, Krajcik ve Borko, 1999). Örneğin ispat konusu için konuya özgü stratejiler geliştirilmelidir. Magnusson, Krajcik ve Borko'ya (1999) göre konuya özgü stratejiler konuya özgü temsiller ve konuya özgü etkinliklerden oluşmaktadır. "Modeller", "analojiler", "illüstrasyonlar", "örnekler" konuya özgü temsilleri (s. 111), "problemler", "deneyler", "gösterimler" ve "simülasyonlar" ise konuya özgü etkinlikleri (s. 113) oluştururlar (Magnusson, Krajcik ve Borko, 1999).

İspat konusu ile ilgili farklı öğretim müdahaleleri yapmak öğrencilerin gelişiminde önemli farklar yaratabilir. "Öğretim müdahalesi, belirli öğrenme çıktılarını elde etmek için kasıtlı ve tutarlı bir faaliyet koleksiyonu (ve ilgili uygulama stratejileri) anlamına gelir" (Stylianides, 2011, s. 3). Bu öğretim müdahaleleri amacına yönelik iyi tasarlanmış öğretim süreçleri, öğrenme ortamları, öğretim uygulamaları, öğretme deneyleri veya ders tasarımları olabilir. Matematik öğretmeni yetiştiricileri öğretmen adaylarının ispatı nasıl anladıkları yönünde fikirler geliştirerek onların ispat bilgilerine katkı sağlayacak öğretim müdahalelerini tasarlamalı ve uygulamalılardır (Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007). Örneğin Samkoff ve Weber (2015) çalışmalarında önce üniversite öğrencilerinin okudukları ispatı anlamalarını geliştirecek stratejileri tanımlamışlar daha sonra da bu stratejileri uygulayacakları bir öğretim müdahalesi tasarlamışlardır. Bu stratejileri üniversite öğrencilerinin uygulamaları zaman zaman sorunlu olsa bile onların ispatı anlamalarına yardımcı olduğu sonucuna ulaşılmışlardır. Mata-Pereira ve da Ponte (2017) çalışmalarında bir dizi öğrenci görevleri ve öğretmen eylemlerini içeren öğretim tasarımının öğrencilerin matematiksel akıl yürütme süreçlerini ve becerilerini geliştirdiğini bunun sonucu olarak da öğretim tasarımının uygulamasından sonra öğrencilerin ispat yapmada daha başarılı olduklarını belirtmişlerdir. Aylar (2014a) ilköğretim 7. sınıf öğrencileri için bir öğretim süreci tasarlayıp uygulayarak öğrencilerin ispata yönelik algı ve becerilerini geliştirmeyi amaçladığı doktora tezinde Ankara ilinin iki ilçesindeki iki okuldan 54 öğrenciyi araştırma grubu olarak belirlemiştir. Araştırmanın sonucuna göre 14 saatlik öğretim sürecinden sonra öğrencilerin algı ve becerilerinde gelişim saptanmıştır. Öztürk (2016) doktora tezinde grup çalışması yapma, sınıf tartışmaları yapma ve dinamik geometri yazılımlarını kullanma gibi bazı temellere dayalı olup ispatın işlevlerini içeren ve yedi aşamadan oluşan “Matematiksel İspat (İSMAT)” adında bir öğretim modeli tasarlayarak bu öğrenme ortamının matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaları ve varsayım oluşturmaları üzerinde etkili olup olmadığını ve ispatın rollerine bakışlarında farklı bir etki yapıp yapmadığını ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. Yarı deneysel bir araştırma olan bu tez çalışmasında İSMAT Modelinin uygulandığı bir öğrenme ortamı deney grubuna, geleneksel öğrenme ortamı da kontrol grubuna uygulanmıştır. Öğretmen adaylarının varsayım oluşturma ve oluşturdukları varsayımları ifade ederken matematiksel dil kullanmalarında gruplar arasında anlamlı bir fark tespit edilmezken İSMAT Modelinin öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunmalarında ve matematiksel dil kullanımlarında olumlu bir etki oluşturduğu belirlenmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının ispatı daha geniş açıdan değerlendirdikleri ve ispatın rollerine daha çeşitli bakış açıları geliştirdikleri görülmüştür. Başka bir çalışmada ise İnam (2014) ispat kavrama testlerine dayalı bir öğretim uygulaması yapıp bu uygulamayı değerlendirmeyi amaçladığı yüksek lisans tezinde Zonguldak ilinde bulunan bir lisede öğrenim gören 20 öğrenciyi araştırma grubu olarak belirlemiştir. Araştırmanın bulgularına göre öğrenciler sadece temel seviyede iyi kavrama gerçekleştirebilmişlerdir. Ayrıca öğrencilerle yapılan görüşmelerden öğrencilerin bu öğretim uygulamasından memnun kaldıkları görülmüştür. Sarı (2011) ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili güçlüklerini ve ispat yapma biçimlerini belirlemeyi ve öğretmen adaylarının yaşadığı bu güçlükleri ortadan kaldırıp, ispat yapma becerilerini geliştirmek için hangi etkinliklerin uygulanabileceğini araştırdığı yüksek lisans tezinde Ankara’da bulunan bir devlet üniversitesinin ilgili bölümünde okuyan 4.

sınıf öğrencileri arasından altısını araştırma grubu olarak belirlemiştir. Öğretme deneyi yöntemi uygulanan bu çalışmanın sonuçlarına göre öğrencilerin aktif olduğu sınıf uygulamaları yapmak öğrencilerin ispat yapma süreçlerini pozitif yönde etkilemiş ve ispat yapma güçlüklerini ortadan kaldırmada etkili olmuştur. Uğurel (2010) ortaöğretimde öğrenim gören öğrencilerin ispat kavramıyla ilgili bilgilerini sınıf içi iletişimle nasıl düzenlediklerini belirlemeyi amaçladığı doktora tezinde araştırma grubu olarak özel bir fen lisesinde öğrenim gören 13 öğrenciyi ve bu öğrencilerin matematik ve geometri öğretmenlerini seçmiştir. Bu nitel araştırmanın verileri öğretmenlerin işlediği dersler video ile kayıt edilerek elde edilmiştir. Araştırmanın bulguları sınıf içi iletişimin ispatla ilgili bilgiyi oluşturmada ve var olan bilgiyi yapılandırmada etkisini ortaya koymuştur. Yine araştırmanın sonuçları öğrencilerdeki ispat yapmaya yönelik eksiklikleri, yanılgıları ve sınırlılıkları ortaya koymuştur.

Teknolojide süregelen gelişmeler matematikte olduğu kadar matematik eğitiminde de olumlu etkiler sağlamıştır (Akkoç, 2013). İspat konusunda Cabri, GeoGebra, Geometer's Sketchpad gibi DGY'nın kullanımı öğrencilerin ispat konusunu görselleştirmeleri aracılığıyla kavramları ve konuyu daha iyi öğrenmelerine katkı sağlayabilir. DGY öğrencilerin ispatlama becerilerini geliştirmektedir (Marrades ve Gutiérrez, 2000). Bu yüzden DGY pedagojik bir araç olarak kullanılabilir (Leung, 2011). Fiallo ve Gutiérrez (2017) çalışmalarında dinamik geometri sistemlerinin kullanıldığı ortamda tartışmanın teşvik edildiği öğretim metodolojisinin benimsendiği sınıf tabanlı bir müdahalenin katılımcıların varsayımları keşfetmesine ve doğrulamasına yardımcı olduğunu bununla birlikte müdahalenin öğrencilere ispat yapma konusunda deneyim kazandırdığını belirtmişlerdir. İpek (2010) ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin matematiksel ispat hakkındaki, dinamik geometri hakkındaki düşüncelerini belirlemeyi ve dinamik geometri yazılımları (DGY) kullanarak geometrik ve cebirsel ispat yapma süreçlerini incelemeyi amaçladığı yüksek lisans tezinde Ankara'daki bir üniversitede Geometri Öğretimi dersini seçmeli olarak alan 39 öğrenciyi araştırma grubu olarak belirlemiştir. Araştırmanın sonucuna göre ilköğretim matematik öğretmen adayları için DGY kullanmak ispat öğretimi için etkili bir seçenektir. DGY ile ilgili başka bir çalışmada da Ceylan (2012) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının GeoGebra kullanarak geometrik ispat yapma becerilerinin incelenmesini ve kullandıkları ispat biçimlerinin belirlenmesini amaçladığı yüksek lisans tezinde Orta Anadolu'dan bir üniversitesinin ilgili bölümünün 2. sınıfında okuyan altı öğrenciyi ölçüt örnekleme tekniği ile araştırma grubu olarak belirlemiştir. Bu nitel araştırmanın bulgularına göre öğretmen adayları geometri ispatlarında geçerli varsayımlar kurabilmiş ve GeoGebrayı amaçlarına uygun olarak kullanabilmişlerdir. Marrades ve Gutiérrez'in (2000) sınıflandırmasının kullanıldığı bu çalışmada öğretmen adaylarının verilen ispatların yarısını deneysel gerekçelendirmeler ile yarısını da tümdengelimli gerekçelendirmeler ile yaptığı saptanmıştır. Demir (2011) Cabri'de koşturulmak üzere geliştirilen bilgisayar destekli geometri öğretim materyallerinin ilköğretim öğrencilerinin ispat becerileri üzerindeki etkisini araştırdığı yüksek lisans tezinde deney grubunda 10, kontrol grubunda 13 öğrenciyle çalışmıştır. Deney grubuna bu dinamik geometri yazılımı tanıtıldıktan sonra hazırlanan öğretim materyalleri 4 haftalık süreçte uygulanmıştır. Ön test sonuçlarında ispat becerileri arasında anlamlı fark olmayan deney ve kontrol gruplarının son test puanlarının deney grubu lehine çıkması geliştirilen bu tür materyallerin ilköğretim öğrencilerinin ispat becerilerini geliştirdiği sonucunu ortaya çıkarmıştır.

Matematiğin öğrencilik dışı hayatla ilişkilendirilmesi öğrencilerin matematiğe ilgisini arttırır. Matematiğin tüm konularında bu uygulanamasa bile ispat konusunda bu uygulanabilirdir. Örneğin Ünveren (2010) ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin ispata yönelik tutumlarını incelemeyi amaçladığı yüksek lisans tezinde kasti örnekleme tekniğine başvurarak Balıkesir Üniversitesi'nden 60 öğrenciyi araştırma grubu olarak belirlemiştir. Öğretmen adaylarının önce geleneksel yöntemle yapılan ispata yönelik tutumları sonra da matematiksel modelleme yöntemi ile yapılan ispata yönelik tutumları ölçülmüştür. Araştırmanın sonucuna göre modelleme yöntemine yönelik tutumların puanlarının daha yüksek olduğu saptanmıştır. Yılmaz (2015) ise matematiksel modellerle teorem ispatlarının öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerine, ispata yönelik görüşlerine ve akademik başarılarına etkisini incelemeyi amaçladığı yüksek lisans tezinde Atatürk Üniversitesi ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün ikinci sınıfında öğrenim gören 45 öğrenciyi araştırma grubu olarak belirlemiştir. Karma yöntemin tercih edildiği bu araştırmanın sonuçlarına göre matematiksel modellerin öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerini, ispata yönelik görüşlerini ve akademik başarılarını pozitif yönde etkilediği saptanmıştır. Güler ve Temizyürek (2015) pedagojik formasyon programında kayıtlı 20 matematik öğretmen adayıyla yürüttükleri nitel çalışmalarında $1+2+3+\cdots+m=\frac{m\cdot(m+1)}{2}$ kuralının ispatına yönelik olarak öğretmen adaylarının model oluşturma becerilerini incelemeyi amaçlamışlardır. Araştırmanın bulgularına göre matematik öğretmen adayları bu kuralın ispatı için sözel, şekilsel ve cebirsel modeller oluşturmuşlardır.

Ayrıca ispatlama süreci ile ilişkili olan etmenler göz önüne alınıp ispatlama sürecine katkı sağlayacak etmenlerin amacına uygun kullanılması da önemlidir. Örneğin Coşkun (2009) ortaöğretimde öğrenim gören öğrencilerin Van Hiele geometri anlama seviyeleriyle ispat yazma başarıları arasında bir ilişki olup olmadığını araştırmak amacıyla yaptığı yüksek lisans tezini 96 ortaöğretim öğrencisiyle yürütmüştür. Araştırmanın sonuçlarına göre ortaöğretim öğrencilerinin hem Van Hiele geometri anlama seviyeleri hem de ispat yazma başarıları beklenen düzeyin altında kalmıştır. Araştırmanın bir diğer sonucu da ortaöğretim öğrencilerinin Van Hiele geometri anlama seviyeleriyle ispat yazma başarıları arasında pozitif yönde ve orta düzeyde anlamlı bir ilişkisi olduğudur. Karaoğlu (2010) matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performanslarını, anahtar nokta ve fikirlerle ilgili görüşlerini incelemeyi amaçladığı yüksek lisans tezinde bir üniversitenin ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören üç öğrenciyi araştırma grubu olarak belirlemiştir. Araştırmanın sonuçlarına göre öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerden yararlandıklarında ispat yapma performanslarının, isteklerinin ve özgüvenlerinin arttığı belirlenmiştir.

Literatürden farklı öğretim stratejileri içeren farklı öğretim müdahalelerinin işe yararlılığı görülmektedir. Yukarıda beş başlıkta topladığımız öğrenci güçlükleri ile üç başlıkta incelenen öğrenci güçlüklerin nedenlerinin (Cornu, 1991) üstesinden gelecek öğretim stratejileri anlamlandırma stratejileri, pekiştirme (yineleme) stratejileri, cebirsel gösterim, DGY ve grafik çizimi ile akıl yürütmeyi güçlendirecek farklı problemler çözme stratejisi şeklinde sınıflandırılabilir.

Anlamlandırma stratejileri; model kullanımı, analojiler ve simülasyonlar yardımıyla geliştirilebilir. Bu tür temsillerin konuya özgü öğretimde etkili olduğuna yukarıda değinmiştik. Örneğin ispat yöntemlerinden epistemolojik kaynaklı tümevarım yönteminin basamaklarını anlamlandıramama güçlüğünün üstesinden gelebilmek için domino taşlarının kullanıldığı simülasyon kullanılabilir.

DGY ve grafik çizimi: DGY'da yukarıda değinildiği gibi ispat öğretiminde etkili bir öğretim stratejisidir. Teknoloji kullanımının ispat öğretimindeki etkisine yukarıda değinmiştik. İspat öğretiminde teknoloji kullanımı öğrencilerin yaşadığı ispatlamaya yönelik farklı güçlüklerin üstesinden gelmeye yarayabilir.

Cebirsel gösterim; matematiksel dil kullanımında yaşanan güçlüklerin üstesinden gelmek için kullanılması gereken bir öğretim stratejisidir. İspat öğretiminde öğrencilerin bilişsel gelişimlerine göre matematiksel dil kullanımları geliştirilmelidir.

Akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme: problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüklerin üstesinden gelmek için kullanılması gereken bir öğretim stratejisidir. Bilindiği gibi ispatlama bir anlamda problem çözmedir. Ayrıca ispatlamada matematiksel akıl yürütme fonksiyonları kullanılır. Bu yüzden bu tür güçlüklerin üstesinden gelecek farklı problemler çözme stratejileri ispat öğretiminde önemlidir.

Pekiştirme (yineleme) stratejileri: konunun anlaşılması için konu tekrarı yapmak her zaman işe yarar bir öğretim stratejisidir. Örneğin ispatın doğasını kavrama güçlüğü yaşayan öğrencilere ispatın ne olduğu, ispatın işlevlerinin tekrar anlatılması faydalı olacaktır. İspat yöntemlerini yanlış hatırlayan öğrencilere yöntemleri tekrar etmek yine faydalı bir stratejidir. Pekiştirme stratejileri bir öğrenme stratejisi olduğu gibi öğretmenler tarafından da uygulanabilecek bir öğretim stratejisidir.

Bu çalışmada ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgisi pedagojik alan bilgisinin bir bileşeni olarak ele alınmıştır. Literatürden farklı olarak bu öğretmen bilgisini geliştirmeye yönelik bir modül içeren ders tasarlanmıştır.

2.5.4. Öğrencilerin Sahip Oldukları İspat Şemaları

Çeşitli araştırmacılar farklı çalışmalarda pedagojik alan bilgisinin farklı bileşenlerini tanımlamışlardır. Bunların arasında öğrencilerin düşünme bilgisi öğretmen eğitimi literatüründe kapsamlı bir şekilde incelenmiştir (Depaepe, Verschaffel ve Kelchtermans, 2013). Öğretmenler için öğrencilerin bir önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını gerekçelendirme biçimlerini başka bir deyişle öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgisi önemli bir bilgi türüdür. Bu çalışmada literatürden farklı olarak öğretmenlerin "öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eme bilgisi" öğretmenlerin ispatla ilgili pedagojik alan bilgisi içerisine entegre edilmiştir. İyi bir ispat öğretimi için öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını bilmeleri ve bu şemaları analitik düzeye çıkarmak için farklı öğretim stratejileri belirlemeleri gerekmektedir. Öğretmenlerin herhangi bir önerme veya teorem için farklı şemaya sahip öğrencilerce ikna edici bulunabilecek gerekçelendirme tiplerinin farkında olmaları gerekmektedir. Cadwallader-Olsker (2011) çalışmasında küme teorisine ait $A \subseteq B$ ise $A \cup B = B$ teoremi için farklı ispat şemalarına sahip kişiler tarafından ikna edici bulunabilecek farklı gerekçelendirmeleri oluşturmuştur.

Aydoğdu-İskenderoğlu (2003) 5., 6., 7., 8. ve 9. sınıf öğrencilerinin kullandıkları ispat şemalarını araştırdığı yüksek lisans tezini her sınıf seviyesinden 2 kız, 2 erkek öğrenci olmak üzere toplamda 20 öğrenciyle yürütmüştür. Verilerin görüşmelerle elde edildiği araştırmada her öğrenciye 5 adet problem yöneltilmiş ve verilerin analizinde nitel yöntemler kullanılmıştır. Sowder ve Harel'in (1998) sınıflamasının kullanıldığı araştırmanın bulgularına göre öğrenciler için en arzu edilen ispat şeması olan analitik ispat şemalarının dışsal ve deneysel ispat şemalarından daha az kullanıldığı belirlenmiştir. Ayrıca bu çalışmada öğrencilerin dışsal ispat şemalarından otoriter ispat şemasını, deneysel ispat şemalarından ise örnek temelli ispat şemasını daha çok tercih ettiği belirlenmiştir.

Ören (2007) dört farklı ortaöğretim okulunun onuncu sınıfında öğrenim gören 126'sı kız, 98'si erkek toplam 224 öğrenciyle yürüttüğü yüksek lisans tezinde öğrencilerin geometri soruları için sahip oldukları ispat şemalarını ve bu şemaların bilişsel stil ve cinsiyete göre farklılaşıp farklılaşmadığını araştırmıştır. Araştırmanın bulgularına göre öğrenciler Harel ve Sowder'ın (1998) sınıflandırmasına göre analitik ispat şemasını diğer iki şemaya göre daha az kullanmaktadırlar. Araştırmanın diğer bir sonucu da öğrencilerin kullandığı ispat şemalarının bilişsel stillere ve cinsiyete göre farklılaştığıdır.

Bu çalışmaya özgü olarak öğrencilerin ispat şemalarını senaryoya dayalı olarak öğretmen adaylarının tespit etmeleri istenmiş ve öğretmen adaylarının bu bilgileri müdahale aracılığıyla geliştirilmeye çalışılmıştır. Bu çalışmada öğrencilerin ispat şemalarını tespit etme bilgisi pedagojik alan bilgisinin bir bileşeni olarak ele alınmıştır. Literatürden farklı olarak bu öğretmen bilgisini geliştirmeye yönelik bir modül içeren ders tasarlanmıştır.

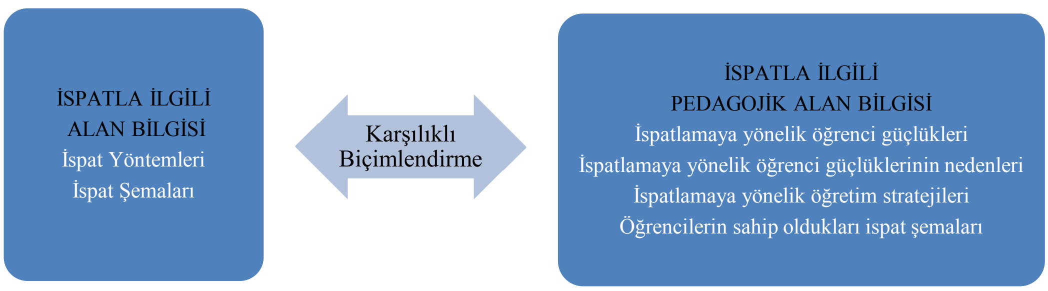
2.6. Kavramsal Çerçeve

Araştırmamızın amacı öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarlamaktır. Ders tasarımı yapılırken Akkoç, Özmantar, Bingölbali, Demir, Baştürk ve Yavuz'un (2011) çalışmasından faydalanılmıştır.

Ball, Thames ve Phelps (2008) çalışmalarında Shulman'ın (1987) öğretmenin sahip olması gereken bilgi formlarından biri olan alan bilgisini ortak alan bilgisi ve özel alan bilgisi olarak ikiye ayırmıştır. Lesseig ise (2011, 2016) ispat öğretimi için alan bilgisini ispat öğretimi için ortak alan bilgisi ve ispat öğretimi için özel alan bilgisi olarak yukarıdaki çalışmalardan yararlanarak iki çerçevede incelemiştir. Araştırmamızda öğretmen adaylarının ispat öğretimi için sahip olmaları gereken alan bilgileri "farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgisi" ve "sahip oldukları ana ispat şemaları bilgisi" olmak üzere iki bileşende incelenmiştir. İspat yöntemleri için literatürden (Gossett, 2003; Rossi, 2006; Epp, 2011; Chartrand, Polimeni ve Zhang, 2013; Stefanowicz, 2014; Swanson, 2017) derlenmiş ispat yöntemlerinin sınıflaması (tümevarımla ispat yöntemi, doğrudan ispat yöntemi, durum yoluyla ispat yöntemi, tüketerek ispat yöntemi, çelişki ile ispat yöntemi, olmayana ergi yöntemi, aksine örnek verme yöntemi), ispat şemaları için ise Sowder ve Harel'in (1998) dışsal, deneysel ve analitik ispat şemaları sınıflaması esas alınmıştır.

İlk olarak Shulman'ın (1986) makalesinde bahsettiği pedagojik alan bilgisi farklı çalışmalarda farklı bileşenleri ele alınarak incelenmiştir. Shulman'ın (1986) öğretmenin sahip olması gereken bilgi formlarından biri olan pedagojik alan bilgisi incelendiğinde öğrenci güçlükleri ile öğretim stratejileri bileşenlerinin ön planda olduğu görülmektedir (Park ve Oliver, 2008; Yeşildere ve Akkoç, 2010). Araştırmamızda öğretmen adaylarının ispat öğretimi için sahip olmaları gereken pedagojik alan bilgileri "öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgisi", "öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgisi", "bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgisi" ve "öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgisi" olmak üzere dört bileşende incelenmiştir.

Araştırmamızda ispatlamaya yönelik öğrenci güçlükleri "ispatın doğasını kavrama güçlükleri" (Balacheff 1988; Hoyles, 1997; Knuth, 2002b; Özer ve Arıkan, 2002; Dane, 2008; Köğce, 2012; Aylar, 2014a, 2014b; Polat ve Akgün, 2016), "ispat yöntemleri ile ilgili güçlükler" (Ernest, 1984; Fischbein ve Engel, 1989; Baker, 1996; Doğan-Dunlap, Özdemir-Erdoğan ve Kılıç, 2013; Baki ve Kutluca, 2009; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; İmamoğlu ve Yontar-Toğrol, 2015; Güler ve Ekmekci, 2016; Pekşen-Sağır, 2013; Miral, 2013), "matematiksel dil kullanımındaki güçlükler" (Laborde, 1990; Moore, 1994; D'Angelo ve West, 2000; Epp, 2003; Baker ve Campbell, 2004; Knapp, 2005; Aylar, 2014b; Uygan, Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse, 2014), "problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlükler" (D'Angelo ve West, 2000; Weber, 2001; Weber, 2005; Knapp, 2005; Doruk ve Kaplan, 2013; Uygan, Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse, 2014; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012), "ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlükler" (Knapp, 2005) olmak üzere beş alt başlıkta incelenmiştir. İspatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenleri için Cornu'nun (1991) psikolojik ve genetik nedenler, didaktik nedenler, epistemolojik nedenler sınıflaması esas alınmıştır. Magnusson, Krajcik ve Borko (1999) Shulman'ın (1986) öğretim stratejileri bileşenini alana özgü stratejiler ve konuya özgü stratejiler olmak üzere ikiye ayırmıştır. Araştırmamızda öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğretim stratejileri Magnusson, Krajcik ve Borko'nun (1999) konuya özgü stratejiler alt bileşeninde incelenmiştir. İspatlamaya yönelik öğretim stratejileri pekiştirme (yineleme) stratejileri, anlamlandırma stratejileri, cebirsel gösterim, akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme stratejisi, DGY ve grafik çizimi gibi literatürden derlenen farklı alt başlıklarda incelenmiştir.



Şekil 2.5. Kavramsal Çerçevenin Özeti

BÖLÜM III: YÖNTEM

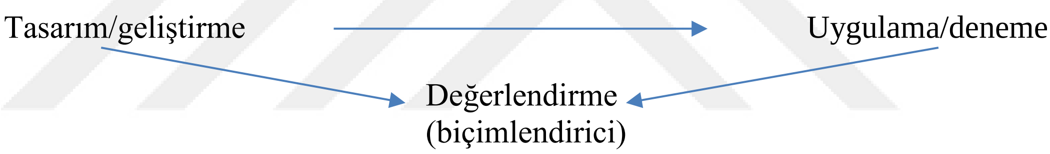
Bilimsel araştırmalar için araştırmaya başlamadan önce yöntem seçme konusu en önemli sorunlardan biridir. Yöntemler araştırmanın amacına uygun olarak seçilmelidir (Karasar, 2014). Araştırmaların yöntem kısmında veri toplama araçları, veri toplama süreçleri ve veri analiz yöntemleri hakkında bilgi verilir (Al, 2014). Bu bölümde araştırma yöntemine, araştırma desenine, araştırma modeline, araştırmanın aşamalarına, araştırmanın örneklemine, veri toplama araçlarına ve verilerin çözümlenmesine yer verilmiştir.

Araştırmamızın amacı ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarlamak olduğundan araştırmanın amacına ve özüne en uygun araştırma yöntemi olarak **tasarım tabanlı araştırma (TtA) yöntemi** kullanılmıştır. Temel felsefesi mühendislik süreçlerine dayanan, teorik çerçevesini oluşturan en önemli yaklaşımlardan biri Gerçekçi Matematik Eğitimi olan TtA'nın tasarım çalışması, tasarım deneyi, eğitsel tasarım araştırması ve gelişim araştırması gibi literatürde farklı isimleri vardır (Aşık ve Yılmaz, 2017). Tasarlama ve keşfetmeye odaklanan TtA'lar öğrenme ve öğretme için verimli bir yöntembilim olarak tanımlanabilir (Design-Based Research Collective, 2003). Easterday, Rees-Lewis ve Gerber (2014, s. 319) TtA'yı "araştırmacıların eğitimin bireysel ve kolektif problemlerini çözmeye yönelik olarak faydalı ürünler ve etkili teoriler üretmelerine olanak sağlamak için tasarım ve bilimsel yöntemleri birleştiren bir süreç olarak" tanımlamışlardır. Basit eğitim sorunlarında uygun olmayan tasarım çalışmaları (Kelly, 2010) karmaşık ve gerçek-dünya eğitim problemlerini çözmeye odaklanır (Ford, McNally ve Ford, 2017). Eğitimde tasarım araştırmaları eğitim uygulamalarında ortaya çıkan karmaşık sorunlara programlar, öğretim-öğrenme stratejileri, öğretim-öğrenme materyalleri, ürünler ve sistemler gibi müdahaleler tasarlayarak bunların geliştirilmesi ve değerlendirilmesi ile birlikte çözüm ararlar (Plomp, 2010). Ancak TtA'lar belirli müdahaleleri tasarlayıp test etmekten öteye geçip öğrenme ve öğretme teorilerine katkı sağlarlar (Design-Based Research Collective, 2003).

TtA'larda araştırmacılar ve uygulamacılar birlikte çalışarak bağımlı değişkenlerde anlamlı değişiklikler yapmaya çalışırlar (Design-Based Research Collective, 2003). Yani tasarım araştırmalarında değişkenleri sabit tutmaya yönelik olarak değişkenleri kontrol etme metodolojisi kullanılmayıp bunun yerine bağımlı değişkenleri etkileyen tüm bağımsız değişkenler (veya tek bağımsız değişken tüm yönleriyle) iyileştirilmeye veya geliştirilmeye çalışılır (Collins, 1999). Bağımsız değişkenler tasarımın başarısını veya başka deyişle bağımlı değişkeni etkileyen değişkenlerdir (Collins, Joseph ve Bielaczyc, 2004). Bağımlı değişkeni etkileyebilecek çok sayıda bağımsız değişken olabileceğinden dolayı hepsini değerlendirmek mümkün olmasa da en çok etkisi olan değişkenler değerlendirilebilir (Collins, 1999; Collins, Joseph ve Bielaczyc, 2004). Bağımlı değişkenler değerlendirilirken tasarımın öğrenciler üzerinde ne kadar etkili olduğu değerlendirilir ve bunun dışında da araştırmacı ayrıldıktan sonra da tasarımın ne kadar sürdürülebilir olduğu, ne kadar yaygınlaşabileceği ve farklı öğrenciler üzerinde de ne kadar etkili olduğu değerlendirilmelidir (Collins, Joseph ve Bielaczyc, 2004). Bağımlı değişkenler değerlendirilirken ön test ve son testler ve de mülakatlar işe koşulur (Collins, Joseph ve Bielaczyc, 2004). Her araştırmanın bağımlı ve bağımsız değişkenleri araştırmanın doğası ve amaçlarına göre farklılık gösterebileceği için bu değişkenler araştırmaya özgü olarak araştırmanın başında belirlenmelidir ancak süreç içinde bir takım değişiklikler yapılabilir (Kuzu, Çankaya ve Mısırlı, 2011). Bağımsız değişkenler öğrenme ortamının belirlenmesi, öğrenenlerin doğası, uygulama için gerekli kaynaklar ve destek, öğreticilerin profesyonel gelişimleri, uygulamanın mali gereklilikleri, uygulamanın süresi ve kullanışlılığı gibi unsurları içerir (Collins, Joseph ve Bielaczyc, 2004, s. 37-38). Bu araştırmadaki bağımsız değişken dersin tasarımı, bağımlı değişkenler ise öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerindeki gelişim düzeyleridir. Çünkü bağımsız değişken olan ders tasarımının değişkenliğine bağımlı olarak öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerindeki gelişim düzeyleri de değişecektir.

Öğretim tasarımları bir amaç doğrultusunda belirlenmiş öğrenme hedeflerine ulaşılmasını sağlayan genellikle ders geliştirilmesine yönelik yaratıcı bir süreç ve de sistematik bir yaklaşımdır (Siemens, 2002). Tüm öğretim tasarımları gerçek dünya problemlerine odaklanan, takım çalışması gerektiren, öğrenci merkezli, amaç odaklı ve deneysel çalışmalardır (Gustafson ve Branch, 2002). Bunların dışında tüm öğretim tasarımlarının ortak karakteristiği yinelemeli olmasıdır (Branch ve Merrill, 2012). Ayrıca öğretim tasarımları tasarlanan ürünlerin çıktılarının geçerli ve güvenilir ölçümlerle ölçülebileceğini varsayar (Gustafson ve Branch, 2002; Branch ve Merrill, 2012). Tasarım araştırmalarında aktif görev alanlar okul/kurum idarecileri, öğretmenler/öğreticiler, öğrenciler/öğrenenler, eğitim araştırmacıları, öğretim programı uzmanları, yazılım geliştiriciler gibi tasarım ekipleri (Kelly, 2010) ve tasarım araştırmalarının çıktıları da ders tasarımları, programlar, sistemler, ürünler, materyaller gibi müdahaleler, yeni teoriler ve katılımcılardaki gelişimdir (Plomp, 2010).

"Pragmatik, müdahaleci ve işbirlikçi" olan TtA'ların (Ford, McNally ve Ford, 2017, s. 51) aşamaları nicel araştırmalarda olduğu gibi net ve kesin bir sistematiğe bağlı olmamakla birlikte genel olarak tasarımın ilk sürümü yapılır ve uygulamaya konulur daha sonra değerlendirmeler yapılarak tasarım verimli hale dönüşene kadar süreç yinelemeli olarak devam ettirilir (Kuzu, Çankaya ve Mısırlı, 2011). TtA'larda farklı şekillerde ilerleyebilen süreç; analiz, tasarım, uygulama ve yeniden tasarlama aşamalarının yinelemeli döngüsüdür (Wang ve Hannafin, 2005). Plomp (2010) tasarım araştırmalarında ardışık döngüsel sürecin prototipini aşağıdaki gibi şekillendirmiştir. Prototipler nihai ürünler değildirler aksine nihai ürünü inşa etmek için müdahalenin tamamını veya bir kısmını kapsayan ön modeller veya versiyonlardır (Nieveen, 2010).



Şekil 3.1. Tasarım Araştırmalarında Ardışık Döngüsel Sürecin Prototipi (Plomp, 2010, s. 18-19).

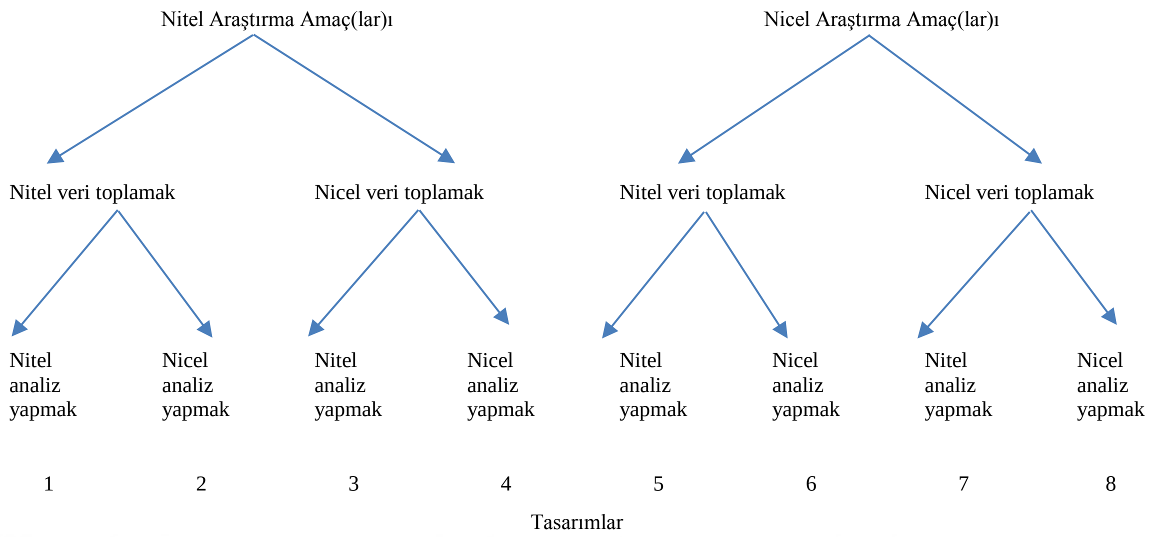
Öğretim tasarımı araştırmaları incelendiğinde TtA yönteminin ağırlıkta olduğu görülmektedir (Akın, Temizkan, Tanış, Koçak-Usluel, 2017). Öğretim tasarımcıları tasarımlarını oluştururken yukarıdaki prototipin farklı versiyonlarını içeren çeşitli modelleri takip ederler (Siemens, 2002). Örneğin matematik ders tasarımı için herhangi bir model daha etkili iken başka bir ders için başka bir model daha etkili olabilir (Siemens, 2002). Bu yüzden TtA'larda farklı modeller kullanılabilmektedir (Akın, Temizkan, Tanış, Koçak-Usluel, 2017). Öğretim problemlerini çözmeye odaklanan öğretim tasarımlarında teknoloji ve öğretim teorilerini içeren ADDIE, ASSURE ve Dick ve Carey modelleri gibi sistematik yaklaşımlar izlenir (Davis, 2013). Öğrenci merkezli yaklaşımlar için son derece kullanışlı olan ADDIE Modeli (Wegener, 2006) ismini Analysis, Design, Development, Implementation, Evaluation kelimelerinin ilk harflerinden almaktadır (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016). ADDIE Modeli prosedürleri ve kurallarıyla sistematik, bileşenleri dâhilinde sistemik olsa da model uygulamada farklılaşabildiği için spesifik değildir, ADDIE kısaltması şemsiye bir terim olarak kullanılır (Branch, 2009). Literatürde bu modelin farklı versiyonlarına rastlamak mümkün olsa da ADDIE Modeli analiz, tasarım, geliştirme, uygulama ve değerlendirme aşamaları olmak üzere beş aşamadan oluşmaktadır (Wegener, 2006). ADDIE Modeli bir ürün geliştirme paradigmasıdır (Branch, 2009). Bu araştırmada da sürdürülebilir bir ürün olarak kapsamlı bir lisans dersi tasarlanacaktır. Bu nedenlerden dolayı tasarım tabanlı bu araştırmanın aşamaları için **ADDIE Modeli** tercih edilmiştir.

3.1. Araştırma Deseni

Araştırma desenleri araştırmanın başından sonuna kadar olan tüm işlemlere yön veren araştırma çeşitleridir (Creswell, 2014). Nicel araştırma desenlerinin aksine nitel araştırma desenleri bu yönlendirmeleri kesin çizgilerle yapmaz (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bu esnekliğin sebebi araştırmanın açık-uçlu olmasıdır (Patton, 2014). Nicel araştırma desenindeki indirgemeciliğin aksine nitel araştırma desenleri araştırmanın tüm aşamalarının araştırma yaklaşımı çerçevesinde tutarlı bir bütün olmasına kılavuzluk eden stratejilerdir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Karma yöntemli desenlerde bu iki desenin birlikte kullanılması gereklidir (Creswell, 2014). Bu üç desen dışında TtA deseni de diğer bir desen olarak kabul edilmektedir. Bu araştırmanın ders tasarım aşaması **tasarım tabanlı araştırma desenine** göre desenlenmiştir.

Günümüzde nicel ve nitel araştırma yöntemleri pek çok farklı alanlarda kullanım sahası bulmuştur (Altun ve Yazıcı, 2014). Nitel araştırmalar insan tecrübelerinin niteliğini analiz edip detaylı tasvirini sağlar (Marvasti, 2004). Tüm yönleriyle nitel araştırmayı tek bir tanımla tanımlamak mümkün olmasa da, nitel araştırma nitel veri toplama yöntemleri ile verilerin toplandığı, fenomenlerin kendi doğal ortamlarında bir bütün olarak ortaya konulduğu araştırmadır (Yıldırım, 1999). Doğal ortamdaki gerçekler ve fenomenler deneysel ortamdakilere göre daha anlamlıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Nitel araştırmalar problem veya sorunu bütünsel bir çerçeve içinde inceler (Creswell, 2014). Nitel araştırmalarda niçin, nasıl gibi sorulara cevap aranır (Şahin, 2014a). Nitel araştırmalar özneldir, gerçek görecelidir, birden çok doğru olabilir, tümevarımcıdır, varsayımlar kullanılmaz, kişisel bir dil kullanılır, temelini post-pozitivist düşünceler oluşturur (Şimşek, 2012). Uzun süreli ve zahmetli çalışma gerektiren nitel araştırmalar kapsamlı ve geniş raporlarla sonuçlandırılmalıdır (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016). Nitel araştırmalar nicel araştırmalara kıyasla sayıca daha az kişi ya da durum üzerinde derinlemesine bilgi edinilmesini amaçlar (Patton, 2014). Nicel araştırmalar insan tecrübelerini sayısal olarak veya istatistiki bilgilerle ifade ederler (Marvasti, 2004). Nicel araştırmalarda araştırmacılar değer ve tutumlarını, nitel araştırmalardaki araştırmacıların aksine sürecin dışında tutarlar (Altun ve Yazıcı, 2014). Nicel araştırmalar görgüldür, nesneldir, gerçek tek ve kesindir, indirgemecidir, tümdengelimcidir, örneklem sayısı büyüktür, sayısal veriler ve varsayımlar kullanılır, amacı genellemeler yapmaktır, dışsal bir dil kullanılır, temelini pozitivist düşünceler oluşturur ve de ne kadar, ne ölçüde, ne sıklıkta sorularına cevap ararlar (Şimşek, 2012). Nitel ve nicel araştırmalar tüm bu farklarına rağmen benzer olarak belirli kurallara ve usullere dayanmalı bilimsel titizlik içinde yürütülmelidir (Marvasti, 2004).

Araştırma sorularının cevabı sadece nitel veya sadece nicel yöntemle alınamıyorsa karma yöntem araştırmaları kullanılır (Fırat, Kabakçı-Yurdakul ve Ersoy, 2014). Karma yöntem araştırmaları nitel ve nicel araştırma yaklaşımlarının birleştirildiği veya karıştırıldığı araştırma sınıfıdır (Johnson ve Onwuegbuzie, 2004). Nitel ve nicel yöntemlerin aynı çalışmada kullanılmasıyla oluşan karma yöntem araştırmaları, araştırmacılar tarafından araştırmanın güvenirliliğini arttırdığı ve araştırmayı zenginleştirdiği için artarak tercih edilmektedir (Gökçek, Babacan, Kangal, Çakır ve Kül, 2013). Karma yöntem araştırmalarında nitel ve nicel bulgular birbirlerini teyit ederler ve sonuçlar da daha inandırıcıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). 20. yüzyılın başlarından günümüze karma yöntem araştırmaları farklı isimlerle adlandırılmıştır (Heiselt ve Sheperis, 2010). Karma yöntem araştırması yerine literatürde “karma model araştırması”, “karma yöntemler”, “nitel ve nicel yöntemler”, “karma desen araştırması” ve “çoklu yöntemler” gibi adlandırmalar da sıklıkla kullanılmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 322). Karma yöntem araştırmalarında yöntem seçerken o yöntemin neden seçildiğine dair bazı gerekçeler olmalıdır. Greene, Caracelli ve Graham (1989, s. 255) karma yöntem seçme gerekçelerini “üçgenleme, tamamlayıcılık, gelişim, başlangıç ve genişletme” olmak üzere beş alt başlıkta sınıflandırmışlardır. Nitel ve nicel araştırmaların her ikisinin güçlü yanları karma yöntem araştırmaları için de geçerlidir ve aynı zamanda bir yöntemin zayıf yönlerinin diğer yöntemle üstesinden gelinebilir (Johnson ve Onwuegbuzie, 2004, s. 21).



Şekil 3.2. Tekli Metot ve Karma-Model Tasarımları (Johnson ve Onwuegbuzie, 2004, s. 21).

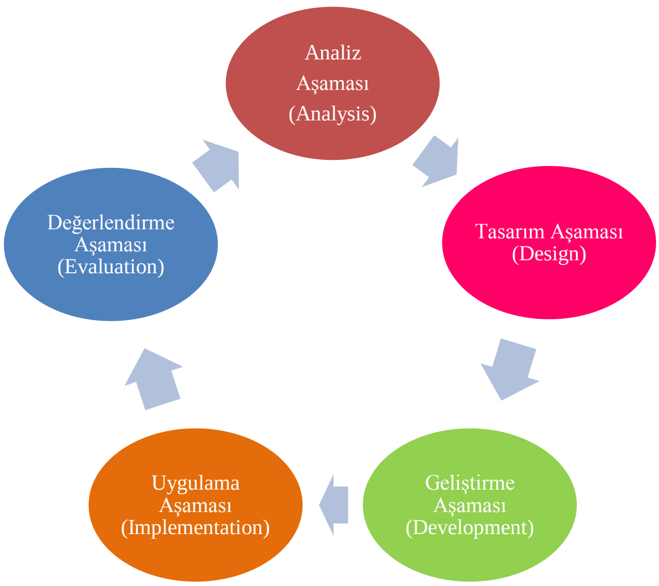
Şekil 3.2'deki tasarımlardan ilki ve sonuncusu tekli metot, diğerleri ise karma model araştırmalarıdır (Johnson ve Onwuegbuzie, 2004). Karma yöntem araştırmaları *nitel baskın* yani nitel veri ve yaklaşımların ağırlıkta (baskın) olduğu araştırmalar, *nicel baskın* yani nicel veri ve yaklaşımların ağırlıkta (baskın) olduğu araştırmalar veya *eşit statü* yani nitel ve nicel epistemolojilerin aynı ağırlıkta (eşit baskınlıkta) kullanıldığı araştırmalar olabilirler (Johnson, Onwuegbuzie ve Turner, 2007).

Karma yöntem desenlerinin "yakınsayan paralel karma yöntem deseni", "açımlayıcı sıralı karma yöntem deseni", "keşfedici sıralı karma yöntem deseni", "iç-içe karma yöntem deseni", "dönüştürücü karma yöntem deseni" ve "çok aşamalı karma yöntem deseni" gibi çeşitleri vardır (Creswell, 2014, s. 219-228). Açımlayıcı sıralı karma yöntem deseni iki aşamadan oluşmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Açımlayıcı sıralı karma yöntemde öncelikle olasılıklı örnekleme sonrasında amaçlı örnekleme yapılır (Creswell, 2014) nicel bulgulara ulaşılır (Baki ve Gökçek, 2012; Creswell, 2014). Olasılıklı örneklemden elde edilen nicel bulgular doğrultusunda amaçlı örneklem belirlenir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). "Buradaki temel fikir, nitel veri toplama aşamasının doğrudan nicel bulgular üzerine kurulmasıdır" (Creswell, 2014, s. 224). Daha sonra da nitel bulgulara ulaşılır (Creswell, 2014; Yıldırım ve Şimşek, 2016). Nicel bulgular raporlanıp sunulduktan sonra nitel bulgular raporlanıp sunulur (Creswell, 2014) fakat tartışma kısmında bulgular birbirleriyle ilişkili ve bütünleşik biçimde yorumlanmalı ve tartışılmalıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2016).

TtA'ların büyük çoğunluğunda karma yöntem yaklaşımı kullanılır (Alghamdi ve Li, 2013). Çünkü TtA'larda araştırmanın bütünleyici özelliğinden dolayı araştırmanın güvenirliğini maksimuma çıkarma adına karma araştırma desenleri kullanılır (Wang ve Hannafin, 2005). Bu araştırma veri analiz teknikleri ve verilerin yorumlanması bakımından değerlendirildiğinde karma yöntem desenlerinden açımlayıcı sıralı karma yöntem desenine göre desenlenmiştir. Çünkü öncelikle nicel aşama için örneklem belirlenip nicel bulgulara ulaşılacak, nicel bulgular ışığında nitel aşama için çalışma grubu belirlenip nitel bulgulara ulaşılacaktır. Bunun takibinde ise önce nicel bulgular sonra nitel bulgular sunulup, birlikte yorumlanıp tartışılacaktır.

3.2. Araştırmanın Aşamaları

TtA'ların aşamaları nicel araştırmalar kadar net olmasa da genel olarak tasarımcı tarafından tasarlanan tasarımın ilk sürümü geliştirilir ve uygulanır, uygulama sonunda yapılan değerlendirmeler ile gerekli düzeltmeler yapılır, tasarım sorunsuz ve verimli çalışana kadar bu böyle devam eder, araştırma raporunun yazılmasıyla süreç son bulur (Kuzu, Çankaya ve Mısırlı, 2011). Tasarım tabanlı bu araştırmanın aşamaları için ADDIE Modeli uygulanmıştır. Etkin öğretim tasarımları oluşturmayı amaçlayan bir yaklaşım olan bu model (Aldoobie, 2015) öğretim tasarım modellerinden en bilindik olanı (Özerbaş ve Kaya, 2017) ve en sık kullanılanıdır (Aldoobie, 2015).



Şekil 3.3. ADDIE Modeli (Peterson, 2003; Wegener, 2006).

Wegener (2006, s. 5) beş aşamada yapılacakları kısaca aşağıdaki gibi özetlemiştir:

- Analiz - Öğrenenler hakkında düşünmek
- Tasarım - Hedeflerini düşünmek
- Geliştirme – Dersi oluşturmak
- Uygulama - Ürünü teslim etmek
- Değerlendirme - Ürünün gerçekten işe yarayıp yaramadığına karar vermek

Bir aşamada yapılacaklar tamamlanmadan diğer aşamaya geçilmemelidir. Çünkü her bir aşamanın süreç sonundaki çıktısı bir sonraki aşamanın girdisini oluşturmaktadır (Özerbaş ve Kaya, 2017). Unutulmamalıdır ki bir aşamadaki aksaklık sonraki aşamaların tamamını etkileyecektir. Bu aşamalarda neler yapılması gerektiği aşağıda ayrıntılı açıklanmıştır.

Analiz Aşaması: ADDIE Modelinin ilk aşaması olan analiz aşaması (Peterson, 2003; Davis, 2013) diğer dört aşamanın temelini oluşturur (McGriff, 2000). Analiz aşamasında gerçekte var olan gerçek performans ile olması istenen, arzu edilen performans arasındaki aralığın olası nedenleri araştırılır ve sebepleriyle ortaya konulur (Branch, 2009). Bunu yaparken öğrencilerin ön bilgileri ile öğretim tasarımının uygulanması sonundaki bilgileri arasındaki fark belirlenir yani ihtiyaç analizi yapılır (Peterson, 2003). Bu aşamada TtA yapmayı gerektirecek problemli durum tüm özellikleriyle ortaya konulur (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016). Analiz aşamasında tasarımcının temel düşüncesi öğrenciler olmalı (Peterson, 2003) ve ilk olarak öğrencilere odaklanılmalıdır (Wegener, 2006). Burada dikkat edilmesi gereken nokta öğretim probleminin öğrencilerin karakteristikleriyle birlikte ele alınmasıdır (Davis, 2013). Öğrenciler dışında hedefler ve bağlamda odaklanılacak diğer konulardır (Özdemir ve Mert-Uyangör, 2011). Bu aşamada öğrencilerin ihtiyaçları belirlenmeli, buna yönelik olarak öğretim hedefleri belirlenmeli ve bir öğretim analizi geliştirilmelidir (Aldoobie, 2015).

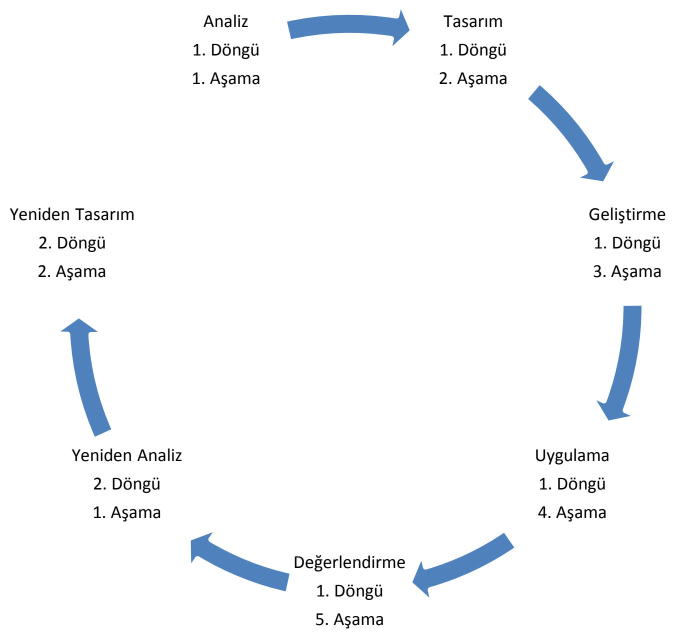
Tasarım Aşaması: ADDIE Modelinin ikinci aşaması olan tasarım aşaması (Peterson, 2003; Davis, 2013) araştırma ve planlama aşaması olup analiz aşamasındaki verilerden faydalanılır **(**Peterson, 2003). Tasarım aşamasında analiz aşamasında ortaya konan sorunu ortadan kaldırmaya yönelik öğretim programı, ders tasarımı, materyal veya model gibi bir ürün tasarlanmaya çalışılır (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016). Bu ürün tasarlanırken analiz aşamasındaki problemli durumun nasıl kolayca üstesinden gelinebileceği düşünülmelidir. Analiz aşamasının çıktıları bu aşamada girdi olarak kullanılır ve öğretim amaçları ile öğretim hedeflerine nasıl ulaşılacağı belirlenir (McGriff, 2000). Buna göre dersin bir formu oluşturulur, öğretim stratejileri ve değerlendirme araçları belirlenir (Aldoobie, 2015).

Geliştirme Aşaması: ADDIE Modelinin üçüncü aşaması olan geliştirme aşamasının (Peterson, 2003) amacı tasarım aşamasının biçimlendirici revizyonunu yapmaktır (Branch, 2009). Bir önceki aşamada hazırlanan öğretim tasarımı uzman görüşleri de alınarak artık uygulanabilir bir ürün haline getirilir (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016). Kalan aşamaların tamamlanması için gerekli olan her şey bu aşamada tamamlanır (Branch, 2009). Bu aşamada ürün haline gelen tasarım bir önceki aşama da prototip haldedir. Geliştirme aşaması ürünün uygulama öncesi son haline getirildiği aşamadır.

Uygulama Aşaması: ADDIE Modelinin dördüncü aşaması olan uygulama aşamasında (Peterson, 2003) bir önceki aşamada geliştirilen ürün (öğretim programı, ders tasarımı, materyal ya da model) gerçek bağlamında kullanılır veya uygulanır (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016). Bu aşamada tasarlanıp geliştirilen ürün ister sınıf temelli olsun ister laboratuvar tabanlı olsun isterse de bilgisayar tabanlı olsun işe koşulur (McGriff, 2000). Uygulama aşamasında ürün üzerinde gerekli görülen yerlerde yenilemeler veya düzeltmeler yapılabilir (Peterson, 2003). Diğer bir deyişle uygulama aşamasında araştırmacı gerekli gördüğü yerlerde tasarımın öğretim ortamında geliştirilmesi adına müdahalelerde de bulunabilir (Plomp, 2010). Yapılan bu değişiklikler araştırmacı tarafından detaylı bir şekilde kaydedilmelidir (Collins, Joseph ve Bielaczyc, 2004).

Değerlendirme Aşaması: ADDIE Modelinin beşinci ve son aşaması olan değerlendirme aşamasında (Peterson, 2003; Davis, 2013) hem ortaya konan ürünün değerlendirmesi yapılır hem de uygulama öncesi performans ile uygulama sonrası performans değerlendirilir (Branch, 2009). Modelin vazgeçilemez aşaması olan bu aşamada (Peterson, 2003) ürünün performansa etkisi, katkısı ile ürünün güçlü ve zayıf yönleri (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016) ve de hedeflere ulaşıp ulaşılmadığı değerlendirilir (Aldoobie, 2015). Bu aşamada öğretimin (biçimlendirici veya özetleyici olabilir) değerlendirilmesi yapılır (McGriff, 2000). En önemli nokta araştırmacı analiz aşamasında saptanan problemli durumun giderilip giderilemediğini, amaçlara ulaşılıp ulaşılmadığını değerlendirip tasarımın gelecekteki uygulamaları için son halini belirlemelidir (Peterson, 2003). Addie Modelinin her bir aşamasında yapılanlar araştırmanın bulgularını oluşturmakta ve bulgular kısmında sunulmaktadır (Bkz. Arı-Korkusuz, 2007; Hebebci, 2014; Uğur-Erdoğmuş, 2015; Kızılaslan, 2016; Yazıcı, 2017; Arkün ve Akkoyunlu, 2018).

ADDIE Modeli analiz-tasarım-geliştirme-uygulama-değerlendirme aşamalarının sıralamalı ve yinelemeli döngüsüdür (Molenda, 2015). Bu araştırmada bu döngü bir tam kez işletilmiştir. Araştırma kapsamında ihtiyaç analizinden sonra dersin tasarımı yapılmıştır. Bu tasarıma yönelik uzman görüşleri alınarak dersin geliştirme aşaması tamamlanmıştır. Bu aşamadan sonra dersin uygulaması 2017-2018 Eğitim Öğretim Yılı Bahar Döneminde M.Ü. A.E.F. Matematik Öğretmenliği programı 2. sınıfında öğrenim gören öğrencilerle yapılmıştır. Dersin uygulamasından sonra dersin amaçlarına ulaşıp ulaşmadığının değerlendirilmesi yapılmıştır. İkinci döngüye geçilerek tekrar bir analiz yapılmıştır. Bu aşama bu çalışma da yeniden analiz aşaması olarak adlandırılmıştır. Analiz aşaması sonrasında ders tekrar revize edilerek tasarlanmıştır. Bu aşama da yeniden tasarım aşaması olarak adlandırılmıştır. Ders tasarımına son hali verildikten sonra ikinci döngü bu aşamada yani yeniden tasarım aşamasının sonunda sona erdirilmiştir.



Şekil 3.4. Araştırmanın Aşamaları

3.3. Araştırmanın Örneklemi ve Çalışma Grubu

Araştırmacılar araştırmaları için en uygun örneklemi bulmalıdırlar. En uygun örneklemi bulmak için örnekleme tekniklerine başvurulur. Araştırmalarda örneklem stratejisine sahip olmak ve bu stratejinin mantığını açıklamak önemlidir (Mason, 2002).

Örnekleme teknikleri olasılıklı örnekleme teknikleri ve amaçlı örnekleme teknikleri olmak üzere ikiye ayrılır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Olasılıklı örneklemede evrendeki her bir elemanın örneklemde olma şansı vardır (Özen ve Gül, 2007). Olasılıklı örnekleme teknikleri seçkisiz örnekleme, tabakalı örnekleme, küme örnekleme, sistematik örneklemedir (Özen ve Gül, 2007; Yıldırım ve Şimşek, 2016). Amaçlı örneklemede örneklem (kişi, grup, kurum) seçilirken belli amaçlar gözetilir (Baki ve Gökçek, 2012). Araştırmanın amacı göz önünde bulundurularak bilgi yönünden zengin durumlar seçilir (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016). Durumlar farklılaştıkça amaçlı örnekleme teknikleri de farklılaşır. Amaçlı örnekleme teknikleri 1) aykırı veya anormal durum örneklemesi, 2) yoğunluk örnekleme, 3) maksimum çeşitlilik (heterojenite) örneklemesi, 4) homojen örnekleme, 5) tipik durum örneklemesi, 6) kritik durum örneklemesi, 7) kartopu veya zincir örnekleme, 8) ölçüt örnekleme, 9) kuram (teori) tabanlı örnekleme, işlemsel yapı örnekleme ve kuramsal (teorik) örnekleme, 10) doğrulayıcı ve aykırı durumlar örneklemesi, 11) tabakalı amaçlı örnekleme 12) fırsatçı veya ortaya çıkan örnekleme, 13) amaçlı rastgele örnekleme, 14) siyasi açıdan önemli durumların örneklemesi, 15) kolay ulaşılabilir (uygun) örnekleme şeklinde sayılabilir (Patton, 2014, s. 230-242).

Bu tekniklerden biri olan uygun örnekleme tekniğinde örnekleme kolay ulaşılır ayrıca zaman, işgücü ve maliyet tasarrufu göz önünde bulundurulur (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016). Bu araştırmanın nicel aşaması için uygun örnekleme tekniği tercih edilmiştir. Bunun nedeni tez danışmanın görev yaptığı üniversitedeki öğretmen adaylarına erişim kolaylığıdır. Bu araştırmanın örneklemini 2017-2018 eğitim öğretim yılı bahar döneminde M.Ü. A.E.F. Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümü 2. sınıfında öğrenim gören 22 öğretmen adayı oluşturmaktadır. 2. sınıf öğrencilerinin seçilmesinin sebebi öğrencilerin bu dersi aldıktan sonra öğrenim görecekleri 3. ve 4. sınıfta alan derslerinde görecekleri ispatları daha iyi anlayabilmeleri ve ispata farklı gözle bakabilmeleridir. 1. sınıf öğrencilerin seçilmemesinin sebebi de bu dersin amacına ulaşıp ulaşmadığını belirleyebilmektir. Bunun için 2. sınıf öğrencileri 1. sınıfın alan derslerindeki ispat bilgileriyle bu dersi aldıktan sonraki bilgilerini karşılaştıracaklardır.

Bu tekniklerden bir diğeri olan teorik örnekleme tekniğinde teori veya argüman geliştirmeye ya da test etmeye yardımcı olacak belli özelliklere ya da kriterlere sahip teorik olarak anlamlı bir örneklem oluşturulmaya çalışılır (Mason, 2002). 1967 yılında Sosyolog Barney G. Glaser ve Sosyolog Anselm L. Strauss tarafından geliştirilen teorik örnekleme tekniğinde (Coyne, 1997) araştırmanın sorularına, araştırmanın teorisine veya araştırmada geliştirilen argümana uygun gruplar çalışma grubu olarak seçilir (Mason, 2002). Yani teorik örnekleme de araştırmacılar teorilerini üreten verilerinin nereden toplanacağına karar verirler (Glaser ve Strauss, 1967). Belirsizliklerle dolu olan nitel araştırmalarda örneklem büyüklüğü de belirsizdir çünkü örneklemin büyüklüğünün nasıl belirleneceğine dair bir formül veya bir kural yoktur (Patton, 2014). Bu araştırmanın nitel aşamasında teorimiz çerçevesinde daha zengin veri elde etmek ve değişkenliği daha iyi görebilmek için amaçlı örnekleme tekniklerinden teorik örnekleme tekniği tercih edilmiştir. Dersi seçmeli olarak alan 22 öğretmen adayıyla (14 kız, 8 erkek) araştırmanın nicel aşamasının örneklemi oluşturulup araştırmanın nitel aşamasının çalışma grubu için öğretmen adaylarının anketlere verdikleri cevaplardan nitel araştırmaya katılmaya gönüllü ve hevesli dört öğretmen adayı (3 kız, 1 erkek) seçilip derinlemesine çalışılmıştır. Birinci katılımcı K1, ikinci katılımcı K2, üçüncü katılımcı K3 ve dördüncü katılımcı K4 kodlarıyla anılacaktır. Dersin uygulamasından önce teorik çerçevemiz içerisinde öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini ölçmek için veri toplanmıştır. Alan ve pedagojik alan bilgisini ölçmek için anketler kullanılmıştır. Toplanan bu veriler analiz edilmiştir. Analiz sonucunda en fazla analitik şemayı kullanan ve pedagojik alan bilgisi iyi seviyede olan bir öğrenci (K1), en fazla deneysel ispat şemasını kullanan ve pedagojik alan bilgisi orta seviyede olan bir öğrenci (K2), en fazla dışsal ispat şemasını kullanan ve pedagojik alan bilgisi zayıf olan bir öğrenci (K3) ve hem alan hem de pedagojik alan bilgi anketinde en fazla yanıtsız soru bırakan bir öğrenci (K4) çalışma grubu için seçilmiştir.

Tablo 3.1. Mülakat Öğrencileri Seçim Kriterleri

Kod	İspat Şeması (Alan Bilgisi)	Pedagojik Alan Bilgisi
K1	Analitik	İyi
K2	Deneysel	Orta
K3	Dışsal	Zayıf
K4	Yanıtsız	Yanıtsız

Tablo 3.1'den de görüldüğü gibi mülakat için seçilen öğretmen adayı sayısı dört olarak belirlenmiştir. Bunun sebebi teorimiz çerçevesinde daha geniş, daha uç ve daha zengin veri elde etmek, tasarlanan dersin bu öğrenciler üzerindeki etkisi ile öğrencilerin ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerindeki gelişimi daha derinlemesine görebilmektir.

3.4. Veri Toplama Araçları

Karma yöntem araştırmalarında veri toplama araçları, veri toplama araçlarının geliştirilme süreçleri, geçerlik ve güvenirlik çalışmaları hakkında bilgi verilmelidir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bu araştırma kapsamında dokümanlar, formlar, kamera kayıtları, anketler ve yarı yapılandırılmış mülakatlar veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. Araştırmamızın bu kısmında veri toplama araçlarının içeriği, geçerlik ve güvenirlik çalışmaları, kaçar kez ve hangi aşamalarda kullanıldığı gibi bilgilere yer verilmiştir. Katılımcılara uygulanan veri toplama araçları için gerekli izinler alınmış olup (Ek-1), tüm katılımcılara "Bilgilendirilmiş Rıza Formu" (Ek-2) ayrıca mülakat yapılan öğretmen adaylarına da "Yarı Yapılandırılmış Mülakat İzin Formu" (Ek-3) imzalatılmıştır (Aydınlatılmış onam formu, t.y.; Bilgilendirilmiş onam formu, t.y.; Bilgilendirilmiş gönüllü olur formu, t.y.). Çalışmanın geçerliği adına tüm veriler nesnel biçimde toplanmış ve tarafsız bir biçimde analiz edilmiştir.

3.4.1. Dokümanlar

Dokümanlar sayesinde araştırmacılar önemli bilgilere kısa zaman içinde ulaşabilirler. Nitel araştırmalarda araştırmacılar dokümanlar sayesinde dünya hakkında birçok bilgiye ulaşabilirler (Travers, 2001). Sosyal bilimler alanındaki en iyi veri kaynaklarından birisi olan dokümanların bu etkinliğine rağmen onların sosyal bilimlerdeki rollerine nadiren vurgu yapılmaktadır (Prior, 2008).

Bu araştırmada ders tasarımı için ispata ve ispatlamaya yönelik matematik ve matematik eğitimi literatürüne dayalı dokümanlar veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. Araştırmamızda kullandığımız başlıca dokümanlar ulusal/uluslararası lisansüstü tezler, kitaplar, makaleler, bildiriler, web siteleri, raporlar ve öğretim programlarıdır.

3.4.2. İspat Alan Bilgi Anketi (İSABA)

Araştırmacıların en sık başvurduğu veri toplama araçlarından biri olan anket ile katılımcıların "ne düşündüğü, ne hissettiği, ne beklediği, tutumları, algıları, görüşleri, sahip oldukları şeyler ve kişilik özelliklerine ilişkin" bilgilere ulaşılmaya çalışılır (Altunışık, 2008, s. 3). Bu araştırmada öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerini tespit etmek ve tasarlanan dersin öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerine etkisini incelemek amacıyla İspat Alan Bilgi Anketi (İSABA) hazırlanmıştır. İSABA'nin geçerlik ve güvenirlik çalışmaları yapılmadan önceki hali Ek-4'de sunulmuştur. Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgileri farklı ispat yöntemlerini bilip uygulayama bilgileri ve bu ispatlamaları yaparken sahip oldukları ana ispat şemaları (Sowder ve Harel, 1998) ile tespit edilmek istenmiştir.

Veri toplama aracı olarak hazırlanan İSABA genel matematik konularıyla ilişkili yedi sorudan oluşmaktadır. Bu yedi sorudan altısı doğru önerme (teorem) olup doğruluklarının ispatlanması, biri de yanlış önerme olup yanlışlığının ispatlanması yani doğruluğunun çürütülmesi istenmiştir. İSABA öğretmen adaylarının seviyelerine uygun yedi adet genel matematik sorusundan oluşmaktadır. Bu sorular hazırlanırken literatür taramasında bahsedilen yedi ispat yöntemine uygun birer soru hazırlanmıştır. Ayrıca sorular hazırlanırken öğretmen adaylarının farklı ispat şemalarını kullanabileceği sorular olmasına dikkat edilmiştir. Tüm yönleriyle bahsetmek gerekirse sorular hazırlanırken öğretmen adaylarının seviyelerine uygun olmasına, zorluk derecelerinin aynı olmamasına, ispatlamaya uygun olmasına, farklı ispat yöntemleri ile ispatlanan sorular olmasına, ispat şemalarını farklılaştırabilecek sorular olmasına ve en önemlisi tasarlanan ders ile birlikte öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerindeki gelişimlerin gözlemlenebileceği sorular olmasına özen gösterilmiştir. Geçerlik ve güvenirlik çalışmaları yapılmadan önceki İSABA'ndeki sorular aşağıdaki gibidir.

1. **Soru:** $\forall m \geq 1\ için\ \frac{d}{dx}(x^m) = m \cdot x^{m-1}$ olduğunu ispatlayınız (Swanson, 2017).
2. **Soru:** $\forall X$ matrisi için XX^T matrisi simetrik matristir. İspatlayınız (Garnier ve Taylor, 1996).
3. **Soru:** $\forall x \in R_{>0}$ için $x + \frac{1}{x} > 1$ olduğunu ispatlayınız (Cunningham, 2012).
4. **Soru:** Boştan farklı K, L ve M kümeleri için $g: K \to L$ ve $h: L \to M$ iki fonksiyon olsun. hog fonksiyonu birebir fonksiyon ise g fonksiyonu da birebir fonksiyondur. İspatlayınız (Chartrand, Polimeni ve Zhang, 2013).
5. **Soru:** $\forall m \in Z_{\geq 0}$ için $m^3 - m$ ifadesi 6 ile tam bölünür. İspatlayınız (Plumpton, Perry ve Shipton, 1984).
6. **Soru**: $\forall a \in R$ için $1 + tan^2 a = sec^2 a$ önermesinin doğru olmadığını ispatlayınız (Sundstrom, 2014).
7. **Soru:** Sonsuz sayıda asal sayı vardır (Öklid, M.Ö. 330-275). İspatlayınız.

3.4.2.1. Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları Sonucunda İSABA

Bu ölçme aracının geçerliği ve güvenirliği adına hazırlanan sorular literatürden derlenmiş olup genel matematik derslerinde de çoğu kez ispatlanan sorulardır. İspatlama için seçilen konular da ikinci sınıfta öğrenim gören öğretmen adaylarının bilmesi gereken konulardır. Bu anket için önce araştırmacı tarafından 20 soruluk bir havuz oluşturulmuştur. Daha sonra bu 20 soru araştırmacı ve tez danışmanı tarafından yedi farklı ispat yöntemine uygun, öğretmen adaylarının ispat şemalarını farklılaştıracak şekilde yukarıdaki haliyle yedi adet soruya indirgenmiştir. Daha sonra ölçeğin geçerlik ve güvenirlik çalışmaları tamamlanıp ankete son hali verilmiştir.

Ölçme araçlarında muhakkak bulunması gereken özellik geçerliktir (Yeşil, 2014). Başarı testlerinde kapsam geçerliğinin daha ön planda olduğu söylenebilir (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016). Kapsam geçerliği için ölçekteki veya anketteki maddelerin ölçülecek konuyu temsil etmede hem yeterli hem de dengeli olması ve tüm maddelerin ayrı ayrı ölçülmek istenen hedef davranışı gerçekten ölçmesi gerekmektedir (Yeşil, 2014). Anketin geçerliği için hazırlanan anketteki soruların öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerini ölçmeye yönelik olup olmadığı, yedi farklı ispat yöntemine uygun olup olmadığı, öğretmen adaylarının ispat şemalarını farklılaştırıp farklılaştırmadığı, ayırıcılıklarının olup olmadığı, yani hedef davranışları ölçmeye yönelik olup olmadığı ve soruların ifade ediliş biçimlerinin uygun olup olmadığı konusunda uzman görüşü almak için "İspat Alan Bilgi Anketi (İSABA)-Uzman Görüşü Formu" hazırlanmış ve Ek-5'de sunulmuştur. Çünkü kapsam geçerliğini sağlamanın yollarından biri uzman görüşü almaktır. Bu uzman görüşü formu ile matematik eğitimi anabilim dalında görevli biri Prof. Dr., ikisi Doç. Dr, ikisi Dr Öğr. Üyesi ve biri Öğr. Gör. Dr. ünvanlı altı akademisyen ve matematik anabilim dalında görevli Doç. Dr. ünvanlı bir akademisyen ile matematik eğitimi anabilim dalında doktora öğrenimine devam eden üç doktora öğrencisi olmak üzere toplam 10 uzmandan görüş alınmıştır. Uzman görüşlerini almak için 10 uzmana tezin konusu, amacı, içeriği ve veri toplama araçlarıyla ilgili bir saatlik seminer verilmiş ve seminer sonunda veri toplama araçlarıyla ilgili uzmanların görüşü tartışma ortamında alınarak kayda geçirilmiştir. Tüm uzman görüş formları tek bir formda birleştirilerek hazırlanan anketin geçerliği tüm sorular için tartışılmıştır. Uzman görüşleri sonrasında anketin amacı ve zorluk derecesi dikkate alınarak anketteki birinci ve yedinci soru silinmiş yerine önerilen farklı iki soru yazılmıştır.

İSABA'nın güvenirlik çalışmaları uygulamanın yapıldığı üniversiteden farklı bir üniversitenin matematik öğretmenliği bölümü ikinci sınıfında öğrenim gören 10 öğrenciyle pilot çalışmaları yapılarak tamamlanmıştır. Pilot çalışması aşağıdaki amaçlarla yapılmıştır.

- Öğretmen adaylarının seviyelerine uygun olup olmadığının belirlenmesi,
- Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerini ölçüp ölçmediğinin belirlenmesi,
- Soruların ispatlamaya uygun olup olmadığının belirlenmesi,
- Öğretmen adaylarının sorularda farklı ispat yöntemlerini kullanıp kullanamadığının belirlenmesi,
- Öğretmen adaylarının ispat şemalarını farklılaştırabilecek sorular olup olmadığının saptanması,
- Sorularda kullanılan matematiksel ve sembolik dilin öğretmen adayları için uygun olup olmadığının saptanması,
- Soruların anlaşılır, açık ve net olup olmadığının belirlenmesi,
- Süreç hakkında bilgi sahibi olunması,
- Değerlendirme ölçeklerinin hazırlanması,
- Anketin güvenirlik çalışmalarının yapılması.

10 öğretmen adayıyla uygulanan anketten elde edilen veriler her soru için araştırmacı ve tez danışmanı tarafından incelenip ayrı ayrı kodlamaları yapılmıştır.

Araştırmacı ve tez danışmanının yaptığı kodlamalar Miles ve Huberman'ın (1994, s. 64)

$$Güvenirlik = \frac{Görüş\ Birliği}{Görüş\ Birliği + Görüş\ Ayrılığı}$$

formülü ile hesaplanmış, araştırmacı ve tez danışmanı arasındaki uyum ≈ %92 bulunmuştur. Böylece anketin güvenirliği elde edilmiştir. Geçerlik ve güvenirlik çalışmaları sonrasında ankete son hali verilmiş ve Ek-6'da sunulmuştur. Anketin son halini oluşturan sorular aşağıdaki gibidir.

1. **Soru:** f_m fibonacci dizisinin bir elemanı olmak üzere $m \geq 2$ ise $(f_m)^2 - f_{m+1} \cdot f_{m-1} = (-1)^{m+1}$ olduğunu ispatlayınız (Bloch, 2011).
2. **Soru:** $\forall X$ matrisi için XX^T matrisi simetrik matristir. İspatlayınız (Garnier ve Taylor, 1996).
3. **Soru:** $\forall x \in R_{>0}$ için $x + \frac{1}{x} > 1$ olduğunu ispatlayınız (Cunningham, 2012).
4. **Soru:** Boştan farklı K, L ve M kümeleri için $g: K \to L$ ve $h: L \to M$ iki fonksiyon olsun. hog fonksiyonu birebir fonksiyon ise g fonksiyonu da birebir fonksiyondur. İspatlayınız (Chartrand, Polimeni ve Zhang, 2013).
5. **Soru:** $\forall m \in Z_{\geq 0}$ için $m^3 - m$ ifadesi 6 ile tam bölünür. İspatlayınız (Plumpton, Perry ve Shipton, 1984).
6. **Soru:** $\forall a \in R$ için $1 + tan^2 a = sec^2 a$ önermesinin doğru olmadığını ispatlayınız (Sundstrom, 2014).
7. **Soru:** $\sqrt{5}$ sayısı rasyonel sayı değildir. İspatlayınız (Ferland, 2009).

Anketin son halinde yer alan soruların dâhil olduğu genel matematik konuları ile bu sorular için en uygun ispat yöntemleri Tablo 3.2'de verilmiştir. Bilindiği gibi bir ispatlama sorusu için bazen sadece bir ispat yöntemi uygun iken bazen de birden fazla ispat yöntemi uygun olabilir. Ankette yer alan sorular içinde de birden fazla ispat yöntemiyle ispatlanabilen sorular olmasına rağmen Tablo 3.2'de en uygun yöntemler verilmiştir. Ayrıca İSABA cevap anahtarı Ek-7'de sunulmuştur.

Tablo 3.2. İspat Alan Bilgi Anketindeki Soru Numaraları, Soruların Dâhil Olduğu Genel Matematik Konuları ve Sorular İçin En Uygun İspat Yöntemleri

Anketteki Soru Numarası	Konu	En Uygun İspat Yöntemi	Kaynak
1. Soru	Fibonacci Dizisi	Genişletilmiş güçlü tümevarım yöntemi	(Bloch, 2011).
2. Soru	Matrisler	Doğrudan ispat yöntemi	Garnier ve Taylor (1996)
3. Soru	Eşitsizlikler	Durum yoluyla ispat yöntemi	Cunningham (2012)
4. Soru	Fonksiyonlar	Olmayana ergi yöntemi	Chartrand, Polimeni ve Zhang (2013)
5. Soru	Bölünebilme	Tüketerek ispat yöntemi	Plumpton, Perry ve Shipton (1984)
6. Soru	Trigonometri	Aksine örnek (karşıt örnek) verme yöntemi	Sundstrom (2014)
7. Soru	Sayılar	Çelişki ile ispat yöntemi	(Ferland, 2009).

İSABA tüm öğretmen adaylarına dersin uygulama aşamasının ikinci ve son haftasında birer kez olmak üzere toplamda iki kez uygulanmıştır. Bu anketin uygulama amacı

- Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerine yönelik nicel verilere ulaşmak,
- Araştırmanın çalışma grubunu belirlemek,
- İSABA üzerine mülakat sorularını oluşturmaktır.

Bu anket dersin uygulama aşamasının ikinci ve son haftasında olmak üzere iki kez 22 öğretmen adayına uygulanmıştır. Anketin iki kez uygulanmasının amacı da ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerine etkisini incelemektir.

3.4.3. İspat Alan Bilgi Anketi (İSABA) Üzerine Mülakatlar

Çoğunlukla yüz yüze gerçekleştirilen mülakatlar belirli bir amaç doğrultusunda karşılıklı konuşma aracılığıyla sözel bilgi edinme tekniğidir (Şahin, 2014b). Mülakatçı ile katılımcıdan oluşmak üzere (Marvasti, 2004) en az 2 kişiyle sürdürülen (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016) mülakat "sözlü iletişim yoluyla veri toplama (soruşturma) tekniğidir" (Karasar, 2014, s. 165). Her şeyi gözlemleyemediğimizden dolayı gözlemin yetersiz olduğu durumlarda yapılması gerekli olan (Patton, 2014) ve nitel araştırmalarda çok sık kullanılan mülakat tekniği konuşma ve dinlemeden oluşan kolay bir teknik olarak düşünülse de süreç günlük iletişim gibi gerçekleşmez (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Mülakatlarda mülakatı yapan kişiye mülakatçı, görüşülen kişiye ise katılımcı denir. Mülakatlarda mülakatçıların amacı katılımcıların bir konu hakkındaki bilgilerini, düşüncelerini ve görüşlerini belirlemektir (Creswell, 2014). Daha detaylı olarak mülakatlarda sorulan açık uçlu sorularla insanların deneyimleri, algıları, inançları, fikirleri, duyguları, bilgi ve becerileri ile ilgili ayrıntılı cevaplar alınmaya çalışılır (Patton, 2014). Ancak bir mülakattan edinilen bilginin çokluğu ve kalitesi daha çok mülakatçıya bağlıdır (Patton, 2014). Kaliteli veri elde edebilmek için mülakatçı mülakat öncesinde sağlam bir ön çalışma ve mülakat sırasında sağlıklı bir gözlem yapmalıdır (Al, 2014).

Bu çalışma kapsamında kullanılan yarı yapılandırılmış mülakat tekniği hem yapılandırılmış formda hem de yapılandırılmamış formda sorular içerirler (Gray, Williamson, Karp ve Dalphin, 2007). Yarı yapılandırılmış mülakatlar bazı açık uçlu sorulara sahip olsalar da derinlemesine incelenmek istenen konularda spontane sorular sorulabilir (Şahin, 2014a, 188). Önceden belirlenmiş bazı sorular çıkarılabilir bazen de yenileri sorulabilir (Al, 2014). Yarı yapılandırılmış mülakatların sınırları yapılandırılmış ve yapılandırılmamış mülakatlar arasındadır (Karasar, 2014). Bu özelliğinden dolayı yarı yapılandırılmış mülakatlar; yapılandırılmış mülakatlar ile yapılandırılmamış mülakatların hem avantajlarını hem de dezavantajlarını içermektedirler (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016).

İspat Alan Bilgi Anketi (İSABA) üzerine mülakatlar katılımcı sayılarına göre bireysel mülakat, uygulanış şekline ya da uygulanan kurallara göre ise yarı yapılandırılmış mülakatlar şeklinde uygulanmıştır. Bireysel mülakat uygulanmasının sebebi öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerini bireysel olarak değerlendirmek ve tasarlanan dersin öğretmen adaylarının gelişimlerine etkisini bireysel olarak incelemektir. Yarı yapılandırılmış mülakat uygulanmasının sebebi de yapılandırılmış ve yapılandırılmamış mülakatların avantajlarından faydalanıp, her birinin eksik kalan yönünü diğer teknikle kapatmaktır. Ayrıca öğretmen adayları için açık uçlu sorular hazırlanıp mülakatın sınırları belli bir oranda çizilse de öğretmen adaylarının verecekleri cevaplar ile gerek duyulan durumlarda bu sınırların dışına çıkılmak ve daha derinlemesine bilgi edinmek istenilmektedir.

İSABA üzerine yarı yapılandırılmış mülakatlar için Ek-8'de sunulan "İspat Alan Bilgi Anketi Üzerine Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formu" hazırlanmıştır. Sorular hazırlanırken öğretmen adaylarının İSABA'deki sorulara verdiği cevaplar üzerine derinlemesine bilgi edinmek ve ispatla ilgili alan bilgilerini ayrıntılı saptamak amaçlanmıştır.

Mülakatlar için yarı yapılandırılmış mülakat protokolü hazırlanmış ve öğretmen adaylarına yarı yapılandırılmış mülakat izin formu imzalatılmıştır. Mülakatlar katılımcılardan sözlü ve yazılı izin alınarak ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir.

Bu mülakat dersin uygulama aşamasının üçüncü ve son haftasında olmak üzere iki kez dörder öğretmen adayına uygulanmıştır. Bu mülakatların iki kez yapılmasının amacı ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerine etkisini derinlemesine incelemektir.

3.4.3.1. Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları Sonucunda İSABA Üzerine Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formu

Formdaki soruların geçerlik çalışmaları için öncelikle Ek-9'da sunulan "İspat Alan Bilgi Anketi Üzerine Yarı Yapılandırılmış Mülakat-Uzman Görüşü Formu" hazırlanmıştır. Bu uzman görüşü formu ile matematik eğitimi anabilim dalında görevli biri Prof. Dr., ikisi Doç. Dr, ikisi Dr Öğr. Üyesi ve biri Öğr. Gör. Dr. ünvanlı altı akademisyen ve matematik anabilim dalında görevli Doç. Dr. ünvanlı bir akademisyen ile matematik eğitimi anabilim dalında doktora öğrenimine devam eden üç doktora öğrencisi olmak üzere toplam 10 uzmandan görüş alınmıştır. Uzman görüşlerini almak için 10 uzmana tezin konusu, amacı, içeriği ve veri toplama araçlarıyla ilgili bir saatlik seminer verilmiş ve seminer sonunda veri toplama araçlarıyla ilgili uzmanların görüşü tartışma ortamında alınarak kayda geçirilmiştir.

Formun güvenirlik çalışmaları uygulamanın yapıldığı üniversiteden farklı bir üniversitenin matematik öğretmenliği bölümü ikinci sınıfında öğrenim gören üç öğrenciyle pilot çalışmaları yapılarak tamamlanmıştır. Pilot çalışmaları formun güvenirlik çalışmasının yapılması, değerlendirme ölçeğinin hazırlanması, süreç hakkında bilgi sahibi olunması, soruların anlaşılır, açık ve net olup olmadığının belirlenmesi için yapılmıştır. Üç öğretmen adayıyla yapılan mülakatlardan elde edilen veriler her soru için araştırmacı ve tez danışmanı tarafından incelenip ayrı ayrı kodlamaları yapılmıştır.

Araştırmacı ve tez danışmanının yaptığı kodlamalar Miles ve Huberman'ın (1994, s. 64) formülü ile hesaplanmış, araştırmacı ve tez danışmanı arasındaki uyum ≈ %91 bulunmuştur. Böylece anketin güvenirliği elde edilmiştir.

Alınan uzman görüşleri ve yapılan pilot çalışması sonucunda İspat Alan Bilgi Anketi Üzerine Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formunun amacına uygun hazırlandığı ayrıca mülakatlar yarı yapılandırılmış olduğundan gerekli görülen yerlerde öğrencilerin görüşlerini daha iyi ifade edebilmeleri için mülakat esnasında ilave sorular sorulabileceği de düşünülerek herhangi bir değişiklik yapılmasına gerek olmadığına karar verilmiştir.

3.4.4. İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi (İSPABA)

Bu araştırmada öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini tespit etmek ve tasarlanan dersin öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerine etkisini incelemek amacıyla İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi (İSPABA) hazırlanmıştır. İSPABA'nin geçerlik ve güvenirlik çalışmaları yapılmadan önceki hali Ek-10'da sunulmuştur. Öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgileri ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgileri, ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgileri, ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgileri ve öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgileriyle saptanmak istenmiştir.

İSPABA iki kısımdan oluşmaktadır. İSPABA 1. KISIM anketi ile öğretmen adaylarının ispatlama yönelik öğrenci güçlüklerini tespit edip edemedikleri, öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklayıp açıklayamadıkları ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleyip belirleyemedikleri saptanmak istenmiştir. Literatür taramasında ispatlamayla ilgili öğrenci güçlükleri beş başlığa indirgenmişti. İSPABA'de her alt başlıkla ilgili birer soru olmak üzere dördü literatürden biri senaryo olmak üzere beş soru hazırlanmıştır. Ayrıca sorular seçilirken Cornu'nun (1991) belirttiği üç engelin her birinden en az bir soru olmasına dikkat edilmiştir. Soru seçiminde dikkat edilen diğer bir husus da farklı öğretim stratejileri ile farklı öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelinebilecek sorular olmasıdır. Öğretmen adaylarına beş adet ispat sorusu öğrencilerin yaptıkları ispatlarıyla birlikte verilmiş ve öğretmen adaylarından her bir soru için sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğü tespit etmeleri, bu güçlüğün nedenini açıklamaları ve bu güçlüğün üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirlemeleri istenmiştir.

Tablo 3.3. İSPABA'ndeki Öğrenci Güçlükleri, Nedenleri ve Öğretim Stratejileri

Anketteki Soru Numarası	Öğrenci Güçlüğü (a)	Nedenleri (b)	Öğretim Stratejisi (c)	Kaynak
1. Soru	İspatın doğasını kavrama güçlükleri	Psikolojik ve genetik engel	Pekiştirme (Yineleme) stratejisi	(Aylar, 2014a, s. 90)
2. Soru	Matematiksel dil kullanımındaki güçlükler	Psikolojik ve genetik engel	Cebirsel gösterim	(Zaimoğlu, 2012, s. 40)
3. Soru	Problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlükler	Psikolojik ve genetik engel	Akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümden gelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme	(Güler, Özdemir ve Dikici, 2012, s. 223)
4. Soru	İspata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlükler	Didaktik engel	DGY veya grafik çizimi	Senaryo
5. Soru	İspat yöntemleri ile ilgili güçlükler	Epistemolojik engel	Anlamlandırma stratejisi	Güler ve Ekmekci (2016, s. 73, 79-81)

İSPABA 2. KISIM anketi ile öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını (Sowder ve Harel, 1998) tespit edip edemediklerini belirlemek amaçlanmıştır. Bunun için Sowder ve Harel'in (1998) sınıflamasındaki yedi alt şemaya ait birer senaryo hazırlanmıştır. Bu yedi senaryo Ek-10'da görüldüğü gibi farklı matematik konularından seçilmiştir. Uygulamadan önce öğretmen adaylarından senaryolardaki öğrencilerin önermelerin doğruluğunu ya da yanlışlığını ispatlarken kullandıkları argümanları (gerekçelendirme biçimlerini) tespit etmeleri istenmiştir. Buna ilaveten uygulamadan sonra öğretmen adaylarından senaryolardaki öğrencilerin sahip oldukları ana ve alt ispat şemalarını Sowder ve Harel'in (1998) taksonomisine göre belirlemeleri istenmiştir.

Tablo 3.4. Yedi Senaryodaki Öğrencilerin Sahip Oldukları Ana ve Alt İspat Şemaları

Anketteki Soru Numarası	İspat Şeması	Alt İspat Şeması
1. Senaryo	Deneysel ispat şeması	Örnek-temelli ispat şeması
2. Senaryo	Analitik ispat şeması	Aksiyomatik ispat şeması
3. Senaryo	Dışsal ispat şeması	Sembolik ispat şeması
4. Senaryo	Dışsal ispat şeması	Otoriter ispat şeması
5. Senaryo	Deneysel ispat şeması	Algısal ispat şeması
6. Senaryo	Dışsal ispat şeması	Ritüel ispat şeması
7. Senaryo	Analitik ispat şeması	Dönüşümcü ispat şeması

3.4.4.1. Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları Sonucunda İSPABA

Anketin geçerliği için hazırlanan anketteki soruların öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini ölçmeye yönelik olup olmadığı, ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerine ve bu güçlüklerin nedenlerine uygun olup olmadığı, ispatlamaya yönelik öğretim stratejilerine uygun olup olmadığı, hazırlanmış senaryoların tüm ana ve alt ispat şemalarını içerip içermediği, ayırıcılıklarının olup olmadığı, yani hedef davranışları ölçmeye yönelik olup olmadığı ve soruların ifade ediliş biçimlerinin uygun olup olmadığı konusunda uzman görüşü almak için "İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi (İSPABA)-Uzman Görüşü Formu" hazırlanmış ve Ek-11'de sunulmuştur. Bu uzman görüşü formu ile matematik eğitimi anabilim dalında görevli biri Prof. Dr., ikisi Doç. Dr, ikisi Dr Öğr. Üyesi ve biri Öğr. Gör. Dr. ünvanlı altı akademisyen ve matematik bölümünde görevli Doç. Dr. ünvanlı bir akademisyen ile matematik eğitimi anabilim dalında doktora öğrenimine devam eden üç doktora öğrencisi olmak üzere toplam 10 uzmandan görüş alınmıştır. Uzman görüşlerini almak için 10 uzmana tezin konusu, amacı, içeriği ve veri toplama araçlarıyla ilgili bir saatlik seminer verilmiş ve seminer sonunda veri toplama araçlarıyla ilgili uzmanların görüşü tartışma ortamında alınarak kayda geçirilmiştir. Tüm uzman görüş formları tek bir formda birleştirilerek hazırlanan anketin geçerliği tüm sorular için tartışılmıştır. Uzman görüşleri sonrasında anketin birinci kısmının aynen kalmasına karar verilmiştir. Ancak anketin ikinci kısmında yedi senaryo olduğundan bunların Sowder ve Harel'in (1998) sınıflamasındaki yedi alt şemasıyla birebir eşleme görevi gibi olacağından ikinci kısmın değiştirilmesi önerilmiştir. Bu eşlemenin veri toplama aracının dolayısıyla araştırmanın geçerliğini düşüreceği belirtilip anketin bu kısmının tamamen değiştirilmesi uygun görülmüştür. Önerilen başka bir husus da yedi öğrenciden fazla öğrenci ve bir öğretmenin diyalogta olduğu tek bir senaryo oluşturulmasıydı. Bu öneriler dikkate alınarak bir öğretmen ve 10 öğrenci arasında geçen bir sınıf diyaloğu senaryosu hazırlanmıştır. Senaryo bir ortaöğretim matematik öğretmeni ve 10 adet dokuzuncu sınıf öğrencisi (on beş yaş) arasında geçen varsayımsal bir tartışmadan oluşmaktadır. Uygulamadan önce öğretmen adaylarından senaryodaki öğrencilerin önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını ispatlarken kullandıkları argümanları (gerekçelendirme biçimlerini) tespit etmeleri istenmiştir. Uygulamadan sonra ise bu göreve ilave olarak öğretmen adaylarından bu gerekçelendirme biçimlerine karşılık gelen Sowder ve Harel'in (1998) taksonomisindeki terminolojik isimlerini de yazmaları istenmiştir. Tartışmanın konusu 9. sınıf müfredatında tipik bir konu olan küme teorisidir ve sınıf bir önermenin doğruluğunu tartışmaktadır. Küme teorisinin seçilmesinin başka bir sebebi de bu konunun matematikte birçok konuya temel teşkil etmesi ve matematiksel dil kullanımında önemli bir yere sahip olmasıdır. Geçerlilikle ilgili kaygılar için öğrenci sayısı katılımcıların çalışmalarını ispat şemalarıyla birebir eşleştirmelerini önlemek için yediden (alt ispat şema sayısıdır) fazla olan 10 kişi olarak belirlenmiştir. Öğretmen aşağıdaki önermeyi sunar ve öğrencilere bu önermenin doğru ya da yanlış olup olmadığını sorar ve onların cevaplarını yönlendirir: "X, Y ve Z birer küme olmak üzere $X \subset Y$ ve $Y \subset Z$ ise $X \subset Z$"

Tablo 3.5. Sınıf Senaryosundaki Öğrencilere Ait Ana ve Alt Şemalar

Senaryodaki Öğrenci Kodu	Ana İspat Şemalarının Tipi	Alt İspat Şemalarının Tipi
Ö1	Dışsal ispat şeması	Otoriter
Ö2	Dışsal ispat şeması	Otoriter
Ö3	Deneysel ispat şeması	Algısal
Ö4	Dışsal ispat şeması	Ritüel
Ö5	Dışsal ispat şeması	Sembolik
Ö6	Deneysel ispat şeması	Örnek-temelli (sonlu kümelerin tek örneği)
Ö7	Deneysel ispat şeması	Örnek-temelli (sonsuz kümelerin tek örneği)
Ö8	Deneysel ispat şeması	Örnek-temelli (çoklu)
Ö9	Analitik ispat şeması	Dönüşümcü
Ö10	Analitik ispat şeması	Aksiyomatik

İSABA'nin güvenirlik çalışmaları uygulamanın yapıldığı üniversiteden farklı bir üniversitenin matematik öğretmenliği bölümü ikinci sınıfında öğrenim gören 10 öğrenciyle pilot çalışmaları yapılarak tamamlanmıştır. Pilot çalışması aşağıdaki amaçlarla yapılmıştır.

- Öğretmen adaylarının seviyelerine uygun olup olmadığının belirlenmesi,
- Öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerini ölçüp ölçmediğinin belirlenmesi,
- Sorularda kullanılan matematiksel ve sembolik dilin öğretmen adayları için uygun olup olmadığının saptanması,
- Soruların anlaşılır, açık ve net olup olmadığının belirlenmesi,
- Süreç hakkında bilgi sahibi olunması,
- Değerlendirme ölçeklerinin hazırlanması,
- Anketin güvenirlik çalışmalarının yapılması.

10 öğretmen adayıyla uygulanan anketten elde edilen veriler her soru için araştırmacı ve tez danışmanı tarafından incelenip ayrı ayrı kodlamaları yapılmıştır.

Araştırmacı ve tez danışmanının yaptığı kodlamalar Miles ve Huberman'ın (1994, s. 64) formülü ile hesaplanmış, araştırmacı ve tez danışmanı arasındaki uyum ≈ %94 bulunmuştur. Böylece anketin güvenirliği elde edilmiştir. Geçerlik ve güvenirlik çalışmaları sonrasında ankete son hali verilmiş ve Ek-12'de sunulmuştur. Ayırca İSPABA cevap anahtarı Ek-13'de sunulmuştur.

İSPABA tüm öğretmen adaylarına dersin uygulama aşamasının ikinci ve son haftasında birer kez olmak üzere toplamda iki kez uygulanmıştır. Bu anketin uygulanma amacı

- Öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerine yönelik nicel verilere ulaşmak,
- Araştırmanın çalışma grubunu belirlemek,
- İSPABA üzerine mülakat sorularını oluşturmaktır.

Bu anket dersin uygulama aşamasının ikinci ve son haftasında olmak üzere iki kez 22 öğretmen adayına uygulanmıştır. Anketin iki kez uygulanmasının amacı da ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerine etkisini incelemektir.

3.4.5. İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi (İSPABA) Üzerine Mülakatlar

İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi (İSPABA) üzerine mülakatlar katılımcı sayılarına göre bireysel mülakat, uygulanış şekline ya da uygulanan kurallara göre ise yarı yapılandırılmış mülakatlar şeklinde uygulanmıştır. Bireysel mülakat uygulanmasının sebebi öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini bireysel olarak değerlendirmek ve tasarlanan dersin öğretmen adaylarının gelişimlerine etkisini bireysel olarak incelemektir. Yarı yapılandırılmış mülakat uygulanmasının sebebi de yapılandırılmış ve yapılandırılmamış mülakatların avantajlarından faydalanıp, her birinin eksik kalan yönünü diğer teknikle kapatmaktır. Ayrıca öğretmen adayları için açık uçlu sorular hazırlanıp mülakatın sınırları belli bir oranda çizilse de öğretmen adaylarının verecekleri cevaplar ile gerek duyulan durumlarda bu sınırların dışına çıkılmak ve daha derinlemesine bilgi edinmek istenilmektedir.

İSPABA üzerine yarı yapılandırılmış mülakatlar için Ek-14'de sunulan "İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi Üzerine Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formu" hazırlanmıştır. Sorular hazırlanırken öğretmen adaylarının İSPABA'ndeki sorulara verdiği cevaplar üzerine derinlemesine bilgi edinmek ve ispatla ilgili alan bilgilerinin ayrıntılı saptanması amaçlanmıştır.

İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi (İSPABA) üzerine mülakatların amacı öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini derinlemesine incelemektir. Bu mülakat dersin uygulama aşamasının üçüncü ve son haftasında olmak üzere iki kez dörder öğretmen adayına uygulanmıştır. Mülakatların iki kez uygulanmasının amacı da ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerine etkisini derinlemesine incelemektir.

3.4.5.1. Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları Sonucunda İSPABA Üzerine Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formu

Formdaki soruların geçerlik çalışmaları için Ek-15'de sunulan "İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi Üzerine Yarı Yapılandırılmış Mülakat-Uzman Görüşü Formu" hazırlanmıştır. Bu uzman görüşü formu ile matematik eğitimi anabilim dalında görevli biri Prof. Dr., ikisi Doç. Dr, ikisi Dr Öğr. Üyesi ve biri Öğr. Gör. Dr. ünvanlı altı akademisyen ve matematik anabilim dalında görevli Doç. Dr. ünvanlı bir akademisyen ile matematik eğitimi anabilim dalında doktora öğrenimine devam eden üç doktora öğrencisi olmak üzere toplam 10 uzmandan görüş alınmıştır. Uzman görüşlerini almak için 10 uzmana tezin konusu, amacı, içeriği ve veri toplama araçlarıyla ilgili bir saatlik seminer verilmiş ve seminer sonunda veri toplama araçlarıyla ilgili uzmanların görüşü tartışma ortamında alınarak kayda geçirilmiştir.

Formun güvenirlik çalışmaları uygulamanın yapıldığı üniversiteden farklı bir üniversitenin matematik öğretmenliği bölümü ikinci sınıfında öğrenim gören üç öğrenciyle pilot çalışmaları yapılarak tamamlanmıştır. Pilot çalışmaları formun güvenirlik çalışmasının yapılması, değerlendirme ölçeğinin hazırlanması, süreç hakkında bilgi sahibi olunması, soruların anlaşılır, açık ve net olup olmadığının belirlenmesi için yapılmıştır. Üç öğretmen adayıyla yapılan mülakatlardan elde edilen veriler her soru için araştırmacı ve tez danışmanı tarafından incelenip ayrı ayrı kodlamaları yapılmıştır.

Araştırmacı ve tez danışmanının yaptığı kodlamalar Miles ve Huberman'ın (1994, s. 64) formülü ile hesaplanmış, araştırmacı ve tez danışmanı arasındaki uyum ≈ %93 bulunmuştur. Böylece anketin güvenirliği elde edilmiştir.

Alınan uzman görüşleri ve yapılan pilot çalışması sonucunda İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi Üzerine Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formunun amacına uygun hazırlandığı ayrıca mülakatlar yarı yapılandırılmış olduğundan gerekli görülen yerlerde öğrencilerin görüşlerini daha iyi ifade edebilmeleri için mülakat esnasında ilave sorular sorulabileceği de düşünülerek herhangi bir değişiklik yapılmasına gerek olmadığına karar verilmiştir.

3.4.6. Gözlem

Çok yaygın veri toplama tekniği olan gözlem (Al, 2014) herhangi bir davranışın doğal ortamında detaylı olarak tanımlanması yöntemidir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Davranış kendi doğal ortamında gözlemlendiği için gözlem tekniği en objektif veri toplama tekniğidir (Karasar, 2014). Gözlemin en büyük avantajı bilgiye ilk elden ve oluştuğu anda ulaşma imkânı vermesidir (Creswell, 2014). Doküman incelemesinde veya anketlerde insanların yazdıklarından, mülakatlarda insanların söylediklerinden veriler elde edilir fakat gözlemle bunlardan çok daha fazlasına ulaşılabilir (Patton, 2014). Gözlemler yapılandırılma durumuna göre yapılandırılmış gözlem veya yapılandırılmamış gözlem olmak üzere ikiye (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016) gözlemcinin rolüne göre dışarıdan gözlem veya katılarak gözlem olmak üzere ikiye (Karasar, 2014) gözlem sürekliliğine göre de sürekli gözlem veya aralıklı gözlem olmak üzere ikiye (Şahin, 2014b) ayrılır.

Karma araştırmalarda toplanması gereken veri türlerinden biri de süreçle ilgili verilerdir. Süreçle ilgili veriler sürecin nasıl işlediğiyle ilgili verilerdir (Şimşek, 2009). Gözlem sayesinde sürece yönelik bilgi edinilmesi amaçlanmıştır. Gözlem için Ek-16'da sunulan "Ders Gözlem Formu" hazırlanmış ve gözlemciler tarafından bu formlar 15 hafta boyunca doldurulmuştur. Her hafta o dersin konusu, dersin hedefi, dersin kazanımları, dersin içeriği, çözülen sorular, yapılan etkinlikler, öğretim yöntem ve teknikleri ve ders esnasında gelişen önemli olaylar (varsa öğretmen adaylarının gelişimlerine katkı sağlayan faktörler, varsa öğretmen adaylarının gelişimlerini engelleyen faktörler, varsa öğretmen adaylarının güçlük yaşadığı hususlar, varsa beklenmedik durumlar, varsa tasarıma yönelik yapılan değişiklikler) gözlemciler tarafından ders gözlem formuna kaydedilmiştir. Ancak katılımcı gözlemde eksiksiz not alıp bunları kaydetmek zor olduğundan sürecin ses ve görüntü olarak kaydedilmesinde fayda vardır (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016). Video kayıt cihazlarının defalarca izlenme şansının olması da başka bir avantajdır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bu yüzden dersin uygulaması boyunca 15 hafta tüm dersler katılımcıların doğal öğrenme ortamlarını bozmayacak şekilde onların da izinleri alınarak ses ve görüntü kaydeden kamera ile kayıt altına alınmıştır.

3.4.6.1. Gözlem Araçlarının Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları

Hazırlanan Ders Gözlem Formu için uzman görüşlerine başvurulmuştur. Bu araştırmanın uygulama aşamasında dersin öğretim elemanı araştırmacıdır. Aynı zamanda araştırmacı ve tez danışmanı 15 hafta boyunca ders sırasında birer gözlemci rolünü üstlenmişlerdir. Gözlemlerin güvenirlik çalışmaları için rastgele seçilen dört haftanın Ders Gözlem Formları ile kamera kayıtları gözlemciler tarafından ayrı ayrı kodlanmıştır. Gözlemcilerin yaptığı kodlamalar Miles ve Huberman'ın (1994, s. 64) formülü ile hesaplanmış, gözlemciler arasındaki uyum $\approx$ %89 bulunmuştur. Böylece gözlem araçlarının güvenirliği elde edilmiştir.

3.4.7. Ders Değerlendirme Anketi

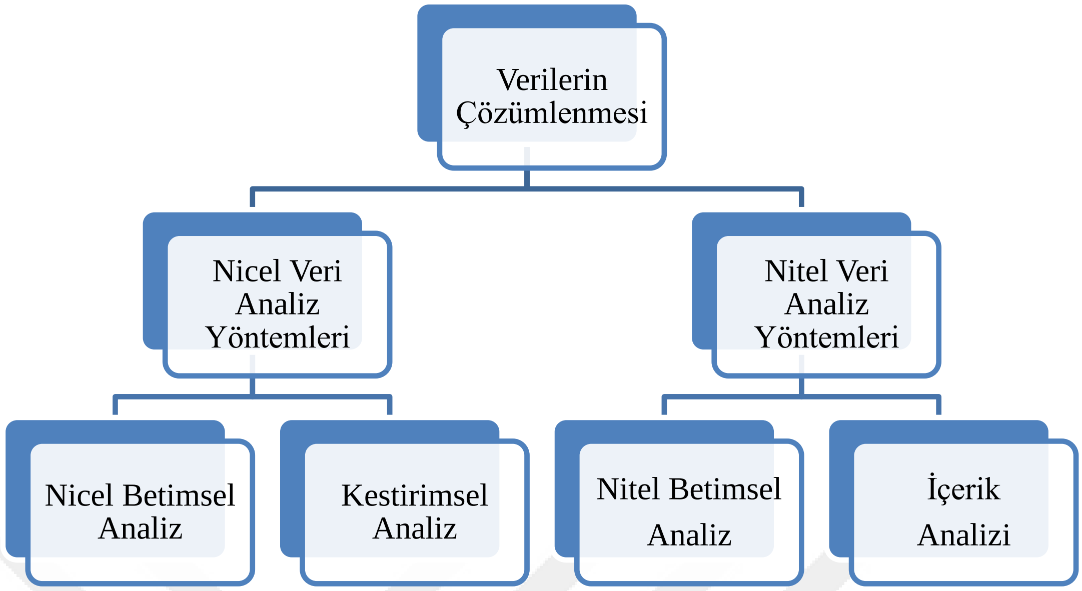
Tasarlanan ders hakkında açık uçlu sorulardan oluşan "Ders Değerlendirme Anketi" hazırlanmış ve Ek-17'de sunulmuştur. Ders Değerlendirme Anketi ile hem süreçle ilgili hem de algılarla ilgili verilere (Şimşek, 2009) ulaşılmaya çalışılmıştır. Ders değerlendirme anketi öğretmen adaylarının dersin uygulama aşamasıyla ilgili değerlendirmeleri ile dersin kazanımlarına ne derece ulaştıklarını kendilerinin değerlendirmeleri amacıyla hazırlanmıştır. Ders Değerlendirme Anketi uygulama aşamasının sonunda 22 öğretmen adayına bir kez uygulanmıştır.

3.4.7.1. Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları Sonucunda Ders Değerlendirme Anketi

Ders değerlendirme anketinin geçerliği için de uzman görüşlerine başvurulmuştur. Ayrıca Ders Değerlendirme Anketindeki sorular uygulamanın yapıldığı üniversiteden farklı bir üniversitenin matematik öğretmenliği bölümü ikinci sınıfında öğrenim gören 10 öğrenciye okutularak soruların dil yönünden anlaşılır olup olmadığı değerlendirilmiştir. Bu işlemler sonucunda Ders Değerlendirme Anketinde herhangi bir değişiklik yapılmasına gerek olmadığına karar verilmiştir.

3.5. Verilerin Çözümlenmesi

Tasarım tabanlı bu araştırmanın veri analizi teknikleri bakımından karma yöntem desenlerinden açımlayıcı sıralı karma yöntem desenine göre desenlendiğini yukarıda belirtilmişti. Veri toplama sürecinde toplanan veriler araştırma soruları, araştırmanın amacı ve araştırma yöntemi doğrultusunda çözümlenir (Al, 2014). Karma yöntem araştırmalarında nicel ve nitel verilerin analizleri ayrı başlıklar altında açıklanmalıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2016).



Şekil 3.5. Verilerin Çözümlenmesi

Nicel çalışmalarda istatistiğe dayalı nicel veri analiz yöntemleri kullanılmaktadır. İstatistiksel çözümlemeler betimsel ya da kestirimsel (vardamsal-istidlali) çözümlemeler aracılığıyla yapılmaktadır (Karasar, 2014; Şahin, 2014a).

Nitel çalışmalarda nitel veri analiz yöntemleri kullanılmaktadır. Nitel veri analizindeki temel amaç metin halindeki sözel verilerden anlam çıkarmaktır (Creswell, 2014). Nitel araştırmalarda toplanması olası üç tür veri "*algılar, çevresel veriler* ve *süreçle ilgili veriler*"dir ki bu verilere "*görüşme, gözlem* ve *yazılı dokümanların incelenmesi*" aracılığıyla ulaşılır (Şimşek, 2009, s. 40). Ulaşılan nitel verilerin analizi için betimsel analiz ve içerik analizi olmak üzere iki genel yöntem kullanılır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Betimsel analizde veriler belirlenen temalar doğrultusunda özetlenir ve de yorumlanır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Betimsel analiz "betimsel analiz için bir çerçeve oluşturma", "tematik çerçeveye göre verilerin işlenmesi", "bulguların tanımlanması" ve "bulguların yorumlanması" aşamalarından oluşur (Şahin, 2014a, s. 190-191). Çok indergemeci olduğundan dolayı eleştirilen içerik analizi (Pope, Mays ve Popay, 2007) genellikle gözlem ve görüşmelerden edinilen verilerin analizinde kullanılır (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016). İçerik analizinde birden çok değerlendiricinin aynı veriyi aynı şekilde kodlayabilmesi için öncelikle kategoriler kesin olarak tanımlanmalıdır (Pope, Mays ve Popay, 2007). İçerik analizi "verilerin kodlanması", "temaların bulunması", "verilerin kodlara ve temalara göre düzenlenmesi ve tanımlanması" ile "bulguların yorumlanması" aşamalarından oluşur (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 243).

Bu araştırmanın veri toplama araçlarından biri olan dokümanlar doküman analizi ile analiz edilmiştir. İSABA ve İSPABA'den elde edilen veriler doğrudan ve kestirisel çözümlemeler aracılığıyla analiz edilmiştir. Bunun için Statistical Package for the Social Sciences (SPSS) 16.0 paket programından faydalanılmıştır. Uygulama aşamalarının ikinci ve son haftalarında olmak üzere ikişer kez uygulanan anketlerden elde edilen veriler nicel betimsel analiz ile istatistiksel olarak karşılaştırılıp ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerine etkisi incelenmiştir. Ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerine etkisinin istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını belirlemek için nicel kestirimsel veri analiz yöntemi olan Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi (Wilcoxon, 1945) kullanılmıştır.

Parametrik olmayan (non-parametrik) Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi veri kaynağının yetersiz sayıda olması, veri kaynağı yeterli sayıda olsa bile ölçümler arası farkların normal dağılım göstermemesi veya verilerin en az aralık ölçeğinde olmayıp sıralama ölçeğinde olması gibi sebeplerle parametrik bir test olan Bağımlı Örneklem t-Testinin alternatifi olarak tercih edilir (Can, 2017). Literatürdeki araştırmalar örneklem sayısı 50'den az olan araştırmalarda parametrik testlerin yerine non-parametrik testlerin kullanımının daha güvenilir sonuçlar verdiğini ortaya koymaktadır (Turan, Şimşek ve Aslan, 2015).

Bağımlı Örneklem t-Testinde aynı örnekleme ait farklı iki zamanda yapılan ölçümlerin ortalamaları karşılaştırılırken, Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi aynı örnekleme ait iki farklı zamana ait puanları sıralara dönüştürür ve onları karşılaştırır (Pallant, 2007). Yapılan iki ölçüm arasında ölçümleri farklılaştırması beklenen bir müdahale uygulanır. Aynı örnekleme uygulanan müdahalenin öncesi ve sonrasında yapılan ölçümler arasında fark olup olmadığını araştırmak için bu test elverişlidir.

> Wilcoxon testi, aralarında fark bulunan her bir veri çifti için, ikinci ölçümden birinci ölçümü çıkararak aradaki farkı hesaplar ve bu farklar dizisini mutlak değerlerine göre sıralama ölçeğine çevirir. Ardından, sıralama ölçeği puanlarını, bu puanın karşılığı olan fark puanının işaretine göre gruplar ve negatif işaretli sıralar ile pozitif işaretli sıraların (sıralama ölçeği puanlarının) ortalamalarını alır (Can, 2017, s. 142).

Anlamlı bir etki olup olmadığını saptamak için Z ve p değerlerine bakılmıştır. Olasılık (Probability) değeri $p < 0{,}05$ ise %95 güven düzeyinde istatistiksel olarak anlamlı bir etki olduğuna karar verilmiştir.

Anlamlı bir etki varsa bu etkinin yönüne karar vermek için sıra ortalaması ve sıra toplamına bakılmıştır. Sıra ortalaması ve sıra toplamı negatif sıralar lehine ise istatistiksel olarak anlamlı etkinin uygulama öncesi lehine olduğuna, pozitif sıralar lehine ise anlamlı etkinin uygulama sonrası lehine olduğuna karar verilmiştir.

Anlamlı bir etki varsa etki büyüklüğü $r = Z/\sqrt{n}$ formülüyle hesaplanmıştır (Pallant, 2007). Etki büyüklüğü (r) gözlemlenen etkinin büyüklüğünün objektif ve standart bir ölçüsüdür. Cohen'e (1988) göre etki büyüklüğü $r = 0{,}1$ ise küçük etki, $r = 0{,}3$ ise orta etki, $r = 0{,}5$ ise büyük etkidir.

İSABA Üzerine Mülakatlar ve İSPABA Üzerine Mülakatlardan elde edilen veriler ise betimsel analiz ile derinlemesine analiz edilmiştir. Mülakatların analizinde NVivo 12 programı kullanılmıştır. Uygulama aşamalarının üçüncü ve son haftalarında olmak üzere ikişer kez yapılacak olan mülakatlardan elde edilen veriler karşılaştırılıp ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerine etkisi derinlemesine incelenmiştir.

Ders Gözlem Formu, Kamera Kayıtları, Ders Değerlendirme Anketinden elde edilen süreç ve algılar ile ilgili veriler de betimsel analiz ve/veya içerik analizi ile analiz edilmiştir. Bu analizler için yine NVivo 12 programı kullanılmıştır. İlgili kodlamalar araştırmacı ve danışmanın ortak görüşleri doğrultusunda yapılmış olup temalar ve kategoriler oluşturulmuştur. Betimsel ve içerik analizden elde edilen bulgular doğrudan alıntılarla desteklenmiştir. Bulguların çarpıcı bir şekilde yansıtılması açısından bu yöntem nitel analizde sıkça başvurulan bir yöntemdir (Şahin, 2014a).

3.5.1. Dokümanların Analizi

Gözlem ve görüşmelerin yapıldığı araştırmalarda güvenilirliği arttırmak ve daha fazla bilgiye ulaşmak adına bunlara ilaveten doküman incelemesi kullanılabilir (Yıldırım ve Şimşek, 1999). Örneğin bir araştırmacı mülakat yaptığı kişiye mülakat yaptığı konu ile ilgili dokümanlarını göstermesini talep edebilir (Taylor, Bogdan ve DeVault, 2016).

Literatürde çoklu veri toplama aracının kullanıldığı çalışmalara çokça rastlanmaktadır. Birden fazla perspektifin bir arada kullanılması araştırmaların doğrulanması ve güvenirliği için faydalı olduğu kadar resmin tamamının görünmesi için de faydalıdır (Daymon ve Holloway, 2011). Ancak görüşme ve gözlem yapmaksızın da birçok bilgiye yazılı materyallerin incelenmesi sayesinde ulaşılabilir. Yani araştırmacılar bilgi sahibi olmak istedikleri olgulara yalnızca yazılı materyaller aracılığı ile ulaşabilirler. Bu demektir ki doküman incelemesi araştırmalarda başlı başına kullanılabilen bir veri toplama yöntemidir. Son yıllarda nitel araştırmacılar arasında doküman incelemesini tek başına kullanmak eskiye nazaran daha popülerdir (Bogdan ve Biklen, 2007).

Doküman incelemesinin literatürde pek çok farklı ismi ve tanımı bulunmaktadır. Nitel veri kaynağı olarak dokümanları içeren çalışmalar genellikle, "nitel içerik analizi, doküman analizi ya da metin analizi" diye adlandırılırlar (Daymon ve Holloway, 2011, s. 276). Türkçe literatürde belgesel tarama (Bkz. Karasar, 2014) veya belge analizi olarak adlandırılan doküman incelemesi ''var olan kayıt ve belgeleri inceleyerek veri toplamaya denir'' (Karasar, 2014, s. 183). Yani doküman incelemesi bilgi içeren yazılı metni inceler ve onun özelliklerini göz önüne alır (Norum, 2008). Bununla birlikte doküman incelemesi araştırmacılara araştırdıkları fenomenle doğrudan ilgili olan belirli eser ve dokümanları tarafsızca inceleme ve keşfetme olanağı tanır (Christensen ve Brumfield, 2010). Doküman incelemesinin aşamaları aşağıdaki gibidir (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 194-200).

1. Dokümanlara ulaşma
2. Özgünlüğü (orijinalliği) kontrol etme
3. Dokümanları anlama
4. Veriyi analiz etme
    a. Analize konu olan veriden örneklem seçme
    b. Kategorileri geliştirme
    c. Analiz birimini saptama
    d. Sayısallaştırma
5. Veriyi kullanma

İspata ve ispatlamaya yönelik matematik eğitimi literatürüne dayalı dokümanlar ulusal/uluslararası lisansüstü tezler, ulusal/uluslararası kitaplar, ulusal/uluslararası makaleler, ulusal/uluslararası bildiriler, ulusal/uluslararası web siteleri, ulusal/uluslararası raporlar ve ulusal/uluslararası öğretim programları incelenerek

Dersin analiz aşamasında;

- İhtiyaçlar belirlenmiş,
- Derse ait hedefler belirlenmiş,
- Derse ait kazanımlar belirlenmiş,
- Dersin kuramsal altyapısı oluşturulmuş,

Dersin tasarım aşamasında ise;

- Ders içeriği ve akışı oluşturulmuş,
- Dersin öğrenme-öğretme durumları oluşturulmuş,
- Dersin değerlendirme sistemi ve araçları oluşturulmuş,
- Dersin matematik öğretmenliği program çıktılarına katkı düzeyleri belirlenmiştir.

3.5.2. İspat Alan Bilgi Anketinin (İSABA) Analizi

Dersin uygulamasından önce ve sonra 22 öğretmen adayının ispatla ilgili alan bilgilerini ölçmek amacıyla geliştirilmiş olan İSABA'ne verdikleri cevaplar analiz edilmiştir. Bu ankette öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgileri iki bileşende incelenmek istenmiştir. Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgileri farklı ispat yöntemlerini bilip uygulayama bilgileri ve bu ispatlamaları yaparken sahip oldukları ana ispat şemaları (Sowder ve Harel, 1998) ile tespit edilmek istendiğinden İSABA için 10 öğretmen adayıyla yapılan pilot çalışma sonucunda İskenderoğlu (2010), Güler, Özdemir ve Dikici (2012) ve Güner'in (2012) çalışmalarından da faydalanılarak iki farklı değerlendirme ölçeği hazırlanmıştır.

İlk bileşen olarak ders tasarımının öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulayama bilgilerine etkisi incelenmiştir. 22 öğretmen adayının yedi soruya vermiş oldukları 154 cevap doğru, kısmen doğru, yanlış ve yanıtsız olarak kodlanmıştır. Doğru cevap olarak ya aksiyomatik yapı içerisinde yapılan geçerli ispatlar ya da dönüşümünü tamamlamış geçerli ispatlar kabul edilmiştir. Çünkü Sowder ve Harel (1998) dönüşümcü ve aksiyomatik ispat şemalarını matematiksel ispat diğer ispat şemalarını ise gerekçelendirme olarak kabul etmişlerdir. Kısmen doğru cevap olarak dönüşümünü tamamlayıp, ispatın geçerliliğini kaybetmesine mahal vermeyecek nitelikte eksikleri olan ispatlar kabul edilmiştir. Yanlış cevap olarak ise yukarıda belirtilenlerin dışında kalan ispatlar kabul edilmiştir. Boş bırakılan ya da ispatlamanın tamamlanmadığı cevaplar yanıtsız olarak kabul edilmiştir. Doğru cevaplar 2 puan, kısmen doğru cevaplar 1 puan, yanlış ve yanıtsız kabul edilen cevaplar 0 puan olarak puanlanmıştır.

İkinci bileşen olarak ders tasarımının öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şemaları bilgilerine etkisi incelenmiştir. 22 öğretmen adayının yedi soruya vermiş oldukları 154 cevap Sowder ve Harel'in (1998) sınıflandırmasındaki üç ana şemaya göre dışsal (otoriter, sembolik, ritüel), deneysel (algısal, örnek-temelli) ve analitik (dönüşümcü, aksiyomatik) olarak kodlanmıştır. Boş bırakılan ya da ispatlamanın tamamlanmadığı veyahut da ispatlamayı yapanın kendisinin ikna olmadığı cevaplar yanıtsız olarak kabul edilmiştir. Bu öğrenciler herhangi bir ispat şemasına sahip değildirler. Öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şemaları puanlanırken analitik ispat şemaları 3 puan, deneysel ispat şemaları 2 puan, dışsal ispat şemaları 1 puan ve yanıtsız kabul edilen cevaplar 0 puan olarak puanlanmıştır.

Öğretmen adaylarının ispat alan bilgi puanları bu iki bileşenin yani öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama puanları ile öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şema puanlarının toplamıdır.

Ders tasarımının öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama puanlarına, sahip oldukları ana ispat şema puanlarına ve ispatla ilgili alan bilgisi puanlarına etkisini incelemek için frekans, yüzde, ortalama, standart sapma, minimum ve maksimum puanlar gibi nicel betimsel analizden yararlanılmıştır.

Ders tasarımının öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama puanlarına, sahip oldukları ana ispat şema puanlarına ve ispatla ilgili alan bilgisi puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olup olmadığını saptamak için nicel kestirimsel veri analiz yöntemi olarak Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi (Wilcoxon, 1945) kullanılmıştır. Anlamlı bir etki olup olmadığını saptamak için Z ve p değerlerine bakılmıştır. Olasılık (Probability) değeri $p < 0{,}05$ ise %95 güven düzeyinde istatistiksel olarak anlamlı bir etki olduğuna karar verilmiştir. Yani öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki puanları uygulama öncesine göre istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık göstermiştir. Başka bir deyişle ders tasarımı öğretmen adaylarının puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etki yapmıştır. Değilse istatistiksel olarak anlamlı bir etki olmadığına karar verilmiştir. Yani öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki puanları uygulama öncesine göre istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık göstermemiştir. Başka bir deyişle ders tasarımı öğretmen adaylarının puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etki yapmamıştır.

Anlamlı bir etki varsa bu etkinin yönüne karar vermek için sıra ortalaması ve sıra toplamına bakılmıştır. Sıra ortalaması ve sıra toplamı negatif sıralar lehine ise istatistiksel olarak anlamlı etkinin uygulama öncesi lehine olduğuna, pozitif sıralar lehine ise anlamlı etkinin uygulama sonrası lehine olduğuna karar verilmiştir.

Anlamlı bir etki varsa etki büyüklüğü $r = Z/\sqrt{n}$ formulüyle hesaplanmıştır (Pallant, 2007). Cohen'e (1988) göre etki büyüklüğü $r = 0{,}1$ ise küçük etki, $r = 0{,}3$ ise orta etki, $r = 0{,}5$ ise büyük etkidir.

3.5.3. İspat Alan Bilgi Anketi (İSABA) Üzerine Mülakatların Analizi

İSABA üzerine mülakatlar betimsel nitel analiz ile analiz edilmiştir. Bu mülakatların analizi için üç öğretmen adayıyla yapılan pilot çalışmadan faydalanılarak değerlendirme ölçeği hazırlanmıştır. Bunun için betimsel nitel analizin dört aşaması (Yıldırım ve Şimşek, 2016) takip edilmiştir. İlk olarak öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bileşeni için tematik çerçeve belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bileşeni için tematik çerçeve doğru, kısmen doğru, yanlış ve yanıtsız olarak belirlenmiştir. Mülakatlarda öğretmen adaylarının yaptıkları ispatlar ve mülakat sorularına verdikleri cevaplar birlikte düşünülerek doğru, kısmen doğru, yanlış ve yanıtsız olarak kodlanmıştır.

1. **Soru:** Verilen önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını ispatlayınız.

(Mülakata katılan öğretmen adaylarından İSABA'ndeki yedi sorunun tek tek ispatı istenmiştir.)

Bu soru öğretmen adayına sorularak öğretmen adayının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgileri ile sahip oldukları ana ispat şemaları hakkında fikir sahibi olunmuştur. Ancak derinlemesine bilgi sahibi olmak amacıyla aşağıdaki sorular da öğretmen adaylarına sorulmuştur.

2. **Soru:** Bu soruda ispat için hangi ispat yöntemini seçtiniz?

Seçmediyse: İspat yöntemi olmadan ispat yapılabilir mi?
Seçtiyse: Neden bu yöntemi seçtiniz?
Seçtiyse: Seçtiğiniz yöntem hakkında bilgi veriniz.

Seçtiyse: Seçtiğiniz ispat yöntemi bu soru için uygun mu?
soruları öğretmen adaylarına sorularak önermenin ispatı için uygun ispat yöntemini seçip seçemediği, seçtiği ispat yöntemini bilip bilmediği, hangi sorularda hangi yöntemi seçeceğini bilip bilmediği, seçtiği yöntemi soruda uygulayıp uygulayamadığı ve seçtiği ispat yöntemini anlamlandırıp anlamlandıramadığı belirlenmek istenmiştir. Öğretmen adaylarının yaptığı ispat ve sorulara verdiği cevaplar tamamen doğruysa doğru, ispatın geçerliliğini kaybetmesine mahal vermeyecek nitelikteki hatalar bulunan ispat ve cevaplar kısmen doğru, adaylarının yaptığı ispat ve sorulara verdiği cevaplar yanlışsa yanlış olarak kodlanmıştır. Öğretmen adayı herhangi bir ispatlama yapamadıysa veya ispatı tamamlamadıysa yanıtsız olarak kodlama yapılmıştır. Öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgileri uygulama öncesi ve sonrası karşılaştırmalı olarak analiz edilerek ders tasarımının bu bileşene etkisi derinlemesine incelenmiştir.

İkinci olarak öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şemaları bileşeni için tematik çerçeve belirlenmiştir. Bu çerçeve Sowder ve Harel'in (1998) ana ispat şemaları çerçevesidir. Mülakatlarda öğretmen adaylarının yaptıkları ispatlar sorulara verdikleri cevaplarla birlikte düşünülerek dışsal (otoriter, sembolik, ritüel), deneysel (algısal, örnek-temelli) ve analitik (dönüşümcü, aksiyomatik) şema olarak kodlanmıştır.

3. Soru: Bu soruda yaptığınız ispat sizi ve başkalarını ikna etmeye yeterli midir? sorusu öğretmen adaylarına sorularak öğretmen adaylarının ispat şemasına sahip olup olmadıkları belirlenmek istemiştir. Öğretmen adayı yaptığı ispatın kendisini ve başkalarını ikna etmeye yeterli olduğuna inanıyorsa bir ispat şemasına sahiptir, inanmıyorsa bir ispat şemasına sahip değildir. Öğretmen adayları herhangi bir ispat şemasına sahipse onlara aşağıdaki sorular sorulmuştur.

4. Soru: Sizce yaptığınız bu ispatta eksik noktalar var mı? sorusu öğretmen adayına sorularak yaptığı ispatla beraber değerlendirilip sahip olduğu şema hakkında daha net bir fikre ulaşılmak istenmiştir.

5. Soru: Bu sorunun sizin yaptığınızdan başka bir ispatı var mıdır? sorusu öğretmen adayına sorularak öğretmen adayının dışsal ispat şemalarından ritüel ispat şemasına sahip olup olmadığı belirlenmek istenmiştir.

6. Soru: Daha önceki öğrenim hayatınızda yaptığınız bu ispatı görmüş müydünüz? Ne zaman? Nerde? Kimden? sorusu öğretmen adayına sorularak öğretmen adayının dışsal ispat şemalarından otoriter veya ritüel ispat şemasına sahip olup olmadığı belirlenmek istenmiştir.

7. Soru: Bir ispat sadece matematiksel ifadelerle mi ispatlanmak zorundadır? sorusu öğretmen adayına sorularak öğretmen adayının dışsal ispat şemalarından ritüel ispat şemasına sahip olup olmadığı belirlenmek istenmiştir.

8. Soru: Yaptığınız bu ispatta attığınız adımları anlamlandırabilir misiniz? sorusu öğretmen adaylarına sorularak öğretmen adaylarının analitik ispat şemalarından dönüşümcü veya aksiyomatik şemaya sahip olup olmadıkları belirlenmek istenmiştir.

9. Soru: Bu ispatı yaparken güçlük yaşadınız mı? Nedir? sorusu öğretmen adayına sorularak yaptığı ispatla beraber değerlendirilip sahip olduğu şema hakkında daha net bir fikre ulaşılmıştır.

10. Soru: Bu soruda örnek vermek ispat için yeterli mi? sorusu öğretmen adaylarına sorularak öğretmen adayının deneysel ispat şemalarından örnek-temelli ispat şemasına sahip olup olmadığı belirlenmek istenmiştir.

11. Soru: Bu soruda şekil çizmek ispat için yeterli mi? sorusu öğretmen adaylarına sorularak öğretmen adayının deneysel ispat şemalarından algısal ispat şemasına sahip olup olmadığı belirlenmek istenmiştir.

Öğretmen adayı yaptığı ispatta bir otoriteye başvurmuş ve bunu geçerli bir ispat olarak kabul etmişse otoriter ispat şeması (dışsal), yaptığı ispatta sembolleri manipüle ederek geçerli bir ispat yaptığını zannetmiş ve ispatta eksik bir nokta olduğunu fark etmemişse sembolik (dışsal), daha önceki öğrenim hayatında sorulan sorudaki ispatı veya benzer bir ispatı görmüş ve ona benzer bir ispatlama yapmaya çalışıyor ya da ispatın mantığından ziyade biçimine odaklanıyorsa ritüel (dışsal), sadece bir veya birkaç örnek verip bunu geçerli bir ispat olarak kabul etmiş ve ispatta eksik bir nokta olduğunu fark etmemişse örnek-temelli (deneysel), şekil çizerek geçerli bir ispat yaptığını zannediyor ve ispatta eksik bir nokta olduğunu fark etmemişse algısal (deneysel), mantıksal çıkarım ve işlemsel düşünme ile genellemeye ulaşmışsa ve attığı her adımı anlamlandırabiliyorsa dönüşümcü (analitik), tüm bunları aksiyomatik yapı içerinde yapıyorsa aksiyomatik şema (analitik) olarak kodlama yapılmıştır. Öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şemaları uygulama öncesi ve sonrası karşılaştırmalı olarak analiz edilerek ders tasarımının bu bileşene etkisi derinlemesine incelenmiştir. Daha sonra bulgular tanımlanıp yorumlanmıştır. Bulgular rapor edilirken birebir alıntılarla desteklenmiştir.

3.5.4. İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketinin (İSPABA) Analizi

Dersin uygulamasından önce ve sonra 22 öğretmen adayının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini ölçmek amacıyla geliştirilmiş olan İSPABA'ne verdikleri cevaplar analiz edilmiştir. İki kısımdan oluşan bu ankette öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgileri dört bileşende incelenmek istenmiştir. İSPABA için 10 öğretmen adayıyla yapılan pilot çalışmadan faydalanılarak değerlendirme ölçeği hazırlanmıştır. Anket iki kısımdan oluştuğu için değerlendirme ölçeği de iki kısımdan oluşmaktadır.

İlk bileşen olarak ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgilerine etkisi incelenmiştir. Bu ankette bu bileşenlerden biri olan öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etmeleriyle ilgili beş soru yer almıştır. Bu anketin birinci kısmındaki 1a, 2a, 3a, 4a ve 5a soruları öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit edip edemediklerini ölçmek amacıyla hazırlanmıştır. 22 öğretmen adayının beş soruya vermiş oldukları 110 cevap literatürden derlenen ispatlamaya yönelik beş güçlüğe göre analiz edilmiş ve cevaplar doğru, yanlış ve yanıtsız olarak kodlanmıştır. Bu güçlükler (a) ispatın doğasını kavrama güçlükleri, (b) ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlükler, (c) ispat yöntemleri ile ilgili güçlükler, (d) problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlükler ve (e) matematiksel dil kullanımındaki güçlükler şeklindedir. Uygulamadan önce öğretmen adaylarının ilgili sorularda uygun güçlüklere yaptıkları atıflar doğru, uygun güçlüklere yapılmayan atıflar yanlış, boş bırakılan cevaplar yanıtsız olarak değerlendirilmiştir. Uygulamadan sonra ise terminolojik isimlerle beraber uygun güçlüklere yaptıkları atıflar doğru, uygun güçlüklere yapılmayan atıflar yanlış, boş bırakılan cevaplar yanıtsız olarak değerlendirilmiştir. Doğru cevaplar 1 puan, yanlış ve yanıtsız kabul edilen cevaplar 0 puan olarak puanlanmıştır.

İkinci bileşen olarak ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgilerine etkisi incelenmiştir. Bu ankette bu bileşenlerden biri olan öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklamaları ile ilgili beş soru yer almıştır. Bu anketin birinci kısmındaki 1b, 2b, 3b, 4b ve 5b soruları öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklayıp açıklayamadıklarını ölçmek amacıyla hazırlanmıştır. 22 öğretmen adayının beş soruya vermiş oldukları 110 cevap Cornu'nun (1991) çalışmasındaki psikolojik ve genetik, didaktik ve epistemolojik nedenlere göre analiz edilmiş ve doğru, yanlış ve yanıtsız olarak kodlanmıştır. Uygulamadan önce öğretmen adaylarının ilgili sorularda uygun nedenlere yaptıkları atıflar doğru, uygun nedenlere yapılmayan atıflar yanlış, boş bırakılan cevaplar yanıtsız olarak değerlendirilmiştir. Uygulamadan sonra ise terminolojik isimlerle beraber uygun nedenlere yaptıkları atıflar doğru, uygun nedenlere yapılmayan atıflar yanlış, boş bırakılan cevaplar yanıtsız olarak değerlendirilmiştir. Doğru cevaplar 1 puan, yanlış ve yanıtsız kabul edilen cevaplar 0 puan olarak puanlanmıştır.

Üçüncü bileşen olarak ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgilerine etkisi incelenmiştir. Bu ankette bu bileşenlerden biri olan öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirlemeleriyle ilgili beş soru yer almıştır. Bu anketin birinci kısmındaki 1c, 2c, 3c, 4c ve 5c soruları öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleyip belirlemediklerini ölçmek amacıyla hazırlanmıştır. 22 öğretmen adayının beş soruya vermiş oldukları 110 cevap literatürden derlenen öğretim stratejileri (pekiştirme stratejileri, anlamlandırma stratejileri, cebirsel gösterim, akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme, DGY veya grafik çizimi) çerçevesinde analiz edilmiştir. Uygulamadan önce öğretmen adaylarının ilgili sorularda uygun öğretim stratejilerine yaptıkları atıflar doğru, uygun stratejilere yapılmayan atıflar yanlış, boş bırakılan cevaplar yanıtsız olarak değerlendirilmiştir. Uygulamadan sonra ise terminolojik isimlerle beraber öğretmen adaylarının ilgili sorularda uygun öğretim stratejilerine yaptıkları atıflar doğru, uygun stratejilere yapılmayan atıflar yanlış, boş bırakılan cevaplar yanıtsız olarak değerlendirilmiştir. Doğru cevaplar 1 puan, yanlış ve yanıtsız kabul edilen cevaplar 0 puan olarak puanlanmıştır.

Dördüncü bileşen olarak ders tasarımının öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgilerine etkisi incelenmiştir. Bu ankette bu bileşenlerden biri olan öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etmeleriyle ilgili 10 soru yer almıştır. Bu anketin ikinci kısmındaki 10 soru öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit edip edemediklerini ölçmek amacıyla hazırlanmıştır. Ders tasarımından önce katılımcılardan bu senaryodaki 10 öğrencinin *önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını ispatlarken kullandıkları argümanları (gerekçelendirme biçimlerini)* tespit etmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının belirlediği bu gerekçelendirmeler araştırmacı ve tez danışmanı tarafından Sowder ve Harel'in (1998) çalışmasındaki ana ve alt şemalara göre analiz edilmiştir. Ders tasarımından sonra ise katılımcılardan bu senaryodaki 10 öğrencinin ispat yaparken kullandıkları argümanları (gerekçelendirme biçimlerini) tespit etme görevlerine ilaveten *önermenin doğruluğu ya da yanlışlığını gerekçelendirirken sahip oldukları ispat şemalarını Sowder ve Harel'in (1998) çalışmasındaki ana ve alt şemalarına* göre tespit etmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının uygulama öncesi ve sonrası cevapları bu sınıflandırmaya göre analiz edilmiştir. Uygulama öncesi belirlenen uygun gerekçelendirmeler doğru, uygun olmayanlar yanlış ve cevap verilmeyenler ise yanıtsız olarak kodlanmıştır. Uygulama sonrasında ise tespit edilen uygun gerekçelendirmelerle birlikte uygun ana ve alt şemalar için doğru, uygun olmayan gerekçelendirmeler ve/veya uygun olmayan ana ve/veya alt şemalar yanlış, cevapsız bırakılan sorular da yanıtsız olarak kodlanmıştır. 22 öğretmen adayının 10 soruya vermiş oldukları 220 cevap Sowder ve Harel'in (1998) ana ispat şemalarına göre analiz edilmiş ve cevaplar doğru, yanlış ve yanıtsız olarak kodlanmıştır. Doğru cevaplar 1 puan, yanlış ve yanıtsız kabul edilen cevaplar 0 puan olarak puanlanmıştır.

Öğretmen adaylarının ispat pedagojik alan bilgi puanları bu dört bileşenin puanlarının toplamıdır.

Ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme puanlarına, ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama puanlarına, ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme puanlarına, öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme puanlarına ve ispatla ilgili pedagojik alan bilgi puanlarına etkisini incelemek için frekans, yüzde, ortalama, standart sapma, minimum ve maksimum puanlar gibi nicel betimsel analizden yararlanılmıştır.

Ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme puanlarına, ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama puanlarına, ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme puanlarına, öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme puanlarına ve ispatla ilgili pedagojik alan bilgi puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olup olmadığını saptamak için nicel kestirimsel veri analiz yöntemi olarak Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi (Wilcoxon, 1945) kullanılmıştır. Anlamlı bir etki olup olmadığını saptamak için Z ve p değerlerine bakılmıştır. Olasılık (Probability) değeri $p < 0{,}05$ ise %95 güven düzeyinde istatistiksel olarak anlamlı bir etki olduğuna karar verilmiştir. Yani öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki puanları uygulama öncesine göre istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık göstermiştir. Başka bir deyişle ders tasarımı öğretmen adaylarının puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etki yapmıştır. Değilse istatistiksel olarak anlamlı bir etki olmadığına karar verilmiştir. Yani öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki puanları uygulama öncesine göre istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık göstermemiştir. Başka bir deyişle ders tasarımı öğretmen adaylarının puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etki yapmamıştır.

Anlamlı bir etki varsa bu etkinin yönüne karar vermek için sıra ortalaması ve sıra toplamına bakılmıştır. Sıra ortalaması ve sıra toplamı negatif sıralar lehine ise istatistiksel olarak anlamlı etkinin uygulama öncesi lehine olduğuna, pozitif sıralar lehine ise anlamlı etkinin uygulama sonrası lehine olduğuna karar verilmiştir.

Anlamlı bir etki varsa etki büyüklüğü $r = Z/\sqrt{n}$ formülüyle hesaplanmıştır (Pallant, 2007). Cohen'e (1988) göre etki büyüklüğü $r = 0{,}1$ ise küçük etki, $r = 0{,}3$ ise orta etki, $r = 0{,}5$ ise büyük etkidir.

3.5.5. İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi (İSPABA) Üzerine Mülakatların Analizi

İSPABA üzerine mülakatlar betimsel nitel analiz ile analiz edilmiştir. Bu mülakatların analizi için üç öğretmen adayıyla yapılan pilot çalışmadan faydalanılarak değerlendirme ölçeği hazırlanmıştır. Anket gibi değerlendirme ölçeği de iki kısımdan oluşmaktadır. Bunun için betimsel nitel analizin dört aşaması (Yıldırım ve Şimşek, 2016) takip edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgisi, ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgisi, öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgisi ve öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgisi için tematik çerçeve belirlenmiştir. Bu bileşenler için tematik çerçeve doğru, yanlış ve yanıtsız olarak belirlenmiştir.

1. Kısım için (Anketteki her bir soru için)

1. **Soru:** Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama öncesi ve sonrası)

sorusu öğretmen adaylarına sorularak öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgileri belirlenmek istenmiştir. Uygulama öncesinde uygun güçlüklere yapılan atıflar doğru, uygun olmayan güçlüklere yapılan atıflar yanlış, cevap verilmeyen sorular ise yanıtsız olarak kodlanmıştır. Uygulama sonrasında uygun güçlüklere terminolojik isimleriyle yapılan atıflar doğru kabul edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgileri uygulama öncesi ve sonrası karşılaştırmalı olarak analiz edilerek ders tasarımının bu bileşene etkisi derinlemesine incelenmiştir. Daha sonra bulgular tanımlanıp yorumlanmıştır. Bulgular rapor edilirken birebir alıntılarla desteklenmiştir.

2. **Soru:** Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama öncesi ve sonrası)

sorusu öğretmen adaylarına sorularak öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgileri belirlenmek istenmiştir. Uygulama öncesinde uygun nedenlere yapılan atıflar doğru, uygun olmayan nedenlere yapılan atıflar yanlış, cevap verilmeyen sorular ise yanıtsız olarak kodlanmıştır. Uygulama sonrasında uygun nedenlere terminolojik isimleriyle yapılan atıflar doğru kabul edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgileri uygulama öncesi ve sonrası karşılaştırmalı olarak analiz edilerek ders tasarımının bu bileşene etkisi derinlemesine incelenmiştir. Daha sonra bulgular tanımlanıp yorumlanmıştır. Bulgular rapor edilirken birebir alıntılarla desteklenmiştir.

3. **Soru:** Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmek için nasıl bir öğretim stratejisi belirlenebilir? Açıklayınız. (Uygulama öncesi ve sonrası)

sorusu öğretmen adaylarına sorularak öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgileri belirlenmek istenmiştir. Uygulama öncesinde uygun öğretim stratejilerine yapılan atıflar doğru, uygun olmayan öğretim stratejilerine yapılan atıflar yanlış, cevap verilmeyen sorular ise yanıtsız olarak kodlanmıştır. Uygulama sonrasında uygun öğretim stratejilerine terminolojik isimleriyle yapılan atıflar doğru kabul edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgileri uygulama öncesi ve sonrası karşılaştırmalı olarak analiz edilerek ders tasarımının bu bileşene etkisi derinlemesine incelenmiştir. Daha sonra bulgular tanımlanıp yorumlanmıştır. Bulgular rapor edilirken birebir alıntılarla desteklenmiştir.

2. Kısım için (Senaryodaki her bir öğrenci için)

4. **Soru:** Bu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) nedir? Açıklayınız. (Uygulama öncesi ve sonrası)
5. **Soru:** Bu öğrencinin gerekçelendirmesi sizi ikna etti mi? Açıklayınız. (Uygulama öncesi ve sonrası)
6. **Soru:** Bu öğrencinin cevabı üzerine öğretmenin yerinde siz olsaydınız nasıl bir yaklaşım sergilerdiniz? Açıklayınız. (Uygulama öncesi ve sonrası)

soruları öğretmen adaylarına sorularak öğretmen adaylarının öğrencilerin kullandıkları argümanları (gerekçelendirme biçimlerini) tespit etme bilgileri belirlenmek istenmiştir. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar araştırmacı ve tez danışmanı tarafından Sowder ve Harel'in (1998) sınıflamasına göre kodlanıp analiz edilmiştir. Uygun gerekçelendirmelere yapılan atıflar doğru, uygun olmayan gerekçelendirmelere yapılan atıflar yanlış, cevapsız bırakılan sorular yanıtsız olarak kodlanmıştır.

7. **Soru:** Bu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması nedir? Açıklayınız. (Uygulama sonrası)
8. **Soru:** Bu öğrencinin sahip olduğu alt ispat şeması nedir? Açıklayınız. (Uygulama sonrası)
9. **Soru:** Bu öğrencinin sahip olduğu şemanın özellikleri nelerdir? Açıklayınız. (Uygulama sonrası)

soruları öğretmen adaylarına sorularak öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgileri belirlenmek istenmiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adaylarından öğrencilerin gerekçelendirme biçimlerine ilaveten öğrencilerin sahip oldukları ana ve alt şemaları da belirlemeleri istenmiştir. Uygun gerekçelendirmeler ile uygun ana ve alt şemalara yapılan atıflar doğru, uygun olmayan gerekçelendirmelere ve/veya uygun olmayan ana ve alt şemalara yapılan atıflar yanlış, cevapsız bırakılan sorular yanıtsız olarak kodlanmıştır. Öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgileri uygulama öncesi ve sonrası karşılaştırmalı olarak analiz edilerek ders tasarımının bu bileşene etkisi derinlemesine incelenmiştir. Daha sonra bulgular tanımlanıp yorumlanmıştır. Bulgular rapor edilirken birebir alıntılarla desteklenmiştir.

3.5.6. Gözlem Analizi

Araştırma sorularımızdan birisi "Uygulama aşamasında neler yapılmıştır?" sorusudur. Bu soruyla sürece dair bulgulara ulaşılması hedeflenmiştir. Gözlem notları ve kamera kayıtları ile toplanan veriler içerik analizi ile analiz edilmiştir. 15 hafta boyunca ders sırasında haftalık ders içeriğine, çözülen sorulara, yapılan etkinliklere, öğretim yöntem ve tekniklerine, ders esnasında gelişen önemli olaylara (varsa öğretmen adaylarının gelişimlerine katkı sağlayan faktörler, varsa öğretmen adaylarının gelişimlerini engelleyen faktörler, varsa öğretmen adaylarının güçlük yaşadığı hususlar, varsa beklenmedik durumlar, varsa tasarıma yönelik yapılan değişiklikler) ilişkin veriler analiz edilip bulgular açıklayıcı şekilde sunulmuştur.

3.5.7. Ders Değerlendirme Anketinin Analizi

Ders değerlendirme anketi betimsel ve içerik analizi ile analiz edilmiştir. Birinci ve ikinci sorular betimsel analiz ile üçüncü, dördüncü, beşinci ve altıncı sorular içerik analizi ile analiz edilmiştir.

Birinci ve ikinci sorular öğretmen adaylarının dersin kazanımlarına ulaşma durumlarını kendilerinin değerlendirmeleri amacıyla sorulmuş olup betimsel analiz ile analiz edilmiştir. Ulaşılan kazanımlar kategorileri oluşturmaktadır. Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgisi ile ilgili kazanımlara ulaşma durumlarına ilişkin öz-değerlendirmelerine ait bulgular tablolaştırılarak raporlaştırılmıştır. Ayrıca bulgular birebir alıntılarla desteklenmiştir.

Üçüncü soruya verilen cevapların analizinde dersin içeriği; dersin içeriğinin güçlü ve zayıf yönleri olmak üzere iki geniş çerçevede ele alınmıştır. Öğretmen adaylarının açık uçlu bu soruya verdikleri cevaplara dayalı olarak kategoriler oluşturulmuş ve bu kategorilere giren ifadelerin frekansları belirlenmiş ve bulgular tablolaştırılarak rapor edilmiştir.

Dördüncü soruya verilen cevapların analizinde dersin veriliş (işleniş) yöntemi; dersin veriliş yönteminin güçlü ve zayıf yönleri olmak üzere iki geniş çerçevede ele alınmıştır. Öğretmen adaylarının açık uçlu bu soruya verdikleri cevaplara dayalı olarak kategoriler oluşturulmuş ve bu kategorilere giren ifadelerin frekansları belirlenmiş ve bulgular tablolaştırılarak rapor edilmiştir.

Beşinci soruya verilen cevapların analizinde dersin değerlendirme sistemi ve araçları; dersin değerlendirme sistemi ve araçlarının güçlü ve zayıf yönleri olmak üzere iki geniş çerçevede ele alınmıştır. Öğretmen adaylarının açık uçlu bu soruya verdikleri cevaplara dayalı olarak kategoriler oluşturulmuş ve bu kategorilere giren ifadelerin frekansları belirlenmiş ve bulgular tablolaştırılarak rapor edilmiştir.

Altıncı soruda dersin daha faydalı olması için neler yapılabileceğiyle ilgili açık uçlu soruya öğretmen adaylarının verdiği cevaplar önce kodlanmış daha sonra kategori ve temalar oluşturulup tablo halinde rapor edilmiştir.

BÖLÜM IV: BULGULAR

Açımlayıcı sıralı karma yöntem deseninde önce nicel bulgular, sonra da nitel bulgular rapor edilir (Creswell, 2014). Fakat sonrasında bulguların birbirleriyle ilişkili ve bütünleşik biçimde özetlenmesi, yorumlanması ve tartışılması gerekmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2016).

Tasarım araştırmaları rapor edilirken “tasarımın amaçları ve unsurları”, “uygulamanın yapıldığı ortam”, “her aşamanın tasvir edilmesi”, “elde edilen sonuçlar”, “öğrenilen dersler” ayrıntılı yazılmalıdır (Collins, Joseph ve Bielaczyc, 2004, s. 38-39).

Bu bölümde ders tasarımının aşamalarına yönelik bulgulara yer verilmiştir. ADDIE Modelinin birinci döngüsündeki analiz, tasarım, uygulama, geliştirme ve değerlendirme aşamaları ile ikinci döngüsündeki yeniden analiz ve yeniden tasarım aşamalarına ait bulgulara ayrı ayrı yer verilmiştir.

4.1. Analiz Aşamasına Ait Bulgular

ADDIE Modelinin ilk aşaması analiz aşamasıdır (Peterson, 2003; Davis, 2013). Analiz aşaması araştırmanın konusuna bağlı olarak ihtiyaç analizi, görev analizi veyahut da iş analizi gibi araştırma tekniklerinden oluşabilir (McGriff, 2000). Öğretmen adaylarının dersin uygulamasından sonra ispatla ilgili sahip olmaları beklenen bilgileri ile ön bilgileri arasındaki fark ihtiyaçtır. İhtiyaç analizi sırasında belirlenmiş standartlardan veya yeterliklerden faydalanılabilir (Peterson, 2003). Bu aşamada var olan araştırmalardan sorun tespiti yapılır (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016). Analiz aşaması için problemli alana yönelik ihtiyaç analizi yapılmıştır. Öğretmen adaylarının ön bilgileri için literatür taraması yapılmıştır. Literatür taramasından öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerinde eksiklikler (Knuth 2002b; Sarı, Altun ve Aşkar, 2007; Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007; Dane, 2008; İmamoğlu, 2010; İskenderoğlu, 2010; Öçal ve Güler, 2010; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Köğce, 2012; Demiray, 2013; Miral, 2013; Pekşen-Sağır, 2013; Şengül ve Güner, 2013; İmamoğlu ve Yontar-Toğrol, 2015; Oflaz, Bulut ve Akçakın, 2016; Polat ve Akgün, 2016; Şahin, 2016; Çontay, 2017) ve pedagojik alan bilgilerinde eksiklikler (Heinze ve Reiss, 2004; Yoo, 2008; Lesseig, 2011; Pasigna ve Herrera, 2014; Knipping ve Reid, 2015; Lesseig, 2016) olduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarının sahip olmaları beklenen bilgileri için ise öğretmenlerin öğrencilere kazandırmaları gereken uluslararası standartlar (NCTM, 2000; NGA Center & CCSSO, 2010; Department for education 2013a, 2013b, 2014) ile ulusal ve uluslararası öğretmen standart ve yeterlikleri (MEB, 2008, 2011b; NBPTS, 2010) incelenmiştir. İlk olarak yapılan literatür taraması sonucunda ispat konusunun öğretmen adayları için öğrenmesi ve öğretilmesi güç bir konu olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bunun sebebinin öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerindeki eksiklikten kaynaklandığı saptanmıştır. Uluslararası standart ve yeterliklerden ise öğretmen adaylarının ispat öğretimi için iyi alan ve pedagojik alan bilgisine sahip olmaları gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmen adaylarının bu eksiklerini gidermek adına kapsamlı ve sürdürülebilir bir lisans dersi tasarlanmaya karar verilmiştir. Ülkemizdeki üniversitelerin matematik ve ilköğretim matematik öğretmenliği bölümlerinde lisans ve lisansüstü düzeydeki ispatla ilgili benzer derslerin hedef, kazanım ve içerikleri incelenmiş, bu derslerden farklı olarak araştırmanın amacına uygun şekilde ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgisinin iç içe verileceği, bu derslerden farklı hedef ve kazanımlara sahip bir tasarıma ulaşılmaya çalışılmıştır. Ülkemizdeki üniversitelerde verilen ispatla ilgili dersler öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini geliştirmeyi hedeflemekten ziyade öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerini geliştirmeyi hedeflemektedir. Ancak alan bilgisinde de bu dersler öğretmen adaylarının ispat yaparken kullandıkları şemayı geliştirmeyi de hedeflememektedir. Bu aşamada ihtiyaç analizi sonuçları ile Bologna süreci göz önüne alınarak seçmeli derse ait hedefler, öğrenci kazanımları belirlenmiş ve de dersin kuramsal altyapısı oluşturulmuştur. Derse ait bilgiler forma (Ders tanıtım formu, t.y.) kaydedilmiştir.

4.1.1. Derse Ait Hedeflere İlişkin Bulgular

"Eğitimde hedefler, bireye, planlı eğitim yoluyla kazandırılacak nitelikler olarak görülebilen bilgi, beceri, tutum, ilgi ve alışkanlıklar gibi kendisinin kullanacağı düşünülen özellikler ve ulaşması istenen sonuçlardır" (Çelik, 2006, s. 2). Yapılan ihtiyaç analizine istinaden öğretmen adaylarının ön bilgileri ile sahip olmaları beklenen bilgileri arasındaki farklar öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerinde eksikler olduğunu ortaya koymuştur. Tasarlanacak olan dersin bu eksikleri gidermeye yönelik olması gerektiği düşünülmüştür. Bunun için bu araştırmada tasarlanan ders için iki hedef belirlenmiştir. Bu hedeflerin iki tanesi de bilişsel alana yönelik hedeflerdir. Bu hedefler Tablo 4.1'de sunulmuştur.

Tablo 4.1. Tasarlanan Dersin Hedefleri

Tasarlanan Dersin Hedefleri	
Bilişsel Alana Yönelik Hedefler	Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerinin geliştirilmesi
	Öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin geliştirilmesi

4.1.2. Derse Ait Öğrenci Kazanımlarına İlişkin Bulgular

İhtiyaç analizi sonuçları esas alınarak öğretmen adaylarının dersin uygulamasından sonra sahip olmaları beklenen ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerine yönelik kazanımlar belirlenmeye çalışılmıştır. Ayrıca bu araştırmada ispatla ilgili alan bilgisine ait kazanımlar ve ispatla ilgili pedagojik alan bilgisine ait kazanımlar araştırmanın problem durumunda ve literatür taramasında referans alınan çalışmalar incelenerek oluşturulmuştur.

Dersin kazanımları belirlenirken öğretmen adaylarının duyuşsal ve bilişsel özellikleri, dersin toplam süresi, dersin seviyesi (lisans) göz önüne alınmıştır. Ayrıca kazanımların geliştirilen veri toplama araçlarıyla ölçülebilir olmasına önem verilmiştir. Tasarlanan ders için toplamda altı adet kazanım belirlenmiştir. Bunlardan iki tanesi ispatla ilgili alan bilgisine ait kazanım, dört tanesi de ispatla ilgili pedagojik alan bilgisine ait kazanımdır.

Tezin literatür taraması bölümünde öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerindeki eksiklerin farklı ispat yöntemlerini bilmemeleri ve/veya uygulayamamaları ve analitik şemada ispat yapamamaları olarak belirlenmiştir. Ancak öğretmen adaylarının bu bilgilerinin gelişmiş olması gerekmektedir. Bu yüzden alan bilgisine ait bunları içeren iki kazanım belirlenmiştir. Alan bilgisine yönelik kazanımlar belirlenirken Bloom taksonomisinin (Bloom, Englehart, Furst, Hill ve Krathwohl, 1956) basamakları dikkate alınmıştır. Bilişsel alana yönelik öğrenme basamakları basitten karmaşığa bilgi, kavrama, uygulama, analiz, sentez, değerlendirme şeklinde sıralanır (Bloom, Englehart, Furst, Hill ve Krathwohl, 1956). Dersin uygulamasının sonunda öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerinin bilişsel alanın en üst basamağı olan değerlendirme basamağında olması beklenmektedir. Değerlendirme basamaklarının göstergelerinden birisi “ispat etmedir”. Öğretmen adaylarının hem farklı ispat yöntemleri kullanarak ispat yapmaları hem de bu ispatları yaparken en üst seviye olan analitik şemaya sahip olmaları beklenmektedir.

Tezin literatür taraması bölümünde öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerindeki eksiklerin ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit edememeleri, ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklayamamaları, bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleyememeleri ve de öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit edememeleri olarak belirlenmiştir. Ancak öğretmen adaylarının bu bilgilerinin gelişmiş olması gerekmektedir. Bu yüzden pedagojik alan bilgisine ait bunları içeren dört kazanım belirlenmiştir. Pedagojik alan bilgisine yönelik kazanımlar belirlenirken Bloom taksonomisinin (Bloom, Englehart, Furst, Hill ve Krathwohl, 1956) yine yukarıda bahsedilen basamakları dikkate alınmıştır. Dersin uygulamasının sonunda öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin bilişsel alanın en üst basamağı olan değerlendirme basamağında olması beklenmektedir. Kazanım yüklemleri olan tespit etme, açıklama ve belirleme değerlendirme basamağının göstergeleridir. Öğretmen adaylarının gelecekteki derslerinde öğrencilerin ispatla ilgili yaşadıkları farklı güçlükleri tespit edebilmesi, bu güçlüklerin nedenlerini açıklayabilmeleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek farklı öğretim stratejilerini belirlemeleri ve uygulamaları beklenmektedir. Ayrıca öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etmeleri ve bunlara yönelik müdahale geliştirmeleri beklenmektedir.

4.1.2.1. İspatla İlgili Alan Bilgisine Ait Kazanımlara İlişkin Bulgular

Tasarlanan dersin ispatla ilgili alan bilgisine ait iki adet kazanımı vardır. Bu kazanımlar Tablo 4.2’de sunulmuştur.

Tablo 4.2. Dersin İspatla İlgili Alan Bilgisine Ait Kazanımları

	İspatla İlgili Alan Bilgisine Ait Kazanımlar
Kazanım 1	Öğretmen adayı farklı ispat yöntemlerini bilir ve uygular.
Kazanım 2	Öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır.

4.1.2.2. İspatla İlgili Pedagojik Alan Bilgisine Ait Kazanımlara İlişkin Bulgular

Tasarlanan dersin ispatla ilgili pedagojik alan bilgisine ait dört adet kazanımı vardır. Bu kazanımlar Tablo 4.3'de sunulmuştur.

Tablo 4.3. Dersin İspatla İlgili Pedagojik Alan Bilgisine Ait Kazanımları

İspatla İlgili Pedagojik Alan Bilgisine Ait Kazanımlar	
Kazanım 3	Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit eder.
Kazanım 4	Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklar.
Kazanım 5	Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirler.
Kazanım 6	Öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder.

4.1.3. Dersin Kuramsal Altyapısına İlişkin Bulgular

Dersin içeriğinden önce kuramsal altyapısı belirlenir. Dersin Kuramsal Altyapısı hedefler, kazanımlar, dersin uygulama aşaması için belirlenen zaman dilimi (15 hafta), öğretmen adaylarının duyuşsal ve bilişsel özellikleri ve literatür taramasında bahsedilen kavramsal çerçevedeki tüm bileşenler ile benzer ders tasarımları dikkate alınarak oluşturulmuştur. Kısaca ders

- Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerini geliştirecek bilgileri içermelidir
- Öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini geliştirecek bilgileri içermelidir

Bu araştırmada öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgileri farklı ispat yöntemlerini bilip uygulayabilme bilgileri ve ispat yaparken kullandıkları ispat şemaları bileşenlerinde incelenmiştir. Kazanımlarda bu doğrultuda hazırlanmıştır. Bu yüzden dersin kuramsal altyapısı oluşturulurken ispat yöntemlerini ve ispat şemalarını içermesi gerektiğine karar verilmiştir. İspat yöntemlerinin sınıflandırılmasında literatürden faydalanılmıştır (Bkz. 2.4.1. İspat Yöntemleri). İspat şemalarının sınıflaması için de Sowder ve Harel'in (1998) taksonomisi (Bkz. 2.4.2. İspat Şemaları) kullanılacaktır. Bu taksonominin seçilmesinin sebebi bu sınıflamanın öğrencilerin ispat yaparken veya iddialarını gerekçelendirirken başvurabilecekleri tüm kaynakları ve referansları içermesidir. İspatın hiçbir delile dayandırılamamasından, ispatın matematiksel akıl yürütmeye dayandırılıp formal ve aksiyomatik bir yapı içinde yapılmasına kadar tüm gerekçelendirme tipleri bu sınıflama içerinde yer almaktadır. Ayrıca bu sınıflamayı Sowder ve Harel (1998) lisans düzeyindeki öğrencileri gözlemleyerek oluşturdukları için bu çalışma için de uygundur.

Bu araştırmada öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgileri ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgileri, bu güçlüklerin nedenlerini açıklama bilgileri, bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgileri ve öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgileri bileşenlerinde incelenmiştir. Kazanımlarda bu doğrultuda hazırlanmıştır. Bu yüzden dersin kuramsal altyapısı oluşturulurken ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini, ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini, ispatlamaya yönelik öğretim stratejilerini ve ispat şemalarını içermesi gerektiğine karar verilmiştir. İspatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin sınıflandırılmasında literatürden faydalanılmıştır (Bkz. 2.5.1. İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlükleri). İspatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerin nedenlerinin sınıflamasında Cornu'nun (1991) çalışmasından yararlanılmıştır. Bu sınıflamanın kullanılmasının sebebi bu çalışmada açıklanan sınıflamaların ispatlama için uygun olmasıdır. İspatlamaya yönelik öğretim stratejilerinin sınıflandırılmasında literatürden faydalanılmıştır (Bkz. 2.5.3. İspatlamaya Yönelik Öğretim Stratejileri). Öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarının sınıflamasında yine yukarıda belirtilen sebeplerle Sowder ve Harel'in (1998) sınıflaması kullanılmıştır.

Kavramsal çerçevede de belirtildiği gibi ispatla ilgili alan bilgilerinin ve ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin karşılıklı olarak birbirlerini biçimlendirdiği düşünülerek tasarlanan dersin bu kuramsal alt yapıda olması gerektiğine karar verilmiştir.

4.2. Tasarım Aşamasına Ait Bulgular

Etkili bir tasarım yapmak için öğrencilerin bilişsel düzeyleri, kişilerarası etkileşim düzeyleri, öğrencilerin sınıf seviyeleri, öğrencilerin ulaşabilecekleri veya kullanabilecekleri kaynaklar, kurumsal seviye veya okul seviyesi gibi iç içe geçmiş birçok farklı yön vardır (Collins, Joseph ve Bielaczyc, 2004). Bu aşamada analiz aşamasından doğan ihtiyaca binaen tasarım aşamasında matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarlanmış, dersin öğrenme-öğretme durumları düzenlenmiş, dersin değerlendirme sistemi ve değerlendirme araçları oluşturulmuş, dersin matematik öğretmenliği program çıktılarına katkı düzeyleri belirlenmiştir. Tüm bunlar yapılırken bir önceki aşamanın çıktıları olan dersin hedefleri, derse ait öğrenci kazanımları ve dersin kuramsal altyapısı dikkate alınmıştır. Ders tasarımı canlı ve dinamik bir yapıya sahiptir. Uygulama aşamasından sonra aynen kalabileceği gibi geliştirilip yeniden tasarlanabilir.

4.2.1. Tasarlanan Dersin İçeriğine ve Ders Akışına İlişkin Bulgular

Belirlenen hedefler ve kazanımlara ulaşmak için "**ne öğretelim**?" sorusuna yanıt aranarak ders kapsamı içerisinde değinilmesi ve zaman ayrılması gereken ünite ve konular belirlenir (Çelik, 2006, s. 3). Dersin içeriği aşağıdaki ölçütler göz önüne alınarak hazırlanmıştır (Baki, 2015, s. 365).

a) Geçerlik ve Güvenirlik
b) Bilimsellik
c) İlgi çekicilik
d) Faydalılık
e) Öğrenebilirlik
f) Sosyal Gerçeklerle Tutarlılık
g) Hedeflere Uygunluk
h) Uygulanabilirlik

Geçerlik ve Güvenirlik: Ders içeriği geçerli ve güvenilir bilgiler içermektedir.
Bilimsellik: Ders içeriği lisans düzeyinde bilimsel bilgilerden oluşmaktadır. Ayrıca onları araştırmaya sevk edecek niteliktedir.
İlgi çekicilik: Ders içeriğinde öğretmen adaylarının ilgisini çekecek bilgilere yer verilmiştir.
Faydalılık: Ders içeriği öğretmen adaylarının hem kalan öğrencilik hayatlarına hem de gelecekteki öğretmenlik hayatlarına fayda sağlayacak şekilde biçimlendirilmiştir.
Öğrenebilirlik: Ders içeri öğretmen adaylarının duyuşsal ve bilişsel düzeylerine uygun olarak oluşturulmuştur.
Sosyal Gerçeklerle Tutarlılık: Dersin içeriği öğretmen adaylarının sosyal özelliklerine göre hazırlanmıştır.
Hedeflere Uygunluk: Dersin içeriği dersin hedefleri göz önüne alınarak hazırlanmıştır.
Uygulanabilirlik: Ders içeriği 15 haftalık ders akışı içerisinde uygulanabilecek şekilde hazırlanmıştır.

Buraya kadar olan süreç sonunda ders içeriği ve ders akışı aşağıdaki şekilde tasarlanmıştır. Dersin içeriği bir eğitim-öğretim dönemine (15 haftaya) yayılarak ders akışı oluşturulmuştur.

Tablo 4.4. Ders Bilgileri

Ders Bilgileri						
Müfredat Yılı	**Ders Adı**	**Kodu**	**Yarıyıl**	**T+U Saat**	**Kredi**	**AKTS**
2017-2018	Matematik Eğitiminde İspat	MAT-AS2,3 grubu EGT2085	Bahar	2+0	3	3
Ön Koşul Dersleri	Yok					
Dersin Dili	Türkçe					
Dersin Seviyesi	Lisans					
Dersin Türü	Seçmeli					
Dersin Amacı	Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerinin geliştirilmesi					
Dersin İçeriği	İspatın öğretimi ve öğrenimi üzerine bilgiler					
Ders Kategorisi						

Matematik ve Temel Bilimler	%50	Mühendislik Bilimleri	%0	Mühendislik Tasarımı	%0	Sosyal Bilimler	%0
Eğitim Bilimleri	%50	Fen Bilimleri	%0	Sağlık Bilimleri	%0	Alan Bilgisi	%0

Tablo 4.5. Ders İçeriği ve Akışının İlk Hali

Hafta	Ders Akışı
1	Dersin tanıtımı ve öğretmen adaylarının ön bilgileri için veri toplama
2	İspatın modern bileşenleri
3	İspat ve ispatlama
4	İspat yöntemleri
5	İspat türleri
6	İspatlama seviyeleri ve ispat şemaları
7	İspatla ilgili alan bilgisine yönelik makalelerin incelenmesi
8	Vize Sınavı
9	İspata yönelik öğrenci güçlükleri ve nedenleri
10	İspata yönelik öğrenci güçlükleri ve nedenleri üzerine etkinlik
11	İspata yönelik öğretim yöntem ve stratejileri
12	İspata yönelik öğretim yöntem ve stratejileri üzerine etkinlik
13	Teknoloji destekli ispat öğretimi ve dinamik geometri yazılımları ile ispatlama
14	Ulusal ve uluslararası öğretim programlarında ispatın yeri, ispata yönelik öğrenci standartları ve ispata yönelik öğretmen yeterlikleri
15	Ders değerlendirme ve veri toplama

4.2.2. Tasarlanan Dersin Öğrenme-Öğretme Durumlarına İlişkin Bulgular

Belirlenen hedeflere ulaşmak için ne öğretelim sorusundan sonra "**nasıl öğretelim?**" sorusuna yanıt aranır (Çelik, 2006, s. 3). Nasıl öğretelim sorusunun cevabı öğrenme-öğretme durumlarının nasıl düzenleneceği ile ilgilidir. Öğrenme-öğretme durumları TtA ve ADDIE Modelinin özellikleri ile etkili ispat öğretiminin gereksinimleri göz önünde bulunarak düzenlenmiştir.

TtA'lar pragmatik, müdahaleci ve işbirlikçidir (Ford, McNally ve Ford, 2017). Katılımcılar öğrencilik hayatlarında ve gelecekteki öğretmenlik hayatlarında kendilerine fayda sağlayacak bilgileri bu müdahale araştırmasında araştırmacı ile işbirliği içerisinde edineceklerdir. Bu işbirliği bir takım çalışmasını gerektirir. Öğretim tasarımlarında uygulamacı ve katılımcılar takım çalışması içerisindedirler (Gustafson ve Branch, 2002). Bu yüzden tasarlanan bu derste dersi veren araştırmacı ile katılımcılar dersin verildiği dönem boyunca takım çalışması içerisinde araştırmayı yürüteceklerdir.

TtA'lar tüm öğretim tasarımları gibi öğrenci merkezli, amaç odaklı ve deneyseldir (Gustafson ve Branch, 2002). Tasarlanan derste geleneksel model olan öğretmen merkezli öğretim yerine öğrencinin süreç içinde aktif öğrenen rolünde olması hedeflenmektedir. Öğrencilerin aktif öğrenen rolünde olması için tasarlanan derste öğrenci merkezli öğretim benimsenmiştir. Ayrıca bu araştırmada deneysel çalışmalardaki gibi bağımsız değişkenler (ders tasarımı) iyileştirilip bağımsız değişkenin etkilediği bağımlı değişkenlerin (ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgisi) geliştirilmesi amaçlanmıştır.

Etkili ispat öğretiminde süreç odaklı görüş hâkim olmalıdır (Yoo, 2008). İspat öğretiminde ürün odaklı görüş öğrencilerin ispatları ezberlemesine sebebiyet vermekte ve bu yüzden etkili ispat öğretimi gerçekleştirilememektedir. Araştırmamızın ispat öğretimi bölümünde bahsettiğimiz gibi ispat öğretiminde ezber eğitimin her seviyesinde kaçınılması gereken bir durumdur. Bu yüzden bu araştırmada öğrencilere bir ürün olarak ispatın sunulması yerine öğrenci merkezli öğretiminde gereği olarak öğrenci ispatlama sürecinin içine dâhil edilecektir. Yukarıda yazılanlar birlikte düşünüldüğünde tasarlanan ders için yapılandırmacı yaklaşım öğretim modeli benimsenmiştir.

Öğrenme-öğretme ortamı öğrencilerin bireysel veya grup olarak çalışmalarına olanak tanıyacak şekilde düzenlenmiştir. 22 öğretmen adayı sınıfta dört büyük masa etrafına dörder ya da beşer kişilik gruplar halinde oturacak şekilde düzenleme yapılmıştır. Bu düzen öğretmen adaylarının istenildiğinde bireysel istenildiğinde grup olarak çalışmalarına imkân tanıyacaktır. Sınıfta bir adet projeksiyon cihazı, bir adet internet erişimi olan masaüstü bilgisayar, bir adet kamera, biri akıllı tahta, biri de beyaz duvara monte kalemli yazı tahtası bulunmaktadır. Sınıftaki internet erişimi olan bilgisayar, projeksiyon cihazı ve kamera gibi teknolojik cihazların kontrolü yapılmış ve derse hazır hale getirilmiştir. Öğretmen adaylarının oturma düzenleri gerektiğinde iki tahtayı da net görecek şekilde düzenlenmiştir. Sınıftaki kamera tüm sınıfı kaydedecek şekilde konumlandırılmıştır.

Ayrıca her hafta derste yapılan sunumların, anlatılan konuların ve yapılan sınıf içi çalışmaların yazılı dökümlerinin ve o haftaya ait verilen ödevlerin araştırmacı tarafından yükleneceği, öğretmen adaylarının da ödevlerini teslim edip, sorular sorabileceği etkileşimli bir öğrenme-öğretme ortamı olan online bir sınıf oluşturulmuştur.

4.2.3. Tasarlanan Dersin Değerlendirme Sistemi ve Değerlendirme Araçlarına İlişkin Bulgular

Eğitim-öğretim süreçlerinin ana unsurlarından olan ölçme ve değerlendirme kavramları sıklıkla birbiri ile karıştırılmaktadır (Bektaş ve Akdeniz-Kudubeş, 2014). Ölçme "herhangi bir niteliği gözlemek ve gözlem sonucunu sayı veya sıfatlarla ifade etmektir" lakin değerlendirme "ölçme sonuçlarını bir ölçüte veya ölçütlere vurarak ölçülen nitelik hakkında bir değer yargısına varma sürecidir" (Turgut ve Baykul, 2013, s. 3). Bireylerin belirlenen hedeflere ulaşıp ulaşmadığını, ulaştıysa ne seviyede ulaştığını belirlemek için öncelikle bir değerlendirme sistemine ihtiyaç vardır. Ayrıca bu değerlendirme sistemi içerisinde değerlendirme araçları ya var olanlardan seçilmeli yoksa da oluşturulmalıdır.

Çoktan seçmeli sorular, doğru yanlış soruları, eşleştirme soruları, boşluk doldurma soruları, kısa cevaplı sorular, uzun cevaplı sorular geleneksel ölçme değerlendirme teknikleridir (Turan-Oluk ve Ekmekci, 2017). Değerlendirme araçları bireylerin hedeflere ulaşıp ulaşmadığını ölçecek nitelikte olmalıdır, ayırıcılığı olan sorulardan oluşmalıdır ve sınava girenlere uygun süre verilmelidir (Bektaş ve Akdeniz-Kudubeş, 2014). Değerlendirme araçlarının hedef davranışları ölçme düzeylerine göre değerlendirme sistemi içerisinde etkisi belirlenmelidir. Değerlendirme araçları bir ara (vize) sınavı, iki adet ödev ve bir adet final sınavından oluşmaktadır. Değerlendirme araçları katılımcılara bireysel olarak uygulanmıştır. Ara sınav, ödevler ve final sınavı katılımcıların öğrenmelerine katkı sağlayacak şekilde hazırlanmış ve öğretmen adaylarına dönütler verilmiştir.

Ara sınavın geçerlik çalışması, sınav süresi ve yarıyıl sonuna katkı düzeyi için uzman görüşleri alınmıştır. 100 puan üzerinden değerlendirilen bu ara sınavın yarıyıl sonu notuna katkı düzeyinin %30 olarak değerlendirilmesine karar verilmiştir. Ara sınav süresi bir saat olarak belirlenmiştir.

Uygulama aşamasının ders işlenen her haftasında öğretmen adaylarına o hafta işlenen konu ile ilgili ödevler verilmiştir. Ödevlerin geçerlik çalışması, ödevler için verilecek süre ve yarıyıl sonuna katkı düzeyi için uzman görüşleri alınmıştır. 100’er puan üzerinden değerlendirilen bu iki ödevin ortalamasının yarıyıl sonu notuna katkı düzeyinin %20 olarak değerlendirilmesine karar verilmiştir. Ara sınavına kadar ders işlenen her haftada verilen ödevlerin son teslim tarihi olarak ara sınav tarihi, ara sınavdan final sınavına kadar olan her haftada verilen ödevlerin son teslim tarihi olarak da final sınav tarihi düşünülmüştür. Ara sınavına kadar verilen ödevler ara sınavı öncesi, ara sınavından final sınavına kadar verilen ödevler final sınavı öncesi değerlendirilmiştir.

Final sınavı olarak İSABA ve İSPABA’nin kullanılması ve süre olarak iki saat verilmesi kararlaştırılmıştır. Bu araçlarının geçerlik ve güvenirlik çalışmaları yapılmıştır. Ayrıca final sınavının süresi ve yarıyıl sonu notuna katkı düzeyi için de uzman görüşleri alınmıştır. 100’er puan üzerinden değerlendirilen bu iki sınavın ortalamasının yarıyıl sonu notuna katkı düzeyinin %50 olarak değerlendirilmesine karar verilmiştir.

Tablo 4.6. Desin Değerlendirme Sistemi

Değerlendirme Sistemi		
Yarıyıl İçi Çalışmaları	**Sayısı**	**Katkı Yüzdesi**
Ara Sınav	1	30
Kısa Sınav	0	0
Ödev	2	20
Devam	0	0
Uygulama	0	0
Proje	0	0
Yarıyıl Sonu Sınavı	1	50
Arazi Çalışması	0	0
Atölye Çalışması	0	0
Laboratuvar	0	0
Sunum/Seminer Hazırlama	0	0
Toplam	**4**	**100**

Tablo 4.7. Derse Ait AKTS / İş Yükü Tablosu

AKTS / İş Yükü Tablosu			
Etkinlik	**SAYISI**	**Süresi (Saat)**	**Toplam İş Yükü (Saat)**
Ders Süresi	14	2	28
Sınıf Dışı Çalışma Süresi	14	4	56
Ödevler	2	2	4
Sunum/Seminer Hazırlama	0	0	0
Ara Sınavlar	1	4	4
Uygulama	0	0	0
Laboratuvar	0	0	0
Proje	0	0	0
Yarıyıl Sonu Sınavı	1	4	4
Arazi Çalışması	0	0	0
Atölye Çalışması	0	0	0
Toplam İş Yükü	32		96
Toplam İş Yükü / 30 (s)			96/32
Dersin AKTS Kredisi			**3**

4.2.4. Tasarlanan Dersin Matematik Öğretmenliği Program Çıktılarına Katkı Düzeylerine Ait Bulgular

M.Ü. A.E.F. Matematik Öğretmenliği web sitesinden alınan program çıktılarına (Program çıktıları, t.y.) tasarlanan dersin katkı düzeyleri aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

Tablo 4.8. Dersin Program Çıktılarına Katkı Düzeyleri

Dersin Program Çıktılarına Katkı Düzeyleri						
No	**Program Öğrenme Çıktıları**	**Katkı Düzeyi**				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	Matematik alanındaki kavramları, fikirleri ve verileri değerlendirebilir, karmaşık problem ve konuları analiz edebilir ve tartışabilir.					X
2	Bilimi toplumun ve günlük yaşamın ayrılmaz bir parçası olarak takdir eder.					X
3	Matematikteki temel kavramlarla ilgili yeterli bilgi birikimine sahiptir.					X
4	Matematik kullanımını gerektiren konularda verileri anlamlandırabilir, eleştirel bir şekilde değerlendirebilir, net bir şekilde yazılı ve sözlü biçimde sunabilir.					X
5	Bilgi ve iletişim teknolojileri konusunda yeterli bilgi ve beceriye sahip olduğunu bu teknolojileri öğretim ortamında etkin bir şekilde kullanarak gösterebilir.					X
6	Öğrencilerin gelişim özelliklerini, bireysel farklılıklarını; konu alanının özelliklerini ve kazanımlarını dikkate alarak en uygun öğretim stratejisi, yöntem ve tekniklerini uygulayabilir.					X
7	Etkin bir öğretim planı (kısa ve uzun vadeli) hazırlama becerisine sahiptir.					X

No	Program Öğrenme Çıktıları	Katkı Düzeyi				
		1	2	3	4	5
8	Öğrencilere sınıfta kendilerini özgürce ifade edebilecekleri bir öğrenme ortamı sağlayabilir, öğrencilerin derse karşı ilgi ve güdüsünü arttırabilir ve öğrencilere dönüt verebilir.					X
9	Hayat boyu öğrenme kariyer gelişimi için temel sağlayacak iletişim, problem çözme ve analitik düşünme becerileri gösterir.				X	
10	Geleneksel ve alternatif ölçme ve değerlendirme yöntemlerini bilir ve uygular.			X		
11	Matematik ve Matematik Eğitimi Alanı ile ilgili verilerin toplanması, yorumlanması, duyurulması aşamalarında toplumsal, bilimsel ve etik değerleri gözetme yeterliliğine sahiptir.		X			
12	Matematik Öğretim Programı standartlarını bilir ve bunlara uygun bir öğretim programı gerçekleştirebilir.				X	
13	Kendi uygulamaları üzerine öz-değerlendirme yapabilir ve öğretme becerilerini eleştirel bir şekilde analiz edebilir.					X
14	Uygulamada karşılaşılan öngörülmeyen karmaşık sorunları çözmek için bireysel ve ekip üyesi olarak sorumluluk alabilir.					X
15	Alanı ile ilgili konularda, sosyal sorumluluk, etik değerler ve sosyal güvenlik hakları bilgisi ve bilincine sahiptir.	X				

4.3. Geliştirme Aşamasına Ait Bulgular

Dersin geliştirme aşamasında, tasarım aşamasında tasarlanan ders tasarımı hakkında uzman görüşleri alınarak ders tasarımına uygulama öncesi son hali verilmiştir. Matematik eğitimi alanında uzman biri Prof. Dr., ikisi Doç. Dr. ve ikisi Dr. Öğr. Üyesi unvanlı beş akademisyenden görüş alınarak tasarım uygulama aşamasına hazır bir ürün haline getirilmiştir. Uzman görüşlerini almak için beş akademisyene tezi amacı, kapsamı, veri toplama araçları, toplanan verilerin analizi ve geliştirme aşamasına kadar olan bulguların sunulduğu bir saatlik seminer verilmiştir. Uzman görüşleri sonrasında geliştirme aşamasındaki ders tasarımı tasarım aşamasındaki ders tasarımından bir hayli farklılaşmıştır. İlk hafta ders seçim ve kayıt haftası olduğundan öğretmen adaylarının ön bilgileri için veri toplamanın zor olacağı bu yüzden veri toplamanın ikinci haftaya bırakılması önerilmiştir. Ülkemizdeki üniversitelerin ilköğretim ve matematik öğretmenliği bölümlerinin müfredatlarında bulunan ispatla ilgili derslerden farklı olarak her bir ispat yöntemi için bir hafta ayrılması ve o haftada ispat yönteminin anlatılıp yeterli sayıda örnek yapılması, o yöntem ile ilgili güçlüklere, o yöntem ile ilgili güçlüklerin nedenlerine ve o yöntem ile ilgili güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerine yer verilmesi önerilmiştir. Tüm bu öneriler göz önünde bulundurularak ders tasarımın ikinci hali aşağıdaki gibi oluşturulmuştur. Bu aşamada ders tasarımı artık uygulanabilir haldedir. Yani uygulama aşaması öncesindeki son halidir.

Tablo 4.9. Ders İçeriği ve Akışının İkinci Hali

Hafta	Ders Akışı
1	Dersin tanıtımı
2	Öğretmen adaylarının ön bilgileri için veri toplama
3	Aksiyomatik yapı içerisinde ispatın modern bileşenleri
4	İspat ve ispatlama
5	İspat şemaları ve ispat şemaları üzerine etkinlik
6	İspatlamaya yönelik öğrenci güçlükleri, bu güçlüklerin nedenleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri İspatlamaya yönelik öğrenci güçlükleri, bu güçlüklerin nedenleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri üzerine etkinlik
7	Tümevarımla ispat yöntemi Tümevarımla ispat yöntemi ile ilgili örnekler Tümevarımla ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri Tümevarımla ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler ve nedenleri Tümevarımla ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri
8	Vize Sınavı
9	Doğrudan ispat yöntemi Doğrudan ispat yöntemi ile ilgili örnekler Doğrudan ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri Doğrudan ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler ve nedenleri Doğrudan ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri
10	Durum yoluyla ispat yöntemi Durum yoluyla ispat yöntemi ile ilgili örnekler Durum yoluyla ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri Durum yoluyla ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler ve nedenleri Durum yoluyla ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri
11	Tüketerek ispat yöntemi Tüketerek ispat yöntemi ile ilgili örnekler Tüketerek ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri Tüketerek ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler ve nedenleri Tüketerek ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri
12	Çelişki ile ispat yöntemi Çelişki ile ispat yöntemi ile ilgili örnekler Çelişki ile ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri Çelişki ile ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler ve nedenleri Çelişki ile ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri
13	Olmaya ergi yöntemiyle ispat Olmaya ergi yöntemiyle ispat ile ilgili örnekler Olmaya ergi yöntemiyle ispat ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri Olmaya ergi yöntemiyle ispat ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler ve nedenleri Olmaya ergi yöntemiyle ispat ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri
14	Aksine örnek verme yöntemi Aksine örnek verme yöntemi ile ilgili örnekler Aksine örnek verme yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri Aksine örnek verme yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler ve nedenleri Aksine örnek verme yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri
15	Ders değerlendirme ve veri toplama

4.4. Uygulama Aşamasına Ait Bulgular

Uygulama aşamasında bir önceki aşamada geliştirilen ürün (öğretim programı, ders tasarımı, materyal ya da model) gerçek bağlamında kullanılır veya uygulanır (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016). Tasarım araştırmalarında uygulama esnasında tasarımın unsurlarından herhangi birinin çalışmadığı veya yetersiz kaldığı görülebilir ve bunun sebepleri araştırıldıktan sonra sorunları düzeltmek için gerekli önlemler alınır (Collins, Joseph ve Bielaczyc, 2004). Ders tasarımının uygulaması 2017-2018 Eğitim Öğretim Yılı Bahar Döneminde Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümü 2. sınıfında öğrenim gören öğrencilere tasarlanan ders içeriği ve ders akışı çerçevesinde yapılmıştır. Uygulamaya bu dersi seçmeli olarak alan 22 öğretmen adayı katılmıştır. Uygulama bir eğitim öğretim yarıyılı boyunca yani 15 hafta sürmüştür. Dersin uygulama aşaması araştırmacı tarafından gerçekleştirilmiştir. Dersin uygulama aşamasında araştırmacı ve tez danışmanı aktif birer gözlemci rolünü üstlenmişlerdir.

Derslerde farklı öğretim yöntemleri kullanılmıştır. Tasarlanan dersin kuramsal altyapısı içeriğe ve akışa yansıtılarak katılımcılara aktarılmıştır. Bunun için derste yapılandırmacı yaklaşım gereği katılımcıların ön bilgileri göz önüne alınmıştır (Çelik, 2006). Derslerde öğretmen merkezliden öğrenci merkezliye doğru sıralanmış anlatım, soru-cevap, tartışma, problem çözme, örnek olay ve senaryo temelli öğretim yöntemleri (Altun, 2001; Tok, 2017) kullanılmıştır. Dersin büyük bir bölümünde öğrenme-öğretme durumlarında düzenlendiği gibi öğrenci merkezli yaklaşım benimsenmiştir. Her dersin başında o haftanın konusu öğretmen adaylarına düz anlatım yöntemi ile anlatılmıştır. Tüm sınıf seviyeleri için kullanılabilen ve en genel öğretim yöntemi olan düz anlatım yöntemi için sunum tekniği ile tebeşir ve konuşma teknikleri kullanılmıştır (Tok, 2017). Konunun girişi için yapılan bu anlatımdan sonra anlatılanlarla ilgili soru cevap yöntemine geçilmiştir. Soru cevap yönteminde katılımcılar düşünmeye teşvik edilir (Aksu ve Doğan, 2015). Öğretmen adayları akıllarında soru işareti olan yerleri araştırmacıya sorup cevaplar almışlardır. Araştırmacı da bazı kısımlara vurgu yapmak için öğretmen adaylarına sorular sormuş onların verdikleri cevaplara dönüt sağlamıştır. Öğretmen adaylarının anlatılan konuyu analiz edebilmeleri adına tartışma yöntemine geçilmiştir.

Tartışma yönteminde küçük grup tartışma tekniği ile beyin fırtınası tekniği kullanılmıştır. Bu yöntemde konuşmaya gönüllü her öğretmen adayına söz hakkı verilmeye çalışılmıştır. Her bir ispat yöntemi ile ilgili çok sayıda örnek problem çözme yöntemi ile öğretmen adaylarına aktarılmıştır. Bu örnekler ortaöğretim ve lisans düzeyindeki ispatlardan oluşmaktaydı. Bu çalışmalar için zaman tasarrufunu sağlamak adına çalışma yaprakları kullanılmıştır. Problem çözerken etkileşim ve işbirliği için öğretmen adaylarının grup çalışmaları (dörder veya beşer kişilik) yapmalarına olanak tanınmıştır. Grup çalışmalarında katılımcılar gelişim ve motivasyonu arttıracak şekilde ortak bir hedef için küçük gruplar halinde çalışırlar (Aksu ve Doğan, 2015). Örneklerin anlaşılması belli bir düzeye geldiğinde çalışmalar bireysel çalışmalara dönmüştür. Bu çalışmaların sonunda öğretmen adaylarının her bir ispat yöntemi ile ilgili yaşadıkları güçlükler ve nedenleri ile kullandıkları ispat şemaları beyin fırtınası tekniği ile tartışılmıştır. Öğrencilerin ispatla ilgili yaşadıkları güçlükler, bu güçlüklerin nedenleri, bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri ve öğrencilerin sahip oldukları ispat şemaları öncelikle literatürden derlenen öğrenci ispatlarının ve gerçek olayların yer aldığı çalışma yaprakları üzerinde örnek olay yöntemi ile incelenmiştir. Daha sonra öğretmen adaylarının bu çalışmayı grup olarak çalışacakları gerçeğe yakın veya gerçekleşmesi mümkün olan senaryoların yer aldığı çalışma yaprakları üzerinden senaryo temelli öğretim yöntemi ile çalışılmıştır. Bu çalışmayı benzer bireysel çalışmalar izlemiştir. Örnek olay ve senaryolardaki öğrenciler ortaöğretim öğrencisi, konular ise ortaöğretime özgü konulardı. Çalışma yapraklarının kullanıldığı alan bilgisi çalışmalarında öğretmen adayları öğrenci, pedagojik alan bilgisi çalışmalarında ise öğretmen rolünü üstlenmişlerdir. Tasarım tabanlı araştırmanının gerektirdiği şekilde tüm çalışmalar araştırmacı ve öğretmen adaylarının işbirliği içerisinde gerçekleştirilmiştir. Her hafta sunum transkriptleri, çalışma yaprakları ve ödev yaprakları öğretmen adaylarına düzenli olarak dağıtılmıştır. Derse o hafta katılamayan öğretmen adayları için tüm bu çalışmalar öğretmen adaylarının erişebilecekleri sanal sınıfa yüklenmiştir. Öğretmen adayları tarafından yapılan ödevler ise sanal sınıfa son teslim tarihinden önce yüklenmiştir.

4.4.1. Birinci Hafta

Dersin ilk haftasında dersi seçen öğretmen adaylarıyla tanışma yapılmıştır. Ayrıca dersin ayrıntılı tanıtımı yapılmıştır. Dersin hedefleri, kazanımları, kuramsal altyapısı, ders içeriği ve ders akışı, değerlendirme sistemi ve araçları öğretmen adaylarına anlatılmıştır. Tüm bunları içeren ders müfredatı öğrencilere dağıtılmıştır.

Dersin araştırmacının doktora tezi kapsamında açıldığı öğretmen adaylarına açıklanmış, onlara soru sormaları için fırsat tanınmıştır. Derslerin kamera ile kaydedileceği bilgisi de öğretmen adaylarına birinci hafta söylenip kendilerinden izin alınmıştır. Ayrıca bir sonraki hafta gönüllülük esasına dayalı olarak katılımcılardan ispatla ilgili alan bilgileri ve ispatla ilgili pedagojik alan bilgileri ile ilgili veri toplanacağı söylenmiştir. Ayrıca oluşturulan online sınıfa erişim şifresi öğretmen adaylarına verilmiştir.

Etkili ispat öğretimi için düzenlemesi yapılan sınıfın öğrenme-öğretme durumu tekrar kontrol edilmiştir. Sınıftaki internet erişimi olan bilgisayar, projeksiyon cihazı ve kamera gibi teknolojik cihazların tekrar kontrolü yapılmış ve derse hazır hale getirilmiştir. Sınıftaki masaların ve kameranın konumu tekrar kontrol edilmiştir.

4.4.2. İkinci Hafta

Dersin ikinci haftası öğretmen adaylarının ön bilgilerine yönelik veri toplama haftasıdır. Veri toplanmaya geçilmeden önce öğretmen adaylarına araştırma ve katılımcı hakları ile ilgili geniş bilgi verilmiş, onlara soru sormaları ve araştırmaya katılıp katılmamalarına karar vermeleri için gerekli süre tanınmıştır. Araştırmaya katılmayı kendi rızası ile kabul eden öğretmen adaylarından Ek-2'deki bilgilendirilmiş rıza formunu dikkatlice okuyup imzalamaları istenmiştir. Araştırmacı ve katılımcı tarafından iki nüsha halinde imzalanan formlardan biri araştırmacıda diğeri de katılımcıda kalmıştır. Derse katılan 22 öğretmen adayından İSABA ile alan bilgilerine yönelik, İSPABA ile pedagojik alan bilgilerine yönelik veriler toplanmıştır. Tüm veriler tek seferde iki saatlik süre içerisinde toplanmıştır.

4.4.3. Üçüncü Hafta

Dersin ikinci haftasında toplanan veriler dersin üçüncü haftasına kadar analiz edilmiş ve teorik örnekleme tekniği ile yarı yapılandırılmış mülakat yapılacak öğretmen adayları tespit edilmiştir. Mülakata katılmaya gönüllü olan dört öğretmen adayıyla dersin üçüncü haftasında yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Hazırlanan yarı yapılandırılmış mülakat izin formu araştırmacı ve katılımcı tarafından mülakatlardan önce iki nüsha olarak imzalanmış ve imzalı birer nüshaları araştırmacı ve katılımcı tarafından alınmıştır. Mülakatlar İSABA Üzerine Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formu ve İSPABA Üzerine Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formu yardımıyla toplanmıştır. Her bir katılımcı ile mülakatlar tek bir seferde yapılmış ve yaklaşık birer saat sürmüştür.

Tasarımın üçüncü haftasının içeriği aksiyomatik yapı içerisinde ispatın modern bileşenlerini içermekteydi. Dersin üçüncü haftasının uygulama aşaması bu içeriğe sadık kalınarak aşağıdaki gibi yürütülmüştür. Bu haftaya ait Ders Gözlem Formu ve kamera kaydı analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır.

Tablo 4.10. Dersin Uygulama Aşamasının Üçüncü Haftasına Ait Bulgular

<table>
<tr><th>İçerik</th><th>Öğretim Yöntemi</th><th>Materyal</th><th>Etkinlik sayısı</th><th>Süre (dakika)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Aksiyomatik yapı içerisinde ispatın modern bileşenleri</td><td>Anlatım</td><td rowspan="2">Power Point Sunumu</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">55</td></tr>
<tr><td>Soru cevap</td></tr>
<tr><td>Aksiyomatik yapı içerisinde ispatın modern bileşenleri üzerine etkinlik</td><td>Tartışma</td><td>Çalışma yaprakları</td><td>1</td><td>20</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Aksiyomatik yapı içerisinde ispatın modern bileşenleri üzerine etkinlik</td><td>Kavram haritası</td><td rowspan="2">Çalışma yaprakları</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">25</td></tr>
<tr><td>Beyin fırtınası</td></tr>
</table>

Dersin üçüncü haftası Tablo 4.10'da görüldüğü gibi işlenmiştir. Dersin üçüncü haftasında aksiyomatik sistemlerden ve aksiyomatik yapıdan bahsedilip, aksiyomatik yapı içerisinde ispatın modern bileşenleri işlenmiştir. İspatın modern bileşenleri öncelikle terimler ve önermeler olmak üzere iki başlığa ayrılmıştır. Terimler; tanımsız terimler ve tanımlar olmak üzere iki alt başlıkta, önermeler ise teoremler, yanlış önermeler ve varsayımlar olmak üzere üç alt başlıkta incelenmiştir. Ayrıca önermeler; yargı durumlarına, yargı sayılarına ve yargı türlerine göre incelenip, önermeler cebiri ve mantıksal çıkarım kuralları anlatılmıştır. Yine teoremler; aksiyomlar, postulatlar, lemmalar ve sonuçlar olmak üzere dört alt başlığa daha ayrılıp detaylı anlatılmıştır. İlk etkinlik öğretmen adaylarının ispatın modern bileşenleri ile bunların aralarındaki ilişki ve farkları kavrayacakları çalışma yaprağıydı. İkinci etkinlik ise ispatın modern bileşenlerine ilişkin kavram haritası etkinliğiydi.

4.4.4. Dördüncü Hafta

Tasarımın dördüncü haftasının içeriği ispat ve ispatlamayı içermekteydi. Dersin beşinci haftasının uygulama aşaması bu içeriğe sadık kalınarak aşağıdaki gibi yürütülmüştür. Bu haftaya ait Ders Gözlem Formu ve kamera kaydı analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır.

Tablo 4.11. Dersin Uygulama Aşamasının Dördüncü Haftasına Ait Bulgular

İçerik	Öğretim Yöntemi	Materyal	Etkinlik sayısı	Süre (dakika)
İspat ve ispatlama	Anlatım Soru cevap Tartışma	Power Point Sunumu	1	50
Gerekçelendirme, ispatlama ve çürütme üzerine etkinlikler	Soru cevap Problem çözme Tartışma	Çalışma yaprakları	3	30
İyi ispat üzerine çalışmalar	Tartışma	Çalışma yaprakları	2	20

Dersin dördüncü haftası Tablo 4.11'de görüldüğü gibi işlenmiştir. Dersin dördüncü haftasında öğretmen adaylarına gerekçelendirme, ispat, ispatlama ve çürütme kavramları ile bunlar arasındaki ilişki ve farklar anlatılmıştır. İspatlama sürecinin neleri kapsadığı, ispatın işlevleri, ispatta olması gereken özellikler sunulmuştur. İyi bir ispatlama sürecinin nasıl yönetileceği maddeler halinde sıralanmıştır. Ardından öğretmen adaylarına bu maddeler üzerinden farklı ispatlamalar yapılmıştır. İspat yöntemleri henüz anlatılmadığı için problem çözmeye en çok benzeyen yöntem olan doğrudan ispat yöntemi ile ispatlanacak sorular seçilmiştir. Matematik eğitiminde ispatın hem amaç hem de araç olarak nasıl kullanıldığı anlatıldıktan sonra ispat öğretiminin dayanak noktaları olan ispat ve ispatlamayla ilgili ulusal ve uluslararası öğrenci standartlarından, öğretmen yeterliklerinden ve öğretim programlarının ilgili bölümlerinden bahsedilmiştir. Öğretmen adayları hem öğrenci olarak hem de geleceğin öğretmenleri olarak bu standart ve yeterliklerinden hangilerine sahip olduklarını tartışmışlardır. Gerekçelendirme, ispatlama ve çürütme üzerine birer etkinlik, iyi ispata örnek olacak iki etkinlik yapılmıştır.

4.4.5. Beşinci Hafta

Tasarımın beşinci haftasının içeriği ispat şemaları ve ispat şemaları üzerine etkinlikleri içermekteydi. Dersin beşinci haftasının uygulama aşaması bu içeriğe sadık kalınarak aşağıdaki gibi yürütülmüştür. Bu haftaya ait Ders Gözlem Formu ve kamera kaydı analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır.

Tablo 4.12. Dersin Uygulama Aşamasının Beşinci Haftasına Ait Bulgular

İçerik	Öğretim Yöntemi	Materyal	Etkinlik sayısı	Süre (dakika)
İspatlamaya yönelik çeşitli sınıflandırmalar	Anlatım Soru cevap	Power Point Sunumu	1	10
İspat şemaları (Sowder ve Harel, 1998)	Anlatım Soru cevap Tartışma	Power Point Sunumu	1	30
İspat şemaları üzerine etkinlik	Örnek olay	Çalışma yaprakları	1	20
İspat şemaları üzerine etkinlik	Senaryo	Çalışma yaprakları	2	40

Dersin beşinci haftası Tablo 4.12’de görüldüğü gibi işlenmiştir. Dersin beşinci haftasında öğretmen adaylarına sunum yoluyla öncelikle farklı araştırmacıların (Van Hiele, 1986; Balacheff, 1987, 1988; Vinner, 1991; Harel ve Sowder, 1998; Miyazaki, 2000; Waring, 2000; Raman, 2003; Weber, 2004) ispatlamaya yönelik çeşitli sınıflandırmalarından bahsedilmiştir. Sonrasında öğretmen adaylarına Sowder ve Harel’in (1998) ispat şemaları sınıflandırması anlatılmıştır. Bu sınıflamadaki ana şemalar ve bu ana şemalara ait alt şemalar öğretmen adaylarına detaylı olarak anlatılmış ve örnekleriyle sunulmuştur. Öğretmen adaylarına bir önerme üzerinden tüm ana ve alt ispat şemalarına sahip kişilerce yazılabilecek ve ikna edici bulunabilecek farklı ispat şemaları anlatılmıştır. Tüm alt şemaları içeren bir örnek olay ve tüm alt şemaları en az bir kez içeren iki senaryo etkinliği yapılmıştır. Beşinci haftaya ait bir çalışma yaprağı örneği Ek-18’de sunulmuştur.

4.4.6. Altıncı Hafta

Tasarımın altıncı haftasının içeriği ispatlamaya yönelik öğrenci güçlükleri, bu güçlüklerin nedenleri, bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri ile tüm bunlar üzerine etkinlikleri içermekteydi. Dersin altıncı haftasının uygulama aşaması bu içeriğe sadık kalınarak aşağıdaki gibi yürütülmüştür. Bu haftaya ait Ders Gözlem Formu ve kamera kaydı analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır.

Tablo 4.13. Dersin Uygulama Aşamasının Altıncı Haftasına Ait Bulgular

İçerik	Öğretim Yöntemi	Materyal	Etkinlik sayısı	Süre (dakika)
İspatlamaya yönelik öğrenci güçlükleri, bu güçlüklerin nedenleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri	Anlatım Soru cevap Tartışma	Power Point Sunumu	1	25
İspatlamaya yönelik öğrenci güçlükleri, bu güçlüklerin nedenleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri üzerine etkinlik	Örnek olay	Power Point Sunumu	1	25
İspatlamaya yönelik öğrenci güçlükleri, bu güçlüklerin nedenleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri üzerine etkinlik	Senaryo	Çalışma yaprakları	2	50

Dersin altıncı haftası Tablo 4.13'de görüldüğü gibi işlenmiştir. Dersin altıncı haftasında öğretmen adaylarına literatürde karşılaşılan ispatlamaya yönelik öğrenci güçlükleri, bu güçlüklerin nedenleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri anlatılmıştır. Literatürdeki güçlük yaşanmış ispat örnekleri üzerinden bu güçlükler tespit edilmiş, nedenleri açıklanmış ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri belirlenmiştir. Farklı güçlükleri ve bu güçlüklerin farklı nedenlerini ve de bu güçlüklerin üstesinden gelecek farklı öğretim stratejilerini içeren bir örnek olay, iki de senaryo etkinliği yapılmıştır.

4.4.7. Yedinci Hafta

Tasarımın yedinci haftasının içeriği tümevarımla ispat yöntemini, tümevarımla ispat yöntemi ile ilgili örnekleri, tümevarımla ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenlerini, tümevarımla ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükleri ve nedenlerini, tümevarımla ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini içermekteydi. Dersin yedinci haftasının uygulama aşaması bu içeriğe sadık kalınarak aşağıdaki gibi yürütülmüştür. Bu haftaya ait Ders Gözlem Formu ve kamera kaydı analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır.

Tablo 4.14. Dersin Uygulama Aşamasının Yedinci Haftasına Ait Bulgular

İçerik	Öğretim Yöntemi	Materyal	Etkinlik sayısı	Süre (dakika)
Tümevarımla ispat yöntemi	Anlatım	Power Point Sunumu	1	15
	Soru cevap			
Tümevarımla ispat yöntemi ile ilgili örnekler	Anlatım	Tahta ve tebeşir	4	15
	Problem çözme	Çalışma yaprakları	10	35
Tümevarımla ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri	Tartışma	Çalışma yaprakları	10	15
Tümevarımla ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler, bu güçlüklerin nedenleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri	Örnek olay	Çalışma yaprakları	7	20
	Senaryo			
	Beyin fırtınası			

Dersin yedinci haftası Tablo 4.14'de görüldüğü gibi işlenmiştir. Dersin yedinci haftasında tümevarımla ispat yönteminin zayıf tümevarım yöntemi, genişletilmiş zayıf tümevarım yöntemi, güçlü tümevarım yöntemi ve genişletilmiş güçlü tümevarım yöntemi olmak üzere dört farklı versiyonu anlatılmıştır. Her bir versiyonun temel adımı, tümevarım hipotez(ler)i ve tümevarım adımında neler yapılması gerektiği ayrıntılı anlatılmıştır. Alan bilgisine yönelik olarak yöntemin daha iyi öğrenilebilmesi için on adet etkinlik yapılmıştır. Bu sorularda öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlükler tartışılmıştır. Pedagojik alan bilgisine yönelik olarak tümevarımla ispat yöntemi ile ilgili farklı güçlüklerin yaşandığı, farklı nedenlere dayanan ve farklı öğretim stratejileri ile üstesinden gelinebilecek örnek olay ve senaryo etkinlikleri yapılmıştır. Yedinci haftada yapılan çalışmalara ait örnekler Ek-19 ve Ek-20'de sunulmuştur.

4.4.8. Sekizinci Hafta

Dersin sekizinci haftasında dersi alan 22 öğretmen adayına ara (vize) sınavı yapılmıştır. Geliştirme aşamasındaki ders içeriği ve ders akışı bu haftaya kadar tasarlanan şekilde ilerlediği için vize sınavı da tasarım aşamasında tasarlandığı şekilde uygulanabilmiştir. Tasarım aşamasındaki soru sayısı, konular ve süre aynen uygulanabilmiştir.

Ara sınav bir kısa cevaplı soru, dört boşluk doldurma, üç de uzun cevaplı soru olmak üzere sekiz sorudan oluşmaktadır. Ara sınav sorularından ikisi ispatla ilgili kavramlardan, biri kavramlar arasındaki ilişki ve farklardan, ikisi ispatla ilgili tanımlardan, biri tümevarım yöntemi ile ispatlama sorusundan, biri beş farklı senaryo üzerinden ispatlamaya yönelik farklı öğrenci güçlüklerini tespit etme, öğrenci güçlüklerinin farklı nedenlerini açıklama ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek farklı öğretim stratejilerini belirleme sorularından, biri de tek bir senaryo üzerinden öğrencilerin sahip oldukları farklı ispat şemalarını tespit etme sorularından oluşmaktadır. Ara sınav sorularına örnekler aşağıda verilmiştir.

1) Gerekçelendirme, ispat, ispatlama ve çürütme kavramlarını tanımlayıp, aralarındaki ilişkiyi açıklayınız.
2) m bir sayma sayısı ve $m \geq 4$ için $m! > 2^m$ olduğunu ispatlayınız.

3) Bir öğretmen sınıfta aşağıdaki teoremi yazıp öğrencilerinden bu teoremi ispatlamalarını istiyor. Bir öğrencinin verdiği cevap aşağıdadır. Bu öğrencinin yaşadığı güçlüğü tespit ediniz, bu güçlüğün nedenini açıklayınız ve bu güçlüğün üstesinden gelecek öğretim stratejisini belirleyiniz.

Öğretmen: z bir karmaşık sayı ise $z + \bar{z} = 2 \cdot Re(z)$ olduğunu ispatlayınız.
Öğrenci: $z = 3 + 4i$ olsun.
Bu durumda $z + \bar{z} = (3 + 4i) + (3 - 4i) = 6 = 2 \cdot 3 = 2 \cdot Re(z)$

Vize sınavı sonrasında vize sınav soruları ile cevap anahtarı öğretmen adaylarının öğrenmelerine katkı sağlamak amacıyla sanal sınıf ortamında öğretmen adaylarına sunulmuştur. Vize sınav sonuçları da aynı hafta içerisinde öğrenci bilgi sistemine girilmiştir. Vize sınav sonuçları öğretmen adaylarının bu haftaya kadar işlenmiş konularda istenilen düzeye geldiğini göstermiştir.

4.4.9. Dokuzuncu Hafta

Tasarımın dokuzuncu haftasının içeriği doğrudan ispat yöntemini, doğrudan ispat yöntemi ile ilgili örnekleri, doğrudan ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenlerini, doğrudan ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükleri ve nedenlerini, doğrudan ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini içermekteydi. Dersin dokuzuncu haftasının uygulama aşaması bu içeriğe sadık kalınarak aşağıdaki gibi yürütülmüştür. Bu haftaya ait Ders Gözlem Formu ve kamera kaydı analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır.

Tablo 4.15. Dersin Uygulama Aşamasının Dokuzuncu Haftasına Ait Bulgular

İçerik	Öğretim Yöntemi	Materyal	Etkinlik sayısı	Süre (dakika)
Doğrudan ispat yöntemi	Anlatım Soru cevap	Power Point Sunumu	1	10
Doğrudan ispat yöntemi ile ilgili örnekler	Anlatım	Tahta ve tebeşir	3	12
	Problem çözme	Çalışma yaprakları	14	40
Doğrudan ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri	Tartışma	Çalışma yaprakları	14	18
Doğrudan ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler, bu güçlüklerin nedenleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri	Örnek olay Senaryo Beyin fırtınası	Çalışma yaprakları	7	20

Dersin dokuzuncu haftası Tablo 4.15'de görüldüğü gibi işlenmiştir. Dersin dokuzuncu haftasında doğrudan ispat yönteminin ne olduğu, ne zaman başvurulması gereken bir yöntem olduğu, doğrudan ispat yönteminin kullanılacağı önermelerin yapısı, önermeler hesabıyla doğrudan ispat yönteminin mantığı anlatılmıştır. Alan bilgisine yönelik olarak yöntemin daha iyi öğrenilebilmesi için 14 adet etkinlik yapılmıştır. Bu sorularda öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlükler tartışılmıştır. Pedagojik alan bilgisine yönelik olarak doğrudan ispat yöntemi ile ilgili farklı güçlüklerin yaşandığı, farklı nedenlere dayanan ve farklı öğretim stratejileri ile üstesinden gelinebilecek örnek olay ve senaryo etkinlikleri yapılmıştır.

4.4.10. Onuncu Hafta

Tasarımın onuncu haftasının içeriği durum yoluyla ispat yöntemini, durum yoluyla ispat yöntemi ile ilgili örnekleri, durum yoluyla ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenlerini, durum yoluyla ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükleri ve nedenlerini, durum yoluyla ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini içermekteydi. Dersin onuncu haftasının uygulama aşaması bu içeriğe sadık kalınarak aşağıdaki gibi yürütülmüştür. Bu haftaya ait Ders Gözlem Formu ve kamera kaydı analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır.

Tablo 4.16. Dersin Uygulama Aşamasının Onuncu Haftasına Ait Bulgular

İçerik	Öğretim Yöntemi	Materyal	Etkinlik sayısı	Süre (dakika)
Durum yoluyla ispat yöntemi	Anlatım	Power Point Sunumu	1	10
	Soru cevap			
Durum yoluyla ispat yöntemi ile ilgili örnekler	Anlatım	Tahta ve tebeşir	3	10
	Problem çözme	Çalışma yaprakları	10	40
Durum yoluyla ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri	Tartışma	Çalışma yaprakları	10	20
Durum yoluyla ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler, bu güçlüklerin nedenleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri	Örnek olay	Çalışma yaprakları	7	20
	Senaryo			
	Beyin fırtınası			

Dersin onuncu haftası Tablo 4.16'da görüldüğü gibi işlenmiştir. Dersin onuncu haftasında durum yoluyla ispat yönteminin ne olduğu, ne zaman başvurulması gereken bir yöntem olduğu, durum yoluyla ispat yönteminin kullanılacağı önermelerin yapısı, önermeler hesabıyla durum yoluyla ispat yönteminin mantığı anlatılmıştır. Alan bilgisine yönelik olarak yöntemin daha iyi öğrenilebilmesi için 10 adet etkinlik yapılmıştır. Bu sorularda öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlükler tartışılmıştır. Pedagojik alan bilgisine yönelik olarak durum yoluyla ispat yöntemi ile ilgili farklı güçlüklerin yaşandığı, farklı nedenlere dayanan ve farklı öğretim stratejileri ile üstesinden gelinebilecek örnek olay ve senaryo etkinlikleri yapılmıştır.

4.4.11. On Birinci Hafta

Tasarımın on birinci haftasının içeriği tüketerek ispat yöntemini, tüketerek ispat yöntemi ile ilgili örnekleri, tüketerek ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenlerini, tüketerek ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükleri ve nedenlerini, tüketerek ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini içermekteydi. Dersin on birinci haftasının uygulama aşaması bu içeriğe sadık kalınarak aşağıdaki gibi yürütülmüştür. Bu haftaya ait Ders Gözlem Formu ve kamera kaydı analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır.

Tablo 4.17. Dersin Uygulama Aşamasının On Birinci Haftasına Ait Bulgular

İçerik	Öğretim Yöntemi	Materyal	Etkinlik sayısı	Süre (dakika)
Tüketerek ispat yöntemi	Anlatım	Power Point Sunumu	1	10
	Soru cevap			
Tüketerek ispat yöntemi ile ilgili örnekler	Anlatım	Tahta ve tebeşir	3	12
	Problem çözme	Çalışma yaprakları	15	45
Tüketerek ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri	Tartışma	Çalışma yaprakları	15	13
Tüketerek ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler, bu güçlüklerin nedenleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri	Örnek olay	Çalışma yaprakları	7	20
	Senaryo			
	Beyin fırtınası			

Dersin on birinci haftası Tablo 4.17'de görüldüğü gibi işlenmiştir. Dersin on birinci haftasında tüketerek ispat yönteminin ne olduğu, ne zaman başvurulması gereken bir yöntem olduğu, tüketerek ispat yönteminin kullanılacağı önermelerin yapısı, önermeler hesabıyla tüketerek ispat yönteminin mantığı, durum yoluyla ispat yöntemi ile benzer ve farklı yönleri anlatılmıştır. Alan bilgisine yönelik olarak yöntemin daha iyi öğrenilebilmesi için 15 adet etkinlik yapılmıştır. Bu sorularda öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlükler tartışılmıştır. Pedagojik alan bilgisine yönelik olarak tüketerek ispat yöntemi ile ilgili farklı güçlüklerin yaşandığı, farklı nedenlere dayanan ve farklı öğretim stratejileri ile üstesinden gelinebilecek örnek olay ve senaryo etkinlikleri yapılmıştır.

4.4.12. On İkinci Hafta

Tasarımın on ikinci haftasının içeriği çelişki ile ispat yöntemini, çelişkiyle ispat yöntemi ile ilgili örnekleri, çelişkiyle ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenlerini, çelişkiyle ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükleri ve nedenlerini, çelişkiyle ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini içermekteydi. Dersin on ikinci haftasının uygulama aşaması bu içeriğe sadık kalınarak aşağıdaki gibi yürütülmüştür. Bu haftaya ait Ders Gözlem Formu ve kamera kaydı analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır.

Tablo 4.18. Dersin Uygulama Aşamasının On İkinci Haftasına Ait Bulgular

İçerik	Öğretim Yöntemi	Materyal	Etkinlik sayısı	Süre (dakika)
Çelişki ile ispat yöntemi	Anlatım Soru cevap	Power Point Sunumu	1	16
Çelişkiyle ispat yöntemi ile ilgili örnekler	Anlatım	Tahta ve tebeşir	2	10
	Problem çözme	Çalışma yaprakları	10	40
Çelişkiyle ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri	Tartışma	Çalışma yaprakları	10	14
Çelişkiyle ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler, bu güçlüklerin nedenleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri	Örnek olay Senaryo Beyin fırtınası	Çalışma yaprakları	7	20

Dersin on ikinci haftası Tablo 4.18'de görüldüğü gibi işlenmiştir. Çelişkinin ve çelişki ile ispat yönteminin ne olduğu, ne zaman başvurulması gereken bir yöntem olduğu, çelişki ile ispat yönteminin kullanılacağı önermelerin yapısı, önermeler hesabıyla yöntemin mantığı anlatılmıştır. Alan bilgisine yönelik olarak yöntemin daha iyi öğrenilebilmesi için 10 adet etkinlik yapılmıştır. Bu sorularda öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlükler tartışılmıştır. Pedagojik alan bilgisine yönelik olarak çelişkiyle ispat yöntemi ile ilgili farklı güçlüklerin yaşandığı, farklı nedenlere dayanan ve farklı öğretim stratejileri ile üstesinden gelinebilecek örnek olay ve senaryo etkinlikleri yapılmıştır.

4.4.13. On Üçüncü Hafta

Tasarımın on üçüncü haftasının içeriği olmayana ergi ile ispat yöntemini, olmayana ergiyle ispat yöntemi ile ilgili örnekleri, olmayana ergiyle ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenlerini, olmayana ergiyle ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükleri ve nedenlerini, olmayana ergiyle ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini içermekteydi. Dersin on üçüncü haftasının uygulama aşaması bu içeriğe sadık kalınarak aşağıdaki gibi yürütülmüştür. Bu haftaya ait Ders Gözlem Formu ve kamera kaydı analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır.

Tablo 4.19. Dersin Uygulama Aşamasının On Üçüncü Haftasına Ait Bulgular

İçerik	Öğretim Yöntemi	Materyal	Etkinlik sayısı	Süre (dakika)
Olmayana ergi yöntemi	Anlatım	Power Point Sunumu	1	15
	Soru cevap			
Olmayana ergi yöntemi ile ilgili örnekler	Anlatım	Tahta ve tebeşir	2	8
	Problem çözme	Çalışma yaprakları	10	44
Olmayana ergi yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri	Tartışma	Çalışma yaprakları	10	13
Olmayana ergi yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler, bu güçlüklerin nedenleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri	Örnek olay	Çalışma yaprakları	7	20
	Senaryo			
	Beyin fırtınası			

Dersin on üçüncü haftası Tablo 4.19'da görüldüğü gibi işlenmiştir. Karşıt tersin ve olmayana ergi ile ispat yönteminin ne olduğu, ne zaman başvurulması gereken bir yöntem olduğu, olmayana ergi ile ispat yönteminin kullanılacağı önermelerin yapısı, önermeler hesabıyla yöntemin mantığı, çelişki ile ispat yöntemi ile benzer ve farklı yönleri anlatılmıştır. Alan bilgisine yönelik olarak yöntemin daha iyi öğrenilebilmesi için 10 etkinlik yapılmıştır. Bu sorularda öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlükler tartışılmıştır. Pedagojik alan bilgisine yönelik olarak olmayana ergiyle ispat yöntemi ile ilgili farklı güçlüklerin yaşandığı, farklı nedenlere dayanan ve farklı öğretim stratejileri ile üstesinden gelinebilecek örnek olay ve senaryo etkinlikleri yapılmıştır.

4.4.14. On Dördüncü Hafta

Tasarımın on dördüncü haftasının içeriği aksine örnek verme ile ispat yöntemini, aksine örnek vermeyle ispat yöntemi ile ilgili örnekleri, aksine örnek vermeyle ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenlerini, aksine örnek vermeyle ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükleri ve nedenlerini, aksine örnek vermeyle ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini içermekteydi. Dersin on dördüncü haftasının uygulama aşaması bu içeriğe sadık kalınarak aşağıdaki gibi yürütülmüştür. Bu haftaya ait Ders Gözlem Formu ve kamera kaydı analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır.

Tablo 4.20. Dersin Uygulama Aşamasının On Dördüncü Haftasına Ait Bulgular

İçerik	Öğretim Yöntemi	Materyal	Etkinlik sayısı	Süre (dakika)
Aksine örnek verme yöntemi	Anlatım	Power Point Sunumu	1	8
	Soru cevap			
Aksine örnek verme yöntemi ile ilgili örnekler	Anlatım	Tahta ve tebeşir	3	14
	Problem çözme	Çalışma yaprakları	14	43
Aksine örnek verme yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri	Tartışma	Çalışma yaprakları	14	15
Aksine örnek verme yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler, bu güçlüklerin nedenleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri	Örnek olay	Çalışma yaprakları	7	20
	Senaryo			
	Beyin fırtınası			

Dersin on dördüncü haftası Tablo 4.20'de görüldüğü gibi işlenmiştir. Aksine örneğin ve aksine örnek verme yönteminin ne olduğu, ne zaman başvurulması gereken bir yöntem olduğu, aksine örnek verme yönteminin kullanılacağı önermelerin yapısı, önermeler hesabıyla yöntemin mantığı ve tüketerek ispat yöntemi ile farkı anlatılmıştır. Alan bilgisine yönelik olarak yöntemin daha iyi öğrenilebilmesi için 14 adet etkinlik yapılmıştır. Bu sorularda öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlükler tartışılmıştır. Pedagojik alan bilgisine yönelik olarak aksine örnek verme yöntemi ile ilgili farklı güçlüklerin yaşandığı, farklı nedenlere dayanan ve farklı öğretim stratejileri ile üstesinden gelinebilecek örnek olay ve senaryo etkinlikleri yapılmıştır.

4.4.15. On Beşinci Hafta

Dersin on beşinci haftasında derse katılan 22 öğretmen adayından İSABA ile alan bilgilerine yönelik, İSPABA ile pedagojik alan bilgilerine yönelik veri toplanmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının dersin kazanımlarına ulaşma durumlarına ilişkin öz-değerlendirmeleri ile uygulama sürecine yönelik değerlendirmelerini almak için Ders Değerlendirme Anketi uygulanmıştır. Tüm veriler tek seferde iki saatlik süre içerisinde toplanmış ve uygulama süreci başarılı bir şekilde sonlandırılmıştır.

4.5. Değerlendirme Aşamasına Ait Bulgular

Bu bölümde ders tasarımının öğretmen adaylarının dersin kazanımlarına ve hedeflerine ulaşma durumlarına etkisi değerlendirilmiştir. Dersin altı kazanımı ve iki hedefi için ayrı ayrı değerlendirme yapılmıştır.

4.5.1. Ders Tasarımının "*Öğretmen Adaylarının Dersin Kazanımlarına*" Ulaşma Durumlarına Etkisine Dair Bulgular

Dersin toplamda altı adet kazanımı bulunmaktadır. Dersin kazanımları ispatla ilgili alan bilgisine ait kazanımlar ve ispatla ilgili pedagojik alan bilgisine ait kazanımlar olmak üzere iki bölüme ayrılmıştır. İlk iki kazanım (Kazanım 1 ve Kazanım 2) ispatla ilgili alan bilgisine ait kazanımları, ve son 4 kazanım da (Kazanım 3, Kazanım 4, Kazanım 5 ve Kazanım 6) ispatla ilgili pedagojik alan bilgisine ait kazanımları oluşturmaktadır. Ders tasarımının öğretmen adaylarının dersin kazanımlarına ulaşma durumlarına etkisi altı kazanım için ayrı ayrı incelenmiştir.

4.5.1.1. Ders Tasarımının "*Öğretmen Adaylarının İspatla İlgili Alan Bilgilerine*" Ait Kazanımlara Ulaşma Durumlarına Etkisine Dair Bulgular

Dersin ispatla ilgili alan bilgisine ait iki adet kazanımı bulunmaktadır. Ders tasarımının öğretmen adaylarının Kazanım 1 ve Kazanım 2'ye ulaşma durumlarına etkisi ayrı ayrı incelenmiştir.

4.5.1.1.1. Ders Tasarımının "Öğretmen Adayı Farklı İspat Yöntemlerini Bilir ve Uygular" Kazanımına Etkisine Dair Bulgular

Bu kısımda ders tasarımının öğretmen adaylarının Kazanım 1'e ulaşma durumlarına etkisi incelenmiştir.

Kazanım 1: Öğretmen adayı farklı ispat yöntemlerini bilir ve uygular.

Bu kapsamda aşağıdaki soruya cevap aranmıştır.

Ders tasarımı "*Öğretmen adayı farklı ispat yöntemlerini bilir ve uygular*" kazanımına nasıl etki etmiştir?

Dersin uygulamasından önce ve sonra 22 öğretmen adayının ispatla ilgili alan bilgilerini ölçmek amacıyla geliştirilmiş olan İspat Alan Bilgi Anketine (İSABA) verdikleri cevaplar analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır. Bu ankette öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgileri iki bileşende incelenmek istenmiştir. İlk olarak ders tasarımının öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgilerine etkisi incelenmiştir. Anketten elde edilen nitel veriler analiz edilerek nicel bulgulara ulaşılmıştır.

22 öğretmen adayının yedi soruya vermiş oldukları 154 cevap doğru, kısmen doğru, yanlış ve yanıtsız olarak kodlanmıştır. Doğru cevaplar 2 puan, kısmen doğru cevaplar 1 puan, yanlış ve yanıtsız kabul edilen cevaplar 0 puan olarak puanlanmıştır. Öğretmen adaylarının doğru, kısmen doğru, yanlış ve yanıtsız cevap frekansları, yüzdeleri ve puanları Tablo 4.21'de verilmiştir. 22 öğretmen adayının anketten bu bileşende alabileceği toplam puan 308 (22x7x2) puandır.

Tablo 4.21. Öğretmen Adaylarının *Farklı İspat Yöntemlerini Bilip Uygulama Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Frekans, Yüzde ve Puan Dağılımı

Kategori		**Doğru**	**Kısmen Doğru**	**Yanlış**	**Yanıtsız**	**Toplam**
Uygulama Öncesi	**f (%)**	23 (14,94)	6 (3,90)	101 (65,58)	24 (15,58)	154 (100,00)
	p (%)	46 (14,94)	6 (1,95)	0 (0,00)	0 (0,00)	**52 (16,88)**
Uygulama Sonrası	**f (%)**	110 (71,43)	8 (5,20)	34 (22,08)	2 (1,30)	154 (100,00)
	p (%)	220 (71,43)	8 (2,60)	0 (0,00)	0 (0,00)	**228 (74,03)**

Tablo 4.21'de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının verdiği 154 cevaptan uygulama öncesi doğru cevap sayısı 23, yüzdesi 14,94, kısmen doğru cevap sayısı 6, yüzdesi 3,90, yanlış cevap sayısı 101, yüzdesi 65,58 ve yanıtsız cevap sayısı 24, yüzdesi 15,58 olarak belirlenmiştir. Uygulama sonrası ise doğru cevap sayısı 110, yüzdesi 71,43, kısmen doğru cevap sayısı 8, yüzdesi 5,20, yanlış cevap sayısı 34, yüzdesi 22,08 ve yanıtsız cevap sayısı 2, yüzdesi 1,30 olarak belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının doğru ispat yüzdesinin 14,94 gibi çok düşük bir orandan 71,43 gibi yüksek orana, puan yüzdesinin ise %16,88 gibi çok düşük bir orandan %74,03 gibi yüksek bir orana çıktığı görülmektedir. Yine bu tablodan uygulama öncesi öğretmen adaylarının doğru cevaplardan 46 (23x2), kısmen doğru cevaplardan 6 (6x1), yanlış cevaplardan 0 (101x0) ve yanıtsız cevaplardan 0 (24x0) puan, uygulama sonrası öğretmen adaylarının doğru cevaplardan 220 (110x2), kısmen doğru cevaplardan 8 (8x1), yanlış cevaplardan 0 (34x0) ve yanıtsız cevaplardan 0 (2x0) puan aldıkları görülmektedir. Öğretmen adaylarının uygulama sonrası doğru sayıları uygulama

öncesine göre 87 sayı, puanları 174 puan, doğru ve puan yüzdeleri ise %56,49 artmıştır. Kısmen doğrularda dâhil edildiğinde öğretmen adaylarının doğru-kısmen doğru sayıları 89, doğru-kısmen doğru yüzdeleri ise %57,79, toplam puanları ise 176 puan, puan yüzdeleri %57,15 artmıştır. Bu artışlar ders tasarımının bu kazanıma etkisini ortaya koymaktadır. Dersin uygulamasından sonra 22 öğretmen adayının Kazanım 1'e ulaşma yüzdesi %71,43 gibi yüksek bir orana ulaşmıştır.

Öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgilerine dair uygulama öncesi ve sonrası ortalama, standart sapma, minimum ve maksimum puanları Tablo 4.22'de verilmiştir. Ortalama, minimum ve maksimum puanlar 14 puan (7x2) üzerinden değerlendirilmiştir.

Tablo 4.22. Öğretmen Adaylarının *Farklı İspat Yöntemlerini Bilip Uygulama Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Ortalama, Standart Sapma, Minimum Ve Maksimum Puanları

	N	$\bar{x}$	ss	Min	Max
Uygulama Öncesi	22	2,36	1,62	0,00	5,00
Uygulama Sonrası	22	10,36	2,48	6,00	14,00

Bir öğretmen adayı farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgisi bileşeninde İSABA'ndeki yedi sorudan en fazla 14 (7x2) puan alabilmektedir. 22 öğretmen adayının uygulama öncesi anketten aldığı puanların ortalaması 2,36 gibi çok düşük bir oran iken uygulama sonrasında 10,36 gibi yüksek bir orana yükseldiği görülmektedir. Öğretmen adaylarının uygulama sonrası ortalama puanları uygulama öncesine göre 14 tam puan üzerinden 8,00 puan artmıştır. Yine tablodan uygulama öncesi standart sapmanın 1,62, uygulama sonrası standart sapmanın 2,48 olduğu görülmektedir. Uygulama öncesinde 22 öğretmen adayından ankette minimum puan alan öğretmen adayının puanı 0,00 iken, uygulama sonrasında 22 öğretmen adayından ankette minimum puan alan öğretmen adayının puanı 6,00'dır. Yine uygulama öncesinde 22 öğretmen adayından ankette maksimum puan alan öğretmen adayının puanı 5,00 iken, uygulama sonrasında 22 öğretmen adayından ankette maksimum puan alan öğretmen adayının puanı 14,00'dır.

Buradan ders tasarımının öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgilerine ait minimum ve maksimum puanları artırdığı söylenebilir.

Tablo 4.21 ve Tablo 4.22'den görüldüğü gibi öğretmen adaylarının uygulama öncesinde bir önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını ispatlamak için farklı ispat yöntemlerini seçip uygulayamadıkları dolayısıyla geçerli bir ispat yapmakta güçlük yaşadıkları, uygulama sonrasında ise bu güçlüklerinin üstesinden geldikleri görülmektedir. Özellikle uygulama öncesi öğretmen adaylarının verdiği 154 cevaptan sadece 23 tanesinin doğru olması öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama becerilerinin istenilen düzeyin çok altında olduğunu göstermektedir. Uygulama sonrasında ise 154 cevaptan 110 tanesinin doğru olması öğretmen adaylarının istenen düzeye geldiğini göstermektedir. Sonuç olarak iki tablodan ders tasarımının öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama puanlarını arttırdığı söylenebilir.

Ders tasarımının öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olup olmadığını saptamak için veri analiz yöntemi olarak uygulanan Wilcoxon İşaretli Sıralar Testinin (Wilcoxon, 1945) çıktıları aşağıdaki Tablo 4.23'de verilmiştir.

Tablo 4.23. Öğretmen Adaylarının *Farklı İspat Yöntemlerini Bilip Uygulama Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Wilcoxon İşaretli Sıralar Test Çıktıları Tablosu

Uygulama Sonrası-Uygulama-Öncesi	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	Z	p
Negatif Sıralar	0^a	0,00	0,00	-4,114*	<0,001
Pozitif Sıralar	22^b	11,50	253,00		
Eşit	0^c				

* Negatif Sıralar Temeline Dayalı, [a] uygulama sonrası puan < uygulama öncesi puan, [b] uygulama sonrası puan > uygulama öncesi puan, [c] uygulama sonrası puan = uygulama öncesi puan.

Tablo 4.23'den da görüldüğü gibi test çıktıları ders tasarımının öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olduğunu $(Z = -4,114, p < 0,001)$ göstermektedir. Fark puanlarının sıra ortalamalarına ve sıra toplamlarına bakıldığında istatistiksel olarak anlamlı bulunan bu etkinin pozitif sıralar yani uygulama sonrası lehine olduğu görülmektedir. Ayrıca tablodan tüm öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama puanlarını uygulama sonrasında arttırdığı görülmektedir.

Anlamlı etki büyüklüğü $r = \frac{Z}{\sqrt{n}} = \frac{-4,114}{\sqrt{22}} = -0,88$ olarak hesaplanmıştır. İşaretine bakılmaksızın (mutlak değeriyle) yorumlanan etki büyüklüğü $0,88 \geq 0,5$ olduğundan ders tasarımının öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama puanlarına uygulama sonrası lehine büyük etkisi olduğu (Cohen, 1988) söylenebilir.

Son olarak öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgilerine dair uygulama öncesi ve sonrasına ait soru bazlı frekans ve yüzde dağılımı Tablo 4.24'de verilmiştir.

Tablo 4.24. Öğretmen Adaylarının *Farklı İspat Yöntemlerini Bilip Uygulama Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Soru Bazlı Frekans ve Yüzde Dağılımı

Soru Numarası	Kategori	Uygulama Öncesi		Uygulama Sonrası	
		f	%	f	%
1	Doğru	0	0,00	3	13,64
	Kısmen Doğru	1	4,55	7	31,82
	Yanlış	11	50,00	12	54,55
	Yanıtsız	10	45,46	0	0,00
2	Doğru	0	0,00	13	59,09
	Kısmen Doğru	0	0,00	0	0,00
	Yanlış	14	63,64	8	36,36
	Yanıtsız	8	36,36	1	4,55
3	Doğru	2	9,09	17	77,27
	Kısmen Doğru	2	9,09	1	4,55
	Yanlış	17	77,27	4	18,18
	Yanıtsız	1	4,55	0	0,00
4	Doğru	0	0,00	19	86,36
	Kısmen Doğru	0	0,00	0	0,00
	Yanlış	19	86,36	2	9,09
	Yanıtsız	3	13,64	1	4,55
5	Doğru	12	54,55	22	100,00
	Kısmen Doğru	3	13,64	0	0,00
	Yanlış	7	31,82	0	0,00
	Yanıtsız	0	0,00	0	0,00
6	Doğru	8	36,36	16	72,73
	Kısmen Doğru	0	0,00	0	0,00
	Yanlış	14	63,64	6	27,27
	Yanıtsız	0	0,00	0	0,00
7	Doğru	1	4,55	20	90,91
	Kısmen Doğru	0	0,00	0	0,00
	Yanlış	19	86,36	2	9,09
	Yanıtsız	2	9,09	0	0,00

Uygulama öncesinde 1. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan tümevarımla ispatta, 2. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan doğrudan ispatta, 3. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan durum yoluyla ispatta, 4. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan olmayana ergi ile ispatta, 6. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan aksine örnek verme yöntemiyle ispatta ve 7. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan çelişki ile ispatta öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu yanlış cevap vermişlerdir. Öğretmen adayları bu sorularda çok büyük bir çoğunlukta uygun ispat yöntemini bile seçememişlerdir. Sadece

5. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan tüketerek ispatta öğretmen adayları çoğunlukla doğru cevap vermişlerdir. Buradan öğretmen adaylarının uygulama öncesinde ispat yöntemlerini bilmedikleri ve uygulayamadıkları görülmektedir.

Uygulama sonrasında 1. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan tümevarımla ispatta öğretmen adaylarının çoğunluğu yanlış cevap vermişlerdir. Ancak bu soruda da uygulama öncesine göre öğretmen adaylarının doğru ve kısmen doğru sayılarında artış gözlemlenmiştir. Öğretmen adayları 1. soru olan tümevarımla ispat dışındaki tüm sorularda büyük çoğunlukla istenilen düzeye ulaşmışlardır. Diğer altı ispat yöntemi sorusunda öğretmen adaylarının çoğunluğu doğru cevap vermişlerdir. 1. soruda öğretmen adaylarının çoğunlukla yanlış cevap vermelerinin sebebi sorunun çözümünün çok iyi problem çözme ve akıl yürütme becerisi gerektiren çok zor bir soru olması olabilir. Bu soruda da öğretmen adaylarının tamamı doğru ispat yöntemini seçmiş, tümevarımla ispatın basamaklarını sıralamış fakat varsayım adımından hareketle tümevarım adımını oluşturmada gerekli problem çözme ve akıl yürütme becerisini kullanamamışlardır.

Dersin kazanımlarından birisi "öğretmen adayı farklı ispat yöntemlerini bilir ve uygular" şeklindedir. Bu yüzden ders tasarımının amacı öğretmen adaylarının yanlış-yanıtsız cevapları ile kısmen doğru cevaplarını doğru cevap seviyesine çıkarmaktır. Tablo 4.24'den tüm ispat yöntemlerine ait sorularda uygulama sonrasında verilen doğru cevap sayısı ve yüzdesinin uygulama öncesi verilen doğru cevap sayısı ve yüzdesinden fazla olduğu görülmektedir. Tüm bunlar ders tasarımının öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgileri üzerine etkisini soru bazlı olarak ortaya koymaktadır.

4.5.1.1.2. Ders Tasarımının "Öğretmen Adayı İspat Yaparken Analitik İspat Şemasını Kullanır" Kazanımına Etkisine Dair Bulgular

Bu kısımda ders tasarımının öğretmen adaylarının Kazanım 2'ye ulaşma durumlarına etkisi incelenmiştir.

Kazanım 2: Öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır.

Bu kapsamda aşağıdaki soruya cevap aranmıştır.

Ders tasarımı "*Öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır*" kazanımına nasıl etki etmiştir?

Dersin uygulamasından önce ve sonra 22 öğretmen adayının ispatla ilgili alan bilgilerini ölçmek amacıyla geliştirilmiş olan İSABA'ne verdikleri cevaplar analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır. Bu ankette öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgileri iki bileşende incelenmek istenmiştir. İkinci olarak ders tasarımının öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şemalarına etkisi incelenmiştir. Anketten elde edilen nitel veriler analiz edilerek nicel bulgulara ulaşılmıştır.

22 öğretmen adayının yedi soruya vermiş oldukları 154 cevap Sowder ve Harel'in (1998) sınıfladığı üç ana ispat şemasına göre kodlanmıştır. Analitik ispat şemaları 3 puan, deneysel ispat şemaları 2 puan, dışsal ispat şemaları 1 puan ve yanıtsız kabul edilen cevaplar 0 puan olarak puanlanmıştır. Öğretmen adaylarının sahip oldukları analitik, deneysel, dışsal ispat şemaları ile yanıtsız cevap frekansları, yüzdeleri ve puanları Tablo 4.25'de verilmiştir. 22 öğretmen adayının anketten bu bileşende alabileceği toplam puan 462 (22x7x3) puandır.

Tablo 4.25. Öğretmen Adaylarının *Sahip Oldukları Ana İspat Şemalarına* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Frekans, Yüzde ve Puan Dağılımı

Kategori		Analitik	Deneysel	Dışsal	Yanıtsız	Toplam
Uygulama Öncesi	**f**	29	32	66(70)*	27	154(158)*
	%	18,83	20,78	42,86	17,53	100,00
	p	87	64	66	0	**217**
	%	18,83	13,85	14,29	0,00	**46,97**
Uygulama Sonrası	**f**	118	2	32	2	154
	%	76,62	1,30	20,78	1,30	100,00
	p	354	4	32	0	**390**
	%	76,62	0,87	6,93	0,00	**84,42**

** Uygulama öncesi dört soruda öğretmen adayları birden fazla ispat şeması kullanmışlardır. Puanlamada kullandıkları ispat şemalarından üst seviyede olanlar puanlanmıştır.*

Uygulama öncesi dört soruda öğretmen adaylarının iki ispat şeması kullandıkları tespit edilmiştir. Bunların puanlanmasında kullandıkları ispat şemalarından üst seviyede olan şemalar dikkate alınmıştır. Ayrıca Tablo 4.21'deki yanıtsız sayısı ile Tablo 4.25'deki yanıtsız sayısının farklı oluş sebebi şöyledir. Üç öğretmen adayı yanlış yaptıkları üç soruda cevaplarının sonuna "yanlış oldu", "doğru olmadı", "ne yaptığımı bende anlayamadım" ibarelerini yazdıkları için öğretmen adayı farklı ispat yöntemlerini bilir ve uygular bileşeninde bu cevaplar yanlış cevap olarak değerlendirilmiş, sahip oldukları ana ispat şemaları bileşeninde de yanıtsız olarak değerlendirilmiştir. Çünkü bu ibareleri yazan öğretmen adayları kendileri yaptıkları ispata ikna olmamışlardır. Bir öğretmen adayının herhangi bir soruda ispat şemasına sahip olması için kendinin ikna olması şarttır. Tablo 4.25'den görüldüğü gibi uygulama öncesi öğretmen adaylarının verdiği 154 cevaptan kullandıkları analitik ispat şeması sayısı 29, yüzdesi 18,83, deneysel ispat şeması 32, yüzdesi 20,78, dışsal ispat şeması sayısı 66, yüzdesi 42,86 ve yanıtsız cevap sayısı 27, yüzdesi 17,53 olarak belirlenmiştir. Dört soruda öğretmen adayları hem deneysel hem dışsal ispat şeması kullandıkları için deneysel ispat şemaları dikkate alınmıştır. Uygulamadan önce ve sonra öğretmen adayları hem dışsal, hem deneysel hem de analitik ispat şemalarını kullanmışlardır. Ayrıca öğretmen adayları doğru ispat yapamadıkları sorularda uygulama öncesi ve sonrasında çoğunlukla dışsal ispat şemasına başvurmuşlardır. Dışsal ispat şemaları en kolay ve zahmetsiz başvurulan ispat şemalarıdır. Bununla birlikte uygulama öncesinde öğretmen adayları en çok dışsal ispat şemalarını, en az da analitik ispat şemalarını kullanmışlardır. Öğretmen adaylarının en az sıklıkla analitik ispat şemalarını kullanmaları onlar için en istenmedik durumdur. Buradan uygulama öncesinde öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şemalarının istenilen düzeyden çok geride olduğu söylenebilir. Uygulama sonrasında ise öğretmen adaylarının verdiği 154 cevaptan kullandıkları analitik ispat şeması sayısı 118, yüzdesi 76,62, deneysel ispat şeması 2, yüzdesi 1,30, dışsal ispat şeması sayısı 32, yüzdesi 20,78 ve yanıtsız cevap sayısı 2, yüzdesi 1,30 olarak belirlenmiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayları en çok analitik ispat şemalarını en az ise deneysel ispat şemalarını kullanmışlardır. Öğretmen adaylarının en sık analitik ispat şemalarını kullanmaları onlar için en istendik durumdur. Yine bu tablodan uygulama öncesi öğretmen adaylarının sahip oldukları analitik ispat şemalarından 87 (29x3), deneysel ispat şemalarından 64 (32x2), dışsal ispat şemalarından 66 (66x1) ve yanıtsız cevaplardan 0 (27x0) puan, uygulama sonrası öğretmen adaylarının sahip oldukları analitik ispat şemalarından 354 (118x3), deneysel ispat şemalarından 4 (2x2), dışsal ispat şemalarından 32 (32x1) ve yanıtsız cevaplardan 0 (2x0) puan aldıkları görülmektedir. Öğretmen adaylarının uygulama sonrası analitik şema sayıları uygulama öncesine göre 89 sayı, puanları 267 puan artmıştır. Öğretmen adaylarının toplam puanları 173 puan, yüzdesi 37,45 artmıştır. Bu artışlar ders tasarımının bu kazanıma etkisini ortaya koymaktadır. Dersin uygulamasından sonra 22 öğretmen adayının Kazanım 2'ye ulaşma yüzdesi %76,62 gibi yüksek bir orana ulaşmıştır.

Öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şemalarına dair uygulama öncesi ve sonrası ortalama, standart sapma, minimum ve maksimum puanları Tablo 4.26'de verilmiştir. Ortalama, minimum ve maksimum puanlar 21 puan (7x3) üzerinden değerlendirilmiştir.

Tablo 4.26. Öğretmen Adaylarının *Sahip Oldukları Ana İspat Şemalarına* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Ortalama, Standart Sapma, Minimum ve Maksimum Puanları

	N	$\overline{x}$	ss	Min	Max
Uygulama Öncesi	22	9,86	2,57	3,00	13,00
Uygulama Sonrası	22	17,73	2,59	13,00	21,00

Bir öğretmen adayı sahip oldukları ana ispat şemaları bileşeninde İSABA'ndeki yedi sorudan en fazla 21 (7x3) puan alabilmektedir. 22 öğretmen adayının uygulama öncesi anketten aldığı puanların ortalaması 9,86 gibi düşük bir oran iken uygulama sonrasında 17,73 gibi yüksek bir orana yükselmiştir. Öğretmen adaylarının uygulama sonrası ortalama puanları uygulama öncesine göre 21 tam puan üzerinden 7,87 puan artmıştır. Yine tablodan uygulama öncesi standart sapmanın 2,57, uygulama sonrası standart sapmanın 2,59 olduğu görülmektedir. Uygulama öncesinde 22 öğretmen adayından ankette minimum puan alan öğretmen adayının puanı 3,00 iken, uygulama sonrasında 22 öğretmen adayından ankette minimum puan alan öğretmen adayının puanı 13,00'dır. Yine uygulama öncesinde 22 öğretmen adayından ankette maksimum puan alan öğretmen adayının puanı 13,00 iken, uygulama sonrasında 22 öğretmen adayından ankette maksimum puan alan öğretmen adayının puanı 21,00'dır. Buradan ders tasarımının öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şemalarına ait minimum ve maksimum puanları artırdığı söylenebilir.

Tablo 4.25 ve Tablo 4.26'den öğretmen adaylarının uygulama öncesinde bir önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını ispatlamak için kullandıkları ana ispat şemalarının istenen düzeyde olmadığı yani analitik düzeyde ispat yapamadıkları, uygulama sonrasında ise sahip oldukları ana ispat şemalarının arzu edilen seviyeye ulaştığı görülmektedir. Sonuç olarak iki tablodan ders tasarımının öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şema puanlarını arttırdığı söylenebilir.

Ders tasarımının öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şemalarına istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olup olmadığını saptamak için veri analiz yöntemi olarak uygulanan Wilcoxon İşaretli Sıralar Testinin (Wilcoxon, 1945) çıktıları Tablo 4.27'de verilmiştir.

Tablo 4.27. Öğretmen Adaylarının *Sahip Oldukları Ana İspat Şemalarına* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Wilcoxon İşaretli Sıralar Test Çıktıları Tablosu

Uygulama Sonrası-Uygulama-Öncesi	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	Z	p
Negatif Sıralar	0^a	0,00	0,00	-4,113*	<0,001
Pozitif Sıralar	22^b	11,50	253,00		
Eşit	0^c				

* Negatif Sıralar Temeline Dayalı, [a] uygulama sonrası puan < uygulama öncesi puan, [b] uygulama sonrası puan > uygulama öncesi puan, [c] uygulama sonrası puan = uygulama öncesi puan.

Tablo 4.27'den de görüldüğü gibi test çıktıları ders tasarımının öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şema puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olduğunu $(Z = -4{,}113, p < 0{,}001)$ göstermektedir. Fark puanlarının sıra ortalamalarına ve sıra toplamlarına bakıldığında istatistiksel olarak anlamlı bulunan bu etkinin pozitif sıralar yani uygulama sonrası lehine olduğu görülmektedir. Ayrıca tablodan öğretmen adaylarının tamamının sahip oldukları ana ispat şema puanlarını uygulama sonrasında arttırdığı görülmektedir.

Anlamlı etki büyüklüğü $r = \frac{Z}{\sqrt{n}} = \frac{-4{,}113}{\sqrt{22}} = -0{,}88$ olarak hesaplanmıştır. İşaretine bakılmaksızın (mutlak değeriyle) yorumlanan etki büyüklüğü $0{,}88 \geq 0{,}5$ olduğundan ders tasarımının öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şema puanlarına uygulama sonrası lehine büyük etkisi olduğu (Cohen, 1988) söylenebilir.

Öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şemalarına dair uygulama öncesi ve sonrasına ait soru bazlı frekans ve yüzde dağılımı Tablo 4.28'de verilmiştir.

Tablo 4.28. Öğretmen Adaylarının *Sahip Oldukları Ana İspat Şemalarına* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Soru Bazlı Frekans ve Yüzde Dağılımı

Soru Numarası	Kategori	Uygulama Öncesi		Uygulama Sonrası	
		f	%	f	%
1	Dışsal	7	31,82	12	54,55
	Deneysel	4	18,18	0	0,00
	Analitik	1	4,55	10	45,46
	Yanıtsız	10	45,46	0	0,00
2	Dışsal	2(4)*	9,09	7	31,82
	Deneysel	12	54,55	1	4,55
	Analitik	0	0,00	13	59,09
	Yanıtsız	8	36,36	1	4,55
3	Dışsal	12	54,55	3	13,64
	Deneysel	4	18,18	1	4,55
	Analitik	4	18,18	18	81,82
	Yanıtsız	2	9,09	0	0,00
4	Dışsal	13(15)*	59,09	2	9,09
	Deneysel	6	27,27	0	0,00
	Analitik	0	0,00	19	86,36
	Yanıtsız	3	13,64	1	4,55
5	Dışsal	4	18,18	0	0,00
	Deneysel	2	9,09	0	0,00
	Analitik	15	68,18	22	100,00
	Yanıtsız	1	4,55	0	0,00
6	Dışsal	12	54,55	6	27,27
	Deneysel	1	4,55	0	0,00
	Analitik	8	36,36	16	72,73
	Yanıtsız	1	4,55	0	0,00
7	Dışsal	16	72,73	2	9,09
	Deneysel	3	13,64	0	0,00
	Analitik	1	4,55	20	90,91
	Yanıtsız	2	9,09	0	0,00

Uygulama öncesinde 1. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan tümevarımla ispatta öğretmen adayları çoğunlukla bu soruyu yanıtsız bırakmışlardır. 2. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan doğrudan ispatta öğretmen adayları en çok deneysel ispat şemalarını, 3. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan durum yoluyla ispatta öğretmen adayları en çok dışsal ispat şemalarını, 4. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan olmayana ergi ile ispatta öğretmen adayları en çok dışsal ispat şemalarını, 5. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan tüketerek ispatta öğretmen adayları en çok analitik ispat şemalarını, 6. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan aksine örnek verme yöntemiyle ispatta öğretmen adayları en çok dışsal ispat şemalarını ve 7. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan çelişki ile ispatta öğretmen adayları en çok yine dışsal ispat şemalarını kullanmışlardır. Uygulama öncesinde öğretmen adayları sadece tüketerek ispat yönteminde analitik şemaya sahip olabilmişlerdir.

Uygulama sonrasında 1. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan tümevarımla ispatta öğretmen adayları en çok dışsal ispat şemalarını, diğer sorularda ise öğretmen adayları en çok analitik ispat şemalarını kullanmışlardır. Öğretmen adayları 1. soru olan tümevarımla ispat dışındaki tüm sorularda büyük çoğunlukla en istendik ana şema olan analitik ispat şemalarını kullanmışlardır. Diğer altı ispat yöntemi sorusunda öğretmen adaylarının büyük çoğunlukla analitik ana ispat şemasını kullanmış olmaları ders tasarımının öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şemaları üzerine etkisini ortaya koymuştur. 1. soruda da 10 öğretmen adayı analitik ispat şemasını kullanmış diğer 12 öğretmen adayı bu soruda problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlükler yaşamış ve sorunun çözümünde dışsal ispat şemalarına başvurmak zorunda kalmışlardır.

Ayrıca Tablo 4.28'den tüm ispat yöntemlerine ait sorularda uygulama sonrasında kullanılan analitik ispat şeması sayısı ve yüzdesinin uygulama öncesinde kullanılan analitik ispat şeması sayısı ve yüzdesinden fazla olduğu görülmektedir. Buradan ders tasarımının öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şemalarını tüm ispat yöntemlerinde geliştirdiği söylenebilir.

Dersin kazanımlarından birisi "öğretmen adayı farklı ispat yöntemlerini bilir ve uygular" şeklindedir. Bu yüzden ders tasarımı öğretmen adaylarının kısmen doğru cevaplarını doğruya, yanlış cevaplarını doğruya ve yanıtsız cevaplarını doğruya dönüştürmelidir. Dersin kazanımlarından diğeri de "öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır" şeklindedir. Bu yüzden ders tasarımı öğretmen adaylarının dışsal ispat şemalarını analitik ispat şemaları seviyesine, deneysel ispat şemalarını da yine analitik ispat şemaları seviyesine çıkarmalıdır. Ayrıca ders tasarımı öğretmen adaylarının herhangi bir şemaya sahip olmadıkları (yanıtsız) sorularda da onların seviyelerini analitik ispat şeması seviyesine çıkarmalıdır.

Uygulama öncesi ve sonrası cevaplar karşılaştırıldığında dışsal ispat şemalarından analitik ispat şemalarına en fazla değişimin yaşandığı soru 7. sorudur. Ayrıca bu soru en fazla yanlış sayısından en fazla doğruya dönüşüm yaşanan sorudur. İki kazanım açısından değerlendirildiğinde bu sorudaki değişim göze çarpmaktadır. Örneğin ÖA16 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu sorunun doğruluğunu hiçbir işlemsel düşünme, genelleme ve mantıksal çıkarıma dayanmayan basit bir kural gibi otoriteye dayandırarak gerekçelendirmiş ve yanlış cevap vermiştir. ÖA16 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruda dışsal ana ispat şemasını kullanmıştır ve verdiği cevap Şekil 4.1'de sunulmuştur.

7. Soru: $\sqrt{5}$ sayısı rasyonel sayı değildir. İspatlayınız.

Kök dışına çıkamayan köklü sayılar irrasyoneldir, rasyonel değildir.

Şekil 4.1. Yedinci Soruya Ait Dışsal İspat Şeması Örneği

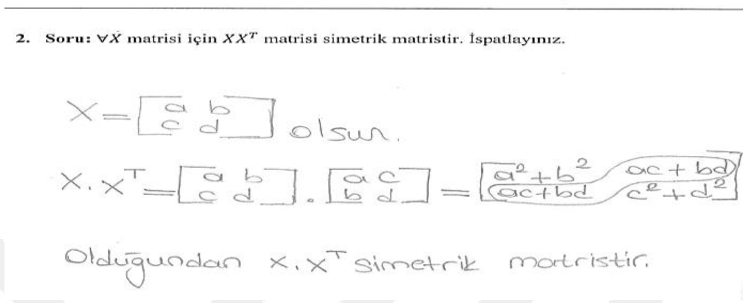
ÖA16 kodlu öğretmen adayı uygulama sonrasında bu önermeyi işlemsel düşünme, genelleme ve mantıksal çıkarım kurallarını kullanarak aksiyomatik yapı içerinde ispatlamış ve doğru cevap vermiştir. ÖA16 kodlu öğretmen adayı uygulama sonrasında bu soruda analitik ana ispat şemasını kullanmıştır ve verdiği cevap Şekil 4.2'de sunulmuştur.

7. Soru: $\sqrt{5}$ sayısı rasyonel sayı değildir. İspatlayınız.

$\sqrt{5}$ sayısının rasyonel sayı olmadığını çelişki yoluyla ispat yöntemi ile ispatlayalım. $\sqrt{5}$ sayısının rasyonel sayı olduğunu kabul edelim. O halde $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ ve $(a,b) = 1$ olmak üzere $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ biçiminde yazılabilir. içler dışlar çarpımından $a = \sqrt{5}\, b$ bulunur. Her iki tarafın karesi alınırsa $a^2 = 5b^2$ olur. Yani a 5'in tam katıdır. O halde $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a = 5m$ şeklinde yazılabilir. $a = 5m$ ifadesi $a^2 = 5b^2$ eşitliğinde yazılırsa $25m^2 = 5b^2$ buradan da $5m^2 = b^2$ bulunur. Yani b 5'in tam katıdır. Yani $(a,b) = 5 \neq 1$ olur. Çelişki elde etmiş olduk. İspat bitti.

Şekil 4.2. Yedinci Soruya Ait Analitik İspat Şeması Örneği

Deneysel ispat şemalarından analitik ispat şemalarına en fazla değişimin yaşandığı soru 2. sorudur. Ayrıca bu soruyu uygulama öncesinde hiçbir öğretmen adayı doğru veya kısmen doğru cevaplayamamıştır. Örneğin ÖA10 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu sorunun doğruluğunu tek bir örnekle gerekçelendirmiş ve yanlış cevap vermiştir. Öğretmen adayı uygulama öncesinde herhangi bir $2x2$ matrisi için doğrulamayı ispat için yeterli sanmaktadır ya da sayı yerine harfleri kullandığı için ispat yaptığını zannetmektedir. Ancak bu öğrenci farklı tipteki kare matrisler için bir genellemeye ulaşamamıştır. ÖA10 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruda deneysel ana ispat şemasını kullanmıştır ve verdiği cevap Şekil 4.3'de sunulmuştur.



2. **Soru:** $\forall X$ matrisi için XX^T matrisi simetrik matristir. İspatlayınız.

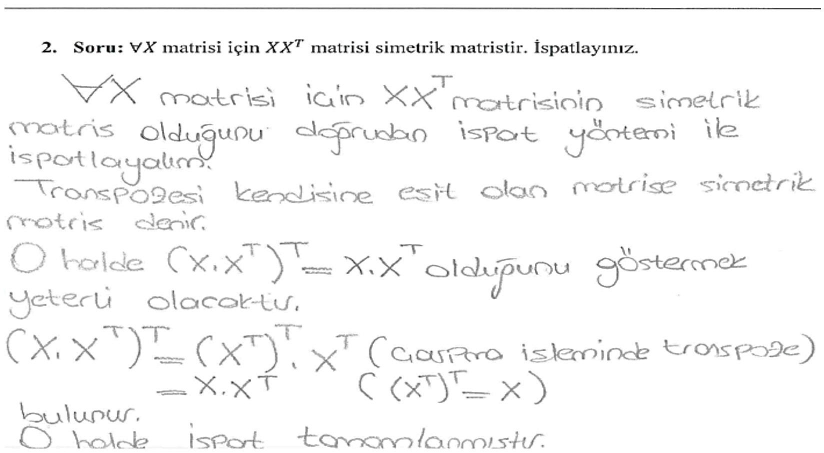
$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun.

$X.X^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix}$

Olduğundan $X.X^T$ simetrik matristir.

Şekil 4.3. İkinci Soruya Ait Deneysel İspat Şeması Örneği

ÖA10 kodlu öğretmen adayı uygulama sonrasında bu önermeyi işlemsel düşünme, genelleme ve mantıksal çıkarım kurallarını aksiyomatik yapı içerinde ispatlamış ve doğru cevap vermiştir. ÖA10 kodlu öğretmen adayı uygulama sonrasında bu soruda analitik ana ispat şemasını kullanmıştır ve verdiği cevap Şekil 4.4'de sunulmuştur.



2. **Soru:** $\forall X$ matrisi için XX^T matrisi simetrik matristir. İspatlayınız.

$\forall X$ matrisi icin XX^T matrisinin simetrik matris oldugunu dogrudan ispat yöntemi ile ispatlayalım.
Transpozesi kendisine esit olan matrise simetrik matris denir.
O halde $(X.X^T)^T = X.X^T$ oldugunu göstermek yeterli olacaktır.
$(X.X^T)^T = (X^T)^T . X^T$ (carpma isleminde transpoze)
$= X.X^T$ $((X^T)^T = X)$
bulunur.
O halde ispat tamamlanmıstır.

Şekil 4.4. İkinci Soruya Ait Analitik İspat Şeması Örneği

Şimdi de dört öğretmen adayıyla yapılan yarı yapılandırılmış mülakatların bulgularına değinelim. Dört öğretmen adayının uygulama öncesi ve sonrası yapılan yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen sahip oldukları ana ispat şemaları Tablo 4.29'da verilmiştir. Mülakatlarda ayrıca öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemleri bilip uygulama bilgileri de sahip oldukları ana ispat şemalarıyla birlikte değerlendirilmiştir.

Tablo 4.29. Dört Öğretmen Adayının *Sahip Oldukları Ana İspat Şemalarına* Ait Yarı Yapılandırılmış Mülakat Bulguları

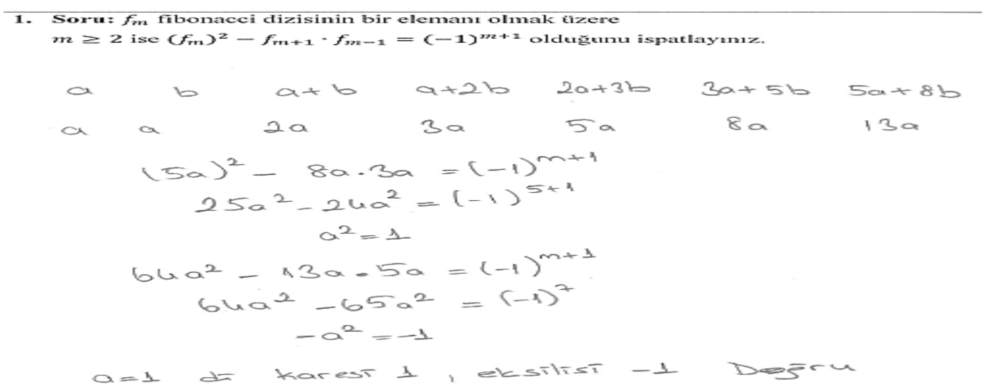
Öğretmen Adayı Kodu	Yarı Yapılandırılmış Mülakat													
	Uygulama Öncesi							Uygulama Sonrası						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
K1	3	0	2	1	3	3	1	3	3	3	3	3	3	3
K2	1	2	2	2	2	1	1	1	3	3	3	3	3	3
K3	1	2	1	2	3	1	1	3	2	3	3	3	3	3
K4	0	0	0	0	3	0	0	3	3	1	3	3	1	1

0: Yanıtsız, 1:Dışsal, 2: Deneysel, 3: Analitik

Uygulama öncesinde birinci soruda bir öğretmen adayı herhangi bir ispat şemasına sahip değil iken iki öğretmen adayı dışsal, bir öğretmen adayı da analitik ispat şemasına sahiptir. Uygulama sonrasında ise bir öğretmen adayı dışsal ve üç öğretmen adayı da analitik ispat şemasına sahip olmuştur. Bu soruda dışsal şemadan analitik şemaya dönüş dikkat çekmektedir. Örneğin K3 kodlu öğretmen adayı bu soruda uygulama öncesinde dışsal olan ispat şemasını uygulama sonrasında analitik şema düzeyine çıkarmıştır. K3 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde en sık dışsal şemaya başvuran, ankette dışsal şemaya sahip öğrencilerin özelliklerini yansıtan öğretmen adaylarından biridir. Uygulama sonrasında ise yedi sorudan altısında analitik şemayı kullanmıştır. Araştırmamızın amaçlarından birisi öğretmen adaylarının sahip oldukları dışsal şemaları analitik düzeye çıkarmak olduğundan bu öğretmen adayının gösterdiği gelişim önemlidir.

K3 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruda ispat için herhangi bir yöntem seçememiş ve soruyu yanlış cevaplamıştır. Uygulama sonrasında ise en uygun ispat yöntemini seçmiş ve soruyu doğru cevaplamıştır. Uygulama öncesi mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir.

M: Verilen önermenin doğruluğunu ispatlayınız.


1. Soru: f_m fibonacci dizisinin bir elemanı olmak üzere $m \geq 2$ ise $(f_m)^2 - f_{m+1} \cdot f_{m-1} = (-1)^{m+1}$ olduğunu ispatlayınız.

a b a+b a+2b 2a+3b 3a+5b 5a+8b

a a 2a 3a 5a 8a 13a

$(5a)^2 - 8a.3a = (-1)^{m+1}$

$25a^2 - 24a^2 = (-1)^{5+1}$

$a^2 = 1$

$64a^2 - 13a.5a = (-1)^{m+1}$

$64a^2 - 65a^2 = (-1)^7$

$-a^2 = -1$

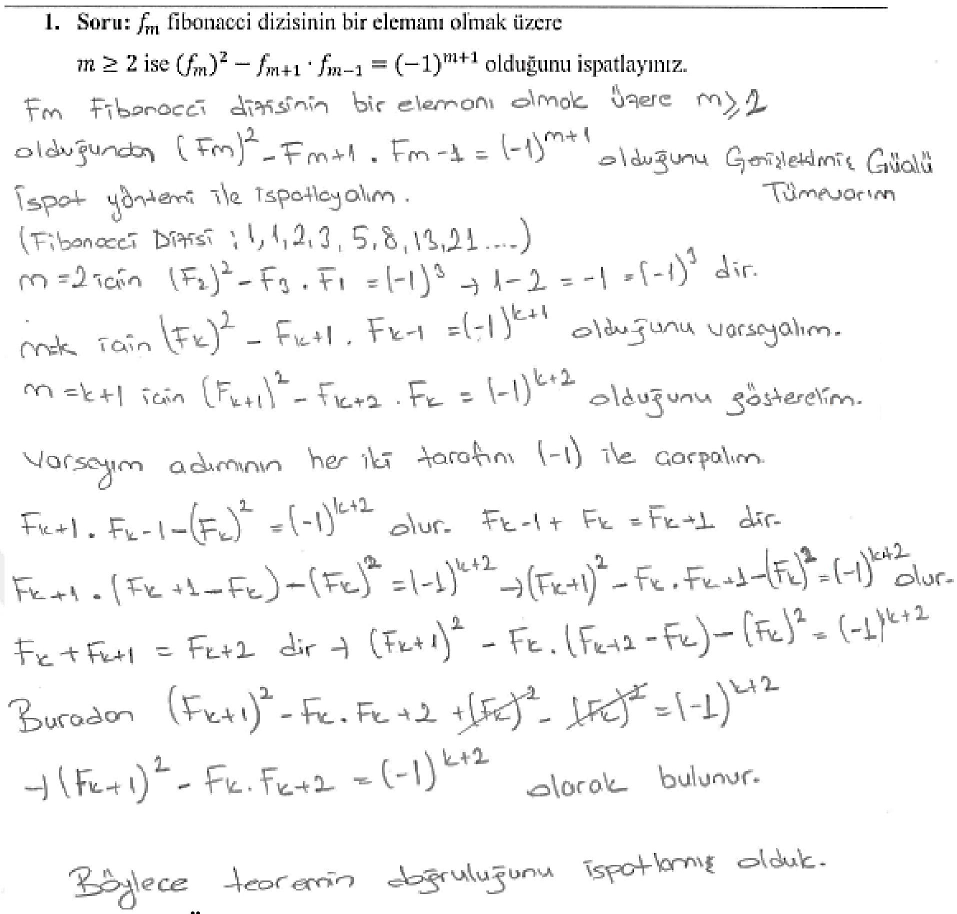
a=1 dr karesi 1, eksilisi −1 Doğru

Şekil 4.5. K3 Kodlu Öğretmen Adayının Uygulama Öncesinde 1. Soruda Sahip Olduğu Dışsal İspat Şeması

M: Bu soruda ispat için hangi ispat yöntemini seçtiniz?
K3: İspat yöntemi olarak genel bir yargıya varmak istedim.
M: Adı var mı bu yöntemin?
K3: Yok. 1, 2, 3 değer vermek yerine herhangi bir sayının da bunu sağladığını göstermek için harflendirme yaptım.
M: Bu soruda yaptığınız ispat sizi ve başkalarını ikna etmeye yeterli midir?
K3: Yani şey olarak bu çözüm ikna etti. Fibonacci dizisini normalde yazıp gösterdim.
M: Yaptığın işlemler sana bu teorem doğrudur dedirttirdi mi?
K3: (Yaptığı işlemleri göstererek) Alttakiler dedirttirdi evet.
M: Ne yaptın alttakilerde?
K3: Alttakilerde herhangi bir iki eleman aldım. Yani bunu genelledim komple.
M: Sizce yaptığınız bu ispatta eksik noktalar var mı?
K3: Bilgi konusunda şeyim yok benim, sadece bu kadar biliyorum.
M: Bu sorunun sizin yaptığınızdan başka bir ispatı var mıdır?
K3: Ya bu soruyu yani bilmediğimiz bir yöntemden ispatlanabilir diye düşünüyorum ben. Tek bir şekilde (kendi yaptığını kastediyor) olmaz yani.
M: Bu ispatı yaparken güçlük yaşadınız mı?
K3: Böyle bir ispattan haberim olmadığı için yani. Okuduğum şey mantıklı geldi, aklıma yattı, böyle bir teorem olduğuna inandım.

Şekil 4.5’de görüldüğü gibi K3 kodlu öğretmen adayı sembollerle işlem yürütmeye çalışmış ancak sembolleri manipüle etmiştir. Mülakatta sembollerle yaptığı işlemler sonunda genellemeye ulaştığını ve kendini ikna ettiğini belirtmiştir. Kendi ikna olduğu için bir ispat şemasına sahiptir. Öğretmen adayı sembolleri kullanmış ancak yanlış işlemler yapmış, ispat yapamamıştır. Sandığının aksine herhangi bir mantıksal çıkarım, işlemsel düşünme ve genelleme yapmamıştır. Bu yüzden K3 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde dışsal (sembolik) ispat şemasına sahiptir. Uygulama sonrasındaki mülakat diyaloglarına da aşağıda yer verilmiştir.

M: Verilen önermenin doğruluğunu ispatlayınız.



1. Soru: f_m fibonacci dizisinin bir elemanı olmak üzere

$m \geq 2$ ise $(f_m)^2 - f_{m+1} \cdot f_{m-1} = (-1)^{m+1}$ olduğunu ispatlayınız.

Fm Fibonacci dizisinin bir elemanı olmak üzere $m \geq 2$ olduğundan $(F_m)^2 - F_{m+1} \cdot F_{m-1} = (-1)^{m+1}$ olduğunu Genişletilmiş Güçlü Tümevarım İspat yöntemi ile ispatlayalım.

(Fibonacci Dizisi ; 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ....)

$m=2$ için $(F_2)^2 - F_3 \cdot F_1 = (-1)^3 \to 1-2 = -1 = (-1)^3$ dir.

$m=k$ için $(F_k)^2 - F_{k+1} \cdot F_{k-1} = (-1)^{k+1}$ olduğunu varsayalım.

$m=k+1$ için $(F_{k+1})^2 - F_{k+2} \cdot F_k = (-1)^{k+2}$ olduğunu gösterelim.

Varsayım adımının her iki tarafını (-1) ile çarpalım.

$F_{k+1} \cdot F_{k-1} - (F_k)^2 = (-1)^{k+2}$ olur. $F_{k-1} + F_k = F_{k+1}$ dir.

$F_{k+1} \cdot (F_{k+1} - F_k) - (F_k)^2 = (-1)^{k+2} \to (F_{k+1})^2 - F_k \cdot F_{k+1} - (F_k)^2 = (-1)^{k+2}$ olur.

$F_k + F_{k+1} = F_{k+2}$ dir $\to (F_{k+1})^2 - F_k \cdot (F_{k+2} - F_k) - (F_k)^2 = (-1)^{k+2}$

Buradan $(F_{k+1})^2 - F_k \cdot F_{k+2} + \cancel{(F_k)^2} - \cancel{(F_k)^2} = (-1)^{k+2}$

$\to (F_{k+1})^2 - F_k \cdot F_{k+2} = (-1)^{k+2}$ olarak bulunur.

Böylece teoremin doğruluğunu ispatlamış olduk.

Şekil 4.6. K3 Kodlu Öğretmen Adayının Uygulama Sonrasında 1. Soruda Sahip Olduğu Analitik İspat Şeması

M: Bu soruda ispat için hangi ispat yöntemini seçtiniz?
K3: Birinci soruda tümevarımı seçtim.
M: Hangi tümevarımı?
K3: Genişletilmiş güçlü tümevarımı.
M: Neden bu yöntemi seçtiniz?
K3: Sürekliliği var gibisinden yani, sonsuza kadar gittiği için.
M: Seçtiğiniz yöntem hakkında bilgi veriniz.
K3: 2'den büyük, sonsuza kadar gidiyor. O yüzden bir yerde kısıtlamak lazım. O da tümevarımla yapılıyor diye düşündüm.
M: Seçtiğiniz ispat yöntemi bu soru için uygun mu?
K3: Hemen fark edebilseydim daha çok uygun olacaktı, biraz zorladı beni yani.
M: Daha önce fark etmedin mi? Biraz başka yöntemlerle denedin mi?
K3: Başka yöntemle denemedim hiç.
M: Bu soruda yaptığınız ispat sizi ve başkalarını ikna etmeye yeterli midir?
K3: Şu an ikna ediyor.
M: Peki başkalarını ikna edebilir misin bu ispatla?
K3: Yani edebilirim, tam açıklayabilirsem yaptığım şeyleri.
M: Sizce yaptığınız bu ispatta eksik noktalar var mı?
K3: Eksik nokta işte biraz daha kolay hale getirilebilirdi.

M: Bu sorunun sizin yaptığınızdan başka bir ispatı var mıdır?
K3: Hiçbir fikrim yok şu an.
M: Daha önceki öğrenim hayatınızda yaptığınız bu ispatı görmüş müydünüz?
K3: Yok.
M: Yaptığınız bu ispatta attığınız adımları anlamlandırabilir misiniz?
K3: 2 için doğru olduğunu gösterdim. k *için doğru olduğunu kabul ettim.* $k + 1$ *için doğruluğunu gösterdim.*
M: Bu ispatı yaparken güçlük yaşadınız mı?
K3: Yani ne yapmam gerektiğini biliyorum artık.

Şekil 4.6'da görüldüğü gibi öğretmen adayı bu soru için en uygun yöntem olan genişletilmiş güçlü tümevarımla ispat yöntemini seçip doğru bir şekilde uygulamış ve yöntemi de anlamlandırabilmiştir. $m = 2$ için doğru olduğunu göstermiş, $m = k$ için doğru olduğunu kabul etmiş ve $m = k + 1$ in doğruluğunu gerekli işlemleri yaparak göstermiştir. Mantıksal çıkarım, işlemsel düşünme ve genellemeyi aksiyomatik yapı içerisinde yapmıştır. Ayrıca mülakatta kendi ikna olduğu gibi başkalarını da ikna edebileceğini, yaptığı ispatta herhangi bir eksiklik olmadığını, herhangi bir güçlük yaşamadığını ve daha önce bu ispatı hiç görmediğini belirtmiş ve ispatta attığı adımları da anlamlandırabilmiştir. Bu yüzden K3 kodlu öğretmen adayı uygulama sonrasında analitik (aksiyomatik) ispat şemasına sahiptir.

Uygulama öncesinde ikinci soruda iki öğretmen adayı herhangi bir ispat şemasına sahip değil iken iki öğretmen adayı da deneysel ispat şemasına sahiptir. Uygulama sonrasında ise bir öğretmen adayı deneysel ve üç öğretmen adayı da analitik ispat şemasına sahip olmuştur. Bu soruda ispat şemasına sahip olmayan öğretmen adaylarının analitik şemaya dönüşü dikkat çekmektedir. Örneğin K4 kodlu öğretmen adayı bu soruda uygulama öncesinde herhangi bir şemaya sahip değil iken uygulama sonrasında analitik şema sahip olmuştur. K4 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde soruları en çok yanıtsız bırakan, ankette herhangi bir şemaya sahip olmayan öğrencilerin özelliklerini yansıtan öğretmen adaylarından biridir. Uygulama öncesinde yedi sorudan altısını yanıtsız bırakıp herhangi bir şemaya sahip olamayan bu öğretmen adayı uygulama sonrasında ise yedi sorudan dördünde analitik şemayı kullanmıştır. Araştırmamızın amaçlarından birisi herhangi bir şemaya sahip olmayan öğretmen adaylarını analitik düzeye çıkarmak olduğundan bu öğretmen adayının gösterdiği gelişim önemlidir.

K4 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruda ispat için herhangi bir yöntem seçememiş ve soruyu yanıtsız bırakmıştır. İspatı yapamamasının sebebini de belirtmiştir.

Uygulama sonrasında ise en uygun ispat yöntemini seçmiş ve soruyu doğru cevaplamıştır. Uygulama öncesi mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir.

M: Verilen önermenin doğruluğunu ispatlayınız.

---

2. Soru: $\forall X$ matrisi için XX^T matrisi simetrik matristir. İspatlayınız.

Simetrik matrisin ne olduğunu hatırlayamadığım için yapamadım.

Şekil 4.7. K4 Kodlu Öğretmen Adayının Uygulama Öncesinde 2. Soruda Herhangi Bir Şemaya Sahip Olmadığı Cevabı

M: Bu soruda herhangi bir ispat yapmadınız mı?
K4: Hani kesin hiç bilemedim, yani burada simetrik matristir, ilk önce benim bunun doğruluğunu bilmem lazım dedim.
M: Nasıl bir güçlük yaşadınız?
K4: Yani simetrik matrisi biliyorum ama ne olduğunu hatırlayamadım. İlk önce onun [önermenin] doğruluğunu benim bilmem lazımdı.

Şekil 4.7'de görüldüğü gibi K4 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde herhangi bir ispatlama yapamamıştır. Ayrıca mülakatta önermenin doğruluğunu kendisinin de bilmediğini yani kendini ikna edecek bilgiye sahip olmadığını ve simetrik matrisin tanımını hatırlayamadığı için bunu yaşadığını belirtmiştir. Bu yüzden K4 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde herhangi bir ispat şemasına sahip değildir. Çünkü herhangi bir ispat şemasına sahip olması için soruyu yanıtsız bırakmaması ayrıca kendisinin de ikna olması gerekiyordu. Uygulama sonrasındaki mülakat diyaloglarına da aşağıda yer verilmiştir.

M: Verilen önermenin doğruluğunu ispatlayınız.

---

2. Soru: $\forall X$ matrisi için XX^T matrisi simetrik matristir. İspatlayınız.

$X \cdot X^T$ çarpım matrisinin transpozesi yine kendisi yani $X \cdot X^T$ olmalı.
Herhangi bir X matrisi için $X \cdot X^T$ matrisinin simetrik olduğunu ispatlayalım. Doğrudan ispat yöntemini kullanalım.

$$(X \cdot X^T)^T = (X^T)^T \cdot X^T = X \cdot X^T$$

ispat bitti.

Şekil 4.8. K4 Kodlu Öğretmen Adayının Uygulama Sonrasında 2. Soruda Sahip Olduğu Analitik İspat Şeması

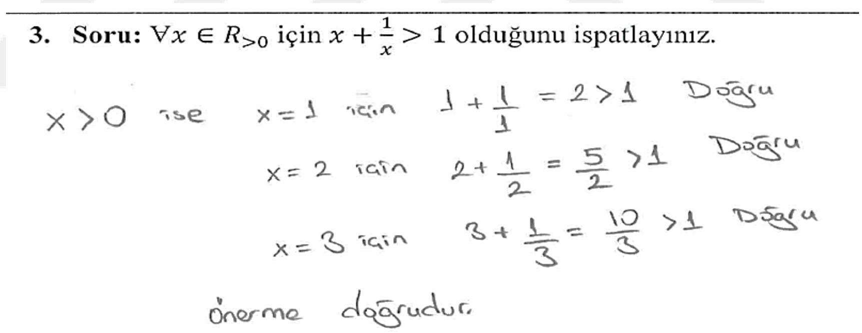
M: Bu soruda ispat için hangi ispat yöntemini seçtiniz?
K4: Doğrudan ispat yöntemi ile yaptım.
M: Neden bu yöntemi seçtiniz?
K4: Doğrudan çünkü hipotezden hükme kolayca erişebiliyordum.
M: Seçtiğiniz yöntem hakkında bilgi veriniz.
K4: Hipotezden hükme gidiyoruz.
M: Seçtiğiniz ispat yöntemi bu soru için uygun mu?
K4: Uygun.
M: Bu soruda yaptığınız ispat sizi ve başkalarını ikna etmeye yeterli midir?
K4: Evet etti.
M: Başlarını ikna eder mi?
K4: İkna eder.
M: Sizce yaptığınız bu ispatta eksik noktalar var mı?
K4: Yani her şey güzel, varsayımım güzel, ilerlemelerim güzel. Bence güzel. İspatı da bitirdim.
M: Bu sorunun sizin yaptığınızdan başka bir ispatı var mıdır?
K4: İspatlayabilen varsa bana da göstersin ama en uygunu bu. Yani belki vardır ama ben şu an bilmiyorum.
M: Daha önceki öğrenim hayatınızda yaptığınız bu ispatı görmüş müydünüz?
K4: Hayır görmedim.
M: Yaptığınız bu ispatta attığınız adımları anlamlandırabilir misiniz?
K4: Öncelikle simetrik matrisin ne olduğunu yazdım. Transpozesini aldım. Transpozesini alınca kendisine eşit oluyor. Kendisine eşit olduğu için simetrik matris oluyor.
M: Bu ispatı yaparken güçlük yaşadınız mı?
K4: Hayır en kolay yaptığım sorulardan bir tanesi.

Şekil 4.8’de görüldüğü gibi öğretmen adayı bu soru için en uygun yöntem olan doğrudan ispat yöntemini seçip doğru bir şekilde uygulamıştır. Simetrik matris tanımdan hareket edip transpoze işlemi yapmış, sonrasında da işlemleri doğru bir şekilde uygulayabilmiş ve ispatı tamamlamıştır. Mantıksal çıkarım, işlemsel düşünme ve genellemeyi aksiyomatik yapı içerisinde yapmıştır. Ayrıca mülakatta kendi ikna olduğu gibi başkalarını da ikna edebileceğini, yaptığı ispatta herhangi bir eksiklik olmadığını, herhangi bir güçlük yaşamadığını ve daha önce bu ispatı hiç görmediğini belirtmiş ve ispatta attığı adımları da anlamlandırabilmiştir. Bu yüzden K4 kodlu öğretmen adayı uygulama sonrasında analitik (aksiyomatik) ispat şemasına sahiptir.

Uygulama öncesinde üçüncü soruda bir öğretmen adayı herhangi bir ispat şemasına sahip değil iken bir öğretmen adayı dışsal, iki öğretmen adayı da deneysel ispat şemasına sahiptir. Uygulama sonrasında ise bir öğretmen adayı dışsal ve üç öğretmen adayı da analitik ispat şemasına sahip olmuştur. Bu soruda deneysel şemadan analitik şemaya dönüş dikkat çekmektedir. Örneğin K1 kodlu öğretmen adayı bu soruda uygulama öncesinde deneysel olan ispat şemasını uygulama sonrasında analitik şema düzeyine çıkarmıştır. Uygulama öncesinde anketteki sorularda analitik şemayı kullanan öğretmen adayı sayısı azdır. K1 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde ankette diğer öğretmen adaylarına göre en sık analitik şemayı kullanan, analitik şemaya sahip öğrencilerin özelliklerini diğer öğretmen adaylarına göre daha sık yansıtan öğretmen adaylarından biridir. Uygulama öncesinde yedi sorudan üçünde uygulama sonrasında ise yedi sorunun tamamında analitik şemayı kullanmıştır. Uygulama öncesinde analitik şemayı kullanamadığı sorularda uygulama sonrasında analitik şemayı kullanabilmiştir. Bu sorulardan biri de bu üçüncü sorudur.

K1 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruda ispat için herhangi bir yöntem seçememiş ve soruyu yanlış cevaplamıştır. Uygulama sonrasında ise en uygun ispat yöntemini seçmiş ve soruyu doğru cevaplamıştır. Uygulama öncesi mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir.

M: Verilen önermenin doğruluğunu ispatlayınız.


3. Soru: $\forall x \in R_{>0}$ için $x + \frac{1}{x} > 1$ olduğunu ispatlayınız.

$x > 0$ ise $x = 1$ için $1 + \frac{1}{1} = 2 > 1$ Doğru

$x = 2$ için $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} > 1$ Doğru

$x = 3$ için $3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} > 1$ Doğru

önerme doğrudur.

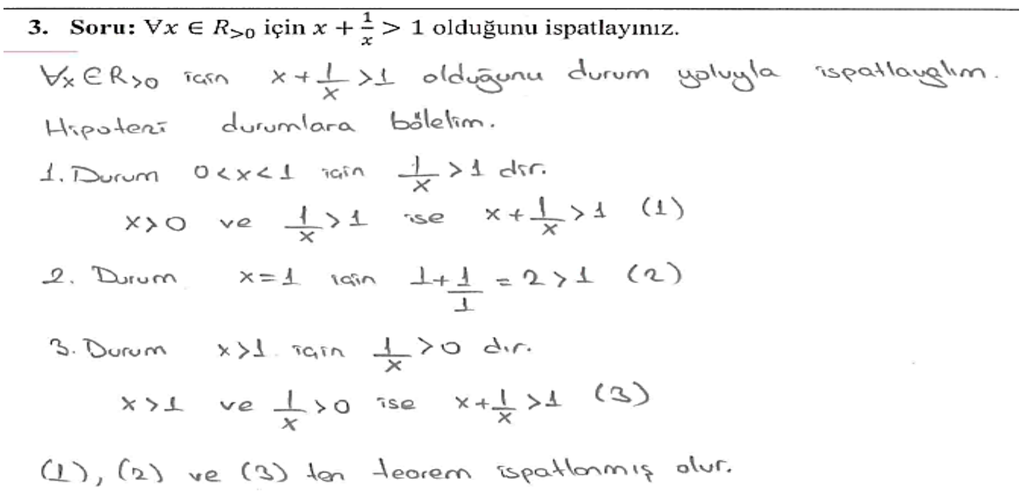
Şekil 4.9. K1 Kodlu Öğretmen Adayının Uygulama Öncesinde 3. Soruda Sahip Olduğu Deneysel İspat Şeması

M: Bu soruda ispat için hangi ispat yöntemini seçtiniz?
K1: Bir ispat yöntemi kullanmadım bence burada.
M: İspat yöntemi olmadan ispatlama yapılabilir mi?
K1: Ben kullanmadan yaptım. Demek ki kullanmak zorunda değiliz.
M: Bu soruda yaptığınız ispat sizi ve başkalarını ikna etmeye yeterli midir?
K1: Beni etti. Başkalarını da ederim. Sonuçta 1, 2, 3, … sonsuza kadar hep doğru gidiyor.
M: x tam sayı mı olmalı?
K1: Aslında sıfırdan büyük diyor ama reel diyor. Ancak tamam 1, 2, 3, … tam sayılarının arasında da reel sayılar var.
M: Sizce yaptığınız bu ispatta eksik noktalar var mı?
K1: Bence yok. Sonsuza kadar gittiği görülüyor benim yaptığımda.
M: Bu sorunun sizin yaptığınızdan başka bir ispatı var mıdır?

K1: Olabilir.
M: Bu ispatı yaparken güçlük yaşadınız mı?
K1: Hayır kolaydı.
M: Bu soruda örnek vermek ispat için yeterli mi?
K1: Dediğim gibi hocam. Örnekler sonsuza kadar gidiyorsa sorun yok.

Şekil 4.9'da görüldüğü gibi K1 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde herhangi bir ispat yöntemi seçmeyip önermeyi sıfırdan büyük 1, 2, 3 tam sayıları için doğrulamış ve önermenin doğruluğuna ikna olmuştur. Kendisi ikna olduğu için bir ispat şemasına sahiptir. Ayrıca mülakatta kendi ikna olduğu gibi başkalarını da ikna edebileceğini, yaptığı ispatta herhangi bir eksiklik olmadığını, herhangi bir güçlük yaşamadığını ve verdiği örneklerin ispat için yeterli olduğunu belirtmiştir. Ancak kendisi ispatın doğası ile ilgili güçlük yaşamıştır. Öğretmen adayı örnekle doğrulama yapmış ispat yapamamıştır. Bu yüzden K1 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde deneysel (örnek-temelli) ispat şemasına sahiptir. Uygulama sonrasındaki mülakat diyaloglarına da aşağıda yer verilmiştir.

M: Verilen önermenin doğruluğunu ispatlayınız.



3. Soru: $\forall x \in R_{>0}$ için $x + \frac{1}{x} > 1$ olduğunu ispatlayınız.

$\forall x \in R_{>0}$ için $x + \frac{1}{x} > 1$ olduğunu durum yoluyla ispatlayalım.
Hipotezi durumlara bölelim.
1. Durum $0 < x < 1$ için $\frac{1}{x} > 1$ dir.
$x > 0$ ve $\frac{1}{x} > 1$ ise $x + \frac{1}{x} > 1$ (1)
2. Durum $x = 1$ için $1 + \frac{1}{1} = 2 > 1$ (2)
3. Durum $x > 1$ için $\frac{1}{x} > 0$ dır.
$x > 1$ ve $\frac{1}{x} > 0$ ise $x + \frac{1}{x} > 1$ (3)
(1), (2) ve (3) ten teorem ispatlanmış olur.

Şekil 4.10. K1 Kodlu Öğretmen Adayının Uygulama Sonrasında 3. Soruda Sahip Olduğu Analitik İspat Şeması

M: Bu soruda ispat için hangi ispat yöntemini seçtiniz?
K1: Durum yoluyla ispatladım.
M: Neden bu yöntemi seçtiniz?
K1: Yani burada bize verilen bir eşitsizlik var. x için reel sayı diyor, pozitif reel sayı. Ben bunu yani örneklemeyle falan yapamam, işin içinden çıkılmaz. Artık dersten sonra sezgi de oluştu. x pozitif reel sayı olduğundan ben bunu durum yoluyla ispatlayayım dedim direk.
M: Seçtiğiniz yöntem hakkında bilgi veriniz.

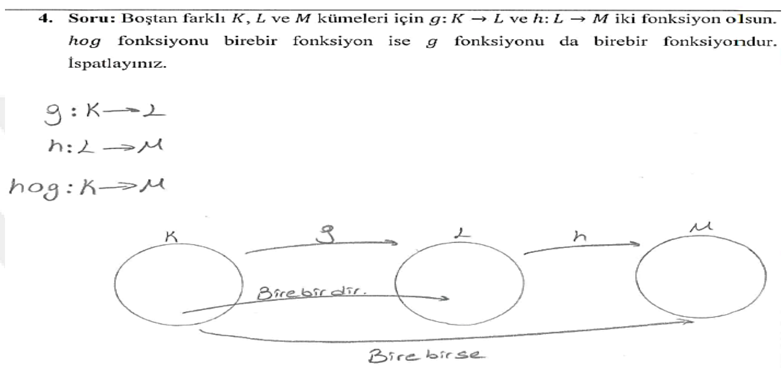
K1: Hipotezden hükme direk gidilemediğinde, hipotezleri durumlara bölüp, tüm durumlar için ayrı ayrı hükme ulaşıyoruz.
M: Seçtiğiniz ispat yöntemi bu soru için uygun mu?
K1: En uygunu bu bence.
M: Bu soruda yaptığınız ispat sizi ve başkalarını ikna etmeye yeterli midir?
K1: Beni etti fazlasıyla. Hem aksiyomatik yapıyı hem uygun ispat yöntemini kullandım. Başkaları da ikna olur.
M: Sizce yaptığınız bu ispatta eksik noktalar var mı?
K1: Bence yok.
M: Bu sorunun sizin yaptığınızdan başka bir ispatı var mıdır?
K1: Olabilir ama şu an aklıma ilk durum yoluyla ispat yöntemi geldi.
M: Daha önceki öğrenim hayatınızda yaptığınız bu ispatı görmüş müydünüz?
K1: Yok. Birebir bu soruyu görmedim. Bu tarz eşitsizlikleri çözmüşümdür tabii lisede falan ama ispat şeklinde değil.
M: Yaptığınız bu ispatta attığınız adımları anlamlandırabilir misiniz?
K1: Tabii anlamlandırabiliyorum. x *sıfırdan büyük reel sayı oradan hareket ettim. Üç durum için hükme ulaştım.* $x > 1$, $x = 1$ *ve* $0 < x < 1$.
M: Bu ispatı yaparken güçlük yaşadınız mı?
K1: Hayır. Hemen yaptım.

Şekil 4.10'da görüldüğü gibi öğretmen adayı bu soru için en uygun yöntem olan durum yoluyla ispat yöntemini seçip doğru bir şekilde uygulamıştır. Durumlar hipotezi, hipotez de durumları kapsadığı için yöntemi anlamlandırabilmiştir. Sonrasında ise gerekli işlemleri uygulayabilmiştir. Mantıksal çıkarım, işlemsel düşünme ve genellemeyi aksiyomatik yapı içerisinde yapmıştır. Ayrıca mülakatta kendi ikna olduğu gibi başkalarını da ikna edebileceğini, yaptığı ispatta herhangi bir eksiklik olmadığını, herhangi bir güçlük yaşamadığını ve daha önce bu ispatı hiç görmediğini belirtmiş ve ispatta attığı adımları da anlamlandırabilmiştir. Bu yüzden K1 kodlu öğretmen adayı uygulama sonrasında analitik (aksiyomatik) ispat şemasına sahiptir.

Uygulama öncesinde dördüncü soruda bir öğretmen adayı herhangi bir ispat şemasına sahip değil iken bir öğretmen adayı dışsal, iki öğretmen adayı da deneysel ispat şemasına sahiptir. Uygulama sonrasında ise dört öğretmen adayı da analitik ispat şemasına sahip olmuştur. Bu soruda da deneysel şemadan analitik şemaya dönüş dikkat çekmektedir. Örneğin K2 kodlu öğretmen adayı bu soruda uygulama öncesinde deneysel olan ispat şemasını uygulama sonrasında analitik şema düzeyine çıkarmıştır. K2 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde en sık deneysel şemaya başvuran, ankette deneysel şemaya sahip öğrencilerin özelliklerini yansıtan öğretmen adaylarından biridir. Uygulama sonrasında ise yedi sorudan altısında analitik şemayı kullanmıştır. Araştırmamızın amaçlarından birisi öğretmen adaylarının sahip oldukları deneysel şemaları analitik düzeye çıkarmak olduğundan bu öğretmen adayının gösterdiği gelişim önemlidir.

K2 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruda ispat için herhangi bir yöntem seçememiş ve soruyu yanlış cevaplamıştır. Uygulama sonrasında ise en uygun ispat yöntemini seçmiş ve soruyu doğru cevaplamıştır. Uygulama öncesi mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir.

M: Verilen önermenin doğruluğunu ispatlayınız.

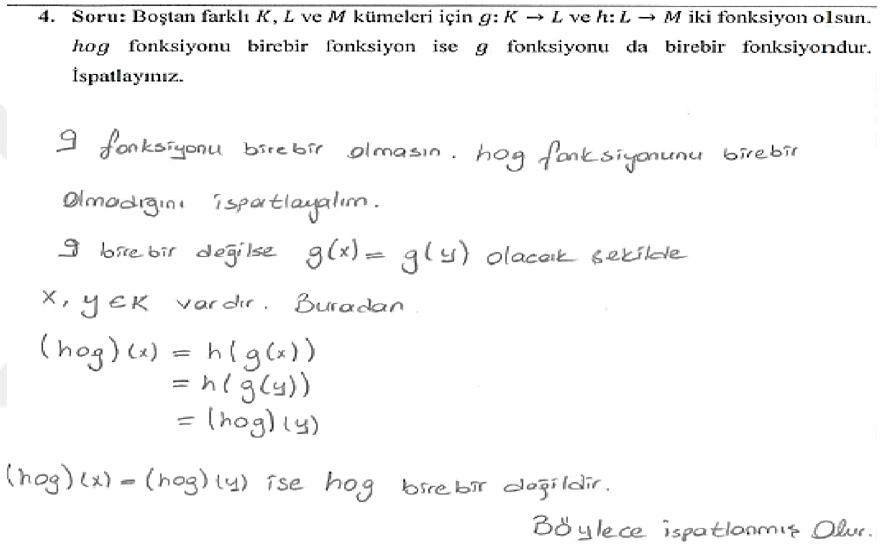


Şekil 4.11. K2 Kodlu Öğretmen Adayının Uygulama Öncesinde 4. Soruda Sahip Olduğu Deneysel İspat Şeması

M: Bu soruda ispat için hangi ispat yöntemini seçtiniz?
K2: Bu soruda ben şekil çizdim.
M: Şekli nasıl çizdin?
K2: Bileşke fonksiyon tanımı ve birebirlik tanımlarını gözden geçirdim.
M: Yöntem?
K2: Aslında yöntem seçmedim.
M: İspat yöntemi olmadan ispatlama yapılabilir mi?
K2: Tamamen sezgisel olarak şekildeki gibi yapmak bana göre yeterliydi.
M: Bu soruda yaptığınız ispat sizi ve başkalarını ikna etmeye yeterli midir?
K2: Sezgisel ama biri bana bunu yapmış olsaydı ben olurdum. Ben de ikna ederim.
M: Sizce yaptığınız bu ispatta eksik noktalar var mı?
K2: Eksikler olsa da ikna edici bir ispat. Sezgisel olaraktan.
M: Bu sorunun sizin yaptığınızdan başka bir ispatı var mıdır?
K2: Matematiksel ifadelerle yapılanı da vardır. Ama o da bu şekli anlatır.
M: Bu ispatı yaparken güçlük yaşadınız mı?
K2: Güçlük değil yani düşündüğüm gibi yaptım.
M: Bu soruda şekil çizmek ispat için yeterli midir?
K2: Böyle açıklayıcı ve anlamlı olursa olur.

Şekil 4.11'de görüldüğü gibi K2 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde herhangi bir ispat yöntemi seçmeyip şekil çizerek önermenin doğruluğuna ikna olmuştur. Kendisi ikna olduğu için bir ispat şemasına sahiptir. Ayrıca mülakatta kendi ikna olduğu gibi başkalarını da ikna edebileceğini, yaptığı ispatta herhangi bir eksiklik olsa da ikna edici olduğunu, herhangi bir güçlük yaşamadığını ve çizdiği şeklin açıklayıcı olduğunu belirtmiştir. Öğretmen adayı şekil çizerek gerekçelendirme yapmış ancak bir ispat yapmamıştır. Matematiksel ve sözel ifadelere hiç yer vermemiştir. Yaptığı önermeyi resmetmekten başka bir şey değildir. Bu yüzden K2 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde deneysel (algısal) ispat şemasına sahiptir. Uygulama sonrasındaki mülakat diyaloglarına da aşağıda yer verilmiştir.

M: Verilen önermenin doğruluğunu ispatlayınız.



4. Soru: Boştan farklı K, L ve M kümeleri için $g: K \to L$ ve $h: L \to M$ iki fonksiyon olsun. hog fonksiyonu birebir fonksiyon ise g fonksiyonu da birebir fonksiyondur. İspatlayınız.

g fonksiyonu birebir olmasın. hog fonksiyonunu birebir olmadığını ispatlayalım.

g birebir değilse $g(x) = g(y)$ olacak şekilde $x, y \in K$ vardır. Buradan

$$(hog)(x) = h(g(x)) = h(g(y)) = (hog)(y)$$

$(hog)(x) = (hog)(y)$ ise hog birebir değildir.

Böylece ispatlanmış olur.

Şekil 4.12. K2 Kodlu Öğretmen Adayının Uygulama Sonrasında 4. Soruda Sahip Olduğu Analitik İspat Şeması

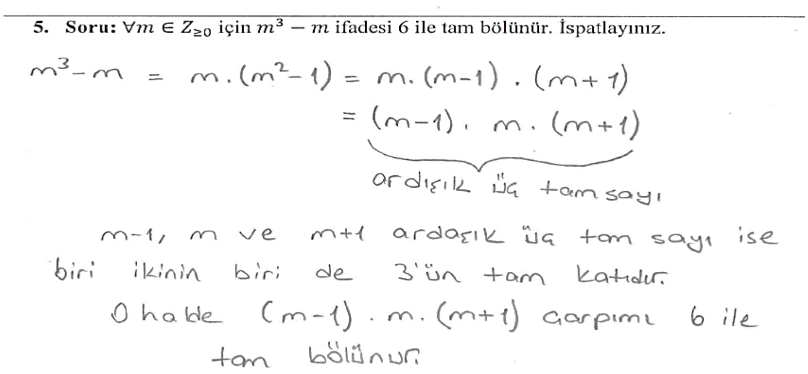
M: Bu soruda ispat için hangi ispat yöntemini seçtiniz?
K2: Olmayan ergi yöntemini.
M: Neden bu yöntemi seçtiniz?
K2: Doğrudan ispatla da olabilirdi belki ama bence olmayana ergi yöntemi en kolayı bu soru için. Bileşke fonksiyonda birebirlik aramaktansa…
M: Seçtiğiniz yöntem hakkında bilgi veriniz.
K2: $p \Rightarrow q$ önermesinin doğruluğu istendiğinde biz $\neg q \Rightarrow \neg p$ önermesini ispat ediyoruz.
M: Seçtiğiniz ispat yöntemi bu soru için uygun mu?
K2: Çok uygun.
M: Bu soruda yaptığınız ispat sizi ve başkalarını ikna etmeye yeterli midir?
K2: Beni gayet etti.
M: Başkalarını eder mi?
K2: Eder. İnsanlar yani bileşke fonksiyonun, birebir fonksiyonun ne demek olduğunu biliyorlarsa.
M: Sizce yaptığınız bu ispatta eksik noktalar var mı?

K2: Eksik bir nokta bence yok.
M: Bu sorunun sizin yaptığınızdan başka bir ispatı var mıdır?
K2: Doğrudan da yapabilirdim belki dediğim gibi ama ben doğrudan çok zorlanırdım.
M: Doğrudan ispat yöntemi ile olur mu?
K2: Denemek lazım hocam.
M: Daha önceki öğrenim hayatınızda yaptığınız bu ispatı görmüş müydünüz?
K2: Üniversiteye başlayınca birinci sınıfta görmüştüm ama o zaman anlayamamıştım, yapamamıştım.
M: Yaptığınız bu ispatta attığınız adımları anlamlandırabilir misiniz?
K2: Anlamlandırıyorum. g birebir olmasın dedim. Buradan bileşke ve birebirlik tanımından hog bileşke fonksiyonun birebir olmadığını ispatladım.
M: Bu ispatı yaparken güçlük yaşadınız mı?
K2: Güçlük yaşamadım ya, en azından tanımları ve kuralları biliyorsam.

Şekil 4.12'de görüldüğü gibi öğretmen adayı bu soru için en uygun yöntem olan olmayana ergi ile ispat yöntemini seçip doğru bir şekilde uygulamıştır. Hükmün değilinden hipotezin değiline ulaştığı için yöntemi anlamlandırabilmiştir. Sonrasında işlemleri doğru bir şekilde ilerletebilmiştir. Mantıksal çıkarım, işlemsel düşünme ve genellemeyi aksiyomatik yapı içerisinde yapmıştır. Ayrıca mülakatta kendi ikna olduğu gibi başkalarını da ikna edebileceğini, yaptığı ispatta herhangi bir eksiklik olmadığını, herhangi bir güçlük yaşamadığını ve daha önce bu ispatı gördüğünde yapamadığını belirtmiş ve ispatta attığı adımları da anlamlandırabilmiştir. Bu yüzden K2 kodlu öğretmen adayı uygulama sonrasında analitik (aksiyomatik) ispat şemasına sahiptir.

Uygulama öncesinde beşinci soruda bir öğretmen adayı deneysel, üç öğretmen adayı da analitik ispat şemasına sahiptir. Uygulama sonrasında ise dört öğretmen adayı da analitik ispat şemasına sahip olmuştur. Bu soruda uygulama öncesi ve sonrası analitik şemanın kullanım sıklığı dikkat çekmektedir. Uygulama öncesi ve sonrası analitik şemayı kullanan öğretmen adayları için yine de bir gelişimden söz etmek mümkündür. Örneğin K4 kodlu öğretmen adayı bu soruda uygulama öncesinde ve sonrasında analitik ispat şemasını kullanmıştır. Ancak uygulama öncesindeki dönüşümcü alt şeması uygulama sonrasında aksiyomatik düzeye çıkmıştır. Ayrıca K4 kodlu öğretmen adayı (her ne kadar uygulama öncesinde seçtiği ispat yönteminin adını bilmese de) uygulama öncesinde ve sonrasında bu soruyu farklı ispat yöntemleriyle doğru cevaplayabilmiştir. Uygulama öncesi mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir.

M: Verilen önermenin doğruluğunu ispatlayınız.


5. Soru: $\forall m \in Z_{\geq 0}$ için $m^3 - m$ ifadesi 6 ile tam bölünür. İspatlayınız.

$$m^3 - m = m.(m^2-1) = m.(m-1).(m+1) = \underbrace{(m-1).m.(m+1)}_{\text{ordışık üç tamsayı}}$$

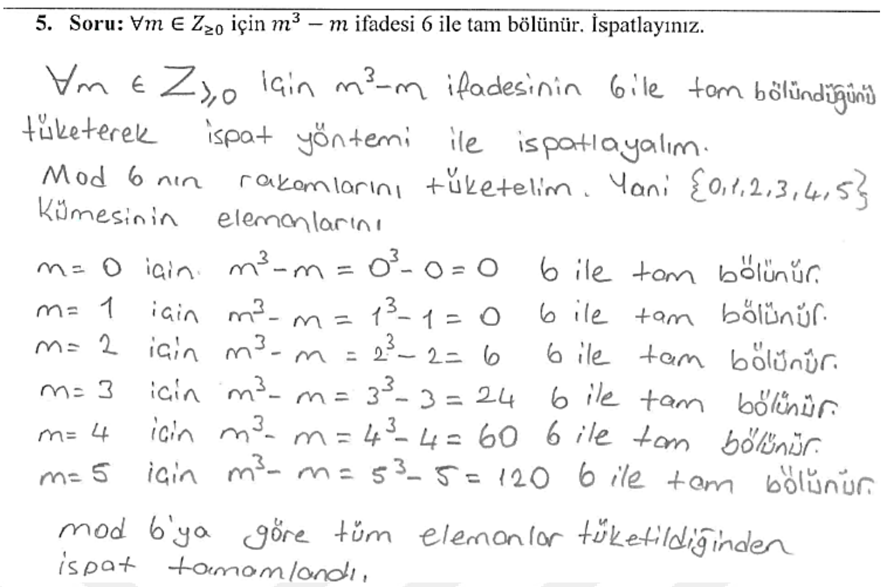
$m-1$, m ve $m+1$ ardaşık üç tam sayı ise biri ikinin biri de 3'ün tam katıdır. O halde $(m-1).m.(m+1)$ çarpımı 6 ile tam bölünür.

Şekil 4.13. K4 Kodlu Öğretmen Adayının Uygulama Öncesinde 5. Soruda Sahip Olduğu Analitik İspat Şeması

M: Bu soruda ispat için hangi ispat yöntemini seçtiniz?
K4: Kendi yöntemlerimle ispatlamaya çalışmışım.
M: İspat yöntemi olmadan ispatlama yapılabilir mi?
K4: Bu soruda yapmışım.
M: Bu soruda yaptığınız ispat sizi ve başkalarını ikna etmeye yeterli midir?
K4: İkna etti beni. Başkalarını da ben ikna ederim.
M: Sizce yaptığınız bu ispatta eksik noktalar var mı?
K4: Eksik yok ispatlamışım. Zaten bir bu soruyu yaptım.
M: Bu sorunun sizin yaptığınızdan başka bir ispatı var mıdır?
K4: Vardır vardır.
M: Daha önceki öğrenim hayatınızda yaptığınız bu ispatı görmüş müydünüz?
K4: Hayır böyle bir teorem görmedim.
M: Yaptığınız bu ispatta attığınız adımları anlamlandırabilir misiniz?
K4: Çarpanlarına ayırdım. Çarpanlar ardışık tamsayı. Sonra 6 ile bölünebilme kuralından…
M: Bu ispatı yaparken güçlük yaşadınız mı?
K4: Nerede güçlük yaşadım, hiç bir fikrim yok, ben bu soruda güçlük yaşamadım.

Şekil 4.13'de görüldüğü gibi K4 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde önermeyi ispatlarken mantıksal çıkarım kurallarını kullanarak işlemsel düşünme ile genellemeye ulaşmıştır. Ancak bunları aksiyomatik yapı içerisinde düzenleyememiştir. Ayrıca mülakatta kendi ikna olduğu gibi başkalarını da ikna edebileceğini, yaptığı ispatta herhangi bir eksiklik olmadığını, herhangi bir güçlük yaşamadığını belirtmiştir. Ayrıca attığı adımları da anlamlandırabilmiştir. Bu yüzden K4 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde analitik (dönüşümcü) ispat şemasına sahiptir. Uygulama sonrasındaki mülakat diyaloglarına da aşağıda yer verilmiştir.

M: Verilen önermenin doğruluğunu ispatlayınız.



5. Soru: $\forall m \in Z_{\geq 0}$ için $m^3 - m$ ifadesi 6 ile tam bölünür. İspatlayınız.

$\forall m \in Z_{\geq 0}$ için m^3-m ifadesinin 6 ile tam bölündüğünü tüketerek ispat yöntemi ile ispatlayalım.
Mod 6 nın rakamlarını tüketelim. Yani $\{0,1,2,3,4,5\}$ kümesinin elemanlarını

$m=0$ için $m^3-m = 0^3-0=0$ 6 ile tam bölünür.
$m=1$ için $m^3-m = 1^3-1=0$ 6 ile tam bölünür.
$m=2$ için $m^3-m = 2^3-2=6$ 6 ile tam bölünür.
$m=3$ için $m^3-m = 3^3-3=24$ 6 ile tam bölünür.
$m=4$ için $m^3-m = 4^3-4=60$ 6 ile tam bölünür.
$m=5$ için $m^3-m = 5^3-5=120$ 6 ile tam bölünür.

mod 6'ya göre tüm elemanlar tüketildiğinden ispat tamamlandı.

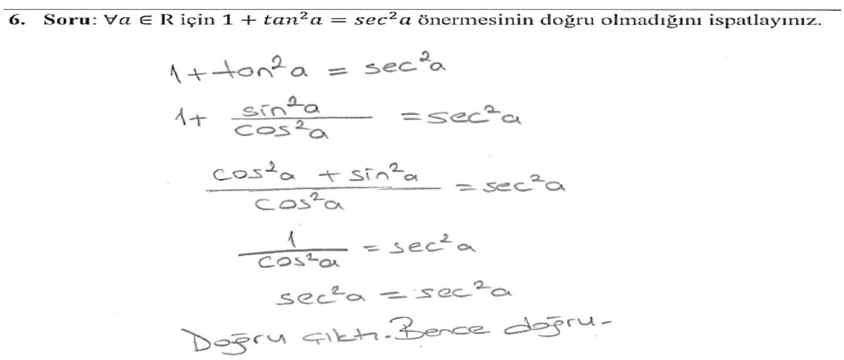
Şekil 4.14. K4 Kodlu Öğretmen Adayının Uygulama Sonrasında 5. Soruda Sahip Olduğu Analitik İspat Şeması

M: Bu soruda ispat için hangi ispat yöntemini seçtiniz?
K4: Beşinci soruda tüketerek ispat yöntemini seçtim.
M: Neden bu yöntemi seçtiniz?
K4: Çünkü şey 6 ile tam bölünebilir hani elimde bir veriler vardı. Hani bir de azdı çok da uzun değildi birazcık, hani onları ispatlamış olursam eğer, hani tüketirsem o elemanlar için dedim ispatı tamamlayabileceğimi düşündüm.
M: Seçtiğiniz yöntem hakkında bilgi veriniz.
K4: Hani hangi elemanları tüketmem gerektiğini buldum ve bunları tükettim.
M: Seçtiğiniz ispat yöntemi bu soru için uygun mu?
K4: Tüketerek mi? Evet uygun yöntem bu.
M: Bu soruda yaptığınız ispat sizi ve başkalarını ikna etmeye yeterli midir?
K4: Evet etti. Başkalarını da ikna eder yani Mod kavramını biliyorsa.
M: Sizce yaptığınız bu ispatta eksik noktalar var mı?
K4: Eksik yok hepsini tükettim.
M: Bu sorunun sizin yaptığınızdan başka bir ispatı var mıdır?
K4: İnsan bir şeyle ispatlayınca ondan başkasının olmadığını düşünüyor ama illaki vardır.
M: Daha önceki öğrenim hayatınızda yaptığınız bu ispatı görmüş müydünüz?
K4: Görmedim.
M: Yaptığınız bu ispatta attığınız adımları anlamlandırabilir misiniz?
K4: 0, 1, 2, 3, 4, 5 i tükettim. 6 ile bölünebildiği için.
M: Bu ispatı yaparken güçlük yaşadınız mı?
K4: Yaşamadım. Sadece 6 yı da tüketecek miyim diye düşündüm.

Şekil 4.14'de görüldüğü gibi öğretmen adayı bu soru için en uygun yöntem olan tüketerek ispat yöntemini seçip doğru bir şekilde uygulamıştır. Tüketilecek elemanlar belli olmadığı için önce onları tespit etmiş sonra da sırasıyla bunları tüketmiştir. Mantıksal çıkarım, işlemsel düşünme ve genellemeyi aksiyomatik yapı içerisinde yapmıştır. Ayrıca mülakatta kendi ikna olduğu gibi başkalarını da ikna edebileceğini, yaptığı ispatta herhangi bir eksiklik olmadığını, herhangi bir güçlük yaşamadığını ve daha önce bu ispatı hiç görmediğini belirtmiş ve ispatta attığı adımları da anlamlandırabilmiştir. Bu yüzden K4 kodlu öğretmen adayı uygulama sonrasında analitik (aksiyomatik) ispat şemasına sahiptir.

Uygulama öncesinde altıncı soruda bir öğretmen adayı herhangi bir ispat şemasına sahip değil iken bir öğretmen adayı analitik, diğer iki öğretmen adayı da dışsal ispat şemasına sahiptir. Uygulama sonrasında ise bir öğretmen adayı dışsal ve üç öğretmen adayı da analitik ispat şemasına sahip olmuştur. Bu soruda dışsal şemadan analitik şemaya dönüş dikkat çekmektedir. Örneğin K3 kodlu öğretmen adayı bu soruda uygulama öncesinde dışsal olan ispat şemasını uygulama sonrasında analitik şema düzeyine çıkarmıştır. Ayrıca K3 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde ispat için herhangi bir yöntem seçememiş ve soruyu yanlış cevaplamıştır. Uygulama sonrasında ise en uygun ispat yöntemini seçmiş ve soruyu doğru cevaplamıştır. Uygulama öncesi mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir.

M: Verilen önermenin doğru olmadığını ispatlayınız.


6. Soru: $\forall a \in \mathbb{R}$ için $1 + tan^2a = sec^2a$ önermesinin doğru olmadığını ispatlayınız.

$1 + tan^2 a = sec^2 a$

$1 + \frac{sin^2 a}{cos^2 a} = sec^2 a$

$\frac{cos^2 a + sin^2 a}{cos^2 a} = sec^2 a$

$\frac{1}{cos^2 a} = sec^2 a$

$sec^2 a = sec^2 a$

Doğru çıktı. Bence doğru.

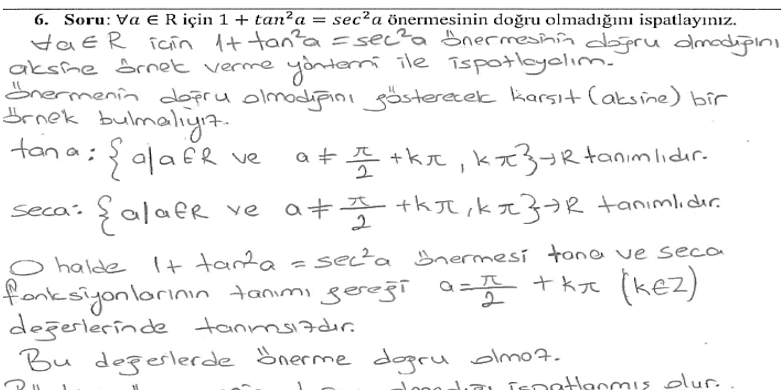
Şekil 4.15. K3 Kodlu Öğretmen Adayının Uygulama Öncesinde 6. Soruda Sahip Olduğu Dışsal İspat Şeması

M: Bu soruda doğru olmadığını ispatlayınız dedim ama sen doğru olduğunu ispatladın.
K3: Ben işlemleri yaptım doğru çıktı ama.
M: Nasıl yaptın?
K3: $tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ *sonra da payda eşitledim, doğru oldu.*
M: Bu soruda ispat için hangi ispat yöntemini seçtiniz?
K3: Yöntem seçmedim aslında. Dediğim işlemleri yaptım.

M: İspat yöntemi olmadan ispatlama yapılabilir mi?
K3: Bazı sorularda olabilir. Bazısında da seçmek lazım.
M: Bu soruda yaptığınız ispat sizi ve başkalarını ikna etmeye yeterli midir?
K3: Doğruluğuna ikna etti.
M: Sizce yaptığınız bu ispatta eksik noktalar var mı?
K3: Bakayım bir daha. Zaten bu bir kural.
M: Yaptığın işlemler mi seni ikna etti yoksa kural olması mı?
K3: İşlemler.
M: Bu sorunun sizin yaptığınızdan başka bir ispatı var mıdır?
K3: Benim yaptığım doğru. Ama başka da olabilir.
M: Bu ispatı yaparken güçlük yaşadınız mı?
K3: Güçlük yaşamadım ama önermenin niye doğru olmadığı demiş? O aklıma yatmadı. Soru yanlış sanki.
M: Senin yaptığın doğru, soru mu yanlış?
K3: (Gülüyor) Yanlış demeyelim de şaşırtmaca olabilir.

Şekil 4.15'de görüldüğü gibi K3 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde herhangi bir ispat yöntemi seçmeyip sembollerle işlem yürütüp önermenin yanlışlığı yerine doğruluğuna ikna olmuştur. Sembollerle yürüttüğü işlem her ne kadar doğru olsa da $\forall\alpha \in R$ ifadesini dikkate almadığından sembollerin arkasındaki anlamları düşünmediği ortaya çıkmıştır. Ancak kendisi ikna olduğu için bir ispat şemasına sahiptir. Ayrıca mülakatta kendi ikna olduğu gibi başkalarını da ikna edebileceğini, yaptığı ispatta herhangi bir eksiklik olmadığını, herhangi bir güçlük yaşamadığını ve sembollerle yürüttüğü işlemlerin ispat için yeterli olduğunu belirtmiştir. Öğretmen adayı sembollerin ardındaki anlamları bilmeden işlem yürütmüş, sembolleri anlamlandıramadan bir gerekçelendirme yapmış ama ispat yapamamıştır. Bu yüzden K3 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde dışsal (otoriter) ispat şemasına sahiptir. Uygulama sonrasındaki mülakat diyaloglarına da aşağıda yer verilmiştir.

M: Verilen önermenin doğru olmadığını ispatlayınız.



6. Soru: $\forall a \in R$ için $1 + tan^2a = sec^2a$ önermesinin doğru olmadığını ispatlayınız.

$\forall a \in R$ için $1+tan^2a = sec^2a$ önermesinin doğru olmadığını aksine örnek verme yöntemi ile ispatlayalım.
önermenin doğru olmadığını gösterecek karşıt (aksine) bir örnek bulmalıyız.
$tan\,a: \{a \mid a \in R$ ve $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\} \to R$ tanımlıdır.
$sec\,a: \{a \mid a \in R$ ve $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\} \to R$ tanımlıdır.
O halde $1+tan^2a = sec^2a$ önermesi tana ve seca fonksiyonlarının tanımı gereği $a = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$ değerlerinde tanımsızdır.
Bu değerlerde önerme doğru olmaz.
Böylece önermenin doğru olmadığı ispatlanmış olur.

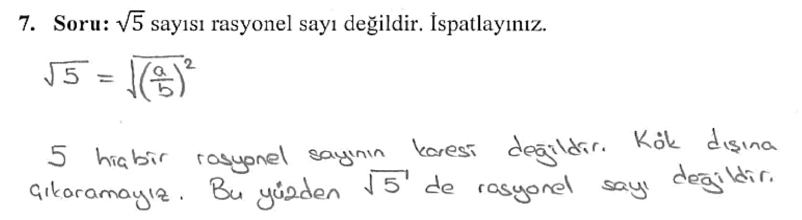
Şekil 4.16. K3 Kodlu Öğretmen Adayının Uygulama Sonrasında 6. Soruda Sahip Olduğu Analitik İspat Şeması

M: Bu soruda ispat için hangi ispat yöntemini seçtiniz?
K3: Aksine (Karşıt) örnek verme yöntemi.
M: Neden bu yöntemi seçtiniz?
K3: Önermenin doğru olmadığını ispat etmek için bu yöntem kullanılır.
M: Seçtiğiniz yöntem hakkında bilgi veriniz.
K3: Önermenin doğru olmadığını gösterecek bir örnek yeterli.
M: Seçtiğiniz ispat yöntemi bu soru için uygun mu?
K3: Uygun.
M: Bu soruda yaptığınız ispat sizi ve başkalarını ikna etmeye yeterli midir?
K3: Beni ikna etmeye yetti. Fazla zaman harcamadım zaten.
M: Başkalarını?
K3: Eder.
M: Sizce yaptığınız bu ispatta eksik noktalar var mı?
K3: Yok.
M: Bu sorunun sizin yaptığınızdan başka bir ispatı var mıdır?
K3: Ben birden fazla örnek verdim derste yaptığımız başka örneklerdeki gibi. Tek örnek veren olur. Farklı örnek…
M: Daha önceki öğrenim hayatınızda yaptığınız bu ispatı görmüş müydünüz?
K3: Görmedim.
M: Yaptığınız bu ispatta attığınız adımları anlamlandırabilir misiniz?
K3: Evet. Önermenin doğru olmadığını gösterecek bir örnek aradım. Fonksiyonları tanımsız yapan değerleri yazdım.
M: Bu ispatı yaparken güçlük yaşadınız mı?
K3: Bu soruda yaşamadım.

Şekil 4.16'da görüldüğü gibi öğretmen adayı bu soru için en uygun yöntem olan aksine örnek verme yoluyla ispat yöntemini seçip doğru bir şekilde uygulamıştır. Mantıksal çıkarım, işlemsel düşünme ve genellemeyi aksiyomatik yapı içerisinde yapmıştır. Aksine örneği aksiyomatik yapı içerisinde tanve sec fonksiyonlarının tanım kümeleri üzerinden göstermiştir. Ayrıca mülakatta kendi ikna olduğu gibi başkalarını da ikna edebileceğini, yaptığı ispatta herhangi bir eksiklik olmadığını, herhangi bir güçlük yaşamadığını ve daha önce bu ispatın aynısını görmediğini belirtmiş ve ispatta attığı adımları da anlamlandırabilmiştir. Bu yüzden K3 kodlu öğretmen adayı uygulama sonrasında analitik (aksiyomatik) ispat şemasına sahiptir.

Uygulama öncesinde yedinci soruda bir öğretmen adayı herhangi bir ispat şemasına sahip değil iken diğer üç öğretmen adayı da dışsal ispat şemasına sahiptir. Uygulama sonrasında ise bir öğretmen adayı dışsal ve üç öğretmen adayı da analitik ispat şemasına sahip olmuştur. Bu soruda dışsal şemadan analitik şemaya dönüş dikkat çekmektedir. Örneğin K1 kodlu öğretmen adayı bu soruda uygulama öncesinde dışsal olan ispat şemasını uygulama sonrasında analitik şema düzeyine çıkarmıştır. Ayrıca K1 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde ispat için herhangi bir yöntem seçememiş ve soruyu yanlış cevaplamıştır. Uygulama sonrasında ise en uygun ispat yöntemini seçmiş ve soruyu doğru cevaplamıştır. Uygulama öncesi mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir.

M: Verilen önermenin doğruluğunu ispatlayınız.



7. Soru: $\sqrt{5}$ sayısı rasyonel sayı değildir. İspatlayınız.

$\sqrt{5} = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2}$

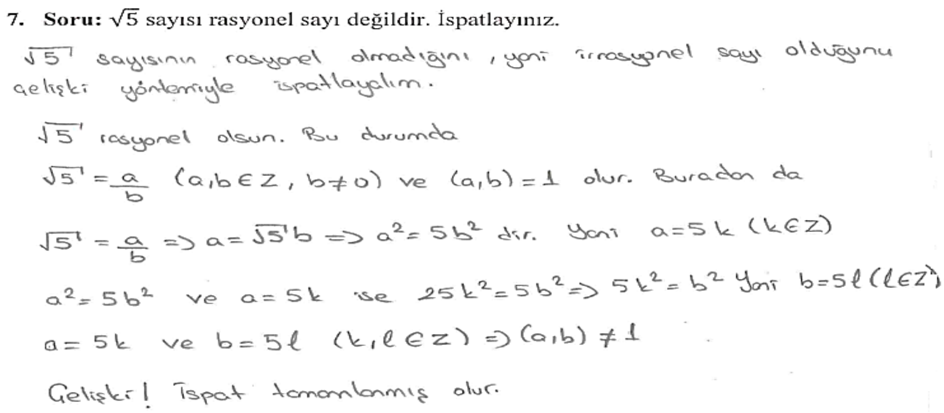
5 hiçbir rasyonel sayının karesi değildir. Kök dışına çıkaramayız. Bu yüzden $\sqrt{5}$' de rasyonel sayı değildir.

Şekil 4.17. K1 Kodlu Öğretmen Adayının Uygulama Öncesinde 7. Soruda Sahip Olduğu Dışsal İspat Şeması

M: Bu soruda ispat için hangi ispat yöntemini seçtiniz?
K1: 5 $(\frac{a}{b})^2$ şeklinde yazılmadığı için kök dışına çıkmaz. O zaman rasyonel değildir.
M: Hangi yöntemi seçtin?
K1: Yöntem olmadan da ispatlanabiliyor.
M: İspat yöntemi olmadan ispatlama yapılabilir mi?
K1: Ben sanırım hep yöntem kullanmadan yapıyorum. Gerçi tümevarımda yöntemi seçmiştim.
M: Tümdengelimlerde mi seçmedin?
K1: Sanırım.
M: Bu soruda yaptığınız ispat sizi ve başkalarını ikna etmeye yeterli midir?
K1: Yaptığım matematiksel işlemlere bakılırsa ikna eder.
M: Sizce yaptığınız bu ispatta eksik noktalar var mı?
K1: Yöntem diyorsunuz hocam. Belki benim yaptığım işlemin bir adı vardır da ben bilmiyorumdur. Onun dışında yok.
M: Bu sorunun sizin yaptığınızdan başka bir ispatı var mıdır?
K1: $\sqrt{5}$ değil de $\sqrt{2}$ nin vardı sanki. Ama hatırlayamıyorum.
M: Bu ispatı yaparken güçlük yaşadınız mı?
K1: Çok bilindik bir şey ama rahatsız edici bir tarafı var. Çok açık bilinen bir şey soruluyor. Ama gene de böylesi şu an için en mantıklısı görülüyor.

Şekil 4.17'de görüldüğü gibi K1 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde herhangi bir ispat yöntemi seçmeyip sadece bir kurala dayandırıp önermenin doğruluğuna ikna olmuştur. Kendisi ikna olduğu için bir ispat şemasına sahiptir. Ayrıca mülakatta kendi ikna olduğu gibi başkalarını da ikna edebileceğini, yaptığı ispatta yöntem dışında herhangi bir eksiklik olmadığını, herhangi bir güçlük yaşamadığını ve gerekçelendirme için verdiği kuralın ispat için yeterli olduğunu belirtmiştir. Öğretmen adayı kurala dayalı gerekçelendirme yapmış ama ispat yapamamıştır. Herhangi bir mantıksal çıkarım, işlemsel düşünme ve genelleme yapmamıştır. Bu yüzden K1 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde dışsal (otoriter) ispat şemasına sahiptir. Uygulama sonrasındaki mülakat diyaloglarına da aşağıda yer verilmiştir.

M: Verilen önermenin doğruluğunu ispatlayınız.



7. Soru: $\sqrt{5}$ sayısı rasyonel sayı değildir. İspatlayınız.

$\sqrt{5}$ sayısının rasyonel olmadığını, yani irrasyonel sayı olduğunu çelişki yöntemiyle ispatlayalım.

$\sqrt{5}$ rasyonel olsun. Bu durumda

$\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ $(a,b \in Z,\ b \neq 0)$ ve $(a,b) = 1$ olur. Buradan da

$\sqrt{5} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = \sqrt{5}b \Rightarrow a^2 = 5b^2$ dir. Yani $a = 5k$ $(k \in Z)$

$a^2 = 5b^2$ ve $a = 5k$ ise $25k^2 = 5b^2 \Rightarrow 5k^2 = b^2$ Yani $b = 5l$ $(l \in Z)$

$a = 5k$ ve $b = 5l$ $(k, l \in Z) \Rightarrow (a,b) \neq 1$

Çelişki! İspat tamamlanmış olur.

Şekil 4.18. K1 Kodlu Öğretmen Adayının Uygulama Sonrasında 7. Soruda Sahip Olduğu Analitik İspat Şeması

M: Bu soruda ispat için hangi ispat yöntemini seçtiniz?
K1: Çelişki yoluyla ispat yöntemini kullandım, seçtim.
M: Neden bu yöntemi seçtiniz?
K1: Sadece hüküm şeklindeki önermeler için çelişki yoluyla ispat yöntemi uygun diye direk onu seçtim.
M: Seçtiğiniz yöntem hakkında bilgi veriniz.
K1: Hükmün değilininden hareket ediyoruz ve çelişkiye ulaşıyoruz.
M: Seçtiğiniz ispat yöntemi bu soru için uygun mu?
K1: Evet uygun.
M: Bu soruda yaptığınız ispat sizi ve başkalarını ikna etmeye yeterli midir?
K1: Evet etti.
M: Sizce yaptığınız bu ispatta eksik noktalar var mı?
K1: Yok.
M: Bu sorunun sizin yaptığınızdan başka bir ispatı var mıdır?
K1: Şu olmaz, bu olmaz diye düşünüyorum ama yok gibi sanki. Denemeden de bir şey diyemeyeceğim.
M: Daha önceki öğrenim hayatınızda yaptığınız bu ispatı görmüş müydünüz?
K1: $\sqrt{2}$ lisini görmüştüm. Ama $\sqrt{5}$ değişik.
M: Yaptığınız bu ispatta attığınız adımları anlamlandırabilir misiniz?
K1: Tabii. $\sqrt{5}$ rasyonel olsun dedim. Rasyonel sayı tanımından hareketle yine bu tanımla ilgili bir çelişkiye ulaştım.
M: Bu ispatı yaparken güçlük yaşadınız mı?
K1: Yok yaşamadım.

Şekil 4.18'de görüldüğü gibi öğretmen adayı bu soru için en uygun yöntem olan çelişki yoluyla ispat yöntemini seçip doğru bir şekilde uygulamıştır. Hükmün değilinden genel bir çelişkiye ulaşmaya çalıştığından yöntemi anlamlandırabilmiştir. Sonrasında ise işlemleri doğru bir şekilde yürütebilmiştir. Mantıksal çıkarım, işlemsel düşünme ve genellemeyi aksiyomatik yapı içerisinde yapmıştır. Ayrıca mülakatta kendi ikna olduğu gibi başkalarını da ikna edebileceğini, yaptığı ispatta herhangi bir eksiklik olmadığını, herhangi bir güçlük yaşamadığını ve daha önce bu ispatın aynısını görmediğini belirtmiş ve ispatta attığı adımları da anlamlandırabilmiştir. Bu yüzden K1 kodlu öğretmen adayı uygulama sonrasında analitik (aksiyomatik) ispat şemasına sahiptir.

Buraya kadar olan kısımda anket ve mülakatların analizinden ders tasarımının iki kazanıma da etkisi açıkça görülmektedir. Ders tasarımının öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgileri ile sahip oldukları ana ispat şemalarına etkisi nicel ve nitel bulgularla desteklenmiştir. Bundan sonraki kısım sadece öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerini detaylandırmak içindir. Bunun için uygulama öncesi ve sonrasında öğretmen adaylarının sahip oldukları alt ispat şemaları ve öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik yaşadıkları güçlüklere yer verilmiştir.

Öğretmen adaylarının uygulama öncesi ve sonrası sahip oldukları ispat şemalarını detaylandırmak adına öğretmen adaylarının sahip oldukları alt ispat şemaları incelenmiştir. Öğretmen adaylarının sahip oldukları alt ispat şemaları ile yanıtsız cevap frekansları, yüzdeleri ve puanları Tablo 4.30'da verilmiştir.

Tablo 4.30. Öğretmen Adaylarının *Sahip Oldukları Alt İspat Şemalarına* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Frekans, Yüzde ve Puan Dağılımı

		Dışsal			**Deneysel**		**Analitik**			
Kategori		Otoriter	Sembolik	Ritüel	Örnek-temelli	Algısal	Dönüşümcü	Aksiyomatik	Yanıtsız	Toplam
Uygulama Öncesi	**f**	26(30)*	35	5	27	5	25	4	27	154
	%	16,88	22,73	3,25	17,53	3,25	16,23	2,60	17,53	100,00
	p	26	35	5	54	10	75	12	0	**217**
Uygulama Sonrası	**f**	8	20	4	2	0	8	110	2	154
	%	5,20	12,99	2,60	1,30	0,00	5,20	71,43	1,30	100,00
	p	8	20	4	4	0	24	330	0	**390**

Tablo 4.30’da görüldüğü gibi öğretmen adayları uygulama öncesinde alt ispat şemalarının tamamını, uygulama sonrasında ise algısal ispat şeması dışındaki tüm alt şemaları kullanmışladır.

Uygulama öncesinde öğretmen adayları ana ispat şeması olarak en çok dışsal ispat şemalarını, dışsal ispat şemalarından alt ispat şeması olarak sembolik ispat şemasını kullanmışlardır. Bu şemadaki öğretmen adayları yanlış işlemlerle veya anlamsız sembol manipülasyonları ile ulaşmak istedikleri sonuca ulaşmışlardır.

Uygulama öncesinde öğretmen adayları ana ispat şeması olarak ikinci çoklukta deneysel ispat şemalarını, deneysel ispat şemalarından alt ispat şeması olarak örnek-temelli ispat şemasını kullanmışlardır. Bu şemadaki öğretmen adayları uygulama öncesinde örnekle doğrulamayı ispat sanmaktadırlar.

Uygulama öncesinde öğretmen adayları ana ispat şeması olarak en az analitik ispat şemalarını, analitik ispat şemalarından alt ispat şeması olarak dönüşümcü ispat şemasını kullanmışlardır. Öğretmen adayları uygulama öncesinde aksiyomatik yapı içerinde ispatları düzenleyememişlerdir.

Uygulama sonrasında öğretmen adayları ana ispat şeması olarak en çok analitik ispat şemalarını, analitik ispat şemalarından alt ispat şeması olarak aksiyomatik ispat şemasını kullanmışlardır. Bu öğretmen adayları için en istendik durumdur. Öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ve alt ispat şemaları uygulama sonrasında istenilen düzeye ulaşmıştır.

Uygulama sonrasında öğretmen adayları ana ispat şeması olarak ikinci çoklukta dışsal ispat şemalarını, dışsal ispat şemalarından alt ispat şeması olarak sembolik ispat şemasını kullanmışlardır. Öğretmen adayları doğru ispata nasıl ulaşacaklarını bilemedikleri sorularda yine yanlış işlemlerle veya anlamsız sembol manipülasyonlarla sonuca ulaşmayı denemişlerdir. Öğretmen adaylarının akıl yürütmedeki eksiklikleri onları anlamsız sembol manipülasyonlarına yöneltmiştir.

Uygulama sonrasında öğretmen adayları ana ispat şeması olarak en az deneysel ispat şemalarını, deneysel ispat şemalarından alt ispat şeması olarak sadece deneysel ispat şemalarını kullanmışlardır. Bu da sadece iki cevapta rastlanan bir durumdur.

Ayrıca öğretmen adaylarının sahip oldukları alt ispat şemalarına dair uygulama öncesi ve sonrasına ait soru bazlı frekans ve yüzde dağılımı Tablo 4.31’de verilmiştir.

Tablo 4.31. Öğretmen Adaylarının *Sahip Oldukları Alt İspat Şemalarına* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Soru Bazlı Frekans ve Yüzde Dağılımı

Soru Numarası	Kategori		Uygulama Öncesi f	Uygulama Öncesi %	Uygulama Sonrası f	Uygulama Sonrası %
1	Dışsal	Otoriter	5	22,73	7	31,82
		Sembolik	2	9,09	5	22,73
		Ritüel	0	0,00	0	0,00
	Deneysel	Örnek-temelli	4	18,18	0	0,00
		Algısal	0	0,00	0	0,00
	Analitik	Dönüşümcü	1	4,55	7	31,82
		Aksiyomatik	0	0,00	3	13,64
		Yanıtsız	10	45,46	0	0,00
2	Dışsal	Otoriter	2(4)*	9,09	1	4,55
		Sembolik	0	0,00	5	22,73
		Ritüel	0	0,00	1	4,55
	Deneysel	Örnek-temelli	12	54,55	1	4,55
		Algısal	0	0,00	0	0,00
	Analitik	Dönüşümcü	0	0,00	0	0,00
		Aksiyomatik	0	0,00	13	59,09
		Yanıtsız	8	36,36	1	4,55
3	Dışsal	Otoriter	3	13,64	0	0,00
		Sembolik	9	40,91	3	13,64
		Ritüel	0	0,00	0	0,00
	Deneysel	Örnek-temelli	4	18,18	1	4,55
		Algısal	0	0,00	0	0,00
	Analitik	Dönüşümcü	4	18,18	1	4,55
		Aksiyomatik	0	0,00	17	77,27
		Yanıtsız	2	9,09	0	0,00
4	Dışsal	Otoriter	6(8)*	27,27	0	0,00
		Sembolik	6	27,27	1	4,55
		Ritüel	1	4,55	1	4,55
	Deneysel	Örnek-temelli	1	4,55	0	0,00
		Algısal	5	22,73	0	0,00
	Analitik	Dönüşümcü	0	0,00	0	0,00
		Aksiyomatik	0	0,00	19	86,36
		Yanıtsız	3	13,64	1	4,55
5	Dışsal	Otoriter	0	0,00	0	0,00
		Sembolik	4	18,18	0	0,00
		Ritüel	0	0,00	0	0,00
	Deneysel	Örnek-temelli	2	9,09	0	0,00
		Algısal	0	0,00	0	0,00
	Analitik	Dönüşümcü	13	59,09	0	0,00
		Aksiyomatik	2	9,09	22	100,00
		Yanıtsız	1	4,55	0	0,00

Soru Numarası	Kategori		f	%	f	%
6	Dışsal	Otoriter	0	0,00	0	0,00
		Sembolik	12	54,55	6	27,27
		Ritüel	0	0,00	0	0,00
	Deneysel	Örnek-temelli	1	4,55	0	0,00
		Algısal	0	0,00	0	0,00
	Analitik	Dönüşümcü	7	31,82	0	0,00
		Aksiyomatik	1	4,55	16	72,73
		Yanıtsız	1	4,55	0	0,00
7	Dışsal	Otoriter	10	45,46	0	0,00
		Sembolik	2	9,09	0	0,00
		Ritüel	4	18,18	2	9,09
	Deneysel	Örnek-temelli	3	13,64	0	0,00
		Algısal	0	0,00	0	0,00
	Analitik	Dönüşümcü	0	0,00	0	0,00
		Aksiyomatik	1	4,55	20	90,91
		Yanıtsız	2	9,09	0	0,00

Uygulama öncesinde 1. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan tümevarımla ispat sorusunu öğretmen adayları çoğunlukla yanıtsız bırakmışlardır.

2. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan doğrudan ispatta öğretmen adayları en çok örnek-temelli alt ispat şemalarını kullanmışlardır. Öğretmen adayları uygulama öncesinde örnekle doğrulamayı ispat için yeterli gördükleri ya da örnekle doğrulama yaptıklarının farkında olmadıkları için çoğunlukla elemanları sayı veya harflerden oluşan herhangi $2x2$ matrisi için önermeyi doğrulama yolunu seçmişlerdir. İspatın genelleme özelliğini göz ardı etmişlerdir.

3. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan durum yoluyla ispatta öğretmen adayları en çok sembolik alt ispat şemalarını kullanmışlardır. Öğretmen adayları 3. sorunun ispatı için gerekli durumları öngöremedikleri için çoğunlukla sembollerle işlem yapmaya çalışmışlar ancak sembolleri manipüle etmişlerdir.

4. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan olmayana ergi ile ispatta öğretmen adayları en çok otoriter alt ispat şemalarını kullanmışlardır. Öğretmen adayları çoğunlukla bileşke fonksiyon birebir fonksiyon ise bileşkeye giren fonksiyonlar da birebir fonksiyondur gibi kurala dayanan gerekçelendirmeler sunmuşlardır.

5. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan tüketerek ispatta öğretmen adayları en çok dönüşümcü alt ispat şemalarını kullanmışlardır. Öğretmen adayları aksiyomatik yapı içerisinde ispatı düzenleyememişlerdir.

6. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan aksine örnek verme yöntemiyle ispatta öğretmen adayları en çok sembolik ispat şemasını kullanmışlardır. Öğretmen adaylarından $\forall a \in \mathrm{R}$ için $1 + tan^2 a = sec^2 a$ önermesinin doğru olmadığını ispatlamaları istenmesine rağmen öğretmen adayları $tan\alpha$ ve $sec\alpha$ yerine trigonometrik özdeşliklerini yazarak sembolik işlem yapmaya çalışmışlardır. Hâlbuki bir örnek için önermeyi yanlışlamaları yeterli bir cevaptı.

7. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan çelişki ile ispatta öğretmen adayları en çok yine otoriter alt ispat şemalarını kullanmışlardır. Yine köklü sayılar rasyonel olmaz, 5 kökten çıkmaz gibi kurala dayalı gerekçelendirmeler yapmışlardır.

Uygulama sonrasında 1. sorunun çözümü için en uygun ve en kolay yöntem olan tümevarımla ispatta öğretmen adayları en çok otoriter ve dönüşümcü alt ispat şemalarını, diğer sorularda ise öğretmen adayları en çok aksiyomatik alt ispat şemasını kullanmışlardır. Diğer altı ispat yöntemi sorusunda öğretmen adaylarının aksiyomatik alt ispat şemasını kullanmış olmaları ders tasarımının öğretmen adaylarının sahip oldukları alt ispat şemaları üzerine etkisini ortaya koymuştur. Öğretmen adayları 1. soru olan tümevarımla ispat dışındaki tüm sorularda büyük çoğunlukla en istendik alt şema olan aksiyomatik ispat şemasını kullanmışlardır. 1. soruda öğretmen adayları tümevarım varsayımından hareketle tümevarım adımını aksiyomatik biçimde oluşturamamışlardır. Yedi öğretmen adayı (%31,82) dönüşümcü ispat şemasını kullanarak kısmen doğru ispatlama yapabilmişlerdir. Dönüşümcü ispat şemasında sembolik işlemlerin doğru yapılması ve anlamlandırılması gerekmektedir. Bun yapamayan beş öğretmen adayı (%22,73) sembollerin anlamsız manipülasyonlarına başvurarak sembolik ispat şemasını kullanmışlardır. Yedi öğretmen adayı da (%31,82) en kolay ve zahmetsiz olan otoriter ispat şemasına başvurmuşlardır.

Ayrıca Tablo 4.31'den tüm ispat yöntemlerine ait sorularda uygulama sonrasında kullanılan aksiyomatik ispat şeması sayısı ve yüzdesinin uygulama öncesi kullanılan aksiyomatik ispat şeması sayısı ve yüzdesinden fazla olduğu görülmektedir. Buradan ders tasarımının öğretmen adaylarının sahip oldukları alt ispat şemalarını tüm ispat yöntemlerinde geliştirdiği söylenebilir.

Çalışmanın bu kısmında ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik yaşadıkları güçlükler incelemiştir. Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik güçlük yaşadıkları ve yaşamadıkları sorulara dair uygulama öncesi ve sonrasına ait frekans ve yüzde dağılımı Tablo 4.32'de verilmiştir.

Tablo 4.32. Öğretmen Adaylarının *İspatlamaya Yönelik Güçlük Yaşadıkları ve Yaşamadıkları Sorulara* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Frekans ve Yüzde Dağılımı

	Uygulama Öncesi		Uygulama Sonrası	
	f	%	f	%
Güçlük yaşanmayan ispat sayısı	23	14,94	110	71,43
Güçlük yaşanan ispat sayısı	131	85,07	44	28,57
Toplam	154	100	154	100

Tablo 4.32'de uygulama öncesi öğretmen adaylarının verdiği 154 cevaptan 131'inde (%85,07) güçlük yaşadıkları görülmektedir. Öğretmen adaylarının uygulama öncesinde sadece 23 (%14,94) cevapta güçlük yaşamadıkları saptanmıştır. Uygulama sonrası öğretmen adaylarının verdiği 154 cevaptan 44'ünde (%28,57) güçlük yaşadıkları görülmektedir. Öğretmen adaylarının uygulama sonrasında 110 (%71,43) cevapta güçlük yaşamadıkları saptanmıştır. Buradan öğretmen adaylarının uygulama sonrasında ispatlamaya yönelik güçlüklerinin üzerinden geldikleri söylenebilir. Öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgileri ile kullandıkları ispat şemalarının gelişmesiyle birlikte ispatlamaya yönelik yaşadıkları güçlükler de ortadan kalkmıştır.

Matematik öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik yaşadıkları güçlükleri de detaylandırmak adına bu güçlüklerin türleri incelemiştir. Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik yaşadıkları güçlükler belirlenirken geçerli ispat yapmalarının önündeki ilk ve en belirgin güçlük baz alınmıştır. Veri analizi literatürde rapor edildiği gibi öğretmen adaylarının ispatlama sürecinde yaşayabileceği güçlüklerden beş kategoriye dayandırılmıştır. Bu beş kategori (a) ispatın doğasını kavrama güçlükleri, (b) ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlükler, (c) ispat yöntemleri ile ilgili güçlükler, (d) problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlükler ve (e) matematiksel dil kullanımındaki güçlükler şeklindedir. Araştırma sürecinde öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik yaşadıkları bu beş kategorideki güçlükler arasında öncelik sırasına göre bir hiyerarşi olduğu gözlemlenmiştir.

Bir önermenin doğruluğunun ya da yanlışlığının ispatlanması sırasında ispatlayıcının ilk karşılaşılabileceği güçlük birinci güçlük olan ispatın doğasını kavrama güçlüğüdür. İspatlayıcı öncelikle ispatın ve ispatlamanın ne olduğunu ve de ne olmadığını bilmelidir.

Burada öğretmen adayı neyin ispat olup neyin ispat olmadığını, nasıl ikna olması gerektiğini ve başkalarını nasıl ikna etmesi gerektiğini bilmiyorsa bu güçlüğü yaşamaktadır. Örneğin ispatlayıcı doğrulamayı ispat sanıyorsa ispatın doğasını bilmiyor demektir. İspata aslında başlayamayacaktır. İspata başlayamamakla birlikte doğrulama yaparak ispatı tamamladığını sanacaktır.

İspatın doğasını bilen yani birinci maddede güçlük yaşamayan ispatlayıcının ikinci karşılaşabileceği güçlük ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüklerdir. İspatlayıcı ispat yapacağı konuya ait kavramları, tanımları, kuralları, lemmaları, aksiyomları, önceki teoremleri ve sonuçları bilmelidir. Bunları bilmeyen ispatlayıcı ispatta ilerleyemez hatta ispata başlayamaz. Örneğin "bir matrisin determinantı o matrisin transpozesinin determinantına eşittir" teoremini ispatlamak için matris, determinant ve transpoze kavramlarını bilmek gerekir. Matris, determinant veya transpoze kavramlarından biri bilinmiyorsa bu teorem ispatlanamaz.

İlk iki maddede güçlük yaşamayan ispatlayıcının üçüncü karşılaşabileceği güçlük ispat yöntemleri ile ilgili güçlüklerdir. Örneğin ispatlayıcı uygun ispat yöntemini seçemeyebilir, seçse bile uygulayamayabilir ya da ispat yönteminin basamaklarını zihninde anlamlandıramayabilir.

İlk üç maddede güçlük yaşamayan ispatlayıcının dördüncü karşılaşabileceği güçlük problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüklerdir. Örneğin ispatlayıcı ispatlamayı sürdürecek veya tamamlayacak akıl yürütmeyi sağlayamayabilir. İspatlama da bir tür problem çözme olduğundan ispatlayıcı kendisini sonuca ulaştıracak problem çözme becerisini gösteremeyebilir.

İlk dört maddede güçlük yaşamayan ispatlayıcının beşinci karşılaşabileceği güçlük matematiksel dil kullanımına ait güçlüklerdir. Örneğin ispatlayıcı matematiksel dil, sembol ve notasyon kullanımında güçlükler yaşayabilir.

Tüm bunları aşan ispatlayıcı ispatta güçlük yaşamadan resmi ve analitik-aksiyomatik ispat yapabilir.

22 öğretmen adayının yedi soru için verdiği 154 cevap yukarıdaki kategorilere göre analiz edilmiştir.

Tablo 4.33. Öğretmen Adaylarının *İspatlamaya Yönelik Yaşadıkları Güçlük Türlerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Frekans ve Yüzde Dağılımı

Yaşanan Güçlük	Uygulama Öncesi		Uygulama Sonrası	
	f	%	f	%
İspatın doğasını kavrama güçlüğü	37	24,03	1	0,65
İspata dâhil içerik alanı ile ilgili güçlük	21	13,64	14	9,09
İspat yöntemleri ile ilgili güçlük	57	37,01	8	5,20
Problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlük	12	7,79	21	13,64
Matematiksel dil kullanımına ait güçlük	4	2,60	0	0,00
Herhangi bir güçlük yaşanmamış	23	14,94	110	71,43
Toplam	154	100	154	100

Tablo 4.33'de görüldüğü gibi uygulama öncesi öğretmen adaylarının verdikleri 154 cevaptan 37'sinde (%24,03) ispatın doğasını kavrama güçlükleri, 21'inde (%13,64) ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlükler, 57'sinde (%37,01) ispat yöntemleri ile ilgili güçlükler, 12'sinde (%7,79) problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlükler ve 4'ünde (%2,60) matematiksel dil kullanımına ait güçlükler saptanmıştır.

Uygulama sonrası öğretmen adaylarının verdikleri 154 cevaptan 1'inde (%0,65) ispatın doğasını kavrama güçlükleri, 14'ünde (%9,09) ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlükler, 8'inde (%5,20) ispat yöntemleri ile ilgili güçlükler, 21'inde (%13,64) problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlükler saptanmıştır.

Öğretmen adayları uygulama sonrasında ispatın doğasını kavrama güçlüklerinin, ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüklerinin, ispat yöntemleri ile ilgili güçlüklerinin ve matematiksel dil kullanımındaki güçlüklerinin üstesinden gelmişlerdir. Psikolojik nedenli olan problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlükler için öğretmen adaylarının daha fazla sayıda ve farklı türde ispatlama yapması gerekmektedir. Bu kısımda karşılaşılan bulgulardan birisi de herhangi bir ispatlama sorusunda aynı ispat şemasına sahip öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik aynı güçlükleri yaşadıklarıdır.

4.5.1.2. Ders Tasarımının "*Öğretmen Adaylarının İspatla İlgili Pedagojik Alan Bilgilerine*" Ait Kazanımlara Ulaşma Durumlarına Etkisine Dair Bulgular

Dersin ispatla ilgili pedagojik alan bilgisine ait dört adet kazanımı bulunmaktadır. Ders tasarımının öğretmen adaylarının Kazanım 3, Kazanım 4, Kazanım 5 ve Kazanım 6'ya ulaşma durumlarına etkisi ayrı ayrı incelenmiştir.

4.5.1.2.1. Ders Tasarımının "Öğretmen Adayı İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerini Tespit Eder" Kazanımına Etkisine Dair Bulgular

Bu kısımda ders tasarımının öğretmen adaylarının Kazanım 3'e ulaşma durumlarına etkisi incelenmiştir.

Kazanım 3: Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit eder.

Bu kapsamda aşağıdaki soruya cevap aranmıştır.

Ders tasarımı "*Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit eder*" kazanımına nasıl etki etmiştir?

Dersin uygulamasından önce ve sonra 22 öğretmen adayının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini ölçmek amacıyla geliştirilmiş olan İSPABA'ne verdikleri cevaplar analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır. Bu anketle birlikte öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgileri dört bileşende incelenmek istenmiştir. İlk olarak ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgilerine etkisi incelenmiştir. Bu ankette bu bileşenlerden biri olan öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etmeleri ile ilgili beş soru yer almıştır. Bu anketin birinci kısmındaki 1a, 2a, 3a, 4a ve 5a soruları öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit edip edemediklerini ölçmek amacıyla hazırlanmıştır. Anketten elde edilen nitel veriler analiz edilerek nicel bulgulara ulaşılmıştır.

22 öğretmen adayının beş soruya vermiş oldukları 110 cevap literatürden derlenen ispatlamaya yönelik beş güçlüğe göre analiz edilmiş ve cevaplar doğru, yanlış ve yanıtsız olarak kodlanmıştır. Bu güçlükler (a) ispatın doğasını kavrama güçlükleri, (b) ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlükler, (c) ispat yöntemleri ile ilgili güçlükler, (d) problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlükler ve (e) matematiksel dil kullanımındaki güçlükler şeklindedir. Doğru cevaplar 1 puan, yanlış ve yanıtsız kabul edilen cevaplar 0 puan olarak puanlanmıştır. 22 öğretmen adayının kendilerine sorulan ispatlamaya yönelik beşer öğrenci güçlüğünü tespit etme sorularına verdikleri 110 cevabın doğru, yanlış ve yanıtsız cevap frekansları, yüzdeleri ve puanları Tablo 4.34'de verilmiştir. 22 öğretmen adayının anketten bu bileşende alabileceği toplam puan 110 (22x5) puandır.

Tablo 4.34. Öğretmen Adaylarının *İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerini Tespit Etme Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Frekans, Yüzde ve Puan Dağılımı

Kategori		Doğru	Yanlış	Yanıtsız	Toplam
Uygulama Öncesi	**f (%)**	48 (43,64)	53 (48,18)	9 (8,18)	110 (100,00)
	p (%)	48 (43,64)	0 (0,00)	0 (0,00)	**48 (43,64)**
Uygulama Sonrası	**f (%)**	96 (87,27)	14 (12,73)	0 (0,00)	110 (100,00)
	p (%)	96 (87,27)	0 (0,00)	0 (0,00)	**96 (87,27)**

Öğretmen adaylarının aldığı puanlar doğru sayılarına eşittir.

Tablo 4.34'den görüldüğü gibi 22 öğretmen adayının beş soruya vermiş oldukları toplam 110 cevaptan uygulama öncesi doğru cevap sayısı 48, yüzdesi 43,64, yanlış cevap sayısı 53, yüzdesi 48,18 ve yanıtsız cevap sayısı 9, yüzdesi 8,18'dir. Uygulama sonrası ise doğru cevap sayısı 96, yüzdesi 87,27 ve yanlış cevap sayısı 14, yüzdesi 12,73'tür. Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgisi bileşeninden aldıkları puanlar doğru cevap sayılarıyla eşdeğerdir. Öğretmen adaylarının uygulama sonrası doğru sayıları uygulama öncesine göre 48 sayı, puanları 48 puan, doğru ve puan yüzdeleri ise %43,63 artmıştır. Bu artışlar ders tasarımının bu kazanıma etkisini ortaya koymaktadır. Dersin uygulamasından sonra 22 öğretmen adayının Kazanım 3'e ulaşma yüzdesi %87,27 gibi çok yüksek bir orana ulaşmıştır.

Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgilerine dair uygulama öncesi ve sonrası ortalama, standart sapma, minimum ve maksimum puanları Tablo 4.35'de verilmiştir. Ortalama, minimum ve maksimum puanlar 5 (5x1) tam puan üzerinden değerlendirilmiştir.

Tablo 4.35. Öğretmen Adaylarının *İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerini Tespit Etme Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Ortalama, Standart Sapma, Minimum ve Maksimum Puanları

	N	$\bar{x}$	ss	Min	Max
Uygulama Öncesi	22	2,18	0,85	1,00	4,00
Uygulama Sonrası	22	4,36	1,05	2,00	5,00

Bir öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgisi bileşeninde İSPABA'ndeki kendisine sorulan 5 sorudan en fazla 5 (5x1) puan alabilmektedir. 22 öğretmen adayının uygulama öncesi anketten aldığı puanların ortalaması 2,18 gibi düşük bir oran iken uygulama sonrasında 4,36 gibi çok yüksek bir orana yükselmiştir. Öğretmen adaylarının uygulama sonrası ortalama puanları uygulama öncesine göre 5 tam puan üzerinden 2,18 puan artmıştır. Yine tablodan uygulama öncesi standart sapmanın 0,85, uygulama sonrası standart sapmanın 1,05 olduğu görülmektedir.

Uygulama öncesinde 22 öğretmen adayından ankette minimum puan alan öğretmen adayının puanı 1,00 iken, uygulama sonrasında 22 öğretmen adayından ankette minimum puan alan öğretmen adayının puanı 2,00'dır. Yine uygulama öncesinde 22 öğretmen adayından ankette maksimum puan alan öğretmen adayının puanı 4,00 iken, uygulama sonrasında 22 öğretmen adayından ankette maksimum puan alan öğretmen adayının puanı 5,00'dır. Buradan ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgilerine ait minimum ve maksimum puanları artırdığı söylenebilir.

Tablo 4.34 ve Tablo 4.35'den öğretmen adaylarının uygulama öncesi öğrencilerin ispatlamaya yönelik yaşadıkları güçlükleri tespit etmekte sıkıntı yaşadıkları görülmektedir. İspat öğretimi için öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrencilerin yaşadıkları güçlükleri tespit edememeleri büyük bir sorundur. Uygulama öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgilerini arttırmış ve dolayısıyla öğretmen adayları uygulama öncesi yaşadıkları sıkıntıları aşmışlardır. Buradan ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme puanlarına olumlu etkisi olduğu söylenebilir.

Ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olup olmadığını saptamak için veri analiz yöntemi olarak uygulanan Wilcoxon İşaretli Sıralar Testinin (Wilcoxon, 1945) çıktıları Tablo 4.36'da verilmiştir.

Tablo 4.36. Öğretmen Adaylarının *İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerini Tespit Etme Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Wilcoxon İşaretli Sıralar Test Çıktıları Tablosu

Uygulama Sonrası-Uygulama-Öncesi	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	Z	p
Negatif Sıralar	2^{a}	2,50	5,00	-3,771*	<0,001
Pozitif Sıralar	18^{b}	11,39	205,00		
Eşit	2^{c}				

* Negatif Sıralar Temeline Dayalı, ^{a} uygulama sonrası puan < uygulama öncesi puan, ^{b} uygulama sonrası puan > uygulama öncesi puan, ^{c} uygulama sonrası puan = uygulama öncesi puan.

Tablo 4.36’dan da görüldüğü gibi test çıktıları ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olduğunu $(Z = -3{,}771, p < 0{,}001)$ göstermektedir. Fark puanlarının sıra ortalamalarına ve sıra toplamlarına bakıldığında istatistiksel olarak anlamlı bulunan bu etkinin pozitif sıralar yani uygulama sonrası lehine olduğu görülmektedir. Ayrıca tablodan 18 öğretmen adayının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme puanlarının uygulama sonrasında arttığı görülmektedir. 2 öğretmen adayının puanları uygulama öncesi ve sonrasında aynı kalmış ve yine sadece 2 öğretmen adayının puanlarında düşüş olmuştur.

Anlamlı etki büyüklüğü $r = \frac{Z}{\sqrt{n}} = \frac{-3{,}771}{\sqrt{22}} = -0{,}80$ olarak hesaplanmıştır. İşaretine bakılmaksızın (mutlak değeriyle) yorumlanan etki büyüklüğü $0{,}80 \geq 0{,}5$ olduğundan ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme puanlarına uygulama sonrası lehine büyük etkisi olduğu (Cohen, 1988) söylenebilir.

Son olarak öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgilerine dair uygulama öncesi ve sonrasına ait soru bazlı frekans ve yüzde dağılımı Tablo 4.37’de verilmiştir.

Tablo 4.37. Öğretmen Adaylarının *İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerini Tespit Etme Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Soru Bazlı Frekans ve Yüzde Dağılımı

Soru Numarası	Güçlük Tipi	Kategori	Uygulama Öncesi		Uygulama Sonrası	
			f	%	f	%
1a	İspatın doğasını kavrama güçlükleri	Doğru	15	68,18	22	100,00
		Yanlış	7	31,82	0	0,00
		Yanıtsız	0	0,00	0	0,00
2a	Matematiksel dil kullanımındaki güçlükler	Doğru	7	31,82	20	90,91
		Yanlış	12	54,55	2	9,09
		Yanıtsız	3	13,64	0	0,00
3a	Problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlükler	Doğru	2	9,09	18	81,82
		Yanlış	18	81,82	4	18,18
		Yanıtsız	2	9,09	0	0,00
4a	İspata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlükler	Doğru	13	59,09	19	86,36
		Yanlış	6	27,27	3	13,64
		Yanıtsız	3	13,64	0	0,00
5a	İspat yöntemleri ile ilgili güçlükler	Doğru	11	50,00	17	77,27
		Yanlış	10	45,46	5	22,73
		Yanıtsız	1	4,55	0	0,00

Öğretmen adaylarının bu bileşendeki uygulama öncesi bilgileri istenilen düzeyde değildir. Öğretmen adaylarının ispatın doğasını kavrama güçlüğünü, matematiksel dil kullanımındaki güçlüğü, problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğü, ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüğü ve ispat yöntemleri ile ilgili güçlüğü tespit etme bilgileri uygulama sonrasında gelişmiştir.

Özellikle uygulama öncesinde öğretmen adaylarının yarısından çoğu matematiksel dil kullanımındaki güçlüğü, problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğü tespit edememiştir. Bu yönüyle ders tasarımının öğretmen adaylarının matematiksel dil kullanımındaki güçlüğü, problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğü tespit etme bilgilerine etkisinin fazla olduğu görülmektedir.

1a sorusundaki öğrenci ispatın doğasını kavrama güçlüğü yaşamıştır. Bu sorudaki öğrenci 3'ün katı olan iki sayının farkının da 3'e bölünebileceğini üç örnekle doğrulamıştır. Bu öğrenci örnekle doğrulamanın ispat olmadığını, yani ispatın doğasını bilmemektedir (Aylar, 2014a). Bu soruda öğretmen adaylarından bu güçlüğü tespit etmeleri istenmiştir. Tablo 4.37 incelendiğinde öğretmen adaylarının uygulama öncesinde en fazla doğru cevap verdikleri soru 1a sorusudur. Yani öğretmen adayları uygulama öncesinde "ispatın doğasını kavrama güçlüklerini" tespit etmede diğer güçlüklere göre daha başarılı olmuşlardır. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının 15 tanesi (%68,18) ispatın doğasını kavrama güçlüğünü tespit etme sorusunda doğru cevap vermişlerdir. Örneğin ÖA2 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi doğru cevap vermiştir. ÖA2 kodlu öğretmen adayı örnekle doğrulamanın ispat olmadığını bilmekte, doğrulamanın ispatın genelleme özelliğini taşımadığını ifade etmektedir.

> *ÖA2: Bu öğrenci üç farklı örnek vererek doğru olduğunu göstermiş. Bu öğrencinin yaşadığı güçlük ispatın ne olduğunu bilmemesi ve örnekle doğrulamanın ispat için yeterli olduğunu sanması ve genellemeye ulaşamaması.*

Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının yedi tanesi (%31,82) ispatın doğasını kavrama güçlüğünü tespit etme sorusunda yanlış cevap vermişlerdir. Bu öğretmen adaylarının bu güçlüğü tespit edememelerinin en büyük sebebi daha çok örneğin veya daha genel örneklerin ispat için yeterli olduğunu düşünmelerinden kaynaklanmıştır. Örneğin ÖA4 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi yanlış cevap vermiştir. ÖA4 kodlu öğretmen adayı örnekle doğrulamanın ispat olması için daha fazla örnek vermek gerektiğini düşünmektedir.

ÖA4: Öğrenci yeterli sayıda örnek ile gösterirse ispat geçerli olur. Yaşadığı güçlük ise yeterli sayıda örnek verememesi.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının tamamı ispatın doğasını kavrama güçlüğünü tespit etme sorusunda başarılı olmuşlardır. Üstelik onlar bu güçlüğü terminolojik ismine atıf yaparak tespit etmişlerdir. ÖA2 ve ÖA4 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki doğru cevapları aşağıdadır.

ÖA2: İspatın doğasını kavrama güçlüğü.

ÖA4: İspatın doğasını kavramaya yönelik güçlük.

2a sorusundaki öğrenci matematiksel dil kullanımında güçlük yaşamıştır. Bu sorudaki öğrenci bir dik üçgenin dar açılarının ölçülerinin toplamının 90^0 olduğunu ispatlamaya çalışırken hep sözel ifadelere başvurmuş yani matematiksel dili hiç kullanamamıştır (Zaimoğlu, 2012). Bu soruda öğretmen adaylarından bu güçlüğü tespit etmeleri istenmiştir. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının çoğunluğu bu güçlüğü tespit etmede başarılı olamamıştır. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarından sadece yedi tanesi (%31,82) bu güçlüğü tespit etme sorusunda doğru cevap vermişlerdir. Örneğin ÖA10 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi doğru cevap vermiştir.

ÖA10: Bu öğrenci yaptığı açıklamayı matematiksel ifadelerle yazmakta güçlük yaşamış. Çizdiği şekil üzerinde bile herhangi bir sayı, harf, sembol vs. yok.

Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının 12 tanesi (%54,55) matematiksel dil kullanma güçlüğünü tespit etme sorusunda yanlış cevap vermişlerdir. Kalan üç tanesi (%13,64) de bu soruya cevap verememiştir. Bu öğretmen adaylarının bu güçlüğü tespit edememelerinin en büyük sebebi sorudaki öğrencinin geometri bilgi eksikliğinin olduğunu düşünmeleridir. Örneğin ÖA6 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi yanlış cevap vermiştir. ÖA6 kodlu öğretmen adayı bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün açı konusundaki bilgi eksikliğinden kaynaklandığını düşünmektedir.

ÖA6: Öğrencinin yaşadığı güçlük geometri bilmemesi. Konu olarak açılar konusunda güçlük yaşamış.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu (%90,91) matematiksel dil kullanma güçlüğünü tespit etme sorusunda başarılı olmuşlardır. Üstelik onlar bu güçlüğü terminolojik ismine atıf yaparak tespit etmişlerdir. ÖA10 ve ÖA6 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki doğru cevapları aşağıdadır.

ÖA10: Matematiksel dil kullanımında güçlük yaşamıştır.

ÖA6: Matematiksel dil kullanımına dair güçlükler.

3a sorusundaki öğrenci problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlük yaşamıştır. Bu sorudaki öğrenci $(1)(3) + (2)(4) + (3)(5) + \cdots + n(n + 2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ teoremini tümevarım yöntemi ile ispatlamaya çalışırken tümevarım varsayımından hareketle tümevarım adımını oluşturmakta güçlük çekmiştir (Güler, Özdemir ve Dikici, 2012). Bu soruda öğretmen adaylarından bu güçlüğü tespit etmeleri istenmiştir. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu bu güçlüğü tespit etmede başarılı olamamıştır. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarından sadece iki tanesi (%9,09) bu güçlüğü tespit etme sorusunda doğru cevap vermişlerdir. Örneğin ÖA19 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi doğru cevap vermiştir.

ÖA19: Bu öğrenci son kısmı karıştırmıştır. Bulduğu sonuçları sentezleyememiştir. I adımından akıl yürüterek II adımına ulaşmakta güçlük yaşamıştır.

Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının 18 tanesi (%81,82) problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğünü tespit etme sorusunda yanlış cevap vermişlerdir. Kalan iki tanesi (%9,09) de bu soruya cevap verememiştir. Bu öğretmen adaylarının bu güçlüğü tespit edememelerinin en büyük sebebi bu sorudaki öğrencinin yaptığı ispatın doğru olduğunu yani bir güçlük yaşamadığını düşünmeleridir. Ancak sorudaki öğrencinin yaptığı ispat kısmen doğru ispat olup öğrenci problem çözme becerisine ve akıl yürütmeye dayalı güçlük yaşamıştır. Örneğin ÖA5 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi yanlış cevap vermiştir.

ÖA5: 1. Tümevarım yöntemiyle ispat tamamlanmıştır. İspat doğru. Öğrenci bir güçlük yaşamamıştır.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu (%81,82) problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğü tespit etme sorusunda başarılı olmuşlardır. Üstelik onlar bu güçlüğü terminolojik ismine atıf yaparak tespit etmişlerdir.

ÖA19 ve ÖA5 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki doğru cevapları aşağıdadır.

ÖA19: Matematiksel akıl yürütme ile ilgili güçlükler.

ÖA5: Bu öğrenci problem çözme becerisi ve mantıksal akıl yürütmeye dayalı güçlük yaşamıştır.

4a sorusundaki öğrenci ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlük yaşamıştır. Bu sorudaki öğrenci $\lim_{u \to v} \frac{1}{(u-v)^2} = -\infty$ eşitliğinin doğru olup olmadığını ispatlamaya çalışırken sadece u yerine v yazıyor ve $\frac{1}{0}$'ın tanımsız olduğunu söylemekle yetiniyor. İspatın içeriğine dâhil olan konu ile ilgili eksiklikleri nedeniyle geçerli ispata ulaşamıyor. Bu soruda öğretmen adaylarından bu güçlüğü tespit etmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının uygulama öncesinde ikincil olarak en fazla doğru cevap verdikleri soru 4a sorusudur. Yani öğretmen adayları uygulama öncesinde "ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlükleri" tespit etmede kalan üç güçlüğe göre daha başarılı olmuşlardır. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarından 13 tanesi (%59,09) bu güçlüğü tespit etme sorusunda doğru cevap vermişlerdir. Örneğin ÖA3 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi doğru cevap vermiştir.

ÖA3: Öğrenci sağdan ve soldan limitine bakmak yerine sadece tek nokta için limiti bulamaya çalışmış, limit konusunda konu eksiği var, limit konusunda güçlük yaşamış.

Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının altı tanesi (%27,27) ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüğü tespit etme sorusunda yanlış cevap vermişlerdir. Kalan üç tanesi (%13,64) de bu soruya cevap verememiştir. Bu öğretmen adaylarının bu güçlüğü tespit edememelerinin en büyük sebebi limit konusundaki kendi eksiklikleridir. Örneğin ÖA1 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi yanlış cevap vermiştir. ÖA1 kodlu öğretmen adayı bu sorudaki öğrencinin sağdan ve soldan limite bakması gerektiğini bilmiyor. Sonuç olarak $-\infty$ yazmanın yeterli olduğunu düşünüyor.

ÖA1: Öğrenci $\frac{1}{0}$'ın değerini yanlış biliyor. $-\infty$ olmalı. Böyle yazsaydı güçlük yaşamazdı.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu (%86,36) ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüğü tespit etme sorusunda başarılı olmuşlardır. ÖA3 ve ÖA1 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki doğru cevapları aşağıdadır.

ÖA3: İspata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlük yaşamış.

ÖA1: İspatın yapılacağı konuyu bilmediği için güçlük yaşamıştır.

5a sorusundaki öğrenci ispat yöntemleri ile ilgili güçlük yaşamıştır. Bu sorudaki öğrenciden yapılmış bir ispatı değerlendirmeleri isteniyor. Öğrenci ispatı değerlendirirken ispatın adımlarını anlamlandırma da güçlük yaşıyor. Bu soruda öğretmen adaylarından bu güçlüğü tespit etmeleri istenmiştir. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının yarısı bu güçlüğü tespit etmede başarılı olamamıştır. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarından 11 tanesi (%50,00) bu güçlüğü tespit etme sorusunda doğru cevap vermişlerdir. Örneğin ÖA22 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi doğru cevap vermiştir.

ÖA22: Öğrenci tümevarımın mantığını anlamakta güçlük çekiyor. Yöntem karmaşık geliyor.

Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının 10 tanesi (%45,46) ispat yöntemleri ile ilgili güçlüğü tespit etme sorusunda yanlış cevap vermişlerdir. Kalan bir tanesi (%4,55) de bu soruya cevap verememiştir. Bu öğretmen adaylarının bu güçlüğü tespit edememelerinin en büyük sebebi bu öğrencinin soruyu ya da önermeyi anlamadığını düşünmeleridir. Aslında bu öğrencinin yaşadığı güçlük tümevarımla ispat yönteminin adımlarını zihninde anlamlandıramamasıdır (Güler ve Ekmekci, 2016). Örneğin ÖA2 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi yanlış cevap vermiştir.

ÖA2: Bu öğrencinin yaşadığı güçlük önermeyi mantıksız bulması ve önermeyi anlamaması.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu (%77,27) ispat yöntemleri ile ilgili güçlüğü tespit etme sorusunda başarılı olmuşlardır. ÖA22 ve ÖA2 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki doğru cevapları aşağıdadır.

ÖA22: İspat yöntemi ile ilgili güçlük yaşamıştır.

ÖA2: Öğrenci ispat yöntemi ile ilgili güçlükler yaşamıştır.

Şimdi de dört öğretmen adayıyla yapılan yarı yapılandırılmış mülakatların bulgularına değinelim. Dört öğretmen adayının uygulama öncesi ve sonrası yapılan yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgileri Tablo 4.38'de verilmiştir.

Tablo 4.38. Dört Öğretmen Adayının *İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerini Tespit Etme Bilgilerine* Ait Yarı Yapılandırılmış Mülakat Bulguları

	Yarı Yapılandırılmış Mülakat									
Öğretmen Adayı Kodu	**Uygulama Öncesi**					**Uygulama Sonrası**				
	1a	**2a**	**3a**	**4a**	**5a**	**1a**	**2a**	**3a**	**4a**	**5a**
K1	D	D	Y	D	D	D	D	D	D	D
K2	D	D	Y	D	Y	D	D	D	D	D
K3	Y	D	Y	D	D	D	D	D	Y	Y
K4	Y	B	Y	D	D	D	D	D	D	D

D: Doğru Y: Yanlış B: Yanıtsız

Yarı yapılandırılmış mülakatlardan ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgilerine etkisi görülmektedir. Özellikle ders tasarımının öğretmen adaylarının problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğü tespit etme bilgilerine etkisi açıkça görülmektedir.

1a sorusundaki öğrenci ispatın doğasını kavrama güçlüğü yaşamıştır. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayının ispatın doğasını kavrama güçlüğünü tespit etme bilgileri betimsel olarak analiz edildiğinde iki öğretmen adayının uygulama öncesinde ve sonrasında cevaplarının doğru, iki öğretmen adayının da uygulama öncesi cevaplarının yanlış iken uygulama sonrasında cevaplarının doğru olduğu görülmektedir.

İspatın doğasını kavrama güçlüğünü tespit etme bilgileri uygulama öncesinde ve sonrasında doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı ispatlamaya yönelik güçlüğün terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K1: Direk örnek vermiş üç tane. Bir kere tüm sayılar için doğru olması gerekiyor. Beni tatmin etmiyor o üç tane örnek.
M: Neden?
K1: Çünkü genelleyememiş. Öğrenci aslında ispat yapmamıştır, ifadeyi sağlayan, doğrulayan üç örnek vermiştir. İspatın ne olduğunu, ispat yapmayı bilmiyor.

M: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)

K1: Yani direkt ispatın ne olduğunu bilmiyor öğrenci. Örneklemeyi de ispat sanıyor. Dolayısıyla ispatın doğasını kavrayamamış. İspatın doğasını kavrama ile ilgili güçlükler yaşamış.

İspatın doğasını kavrama güçlüğünü tespit etme bilgileri uygulama öncesinde yanlış uygulama sonrasında ise doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı ispatlamaya yönelik güçlüğü hem doğru tespit etmiş hem de terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K3: 3 parantezine almak aklına gelmemiş. Hocam bence işte böyle bir şeyden 3 parantezine aldığı zaman yanında herhangi bir rasyonel sayı olarak çıkacağını düşündüm ben.
M: Mesela 12'den 9'u çıkartırken mi 3 parantezini alacaktı? O zaman ispatlamış mı olurdu?
K3: Aynen 3 parantezine alırsa ispatlamış olur. Yani direk 3 parantezine almak bence daha kolay bir ispat.

M: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K3: İspatı nasıl yapacağının farkında değil. İspatın doğasını hiç kavramamış. İspatın doğasını kavrama güçlüğü.

2a sorusundaki öğrenci matematiksel dil kullanımında güçlük yaşamıştır. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayının matematiksel dil kullanma güçlüğünü tespit etme bilgileri betimsel olarak analiz edildiğinde üç öğretmen adayının uygulama öncesinde ve sonrasında cevaplarının doğru görülmektedir. Bir öğretmen adayı uygulama öncesi bu soruyu yanıtsız bırakır iken uygulama sonrasında doğru cevap vermiştir.

Matematiksel dil kullanma güçlüğünü tespit etme bilgileri uygulama öncesinde ve sonrasında doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı ispatlamaya yönelik güçlüğün terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K1: Direk sözel olarak ifade etmiş. Teoremin ispatında matematiksel ifadelere, sembollere vs. yer verememiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)

K1: Güçlük matematiksel olarak bir şey ifade etmemiş, hep sözel ifade etmiş. Matematiksel dil kullanımındaki güçlükleri yaşamış.

Matematiksel dil kullanma güçlüğünü tespit etme bilgileri uygulama öncesinde yanıtsız uygulama sonrasında ise doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı ispatlamaya yönelik güçlüğü hem tespit edebilmiş hem de terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K4: Bu öğrencinin yaşadığı güçlüğü tespit edemedim. Anlayamadım daha doğrusu.
M: Teoreme ve öğrencinin yaptığı ispata şöyle bak bir daha. İspat olması gereken gibi mi yoksa bir eksiklik var mı öğrencinin yaptığı ispatta? Ona göre güçlüğü tespit et.
K4: (Düşünüyor) Hocam ankette de ben bu soruyu boş bırakmıştım.

M: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K4: Matematiksel dil kullanımına dair bir güçlük yaşamış. Aslında burada doksan derece olması gerektiğini biliyor hani içeriği de biliyor ama matematiksel dil kullanımı yok.

3a sorusundaki öğrenci problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlük yaşamıştır. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayının problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğü tespit etme bilgileri betimsel olarak analiz edildiğinde dört öğretmen adayının da uygulama öncesi cevaplarının yanlış iken uygulama sonrasında cevaplarının doğru olduğu görülmektedir.

Problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğü tespit etme bilgileri uygulama öncesinde yanlış uygulama sonrasında ise doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı hem ispatlamaya yönelik güçlüğü tespit edebilmiş hem de terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K3: Tümevarım yöntemiyle ispatlamış, bir güçlük yaşamamış.
M: Öğrencinin yaptığı ispatta bir eksiklik var mı?
K3: Ben en güzel şekilde yaptığını düşünüyorum. Eksiklik yok. Güçlük yaşamamış.

M: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)

K3: Yaşadığı güçlük I de paranteze almıyor. II yi yapmaması gerekirdi. I den II ye ulaşması gerekirdi. Bunu yapamayınca II yi yapıyor. Uzattıkça uzatıyor işlemi. Bu akıl yürütme, problem çözmeyle alakalı. Akıl yürütme ve problem çözme becerisi ile ilgili güçlük yaşamış.

4a sorusundaki öğrenci ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlük yaşamıştır. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayının ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüğü tespit etme bilgileri betimsel olarak analiz edildiğinde üç öğretmen adayının uygulama öncesinde ve sonrasında cevaplarının doğru, bir öğretmen adayının da uygulama öncesi cevabı doğru iken uygulama sonrasında cevabının yanlış olduğu görülmektedir.

İspata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüğü tespit etme bilgileri uygulama öncesinde ve sonrasında doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı ispatlamaya yönelik güçlüğün terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K1: Burada ezbere kullandığı bir bilgi var. Daha önce öğrendiği bilgiyi başka bir derste aynen kullanmış. Payda sıfır oluyor, dolayısıyla tanımsız, limit olmamalı diyor. Burada bir eksiklik var bence.
M: Eksik olan nedir?
K1: Bir sağdan bir soldan yaklaşması gerekiyor. Onu yapmamış. Limit konusu ile ilgili güçlük yaşamış.

M: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K1: Güçlük şey, yani öğrencinin bu konuyla ilgili bilgi eksikliğinden kaynaklanıyor. v yi direk yerine yazıp tanımsız demiş bitmiş, sağdan soldan yaklaşmamış. İspata dâhil içerik alanı ile ilgili güçlük yaşamış.

İspata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüğü tespit etme bilgileri uygulama öncesinde doğru uygulama sonrasında ise yanlış olan öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı ankette ve mülakatta farklı yanıtlarla yanlış cevaplar vermiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K3: Kavram yanılgısı ve bilgi eksikliği var. u yerine v yazması ve payda sıfır ise tanımsız demesi. Sağdan soldan limitine bakmamış. İspat yapacağı konuyla ilgili güçlük yaşamış. Limit konusunu bilmiyor pek. Ben de bilmiyorum. (Gülüyor)

M: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K3: Ankette akıl yürütme ve problem çözme ile ilgili güçlük demiştim ama direk ispatın doğasını anlamamış bence.
M: Niye ispatın doğasını kavrama güçlüğü?
K3: Çünkü ispatla alakalı hiçbir şey yapmıyor.

5a sorusundaki öğrenci ispat yöntemleri ile ilgili güçlük yaşamıştır. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayının ispat yöntemleri ile ilgili güçlüğü tespit etme bilgileri betimsel olarak analiz edildiğinde iki öğretmen adayının uygulama öncesinde ve sonrasında cevaplarının doğru, bir öğretmen adayının uygulama öncesi cevabı yanlış iken uygulama sonrasında cevabının doğru, bir öğretmen adayının da uygulama öncesi cevabı doğru iken uygulama sonrasında cevabının yanlış olduğu görülmektedir.

İspat yöntemleri ile ilgili güçlüğü tespit etme bilgileri uygulama öncesinde ve sonrasında doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı ispatlamaya yönelik güçlüğün terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K4: Tümevarım yöntemini tam kavrayamamış. Öğrenci burada ispat yöntemiyle ilgili güçlük yaşamış.

M: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K4: Yöntemi aklında oturtamamış. İspat yöntemleri ile ilgili güçlük yaşamış.

İspat yöntemleri ile ilgili güçlüğü tespit etme bilgileri uygulama öncesinde cevabı yanlış uygulama sonrasında ise doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı hem ispatlamaya yönelik güçlüğü tespit edebilmiş hem de terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K2: Önermenin doğru olduğuna inanmış. Önermeyi doğru kabul ettiğimiz için doru oluyor demiş.
M: Yaşadığı güçlük önermeyle mi ilgili?
K2: Yaşadığı güçlük önermeyi anlamaması.

M: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)

> *K2: Yöntemi anlamlandıramıyor aslında. $n = k$ için doğru kabul ediyoruz ne için yapıyoruz bunu. Hani ben zaten $n = k$ için doğru dedim, $n = k + 1$ için niye alıyorum diyor. İspat yöntemleri ile ilgili güçlük.*

Buraya kadar olan kısımda anket ve mülakatların analizinden ders tasarımının bu kazanıma etkisi açıkça görülmektedir. Ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgilerine etkisi nicel ve nitel bulgularla desteklenmiştir.

4.5.1.2.2. Ders Tasarımının "Öğretmen Adayı İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerinin Nedenlerini Açıklar" Kazanımına Etkisine Dair Bulgular

Bu kısımda ders tasarımının öğretmen adaylarının Kazanım 4'e ulaşma durumlarına etkisi incelenmiştir.

Kazanım 4: Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklar.

Bu kapsamda aşağıdaki soruya cevap aranmıştır.

Ders tasarımı "*Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklar*" kazanımına nasıl etki etmiştir?

Dersin uygulamasından önce ve sonra 22 öğretmen adayının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini ölçmek amacıyla geliştirilmiş olan İSPABA'ne verdikleri cevaplar analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır. Bu anketle birlikte öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgileri dört bileşende incelenmek istenmiştir. İkinci olarak ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgilerine etkisi incelenmiştir. Bu ankette bu bileşenlerden biri olan öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklamaları ile ilgili beş soru yer almıştır. Bu anketin birinci kısmındaki 1b, 2b, 3b, 4b ve 5b soruları öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklayıp açıklayamadıklarını ölçmek amacıyla hazırlanmıştır. Anketten elde edilen nitel veriler analiz edilerek nicel bulgulara ulaşılmıştır.

22 öğretmen adayının beş soruya vermiş oldukları 110 cevap Cornu'nun (1991) çalışmasındaki psikolojik ve genetik, didaktik ve epistemolojik nedenlere göre analiz edilmiş ve doğru, yanlış ve yanıtsız olarak kodlanmıştır. Doğru cevaplar 1 puan, yanlış

ve yanıtsız kabul edilen cevaplar 0 puan olarak puanlanmıştır. 22 öğretmen adayının kendilerine sorulan ispatlamaya yönelik beşer öğrenci güçlüğün nedenini açıklama sorularına verdikleri 110 cevabın doğru, yanlış ve yanıtsız cevap frekansları, yüzdeleri ve puanları Tablo 4.39'da verilmiştir. 22 öğretmen adayının anketten bu bileşende alabileceği toplam puan 110 (22x5) puandır.

Tablo 4.39. Öğretmen Adaylarının *İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerinin Nedenlerini Açıklama Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Frekans, Yüzde ve Puan Dağılımı

Kategori		Doğru	Yanlış	Yanıtsız	Toplam
Uygulama Öncesi	**f (%)**	24 (21,82)	78 (70,91)	8 (7,27)	110 (100,00)
	p (%)	24 (21,82)	0 (0,00)	0 (0,00)	**24 (21,82)**
Uygulama Sonrası	**f (%)**	102 (92,73)	8 (7,27)	0 (0,00)	110 (100,00)
	p (%)	102 (92,73)	0 (0,00)	0 (0,00)	**102 (92,73)**

Öğretmen adaylarının aldığı puanlar doğru sayılarına eşittir.

Tablo 4.39'da görüldüğü gibi 22 öğretmen adayının beş soruya vermiş oldukları toplam 110 cevaptan uygulama öncesi doğru cevap sayısı 24, yüzdesi 21,82, yanlış cevap sayısı 78, yüzdesi 70,91 ve yanıtsız cevap sayısı 8, yüzdesi 7,27'dir. Uygulama sonrası ise doğru cevap sayısı 102, yüzdesi 92,73 ve yanlış cevap sayısı 8, yüzdesi 7,27'dir. Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgisi bileşeninden aldıkları puanlar doğru cevap sayılarıyla eşdeğerdir. Öğretmen adaylarının uygulama sonrası doğru sayıları uygulama öncesine göre 78 sayı, puanları 78 puan, doğru ve puan yüzdeleri ise %70,91 artmıştır. Bu artışlar ders tasarımının bu kazanıma etkisini ortaya koymaktadır. Dersin uygulamasından sonra 22 öğretmen adayının Kazanım 4'e ulaşma yüzdesi %92,73 gibi çok yüksek bir orana ulaşmıştır.

Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgilerine dair uygulama öncesi ve sonrası ortalama, standart sapma, minimum ve maksimum puanları Tablo 4.40'da verilmiştir. Ortalama, minimum ve maksimum puanlar 5 puan (5x1) üzerinden değerlendirilmiştir.

Tablo 4.40. Öğretmen Adaylarının *İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerinin Nedenlerini Açıklama Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Ortalama, Standart Sapma, Minimum ve Maksimum Puanları

	N	$\bar{x}$	ss	Min	Max
Uygulama Öncesi	22	1,09	0,97	0,00	4,00
Uygulama Sonrası	22	4,64	0,66	3,00	5,00

Bir öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgisi bileşeninde İSPABA'ndeki kendisine sorulan 5 sorudan en fazla 5 (5x1) puan alabilmektedir. 22 öğretmen adayının uygulama öncesi anketten aldığı puanların ortalaması 1,09 gibi çok düşük bir oran iken uygulama sonrasında 4,64 gibi çok yüksek bir orana yükselmiştir. Öğretmen adaylarının uygulama sonrası ortalama puanları uygulama öncesine göre 5 tam puan üzerinden 3,55 puan artmıştır. Yine tablodan uygulama öncesi standart sapmanın 0,97, uygulama sonrası standart sapmanın 0,66 olduğu görülmektedir. Uygulama öncesinde 22 öğretmen adayından ankette minimum puan alan öğretmen adayının puanı 0,00 iken, uygulama sonrasında 22 öğretmen adayından ankette minimum puan alan öğretmen adayının puanı 3,00'dır. Yine uygulama öncesinde 22 öğretmen adayından ankette maksimum puan alan öğretmen adayının puanı 4,00 iken, uygulama sonrasında 22 öğretmen adayından ankette maksimum puan alan öğretmen adayının puanı 5,00'dır. Buradan ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgilerine ait minimum ve maksimum puanları artırdığı söylenebilir.

Tablo 4.39 ve 4.40'dan öğretmen adaylarının uygulamadan önce öğrencilerin ispatlamaya yönelik yaşadıkları güçlüklerin nedenlerini açıklamakta büyük sıkıntı yaşadıkları görülmektedir. İspat öğretimi için öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrencilerin yaşadıkları güçlüklerin nedenlerini açıklayamamaları önemli bir sorundur. Öğretmen adayları ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etmede sorun yaşadıkları için bu güçlüklerin nedenlerini açıklamada da sorun yaşamışlardır. İspatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme ile bu güçlüklerin nedenlerini açıklama arasında sıkı bir bağ vardır. Bu iki bilgi türü birbirini karşılıklı olarak etkilemektedir. Uygulama öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgilerini arttırmış ve dolayısıyla uygulamadan önce yaşadıkları sıkıntıları aşmışlardır. Uygulamadan sonra öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgileri ve bu güçlüklerin nedenlerini açıklama bilgilerinin birlikte ve benzer oranlarda artmış olması bu iki bilgi türünün arasındaki bağı ortaya çıkarmaktadır. Buradan ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgilerini geliştirdiği söylenebilir. Yani ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama puanlarına olumlu etkisi olduğu söylenebilir.

Ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olup olmadığını saptamak için veri analiz yöntemi olarak uygulanan Wilcoxon İşaretli Sıralar Testinin (Wilcoxon, 1945) çıktıları Tablo 4.41'de verilmiştir.

Tablo 4.41. Öğretmen Adaylarının *İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerinin Nedenlerini Açıklama Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Wilcoxon İşaretli Sıralar Test Çıktıları Tablosu

Uygulama Sonrası-Uygulama-Öncesi	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	Z	p
Negatif Sıralar	0^a	0,00	0,00	-4,158*	<0,001
Pozitif Sıralar	22^b	11,50	253,00		
Eşit	0^c				

* Negatif Sıralar Temeline Dayalı, [a] uygulama sonrası < uygulama öncesi, [b] uygulama sonrası > uygulama öncesi, [c] uygulama sonrası = uygulama öncesi.

Tablo 4.41'den de görüldüğü gibi test çıktıları ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olduğunu $(Z = -4{,}158, p < 0{,}001)$ göstermektedir. Fark puanlarının sıra ortalamalarına ve sıra toplamlarına bakıldığında istatistiksel olarak anlamlı bulunan bu etkinin pozitif sıralar yani uygulama sonrası lehine olduğu görülmektedir. Ayrıca tablodan öğretmen adaylarının tamamının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama puanını uygulama sonrasında arttırdığı görülmektedir.

Anlamlı etki büyüklüğü $r = \frac{Z}{\sqrt{n}} = \frac{-4{,}158}{\sqrt{22}} = -0{,}89$ olarak hesaplanmıştır. İşaretine bakılmaksızın (mutlak değeriyle) yorumlanan etki büyüklüğü $0{,}89 \geq 0{,}5$ olduğundan ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama puanlarına uygulama sonrası lehine büyük etkisi olduğu (Cohen, 1988) söylenebilir.

Son olarak öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgilerine dair uygulama öncesi ve sonrasına ait soru bazlı frekans ve yüzde dağılımı Tablo 4.42'de verilmiştir.

Tablo 4.42. Öğretmen Adaylarının *İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerinin Nedenlerini Açıklama Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Soru Bazlı Frekans ve Yüzde Dağılımı

Soru Numarası	Güçlük Nedenlerinin Tipi	Kategori	Uygulama Öncesi		Uygulama Sonrası	
			f	%	f	%
1b	Psikolojik ve genetik	Doğru	14	63,64	22	100,00
		Yanlış	8	36,36	0	0,00
		Yanıtsız	0	0,00	0	0,00
2b	Psikolojik ve genetik	Doğru	3	13,64	22	100,00
		Yanlış	17	77,27	0	0,00
		Yanıtsız	2	9,09	0	0,00
3b	Psikolojik ve genetik	Doğru	4	18,18	20	90,91
		Yanlış	13	59,09	2	9,09
		Yanıtsız	5	22,73	0	0,00
4b	Didaktik	Doğru	2	9,09	19	86,36
		Yanlış	20	90,91	3	13,64
		Yanıtsız	0	0,00	0	0,00
5b	Epistemolojik	Doğru	1	4,55	19	86,36
		Yanlış	20	90,91	3	13,64
		Yanıtsız	1	4,55	0	0,00

Bu beş sorudan birincisindeki öğrencinin yaşadığı ispatın doğasını kavrama güçlüğünün nedeni psikolojik ve genetik engel, ikincisindeki öğrencinin yaşadığı matematiksel dil kullanımındaki güçlüğün nedeni yine psikolojik ve genetik engel, üçüncüsündeki öğrencinin yaşadığı problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğün nedeni benzer şekilde psikolojik ve genetik engel, dördüncüsündeki öğrencinin yaşadığı ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüğün nedeni didaktik engel ve beşincisindeki öğrencinin yaşadığı ispat yöntemleri ile ilgili güçlüğün nedeni ise hepsinden farklı olarak epistemolojik engeldir.

Öğretmen adaylarının bu bileşendeki uygulama öncesi bilgileri istenilen düzeyde değildir. Öğretmen adaylarının öğrencilerin ispatla ilgili yaşadıkları güçlüklerin psikolojik ve genetik, didaktik ve epistemolojik kaynaklı nedenlerini açıklama bilgileri uygulama sonrasında gelişmiştir.

Sadece birinci soruda uygulama öncesinde öğretmen adaylarının yarısından çoğu doğru cevap verebilmişlerdir. Diğer sorularda doğru cevap veren öğretmen adayı sayısı oldukça azdır. Bu yönüyle ders tasarımının öğretmen adaylarının öğrencilerin yaşadığı matematiksel dil kullanımındaki güçlüğün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli, problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli, ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüğün nedeni olan didaktik engeli, ispat yöntemleri ile ilgili güçlüğün nedeni olan epistemolojik engeli açıklama bilgilerine etkisi fazladır.

1a sorusundaki öğrenci ispatın doğasını kavrama güçlüğü yaşamıştır. Bu soruda öğretmen adaylarından bu güçlüğün nedenini açıklamaları istenmiştir. Bu sorudaki öğrenci ispatın doğasını kavrayacak bilişsel düzeye ulaşamamıştır. Bu soru için bunun en öngörülen nedeni de öğrencinin kendinden kaynaklı olmasıdır. 1b sorusunda bu öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni psikolojik ve genetik engeldir. Tablo 4.42 incelendiğinde öğretmen adaylarının uygulama öncesinde en fazla doğru cevap verdikleri soru 1b sorusudur. Yani öğretmen adayları uygulama öncesinde ispatın doğasını kavrama güçlüğünün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli açıklamada diğerlerine göre daha başarılı olmuşlardır. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının 14 tanesi (%63,64) ispatın doğasını kavrama güçlüğünün nedeni olan psikolojik ve genetik nedeni açıklama sorusunda doğru cevap vermişlerdir. Örneğin ÖA7 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi doğru cevap vermiştir. ÖA7 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedenine terminolojik ismiyle atıf yapamasa da nedenin öğrenci kaynaklı olduğunu belirterek uygulama öncesi için yeterli düzeyde doğru cevap vermiştir.

> *ÖA7: Bu soruda öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni öğrencinin ispatın ne olduğunu öğrenememiş olmasıdır.*

Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının sekiz tanesi (%36,36) ispatın doğasını kavrama güçlüğünün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli açıklama sorusunda yanlış cevap vermişlerdir. Bu öğretmen adaylarının bu nedeni tespit edememelerinin en büyük sebebi öğrencinin yaşadığı bu güçlüğün nedenini ispat öğretimindeki eksikliklere bağlamalarıdır. Örneğin ÖA21 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi yanlış cevap vermiştir. ÖA21 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeninin öğretim kaynaklı olduğunu belirterek yanlış cevap vermiştir. Ancak öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni ispat konusundaki bilişsel eksiklikleridir.

> *ÖA21: Öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni ispatın iyi öğretilmemiş olmasıdır.*

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının tamamı ispatın doğasını kavrama güçlüğünün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli açıklama sorusunda başarılı olmuşlardır. Üstelik onlar bu güçlüğü terminolojik ismine atıf yaparak açıklamışlardır. ÖA7 ve ÖA21 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki doğru cevapları aşağıdadır.

ÖA7: Öğrencinin kendinden kaynaklı psikolojik (genetik) neden.

ÖA21: Öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni psikolojik nedendir.

2a sorusundaki öğrenci matematiksel dil kullanımında güçlük yaşamıştır. Bu sorudaki öğrenci ispatlama yaparken matematiksel dil kullanacak bilişsel düzeye ulaşamamıştır. Bu soru için bunun en öngörülen nedeni de öğrencinin kendinden kaynaklı olmasıdır. Bu soruda öğretmen adaylarından bu güçlüğün nedenini açıklamaları istenmiştir. 2b sorusunda bu öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni psikolojik ve genetik engeldir. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu bu nedeni açıklayamamışlardır. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının sadece üç tanesi (%13,64) matematiksel dil kullanımındaki güçlüğün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli açıklama sorusunda doğru cevap vermişlerdir. Örneğin ÖA1 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi doğru cevap vermiştir. ÖA1 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedenine terminolojik ismiyle atıf yapamasa da nedenin öğrencinin kendinden kaynaklı olduğunu belirterek uygulama öncesi için yeterli düzeyde doğru cevap vermiştir.

ÖA1: Güçlüğün nedeni öğrencinin matematiksel dil kullanımını bilmemesi, anlamamış olmasıdır.

Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının 17 tanesi (%77,27) matematiksel dil kullanımındaki güçlüğün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli açıklama sorusunda yanlış cevap vermişlerdir. Kalan iki tanesi (%9,09) de bu soruyu yanıtsız bırakmışlardır. Bu öğretmen adaylarının bu sorudaki öğrenci güçlüğünün nedeni açıklayamamalarının en büyük sebebi öğrencinin yaşadığı güçlüğü tespit edememiş olmalarıdır. Güçlüğü doğru tespit edemedikleri için güçlüğün nedenini de açıklayamamışlardır. Ayrıca bu öğretmen adayları öğrencinin yaşadığı bu güçlüğün nedenini matematik öğretimindeki eksikliklere bağlamışlardır. Örneğin ÖA13 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi yanlış cevap vermiştir. ÖA13 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeninin matematik öğretimi kaynaklı olduğunu belirterek yanlış cevap vermiştir. Ancak öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni öğrencinin matematiksel dil kullanmadaki bilişsel eksiklikleridir.

ÖA13: Bence bu öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni matematikte ezberci bir sistemden geliniyor olmasıdır.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının tamamı matematiksel dil kullanımındaki güçlüğün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli açıklama sorusunda başarılı olmuşlardır. Üstelik onlar bu güçlüğü terminolojik ismine atıf yaparak açıklamışlardır. ÖA1 ve ÖA13 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki doğru cevapları aşağıdadır.

ÖA1: Yaşanılan güçlüğün nedeni psikolojiktir.

ÖA13: Psikolojik nedenlidir.

3a sorusundaki öğrenci problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlük yaşamıştır. Bu sorudaki öğrenci varsayım adımından hareketle tümevarım adımına ulaşmak için gerekli olan akıl yürütme ve problem çözme becerisine bilişsel olarak ulaşamamıştır. Bu soru için bunun en öngörülen nedeni de öğrencinin kendinden kaynaklı olmasıdır. Bu soruda öğretmen adaylarından bu güçlüğün nedenini açıklamaları istenmiştir. 3b sorusunda bu öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni psikolojik ve genetik engeldir. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu bu nedeni açıklayamamışlardır. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının yalnızca dört tanesi (%18,18) problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli açıklama sorusunda doğru cevap vermişlerdir. Örneğin ÖA19 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi doğru cevap vermiştir. ÖA19 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedenine terminolojik ismiyle atıf yapamasa da nedenin öğrenci kaynaklı olduğunu belirterek uygulama öncesi için yeterli düzeyde doğru cevap vermiştir.

ÖA19: Öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni öğrencinin $n = k$*'dan* $n = k + 1$*'e işlem yürütememesidir.*

Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının 13 tanesi (%59,09) problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli açıklama sorusunda yanlış cevap vermişlerdir. Kalan beş tanesi (%22,73) de bu soruyu yanıtsız bırakmışlardır. Bu öğretmen adaylarının bu sorudaki öğrenci güçlüğünün nedeni açıklayamamalarının en büyük sebebi öğrencinin yaşadığı güçlüğü tespit edememiş olmalarıdır. Güçlüğü doğru tespit edemedikleri için güçlüğün nedenini de açıklayamamışlardır. Ayrıca bu öğretmen adaylarının bu sorudaki öğrencinin doğru ispat yaptığını, hiç bir güçlük yaşamadığını dolayısıyla güçlüğün nedeninin de olmadığını düşünmüşlerdir. Hâlbuki öğrencinin yaptığı ispat kısmen doğru ispattır dolayısıyla öğrenci doğru ispat yapmada güçlük yaşamıştır. Örneğin ÖA20 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi yanlış cevap vermiştir. ÖA20 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu sorudaki öğrencinin güçlük yaşamadığını dolayısıyla güçlüğün de bir nedeninin olmadığını belirtmiştir. Ancak öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni öğrencinin problem çözme ve akıl yürütme becerisindeki bilişsel eksiklikleridir.

ÖA20: Öğrenci bu soruda güçlük yaşamamıştır. Güçlüğün nedeni de yoktur.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu (%90,91) problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli açıklama sorusunda başarılı olmuşlardır. Üstelik onlar bu güçlüğü terminolojik ismine atıf yaparak açıklamışlardır. ÖA19 ve ÖA20 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki doğru cevapları aşağıdadır.

ÖA19: Bu öğrencinin yaşadığı güçlük psikolojik nedenlidir.
ÖA20: Güçlüğün nedeni psikolojik kökenlidir.

4a sorusundaki öğrenci ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlük yaşamıştır. Bu soruda öğretmen adaylarından bu güçlüğün nedenini açıklamaları istenmiştir. Bu sorudaki öğrenci ispatı yapabilmesi için gerekli olan konu bilgisine sahip değildir. Bu soru için bunun en öngörülen sebebi de limit ve tanımsızlık ile ilgili derslerde yapılan pedagojik kaynaklı sorunlardır. Çünkü bu sorudaki öğrenci "Matematik derslerinde öğrendiğimize göre u yerine v yazıyoruz, payda sıfır oluyor, payda sıfır olunca da tanımsız olur. Limiti olmamalı" şeklinde cevap vermektedir. 4b sorusunda bu öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni pedagojik engeldir. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu bu nedeni açıklayamamışlardır. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının sadece iki tanesi (%9,09) ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüğün nedeni olan didaktik engeli açıklama sorusunda doğru cevap vermişlerdir. Örneğin ÖA5 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi doğru cevap vermiştir. ÖA5 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedenine terminolojik ismiyle atıf yapamasa da nedenin öğretim şeklinden kaynaklı olduğunu belirterek uygulama öncesi için yeterli düzeyde doğru cevap vermiştir.

> *ÖA5: Güçlüğün nedeni öğretmenlerin derslerde limiti anlatış, uygulayış ve işleyiş şeklidir.*

Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının 20 tanesi (%90,91) ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüğün nedeni olan didaktik engeli açıklama sorusunda yanlış cevap vermişlerdir. Bu öğretmen adaylarının bu nedeni yanlış açıklamalarının en büyük sebebi asıl neden olan pedagojik nedeni göz ardı edip nedenin öğrenci kaynaklı olduğunu düşünmeleridir. Örneğin ÖA16 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi yanlış cevap vermiştir. ÖA16 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde öğrencinin limit, sonsuzluk ve tanımsızlık kavramlarını öğrenemediğini belirtmiştir. Ancak öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni öğretim kaynaklı nedenlerdir. Derslerde limit konusu anlatılırken u değişkeni yerine yaklaştığı değer olan v yazılır denir. Ayrıca derslerde sıfırdan farklı bir sayının sıfıra bölümünün tanımsız olduğu ilköğretimden itibaren söylenmekte ve bunlarda öğrencilerde didaktik nedenli güçlüklere sebebiyet vermektedir.

> *ÖA16: Öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni limit, sonsuz ve tanımsız gibi kavramları bilmemesidir.*

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu (%86,36) ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüğün nedeni olan didaktik engeli açıklama sorusunda başarılı olmuşlardır. Üstelik onlar bu güçlüğü terminolojik ismine atıf yaparak açıklamışlardır. ÖA5 ve ÖA16 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki doğru cevapları aşağıdadır.

> *ÖA5: Didaktik neden (pedagojik).*
>
> *ÖA16: Güçlüğün nedeni didaktik nedendir.*

5a sorusundaki öğrenci ispat yöntemleri ile ilgili güçlük yaşamıştır. Bu sorudaki öğrencinin yapılan ispatı değerlendirememesinin en temel nedeni tümevarım yönteminin basamaklarını zihninde anlamlandıramamasıdır. Bu tümevarım yönteminin epistemolojik yapısından kaynaklanmaktadır. Bu soruda öğretmen adaylarından bu güçlüğün nedenini açıklamaları istenmiştir. 5b sorusunda bu öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni epistemolojik engeldir. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu bu nedeni açıklayamamışlardır. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının sadece bir tanesi

(%4,55) ispat yöntemleri ile ilgili güçlüğün nedeni olan epistemolojik engeli açıklama sorusunda doğru cevap vermiştir. ÖA10 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi doğru cevap vermiştir. ÖA10 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedenine terminolojik ismiyle atıf yapamasa da nedenin yöntemin kendinden kaynaklı olduğunu belirterek uygulama öncesi için yeterli düzeyde doğru cevap vermiştir.

ÖA10: Öğrenci tümevarım yönteminin mantığı zor olduğu için güçlük yaşamış. Çünkü öğrenci ispatlamaya çalıştığı bir ifade de başka bir kabulü kullanmak zorunda.

Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının 20 tanesi (%90,91) ispat yöntemleri ile ilgili güçlüğün nedeni olan epistemolojik engeli açıklama sorusunda yanlış cevap vermişlerdir. Kalan bir tanesi (%4,55) de bu soruyu yanıtsız bırakmıştır. Bu öğretmen adayları öğrencinin yaşadığı bu güçlüğün nedenini yine öğrencinin kendisine bağlamışlar ancak asıl nedeni göz ardı etmişlerdir. Örneğin ÖA11 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi yanlış cevap vermiştir. ÖA11 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedenini öğrencinin tekrar yapmaması olarak belirtmiştir. Ancak öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni psikolojik nedenin de ötesinde epistemolojik kökenlidir. Yani tümevarımla ispat oluştururken tümevarımın kendi epistemolojik zorluğundan kaynaklı olarak öğrenci zihninde tümevarımın basamaklarını anlamlandıramamaktadır.

ÖA11: Öğrencinin konuyu tam hatırlayamıyor. Nedeni konu ile ilgili tekrar yapmaması.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu (%86,36) ispat yöntemleri ile ilgili güçlüğün nedeni olan epistemolojik engeli açıklama sorusunda başarılı olmuşlardır. Üstelik onlar bu güçlüğü terminolojik ismine atıf yaparak açıklamışlardır. ÖA10 ve ÖA11 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki doğru cevapları aşağıdadır.

ÖA10: Bu sorudaki güçlüğün nedeni epistemolojik neden.

ÖA11: Buradaki güçlüğün nedeni epistemolojik.

Şimdi de dört öğretmen adayıyla yapılan yarı yapılandırılmış mülakatların bulgularına değinelim. Dört öğretmen adayının uygulama öncesi ve sonrası yapılan yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgileri Tablo 4.43’de verilmiştir.

Tablo 4.43. Dört Öğretmen Adayının *İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerinin Nedenlerini Açıklama Bilgilerine* Ait Yarı Yapılandırılmış Mülakat Bulguları

	Yarı Yapılandırılmış Mülakat									
Öğretmen Adayı Kodu	**Uygulama Öncesi**					**Uygulama Sonrası**				
	1b	**2b**	**3b**	**4b**	**5b**	**1b**	**2b**	**3b**	**4b**	**5b**
K1	D	D	Y	D	Y	D	D	D	D	D
K2	D	Y	Y	Y	Y	D	D	D	D	D
K3	Y	D	Y	Y	Y	D	D	D	Y	D
K4	Y	B	B	Y	Y	D	D	D	D	Y

D: Doğru Y: Yanlış B: Yanıtsız

Yarı yapılandırılmış mülakatlardan ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgilerine etkisi görülmektedir. Özellikle problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğün nedeni olan psikolojik ve genetik engel ile ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüğün nedeni olan didaktik engeli açıklama bilgilerine etkisi açıkça görülmektedir.

1a sorusundaki öğrenci ispatın doğasını kavrama güçlüğü yaşamıştır. 1b sorusunda bu öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni psikolojik ve genetik engeldir. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayının ispatın doğasını kavrama güçlüğünün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli açıklama bilgileri betimsel olarak analiz edildiğinde iki öğretmen adayının uygulama öncesinde ve sonrasında cevaplarının doğru, iki öğretmen adayının da uygulama öncesi cevaplarının yanlış iken uygulama sonrasında cevaplarının doğru olduğu görülmektedir.

İspatın doğasını kavrama güçlüğünün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli açıklama bilgileri uygulama öncesinde ve sonrasında doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama öncesinde öğretmen adayı güçlüğü doğru tespit edip güçlüğün nedeninin de öğrenciden kaynaklı olduğunu belirterek uygulama öncesi için yeterli düzeyde doğru cevap vermiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı ispatlamaya yönelik güçlüğün nedeninin terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K2: Öğrencinin matematiksel ispatı bilmemesi ve uygulayamamasından kaynaklanmıştır.

M: Güçlüğün nedeni nedir?
K2: Öğrencinin eksikliğinden kaynaklıdır.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K2: Örnekle yazmayı ya da örneklemeyi ispat zannediyor. İspatlama soruluyorsa öğretilmiştir, öğrenci öğrenememiş. Öğrencinin kendinden kaynaklı psikolojik neden.

İspatın doğasını kavrama güçlüğünün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli açıklama bilgileri uygulama öncesinde yanlış uygulama sonrasında ise doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama öncesinde öğretmen adayı güçlüğün nedeninin öğretim kaynaklı olduğunu belirterek yanlış cevap vermiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı hem ispatlamaya yönelik güçlüğün nedenini açıklayabilmiş hem de terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K4: Bence böyle sorular kendisine hiç çözülmediği için olabilir.
M: Güçlüğün nedeni nedir?
K4: Eğer öğretmen bu şekilde sorular sorsaydı ya da derste uğraşsaydı, kendisi anlatmış olsaydı öğrenci de çözecekti.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K4: Öğrenci örnek vererek yapmaya çalışmış. Tabii bu da öğrencinin çalışmadığından kaynaklı olduğu için psikolojik neden.

2a sorusundaki öğrenci matematiksel dil kullanımında güçlük yaşamıştır. 2b sorusunda bu öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni psikolojik ve genetik engeldir. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayının matematiksel dil kullanma güçlüğünün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli açıklama bilgileri betimsel olarak analiz edildiğinde iki öğretmen adayının uygulama öncesinde ve sonrasında cevaplarının doğru, bir öğretmen adayının uygulama öncesi cevabının yanlış iken uygulama sonrasında cevabının doğru olduğu görülmektedir. Bir öğretmen adayı da uygulama öncesinde bu soruyu yanıtsız bırakır iken uygulama sonrasında doğru cevap vermiştir.

Matematiksel dil kullanma güçlüğünün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli açıklama bilgileri uygulama öncesinde ve sonrasında doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama öncesinde öğretmen adayı güçlüğün nedeninin öğrenciden kaynaklı olduğunu belirterek uygulama öncesi için yeterli düzeyde doğru cevap vermiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı ispatlamaya yönelik güçlüğün nedeninin terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K1: Güçlüğün nedeni öğrencinin matematiksel dili kullanamaması. Bu aşamaya kadar öğrenmesi gerekirdi.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K1: Burada da öğrencinin kendisinden kaynaklanıyor, psikolojik ve genetik neden.

Matematiksel dil kullanma güçlüğünün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli açıklama bilgileri uygulama öncesinde yanıtsız uygulama sonrasında ise doğru olan öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı ispatlamaya yönelik güçlüğün nedeninin terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K4: Güçlüğü anlayamadığım, tespit edemediğim için nedenini de açıklayamıyorum. Ankette buna da hiçbir şey yazmadım hocam.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K4: Psikolojik neden. Hani kendisinin matematiksel dili kullanmada bir eksikliği var, aslında matematiksel gösterimleri öğrenirse onları kullanabilir.

3a sorusundaki öğrenci problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlük yaşamıştır. 3b sorusunda bu öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni psikolojik ve genetik engeldir. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayının matematiksel dil kullanma güçlüğünün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli açıklama bilgileri betimsel olarak analiz edildiğinde üç öğretmen adayının uygulama öncesi cevapları yanlış iken uygulama sonrasında cevaplarının doğru olduğu görülmektedir. Bir öğretmen adayı da uygulama öncesinde bu soruyu yanıtsız bırakır iken uygulama sonrasında doğru cevap vermiştir.

Problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğünün nedeni olan psikolojik ve genetik engeli açıklama bilgileri uygulama öncesinde yanlış uygulama sonrasında ise doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama öncesinde öğretmen adayı sorudaki öğrencinin yaptığı ispatla tatmin olmuş, herhangi bir güçlük yaşamadığını belirtmiştir. Bu yüzden güçlüğün nedenini de açıklayamamıştır. Uygulama sonrasında öğretmen adayı hem ispatlamaya yönelik güçlüğün nedenini açıklayabilmiş hem de terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K3: Öğrenci güçlük yaşamadığı için güçlüğün nedeni de yok.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K3: Öğrenci akıl yürütemiyor, öğrenciden kaynaklı olduğu için psikolojik neden.

4a sorusundaki öğrenci ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlük yaşamıştır. 4b sorusunda bu öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni pedagojik engeldir. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayının ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüğün nedeni olan pedagojik engeli açıklama bilgileri betimsel olarak analiz edildiğinde bir öğretmen adayının uygulama öncesinde ve sonrasında cevaplarının doğru, iki öğretmen adayının uygulama öncesi cevaplarının yanlış iken uygulama sonrasında cevaplarının doğru, bir öğretmen adayının da uygulama öncesi ve sonrası cevaplarının yanlış olduğu görülmektedir.

İspata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüğün nedeni olan pedagojik engeli açıklama bilgileri uygulama öncesinde ve sonrasında doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama öncesinde öğretmen adayı güçlüğün nedeninin öğretmen kaynaklı olduğunu belirterek uygulama öncesi için yeterli düzeyde doğru cevap vermiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı ispatlamaya yönelik güçlüğün nedeninin terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K1: Önceki öğrenmeleri öğretmen kaynaklı eksik olmuş.
M: Güçlüğün ilk kaynağı kim?
K1: Güçlüğün ilk kaynağı bence öğretmen kaynaklı.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K1: Nedeni şey yani öğretmen kaynaklı. Kalıp kalıp konuşuyoruz ya hani öğretmenler olarak. Payda sıfırsa tanımsız demek gibi. Didaktik yani pedagojik neden.

İspata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüğün nedeni olan pedagojik engeli açıklama bilgileri uygulama öncesinde yanlış uygulama sonrasında ise doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama öncesinde öğretmen adayı güçlüğün nedeni olan ilk kaynağı belirleyememiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı hem ispatlamaya yönelik güçlüğün nedenini açıklayabilmiş hem de terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K4: Öğrenci konuyu bilmiyor, çalışmamış, öğrenci kaynaklı bence.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K4: Sorudaki öğrenci "derste öğrendiğimize göre" dediğine göre öğretmen kaynaklı. Pedagojik (didaktik) neden.

5a sorusundaki öğrenci ispat yöntemleri ile ilgili güçlük yaşamıştır. 5b sorusunda bu öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni epistemolojik engeldir. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayının ispat yöntemleri ile ilgili güçlüğün nedeni olan epistemolojik engeli açıklama bilgileri betimsel olarak analiz edildiğinde üç öğretmen adayının da uygulama öncesinde cevaplarının yanlış uygulama sonrasında cevaplarının doğru olduğu, bir öğretmen adayının da uygulama öncesi ve sonrası cevaplarının yanlış olduğu görülmektedir.

İspat yöntemleri ile ilgili güçlüğün nedeni olan epistemolojik engeli açıklama bilgileri uygulama öncesinde yanlış uygulama sonrasında ise doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı hem ispatlamaya yönelik güçlüğün nedenini açıklayabilmiş hem de terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K1: Hocam yöntemi yani tam olarak kafasına yatıramamış.
M: Güçlüğün neden kaynaklanıyor ilk olarak sence?
K1:Güçlüğün ilk kaynağı burada öğrenci kaynaklı. Öğrenci dersi dinlememiş. Anlamamış kendisi.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K1: İspat yönteminin kendinden kaynaklı. Tümevarıma özel bir şey. Bunun nedeni yani epistemolojik neden.

Buraya kadar olan kısımda anket ve mülakatların analizinden ders tasarımının bu kazanıma etkisi açıkça görülmektedir. Ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgilerine etkisi nicel ve nitel bulgularla desteklenmiştir.

4.5.1.2.3. Ders Tasarımının "Öğretmen Adayı İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerinin Üstesinden Gelecek Öğretim Stratejilerini Belirler" Kazanımına Etkisine Dair Bulgular

Bu kısımda ders tasarımının öğretmen adaylarının Kazanım 5'e ulaşma durumlarına etkisi incelenmiştir.

Kazanım 5: Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirler.

Bu kapsamda aşağıdaki soruya cevap aranmıştır.

Ders tasarımı "*Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirler*" kazanımına nasıl etki etmiştir?

Dersin uygulamasından önce ve sonra 22 öğretmen adayının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini ölçmek amacıyla geliştirilmiş olan İSPABA'ne verdikleri cevaplar analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır. Bu anketle birlikte öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgileri dört bileşende incelenmek istenmiştir. Üçüncü olarak ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgilerine etkisi incelenmiştir. Bu ankette bu bileşenlerden biri olan öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirlemeleriyle ilgili beş soru yer almıştır. Bu anketin birinci kısmındaki 1c, 2c, 3c, 4c ve 5c soruları öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleyip belirlemediklerini ölçmek amacıyla hazırlanmıştır. Anketten elde edilen nitel veriler analiz edilerek nicel bulgulara ulaşılmıştır.

22 öğretmen adayının beş soruya vermiş oldukları 110 cevap literatürden derlenen öğretim stratejileri (yineleme-pekiştirme stratejileri, anlamlandırma stratejileri, cebirsel gösterim, akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme, DGY veya grafik çizimi) çerçevesinde analiz edilmiş ve doğru, yanlış

ve yanıtsız olarak kodlanmıştır. Doğru cevaplar 1 puan, yanlış ve yanıtsız kabul edilen cevaplar 0 puan olarak puanlanmıştır. 22 öğretmen adayının kendilerine sorulan ispatlamaya yönelik beşer öğrenci güçlüğünün üstesinden gelecek öğretim stratejisini tespit etme sorularına verdikleri 110 cevabın doğru, yanlış ve yanıtsız cevap frekansları, yüzdeleri ve puanları Tablo 4.44'de verilmiştir. 22 öğretmen adayının anketten bu bileşende alabileceği toplam puan 110 (22x5) puandır.

Tablo 4.44. Öğretmen Adaylarının *İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerinin Üstesinden Gelecek Öğretim Stratejilerini Belirleme Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Frekans, Yüzde ve Puan Dağılımı

Kategori		Doğru	Yanlış	Yanıtsız	Toplam
Uygulama Öncesi	**f (%)**	20 (18,18)	74 (67,27)	16 (14,55)	110 (100,00)
	p (%)	20 (18,18)	0 (0,00)	0 (0,00)	**20 (18,18)**
Uygulama Sonrası	**f (%)**	96 (87,27)	14 (12,73)	0 (0,00)	110 (100,00)
	p (%)	96 (87,27)	0 (12,73)	0 (0,00)	**96 (87,27)**

Öğretmen adaylarının aldığı puanlar doğru sayılarına eşittir.

Tablo 4.44'de görüldüğü gibi 22 öğretmen adayının beş soruya vermiş oldukları toplam 110 cevaptan uygulama öncesi doğru cevap sayısı 20, yüzdesi 18,18, yanlış cevap sayısı 74, yüzdesi 67,27 ve yanıtsız cevap sayısı 16, yüzdesi 14,55'dir. Uygulama sonrası ise doğru cevap sayısı 96, yüzdesi 87,27 ve yanlış cevap sayısı 14, yüzdesi 12,73'dir. Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejileri bilgisi bileşeninden aldıkları puanlar doğru cevap sayılarıyla eşdeğerdir. Öğretmen adaylarının uygulama sonrası doğru sayıları uygulama öncesine göre 76 sayı, puanları 76 puan, doğru ve puan yüzdeleri ise %69,09 artmıştır. Bu artışlar ders tasarımının bu kazanıma etkisini ortaya koymaktadır. Dersin uygulamasından sonra 22 öğretmen adayının Kazanım 5'e ulaşma yüzdesi %87,27 gibi çok yüksek bir orana ulaşmıştır.

Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgilerine dair uygulama öncesi ve sonrası ortalama, standart sapma, minimum ve maksimum puanları Tablo 4.45'de verilmiştir. Ortalama, minimum ve maksimum puanlar 5 puan (5x1) üzerinden değerlendirilmiştir.

Tablo 4.45. Öğretmen Adaylarının *İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerinin Üstesinden Gelecek Öğretim Stratejilerini Belirleme Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Ortalama, Standart Sapma, Minimum ve Maksimum Puanları

	N	$\bar{x}$	ss	Min	Max
Uygulama Öncesi	22	0,91	0,92	0,00	3,00
Uygulama Sonrası	22	4,36	0,85	3,00	5,00

Bir öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgisi bileşeninde İSPABA'ndeki kendisine sorulan beş sorudan en fazla 5 (5x1) puan alabilmektedir. 22 öğretmen adayının uygulama öncesi anketten aldığı puanların ortalaması 0,91 gibi çok düşük bir oran iken uygulama sonrasında 4,36 gibi çok yüksek bir orana yükselmiştir. Öğretmen adaylarının uygulama sonrası ortalama puanları uygulama öncesine göre 5 tam puan üzerinden 3,45 puan artmıştır. Yine tablodan uygulama öncesi standart sapmanın 0,92, uygulama sonrası standart sapmanın 0,85 olduğu görülmektedir. Uygulama öncesinde 22 öğretmen adayından ankette minimum puan alan öğretmen adayının puanı 0,00 iken, uygulama sonrasında 22 öğretmen adayından ankette minimum puan alan öğretmen adayının puanı 3,00'dır. Yine uygulama öncesinde 22 öğretmen adayından ankette maksimum puan alan öğretmen adayının puanı 3,00 iken, uygulama sonrasında 22 öğretmen adayından ankette maksimum puan alan öğretmen adayının puanı 5,00'dır. Buradan ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgilerine ait minimum ve maksimum puanları artırdığı söylenebilir.

Tablo 4.44 ve Tablo 4.45'den öğretmen adaylarının uygulamadan önce öğrencilerin ispatlamaya yönelik yaşadıkları güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirlemede büyük sıkıntı yaşadıkları görülmektedir. İspat öğretimi için ispatlamaya yönelik güçlüklerin üstesinden gelecek uygun öğretim stratejilerini belirlemenin önemi büyüktür. Öğretmen adayları ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit edemedikleri ve bu güçlüklerin nedenlerini açıklayamadıkları için uygun öğretim stratejilerini de belirleyememişlerdir. Buradan bu üç bilgi türünün birbirini doğrudan etkilediği söylenebilir. Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini doğru tespit etme sayısı 96, uygun öğretim stratejisini belirleme sayısı da 96'dır. Bu bulgu burada bahsedilen ilişkiyi yeterince ortaya koymaktadır. Ayrıca uygulamadan sonra öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgilerinin, bu güçlüklerin nedenlerini açıklama bilgilerinin ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgilerinin birlikte ve benzer oranlarda artmış olması bu üç bilgi türünün arasındaki bağı ortaya çıkarmaktadır. Uygulama öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğretim stratejileri bilgilerini arttırmış ve dolayısıyla uygulamadan önce yaşadıkları sıkıntıları aşmışlardır. Buradan ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejileri bilgilerini geliştirdiği söylenebilir. Yani ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme puanlarına olumlu etkisi olduğu söylenebilir.

Ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olup olmadığını saptamak için veri analiz yöntemi olarak uygulanan Wilcoxon İşaretli Sıralar Testinin (Wilcoxon, 1945) çıktıları Tablo 4.46'da verilmiştir.

Tablo 4.46. Öğretmen Adaylarının *İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerinin Üstesinden Gelecek Öğretim Stratejilerini Belirleme Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Wilcoxon İşaretli Sıralar Test Çıktıları Tablosu

Uygulama Sonrası-Uygulama-Öncesi	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	Z	p
Negatif Sıralar	0^a	0,00	0,00	-4,057*	<0,001
Pozitif Sıralar	21^b	11,00	231,00		
Eşit	1^c				

* Negatif Sıralar Temeline Dayalı, ^{a} uygulama sonrası puan < uygulama öncesi puan, ^{b} uygulama sonrası puan > uygulama öncesi puan, ^{c} uygulama sonrası puan = uygulama öncesi puan.

Tablo 4.46'dan da görüldüğü gibi test çıktıları ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olduğunu $(Z = -4{,}057, p < 0{,}001)$ göstermektedir. Fark puanlarının sıra ortalamalarına ve sıra toplamlarına bakıldığında istatistiksel olarak anlamlı bulunan bu etkinin pozitif sıralar yani uygulama sonrası lehine olduğu görülmektedir. Ayrıca tablodan 21 öğretmen adayının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme puanlarının uygulama sonrasında arttığı görülmektedir. Hiçbir öğretmen adayının uygulama sonrası puanında düşüş olmazken sadece 1 öğretmen adayının uygulama öncesi ve sonrası puanı aynı kalmıştır.

Anlamlı etki büyüklüğü $r = \frac{Z}{\sqrt{n}} = \frac{-4,057}{\sqrt{22}} = -0,87$ olarak hesaplanmıştır. İşaretine bakılmaksızın (mutlak değeriyle) yorumlanan etki büyüklüğü $0,87 \geq 0,5$ olduğundan ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme puanlarına uygulama sonrası lehine büyük etkisi olduğu (Cohen, 1988) söylenebilir.

Son olarak öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgilerine dair uygulama öncesi ve sonrasına ait soru bazlı frekans ve yüzde dağılımı Tablo 4.47'de verilmiştir.

Tablo 4.47. Öğretmen Adaylarının *İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerinin Üstesinden Gelecek Öğretim Stratejilerini Belirleme Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Soru Bazlı Frekans ve Yüzde Dağılımı

Soru Numarası	Strateji Tipi	Kategori	Uygulama Öncesi		Uygulama Sonrası	
			f	%	f	%
1c	Pekiştirme	Doğru	8	36,36	22	100,00
		Yanlış	14	63,64	0	0,00
		Yanıtsız	0	0,00	0	0,00
2c	Cebirsel gösterim	Doğru	3	13,64	19	86,36
		Yanlış	15	68,18	3	13,64
		Yanıtsız	4	18,18	0	0,00
3c	Problem çözme	Doğru	2	9,09	19	86,36
		Yanlış	13	59,09	3	13,64
		Yanıtsız	7	31,82	0	0,00
4c	DGY ve grafik çizimi	Doğru	4	18,18	18	81,82
		Yanlış	14	63,64	4	18,18
		Yanıtsız	4	18,18	0	0,00
5c	Anlamlandırma	Doğru	3	13,64	18	81,82
		Yanlış	18	81,82	4	18,18
		Yanıtsız	1	4,55	0	0,00

Öğretmen adaylarının bu bileşendeki uygulama öncesi bilgileri istenilen düzeyde değildir. Öğretmen adaylarının pekiştirme stratejisini, cebirsel gösterim stratejisini, akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme stratejisini, DGY ve grafik çizimi stratejisini ve anlamlandırma stratejisini belirleme bilgileri uygulama sonrasında gelişmiştir. Bu yönüyle ders tasarımının öğretmen adaylarının pekiştirme stratejisini, cebirsel gösterim stratejisini, akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme stratejisini, DGY ve grafik çizimi stratejisini ve anlamlandırma stratejisini belirleme bilgilerine etkisinin olduğu görülmektedir.

1a sorusundaki öğrenci ispatın doğasını kavrama güçlüğü yaşamıştır. 1c sorusundaki öğretim stratejisi pekiştirme stratejisidir. İspatın ne olduğunu, ne olmadığını, işlevlerini, doğasını bilmeyen öğrenciler için tüm bunlar öğretmen tarafından pekiştirme (yineleme) stratejisiyle öğrencilere tekrar anlatılmalıdır. İspatın doğasını kavrama güçlüğü için pekiştirme stratejisi en iyi seçimdir. Bu soruda öğretmen adaylarından bu stratejiyi belirlemeleri istenmiştir. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının sekiz tanesi (%36,36) pekiştirme stratejisini belirleme sorusunda doğru cevap vermişlerdir. Örneğin ÖA13 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi doğru cevap vermiştir.

ÖA13: İspatın temel mantığını öğrenciye kavratacak tekrar dersleri işlenmeli.

Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının 14 tanesi (%63,64) pekiştirme stratejisini belirleme sorusunda yanlış cevap vermişlerdir. Bu öğretmen adaylarının bu stratejiyi belirleyememelerinin en büyük sebebi bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğü sadece sorudaki önerme özelinde düşünmelerinden kaynaklanmıştır. Oysaki öğrencinin yaşadığı güçlük daha genel ispatın doğasını kavrayamama güçlüğü olduğu için sadece bu sorudaki önerme özelinde düşünmek öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmeye yetmeyecektir. Örneğin ÖA6 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi yanlış cevap vermiştir. ÖA6 kodlu öğretmen adayı bir strateji belirlemekten çok sadece bu önerme özelinde öğrencinin öğrenmesine yönelik bir müdahale düşünmüştür.

ÖA6: Üçe bölünebilme kuralı anlatılmalı. Böylece iki sayı üçe bölünüyorsa farkının da üçe bölüneceğini daha iyi ispatlar.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının tamamı pekiştirme stratejisini belirleme sorusunda başarılı olmuşlardır. Üstelik onlar bu güçlüğü terminolojik ismine atıf yaparak tespit etmişlerdir. ÖA13 ve ÖA6 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki doğru cevapları aşağıdadır.

ÖA13: Öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmek için pekiştirme stratejisi uygulanmalı.

ÖA6: Pekiştirme (yineleme) stratejisi.

2a sorusundaki öğrenci matematiksel dil kullanımında güçlük yaşamıştır. 2c sorusundaki öğretim stratejisi cebirsel gösterim stratejisidir. İspatların cebirsel ifadelerle nasıl oluşturulduğu yani ispatlama dili öğrencilere izah edilmelidir. Bu soruda öğretmen adaylarından bu stratejiyi belirlemeleri istenmiştir. Matematiksel dil kullanımındaki güçlüğün üstesinden gelmek için cebirsel gösterim stratejisi iyi bir seçimdir. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının yalnızca üç tanesi (%13,64) cebirsel gösterim stratejisini belirleme sorusunda doğru cevap vermişlerdir. Örneğin ÖA16 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi doğru cevap vermiştir.

ÖA16: İspatlama cebirsel ifadelerle öğretilmeli.

Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının 15 tanesi (%68,18) cebirsel gösterim stratejisini belirleme sorusunda yanlış cevap vermişlerdir. Kalan dört (%18,18) öğretmen adayı da bu soruyu yanıtsız bırakmışlardır. Bu öğretmen adaylarının bu stratejiyi belirleyememelerinin en büyük sebebi bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğü tespit edememelerinden kaynaklanmıştır. Örneğin ÖA3 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi yanlış cevap vermiştir. ÖA3 kodlu öğretmen adayı öğrencinin yaşadığı güçlüğün geometri bilgisindeki eksikliklerden kaynaklandığını düşündüğü için yanlış cevap vermiştir.

ÖA3: Üçgenlerde açılar ve çevrel çember konusu üzerinde durularak geometrik düşünme kazandırılmalı.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu (%86,36) cebirsel gösterim stratejisini belirleme sorusunda başarılı olmuşlardır. Üstelik onlar bu güçlüğü terminolojik ismine atıf yaparak tespit etmişlerdir. ÖA16 ve ÖA3 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki doğru cevapları aşağıdadır.

ÖA16: Cebirsel gösterim stratejisi.

ÖA3: Belirlediğim strateji cebirsel gösterim.

3a sorusundaki öğrenci problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlük yaşamıştır. Problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlükler üstesinden gelinmesi zor, zahmetli ve zaman alan güçlüklerdir. Öğretmenler bu güçlüğün üstesinden gelmek ve öğrencilerine bu becerileri kazandırmak için farklı problemler çözmelidirler. 3c sorusundaki öğretim stratejisi akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme stratejisidir.

Bu soruda öğretmen adaylarından bu stratejiyi belirlemeleri istenmiştir. Problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğün üstesinden gelmek için akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme stratejisi iyi bir seçimdir. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının yalnızca iki tanesi (%9,09) akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme stratejisini belirleme sorusunda doğru cevap vermişlerdir. Örneğin ÖA15 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi doğru cevap vermiştir.

ÖA15: Nihai bir sonuca ulaşma becerisi kazandıracak farklı sorular çözülmeli.

Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının 13 tanesi (%59,09) akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme stratejisini belirleme sorusunda yanlış cevap vermişlerdir. Kalan yedi (%31,82) öğretmen adayı da bu soruyu yanıtsız bırakmışlardır. Bu öğretmen adaylarının bu stratejiyi belirleyememelerinin en büyük sebebi bu sorudaki öğrencinin yaptığı ispatın doğru olduğunu yani bir güçlük yaşamadığını düşünmeleridir. Örneğin ÖA4 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi yanlış cevap vermiştir.

ÖA4: Öğrenci bu soruda güçlük yaşamamış. O yüzden bir öğretim stratejisi belirlemek gerekmez. Sadece daha düzenli yazabilir.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu (%86,36) problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğün üstesinden gelmek için akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme stratejisini belirleme sorusunda başarılı olmuşlardır. Üstelik onlar bu güçlüğü terminolojik ismine atıf yaparak tespit etmişlerdir. ÖA15 ve ÖA4 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki doğru cevapları aşağıdadır.

ÖA15: Matematiksel akıl yürütmeyi güçlendirecek farklı problemler çözme stratejisi.

ÖA4: Problem çözme becerisi ve tümevarımcı akıl yürütmeyi geliştirecek farklı problemler çözme.

4a sorusundaki öğrenci ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlük yaşamıştır. 4c sorusundaki DGY ve grafik çizimi stratejisidir. $u \to v$ iken $\frac{1}{(u-v)^2}$ ifadesinin grafiği çizilirse görselleştirme aracılığıyla öğrencilerin öğrenmelerine yardımcı olabilir. Bu soruda öğretmen adaylarından bu stratejiyi belirlemeleri istenmiştir. Bu sorudaki güçlüğün üstesinden gelmek için DGY ve grafik çizimi stratejisi iyi bir seçimdir. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının yalnızca dört tanesi (%18,18) DGY ve grafik çizimi stratejisini belirleme sorusunda doğru cevap vermişlerdir. Örneğin ÖA3 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi doğru cevap vermiştir.

ÖA3: Limit ve süreklilik konusu görselleştirilerek işlenmelidir.

Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının 14 tanesi (%63,64) DGY ve grafik çizimi stratejisini belirleme sorusunda yanlış cevap vermişlerdir. Kalan dört (%18,18) öğretmen adayı da bu soruyu yanıtsız bırakmışlardır. Bu öğretmen adaylarının bu stratejiyi belirleyememelerinin en büyük sebebi öğretmen adaylarının limit konusu ile ilgili kendi eksikliklerinden kaynaklanmıştır. Örneğin ÖA21 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi yanlış cevap vermiştir.

ÖA21: Bu konuyla alakalı testlerle pekiştirilmeli.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu (%81,82) DGY ve grafik çizimi stratejisini belirleme sorusunda başarılı olmuşlardır. Üstelik onlar bu güçlüğü terminolojik ismine atıf yaparak tespit etmişlerdir. ÖA3 ve ÖA21 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki doğru cevapları aşağıdadır.

ÖA3: DGY ve grafik çizimi stratejisi.

ÖA21: DGY ve grafik çizimi stratejisi ile güçlüğün üstesinden gelinebilir.

5a sorusundaki öğrenci ispat yöntemleri ile ilgili güçlük yaşamıştır. Bu sorudaki güçlük ispat yöntemlerini bilmek veya uygulamaktan ziyade anlamlandırmaktır. Tümevarım yönteminin basamaklarını anlamlandıramayan öğrenciler için bu basamakları anlamlandırmalarına yardımcı olabilecek örneğin simülasyon gibi anlamlandırma stratejileri etkili olabilir. 5c sorusundaki öğretim stratejisi anlamlandırma stratejisidir. Bu soruda öğretmen adaylarından bu stratejiyi belirlemeleri istenmiştir. Bu sorudaki gibi tümevarım yönteminin basamaklarını zihinlerinde anlamlandıramayan öğrenciler için anlamlandırma stratejisi iyi bir seçimdir. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının yalnızca üç tanesi (%13,64) anlamlandırma stratejisini belirleme sorusunda doğru cevap vermişlerdir. Örneğin ÖA1 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi doğru cevap vermiştir.

ÖA1: Her tam sayı için önermenin doğru olmasının bir önceki tam sayı için doğru olmasına bağlı olduğu öğrenciye mantıksal olarak (domino taşı gibi) algılatılmalı, yani tümevarımın mantığı öğretilmeli.

Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının 18 tanesi (%81,82) anlamlandırma stratejisini belirleme sorusunda yanlış cevap vermişlerdir. Kalan bir (%4,55) öğretmen adayı da bu soruyu yanıtsız bırakmışlardır. Bu öğretmen adaylarının bu stratejiyi belirleyememelerinin en büyük sebebi bu sorudaki öğrencinin ispatın basamaklarını zihninde anlamlandıramadığını tespit edemediklerinden kaynaklanmıştır. Örneğin ÖA9 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesinde bu soruya aşağıdaki gibi yanlış cevap vermiştir.

ÖA9: Bu güçlüğün farklı örnekler çözerek üstesinden gelinir.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu (%81,82) anlamlandırma stratejisini belirleme sorusunda başarılı olmuşlardır. Üstelik onlar bu güçlüğü terminolojik ismine atıf yaparak tespit etmişlerdir. ÖA1 ve ÖA9 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki doğru cevapları aşağıdadır.

ÖA1: Anlamlandırma stratejileri (model kullanımı gibi)

ÖA9: Anlamlandırma stratejisi

Şimdi de dört öğretmen adayıyla yapılan yarı yapılandırılmış mülakatların bulgularına değinelim. Dört öğretmen adayının uygulama öncesi ve sonrası yapılan yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgileri Tablo 4.48'de verilmiştir.

Tablo 4.48. Dört Öğretmen Adayının *İspatlamaya Yönelik Öğrenci Güçlüklerinin Üstesinden Gelecek Öğretim Stratejilerini Belirleme Bilgilerine* Ait Yarı Yapılandırılmış Mülakat Bulguları

	Yarı Yapılandırılmış Mülakat									
Öğretmen Adayı Kodu	Uygulama Öncesi					Uygulama Sonrası				
	1c	2c	3c	4c	5c	1c	2c	3c	4c	5c
K1	D	D	Y	Y	Y	D	D	D	D	D
K2	D	D	Y	Y	Y	D	D	D	D	D
K3	Y	Y	Y	Y	Y	D	Y	D	D	D
K4	Y	B	B	Y	Y	D	D	D	D	Y

D: Doğru Y: Yanlış B: Yanıtsız

Yarı yapılandırılmış mülakatlardan ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgilerine etkisi görülmektedir. Özellikle problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğünün üstesinden gelecek akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme stratejisini, ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüğün üstesinden gelecek DGY ve grafik çizimi stratejisini ve ispat yöntemleri ile ilgili güçlüğün üstesinden gelecek anlamlandırma stratejisini belirleme bilgilerine etkisi açıkça görülmektedir.

1a sorusundaki öğrenci ispatın doğasını kavrama güçlüğü yaşamıştır. 1b sorusunda bu öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni psikolojik ve genetik engeldir. 1c sorusundaki öğretim stratejisi pekiştirme (yineleme) stratejisidir. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayının bu sorudaki ispatın doğasını kavrama güçlüğünün üstesinden gelecek pekiştirme stratejisini belirleme bilgileri betimsel olarak analiz edildiğinde iki öğretmen adayının uygulama öncesinde ve sonrasında cevaplarının doğru, iki öğretmen adayının da uygulama öncesi cevapları yanlış iken uygulama sonrasında ise cevaplarının doğru olduğu görülmektedir.

Pekiştirme stratejisini belirleme bilgileri uygulama öncesinde ve sonrasında doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmek için nasıl bir öğretim stratejisi belirlenebilir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K2: Öncelikle ispatın ne olduğunu öğrenmesi ve anlaması lazım. O yüzden ispat konusunu, ispatın özelliklerini tekrar anlatırım. İspat budur, bu şekilde yapılır gibi.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmek için nasıl bir öğretim stratejisi belirlenebilir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K2: Pekiştirme stratejisini uygulardım.
M: Neyi pekiştirirdin?
K2: İspat doğasını, özelliklerini, ne olup ne olmadığını, nasıl yapıldığını.

Pekiştirme stratejisini belirleme bilgileri uygulama öncesinde yanlış uygulama sonrasında ise doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama öncesinde öğretmen adayı bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğü doğru tespit edemediği için öğretim stratejisini de doğru belirleyememiştir.

Uygulama sonrasında öğretmen adayı hem öğretim stratejisini belirleyebilmiş hem de terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmek için nasıl bir öğretim stratejisi belirlenebilir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K3: Paranteze almamış. Matematiksel işlemlerin nasıl yapılacağını anlatırdım. Ortak çarpan parantezine almayı öğretirdim.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmek için nasıl bir öğretim stratejisi belirlenebilir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K3: Öncelikle ispatın doğasını kavraması lazım. İspatın doğasını pekiştirirdim. Pekiştirme (yineleme) stratejisi.

2a sorusundaki öğrenci matematiksel dil kullanımında güçlük yaşamıştır. 2b sorusunda bu öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni psikolojik ve genetik engeldir. 2c sorusundaki öğretim stratejisi cebirsel gösterim stratejisidir. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayının bu sorudaki matematiksel dil kullanımına dair güçlüğün üstesinden gelecek cebirsel gösterim stratejisini belirleme bilgileri betimsel olarak analiz edildiğinde iki öğretmen adayının uygulama öncesinde ve sonrasında cevaplarının doğru, bir öğretmen adayının da uygulama öncesi ve sonrası cevaplarının yanlış olduğu görülmektedir. Bir öğretmen adayı da uygulama öncesinde bu soruyu yanıtsız bırakır iken uygulama sonrasında doğru cevap vermiştir.

Cebirsel gösterim stratejisini belirleme bilgileri uygulama öncesinde ve sonrasında doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmek için nasıl bir öğretim stratejisi belirlenebilir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K1: Yazdıklarını sözel olarak değil de sayısal olarak ifade etmeyi öğretirdim.
M: Sayısal derken?
K1: Yani ispatı matematiksel ifadelerle yapmayı öğretirdim.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmek için nasıl bir öğretim stratejisi belirlenebilir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K1: İyi bir ispat hem matematiksel hem de sözel ifadeler içermeli. Burada eksik olan matematiksel ifadeler. O zaman gerekli olan strateji cebirsel gösterim stratejisidir.

Bu soruyu uygulama öncesinde yanıtsız bırakıp uygulama sonrasında ise doğru cevap veren bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı hem öğretim stratejisini doğru belirlemiş hem de terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmek için nasıl bir öğretim stratejisi belirlenebilir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K4: Öğretim stratejisi…
M: Güçlüğe ve nedenine cevap veremediniz.
K4: Evet Hocam. Stratejiyi de belirleyemiyorum.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmek için nasıl bir öğretim stratejisi belirlenebilir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K4: Psikolojik nedenli matematiksel dil kullanımına dair güçlük yaşadığı için cebirsel gösterim stratejisi belirlenmeli.

3a sorusundaki öğrenci problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlük yaşamıştır. 3b sorusunda bu öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni psikolojik ve genetik engeldir. 3c sorusundaki öğretim stratejisi akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme stratejisidir. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayının bu sorudaki problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğünün üstesinden gelecek akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme stratejisini belirleme bilgileri betimsel olarak analiz edildiğinde üç öğretmen adayının uygulama öncesinde cevaplarının yanlış uygulama sonrasında cevaplarının yanlış olduğu görülmektedir. Bir öğretmen adayı da uygulama öncesinde bu soruyu yanıtsız bırakır iken uygulama sonrasında doğru cevap vermiştir.

Akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme stratejisini belirleme bilgileri uygulama öncesinde yanlış uygulama sonrasında ise doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama öncesinde öğretmen adayı bu sorudaki öğrencinin herhangi bir güçlük yaşamadığını düşündüğü için öğretim stratejisini de doğru belirleyememiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı hem öğretim stratejisini belirleyebilmiş hem de terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmek için nasıl bir öğretim stratejisi belirlenebilir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi) Gerçi sorudaki öğrencinin güçlük yaşamadığını düşünüyorsun ama?
K3: Yani ispat tamam. Stratejiden ziyade daha düzenli yazmasını tavsiye edebilirim. Biraz karmaşık yazmış.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmek için nasıl bir öğretim stratejisi belirlenebilir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)

K3: Öğrenciyi I adımından II adımına ulaştıracak akıl yürütme ve problem çözme becerisine ihtiyacı var. Bu yüzden akıl yürütmeyi ve tümevarımcı düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme stratejisi gerekli.

4a sorusundaki öğrenci ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlük yaşamıştır. 4b sorusunda bu öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni pedagojik engeldir. 4c sorusundaki öğretim stratejisi DGY ve grafik çizimi stratejisidir. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayının bu sorudaki ispata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlüğün üstesinden gelecek DGY ve grafik çizimi stratejisini belirleme bilgileri betimsel olarak analiz edildiğinde dört öğretmen adayının da uygulama öncesi cevapları yanlış iken uygulama sonrasında ise cevaplarının doğru olduğu görülmektedir.

DGY ve grafik çizimi stratejisini belirleme bilgileri uygulama öncesinde yanlış uygulama sonrasında ise doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı hem öğretim stratejisini doğru belirleyebilmiş hem de terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmek için nasıl bir öğretim stratejisi belirlenebilir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K4: Sonsuzluk kavramını öğretirdim. $+\infty$ ve $-\infty$ kavramları ile ilgili soru çözerdim.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmek için nasıl bir öğretim stratejisi belirlenebilir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K4: Öğretmen olarak kendi eksiklerimizden sıyrılmamız gerek. Grafik üzerinde dinamik geometri yazılımları ile limiti anlatabilirsek sorunu aşmış oluruz. O yüzden DGY ve grafik çizimi stratejisini seçerdim.

5a sorusundaki öğrenci ispat yöntemleri ile ilgili güçlük yaşamıştır. 5b sorusunda bu öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni epistemolojik engeldir. 5c sorusundaki öğretim stratejisi anlamlandırma stratejisidir. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayının bu sorudaki ispat yöntemleri ile ilgili güçlüğün üstesinden gelecek anlamlandırma stratejisini belirleme bilgileri betimsel olarak analiz edildiğinde üç öğretmen adayının uygulama öncesi cevapları yanlış iken uygulama sonrasında ise cevaplarının doğru olduğu görülmektedir. Bir öğretmen adayının da hem uygulama öncesi hem de uygulama sonrası cevapları yanlıştır.

Anlamlandırma stratejisini belirleme bilgileri uygulama öncesinde yanlış uygulama sonrasında ise doğru olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Uygulama sonrasında öğretmen adayı hem öğretim stratejisini doğru belirleyebilmiş hem de terminolojik ismine atıf yapabilmiştir.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmek için nasıl bir öğretim stratejisi belirlenebilir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K2: İspatlayacağı konu ile ilgili önermeleri anlatırdım. Önermeleri öğrenmesi gerek. Önermeleri bilmezse ispatlama yapamaz.

M: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmek için nasıl bir öğretim stratejisi belirlenebilir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K2: Yaşadığı güçlük ispat yöntemleri ile ilgili. Aslında tümevarımın basamaklarını anlamlandıramıyor. Bu yüzden anlamlandırma stratejisi belirlerdim.
M: Nasıl anlamlandıracaksın?
K2: Domino taşlarının birbirini düşürmesi gibi simülasyonlarla, model kullanımıyla.

Buraya kadar olan kısımda anket ve mülakatların analizinden ders tasarımının bu kazanıma etkisi açıkça görülmektedir. Ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgilerine etkisi nicel ve nitel bulgularla desteklenmiştir.

4.5.1.2.4. Ders Tasarımının "Öğretmen Adayı Öğrencilerin Sahip Oldukları İspat Şemalarını Bilir ve Tespit Eder" Kazanımına Etkisine Dair Bulgular

Bu kısımda ders tasarımının öğretmen adaylarının Kazanım 6'ya ulaşma durumlarına etkisi incelenmiştir.

Kazanım 6: Öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder.

Bu kapsamda aşağıdaki soruya cevap aranmıştır.

Ders tasarımı "*Öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder*" kazanımına nasıl etki etmiştir?

Dersin uygulamasından önce ve sonra 22 öğretmen adayının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini ölçmek amacıyla geliştirilmiş olan İSPABA'ne verdikleri cevaplar analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır. Bu anketle birlikte öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgileri dört bileşende incelenmek istenmiştir. Son olarak ders tasarımının öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgilerine etkisi incelenmiştir. Bu ankette bu bileşenlerden biri olan öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etmeleriyle ilgili 10 soru yer almıştır. Bu anketin ikinci kısmındaki 10 soru öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit edip edemediklerini ölçmek amacıyla hazırlanmıştır. Ders tasarımından önce katılımcılardan bu senaryodaki 10 öğrencinin *önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını gerekçelendirirken kullandıkları argümanları (gerekçelendirme biçimlerini)* tespit etmeleri istenmiştir. Ders tasarımından sonra ise bu göreve ilave olarak katılımcılardan bu senaryodaki 10 öğrencinin *önermenin doğruluğu ya da yanlışlığını gerekçelendirirken kullandıkları ispat şemalarını Sowder ve Harel'in (1998) çalışmasındaki ana ve alt şemalarına* göre tespit etmeleri de istenmiştir. Anketten elde edilen nitel veriler analiz edilerek nicel bulgulara ulaşılmıştır.

22 öğretmen adayının 10 soruya vermiş oldukları 220 cevap Sowder ve Harel'in (1998) ana ve alt ispat şemalarına göre analiz edilmiş ve cevaplar doğru, yanlış ve yanıtsız olarak kodlanmıştır. Doğru cevaplar 1 puan, yanlış ve yanıtsız kabul edilen cevaplar 0 puan olarak puanlanmıştır. 22 öğretmen adayının kendilerine sorulan 10 öğrencinin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme sorularına verdikleri 220 cevabın doğru, yanlış ve yanıtsız cevap frekansları, yüzdeleri ve puanları Tablo 4.49'da verilmiştir. 22 öğretmen adayının anketten bu bileşende alabileceği toplam puan 220 (22x10) puandır.

Tablo 4.49. Öğretmen Adaylarının *Öğrencilerin Sahip Oldukları İspat Şemalarını Tespit Etme Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Frekans, Yüzde ve Puan Dağılımı

Kategori		Doğru	Yanlış	Yanıtsız	Toplam
Uygulama Öncesi	**f (%)**	135 (61,36)	82 (37,27)	3 (1,36)	220 (100,00)
	p (%)	135 (61,36)	0 (0,00)	0 (0,00)	**135 (61,36)**
Uygulama Sonrası	**f (%)**	212 (96,36)	8 (3,64)	0 (0,00)	220 (100,00)
	p (%)	212 (96,36)	0 (0,00)	0 (0,00)	**212 (96,36)**

Öğretmen adaylarının aldığı puanlar doğru sayılarına eşittir.

Tablo 4.49'da görüldüğü gibi 22 öğretmen adayının 10 soruya vermiş oldukları toplam 220 cevaptan uygulama öncesi doğru cevap sayısı 135, yüzdesi 61,36, yanlış cevap sayısı 82, yüzdesi 37,27 ve yanıtsız cevap sayısı 3, yüzdesi 1,36'dır. Uygulama sonrası ise doğru cevap sayısı 212, yüzdesi 96,36 ve yanlış cevap sayısı 8, yüzdesi 3,64'tür. Öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgisi bileşeninden aldıkları puanlar doğru cevap sayılarıyla eşdeğerdir. Öğretmen adaylarının uygulama sonrası doğru sayıları uygulama öncesine göre 77 sayı, puanları 77 puan, doğru yüzdeleri ise %35,00 artmıştır. Bu artışlar ders tasarımının bu kazanıma etkisini ortaya koymaktadır. Dersin uygulamasından sonra 22 öğretmen adayının Kazanım 6'ya ulaşma yüzdesi %96,36 gibi çok yüksek bir orana ulaşmıştır.

Öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgilerine dair uygulama öncesi ve sonrası ortalama, standart sapma, minimum ve maksimum puanları Tablo 4.50'de verilmiştir.

Tablo 4.50. Öğretmen Adaylarının *Öğrencilerin Sahip Oldukları İspat Şemalarını Tespit Etme Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Ortalama, Standart Sapma, Minimum ve Maksimum Puanları

	N	$\bar{x}$	ss	Min	Max
Uygulama Öncesi	22	6,14	1,49	3,00	9,00
Uygulama Sonrası	22	9,64	0,58	8,00	10,00

Bir öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgisi bileşeninde İSPABA'ndeki kendisine sorulan 10 sorudan en fazla 10 (10x1) puan alabilmektedir. 22 öğretmen adayının uygulama öncesi anketten aldığı puanların ortalaması 6,14 iken uygulama sonrasında 9,64 gibi çok yüksek bir orana yükselmiştir. Öğretmen adaylarının uygulama sonrası ortalama puanları uygulama öncesine göre 10 tam puan üzerinden 3,50 puan artmıştır. Yine tablodan uygulama öncesi standart sapmanın 1,49, uygulama sonrası standart sapmanın 0,58 olduğu görülmektedir. Uygulama öncesinde 22 öğretmen adayından ankette minimum puan alan öğretmen adayının puanı 3,00 iken, uygulama sonrasında 22 öğretmen adayından ankette minimum puan alan öğretmen adayının puanı 8,00'dır. Yine uygulama öncesinde 22 öğretmen adayından ankette maksimum puan alan öğretmen adayının puanı 9,00 iken, uygulama sonrasında 22 öğretmen adayından ankette maksimum puan alan öğretmen adayının puanı 10,00'dır. Buradan ders tasarımının öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgilerine ait minimum ve maksimum puanları artırdığı söylenebilir.

Tablo 4.49 ve Tablo 4.50'den öğretmen adaylarının uygulamadan önce öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etmede istenen seviyede olmadıkları görülmektedir. Etkili ispat öğretimi için öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit edip onları analitik seviyeye çıkarmaları gerekmektedir. Uygulama öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgilerini arttırmış ve dolayısıyla uygulamadan önce yaşadıkları sıkıntıları aşmışlardır. Buradan ders tasarımının öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgilerini geliştirdiği söylenebilir. Yani ders tasarımının öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme puanlarına olumlu etkisi olduğu söylenebilir. Ayrıca öğretmen adaylarının ispat şemalarına dönük pedagojik alan bilgilerinin gelişiminde dikkat edilmesi gereken diğer bir husus da öğretmen adaylarından uygulama öncesi öğrencilerin kullandıkları argümanları (gerekçelendirme biçimlerini) uygulama sonrası ise bu göreve ilave olarak öğrencilerin ana ve alt ispat şemalarını tespit etmelerinin istenmiş olmasıdır.

Ders tasarımının öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olup olmadığını saptamak için veri analiz yöntemi olarak uygulanan Wilcoxon İşaretli Sıralar Testinin (Wilcoxon, 1945) çıktıları Tablo 4.51'de verilmiştir.

Tablo 4.51. Öğretmen Adaylarının *Öğrencilerin Sahip Oldukları İspat Şemalarını Tespit Etme Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Wilcoxon İşaretli Sıralar Test Çıktıları Tablosu

Uygulama Sonrası-Uygulama-Öncesi	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	Z	p
Negatif Sıralar	0^a	0,00	0,00	-4,144*	<0,001
Pozitif Sıralar	22^b	11,50	253,00		
Eşit	0^c				

* Negatif Sıralar Temeline Dayalı, [a] uygulama sonrası puan < uygulama öncesi puan, [b] uygulama sonrası puan > uygulama öncesi puan, [c] uygulama sonrası puan = uygulama öncesi puan.

Tablo 4.51'den de görüldüğü gibi test çıktıları ders tasarımının öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olduğunu $(Z = -4{,}144, p < 0{,}001)$ göstermektedir. Fark puanlarının sıra ortalamalarına ve sıra toplamlarına bakıldığında istatistiksel olarak anlamlı bulunan bu etkinin pozitif sıralar yani uygulama sonrası lehine olduğu görülmektedir. Ayrıca tablodan öğretmen adaylarının tamamının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme puanlarını uygulama sonrasında arttırdığı görülmektedir.

Anlamlı etki büyüklüğü $r = \frac{Z}{\sqrt{n}} = \frac{-4{,}144}{\sqrt{22}} = -0{,}88$ olarak hesaplanmıştır. İşaretine bakılmaksızın (mutlak değeriyle) yorumlanan etki büyüklüğü $0{,}88 \geq 0{,}5$ olduğundan ders tasarımının öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme puanlarına uygulama sonrası lehine büyük etkisi olduğu (Cohen, 1988) söylenebilir.

Son olarak öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgilerine dair uygulama öncesi ve sonrasına ait soru bazlı frekans ve yüzde dağılımı Tablo 4.52'de verilmiştir.

Tablo 4.52. Öğretmen ***Adaylarının Öğrencilerin Sahip Oldukları İspat Şemalarını Tespit Etme Bilgilerine*** **Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Soru Bazlı Frekans ve Yüzde Dağılımı**

Senaryodaki Öğrenci Numarası	Senaryodaki İspat Şeması	Kategori	Uygulama Öncesi		Uygulama Sonrası	
			f	%	f	%
1	Dışsal/Otoriter	Doğru	19	86,36	18	81,82
		Yanlış	2	9,09	4	18,18
		Yanıtsız	1	4,55	0	0,00
2	Dışsal/Otoriter	Doğru	19	86,36	22	100,00
		Yanlış	3	13,64	0	0,00
		Yanıtsız	0	0,00	0	0,00
3	Deneysel/Algısal	Doğru	17	77,27	22	100,00
		Yanlış	5	22,73	0	0,00
		Yanıtsız	0	0,00	0	0,00
4	Dışsal/Ritüel	Doğru	18	81,82	22	100,00
		Yanlış	4	18,18	0	0,00
		Yanıtsız	0	0,00	0	0,00
5	Dışsal/Sembolik	Doğru	0	0,00	20	90,91
		Yanlış	22	100,00	2	9,09
		Yanıtsız	0	0,00	0	0,00
6	Deneysel/Örnek-temelli	Doğru	21	95,46	22	100,00
		Yanlış	1	4,55	0	0,00
		Yanıtsız	0	0,00	0	0,00
7	Deneysel/Örnek-temelli	Doğru	13	59,09	21	95,46
		Yanlış	9	40,91	1	4,55
		Yanıtsız	0	0,00	0	0,00
8	Deneysel/Örnek-temelli	Doğru	14	63,64	21	95,46
		Yanlış	8	36,36	1	4,55
		Yanıtsız	0	0,00	0	0,00
9	Analitik/Dönüşümcü	Doğru	2	9,09	22	100,00
		Yanlış	19	86,36	0	0,00
		Yanıtsız	1	4,55	0	0,00
10	Analitik/Aksiyomatik	Doğru	12	54,55	22	100,00
		Yanlış	9	40,91	0	0,00
		Yanıtsız	1	4,55	0	0,00

Uygulamadan önce öğretmen adaylarına senaryodaki her bir öğrencinin önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını ispatlarken kullandıkları argümanlar (gerekçelendirme biçimleri) sorulmuştur. Uygulama sonrasında ise bu göreve ilaveten her bir öğrencinin sahip olduğu ana ve alt ispat şeması ile bu şemaların özellikleri de sorulmuştur.

Öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgileri birinci soru dışında uygulama sonrasında hep artmıştır. Öğretmen adayları uygulama öncesinde özellikle sembolik, örnek-temelli, dönüşümcü ve aksiyomatik ispat şemalarını tespit etmekte güçlük yaşamışlardır. Ancak uygulama sonrasında yaşadıkları bu güçlüklerin üstesinden gelmişler ve bu şemaları tespit edebilmişlerdir. Bu yönüyle ders tasarımının özellikle öğretmen adaylarının sembolik, örnek-temelli, dönüşümcü ve aksiyomatik ispat şemalarını tespit etme bilgilerini geliştirdiği söylenebilir. Bu durumlara ait örnekler aşağıda sunulmuştur.

Tablo 4.52 ve senaryodan (Ek-12) da görüldüğü gibi Ö5 kodlu öğrenci dışsal ispat şemalarından sembolik ispat şemasına sahiptir.

Ö5: $X \subset Y$ ise $s(X) < s(Y)$ ve $Y \subset Z$ ise $s(Y) < s(Z)$ olur. Buradan da $s(X) < s(Z)$ ise $X \subset Z$ olur şeklinde 9. sınıf öğrencisine mantıklı gelebilecek anlamsız bir sembol manipülasyonu yapmıştır. Öyle ki $s(X) < s(Z)$ ise $X \subset Z$ olma zorunluluğu yoktur.

Uygulamadan önce hiçbir öğretmen adayı Ö5 kodlu öğrencinin argümanını (gerekçelendirme biçimini) tespit edememiştir. Bunun sebebi öğretmen adaylarının senaryodaki bu öğrenci gibi bu gerekçelendirmeye ikna olmalarıdır. Matematiksel sembollerle yapılan bu işlemlerin geçerli bir ispat oluşturduğunu düşündüler. Örneğin ÖA22 kodlu öğretmen adayının uygulama öncesi Ö5 kodlu öğrencinin argümanını (gerekçelendirme biçimini) aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

ÖA22: Mantıksal çıkarım yaparak gerekçelendirmiştir.

Ancak ÖA22 kodlu öğretmen adayının belirttiği gibi Ö5 kodlu öğrencinin argümanında mantıksal çıkarım yoktur, anlamsız sembol manipülasyonu vardır. Mantıksal çıkarım da sembolik ispat şemasının değil dönüşümcü ya da aksiyomatik ispat şemasının bir niteliğidir. Bu yüzden ÖA22 kodlu öğretmen adayının uygulama öncesi cevabı doğru değildir.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu (%90,91) Ö5 kodlu öğrencinin argümanını (gerekçelendirme biçimini) doğru tespit etmişlerdir. Ayrıca onlar buna ilave olarak Ö5 kodlu öğretmen adayının dışsal ispat şemalarından sembolik ispat şemasına sahip olduğunu belirtmişlerdir. ÖA22 kodlu öğretmen adayının uygulama sonrasında vermiş olduğu doğru cevap aşağıdadır.

ÖA22: Ana ispat şeması Dışsal, alt ispat şeması sembolik, argümanı anlamsız sembol manipülasyonu.

Senaryoda örnek-temelli ispat şemasının üç farklı durumunu sonlu kümelerin tek örneği (Ö6 kodlu öğrenci), sonsuz kümelerin tek örneği (Ö7 kodlu öğrenci) ve çoklu örnek (Ö8 kodlu öğrenci) kullanarak hazırladık. Uygulamadan önce öğretmen adaylarının 21'i Ö6 kodlu öğrencinin sadece bir örneğe güvendiğini fark ederek argümanını doğru tespit ettiler. Uygulamadan sonra ise tüm öğretmen adayları Ö6 kodlu öğrencinin argümanını ve buna ilaveten ana ve alt ispat şemasını doğru bir şekilde tespit ettiler. Öğretmen adayları sonlu kümelerin tek örneğinde uygulama öncesi ve sonrasında başarılıydılar. Ancak sonsuz kümelerin tek örneği ve çoklu örnek için aynı başarıyı uygulama öncesinde yakalayamadılar.

Senaryodaki öğretmen daha genel bir örnek için çağrıda bulunduktan sonra Ö7 kodlu öğrenci sonsuz N, Z ve R kümelerini kullanarak önermenin doğruluğu yönünde bir argüman sundu. Bu N, Z ve R kümelerinin sonsuz olmasının haricinde bir önceki durumda olduğu gibi "tek örnek kullanılan örnek-temelli ispat şeması" olarak düşünülmelidir. Ancak müdahaleden önce dokuz öğretmen adayı Ö7 kodlu öğrencinin argümanını (gerekçelendirme biçimini) tespit edemediler. Çünkü sonsuz elemanlı kümelerle verilen bu tek örneğin genelleme olduğunu düşündüler. Onlar kümelerin sonsuzluğunu örneklerin sonsuz sayıda olmasıyla karıştırdılar. Bu yüzden Ö7 kodlu öğrencinin argümanını (gerekçelendirme biçimini) bir genelleme olarak düşündüler. Genelleme olduğunu düşünen bu öğretmen adayları öğrencinin argümanı yanlış tespit etmiş oldu. Öğrencilerin şemasını örnek-temelli şemadan ziyade bir genelleme olarak gördüklerinden yanıtlarını yanlış olarak kodladık. Çünkü genelleme yine dönüşümcü ya da aksiyomatik ispat şemasının bir niteliğidir. Uygulama öncesinde Ö7 kodlu öğrencinin argümanını doğru tespit eden ÖA18 kodlu öğretmen adayıyla yanlış tespit eden ÖA6 kodlu öğretmen adayının cevapları aşağıda verilmiştir.

ÖA18: Bir önceki öğrenciden (Ö6 kodlu öğrenciyi kastediyor) daha iyi tek bir örnekle gerekçelendirmiş.

ÖA6: Genelleme metoduyla ispatlamış.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu (%95,46) Ö7 kodlu öğrencinin argümanını (gerekçelendirme biçimini) doğru tespit etmişlerdir. Ayrıca onlar buna ilave olarak Ö7 kodlu öğretmen adayının deneysel ispat şemalarından örnek-temelli ispat şemasına sahip olduğunu belirtmişlerdir. ÖA18 ve ÖA6 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasında vermiş olduğu doğru cevaplar aşağıdadır.

ÖA18: Ana ispat şeması deneysel ispat şeması, alt ispat şeması örnek-temelli ispat şeması, argümanı bir örnekle.

ÖA6: Ana ispat şeması deneysel, alt ispat şeması örnek-temelli, argümanı tek bir örnek.

Ö7 kodlu öğrenciden farklı şekilde Ö8 kodlu öğrenci sınıftaki her arkadaşının bir örnek bulmasını önermiştir. Böylece önermenin doğruluğunu haklı çıkaracak pek çok örnek olacaktır. Öğretmen adaylarından sekizi uygulamadan önce Ö8 kodlu öğrencinin argümanını doğru tespit edememiştir. Doğru tespit edememelerinin sebebi çoklu örneklerin genelleme için ikna edici olduğunu düşünmeleridir. Bazı öğretmen adayları bunu tümevarım olarak nitelendirmişlerdir. Senaryoda sınıftaki öğrenci sayısı belli değildir. Ancak sınıftaki öğrenci sayısının sonlu olduğu bellidir. Bu yüzden bu öğrencinin argümanına genelleme veya tümevarım demek yanlıştır. Uygulama öncesinde Ö8 kodlu öğrencinin argümanını doğru tespit eden ÖA16 kodlu öğretmen adayıyla, yanlış tespit eden ÖA1 kodlu öğretmen adayının cevapları aşağıda sunulmuştur.

ÖA16: Birden çok örnekle gerekçelendirmiş.

ÖA1: Genelleyerek tümevarıma ulaşmış.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu (%95,46) Ö8 kodlu öğrencinin argümanını (gerekçelendirme biçimini) doğru tespit etmişlerdir. Ayrıca onlar buna ilave olarak Ö8 kodlu öğretmen adayının deneysel ispat şemalarından örnek-temelli ispat şemasına sahip olduğunu belirtmişlerdir. ÖA16 ve ÖA1 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasında vermiş olduğu doğru cevaplar aşağıdadır.

ÖA16: Ana ispat şeması deneysel ispat şeması, alt ispat şeması örnek-temelli ispat şeması, argümanı birden çok örnek.

ÖA1: Ana ispat şeması deneysel ispat şeması, alt ispat şeması örnek-temelli ispat şeması, argümanı çoklu örnek.

Ö9 kodlu öğrenci mantıksal çıkarıma dayanarak işlemsel düşünme ile bir genellemeye ulaştığından dolayı dönüşümcü ispat şemasına sahiptir. Uygulamadan önce sadece iki öğretmen adayı Ö9 kodlu öğrencinin argümanını doğru tespit edebilmişlerdir. Diğerleri bu öğrencinin argümanını doğru bir şekilde belirleyememiştir. Çünkü bu şemanın herhangi bir bileşenine (genelleme, işlemsel düşünme veya mantıksal çıkarım) atıfta bulunmamışlardır. Öğretmen adayları Ö9 kodlu öğrencinin argümanı için birbirlerinden çok farklı cevaplar vermişlerdir. En fazla karmaşıklık yaşadıkları şema dönüşümcü ispat şemasıdır. Bunun nedeni dönüşümcü ispat şemasının zor tespit edilen şema olmasından kaynaklanmaktadır. Uygulama öncesinde Ö9 kodlu öğrencinin argümanını doğru tespit eden ÖA22 kodlu öğretmen adayıyla, yanlış tespit eden ÖA5 kodlu öğretmen adayının cevapları aşağıda sunulmuştur.

ÖA22: Mantıksal çıkarımla işlemler yaparak gerekçelendirmiştir.

ÖA5: Farklı bir matematiksel ifade ile gerekçelendirmiş.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının tamamı Ö9 kodlu öğrencinin argümanını (gerekçelendirme biçimini) doğru tespit etmişlerdir. Ayrıca onlar buna ilave olarak Ö9 kodlu öğretmen adayının analitik ispat şemalarından dönüşümcü ispat şemasına sahip olduğunu belirtmişlerdir. ÖA22 ve ÖA5 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasında vermiş olduğu doğru cevaplar aşağıdadır.

ÖA22: Ana ispat şeması analitik, alt ispat şeması dönüşümcü, argümanı mantıksal çıkarımlarla genellemeye ulaşmış.

ÖA5: Ana ispat şeması analitik, alt ispat şeması dönüşümcü, argümanı mantıksal çıkarım, işlemsel düşünme ve genelleme.

Ö10 kodlu öğrenci alt kümenin tanımını kullanarak ispatı başlattığı, mantıksal çıkarıma dayanarak işlemsel düşünme ile bir genellemeye ulaştığından ayrıca tüm bunları aksiyomatik bir yapı içerisinde tamamladığından aksiyomatik şemaya sahiptir. Uygulamadan önce 12 öğretmen adayı Ö10 kodlu öğrencinin argümanını doğru tespit etmiştir. Diğer öğretmen adaylarının tespit edememelerinin sebebi aksiyomatik ispat şeması için gerekli olan yukarıda değinilen üç özellik ile birlikte aksiyomatik yapının özelliklerini de bilmemelerinden kaynaklanmıştır. Dönüşümcü şemaya göre aksiyomatik şema daha fazla özellik barındırmasına rağmen uygulamadan önce aksiyomatik şemayı tespit edebilen öğretmen adaylarının sayısının dönüşümcü şemayı tespit edilen öğretmen adayları sayısından fazla olmasının sebebi alan derslerinde yapılan ispatlardan aksiyomatik şemaya daha aşina olmalarıdır. Öğretmen adayları Ö10 kodlu öğrencinin yaptığı ispatın en geçerli ispat olduğunu belirtmelerine rağmen bu öğrencinin argümanını (gerekçelendirme biçimini) yukarıdaki nedenlerden dolayı tespit edememişlerdir. Uygulama öncesinde Ö10 kodlu öğrencinin argümanını doğru tespit eden ÖA13 kodlu öğretmen adayıyla, yanlış tespit eden ÖA3 kodlu öğretmen adayının cevapları aşağıda sunulmuştur.

ÖA13: Tanım ve aksiyomları kullanarak genellemeye ulaşmıştır.

ÖA3: Başka bir teorem ile gerekçelendirmiş.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının tamamı Ö10 kodlu öğrencinin argümanını (gerekçelendirme biçimini) doğru tespit etmişlerdir. Ayrıca onlar buna ilave olarak Ö10 kodlu öğretmen adayının analitik ispat şemalarından aksiyomatik ispat şemasına sahip olduğunu belirtmişlerdir. ÖA13 ve ÖA3 kodlu öğretmen adaylarının uygulama sonrasında vermiş olduğu doğru cevaplar aşağıdadır.

ÖA13: Ana ispat şeması analitik ispat şeması, alt ispat şeması aksiyomatik, argümanı alt küme tanımından hareketle genellemeye ulaşmış.

ÖA3: Ana ispat şeması analitik, alt ispat şeması aksiyomatik, argümanı aksiyomatik sistem içinde genelleme.

Şimdi de dört öğretmen adayıyla yapılan yarı yapılandırılmış mülakatların bulgularına değinelim. Dört öğretmen adayının uygulama öncesi ve sonrası yapılan yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgileri Tablo 4.53'de verilmiştir.

Tablo 4.53. Dört Öğretmen Adayının *Öğrencilerin Sahip Oldukları İspat Şemalarını Tespit Etme Bilgilerine* Ait Yarı Yapılandırılmış Mülakat Bulguları

	Yarı Yapılandırılmış Mülakat																			
Öğretmen Adayı Kodu	**Uygulama Öncesi**										**Uygulama Sonrası**									
	Ö 1	**Ö 2**	**Ö 3**	**Ö 4**	**Ö 5**	**Ö 6**	**Ö 7**	**Ö 8**	**Ö 9**	**Ö 10**	**Ö 1**	**Ö 2**	**Ö 3**	**Ö 4**	**Ö 5**	**Ö 6**	**Ö 7**	**Ö 8**	**Ö 9**	**Ö 10**
K1	D	D	D	D	Y	D	Y	D	Y	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
K2	D	D	D	Y	Y	D	D	D	Y	Y	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
K3	D	D	D	Y	Y	D	D	Y	Y	Y	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
K4	D	D	D	D	Y	D	Y	Y	Y	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

D: Doğru Y: Yanlış

Yarı yapılandırılmış mülakatlardan ders tasarımının öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını belirleme bilgilerine etkisi görülmektedir. Özellikle sembolik ve dönüşümcü ispat şemalarını tespit etme bilgilerine etkisi açıkça görülmektedir.

Senaryodaki Ö1 kodlu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) dersteki kurallardır. Bu öğrenci derste bu kuralı yazmamış oldukları için önermenin yanlışlığına inanmaktadır. Ö1 kodlu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması dışsal, alt ispat şeması da otoriter ispat şemasıdır. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayı da uygulamadan önce bu öğrencinin argümanını doğru tespit etmiş, uygulamadan sonra ise buna ilave olarak bu öğrencinin ana ve alt ispat şemasını da doğru tespit edebilmiştir.

Senaryodaki Ö2 kodlu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) ders kitabında yazılı olan teoremlerdir. Kitapta bu önerme teorem olarak yazdığı için önermenin doğruluğuna inanmaktadır. Ö2 kodlu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması dışsal, alt ispat şeması da otoriter ispat şemasıdır. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayı da uygulamadan önce bu öğrencinin argümanını doğru tespit etmiş, uygulamadan sonra ise buna ilave olarak bu öğrencinin ana ve alt ispat şemasını da doğru tespit edebilmiştir.

Senaryodaki Ö3 kodlu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) çizdiği şekildir. Çizdiği şekle dayanarak önermenin doğruluğuna inanmaktadır. Ö3 kodlu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması deneysel, alt ispat şeması da algısal ispat şemasıdır. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayı da uygulamadan önce bu öğrencinin argümanını doğru tespit etmiş, uygulamadan sonra ise buna ilave olarak bu öğrencinin ana ve alt ispat şemasını da doğru tespit edebilmiştir.

Senaryodaki Ö4 kodlu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) sözel ifadelere dayanmaktadır. Sözel ifadelerin kendisini daha çok ikna ettiğini belirtmiştir. Ö4 kodlu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması dışsal, alt ispat şeması da ritüel ispat şemasıdır. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan iki öğretmen adayı uygulamadan önce bu öğrencinin argümanını doğru tespit etmiş, uygulamadan sonra ise buna ilave olarak bu öğrencinin ana ve alt ispat şemasını da doğru tespit edebilmiştir. Diğer iki öğretmen adayı da uygulamadan önce bu öğrencinin argümanını yanlış tespit etmiş, uygulamadan sonra ise hem argümanı doğru tespit etmiş hem de buna ilave olarak bu öğrencinin ana ve alt ispat şemasını da doğru tespit edebilmiştir. Örneğin K3 kodlu öğretmen adayının uygulama öncesi ve sonrası cevapları aşağıda verilmiştir. K3 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesi bunun sezgisel (algısal) ispat olduğu düşünmektedir. Uygulama sonrası ritüel ispat olduğunu tespit edebilmiştir.

M: Bu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K2: Sezgilerine güvenmiş. Sezgisel ispat yapmış.
M: Bu öğrencinin gerekçelendirmesi sizi ikna etti mi? Açıklayınız.
K2: Tamamen bir ispat olaraktan yeterli değil ama yine de bir sezgisel ispatı var hocam.
M: Bu öğrencinin cevabı üzerine öğretmenin yerinde siz olsaydınız nasıl bir yaklaşım sergilerdiniz? Açıklayınız.
K2: Matematiğini geliştirmeye çalışırdım.

M: Bu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K2: Sözel ifadelerle gerekçelendirmiş.
M: Bu öğrencinin gerekçelendirmesi sizi ikna etti mi? Açıklayınız.
K2: İkna etmedi. İspat değil.
M: Bu öğrencinin cevabı üzerine öğretmenin yerinde siz olsaydınız nasıl bir yaklaşım sergilerdiniz? Açıklayınız.
K2: Cebirsel gösterimi öğretirim.
M: Bu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması nedir? Açıklayınız.
K2: Ana ispat şeması dışsal ispat şeması.
M: Bu öğrencinin sahip olduğu alt ispat şeması nedir? Açıklayınız.
K2: Alt ispat şeması ritüel ispat şeması.
M: Bu öğrencinin sahip olduğu şemanın özellikleri nelerdir? Açıklayınız.
K2: Öğrencinin alışkanlıkları veya ispatın biçimi.

Senaryodaki Ö5 kodlu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) anlamsız sembol manipülasyonlarıdır. Sembollerle yanlış işlemler yürütüp doğru sonuca ulaştığını düşünmektedir. Ö5 kodlu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması dışsal, alt ispat şeması da sembolik ispat şemasıdır. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayı da uygulamadan önce bu öğrencinin argümanını yanlış tespit etmiş, uygulamadan sonra ise hem argümanı doğru tespit etmiş hem de buna ilave olarak bu öğrencinin ana ve alt ispat şemasını da doğru tespit edebilmiştir. Örneğin K1 kodlu öğretmen adayının uygulama öncesi ve sonrası cevapları aşağıda verilmiştir. K1 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesi Ö5 kodlu öğrencinin matematiksel ifadelerle doğru ispat yaptığını düşünmüş, işlemlerdeki hatayı fark edememiş ve ikna olmuştur.

M: Bu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K1: Matematiksel ifadelerle ispatı tamamlamıştır.
M: Bu öğrencinin gerekçelendirmesi sizi ikna etti mi? Açıklayınız.
K1: Benim için yeterli.

M: Bu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K1: Sembolleri manipüle edip yanlış işlemler yapmış.
M: Bu öğrencinin gerekçelendirmesi sizi ikna etti mi? Açıklayınız.
K1: Etmedi. İspat değil ama gerekçelendirme.
M: Bu öğrencinin cevabı üzerine öğretmenin yerinde siz olsaydınız nasıl bir yaklaşım sergilerdiniz? Açıklayınız.
K1: Konuyu yanlış bildiği için sembolleri manipüle ettiğini yanlış işlemler yaptığını söylerdim.
M: Bu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması nedir? Açıklayınız.
K1: Dışsal ispat şeması.
M: Bu öğrencinin sahip olduğu alt ispat şeması nedir? Açıklayınız.
K1: Sembolik ispat şeması.
M: Bu öğrencinin sahip olduğu şemanın özellikleri nelerdir? Açıklayınız.
K1: Anlamsız sembol manipülasyonları.

Senaryodaki Ö6 kodlu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) önermeyi tek bir örnekle doğrulamadır. İspatın genelleme ihtiyacının farkında değildir. Ö6 kodlu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması deneysel, alt ispat şeması da örnek-temelli ispat şemasıdır. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayı da uygulamadan önce bu öğrencinin argümanını doğru tespit etmiş, uygulamadan sonra ise buna ilave olarak bu öğrencinin ana ve alt ispat şemasını da doğru tespit edebilmiştir.

Senaryodaki Ö7 kodlu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) önermeyi tek bir örnekle doğrulamaktır. Bir öncekinden farkı tek bir örneğin sonsuz kümeler üzerinden verilmiş olmasıdır. Ö7 kodlu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması deneysel, alt ispat şeması da örnek-temelli ispat şemasıdır. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan iki öğretmen adayı uygulamadan önce bu öğrencinin argümanını doğru tespit etmiş, uygulamadan sonra ise buna ilave olarak bu öğrencinin ana ve alt ispat şemasını da doğru tespit edebilmiştir. Diğer iki öğretmen adayı da uygulamadan önce bu öğrencinin argümanını yanlış tespit etmiş, uygulamadan sonra ise hem argümanı doğru tespit etmiş hem de buna ilave olarak bu öğrencinin ana ve alt ispat şemasını da doğru tespit edebilmiştir. Örneğin K4 kodlu öğretmen adayının uygulama öncesi ve sonrası cevapları aşağıda verilmiştir. K4 kodlu öğretmen adayı sonsuz kümelerle yapılan bu doğrulamanın ispatın genelleme ihtiyacını karşıladığını düşünmüştür. Uygulamadan sonra ise bunun da tek bir örnekle doğrulama olduğunu belirtip ana ve alt ispat şemasını doğru tespit edebilmiştir.

M: Bu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K4: Genellemeye ulaşarak ispatlamıştır.
M: Bu öğrencinin gerekçelendirmesi sizi ikna etti mi? Açıklayınız.
K4: Genellediği için yeterli.

M: Bu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K4: Bir önceki öğrenci gibi tek bir örnek vermiş.
M: Bu öğrencinin gerekçelendirmesi sizi ikna etti mi? Açıklayınız.
K4: Yok.
M: Bu öğrencinin cevabı üzerine öğretmenin yerinde siz olsaydınız nasıl bir yaklaşım sergilerdiniz? Açıklayınız.
K4: Örnekle doğrulamanın ispat olmadığını söylerim.
M: Bu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması nedir? Açıklayınız.
K4: Dışsal.
M: Bu öğrencinin sahip olduğu alt ispat şeması nedir? Açıklayınız.
K4: Örnek-temelli.
M: Bu öğrencinin sahip olduğu şemanın özellikleri nelerdir? Açıklayınız.
K4: Örnekle ikna olma.

Senaryodaki Ö8 kodlu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) önermeyi çoklu örnekle doğrulamaktır. Birden çok örneğin ispat için yeterli olduğunu düşünmektedir. Ö8 kodlu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması deneysel, alt ispat şeması da örnek-temelli ispat şemasıdır. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan iki öğretmen adayı uygulamadan önce bu öğrencinin argümanını doğru tespit etmiş, uygulamadan sonra ise buna ilave olarak bu öğrencinin ana ve alt ispat şemasını da doğru tespit edebilmiştir. Diğer iki öğretmen adayı da uygulamadan önce bu öğrencinin argümanını yanlış tespit etmiş, uygulamadan sonra ise hem argümanı doğru tespit etmiş hem de buna ilave olarak bu öğrencinin ana ve alt ispat şemasını da doğru tespit edebilmiştir. Örneğin K3 kodlu öğretmen adayının uygulama öncesi ve sonrası cevapları aşağıda verilmiştir. K3 kodlu öğretmen adayı çok sayıda öğrencinin vermiş olduğu birbirinden farklı örneğin ispatın genelleme ihtiyacını karşıladığını düşünmüştür. Uygulamadan sonra ise bunun da çoklu örnekle doğrulama olduğunu belirtip ana ve alt ispat şemasını doğru tespit edebilmiştir.

M: Bu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K3: Sınıftaki herkes bir örnek verse farklı farklı örnekler genellemeye ulaşmış olur.
M: Bu öğrencinin gerekçelendirmesi sizi ikna etti mi? Açıklayınız.
K3: Yani öğrencinin dediği bir yerden sonra ispata gider. İkna etti beni.

M: Bu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K3: Çok sayıda örnek vermiş.
M: Bu öğrencinin gerekçelendirmesi sizi ikna etti mi? Açıklayınız.
K3: İkna etmesi için genelleme olması lazım bu da değil. O yüzden etmedi.
M: Bu öğrencinin cevabı üzerine öğretmenin yerinde siz olsaydınız nasıl bir yaklaşım sergilerdiniz? Açıklayınız.
K3: Yaptığının çok sayıda örnek verme olduğunu söylerdim. Bu da ispat değil derdim.
M: Bu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması nedir? Açıklayınız.
K3: Deneysel ispat şeması.
M: Bu öğrencinin sahip olduğu alt ispat şeması nedir? Açıklayınız.
K3: Örnek-temelli ispat şeması.
M: Bu öğrencinin sahip olduğu şemanın özellikleri nelerdir? Açıklayınız.
K3: Örnekleri kullanma.

Senaryodaki Ö9 kodlu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) mantıksal çıkarımla işlemsel düşünmeyi kullanarak genellemeye ulaşmasıdır. Tek eksiği aksiyomatik yapı içerisinde ispatı düzenleyememesidir. Ö9 kodlu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması analitik, alt ispat şeması da dönüşümcü ispat şemasıdır. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan dört öğretmen adayı da uygulamadan önce bu öğrencinin argümanını yanlış tespit etmiş, uygulamadan sonra ise hem argümanı doğru tespit etmiş hem de buna ilave olarak bu öğrencinin ana ve alt ispat şemasını da doğru tespit edebilmiştir. Örneğin K2 kodlu öğretmen adayının uygulama öncesi ve sonrası cevapları aşağıda verilmiştir. K2 kodlu öğretmen adayı uygulama öncesi Ö9 kodlu öğrencinin kümedeki her eleman için deneme yapılmadığı için örnek vererek doğruladığını savunmuştur.

M: Bu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K2: Ö6, Ö7, Ö8 gibi örnek vermiş?
M: Örnek mi vermiş sence bu öğrenci?
K2: Her eleman için dememiş yani mesela onuncu öğrenci gibi.
M: Bu öğrencinin gerekçelendirmesi sizi ikna etti mi? Açıklayınız.
K2: Ö6, Ö7, Ö8 ikna etmedi ama bu etti sanki.
M: Niye?
K2: En azından semboller daha fazla.

M: Bu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K2: Bildiği kurallardan hareket etmiş. İşlemleri de doğru yapmış. Genellemeye ulaşmış.
M: Bu öğrencinin gerekçelendirmesi sizi ikna etti mi? Açıklayınız.
K2: Bu bir ispat. O yüzden ikna etti.

M: Bu öğrencinin cevabı üzerine öğretmenin yerinde siz olsaydınız nasıl bir yaklaşım sergilerdiniz? Açıklayınız.
K2: Aksiyomatik yapıyı kullanmayı öğretirim. Tanımdan hareket etmeli.
M: Bu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması nedir? Açıklayınız.
K2: Analitik ispat şeması.
M: Bu öğrencinin sahip olduğu alt ispat şeması nedir? Açıklayınız.
K2: Dönüşümcü ispat şeması.
M: Bu öğrencinin sahip olduğu şemanın özellikleri nelerdir? Açıklayınız.
K2: Mantıksal çıkarım, işlemsel düşünme ve genelleme.

Senaryodaki Ö10 kodlu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) mantıksal çıkarımla işlemsel düşünmeyi kullanarak genellemeye aksiyomatik yapı içerisinde ulaşmasıdır. Ö10 kodlu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması analitik, alt ispat şeması da aksiyomatik ispat şemasıdır. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan iki öğretmen adayı uygulamadan önce bu öğrencinin argümanını doğru tespit etmiş, uygulamadan sonra ise buna ilave olarak bu öğrencinin ana ve alt ispat şemasını da doğru tespit edebilmiştir. Diğer iki öğretmen adayı da uygulamadan önce bu öğrencinin argümanını yanlış tespit etmiş, uygulamadan sonra ise hem argümanı doğru tespit etmiş hem de buna ilave olarak bu öğrencinin ana ve alt ispat şemasını da doğru tespit edebilmiştir. Örneğin K3 kodlu öğretmen adayının uygulama öncesi ve sonrası cevapları aşağıda verilmiştir. K3 kodlu öğretmen adayı çok sayıda öğrencinin vermiş olduğu birbirinden farklı örneğin ispatın genelleme ihtiyacını karşıladığını düşünmüştür. Uygulamadan sonra ise bunun da çoklu örnekle doğrulama olduğunu belirtip ana ve alt ispat şemasını doğru tespit edebilmiştir.

M: Bu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) nedir? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)
K3: Basit bir şekilde ispatı yapmıştır.
M: Argümanı ne peki?
K3: Argümanı matematiksel ifadeler.
M: Bu öğrencinin gerekçelendirmesi sizi ikna etti mi? Açıklayınız.
K3: Beni ikna etti.
M: Neden?
K3: Bizim alan derslerinde yaptığımız ispatlara benziyor.

M: Bu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) nedir? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)
K3: Tanımdan hareket etmiş genellemeye ulaşmış. Aksiyomatik yapıyı kullanmış.
M: Bu öğrencinin gerekçelendirmesi sizi ikna etti mi? Açıklayınız.
K3: Tam doğru ve istenilen ispat bu. O yüzden son derece ikna etti.

M: Bu öğrencinin cevabı üzerine öğretmenin yerinde siz olsaydınız nasıl bir yaklaşım sergilerdiniz? Açıklayınız.
K3: Aferin derdim. (Gülüyor)
M: Bu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması nedir? Açıklayınız.
K3: Analitik ispat şeması.
M: Bu öğrencinin sahip olduğu alt ispat şeması nedir? Açıklayınız.
K3: Aksiyomatik ispat şeması.
M: Bu öğrencinin sahip olduğu şemanın özellikleri nelerdir? Açıklayınız.
K3: Tanım ve aksiyomdan hareket etme.

Buraya kadar olan kısımda anket ve mülakatların analizinden ders tasarımının bu kazanıma etkisi açıkça görülmektedir. Ders tasarımının öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgilerine etkisi nicel ve nitel bulgularla desteklenmiştir.

4.5.2. Ders Tasarımının "*Öğretmen Adaylarının Dersin Hedeflerine*" Ulaşma Durumlarına Etkisine Dair Bulgular

Dersin 2 adet de bilişsel hedefi vardır. Dersin bilişsel hedefleri ise öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmektir. Ders tasarımının öğretmen adaylarının bu iki hedefe ulaşma durumlarına etkisi ayrı ayrı incelenmiştir.

4.5.2.1. Ders Tasarımının "Öğretmen Adaylarının İspatla İlgili Alan Bilgilerine" Etkisine Dair Bulgular

Bu kısımda ders tasarımının öğretmen adaylarının dersin bilişsel hedeflerinden birincisine ulaşma durumlarına etkisi incelenmiştir.

Hedef 1: Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerinin geliştirilmesi.

Bu kapsamda aşağıdaki soruya cevap aranmıştır.

Ders tasarımı öğretmen adaylarının *ispatla ilgili alan bilgilerine* nasıl etki etmiştir?

Dersin uygulamasından önce ve sonra 22 öğretmen adayının İSABA'ne verdikleri cevaplar iki bileşende analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır. Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgileri hem farklı ispat yöntemlerini bilip uygulayabilmeleri hem de sahip oldukları ana ispat şemaları göz önüne alınarak değerlendirilmiştir. Bu ankette öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerini ölçmek için toplamda yedi soru sorulmuştur. Anketten elde edilen nitel veriler analiz edilerek nicel bulgulara ulaşılmıştır.

22 öğretmen adayının yedi soruya vermiş oldukları 154 cevap doğru, kısmen doğru, yanlış ve yanıtsız olarak kodlanmıştır. Doğru cevaplar 2 puan, kısmen doğru cevaplar 1 puan, yanlış ve yanıtsız kabul edilen cevaplar 0 puan olarak puanlanmıştır.

22 öğretmen adayının yedi soruya vermiş oldukları 154 cevap Sowder ve Harel'in (1998) sınıfladığı üç ana ispat şemasına göre kodlanmıştır. Analitik ispat şemaları 3 puan, deneysel ispat şemaları 2 puan, dışsal ispat şemaları 1 puan ve yanıtsız kabul edilen cevaplar 0 puan olarak puanlanmıştır.

Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgi puanları farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama puanları ile sahip oldukları ana ispat şema puanlarının toplamı şeklinde hesaplanmıştır.

22 öğretmen adayının anketten bu bileşende alabileceği toplam puan 770 (22x7x2+22x7x3) puandır. Bu puanlar iki bileşende öğretmen adaylarının aldıkları puanların toplamıdır.

Tablo 4.54. Öğretmen Adaylarının *İspatla İlgili Alan Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Puan ve Yüzde Dağılımı

	Uygulama Öncesi	**Uygulama Sonrası**	**Toplam**
p	**269**	**618**	770
%	**34,94**	**80,26**	100,00

Tablo 4.54'de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının toplam 770 puan alabileceği İSABA'den uygulama öncesi 269 puan, uygulama sonrası ise 618 puan almışlardır. Uygulama öncesi aldıkları puan yüzdesi %34,94 iken uygulama sonrası puan yüzdesi 80,26'dır. Öğretmen adaylarının uygulama sonrası puanları 349 puan, yüzdeleri ise %45,32 artmıştır. Bu artışlar ders tasarımının bu hedefe etkisini ortaya koymaktadır. Dersin uygulamasından sonra 22 öğretmen adayının Hedef 1'e ulaşma yüzdesi %80,26 gibi çok yüksek bir orana ulaşmıştır.

Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerine dair uygulama öncesi ve sonrası ortalama, standart sapma, minimum ve maksimum puanları Tablo 4.55'de verilmiştir. Ortalama, minimum ve maksimum puanlar 35 (7x2+7x3) tam puan üzerinden değerlendirilmiştir.

Tablo 4.55. Öğretmen Adaylarının *İspatla İlgili Alan Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Ortalama, Standart Sapma, Minimum ve Maksimum Puanları

	N	$\bar{x}$	ss	Min	Max
Uygulama Öncesi	22	12,23	3,74	5,00	18,00
Uygulama Sonrası	22	28,09	5,03	19,00	35,00

Bir öğretmen adayı ispatla ilgili alan bilgilerini ölçmek için geliştirilen İSABA'ndeki kendisine sorulan yedi sorudan en fazla 35 (7x2+7x3) puan alabilmektedir. 22 öğretmen adayının uygulama öncesi anketten aldığı puanların ortalaması 12,23 gibi düşük bir oran iken uygulama sonrasında 28,09 gibi çok yüksek bir orana yükselmiştir. Öğretmen adaylarının uygulama sonrası ortalama puanları uygulama öncesine göre 35 tam puan üzerinden 15,86 puan artmıştır. Yine tablodan uygulama öncesi standart sapmanın 3,74, uygulama sonrası standart sapmanın 5,03 olduğu görülmektedir. Uygulama öncesinde 22 öğretmen adayından ankette minimum puan alan öğretmen adayının puanı 5,00 iken, uygulama sonrasında 22 öğretmen adayından ankette minimum puan alan öğretmen adayının puanı 19,00'dır. Yine uygulama öncesinde 22 öğretmen adayından ankette maksimum puan alan öğretmen adayının puanı 18,00 iken, uygulama sonrasında 22 öğretmen adayından ankette maksimum puan alan öğretmen adayının puanı 35,00'dır. Buradan ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerine ait minimum ve maksimum puanları artırdığı söylenebilir.

Tablo 4.54 ve Tablo 4.55'den öğretmen adaylarının uygulama öncesinde ispatla ilgili alan bilgilerinde çok büyük eksiklikleri olduğu, ispatlama becerilerinin istenilen düzeyin çok altında olduğu görülmektedir. Uygulama sonrasında ise öğretmen adayları ispatla ilgili alan bilgilerindeki eksikliklerini gidermişler dolayısıyla arzu edilen düzeyde ispatlama yapabilmişlerdir. Buradan ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgi puanlarına olumlu etkisi olduğu söylenebilir.

Ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgi puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olup olmadığını saptamak için veri analiz yöntemi olarak uygulanan Wilcoxon İşaretli Sıralar Testinin (Wilcoxon, 1945) çıktıları Tablo 4.56'da verilmiştir.

Tablo 4.56. Öğretmen Adaylarının *İspatla İlgili Alan Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Wilcoxon İşaretli Sıralar Test Çıktıları Tablosu

Uygulama Sonrası-Uygulama-Öncesi	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	Z	p
Negatif Sıralar	0^a	0,00	0,00	-4,111*	<0,001
Pozitif Sıralar	22^b	11,50	253,00		
Eşit	0^c				

* Negatif Sıralar Temeline Dayalı, [a] uygulama sonrası puan < uygulama öncesi puan, [b] uygulama sonrası puan > uygulama öncesi puan, [c] uygulama sonrası puan = uygulama öncesi puan.

Tablo 4.56'dan da görüldüğü gibi test çıktıları ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgi puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olduğunu $(Z = -4{,}111, p < 0{,}001)$ göstermektedir. Fark puanlarının sıra ortalamalarına ve sıra toplamlarına bakıldığında istatistiksel olarak anlamlı bulunan bu etkinin pozitif sıralar yani uygulama sonrası lehine olduğu görülmektedir. Ayrıca tablodan öğretmen adaylarının tamamının ispatla ilgili alan bilgi puanlarını uygulama sonrasında arttırdığı görülmektedir.

Anlamlı etki büyüklüğü $r = \frac{Z}{\sqrt{n}} = \frac{-4{,}111}{\sqrt{22}} = -0{,}88$ olarak hesaplanmıştır. İşaretine bakılmaksızın (mutlak değeriyle) yorumlanan etki büyüklüğü $0{,}88 \geq 0{,}5$ olduğundan ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgi puanlarına uygulama sonrası lehine büyük etkisi olduğu (Cohen, 1988) söylenebilir.

Son olarak öğretmen adaylarının ispat alan bilgi anketindeki iki bileşene ve anketin tamamına dair uygulama öncesi ve sonrasına ait puan dağılımı ayrıntılı ve toplu bir biçimde Tablo 4.57'de verilmiştir.

Tablo 4.57. Öğretmen Adaylarının *İspat Alan Bilgi Anketindeki İki Bileşene ve Anketin Tamamına* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Puan Dağılımı

	Alan Bilgisi Bileşenleri	p	%
Uygulama Öncesi	Farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgisi	52	16,88
	Sahip oldukları ana ispat şemaları	217	46,97
	Toplam	**269**	**34,94**
Uygulama Sonrası	Farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgisi	228	74,03
	Sahip oldukları ana ispat şemaları	390	84,42
	Toplam	**618**	**80,26**

4.5.2.2. Ders Tasarımının "Öğretmen Adaylarının İspatla İlgili Pedagojik Alan Bilgilerine" Etkisine Dair Bulgular

Bu kısımda ders tasarımının öğretmen adaylarının dersin bilişsel hedeflerinden ikincisine ulaşma durumlarına etkisi incelenmiştir.

Hedef 2: Öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin geliştirilmesi.

Bu kapsamda aşağıdaki soruya cevap aranmıştır.

Ders tasarımı öğretmen adaylarının *ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerine* nasıl etki etmiştir?

Dersin uygulamasından önce ve sonra 22 öğretmen adayının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini ölçmek amacıyla geliştirilmiş olan İSPABA'ne verdikleri cevaplar analiz edilerek aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır. Bu ankette öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgileri dört bileşende incelenmek istenmiştir. Bu ankette öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini ölçmek için toplamda 25 soru sorulmuştur. Anketten elde edilen nitel veriler analiz edilerek nicel bulgulara ulaşılmıştır.

22 öğretmen adayının 25 soruya vermiş oldukları 550 cevap analiz edilmiş, doğru, yanlış ve yanıtsız olarak kodlanmıştır. Doğru cevaplar 1 puan, yanlış ve yanıtsız kabul edilen cevaplar 0 puan olarak puanlanmıştır. 22 öğretmen adayının kendilerine sorulan ispatla ilgili pedagojik alan bilgisine yönelik 25'er soruya verdikleri 550 cevabın doğru, yanlış ve yanıtsız cevap frekansları, yüzdeleri ve puanları Tablo 4.58'de verilmiştir. 22 öğretmen adayının anketten bu bileşende alabileceği toplam puan 550 (22x25) puandır. Bu puanlar dört bileşende öğretmen adaylarının aldıkları puanların toplamıdır.

Tablo 4.58. Öğretmen Adaylarının *İspatla İlgili Pedagojik Alan Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Frekans, Yüzde ve Puan Dağılımı

Kategori		Doğru	Yanlış	Yanıtsız	Toplam
Uygulama Öncesi	**f (%)**	227 (41,27)	287 (52,18)	36 (6,55)	550 (100,00)
	p (%)	227 (41,27)	0 (0,00)	0 (0,00)	**227 (41,27)**
Uygulama Sonrası	**f (%)**	506 (92,00)	44 (8,00)	0 (0,00)	550 (100,00)
	p (%)	506 (92,00)	0 (0,00)	0 (0,00)	**550 (92,00)**

Öğretmen adaylarının aldığı puanlar doğru sayılarına eşittir.

Tablo 4.58'de görüldüğü gibi 22 öğretmen adayının 25 soruya vermiş oldukları toplam 550 cevaptan uygulama öncesi doğru cevap sayısı 227, yüzdesi 41,27, yanlış cevap sayısı 287, yüzdesi 52,18 ve yanıtsız cevap sayısı 36, yüzdesi 6,55'dir. Uygulama sonrası ise doğru cevap sayısı 506, yüzdesi 92,00 ve yanlış cevap sayısı 44, yüzdesi 8,00'tür. Öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgisi anketinden aldıkları puanlar doğru cevap sayılarıyla eşdeğerdir. Öğretmen adaylarının uygulama sonrası doğru sayıları uygulama öncesine göre 279 sayı, puanları 279 puan, doğru ve puan yüzdeleri ise %50,73 artmıştır. Bu artışlar ders tasarımının bu hedefe etkisini ortaya koymaktadır. Dersin uygulamasından sonra 22 öğretmen adayının Hedef 2'ye ulaşma yüzdesi %92,00 gibi çok yüksek bir orana ulaşmıştır.

Öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerine dair uygulama öncesi ve sonrası ortalama, standart sapma, minimum ve maksimum puanları Tablo 4.59'da verilmiştir. Ortalama, minimum ve maksimum puanlar 25 (25x1) tam puan üzerinden değerlendirilmiştir.

Tablo 4.59. Öğretmen Adaylarının *İspatla İlgili Pedagojik Alan Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Ortalama, Standart Sapma, Minimum ve Maksimum Puanları

	N	$\bar{x}$	ss	Min	Max
Uygulama Öncesi	22	10,32	2,57	5,00	16,00
Uygulama Sonrası	22	23,00	2,09	19,00	25,00

Bir öğretmen adayı ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini ölçmek için geliştirilen İSPABA'ndeki kendisine sorulan 25 sorudan en fazla 25 (25x1) puan alabilmektedir. 22 öğretmen adayının uygulama öncesi anketten aldığı puanların ortalaması 10,32 gibi düşük bir oran iken uygulama sonrasında 23,00 gibi çok yüksek bir orana yükselmiştir. Öğretmen adaylarının uygulama sonrası ortalama puanları uygulama öncesine göre 25 tam puan üzerinden 12,68 puan artmıştır. Yine tablodan uygulama öncesi standart sapmanın 2,57, uygulama sonrası standart sapmanın 2,09 olduğu görülmektedir. Uygulama öncesinde 22 öğretmen adayından ankette minimum puan alan öğretmen adayının puanı 5,00 iken, uygulama sonrasında 22 öğretmen adayından ankette minimum puan alan öğretmen adayının puanı 19,00'dır. Yine uygulama öncesinde 22 öğretmen adayından ankette maksimum puan alan öğretmen adayının puanı 16,00 iken, uygulama sonrasında 22 öğretmen adayından ankette maksimum puan alan öğretmen adayının puanı 25,00'dır. Buradan ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerine ait minimum ve maksimum puanları artırdığı söylenebilir.

Tablo 4.58 ve Tablo 4.59'dan öğretmen adaylarının uygulamadan önce ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinde çok büyük eksiklikler olduğu görülmektedir. Uygulama öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini arttırmış ve dolayısıyla uygulamadan önceki eksikliklerini gidermişlerdir. Buradan ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgi puanlarına olumlu etkisi olduğu söylenebilir.

Ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgi puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olup olmadığını saptamak için veri analiz yöntemi olarak uygulanan Wilcoxon İşaretli Sıralar Testinin (Wilcoxon, 1945) çıktıları Tablo 4.60’da verilmiştir.

Tablo 4.60. Öğretmen Adaylarının *İspatla İlgili Pedagojik Alan Bilgilerine* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Wilcoxon İşaretli Sıralar Test Çıktıları Tablosu

Uygulama Sonrası-Uygulama-Öncesi	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	Z	p
Negatif Sıralar	0^a	0,00	0,00	-4,118*	<0,001
Pozitif Sıralar	22^b	11,50	253,00		
Eşit	0^c				

* Negatif Sıralar Temeline Dayalı, [a] uygulama sonrası puan < uygulama öncesi puan, [b] uygulama sonrası puan > uygulama öncesi puan, [c] uygulama sonrası puan = uygulama öncesi puan.

Tablo 4.60’dan da görüldüğü gibi test çıktıları ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgi puanlarına istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olduğunu $(Z = -4{,}118, p < 0{,}001)$ göstermektedir. Fark puanlarının sıra ortalamalarına ve sıra toplamlarına bakıldığında istatistiksel olarak anlamlı bulunan bu etkinin pozitif sıralar yani uygulama sonrası lehine olduğu görülmektedir. Ayrıca tablodan öğretmen adaylarının tamamının ispatla ilgili pedagojik alan bilgi puanlarını uygulama sonrasında arttırdığı görülmektedir.

Anlamlı etki büyüklüğü $r = \frac{Z}{\sqrt{n}} = \frac{-4{,}118}{\sqrt{22}} = -0{,}88$ olarak hesaplanmıştır. İşaretine bakılmaksızın (mutlak değeriyle) yorumlanan etki büyüklüğü $0{,}88 \geq 0{,}5$ olduğundan ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgi puanlarına uygulama sonrası lehine büyük etkisi olduğu (Cohen, 1988) söylenebilir.

Son olarak öğretmen adaylarının İSPABA’ndeki dört bileşene ve anketin tamamına dair uygulama öncesi ve sonrasına ait frekans, yüzde ve puan dağılımı ayrıntılı ve toplu bir biçimde Tablo 4.61’de verilmiştir.

Tablo 4.61. Öğretmen Adaylarının *İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketindeki Dört Bileşene ve Anketin Tamamına* Dair Uygulama Öncesi ve Sonrasına Ait Frekans, Yüzde ve Puan Dağılımı

			Uygulama Öncesi			Uygulama Sonrası		
			Doğru	**Yanlış**	**Yanıtsız**	**Doğru**	**Yanlış**	**Yanıtsız**
4 BİLEŞEN	Öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgisi	**f (%)**	48 (43,64)	53 (48,18)	9 (8,18)	96 (87,27)	14 (12,73)	0 (0,00)
		p (%)	**48 (43,64)**	0 (0,00)	0 (0,00)	**96 (87,27)**	0 (0,00)	0 (0,00)
	Öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgisi	**f (%)**	24 (21,82)	78 (70,91)	8 (7,27)	102 (92,73)	8 (7,27)	0 (0,00)
		p (%)	**24 (21,82)**	0 (0,00)	0 (0,00)	**102 (92,73)**	0 (0,00)	0 (0,00)
	Öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgisi	**f (%)**	20 (18,18)	74 (67,27)	16 (14,55)	96 (87,27)	14 (12,73)	0 (0,00)
		p (%)	**20 (18,18)**	0 (0,00)	0 (0,00)	**96 (87,27)**	0 (0,00)	0 (0,00)
	Öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgisi	**f (%)**	135 (61,36)	82 (37,27)	3 (1,36)	212 (96,36)	8 (3,64)	0 (0,00)
		p (%)	**135 (61,36)**	0 (0,00)	0 (0,00)	**212 (96,36)**	0 (0,00)	0 (0,00)
TÜM ANKET	**İspatla ilgili pedagojik alan bilgisi**	**f (%)**	227 (41,27)	287 (52,18)	36 (6,55)	506 (92,00)	44 (8,00)	0 (0,00)
		p (%)	**227 (41,27)**	0 (0,00)	0 (0,00)	**506 (92,00)**	0 (0,00)	0 (0,00)

Öğretmen adaylarının aldığı puanlar doğru sayılarına eşittir.

4.5.3. Öğretmen Adaylarının "Dersin Kazanımlarına İlişkin Öz-değerlendirmelerine" Ait Bulgular

Bu kısımda öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgisi kazanımlarına (Kazanım 1 ve Kazanım 2) ve ispatla ilgili pedagojik alan bilgisi kazanımlarına (Kazanım 3, Kazanım 4, Kazanım 5 ve Kazanım 6) ulaşma durumlarına ilişkin öz-değerlendirmelerine ait bulgular sunulmuştur.

4.5.3.1. Öğretmen Adaylarının "*İspatla İlgili Alan Bilgisi Kazanımlarına İlişkin Öz-değerlendirmelerine*" Ait Bulgular

Öncelikle öğretmen adaylarının "öğretmen adayı farklı ispat yöntemlerini bilir ve uygular" ve "öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır" kazanımlarına ulaşma durumlarına ilişkin öz-değerlendirmelerine ait bulgular sunulmuştur.

Tablo 4.62. Öğretmen Adaylarının *İspatla İlgili Alan Bilgisi Kazanımlarına* İlişkin Öz-değerlendirmeleri

Kazanımlar	Kategoriler	f	%
Kazanım 1	Ulaşamadım	0	0,00
	Kısmen ulaştım	2	9,09
	Ulaştım	20	90,91
	Toplam	**22**	**100,00**
Kazanım 2	Ulaşamadım	2	9,09
	Kısmen ulaştım	2	9,09
	Ulaştım	18	81,82
	Toplam	**22**	**100,00**

Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgisinin iki kazanımına ilişkin öz-değerlendirmeleri İSABA ve mülakatlardan elde edilen bulgularla uyumludur. 18 öğretmen adayı iki kazanıma da ulaştığını belirtmiştir. Örneğin ÖA20 kodlu öğretmen adayının öz-değerlendirmesi aşağıdaki gibidir.

> *ÖA20: Dersi almadan önce hiçbirine sahip değildim. Artık ispat yöntemlerini ve aksiyomatik ispat şemasını biliyorum. İkisini de ulaştım.*

İki öğretmen adayı da iki kazanıma da kısmen ulaştığını belirtmiştir. Örneğin ÖA8 kodlu öğretmen adayının öz-değerlendirmesi aşağıdaki gibidir.

> *ÖA8: Aslında iki kazanıma da kısmen ulaştım. Hala tam iyi değilim eksiklerim var.*

4.5.3.2. Öğretmen Adaylarının "*İspatla İlgili Pedagojik Alan Bilgisi Kazanımlarına İlişkin Öz-değerlendirmelerine*" Ait Bulgular

Bu kısımda öğretmen adaylarının "öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit eder", "öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklar", "öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirler" ve "öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder" kazanımlarına ulaşma durumlarına ilişkin öz-değerlendirmelerine ait bulgular sunulmuştur.

Tablo 4.63. Öğretmen Adaylarının *İspatla İlgili Pedagojik Alan Bilgisi Kazanımlarına* İlişkin Öz-değerlendirmeleri

Kazanımlar	Kategoriler	f	%
Kazanım 3	Ulaşamadım	1	4,55
	Kısmen ulaştım	1	4,55
	Ulaştım	20	90,91
	Toplam	**22**	**100,00**
Kazanım 4	Ulaşamadım	1	4,55
	Kısmen ulaştım	1	4,55
	Ulaştım	20	90,91
	Toplam	**22**	**100,00**
Kazanım 5	Ulaşamadım	1	4,55
	Kısmen ulaştım	1	4,55
	Ulaştım	20	90,91
	Toplam	**22**	**100,00**
Kazanım 6	Ulaşamadım	0	0,00
	Kısmen ulaştım	1	4,55
	Ulaştım	21	95,46
	Toplam	**22**	**100,00**

Öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgisinin dört kazanımına ilişkin öz-değerlendirmeleri İSPABA ve mülakatlardan elde edilen bulgularla uyumludur. 20 öğretmen adayı dört kazanıma da ulaştığını belirtmiştir. Örneğin ÖA3 kodlu öğretmen adayının öz-değerlendirmesi aşağıdaki gibidir.

> *ÖA3: Bu derse başlamadan önce bu kazanımların hiçbirine sahip değildim. Bu ders sürecinde bütün kazanımlara ulaştım.*

Bu 20 öğretmen adayı dışındaki bir öğretmen adayı Kazanım 6 dışındaki diğer üç kazanıma ulaşamadığını belirtmiştir. Diğer öğretmen adayının da öz-değerlendirmesi dört kazanıma da kısmen ulaştığı şeklindedir. ÖA9 kodlu öğretmen adayının öz-değerlendirmesi aşağıdaki gibidir.

> *ÖA9: Bu kazanımlar da ben biraz eksiğim. Çünkü bu konulara fazla çalışmadım. Alan bilgisine yöneldim. Dört kazanımı da azar azar öğrendiğimi düşünüyorum.*

4.5.4. Öğretmen Adaylarının "Uygulama Sürecine Yönelik Değerlendirmelerine" Ait Bulgular

Bu kısımda öğretmen adaylarının ders içeriğine, dersin veriliş yöntemine, dersin değerlendirme sistemi ve değerlendirme araçlarına ilişkin görüşlerine yer verilmiştir. Ayrıca dersin daha verimli olması için öğretmen adaylarının önerilerine yer verilmiştir.

4.5.4.1. Öğretmen Adaylarının "*Ders İçeriğine İlişkin Değerlendirmelerine*" Ait Bulgular

Öğretmen adaylarının ders içeriğine yönelik değerlendirmeleri ders içeriğinin güçlü ve zayıf yönlerine ilişkin değerlendirmeler olmak üzere iki çerçevede ele alınmıştır.

Tablo 4.64. Öğretmen Adaylarının *Ders İçeriğinin Güçlü Yönlerine* İlişkin Görüşleri

Kategoriler	f	%
Öğretmen adayları için gerekli, yeterli ve faydalı bilgiler içermesi	15	68,18
Öğretmen olduklarında kullanacakları bilgileri içermesi	11	50,00
Tüm ispat yöntemlerini içermesi	7	31,82
Ders içeriğindeki ispatların aksiyomatik seviyede yapılması	7	31,82
Kalan öğrencilik hayatlarında kullanacakları bilgileri içermesi	4	18,18
İspatla ilgili kapsamlı bilgiler içermesi	4	18,18
Diğer konularının anlaşılmasını sağlayacak bilgiler içermesi	2	9,09
Öğretmen adaylarının seviyesine uygun bilgiler içermesi	2	9,09
İçeriğin sıkıcı olmayan bilgiler içermesi	2	9,09
Toplam katılımcı sayısı	**22**	

Öğretmen adaylarının sunulan ders içeriğine ilişkin güçlü buldukları yönler Tablo 4.64'de verilmiştir. Öğretmen adaylarının güçlü bulduğu yönler ders içeriği hazırlanırken kullanılan ölçütler ile uyumludur. Örneğin öğretmen adaylarının en fazla belirttiği güçlü yönlerden olan "öğretmen adayları için gerekli, yeterli ve faydalı bilgiler içermesi", "öğretmen olduklarında kullanacakları bilgileri içermesi" ve "kalan öğrencilik hayatlarında kullanacakları bilgileri içermesi" kategorileri "faydalılık" ve "sosyal gerçeklerle tutarlılık" ölçütleri ile uyuşmaktadır. "İçeriğin sıkıcı olmayan bilgiler içermesi" kategorisi "ilgi çekicilik" ölçütü ile uyuşmaktadır. "Öğretmen adaylarının seviyesine uygun bilgiler içermesi" kategorisi "öğrenebilirlik" ölçütü ile uyuşmaktadır. "Tüm ispat yöntemlerini içermesi", "ders içeriğindeki ispatların aksiyomatik seviyede yapılması" ve yine "kalan öğrencilik hayatlarında kullanacakları bilgileri içermesi" ve "öğretmen olduklarında kullanacakları bilgileri içermesi" kategorileri "hedeflere uygunluk" ölçütü ile uyuşmaktadır. "İspatla ilgili kapsamlı bilgiler içermesi" kategorisi de "bilimsellik" ölçütü ile uyuşmaktadır.

Tablo 4.65. Öğretmen Adaylarının *Ders İçeriğinin Zayıf Yönlerine* İlişkin Görüşleri

Kategoriler	f	%
İspatla ilgili güçlük yaşayan ortaöğretim öğrencileriyle birlikte ders işlenmemesi ya da bu güçlükleri yaşayan öğrencilerin videolarının sınıfta izletilmemesi	1	4,55
Pedagojik alan bilgisine verilenden daha fazla yer verilmemesi	1	4,55
Genel tekrar yapılmaması	1	4,55
Toplam katılımcı sayısı	**22**	

"İspatla ilgili güçlük yaşayan ortaöğretim öğrencileriyle birlikte ders işlenmemesi ya da bu güçlükleri yaşayan öğrencilerin videolarının sınıfta izletilmemesi" eleştirisi çok haklı bir eleştiridir. Bu araştırmanın uygulama aşamasında ispatla ilgili pedagojik alan bilgisi öğretmen adaylarına teori üzerinde kazandırılmaya çalışılmıştır. Gerçek sınıf ortamında öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi ve geliştirilmesi dersin yeniden tasarım aşamasında dikkate alınacaktır. Bu çözüm önerisi "pedagojik alan bilgisine verilenden daha fazla yer verilmemesi" değerlendirmesinin de bir çözümü olabilir. Bir diğer önemli görüş de genel tekrar yapılmaması olarak belirtilmiştir. Derslerde her ispat yöntemine bir hafta ayrılmıştır ve o hafta da yöntemi öğretmen adaylarına kavratmak adına sadece o yöntemle ilgili örnekler yapılmıştır. Tüm ispat yöntemleriyle ilgili karma örneklerin olduğu bir hafta öğretmen adayları için faydalı olabilirdi. Bu görüş de yeniden tasarım aşamasında dikkate alınacaktır.

4.5.4.2. Öğretmen Adaylarının "*Dersin Veriliş Yöntemine İlişkin Değerlendirmelerine*" Ait Bulgular

Öğretmen adaylarının dersin veriliş yöntemine yönelik değerlendirmeleri dersin veriliş yönteminin güçlü ve zayıf yönlerine ilişkin değerlendirmeler olmak üzere iki çerçevede ele alınmıştır.

Tablo 4.66. Öğretmen Adaylarının *Dersin Veriliş Yönteminin Güçlü Yönlerine* İlişkin Görüşleri

Kategoriler	**f**	**%**
Çalışma yapraklarıyla örnekler ve etkinlikler yapılması	11	50,00
Teknoloji aracılığıyla sunum yönteminin kullanılması	9	40,91
Anlaşılır olması	8	36,36
Eğlenceli, ilgi çekici ve akılda kalıcı olması	8	36,36
Ödevlerle pekiştirilmesi	5	22,73
Öğrenci merkezli olması	3	13,64
Grup çalışması yapılması	3	13,64
Sanal sınıf uygulamasının kullanılması	2	9,09
Beyin fırtınası yapılması	1	4,55
Günlük hayattan örnekler verilmesi	1	4,55
Bireysel çalışma yapılması	1	4,55
Toplam katılımcı sayısı	**22**	

Dersin verilişine yönelik öğretmen adaylarının güçlü bulduğu yönler dersin öğrenme-öğretme durumları düzenlenirken göz önüne alınan TtA ve ADDIE Modelinin özellikleri ile etkili ispat öğretiminin gereksinimleri ile uyumludur. "Çalışma yapraklarıyla örnekler ve etkinlikler yapılması" kategorisi öğretmen adayları tarafından dersin veriliş yöntemine ilişkin en güçlü yön olarak belirtilmiştir. Çalışma yapraklarıyla örnekler ve etkinlikler yapılması hem zamanın tasarruflu kullanılması, hem grup çalışmalarında hem de bireysel çalışmalarda kullanılması açısından uygulama sürecinde öğrenci merkezli yaklaşıma olanak tanımıştır. Ayrıca senaryo temelli öğretim için de çalışma yapraklarıyla etkinliklerin çok faydalı olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının belirtmiş olduğu dersin veriliş yöntemine ilişkin güçlü yönlerden bir başkası da "teknoloji aracılığıyla sunum yönteminin kullanılması" da öğretmen adaylarının konu hakkında bilgi sahibi olmaları açısından son derece kullanışlı ve faydalı olmuştur. Dersler bu öğretmen merkezli yaklaşımdan öğrenci merkezli yaklaşıma doğru ilerlemiştir. Dersin anlaşılır, eğlenceli, ilgi çekici ve akılda kalıcı olması ders içeriğinin öğretmen adaylarına planlanan şekilde verilmiş olduğunun da bir göstergesi olmuştur.

Tablo 4.67. Öğretmen Adaylarının *Dersin Veriliş Yönteminin Zayıf Yönlerine* İlişkin Görüşleri

Kategoriler	**f**	**%**
Derslerde aynı kalıpların kullanılmasının yorucu olması	1	4,55
Ödevlerin grup olarak değil bireysel olarak verilmesi	1	4,55
Öğrenciler daha aktif olmalı	1	4,55
Grup çalışmasına daha fazla yer verilmeli	1	4,55
Toplam katılımcı sayısı	**22**	

Derslerde aynı kalıpların kullanılması terminolojik isimlere atıf yapmanın bir zorunluluğudur. Ayrıca ders içeriğinin oluşturulmasında kullanılan "geçerlilik ve güvenirlik" ile "bilimsellik" ölçütlerinin de bir gereğidir. Bu yüzden dersin verilişinde bu ölçütlere sadık kalmak adına bu kalıplar kullanılmıştır. Bir öğretmen adayının belirtmiş olduğu gibi ödevlerin öğretmen adaylarına grup olarak verilmesi tasarım aşamasında tarafımızca düşünülmüş ancak uygun görülmemiştir. Ödevlerin değerlendirme sistemi içerisinde değerlendirme aracı olarak kullanılması ve verilen notların da bireysel olması hasebiyle bu fikir uygun görülmemiştir. Ayrıca grup olarak verilen ödevlerin yapımında gruptaki her katılımcının katkısını belirlemek güç bir durumdur.

4.5.4.3. Öğretmen Adaylarının "*Dersin Değerlendirme Sistemi ve Değerlendirme Araçlarına İlişkin Görüşlerine*" Ait Bulgular

Öğretmen adaylarının dersin değerlendirme sistemi ve değerlendirme araçlarına yönelik görüşleri dersin değerlendirme sistemi ve değerlendirme araçlarının güçlü ve zayıf yönlerine ilişkin değerlendirmeler olmak üzere iki çerçevede ele alınmıştır.

Tablo 4.68. Öğretmen Adaylarının *Dersin Değerlendirme Sistemi ve Değerlendirme Araçlarının Güçlü Yönlerine* İlişkin Görüşleri

Kategoriler	**f**	**%**
Ödevlerin değerlendirme aracı olarak kullanılması	5	22,73
İçerikle alakalı olması	3	13,64
Öğretici özelliğinin olması	3	13,64
Bilgiyi ölçücü nitelikte olması	2	9,09
Öğretmen adaylarının seviyesine uygun olması	1	4,55
Ayırt edici olması	1	4,55
Anketlerin değerlendirme aracı olması	1	4,55
Yeterli sayıda olması	1	4,55
Toplam katılımcı sayısı	**22**	

"Ödevlerin değerlendirme aracı olarak kullanılması", "anketlerin değerlendirme aracı olması" ve "yeterli sayıda olması" kategorileri değerlendirme sistemimizle, "içerikle alakalı olması", "öğretici özelliğinin olması", "bilgiyi ölçücü nitelikte olması", "öğretmen adaylarının seviyesine uygun olması" ve "ayırt edici olması" kategorileri de değerlendirme araçlarımızla alakalı görüşlerdir. Tasarım aşamasında değerlendirme araçları oluşturulurken bu ölçütlerin dikkate alınması ve öğretmen adaylarının da bunları güçlü yön olarak belirtmesi arzu edilene ulaşıldığını göstermektedir.

Tablo 4.69. Öğretmen Adaylarının *Dersin Değerlendirme Sistemi ve Değerlendirme Araçlarının Zayıf Yönlerine* İlişkin Görüşleri

Kategoriler	**f**	**%**
Ödevlerin değerlendirme aracı olarak kullanılması	1	4,55
Hatalardan fazla puan kırılması	1	4,55
Sınavlarda kalıplaşmış cümlelerin kullanılma zorunluluğu	1	4,55
Toplam katılımcı sayısı	**22**	

Öğretmen adaylarından biri ödevlerin değerlendirme aracı olarak kullanılmasına olumsuz görüş bildirmiştir. Ancak Tablo 4.68'de görüldüğü gibi beş öğretmen adayı da ödevlerin değerlendirme aracı olarak kullanılmasını değerlendirme sisteminin güçlü yönü olarak değerlendirmişlerdir. Bir öğretmen adayının belirttiği "hatalardan fazla puan kırılması" haklı bir eleştiri olabilir. Çünkü dersin kazanımları Bloom taksonomisinin (Bloom, Englehart, Furst, Hill ve Krathwohl, 1956) en üst basamağı dikkate alınarak hazırlanmıştır. Puanlama da öğretmen adaylarının bu kazanımlara ulaşıp ulaşılmadığına bakılarak yapılmıştır. Sınavlarda kalıplaşmış cümlelerin kullanılma zorunluluğu dersin veriliş yöntemine ilişkin başka bir öğretmen adayının getirdiği eleştirilerden biridir. Ancak terminolojiye atıf yapmanın önemi düşünüldüğünde bu kullanımların kendilerine fayda sağlayacağı da düşünülebilir.

4.5.4.4. Öğretmen Adaylarının "*Dersin Daha Faydalı Olması İçin Önerilerine*" Ait Bulgular

Öğretmen adaylarının Ders Değerlendirme Anketinde dersin daha faydalı olması için önerileri analiz edilerek Tablo 4.70'daki bulgulara ulaşılmıştır.

Tablo 4.70. Öğretmen Adaylarının *Dersin Daha Faydalı Olması* İçin Önerileri

Kategoriler	**f**	**%**
Bu ders 1. sınıfta verilmeli	9	40,91
Cebir derslerinden önce verilmeli	4	18,18
Sadece bir döneme sıkıştırılmamalı	2	9,09
Seçmeli değil zorunlu olmalı	1	4,55
Ders saati arttırılmalı	1	4,55
Kredisi arttırılmalı	1	4,55
Toplam katılımcı sayısı	**22**	

Bu dersin daha faydalı olması için öğretmen adaylarının önerileri incelendiğinde bu dersin birinci sınıfta ve cebir derslerinden önce verilmesinin onların alan derslerindeki başarılarına daha fazla etki edeceği yönünde bizde kanaat geliştirmiştir. Ancak öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgisine yönelik ön bilgileri yetersiz kalabilir. Bunun için bir "Sadece bir döneme sıkıştırılmamalı" önerisi de dikkate alınarak bu ders öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini geliştirecek şekilde iki farklı dönemde verilebilir. Alan bilgisiyle ilgili kısmı birinci sınıfın birinci döneminde, pedagojik alan bilgisiyle ilgili kısmı da öğretmen adayları eğitim dersleri aldıktan sonra verilebilir.

4.6. Yeniden Analiz Aşamasına Ait Bulgular

Değerlendirme aşamasındaki bulgular dikkate alındığında öğretmen adaylarının dersin hedef ve kazanımlarına ulaştığı görülmektedir. Yani ders tasarımı bu haliyle hedef ve kazanımlara ulaşmada etkili olmuştur. Bu nedenden dolayı ADDIE Modelinin ikinci uygulama ve değerlendirme aşamasına ihtiyaç duyulmadığı görülmektedir. Ancak yine de uygulama aşamasında gözlemlenen ve öğretmen adayları tarafından görüş bildirilen eksikler ders tasarımına eklenecektir. Bu yüzden tasarım tabanlı bu araştırma ADDIE Modelinin ikinci döngüsündeki yeniden tasarım aşaması tamamlanıp sona erdirilecektir.

Bir önceki aşama olan değerlendirme aşamasının çıktıları bu aşamanın girdilerini oluşturmaktadır. Uygulama sürecindeki gözlemler ve değerlendirme aşaması analiz edildiğinde genel bir tekrar yapılmaması ders tasarımı için bir eksikliktir. Derslerde her ispat yöntemine bir hafta ayrılmıştır ancak bu ispat yöntemlerinin tümünün karma örnekler üzerinden işleneceği bir haftaya yer ayrılmamıştır. Tüm ispat yöntemlerine ait örneklerin aynı haftada çözülmesi öğretmen adaylarının hangi soruda hangi ispat yöntemi seçeceklerini düşünmesini sağlayacak ve daha iyi öğrenmelerine olanak tanıyacaktır. Ders tasarımına ait diğer önemli bir eksiklik de öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin yalnızca teori üzerinde geliştirilmesidir. Ancak öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin gerçek sınıf ortamında uygulamalı olarak geliştirilmesi de gerekmektedir. Tasarıma ait bu eksiklikler yeniden tasarım aşamasında iyileştirilmeye çalışılacaktır.

Dersin öğrenme-öğretme durumları oluşturulurken anlatım, soru-cevap, tartışma, problem çözme, örnek olay ve senaryo temelli öğretim yöntemleri (Altun, 2001; Tok, 2017) kullanılmıştır. Ancak öğretmen adaylarının dersin uygulama aşamasını değerlendirmeleri göz önüne alındığında bir öğretmen adayının belirttiği "ispatla ilgili güçlük yaşayan ortaöğretim öğrencileriyle birlikte ders işlenmemesi ya da bu güçlükleri yaşayan öğrencilerin videolarının sınıfta izletilmemesi" hususu dikkate alınarak öğretmen adaylarına çalışma yaprakları üzerinde dağıtılan örnek olayların videolar aracılığıyla da aktarılması yani video temelli öğretim yönteminin de derslerde kullanılması dersin öğrenme-öğretme durumları yeniden düzenlenirken dikkate alınacaktır.

4.7. Yeniden Tasarım Aşamasına Ait Bulgular

Bu aşamada bir önceki aşamadaki hususlar dikkate alınarak ders tasarımına son hali verilmiştir. Yeniden analiz aşamasında belirtildiği gibi uygulama sürecindeki gözlemlerin ve öğretmen adaylarının uygulama sürecine yönelik değerlendirmelerinin analizi sonucunda ders tasarımının iki zayıf yönü ortaya çıkmıştır. Bunlar genel tekrar yapılmaması ve öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerinin sadece teori üzerinde geliştirilmeye çalışılmasıdır. Derslerde genel tekrar yapılması öğrenci beklentileri arasındadır. Öğretmen yetiştirme programlarında teori ve pratik birlikte yürütülmelidir (Baştürk, 2010). Bu nedenlerden dolayı genel tekrar yapılması ve öğretmen adaylarının uygulama sürecinde öğrendikleri ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini uygulayabilecekleri mikro-öğretim uygulamalarının yapılması ders tasarımının kalitesini arttıracaktır. Bu eksiklikleri gidermek adına yeniden tasarım aşamasında bu hususlar dikkate alınıp ders içeriği ve akışı yaniden düzenlenmiştir. Ders içeriği ve ders akışının son hali Tablo 4.71'de sunulmuştur.

Yeniden tasarım aşamasında ders içeriği ve ders akışıyla birlikte dersin öğrenme-öğretme durumları da geliştirilmiştir. Dersin öğrenme-öğretme ortamları yeniden düzenlenirken birinci döngüde oluşturulan öğrenme-öğretme durumlarındaki öğretim yöntemlerine ilaveten video temelli öğretim yönteminin de derslerde kullanılmasına karar verilmiştir. Öğretmen adaylarına çalışma yaprakları üzerinde verilen örnek olayların videolarda izletilmesi ve öğretmen adaylarıyla sınıf içerisinde tartışılması öğretmen adaylarının öğrenmelerinde daha etkili olacaktır. Yeniden tasarım aşamasındaki öğrenme-öğretme durumları düzenlenirken örnek olay kütüphanelerinden ulaşılacak 15-20 dakikalık videoların (Şahin, Atasoy, Somyürek, 2010) derslerde kullanılmasına karar verilmiştir.

Tablo 4.71. Ders İçeriği ve Akışının Son Hali

Hafta	Ders Akışı
1	Aksiyomatik yapı içerisinde ispatın modern bileşenleri
2	İspat ve ispatlama
3	İspat şemaları ve ispat şemaları üzerine etkinlik
4	İspatlamaya yönelik öğrenci güçlükleri, bu güçlüklerin nedenleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri İspatlamaya yönelik öğrenci güçlükleri, bu güçlüklerin nedenleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri üzerine etkinlik
5	Tümevarımla ispat yöntemi Tümevarımla ispat yöntemi ile ilgili örnekler Tümevarımla ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri Tümevarımla ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler ve nedenleri Tümevarımla ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri
6	Vize Sınavı
7	Doğrudan ispat yöntemi Doğrudan ispat yöntemi ile ilgili örnekler Doğrudan ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri Doğrudan ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler ve nedenleri Doğrudan ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri
8	Durum yoluyla ispat yöntemi Durum yoluyla ispat yöntemi ile ilgili örnekler Durum yoluyla ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri Durum yoluyla ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler ve nedenleri Durum yoluyla ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri
9	Tüketerek ispat yöntemi Tüketerek ispat yöntemi ile ilgili örnekler Tüketerek ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri Tüketerek ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler ve nedenleri Tüketerek ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri
10	Çelişki ile ispat yöntemi Çelişki ile ispat yöntemi ile ilgili örnekler Çelişki ile ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri Çelişki ile ispat yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler ve nedenleri Çelişki ile ispat yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri
11	Olmaya ergi yöntemiyle ispat Olmaya ergi yöntemiyle ispat ile ilgili örnekler Olmaya ergi yöntemiyle ispat ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri Olmaya ergi yöntemiyle ispat ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler ve nedenleri Olmaya ergi yöntemiyle ispat ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri
12	Aksine örnek verme yöntemi Aksine örnek verme yöntemi ile ilgili örnekler Aksine örnek verme yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler ve nedenleri Aksine örnek verme yöntemi ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler ve nedenleri Aksine örnek verme yöntemi ile ilgili öğretmen adaylarının/öğrencilerin yaşadığı/yaşayabileceği güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri
13	Tüm ispat yöntemlerini içeren genel tekrar
14	Öğretmen adaylarının gerçek sınıf ortamında ortaöğretim öğrencilerine mikro-öğretim denemeleri
15	Bir önceki haftanın alan ve pedagojik alan bilgisi açısından değerlendirilmesi

BÖLÜM V: SONUÇLAR

Bu bölümde araştırmanın bulgularına dayalı olarak araştırmanın yargılarına, tartışmalarına ve önerilerine yer verilmiştir.

5.1. Yargılar ve Tartışmalar

Bu bölümde uygulama öncesine yönelik, uygulamaya yönelik ve uygulama sonrasına yönelik yargılar verilmiştir. Uygulama öncesine yönelik yargılar öğretmen adaylarının uygulama öncesindeki ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerine yönelik yargılardır. Uygulamaya yönelik yargılar sürece yönelik yargılardır. Uygulama sonrasına yönelik yargılar ise öğretmen adaylarının uygulama sonrasındaki ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerine yönelik yargılardır.

5.1.1. Uygulama Öncesine Yönelik Yargılar ve Tartışmalar

Uygulama öncesine yönelik yargı ve tartışmalar ispatla ilgili alan bilgisine yönelik yargı ve tartışmalar ile ispatla ilgili pedagojik alan bilgisine yönelik yargı ve tartışmalar olmak üzere iki alt başlıkta incelenmiştir.

5.1.1.1. İspatla İlgili Alan Bilgisine Yönelik Yargı ve Tartışmalar

Öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgileri incelendiğinde uygulama öncesinde doğru sayılarının beklenenin çok altında olduğu görülmektedir. Öğretmen adayları genel matematik konularından oluşan İSABA'ndeki sorulara genellikle yanlış cevap vermişlerdir. Bu sonuç Schwarz ve Kaiser'in (2009) çalışmasındaki öğretmen adaylarının çok zor olmayan ispatları bile gerçekleştiremedikleri sonucuyla uyumludur. Ayrıca bu sonuçlar Şahin'in (2016) çalışmasındaki öğretmen adaylarının temel düzeydeki ispatları bile yapmada zorlandıkları sonucuyla da uyumludur. Öğretmen adayları anketteki soruları ispatlarken çoğunlukla ispat yöntemi bile seçmemişler, problem çözer gibi ispatlama yapmaya çalışmışlardır. Öğretmen adaylarının çoğunluğu tüketerek ispat yönteminin kullanıldığı soru dışındaki ispat yöntemlerinin kullanıldığı sorularda başarısız olmuşlardır. Mülakatlarda öğretmen adaylarına kullandıkları ispat yöntemleri sorulduğunda ispat yöntemlerinin çoğunu bilmediklerini belirtmişlerdir. Bu sonuçlar Miral'ın (2013) öğretmen adaylarının ispat yöntemlerinin içeriklerini bilmedikleri sonucuyla, Pekşen-Sağır'ın (2013) öğretmen adaylarının ispat yöntemlerini seçmede ve uygulamada zorluklar yaşadıkları sonuçlarıyla uyuşmaktadır. Ayrıca bu sonuçlar Demiray'ın (2013) çalışmasındaki öğretmen adaylarının olmayana ergi yöntemi ile ispatlama becerilerinin düşük olması, Stylianides, Stylianides ve Philippou'nun (2007) ve Güler, Özdemir ve Dikici'nin (2012) öğretmen adaylarının tümevarım yöntemi ile ilgili güçlükler yaşadıkları sonuçlarıyla da uyuşmaktadır.

Öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şemaları incelendiğinde uygulama öncesinde analitik ispat şemalarının en az kullanılan şema olduğu görülmektedir. Bu sonuç Stylianou, Chae ve Blanton'un (2006) çalışmasındaki en az kullanılan şemanın analitik şema olması sonucuyla uyumludur. Öğretmen adayları uygulama öncesinde tüm ana ispat şemalarını kullanmışlardır. Bu sonuç Stylianou, Chae ve Blanton'un (2006), Şengül ve Güner'in (2013) ve İskenderoğlu'nun (2010) çalışmalarındaki öğretmen adaylarının üç ana şemayı da kullandıkları sonucuyla uyuşmaktadır. Bunları kullanma sıklıkları ise sırasıyla dışsal, deneysel ve analitik şemalar şeklindedir. Bu sonuç Çontay'ın (2017) çalışmasındaki öğretmen adaylarının en sık kullandığı şemanın dışsal şemalar olmasıyla uyuşmakta fakat Stylianou, Chae ve Blanton'un (2006) çalışmasındaki en sık kullanılan şemanın deneysel ispat şemaları olması sonucuyla uyuşmamaktadır. Öğretmen adayları için en istendik şema olan analitik şemanın en az, en istenmedik şema olan dışsal şemanın da en sık kullanılan şema olması öğretmen adaylarının ispatlama konusundaki eksiklerini açıkça ortaya koymaktadır. Mülakatlarda öğretmen adaylarının yaptıkları ispatlar üzerine sorulan sorularda analitik şemanın özeliklerini ve gereksinimlerini bilmedikleri ortaya çıkmıştır.

Öğretmen adayları uygulama öncesinde tüm alt ispat şemalarını kullanmışlardır. Öğretmen adaylarının sahip oldukları alt şemalar incelendiğinde uygulama öncesinde en sık kullanılan alt şema sembolik, en az kullanılan alt şema ise aksiyomatik şemadır. Aslında öğretmen adaylarının sahip olması beklenen ispat şemaları düzeyi ana ispat şemaları bazında analitik ispat şemaları, alt ispat şemaları bazında ise aksiyomatik ispat şemadır. Öğretmen adayları dışsal ispat şemalarından en çok sembolik, deneysel ispat şemalarından örnek-temelli ve analitik ispat şemalarından ise dönüşümcü ispat şemasını kullanmışlardır. Öğretmen adaylarının dışsal ispat şemalarından en çok sembolik ispat şemalarını kullanmalarının sebebi sembolleri manipüle ederek sonuca ulaşabildiklerini sanmaları ve kendilerinin de bundan ikna olmalarıdır. Öğretmen adaylarının deneysel ispat şemalarından en çok örnek-temelli ispat şemalarını kullanmalarının sebebi örnekle doğrulamanın onları önermenin doğruluğuna ikna etmesidir. Bu sonuç Knuth (2002b) ve Köğce'nin (2012) çalışmalarındaki öğretmen adaylarının sayısal değerlerle veya örnekle doğrulamayı ispat sandıkları sonuçlarıyla uyuşmaktadır. Öğretmen adaylarının analitik ispat şemalarından en çok dönüşümcü ispat şemalarını kullanmalarının sebebi de aksiyomatik yapı içerisinde işlem yapamamalarıdır.

Uygulama öncesinde öğretmen adayları tümevarımla ispat yöntemi sorusunda herhangi bir ispat şemasına sahip olamamışlardır. Doğrudan ispat yöntemi sorusunda deneysel, durum yoluyla ispat, olmayana ergi yöntemiyle ispat, aksine örnek verme yöntemi ile ispat ve çelişki ile ispat sorularında dışsal, tüketerek ispat yöntemi sorusunda ise analitik ispat şemalarını kullamışlardır. Öğretmen adayları ispat yöntemlerinin çoğunda dışsal ispat şemasını kullanmışlardır. Geçerli ispat yapamayan öğretmen adayları için en zahmetsiz, en kolay başvurulan şema dışsal ispat şemasıdır.

Uygulama öncesinde öğretmen adayları en sık ispat yöntemleri ile ilgili güçlükler yaşamışlardır. İkincil olarak ispatın doğasını kavrama güçlükleri yaşamışlardır. Bu öğretmen adaylarının ispatın ne olduğunu bilmediklerini ortaya koymuştur. Bu sonuçlar Knuth (2002b), Köğce (2012) çalışmalarındaki bulgular ile uyumludur. Sadece bu sonuçlar bile öğretmen adayları için ispatla ilgili alan bilgilerini geliştirecek bir müdahalenin gerekliliğini ortaya koymuştur.

Tüm bunlar birlikte düşünüldüğünde uygulamadan önce öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerinin ve ispatlama becerilerinin arzu edilen düzeyin çok altında olduğu görülmektedir. Bu sonuçlar literatürdeki öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgileri ile ispatlama becerilerindeki noksanlıklara dikkat çeken araştırmaların (Knuth 2002b; Sarı, Altun ve Aşkar, 2007; Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007; Dane, 2008; İmamoğlu, 2010; İskenderoğlu, 2010; Öçal ve Güler, 2010; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Köğce, 2012; Demiray, 2013; Miral, 2013; Pekşen-Sağır, 2013; Şengül ve Güner, 2013; İmamoğlu ve Yontar-Toğrol, 2015; Oflaz, Bulut ve Akçakın, 2016; Polat ve Akgün, 2016; Şahin, 2016; Çontay, 2017) sonuçlarıyla uyuşmaktadır.

5.1.1.2. İspatla İlgili Pedagojik Alan Bilgisine Yönelik Yargı ve Tartışmalar

Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgileri incelendiğinde uygulama öncesinde doğru sayılarının yanlış sayılarından daha az olduğu görülmektedir. Özellikle matematiksel dil kullanımındaki güçlüğü, problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğü öğretmen adaylarının çoğunluğu tespit edememiştir. Mülakatlarda ise öğretmen adaylarının hiçbirinin problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğü tespit edemedikleri görülmüştür.

Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgileri incelendiğinde uygulama öncesinde doğru sayılarının çok az olduğu görülmektedir. Öğretmen adayları özellikle didaktik ve epistemolojik nedenleri açıklamada başarılı olamamışlardır. Mülakatlarda yine bu nedenleri açıklayamamışlar ve güçlüklerin nedenlerinin daha çok öğrencinin kendisinden kaynaklı olduğunu belirtmişlerdir.

Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgileri incelendiğinde uygulama öncesinde doğru sayılarının çok az olduğu görülmektedir. Mülakatlarda öğretmen adaylarının özellikle akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme, DGY ve grafik çizimi ve anlamlandırma stratejilerini belirleyemedikleri görülmüştür. Öğretmen adayları problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlüğü tespit edemedikleri için akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme stratejisini belirleyememişlerdir. Öğretmen adayları uygulama öncesinde GeoGebra ve Cabri gibi dinamik geometri yazılımlarının nasıl kullanıldığına dair bir ders almışlar fakat pedagojik kullanımına dair bir ders almadıkları için DGY ve grafik çizimi stratejini de belirleyememişlerdir. Ayrıca öğretmen adayları ispatlamaya yönelik temsiller geliştiremedikleri için anlamlandırma stratejisini de belirleyememişlerdir.

Öğretmen adaylarının öğrencilerin ispat şemalarını tespit etme bilgileri incelendiğinde bazı şemaları tespit etmede başarılı olsalar da yine de genel olarak arzu edilen seviyeye ulaşamadıkları görülmektedir. Özellikle sembolik, örnek-temelli, dönüşümcü ve aksiyomatik ispat şemalarını tespit etmede başarısız olmuşlardır. Mülakatlarda ise öğretmen adaylarının sembolik ve dönüşümcü ispat şemalarını hiç tespit edemedikleri görülmüştür. Sembolik ispat şemalarını tespit edememelerinin sebebi anlamsız sembol manipülasyonlarını fark edememeleridir. Dönüşümcü ispat şeması da en zor tespit edilen ispat şemasıdır.

Tüm bunlar birlikte düşünüldüğünde uygulamadan önce öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin arzu edilen düzeyin çok altında olduğu görülmektedir. Bu sonuçlar literatürdeki öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerindeki eksikliklere dikkat çeken araştırmaların sonuçlarıyla (Heinze ve Reiss, 2004; Yoo, 2008; Lesseig, 2011; Pasigna ve Herrera, 2014; Knipping ve Reid, 2015; Lesseig, 2016) uyuşmaktadır.

5.1.2. Uygulama Aşamasına Yönelik Yargı ve Tartışmalar

Uygulama aşamasına yönelik yargı ve tartışmalar uygulama aşamasında yapılan gözlemlerin analizi ve öğretmen adaylarının sürece yönelik görüşleri doğrultusunda ele alınmıştır. Öğretmen adaylarının ispatın modern bileşenlerini kavrama güçlükleri yaşadıkları (Dane, 2008; Öçal ve Güler 2010; Polat ve Akgün, 2016) dikkate alınıp dersin uygulama aşamasına ispatın modern bileşenleriyle başlamak öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerinin gelişiminde önemli bir yere sahip olmuştur. Ayrıca öğretmen adaylarının ispat yöntemleri ile ilgili yaşadıkları güçlükler (Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007; Güler, Özdemir ve Dikici 2012; Demiray, 2013; Miral, 2013; Pekşen-Sağır, 2013) göz önüne alınıp tüm ispat yöntemlerinin her birine birer hafta ayrılmış ve ispat yöntemleri en uygun sıralamada anlatılmıştır. Bu da onların ispat yöntemlerini öğrenmelerine fazlasıyla katkı sağlamıştır. Çünkü ispat konusunun öğretimi ile ilgili süreçler doğru bir şekilde uygulandığında öğrencilerin anlamalarına ve öğrenmelerine katkı sağlarlar (Altıparmak ve Öziş, 2005). Derslerin bu sıralamada ilerlemesi öğretmen adaylarının ispat şemalarını analitik düzeye çıkarmak için de etkili olmuştur. Öğretmen adaylarının en sık kullanması gereken ama bunu yapamadıkları ana şemanın analitik şema

(Stylianou, Chae ve Blanton 2006; Çontay, 2017) olduğu dikkate alınıp derslerde analitik ispat şemalarının özellikleri tanıtılıp tüm ispat yöntemleri için hep aksiyomatik düzeyde ispat yapılmıştır. Bu öğretmen adaylarına bir aşinalık ve alışkanlık kazandırmış ve öğretmen adaylarının kullandıkları ispat şemalarını geliştirmiştir. Bunların tümü birlikte düşünüldüğünde ders tasarımı öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerine katkı sağlamıştır.

Herhangi bir konuya ilişkin öğrencilerin yaşadıkları güçlükleri tespit edebilmenin eğitim öğretimde ilk önemli adım olduğu (Gürbüz, Toprak, Yapıcı ve Doğan, 2011), bu güçlüklerinin nedenlerinin bilinmesinin de diğer bir önemli adım olduğu (Gürbüz ve Erdem, 2017) ve çeşitli öğretim stratejilerinin belirlenmesinin de öğrencilerin başarısını arttırdığı (Cücük, Kara, Şiraz ve Bay, 2018) göz önüne alınıp her bir ispat yöntemine ait öğrenci güçlükleri, bu güçlüklerin nedenleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri ayrı ayrı çalışılmıştır. Bu öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin gelişmesinde etkili olmuştur.

İspatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgisi öğretmen adaylarının hem öğrencilik hem de gelecekteki öğretmenlik hayatlarında kullanacakları faydalı bilgilerden oluşmaktadır. Ders içeriği de bu bağlamda hazırlanmıştır. Öğretmen adaylarının dersin içeriğine yönelik en güçlü buldukları yön de onlar için gerekli, faydalı ve kullanacakları bilgileri içermesiydi. Zaten bunlar ders içeriğini oluştururken göz önüne alınması gereken ölçütlerdi (Baki, 2015).

Dersin uygulama aşamasından gözlemlendiği ve öğretmen adaylarının değerlendirmelerinden analiz edildiği kadarıyla ders içeriğinin en zayıf yönleri genel bir tekrar yapılmaması ve öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin teori üzerinde geliştirilmeye çalışılmasıydı. Bu zayıf yönleri iyileştirmek adına dersin yeniden tasarım aşamasında bu hususları içeren yeni bir ders tasarımı yapıldı. Tüm ispat yöntemlerinin anlatılıp bitirildiği on üçüncü hafta tüm ispat yöntemlerini içeren genel bir tekrar yapılmasına karar verildi. Diğer bir zayıf yön olan öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin teori üzerinde geliştirilmesini iyileştirmek adına pedagojik alan bilgisi üzerine teorinin ve tüm ispat yöntemlerinin ardından on dördüncü hafta öğretmen adaylarının gerçek sınıf ortamında ortaöğretim öğrencilerine mikro-öğretim denemeleri yapmalarına bir sonraki haftada bu çalışmaların ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgisi açısından değerlendirilmesine karar verilmiştir. Çünkü öğretmenlik mesleğinde derslerde öğrenilen teorik bilgilerin gerçek sınıf ortamında "uygulamaya nasıl ve hangi şekilde aktarıldığı eğitim araştırmalarında önemli bir yere sahiptir" (Emre-Akdoğan ve Yazgan-Sağ, 2018, s. 94).

Dersin uygulama aşamasında öğretmen adaylarına çalışma yaprakları dağıtılıp örnekler ve etkinlikler yapılması onları sürece dâhil ederek onların ispatla ilgili hem alan hem de pedagojik alan bilgilerinin gelişimine çok büyük katkı sağlamıştır. Ayrıca çalışma yaprakları zaman tasarrufu açısından çok değerli materyallerdi. Öğretmen adaylarının dersin veriliş yöntemine ilişkin en güçlü buldukları yön çalışma yapraklarıyla örnekler ve etkinlikler yapılmasıydı. Benzer şekilde Ormancı ve Şaşmaz-Ören (2010) öğretmen adaylarının derslerde çalışma yapraklarının kullanılmasının dersin işlenişi açısından yararlı aynı zamanda dersin verimliliği açısından da zaman tasarrufu sağladığı görüşünde olduklarını belirtmişlerdir. Bu çalışmalarla geleneksel ispat öğretiminin dışına çıkılmıştır. Geleneksel ispat öğretiminde öğretmenler ispatı öğrencilerin düşünüp yapmasına fırsat tanımaksızın teoremin ardından hemen tahtaya yazmaktadır (Aydoğdu-İskenderoğlu, Baki ve Palancı, 2011). Aksine ispat öğretiminde öğretmen ve öğrenci sosyal etkileşim içinde olmalıdır (Almeida, 2001). Pedagojik kaynaklı bu öğretim sorunu öğrencilerin dersleri geçmek için teoremlerin ispatlarını öğrenmek yerine ezber yapmalarına sebep olmaktadır (Doruk ve Kaplan, 2013). Bu sorunların üstesinden gelmek için ispatın ürün olarak sunulması yerine öğrencinin sürece dâhil edilerek aktif katılımının sağlandığı öğrenci merkezli yaklaşım öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerine katkı sağlamıştır. Yoo (2008) da çalışmasında etkili ispat öğretimi için ürün odaklı öğretim yerine süreç odaklı öğretimin tercih edilmesi gerektiğini vurgulamıştır.

Dersin uygulama aşamasında gerçek olaylardan oluşan örnek olay yöntemi ile gerçekleşmesi mümkün olan senaryo temelli öğretim yönteminin kullanılmasının öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin geliştirilmesinde son derece etkili olduğu gözlemlenmiştir. Bakaç'a (2014) göre de öğrenci merkezli bir öğretim yöntemi olan senaryo temelli öğretim yöntemi matematik derslerindeki başarıyı arttırmaktadır. Farklı disiplinlerde olduğu gibi matematik öğretmen eğitiminde kullanılan bir yöntem olan örnek olay yöntemi de öğrencilere gerçek olaylara öğretmen gözüyle bakmaları avantajını sağlamaktadır (Şahin, Atasoy ve Somyürek, 2010). Derslerde alan bilgisine yönelik olarak çalışılan ispatların ortaöğretim ve lisans düzeyinde olması, pedagojik alan bilgisine yönelik örnek olay ve senaryolardaki konuların ortaöğretim konusu, öğrencilerin de ortaöğretim öğrencisi olması öğretmen adaylarının gelişimlerine etki etmiştir. Ayrıca örnek olay ve senaryo çalışmalarında öğretmen adaylarının öğretmen rolünü üstlenmeleri derse olan ilgilerini arttırmıştır.

Öğretmen adaylarına ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmek amacıyla verilen ödevlerin değerlendirme aracı olarak kullanılması da öğretmen adaylarının ödevleri tam ve zamanında yapmalarını sağladığı için amacına ulaşmıştır. Öğretmen adaylarının değerlendirme sistemi ve araçlarına ilişkin değerlendirmelerinde en güçlü buldukları yön de buydu. Zaten verilen ödevler değerlendirilmediği ve dönüt sağlanmadığı sürece öğrenciler ödevlere karşı ilgisizleşirler aksine ödevlere not verilip değerlendirildiğinde başarıya katkı sağlarlar (Ilgar, 2005).

Uygulama aşamasından sonra öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerinde aşağıdaki değişiklikler meydana gelmiştir.

5.1.3. Uygulama Sonrasına Yönelik Yargı ve Tartışmalar

Uygulama sonrasına yönelik yargı ve tartışmalar ispatla ilgili alan bilgisine yönelik yargı ve tartışmalar ile ispatla ilgili pedagojik alan bilgisine yönelik yargı ve tartışmalar olmak üzere iki alt başlıkta incelenmiştir.

5.1.3.1. İspatla İlgili Alan Bilgisine Yönelik Yargı ve Tartışmalar

Öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgileri incelendiğinde uygulama sonrasında doğru sayılarının beklenen seviyeye ulaştığı görülmektedir. Öğretmen adayları genel matematik konularından oluşan İSABA'ndeki sorulara genellikle doğru cevap vermişlerdir. Öğretmen adayları bu kez anketteki soruları ispatlarken uygun ispat yöntemini seçmişler, yöntemi uygulayabilmişler ve geçerli ispatlara ulaşabilmişlerdir. Mülakatlarda öğretmen adaylarının ispat yöntemlerini bilinçli olarak seçtikleri, ispat yöntemini seçerken nelere dikkat etmeleri gerektiğini bildikleri, seçtikleri ispat yöntemlerinin mantığını anladıkları, yöntemin adımlarını bildikleri ve de geçerli ispatlara ulaşabildikleri görülmüştür. Sadece birinci soruda uygun yöntemi seçmelerine rağmen ispat yöntemini uygulamada güçlükler yaşamışlardır. Ders tasarımı öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgilerini geliştirmiştir.

Öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şemaları incelendiğinde uygulama sonrasında analitik ispat şemalarının en sık kullanılan şema olduğu görülmektedir. Öğretmen adayları uygulama sonrasında da tüm ana ispat şemaları kullanmışlardır. Bunları kullanma sıklıkları ise sırasıyla analitik, dışsal ve deneysel şemalar şeklinde değişmiştir. Öğretmen adayları için en istendik şema olan analitik şemanın en sık kullanılan şema olması öğretmen adaylarının ispatlama konusunda istenen düzeye geldiğini göstermektedir. Mülakatlarda öğretmen adaylarının yaptıkları ispatlar üzerine sorulan sorularda analitik şemanın özeliklerini ve gereksinimlerini bildikleri ve bunları dikkate alarak ispatlama yaptıkları görülmüştür. Ders tasarımı öğretmen adaylarının sahip oldukları ana ispat şemalarını geliştirmiştir.

Öğretmen adayları uygulama sonrasında algısal ispat şeması hariç tüm alt ispat şemalarını kullanmışlardır. Öğretmen adaylarının sahip oldukları alt şemalar incelendiğinde uygulama sonrasında en sık kullanılan alt şema aksiyomatik şemadır. Aslında öğretmen adaylarının sahip olması beklenen ispat şemaları düzeyi ana ispat şemaları düşünüldüğünde analitik şema, alt ispat şemaları düşünüldüğünde ise aksiyomatik şemadır. Öğretmen adaylarının analitik ispat şemalarından aksiyomatik ispat şemasını kullanmaları onların bu konuda geldiği seviyeyi açıkça göstermektedir. Mülakatlarda öğretmen adaylarının ispata başlarken tanım ve aksiyomları kullanmaları, mantıksal çıkarım kurallarıyla işlem düşünmeyi kullanarak genellemeye ulaşmaları, tüm bunları aksiyomatik yapı içerisinde bilinçli olarak yapmaları ve sorulan sorularda aksiyomatik şemanın tüm niteliklerini yansıtmaları gelinen seviyeyi göstermesi açısından anlamlıdır. Ders tasarımı öğretmen adaylarının sahip oldukları alt ispat şemalarını geliştirmiştir.

Uygulama sonrasında öğretmen adayları tümevarımla ispat yöntemi sorusunda dışsal, diğer ispat yöntemi sorularının tümünde de analitik ispat şemalarını kullanmışlardır. Öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgileri ile sahip oldukları ispat şemalarının karşılıklı olarak birbirini biçimlendirdiği görülmektedir.

Uygulama sonrasında öğretmen adayları problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlük yaşamışlardır. Bu güçlük üstesinden gelinmesi en fazla zaman isteyen ve öğretmen adaylarının bilişsel gelişimlerine bağlı olan güçlüktür. Özellikle İSABA'nın birinci sorusu çok fazla problem çözme becerisi ve akıl yürütme gerektiren soru olması bu sonucu doğuran diğer bir etkidir.

Tüm bunlar birlikte düşünüldüğünde uygulamadan sonra öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerinin ve ispatlama becerilerinin arzu edilen düzeye ulaştığı görülmektedir. Ders tasarımı öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerini geliştirmiştir.

5.1.3.2. İspatla İlgili Pedagojik Alan Bilgisine Yönelik Yargı ve Tartışmalar

Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgileri incelendiğinde uygulama sonrasında doğru sayılarının istenilen seviyeye ulaştığı görülmektedir. Öğretmen adayları uygulama sonrasında farklı güçlükleri tespit edebildikleri gibi bunların terminolojik isimlerine de atıf yapabilmişlerdir. Mülakatlarda ise öğretmen adaylarının yine terminolojik isimleriyle beraber güçlükleri tespit edebildikleri görülmüştür. Ders tasarımı öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgilerini geliştirmiştir.

Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgileri incelendiğinde uygulama sonrasında doğru sayılarının istenilen seviyeye ulaştığı görülmektedir. Öğretmen adayları uygulama sonrasında farklı güçlüklerin farklı nedenlerini açıklayabildikleri gibi bunların terminolojik isimlerine de atıf yapabilmişlerdir. Mülakatlarda ise öğretmen adaylarının yine terminolojik isimleriyle beraber güçlüklerin nedenlerini açıklayabildikleri görülmüştür. Özellikle epistemolojik ve pedagojik nedenleri tespit etme bilgileri gelişmiştir. Ders tasarımı öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgilerini geliştirmiştir.

Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgileri incelendiğinde uygulama sonrasında doğru sayılarının istenilen seviyeye ulaştığı görülmektedir. Öğretmen adayları uygulama sonrasında ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleyebildikleri gibi bunların terminolojik isimlerine de atıf yapabilmişlerdir. Mülakatlarda ise öğretmen adaylarının yine terminolojik isimleriyle beraber bu stratejileri belirleyebildikleri görülmüştür. Mülakatlarda öğretmen adaylarının özellikle akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme, DGY ve grafik çizimi ve anlamlandırma stratejisini de belirleyebildikleri görülmüştür. Ders tasarımı öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgilerini geliştirmiştir.

Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgileri, bu güçlüklerin nedenlerini açıklama bilgileri ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejileri bilgilerinin birbirlerini karşılıklı olarak biçimlendirdiği görülmektedir.

Öğretmen adaylarının öğrencilerin ispat şemalarını tespit etme bilgileri incelendiğinde arzu edilen seviyeye ulaştıkları görülmektedir. Öğretmen adayları uygulama sonrasında bunların terminolojik isimlerine de atıf yapabilmiştir. Özellikle sembolik, örnek-temelli, dönüşümcü ve aksiyomatik ispat şemalarını tespit etme bilgileri gelişmiştir. Mülakatlarda ise öğretmen adaylarının yine sembolik ve dönüşümcü ispat şemalarını artık tespit edebildikleri görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin sahip oldukları ana ve alt ispat şemalarının özelliklerini de hem anketlere hem mülakatlara yansıtabilmişlerdir. Ders tasarımı öğretmenlerin öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgilerini geliştirmiştir. Ders tasarımıyla birlikte hem öğretmen adaylarının kullandıkları ispat şemaları gelişmiştir hem de öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgileri gelişmiştir. Alan ve pedagojik alan bilgisi içerisinde değerlendirilen bu bilgilerin yine karşılıklı olarak birbirlerini biçimlendirdikleri görülmektedir.

Tüm bunlar birlikte düşünüldüğünde uygulamadan sonra öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin arzu edilen düzeye ulaştığı görülmektedir. Ders tasarımı öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini geliştirmiştir. Bu sonucun doğmasına ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili uzmanlaşmış alan bilgilerini geliştirmiş olması da etki etmiş olabilir. Çünkü alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi birbirlerini karşılıklı olarak biçimlendirmektedir. Özellikle uzmanlaşmış alan bilgisi derslerde öğretime özgü olarak kullanılan bilgi olduğundan bu bilgi türünün pedagojik alan bilgisine katkısı daha çoktur.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmek amacıyla bir müdahale tasarlanıp uygulanmış ve başarılı sonuçlar alınmıştır. İspatla ilgili alan bilgisi ile ispatla ilgili pedagojik alan bilgisi birbirlerinin karşılıklı olarak birbirlerini biçimlendirdikleri görülmüştür. Yani bu davranışlardan herhangi birisi geliştiği zaman diğerini de geliştirmektedir. Stylianides ve Stylianides'e (2017) göre ispat konusu her ne kadar karmaşık ve zor bir konu olsa da ispat konusuna yapılacak müdahale çalışmalarıyla bu güçlüklerin üstesinden gelinebilir. İspatla ilgili yapılan müdahale çalışmalarının (Marrades ve Gutiérrez 2000; Samkoff ve Weber 2015; Yılmaz, 2015; Öztürk, 2016; Fiallo ve Gutiérrez, 2017; Mata-Pereira ve da Ponte, 2017) sonuçları da bunu desteklemektedir.

5.2. Öneriler

Bu bölümde araştırmanın bulgularına dayalı olarak karar vericilere, uygulayıcılara ve araştırmacılara yönelik öneriler sunulmuştur.

5.2.1. Karar Vericilere Yönelik Öneriler

Bu ders ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümünde seçmeli olarak açılmıştır. Matematik öğretmen eğitimi müfredatında öğretmen adaylarının hem öğrencilik hayatlarında öğrenirken hem de öğretmenlik hayatlarında öğretirken zorlandıkları ispat konusuyla ilgili böylesine kapsamlı bir lisans dersinin olmayışı bir eksikliktir. İspat konusunun matematik ve matematik eğitimindeki önemine binaen hem ortaöğretim hem de ilköğretim matematik öğretmenliği müfredatına böyle bir dersin seçmeli veya zorunlu olarak konması önerilebilir.

5.2.2. Uygulayıcılara Yönelik Öneriler

Bu ders tasarımı M.Ü. A.E.F. Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde öğrenim gören öğrencilere uygulanmış ve amaçlarına ulaşmıştır. Uygulayıcılara bu ders tasarımını farklı üniversitelerin Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği ve İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümlerinde uygulamaları önerilebilir.

Bu ders tasarımında öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgileri sadece teori üzerinde geliştirilmeye çalışılmıştır. Uygulayıcılara öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin pratikte, gerçek sınıf ortamında geliştirmeleri önerilebilir. Pedagojik alan bilgisi gerçek sınıf ortamında öğretme tecrübesiyle teoriye göre daha iyi kazanılır (Kultsum, 2017). Çünkü sınıfta ispatla başa çıkmak teori üzerinde çalışmaktan farklı bilgi, beceri ve tecrübeler gerektirir.

Bu ders ortaöğretim matematik öğretmenliği ikinci sınıfında öğrenim gören öğretmen adaylarına uygulanmıştır. Öğretmen adaylarının değerlendirmelerine ilişkin bulgular göz önüne alındığında bu dersin dördüncü dönem yerine birinci dönem uygulanması öğretmen adaylarının öğrencilik süreçlerine daha fazla fayda sağlayabilir. Ancak öğretmen adayları henüz eğitim dersleri almadıklarından pedagojik alan bilgisine yönelik bilgileri yetersiz kalabilir. Birinci sınıf birinci dönemi için dersin alan bilgisine yönelik hedef, kazanımları ve içeriği dikkate alınarak ders uygulanabilir. Dersin pedagojik alan bilgisine yönelik hedef, kazanımları ve içeriği dikkate alınarak dersin pedagojik alan bilgisine yönelik kısımları eğitim dersleri verildikten sonraki dönemlerde uygulanabilir.

Teknoloji destekli eğitimin önemi ve yararları göz önünde bulundurularak lisans düzeyinde ispat öğretimine teknolojik araçlar entegre edilebilir. Cabri, GeoGebra, Geometer's Sketchpad gibi DGY öğretmen adaylarının ispatı öğrenmelerine katkı sağlayan (Marrades ve Gutiérrez, 2000) pedagojik araç olarak kullanılabilir (Leung, 2011).

5.2.3. Araştırmacılara Yönelik Öneriler

Bu çalışmanın konusu öğretmen adaylarının matematiksel ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir müdahale tasarımıdır. Araştırmacılara öğretmen adaylarının geometrik ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik müdahale çalışmaları tasarlamaları önerilebilir. Geometrik ispatlar görsel, sözel, çizim, mantık ve uygulama becerileri açısından matematiksel ispatlardan farklı şeyler gerektirir (Hoffer, 1981). Bu yüzden geometrik ispat öğrenimi ve öğretimi açısından matematiksel ispattan farklıdır.

Bu ders ortaöğretim matematik öğretmenliği ikinci sınıfında öğrenim gören öğretmen adaylarına bir dönemlik bir ders olarak uygulanmıştır. Ancak öğretmen adaylarının değerlendirmelerine ilişkin bulgular göz önüne alındığında bu dersin bir döneme sıkıştırılması yerine ispatla ilgili alan bilgilerinin geliştirileceği bir dönemlik alan dersi, ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin geliştirileceği bir dönemlik eğitim dersi şeklinde yeniden tasarımı yapılabilir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının sadece ispata yönelik bilişsel alana yönelik öğrenmeleri geliştirilmiştir. Gelecekte araştırmacılar öğretmen adaylarının ispatla ilgili duyuşsal öğrenme alanlarını (tutum, inanç gibi) geliştirmeye yönelik müdahaleler geliştirebilirler. Gömleksiz ve Kan'a göre (2012) bir konuya olan tutum, inanç gibi duyuşsal yaklaşımlar o konuyu öğrenmeyi etkiler çünkü bilişsel ve duyuşsal öğrenme alanları arasında sıkı bir bağ vardır.

Ayrıca bu çalışmanın gelecekte farklı bilim dallarındaki karmaşık problemlerin üstesinden gelmek için benzer ders tasarımları yapmak isteyen araştırmacılara da yol gösterici nitelikte olduğu düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

Akkoç, H. (2013). Kavramsal anlama için matematik eğitiminde teknoloji kullanımı. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* (3. Baskı) içinde (s. 361-392). Ankara: PegemA.

Akkoç, H., Özmantar, M. F., Bingölbali, E., Demir, S., Baştürk, S. ve Yavuz, İ. (2011). *Matematik öğretmen adaylarına teknolojiye yönelik pedagojik alan bilgisi kazandırma amaçlı bir program geliştirme*. (Proje No: 107K531) TÜBİTAK Projesi, TÜBİTAK-SOBAG. (2008-2011). İstanbul.

Akın, T., Temizkan, M., Tanış, H. ve Usluel, Y. K. (2017, 24-26 Mayıs). Eğitim alanında Türkiye'de yapılan tasarım tabanlı araştırmalarda kullanılan modeller: Bir sistematik betimsel tarama. *11. Uluslararası Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Sempozyumu (ICITS)*, Malatya, Türkiye. http://icits2017.inonu.edu.tr/dosya/1495275388062230100.pdf adresinden 10.11.2017 tarihinde erişildi.

Aksu, G. ve Doğan, N. (2015). Öğretim yöntem ve tekniklerinin öğrenci görüşlerine göre ikili karşılaştırma yöntemiyle ölçeklenmesi. *Eğitimde ve Psikolojide Ölçme ve Değerlendirme Dergisi*, *6*(2), 194-206. doi: https://dx.doi.org/10.21031/epod.87629

Al, H. (2014). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (4. Baskı). Adapazarı: Sakarya Yayıncılık.

Aldoobie, N. (2015). ADDIE model. *American International Journal of Contemporary Research*, *5*(6), 68-72. Retrieved June 21, 2017 from http://www.aijcrnet.com/journals/Vol_5_No_6_December_2015/10.pdf

Alghamdi, A. H., & Li, L. (2013). Adapting design-based research as a research methodology in educational settings. *International Journal of Education and Research*, *1*(10), 1-12. Retrieved December 11, 2016 from http://www.ijern.com/journal/October-2013/27.pdf

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: Some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(6), 869-890. doi: https://dx.doi.org/10.1080/002073900502033601

Almeida, D. (2001). Pupils' proof potential. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(1), 53-60. doi: https://dx.doi.org/10.1080/00207390119535

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(4), 479-488. doi: http://dx.doi.org/10.1080/0020739031000108574

Arı-Korkusuz, N. (2007). *İlköğretim 7. sınıf elektrostatik konusunun bilgisayar destekli öğretim tasarımı* (Yüksek Lisans Tezi). Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

Arkün, S., & Akkoyunlu, B. (2008). A study on the development process of a multimedia learning environment according to the ADDIE model and students' opinions of the multimedia learning environment. *Interactive Educational Multimedia*, 17, 1-19.

Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, *6*(1), 25-37. http://dergipark.gov.tr/egeefd/issue/4918/67296 adresinden 10.10.2016 tarihinde erişildi.

Altun, M. (2001). *Matematik öğretimi*. Bursa: Alfa Kitabevi.

Altun, F. ve Yazıcı, H. (2014). Nitel ve nicel yöntemleri kullanan araştırmacıların empatik eğilimleri ve işlevsel olmayan tutumları arasındaki farklılıklar. *Türkiye Sosyal Araştırmalar Dergisi*, 181, 371-386. http://dergipark.gov.tr/tsadergisi/issue/21491/230384 adresinden 14.04.2018 tarihinde erişildi.

Altunışık, R. (2008). Anketlerde veri kalitesinin iyileştirilmesi için öntest (pilot test) yöntemleri. *Pazarlama ve Pazarlama Araştırmaları Dergisi*, *1*(2), 1-17. http://www.pazarlama.org.tr/dergi/yonetim/icerik/makaleler/2-published.pdf adresinden 26.2.2017 tarihinde erişildi.

Appel, K., & Haken, W. (1976). Every planar map is four colorable. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *82*(5), 711-712. doi: https://dx.doi.org/10.1090/S0002-9904-1976-14122-5

Appel, K., & Haken, W. (1977). Every planar map is four colorable. Part I: Discharging. *Illinois Journal of Mathematics*, *21*(3), 429-490. doi: https://dx.doi.org/10.1215/ijm/1256049011

Arsac, G. (2007). Origin of mathematical proof: History and epistemology. In P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: From history epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 27-42). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Aşık, G. ve Yılmaz, Z. (2017). Matematik eğitimi çalışmalarında tasarım tabanlı araştırma ve öğretim deneyi yöntemleri: Farklar ve benzerlikler. *Eğitimde Kuram ve Uygulama*, *13*(2), 343-367. doi: https://dx.doi.org/10.17244/eku.310232

Aydoğdu-İskenderoğlu, T. (2003). *Farklı sınıf düzeylerindeki öğrencilerin matematik problemlerini kanıtlama süreçleri* (Yüksek Lisans Tezi), Abant İzzet Baysal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bolu.

Aydoğdu-İskenderoğlu, T. ve Baki, A. (2011). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüşlerinin nicel analizi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, *11*(4), 2275-2290.

Aydoğdu-İskenderoğlu, T., Baki, A. ve Palancı, M. (2011). Matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüş ölçeği: Geçerlik ve güvenirlik çalışması. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *5*(1), 181-203. http://dergipark.gov.tr/balikesirnef/issue/3372/46542 adresinden 16.9.2016 tarihinde erişildi.

Aylar, E. (2014a). *7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi* (Doktora Tezi), Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Aylar, E. (2014b). 7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik becerilerinin irdelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, *47*(1), 351-376. http://dergipark.gov.tr/auebfd/issue/38378/445001 adresinden 4.5.2017 tarihinde erişildi.

Aydınlatılmış onam formu (t.y.). http://etikkurul.ankara.edu.tr/wp-content/uploads/sites/276/2017/03/%C3%96rnek-Onam-Form-1.pdf adresinden 10.01.2017 tarihinde erişildi.

Bakaç, E. (2014). Senaryo tabanlı öğretim yönteminin matematik dersindeki öğrenci başarısına etkisi. *Eğitim ve İnsani Bilimler Dergisi: Teori ve Uygulama*, *5*(9), 3-17. http://dergipark.gov.tr/eibd/issue/22668/242068 adresinden 27.12.2018 tarihinde erişildi.

Baker, D., & Campbell, C. (2004). Fostering the development of mathematical thinking: Observations from a proofs course. *Primus*, *14*(4), 345-353. doi: https://dx.doi.org/10.1080/10511970408984098

Baker, J. D. (1996, April 8-12). *Students' difficulties with proof by mathematical induction.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York.

Baki, A. (2015). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi* (6. Baskı). Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.

Baki, A. ve Gökçek, T. (2012). Karma yöntem araştırmalarına genel bir bakış. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, *11*(42), 1-21. http://dergipark.gov.tr/esosder/issue/6156/82721 adresinden 11.09.2017 tarihinde erişildi.

Baki A. ve Kutluca T. (2009). Dokuzuncu sınıf matematik öğretim programında zorluk çekilen konuların belirlenmesi. *e-Journal of New World of Science Academy*, *4*(2), 604-619. http://dergipark.gov.tr/nwsaedu/issue/19828/212464 adresinden 22.02.2017 tarihinde erişildi.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176. doi: https://dx.doi.org/10.1007/BF00314724

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216-230). London, UK: Hodder & Stoughton.

Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education* (Unpublished doctoral dissertation), Michigan State University, East Lansing, USA.

Ball, D. L.(2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, *51*(3), 241-247. doi: https://dx.doi.org/10.1177/0022487100051003013

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, (Vol III, pp. 907-920). Beijing: Higher Education Press.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. doi: http://dx.doi.org/10.1177/0022487108324554

Barwise, J., & Etchemendy, J. (2003). *Language, proof and logic.* Stanford, California: CSLI Publications.

Baştürk, S. (2010). Matematik öğretmen adaylarının uygulama okullarında anlattıkları derslerin niteliği. Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 31, 57-68. http://dergipark.gov.tr/download/article-file/1651 adresinden 22.12.2018 tarihinde erişildi.

Beck, M., & Geoghegan, R. (2010). *The art of proof: Basic training for deeper mathematics*. New York: Springer.

Bektaş, M. ve Akdeniz-Kudubeş, A. (2014). Bir ölçme ve değerlendirme aracı olarak: Yazılı sınavlar. *Dokuz Eylül Üniversitesi Hemşirelik Yüksek Okulu Dergisi*, *7*(4), 330-336. http://www.deuhyoedergi.org/index.php/DEUHYOED/article/view/129 adresinden 26.2.2017 tarihinde erişildi.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, *7*(1), 23-40. doi: http://dx.doi.org/10.1007/BF00144356

Benson, D. C. (1999). *The moment of proof: Mathematical epiphanies*. New York: Oxford University Press.

Bilgilendirilmiş gönüllü olur formu (t.y.). http://etikkurul.uludag.edu.tr/basvuru-formlari-etikkurul.htm adresinden 10.01.2017 tarihinde erişildi.

Bilgilendirilmiş onam formu (t.y). www.ege.edu.tr/gd/BilgilendirilmisOnamFormu.doc adresinden 10.01.2017 tarihinde erişildi.

Bleiler, S. K., Thompson, D. R., & Krajcevski, M. (2014). Providing written feedback on students' mathematical arguments: Proof validations of prospective secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(2), 105-127. doi: https://dx.doi.org/10.1007/s10857-013-9248-1

Bloch, E. D. (2011). *Proofs and fundamentals: A first course in abstract mathematics* (2nd ed.). New York: Springer.

Bloom, B., Englehart, M. Furst, E., Hill, W., & Krathwohl, D. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. Handbook I: Cognitive domain*. New York, Toronto: Longmans, Green.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (2007). *Qualitative research for education: An introduction to theory and methods* (5th ed.). Boston: Allyn & Bacon.

Branch, R. M. (2009). *Instructional design: The ADDIE approach*. New York: Springer International Publishing.

Branch, R. M., & Merrill, M. D. (2012). Characteristics of instructional design models. In R. A. Reiser, & J. V. Dempsey (Eds.), *Trends and issues in instructional design and technology* (3rd ed., pp. 8-16). Boston, MA: Pearson Education, Inc.

Brown, S. A. (2014). On skepticism and its role in the development of proof in the classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 311-335. doi: https://dx.doi.org/10.1007/s10649-014-9544-4

Büyüköztürk, Ş., Kılıç-Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2016). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (21.Baskı). Ankara: Pegem Yayınları.

Cadwallader-Olsker, T. (2011). What do we mean by mathematical proof? *Journal of Humanistic Mathematics*, *1*(1), 33-60. doi: http://dx.doi.org/10.5642/jhummath.201101.04

Campbell, C. M. (2012). *Introduction to advanced mathematics: A guide to understanding proofs*. Boston, MA: Brooks/Cole, Cengage Learning.

Can, A. (2017). *SPSS ile bilimsel araştırma sürecinde nicel veri analizi* (5. Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Cavagnaro, C., & Haight, W. T. (Eds.). (2001). *Dictionary of classical and theoretical mathematics*. Boca Raton, Florida: CRC Press LLC. doi: https://dx.doi.org/10.1201/9781420038033

Ceylan, T. (2012). *GeoGebra yazılımı ortamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerinin incelenmesi* (Yüksek Lisans Tezi), Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Chartrand, G., Polimeni, A. D., & Zhang, P. (2013). *Mathematical proofs: A transition to advanced mathematics* (3rd ed.). Boston, MA: Pearson Education, Inc.

Christensen, T. M., & Brumfield, K. A. (2010). Phenomenological designs: The philosophy of phenomenological research. In C. J. Sheperis, J. S. Young, & M. H. Daniels (Eds.), *Counseling research: Quantitative, qualitative, and mixed methods* (pp. 135-150). Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, Inc.

Cihan F. ve Akkoç, H. (2017, 27-29 Nisan). *İspatla ilgili Türkiye'de matematik eğitimi alanında yapılmış lisansüstü tezlerin doküman incelemesi*. VII. Uluslararası Eğitimde Araştırmalar Kongresi'nde sunulmuş bildiri, Çanakkale, Türkiye.

Clapham, C., & Nicholson, J. (2009). *The concise Oxford dictionary of mathematics* (4th ed.). New York: Oxford University Press Inc. doi: http://dx.doi.org/10.1093/acref/9780199235940.001.0001

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates, Publishers.

Collins, A. (1999). The changing infrastructure of education research. In E. C. Lagemann, & L. S. Shulman (Eds.), *Issues in education research: Problems and possibilities* (pp. 289-298). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 15-42. doi: https://dx.doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Coşkun, F. (2009). *Ortaöğretim öğrencilerinin Van Hiele geometri anlama seviyeleri ile ispat yazma becerilerinin ilişkisi* (Yüksek Lisans Tezi), Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Coyne, I. T. (1997). Sampling in qualitative research. Purposeful and theoretical Sampling; Merging or clear boundaries? *Journal of Advanced Nursing*, *26*(3), 623-630. doi: http://dx.doi.org/10.1046/j.1365-2648.1997.t01-25-00999.x

Creswell, J. W. (2014). *Araştırma deseni: Nitel, nicel ve karma yöntem yaklaşımları* (4. Baskıdan çeviri). (Çev. Ed. Demir, S. B.). Ankara: Eğiten Kitap. (Orijinal çalışma: Research design: Qualitative, quantitative and mixed methods approaches, 4th ed., 2014).

Cunningham, D. W. (2012). *A logical introduction to proof*. New York: Springer.

Cücük, E., Kara, K., Şiraz, F. ve Bay, E. (2018). Etkili öğretim stratejileri ölçeği'nin geliştirilmesi (EÖSÖ): Geçerlik ve güvenirlik çalışması. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, *17*(67), 1181-1198. doi: http://dx.doi.org/10.17755/esosder.375013

Çakıroğlu, E. (2013). Matematik kavramlarının tanımlanması. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Ed.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s. 1-13). Ankara: Pegem Akademi.

Çelik, F. (2006). Türk eğitim sisteminde hedefler ve hedef belirlemede yeni yönelimler. *Burdur Eğitim Fakültesi Dergisi*, *6*(11), 1-15. https://efd.mehmetakif.edu.tr/arsiv/sayi11/1-15.pdf adresinden 5.2.2018 tarihinde erişildi.

Çontay, E. G. (2017). *Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları* (Doktora Tezi), Pamukkale Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Denizli.

Çontay, E. G. ve Duatepe-Paksu, A. (2019). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşleri. *Sınırsız Eğitim ve Araştırma Dergisi*, *4*(1), 64-89. doi: http://dx.doi.org/10.29250/sead.485430

Dane, A. (2008). İlköğretim matematik 3. sınıf öğrencilerinin tanım, aksiyom ve teorem kavramlarını anlama düzeyleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *16*(2), 495-506. http://www.kefdergi.com/pdf/16_2/495-506.pdf adresinden 6.5.2017 tarihinde erişildi.

D'Angelo, J. P., & West D. B. (2000). *Mathematical thinking: Problem-solving and proofs* (2nd ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

Davis, A. L. (2013). Using instructional design principles to develop effective information literacy instruction: The ADDIE model. *College & Research Libraries News*, *74*(4), 205-207. Retrieved June 5, 2017 from https://crln.acrl.org/index.php/crlnews/article/view/8934/9656

Dawson, J. W. (2015). *Why prove it again? Alternative proofs in mathematical practice*. Cham: Birkhäuser.

Daymon, C., & Holloway, I. (2011). *Qualitative research methods in public relations and marketing communications* (2nd ed.). London, UK: Routledge.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or to teach to define? In A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 248-255). Stellenbosch: South Africa: University of Stellenbosch.

De Villiers, M. (1999a). The role and function of proof with Sketchpad. In M. De Villiers (Ed.), *Rethinking proof with Sketchpad* (pp. 3-10). Emeryville, CA, USA: Key Curriculum Press.

De Villiers, M. (1999b). *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimler Dergisi*, *4*(2), 47-71. doi: https://dx.doi.org/10.17984/adyuebd.52880

Demir, F. (2011). *Bir dinamik geometri yazılımının ilköğretim öğrencilerinin geometride ispat becerilerine etkisi* (Yüksek Lisans Tezi), Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzincan.

Demiray, E. (2013). *An investigation of pre-service middle school mathematics teachers' achievement levels in mathematical proof and the reasons of their wrong interpretations* (Master's Thesis), Middle East Technical University, Ankara.

Depaepe, F., Verschaffel, L., & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, *34*, 12-25. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.tate.2013.03.001

Department for Education. (2013a). *Mathematics programmes of study: Key stages 1 and 2 - National curriculum in England*. Retrieved March 17, 2017 from https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/335158/PRIMARY_national_curriculum_-_Mathematics_220714.pdf

Department for Education. (2013b). *Mathematics programmes of study: Key stage 3 - National curriculum in England*. Retrieved March 17, 2017 from https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/239058/SECONDARY_national_curriculum_-_Mathematics.pdf

Department for Education. (2014). *Statutory guidance national curriculum in England: Mathematics programmes of study*. Retrieved April 5, 2017 from https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study

Ders tanıtım formu (t.y.). http://fbe.klu.edu.tr/Sayfalar/4923--formlar-eabd-ve-ogretim-uyeleri.klu adresinden 05.04.2017 tarihinde erişildi.

Design-Based Research Collective (2003). Design based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8. doi: https://dx.doi.org/10.3102/0013189X032001005

Dickerson, D. S., & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), 711-733. doi: http://dx.doi.org/10.1007/s13394-013-0091-6

Doğan-Dunlap, H., Özdemir-Erdoğan, E. ve Kılıç, Ç. (2013). Matematiksel tümevarım: Karşılaşılan kavram yanılgıları ve öğrenme güçlükleri. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* (3. Baskı) içinde (s.291-328). Ankara: PegemA.

Doruk, B. K., Kıymaz,Y., Horzum, T. ve Morkoyunlu, Z. (2014). Sınıf öğretmeni adaylarının ispatla ilgili görüşleri: Formal ispat-Temsili ispat. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 30, 23-55. http://dergipark.gov.tr/maeuefd/issue/19403/206209 adresinden 17.10.2016 tarihinde erişildi.

Doruk, M. ve Kaplan, A. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının dizilerin yakınsaklığı kavramı üzerine ispat değerlendirme becerileri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, *2*(1), 231-240. http://www.jret.org/FileUpload/ks281142/File/25a.muhammed_doruk.pdf adresinden 6.8.2017 tarihinde erişildi.

Downing, D. (2009). *Dictionary of mathematics terms* (3rd ed.) New York, NY: Barron's Professional Guides.

Durmuş, S. (2007). Matematikte öğrenme güçlüğü gösteren öğrencilere yönelik öğretim yaklaşımları. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *8*(13), 76-83. https://efd.mehmetakif.edu.tr/arsiv/haziran2007/sonsayi/76-83.pdf adresinden 5.1.2018 tarihinde erişildi.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137-161). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Easterday, M. W., Rees-Lewis, D., & Gerber, E. M. (2014). Design-based research process: Problems, phases, and applications. In J. L. Polman, E. A. Kyza, D. K. O'Neill, I. Tabak, W. R. Penuel, A. S. Jurow, K. O'Connor, T. Lee, & L. D'Amico (Eds.), *Learning and Becoming in Practice: The International Conference of the Learning Sciences (ICLS) 2014*, (Vol. 1, pp. 317-324). Boulder, CO: International Society of the Learning Sciences.

Eccles, P. J. (2007). *An introduction to mathematical reasoning: Numbers, sets, and functions* (10th ed.). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Emre-Akdoğan, E. ve Yazgan-Sağ, G. (2018). Lise matematik öğretmeni adaylarının öğretmenlik deneyimleri: Teoriden uygulamaya geçiş. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *26*(1), 93-99. doi: http://dx.doi.org/10.24106/kefdergi.375669

Erdoğan, A. (2009). Matematiksel nesneler, sorunlu şeyler! *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, *3*(1), 156-173. http://dergipark.gov.tr/balikesirnef/issue/3368/46499 adresinden 14.12.2016 tarihinde erişildi.

Ernest, P. (1984). Mathematical induction: A pedagogical discussion. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(2), 173-189. doi: https://dx.doi.org/10.1007/BF00305895

Epp, S. S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly*, *110*(10), 886-889. doi: https://dx.doi.org/10.2307/3647960

Epp, S. S. (2011). *Discrete mathematics: An introduction to mathematical reasoning* (Brief ed.). Boston, MA: Brooks/Cole, Cengage Learning.

Feil, T., & Krone, J. (2003). *Essential discrete mathematics for computer science*. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Education, Inc.

Ferland, K. (2009). *Discrete mathematics: An introduction to proofs and combinatorics*. Boston: Houghton Mifflin Company.

Fırat, M., Kabakçı-Yurdakul, I. ve Ersoy, A. (2014). Bir eğitim teknolojisi araştırmasına dayalı olarak karma yöntem araştırması deneyimi. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, *2*(1), 65-86. doi: http://dx.doi.org/10.14689/issn.2148-2624.1.2s3m

Fiallo, J., & Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 145-167. doi: https://dx.doi.org/10.1007/s10649-017-9755-6

Fischbein E., & Engel, I. (1989). Psychological difficulties in understanding the principle of mathematical induction. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. I, pp. 276-282). Paris, France: CNRS.

Fitzpatrick, R. (2008). *Euclid's elements of geometry*. Retrieved January 15, 2018 from http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf

Flores, A. (2002). How do children know that what they learn in mathematics is true? *Teaching Children Mathematics*, *8*(5), 269-274. Retrieved October 19, 2016 from http://www.jstor.org/stable/41199537

Flores, A. (2006). How do students know what they learn in middle school mathematics is true? *School Science and Mathematics*, *106*(3), 124-132. doi: https://dx.doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18169.x

Ford, C., McNally, D., & Ford, K. (2017). Using design-based research in higher education innovation. *Online Learning*, *21*(3), 50-67. doi: http://dx.doi.org/10.24059/olj.v%vi%i.1232

Garnier, R., & Taylor, J. (1996). *100% mathematical proof*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Garnier, R., & Taylor, J. (2009). *Discrete mathematics: Proofs, structures and applications* (3rd ed.). Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group, LLC.

Gerstein, L. J. (2012). *Introduction to mathematical structures and proofs* (2nd ed.). New York, NY: Springer.

Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. New York, NY: Aldine de Gruyter.

Goldberg, D. J. (1974, April 17-20). *The effects of training in heuristic methods on the ability to write proofs in number theory*. Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Atlantic City.

Gossett, E. (2003). *Discrete mathematics with proof*. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Education, Inc.

Gökçek, T., Babacan, F. Z., Kangal, E., Çakır, N. ve Kül, Y. (2013). 2003-2012 yılları arasında Türkiye'de karma araştırma yöntemiyle yapılan eğitim çalışmalarının analizi. *International Journal of Social Science*, *6*(7), 435-456. doi: http://dx.doi.org/10.9761/JASSS1655

Gökkurt, B., Deniz, D., Akgün, L. ve Soylu, Y. (2014). Matematik alanında ispat yapma süreci üzerine yapılmış bazı araştırmalardan bir derleme. *Başkent Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *1*(1), 55-63. http://buje.baskent.edu.tr/index.php/buje/article/view/10 adresinden 10.10.2017 tarihinde erişildi.

Gömleksiz, M. N. ve Kan, A. Ü. (2012). Eğitimde duyuşsal boyut ve duyuşsal öğrenme. *Turkish Studies - International Periodical For the Languages, Literature and History of Turkish or Turkic*, *7*(1), 1159-1177. doi: https://dx.doi.org/10.7827/TurkishStudies.3127

Gray, P. S., Williamson, J. B., Karp, D. A., & Dalphin, J. R. (2007). *The research imagination: An introduction to qualitative and quantitative methods*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Greene, J. C., Caracelli, V. J., & Graham, W. F. (1989). Toward a conceptual framework for mixed-method evaluation designs. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *11*(3), 255-274. doi: https://dx.doi.org/10.2307/1163620

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.

Gustafson, K. L., & Branch, R. M. (2002). What is instructional design? In R. A. Reiser, & J. V. Dempsey (Eds.), *Trends and issues in instructional design and technology* (pp. 16-25). Upper Saddle River, NJ: Merrill Prentice Hall.

Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi* (Doktora Tezi), Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Güler, G. ve Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Fakültesi Dergisi*, *20*(2), 571-590. http://www.kefdergi.com/pdf/20_2/20_2_14.pdf adresinden 5.5.2017 tarihinde erişildi.

Güler, G. ve Ekmekci, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, *11*(1), 59-83. http://dergipark.gov.tr/befdergi/issue/23129/247062 adresinden 11.10.2017 tarihinde erişildi.

Güler, G., Özdemir, E. ve Dikici. R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *20*(1), 219-236. http://www.kefdergi.com/pdf/20_1/20_1_15.pdf adresinden 5.4.2017 tarihinde erişildi.

Güler, G. ve Temizyürek, A. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının ardışık tek sayıların toplamının ispatına yönelik model oluşturma becerilerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *6*(3), 446-462. doi: https://dx.doi.org/10.16949/turcomat.63535

Güner, P. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde DNR tabanlı öğretime göre anlama ve düşünme yollarının incelenmesi* (Yüksek Lisans Tezi), Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Gürbüz, R. ve Erdem, E. (2017). Olasılık konusunun öğrenilmesini zorlaştıran nedenler hakkında ortaokul matematik öğretmenlerinin görüşleri. *Anemon Muş Alparslan Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, *5*(2), 361-380. doi: https://dx.doi.org/10.18506/anemon.258539

Gürbüz, R., Toprak, Z., Yapıcı, H. ve Doğan, S. (2011). Ortaöğretim matematik müfredatında zor olarak algılanan konular ve bunların nedenleri. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, *10*(4), 1311-1323. http://dergipark.gov.tr/jss/issue/24241/256985 adresinden 10.11.207 tarihinde erişildi.

Gürlü, Ö. (2013). *Matematik olimpiyatlarına hazırlık için meraklısına sayılar teorisine giriş*. İzmir: Altın Nokta Yayınevi.

Güven, B., Çelik, D. ve Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi*, *30*(316), 35-45.

Güven, B. ve Karataş, İ. (2005). Dinamik geometri yazılımı Cabri ile oluşturmacı öğrenme ortamı tasarımı: Bir model. *İlköğretim Online*, *4*(1), 62-72. http://dergipark.gov.tr/ilkonline/issue/8609/107243 adresinden 18.02.2017 tarihinde erişildi.

Hammack, R. (2013). *Book of proof* (2nd ed.). Publisher: Author. Retrieved June 21, 2017 from http://www.people.vcu.edu/ rhammack/BookOfProof/index.html

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13. doi: https://dx.doi.org/10.1007/bf01809605

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2), 5-23. doi: https://dx.doi.org/10.1023/A:1012737223465

Hanna, G., & De Villiers, M. (2012). Aspects of proof in mathematics education. In G. Hanna, & M. De Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study*, (pp. 1-10). New York: Springer.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp.877-908). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. In S. Campbell, & R. Zaskis (Eds.), *Learning and teaching number theory* (pp.185-212). New Jersey, USA: Ablex Publishing Corporation.

Harel, G. (2007). Students’ proof schemes revisited. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 65-78). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Harel, G. (2008a). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: Focus on proving. *ZDM-International Journal of Mathematics Education*, *40*(3), 487-500. doi: https://dx.doi.org/10.1007/s11858-008-0104-1

Harel, G. (2008b). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. In B. Gold, & R. Simons (Eds.), *Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy* (pp. 265–290). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Harel, G. (2014). Deductive reasoning in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 143-147). London, UK: Springer.

Harel, G., & Rabin, J. M. (2010). Teaching practices associated with the authoritative proof scheme. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(1), 14-19. Retrieved October 9, 2016 from http://www.jstor.org/stable/40539362

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students’ proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 27-50. doi: https://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0701_3

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Hebebci, M. T. (2014). *Fatih projesi uygulamalarına yönelik gözlemleri içeren çevrim içi örnek olay kütüphanesinin tasarlanması ve değerlendirilmesi* (Yüksek Lisans Tezi), Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Hein, G. E. (1991, October 15-22). *Constructivist learning theory. The Museum and the needs of people*. Paper presented at the CECA (International Committee of Museum Educators) Conference, Jerusalem Israel. Retrieved August 15, 2017 from http://www.exploratorium.edu/education/ifi/constructivist-learning

Heinze, A., & Reiss, K. (2003). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Bellaria, Italy.

Heinze, A., & Reiss, K. (2004). The teaching of proof at lower secondary level—a video study. *ZDM-International Journal of Mathematics Education, 36*(3), 98-104. doi: https://dx.doi.org/10.1007/BF02652777

Heiselt, A., & Sheperis, C. J. (2010). Mixed methods designs. In C. J. Sheperis, S. J. Young, & H. M. Daniels (Éds), *Counseling research: Quantitative, qualitative, and mixed methods* (pp. 187-199). Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, Inc.

Hemmi, K., Lepik, M., & Viholainen, A. (2013). Analysing proof-related competences in Estonian, Finnish and Swedish mathematics curricula–towards a framework of developmental proof. *Journal of Curriculum Studies*, *45*(3), 354-378. doi: https://dx.doi.org/10.1080/00220272.2012.754055

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 389-399. doi: https://dx.doi.org/10.1007/BF01273372

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teacher's mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371-406. doi: https://dx.doi.org/10.3102/00028312042002371

Hirst, H. P., & Hirst, J. L. (2004). *A primer for logic and proof*. Publisher: Authors. Retrieved August 6, 2017 from www.mathsci.appstate.edu/~jlh/primer/hirst.pdf

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teacher*, *74*(1), 11–18. Retrieved May 17, 2018 from https://www.jstor.org/stable/27962295

Housman, D., & Porter, M. (2003). Proof schemes and learning strategies of above-average mathematics students. *Educational Studies in Mathematics, 53*(2), 139-158. doi: https://dx.doi.org/10.1023/A:1025541416693

Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 7-16. Retrieved January 27, 2017 from https://www.jstor.org/stable/40248217

Hoyles, C., & Healy, L. (2007). Curriculum change and geometrical reasoning. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 81-115). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Ilgar, Ş. (2005). Ev ödevlerinin öğrenci eğitimi açısından önemi. *Hasan Ali Yücel Eğitim Fakültesi Dergisi*, *2*(1), 119-134. http://dergipark.gov.tr/iuhayefd/issue/8784/109820 adresinden 12.12.2018 tarihinde erişildi.

Institute for Advanced Study (IAS)/Park City Mathematics Institute International Seminar (PCMIIS). (2006). *Bridging policy and practice in the context of reasoning and proof*. Retrieved November 10, 2018 from https://www.ias.edu/pcmi

İmamoğlu, Y. (2010). *An investigation of freshmen and senior mathematics and teaching mathematics students' conceptions and practices regarding proof* (Doctoral dissertation), Bogazici University, Istanbul.

İmamoğlu, Y., & Yontar-Toğrol, A. (2010). Freshmen and senior teaching science and mathematics students' proving patterns and conceptualizations of the nature and role of proof in school mathematics. *International Journal for Cross-Disciplinary Subjects in Education*, *1*(2), 79-87. doi: https://dx.doi.org/10.20533/ijcdse.2042.6364.2010.0011

İmamoğlu, Y., & Yontar-Toğrol, A. (2015). Proof construction and evaluation practices of prospective mathematics educators. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *3*(2), 130-144. Retrieved November 26, 2016 from https://eric.ed.gov/?id=EJ1107888

İnam, B. (2014). *Ortaöğretim düzeyinde, kavrama testlerine dayalı bir ispat öğretim uygulamasının değerlendirilmesi* (Yüksek Lisans Tezi), Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

İpek, S. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımları kullanarak gerçekleştirdikleri geometrik ve cebirsel ispat süreçlerinin incelenmesi* (Yüksek Lisans Tezi), Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları* (Doktora tezi), Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher, 33*(7), 14-26. doi: https://dx.doi.org/10.3102/0013189X033007014

Johnson, R. B., Onwuegbuzie, A. J., & Turner, L. A. (2007). Toward a definition of mixed methods research. *Journal of Mixed Methods Research*, *1*(2), 112-133. doi: https://dx.doi.org/10.1177/1558689806298224

Jones, K. (1997). Student teachers' conceptions of mathematical proof. *Mathematics Education Review*, *9*, 21-32. Retrieved November 12, 2016 from https://eprints.soton.ac.uk/41245/

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(1), 53-60. doi: https://dx.doi.org/10.1080/002073900287381

Jones, K., & Herbst, P. (2012). Proof, proving, and teacher-student interaction: Theories and contexts. In G. Hanna, & M. De Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study*, (pp. 261-277). New York: Springer.

Joshi, M. (2015). *Proof patterns*. New York: Springer.

Kane, J. M. (2016). *Writing proofs in analysis*. Switzerland: Springer International Publishing.

Karahan, Ö. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının çift sütun ispat yöntemine yönelik görüşleri ve bu yönteme dayalı ispatlama süreçlerinin analizi* (Yüksek Lisans Tezi), Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Karaoğlu, Ö. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performansları* (Yüksek Lisans Tezi), Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Karasar, N. (2014). *Bilimsel araştırma yöntemi: Kavramlar ilkeler teknikler* (27. Baskı). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Kelly, A. E. (2010). When is design research appropriate. In T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.), *An Introduction to Educational Design Research: Proceedings of the Seminar Conducted at the East China Normal University, Shanghai (PR China),* (3rd print, pp. 73-87). The Netherlands: Netherland Institute for Curriculum Development.

Kızılaslan, A. (2016). *İlköğretim 8. sınıf görme engelli öğrencilere "Maddenin halleri ve ısı" ünitesi ile ilgili kavramların öğretimi* (Doktora Tezi). Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Knapp, J. (2005). *Learning to prove in order to prove to learn*. Retrieved August 16, 2017 from http://mathpost.asu.edu/~sjgm/issues/2005_spring/SJGM_knapp.pdf

Knipping, C., & Reid, D. (2015). Reconstructing argumentation structures: A perspective on proving processes in secondary mathematics classroom interactions. In A. Bikner-Ahsbahs, Ch. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative methods in mathematics education: Examples of methodology and methods* (pp. 75-101). New York: Springer.

Knuth, E. J. (2002a). Proof as a tool for learning mathematics. *Mathematics Teacher*, *95*(7), 486-490. Retrieved January 15, 2016 from https://www.jstor.org/stable/20871128

Knuth, E. J. (2002b). Secondary school mathematics teacher's conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 379-405. doi: https://dx.doi.org/10.2307/4149959

Ko, Y. Y. (2010). Mathematics teachers' conceptions of proof: Implications for educational research. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *8*(6), 1109-1129. doi: https://dx.doi.org/10.1007/s10763-010-9235-2

Ko, Y. Y., & Knuth, E. J. (2013). Validating proofs and counterexamples across content domains: Practices of importance for mathematics majors. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(1), 20-35. doi: https://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.09.003

Köğce, D. (2012, 27-30 Haziran). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispatın öğrenmeye katkısı ile ilgili görüşleri ve ispat düzeyleri*. X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 27-30 Haziran 2012, Niğde.

Köğce, D., Aydın, M., & Yıldız, C. (2010). The views of high school students about proof and their levels of proof (The case of Trabzon). *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *2*(2), 2544-2549. doi: https://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.370

Köksal, M. S. (2006). Kavram öğretimi ve çoklu zekâ teorisi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *14*(2), 473-480. http://www.kefdergi.com/pdf/14_2/473-480.pdf adresinden 7.5.2017 tarihinde erişildi.

Krantz, S. G. (2007). *The proof is in the pudding: A look at the changing nature of mathematical proof*. New York: Springer.

Kultsum, U. (2017). The concept of pedagogical content knowledge (PCK): Recognizing the English teachers' competences in Indonesia. *Advances in Social Science, Education and Humanities Research*, *134*(ICIRAD 2017), 55-59. doi: https://dx.doi.org/10.2991/icirad-17.2017.11

Kuzu, A., Çankaya, S. ve Mısırlı, Z. A. (2011). Tasarım tabanlı araştırma ve öğrenme ortamlarının tasarımı ve geliştirilmesinde kullanımı. *Anadolu Journal of Educational Sciences International*, *1*(1), 19-35. http://dergipark.gov.tr/ajesi/issue/1525/18728 adresinden 7.8.2017 tarihinde erişildi.

Laborde, C. (1990). Language and mathematics. In R. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 51-69). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lai, Y., & Weber, K. (2014). Factors mathematicians profess to consider when presenting pedagogical proofs. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(1), 93-108. doi: https://dx.doi.org/10.1007/s10649-013-9497-z

Lange, M. (2016). Explanatory proofs and beautiful proofs. *Journal of Humanistic Mathematics*, *6*(1), 8-51. doi: https://dx.doi.org/10.5642/jhummath.201601.04

Lay, S. R. (2009). Good proofs depend on good definitions: Examples and counterexamples in arithmetic. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. De Villiers (Eds), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 27-30). Taipei, Taiwan: National Taiwan University.

Lay, S. R. (2014). *Analysis with an introduction to proof* (5th ed.). New York: Pearson Education Limited.

Lee, W. I. (1999). *The relationship between students' proof writing ability and Van Hiele levels of geometric thought in a college geometric course* (Unpublished doctoral dissertation), University of Northern Colorado, Greeley, Colorado, USA.

Lenhart, S. T. (2010). *The effect of teacher pedagogical content knowledge and the instruction of middle school geometry* (Doctoral dissertation), The Faculty of the School of Education, Liberty University, Lynchburg, Virginia, USA. Retrieved January 22, 2017 from https://digitalcommons.liberty.edu/doctoral/363

Lesseig, K. (2011). *Mathematical knowledge for teaching proof* (Doctoral dissertation), Oregon State University, Corvallis, Oregon, USA. Retrieved May 28, 2017 from http://hdl.handle.net/1957/23465

Lesseig, K. (2016). Investigating mathematical knowledge for teaching proof in professional development. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, *2*(2), 253-270. doi: http://.dx.doi.org/10.21890/ijres.13913

Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM-International Journal on Mathematics Education*, *43*(3), 325-336. doi: https://dx.doi.org/10.1007/s11858-011-0329-2

Leung, K. T., & Cheung, P. H. (1988). *Fundamental concepts of mathematics.* Hong Kong: Hong Kong University Press.

Lucas, J. R. (2000). *The conceptual roots of mathematics: An essay on the philosophy of mathematics*. London and New York: Routledge.

Magnusson, S., Krajcik, J., & Borko, H. (1999). Nature, sources, and development of pedagogical content knowledge for science teaching. In J. Gess-Newsome, & N. G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge* (pp. 95-132). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mariotti M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 173-204). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Marlowe, B., & Page, M. (2005). *Creating and sustaining the constructivist classroom* (2nd ed.). Thousand Oaks, California: Corwin Press Inc.

Marrades, R., & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2), 87-125. doi: https://dx.doi.org/10.1023/A:1012785106627

Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L., & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(1), 95-124. doi: https://dx.doi.org/10.1007/s10649-005-6698-0

Marvasti, A. B. (2004). *Qualitative research in sociology: An introduction*. London, UK: Sage Publications, Inc.

Mason, J. (2002). *Qualitative researching* (2nd ed.). London, UK: Sage Publications, Inc.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. London, UK: Addison Wesley-Pearson.

Mata-Pereira, J., & da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 169-186. doi: https://dx.doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4

McGraw-Hill, (2003). *McGraw-Hill Dictionary of Mathematics* (2nd ed.).New York: The McGraw-Hill Companies, Inc.

McGriff, S. J. (2000). *Instructional system design (ISD): Using the ADDIE Model*. Retrieved October 30, 2017 from https://www.lib.purdue.edu/sites/default/files/directory/butler38/ADDIE.pdf

Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 3-18. doi: https://dx.doi.org/10.1007/s10649-011-9349-7

Mejia-Ramos, J. P., & Weber, K. (2014). Why and how mathematicians read proofs: Further evidence from a survey study. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(2), 161-173. doi: https://dx.doi.org/10.1007/s10649-013-9514-2

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA, US: Sage Publications, Inc.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2005). *Ortaöğretim matematik dersi (9-12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları. http://ttkb.meb.gov.tr/program2.aspx?islem=1&kno=86 adresinden 29.09.2017 tarihinde erişildi.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2008). *Öğretmen yetiştirme ve eğitimi genel müdürlüğü. öğretmen yeterlikleri: Öğretmenlik mesleği genel ve özel alan yeterlikleri*. Ankara: Millî Eğitim Basımevi. https://oygm.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2017_12/11115355_YYRETMENLYK_MESLEYY_GENEL_YETERLYKLERY.pdf adresinden 12.12.2018 tarihinde erişildi.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2011a). *Ortaöğretim matematik (9, 10, 11 ve 12. sınıflar-haftalık 4 saat) dersi öğretim programı & Ortaöğretim seçmeli matematik (10, 11 ve 12. sınıflar-haftalık 2 saat) dersi öğretim programı*. Ankara: MEB Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları. http://ttkb.meb.gov.tr/www/ogretim-programlari/icerik/72 adresinden 08.01.2017 tarihinde erişildi.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2011b). *Matematik öğretmeni özel alan yeterlikleri* (Ortaöğretim). http://otmg.meb.gov.tr/alan_matematik_ortaogretim.html adresinden 19.01.2017 tarihinde erişildi.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013a). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı Yayınları. http://ttkb.meb.gov.tr/www/ogretim-programlari/icerik/72 adresinden 04.02.2017 tarihinde erişildi.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013b). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları. http://ttkb.meb.gov.tr/www/ogretim-programlari/icerik/72 adresinden 08.01.2017 tarihinde erişildi.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2015). *İlkokul matematik dersi (1, 2, 3 ve 4. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları. http://ttkb.meb.gov.tr/www/ogretim-programlari/icerik/72 adresinden 04.02.2017 tarihinde erişildi.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2016a). *PISA 2015 ulusal raporu*. Ankara: Millî Eğitim Bakanlığı Ölçme, Değerlendirme ve Sınav Hizmetleri Genel Müdürlüğü. http://pisa.meb.gov.tr/wp-content/uploads/2016/12/PISA2015_Ulusal_Rapor1.pdf adresinden 08.01.2017 tarihinde erişildi.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2016b).*TIMSS 2015 ulusal matematik ve fen ön raporu (4. ve 8. sınıflar)*. Ankara: Millî Eğitim Bakanlığı Ölçme, Değerlendirme ve Sınav Hizmetleri Genel Müdürlüğü. https://odsgm.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2016_11/30031754_timss_2015_ulusal_fen_mat_raporu.pdf adresinden 08.01.2017 tarihinde erişildi.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2017). Okul temelli mesleki gelişim (OTMG). http://otmg.meb.gov.tr/Otmg.html adresinden 07.01.2017 tarihinde erişildi.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları. http://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=343 adresinden 27.01.2019 tarihinde erişildi.

Millman, R. S., Shiue, P. J., & Kahn, E. B. (2015). *Problems and proofs in numbers and algebra*. Switzerland: Springer International Publishing.

Miral, D. (2013). *Ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşleri* (Yüksek Lisans Tezi), Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054. doi: https://dx.doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(1), 47-68. doi: https://dx.doi.org/10.1023/A:1003956532587

Molenda, M. (2015). In search of the elusive ADDIE Model. *Performance Improvement*, *54*(2), 40-42. doi: http://dx.doi.org/10.1002/pfi.21461

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(3), 249-266. doi: https://dx.doi.org/10.1007/BF01273731

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *14*(1), 147-160. http://www.kefdergi.com/pdf/14_1/147-160.pdf adresinden 6.5.2017 tarihinde erişildi.

National Association for the Education of Young Children [NAEYC]. (2010). *Early childhood mathematics: Promoting good beginnings (A joint position statement of the national association for the education of young children and the national council of teachers of mathematics).* Retrieved February 8, 2017 from http://www.naeyc.org/positionstatements/mathematics

National Board for Professional Teaching Standards [NBPTS]. (2010). *Mathematics standards for teachers of students ages 11-18+* (3rd.ed.). Arlington, VA: National Board for Professional Teaching Standards, c2010. Retrieved January 23, 2017 from https://www.nbpts.org/wp-content/uploads/EAYA-MATH.pdf

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers [NGA Center & CCSSO]. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: Authors. Retrieved January 20, 2017 FROM http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

National Research Council [NRC]. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. In J Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.). *Mathematics learning study committee, center for education, division of behavioral and social sciences and education*. Washington, DC: National Academy Press.

Nieveen, N. (2010). Formative evaluation in educational design research. In T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.), *An Introduction to Educational Design Research: Proceedings of the Seminar Conducted at the East China Normal University, Shanghai (PR China)*, (3rd print, pp. 89-101). The Netherlands: Netherland Institute for Curriculum Development.

Norum, K. E. (2008). Artifact analysis. In L. M. Given (Ed.), *The Sage encyclopedia of qualitative research methods* (Vol 1, pp. 23-25). Los Angeles, California: Sage Publications, Inc.

OECD. (2016). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematic and financial literacy*. Paris: PISA, OECD Publishing. doi: https://dx.doi.org/10.1787/9789264255425-en

Oflaz, G., Bulut, N., & Akçakın, V. (2016). Pre-service classroom teachers' proof schemes in geometry: A case study of three pre-service teachers. *Eurasian Journal of Educational Research*, 63, 133-152. doi: http://dx.doi.org/10.14689/ejer.2016.63.8

Ormancı, Ü. ve Şaşmaz-Ören, F. (2010, 11-13 Kasım). *Çalışma yapraklarının yararları, sınırlılıkları ve kullanımına ilişkin sınıf öğretmeni adaylarının görüşleri*. Uluslararası Eğitimde Yeni Yönelimler Kongresi'nde sunulmuş bildiri, Antalya-Türkiye. http://www. iconte.org/FileUpload/ks59689/File/69.pdf adresinden 13.03.2019 tarihinde erişildi.

Öçal, M. F., & Güler, G. (2010). Pre-service mathematics teachers' views about proof by using concept maps. Procedia Social and Behavioral Sciences, *9*, 318-323. doi: https://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.157

Öner, N. (1986). *Klasik mantık* (5. Baskı). Ankara: Ankara Üniversitesi İlahiyat Fakültesi Yayınları No:173. http://kitaplar.ankara.edu.tr/dosyalar/pdf/614.pdf adresinden 12.09.2017 tarihinde erişildi.

Ören, D. (2007). *An investigation of 10th grade students' proof schemes in geometry with respect to their cognitive styles and gender* (Master's Thesis), Middle East Technical University, Ankara.

Özdemir, E. ve Mert-Uyangör, S. (2011). Matematik eğitimi için bir öğretim tasarımı modeli. *e-Journal of New World Sciences Academy*, *6*(2), 1786-1796. http://dergipark.gov.tr/nwsaedu/issue/19820/212100 adresinden 12.12.2016 tarihinde erişildi.

Özen, Y. ve Gül, A. (2007). Sosyal ve eğitim bilimleri araştırmalarında evren-örneklem sorunu. *Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 15, 394-422. http://dergipark.gov.tr/ataunikkefd/issue/2776/37227 adresinden 10.06.2016 tarihinde erişildi.

Özer, Ö. ve Arıkan, A. (2002, 16-18 Eylül). *Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri*. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Bildiriler Kitabı içinde (Cilt II, s. 1083-1089). Ankara.

Özerbaş, M. A. ve Kaya, A. B. (2017). Öğretim tasarımı çalışmalarının içerik analizi: ADDIE Modeli örneklemi. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, *15*(1), 26-42. http://dergipark.gov.tr/tebd/issue/29870/321749 adresinden 12.12.2018 tarihinde erişildi.

Öztürk, T. (2016). *Matematik öğretmeni adaylarının ispatlama becerilerini geliştirmeye yönelik tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi* (Doktora Tezi), Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Pallant, J. (2007). *SPSS survival manual: A step by step guide to data analysis using SPSS for windows* (3rd ed.). Maidenhead: Open University Press.

Park, S., & Oliver, J. S. (2008). Revisiting the conceptualisation of pedagogical content knowledge (PCK): PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research in Science Education*, *38*(3), 261-284. doi: https://dx.doi.org/10.1007/s11165-007-9049-6

Pasigna, J. C., & Herrera, M. L. (2014). Professional profile and pedagogical content knowledge of geometry teachers in mathematical proofs in the context of public secondary high schools. *SDSSU Multidisciplinary Research Journal*, *2*(1), 22-34. Retrieved March 23, 2017 from https://www.smrj.sdssu.edu.ph/index.php/SMRJ/article/view/40/38

Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri* (3. Baskıdan çeviri) (Çev. Ed. Bütün, M. ve Demir, S. B.). Ankara: Pegem Akademi. (Orijinal çalışma: Qualitative research & evaluation methods, 3rd ed., 2001)

Pekşen-Sağır, P. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi* (Yüksek Lisans Tezi), Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Peltomäki, M., & Back, R-J. (2009). An empirical evaluation of structured derivations in high school mathematics. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. De Villiers (Eds), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, (Vol.2, pp.136-141). Taipei, Taiwan: National Taiwan University.

Peterson, C. (2003). Bringing ADDIE to life: Instructional design at its best. *Journal of Educational Multimedia and Hypermedia*, *12*(3), 227-241. Norfolk, VA: Association for the Advancement of Computing in Education (AACE). Retrieved December 29, 2018 from https://www.learntechlib.org/primary/p/2074/

Plaxco, D. B. (2011). *Relationship between students' proof schemes and definitions* (Master's Thesis). Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, USA. Retrieved February 19, 2017 from http://hdl.handle.net/10919/32930

Plomp, T. (2010). Educational design research: an introduction. In T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.), *An Introduction to Educational Design Research: Proceedings of the Seminar Conducted at the East China Normal University*, *Shanghai (PR China),* (3rd print, pp. 9-35). The Netherlands: Netherland Institute for Curriculum Development.

Plumpton, C., Perry, R. L., & Shipton, E. (1984). *Proof*. London, UK: Macmillan Education Limited.

Polat, K. ve Akgün, L. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat kavramına ve ispat yapmanın zorluklarına yönelik görüşleri. *The Journal of Academic Social Science Studies*, 43, 423-438. doi: https://dx.doi.org/10.9761/jasss3219

Polat, K. ve Demircioğlu, H. (2016). Matematik eğitiminde sözsüz ispatlar: Kuramsal bir çalışma. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 129-140. doi: https://dx. doi.org/10.14582/duzgef.686

Pope, C., Mays, N., & Popay, J. (2007). *Synthesizing qualitative and quantitative health evidence: A guide to methods*. Maidenhead: Open University Press.

Previato, E. (Ed.). (2003). *Dictionary of applied math for engineers and scientists-A volume in the comprehensive dictionary of mathematics*. Boca Raton, Florida: CRC Press. doi: https://dx.doi.org/10.1201/9781420037760

Prior, L. F. (2008). Document analysis. In L. M. Given (Ed.), *The Sage encyclopedia of qualitative research methods* (Vol 1, pp. 230-232). Los Angeles, California: Sage Publications, Inc.

Program çıktıları (t.y.). http://mato.aef.marmara.edu.tr/lisans-programi/ adresinden 05.04.2017 tarihinde erişildi.

Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 319-325. doi: https://dx.doi.org/10.1023/A:1024360204239

Roberts, C. E. (2015). *Introduction to mathematical proofs: A Transition to Advanced Mathematics* (2nd ed.). Boca Raton, Florida: CRC Press Taylor & Francis Group.

Ron, G., & Dreyfus, T. (2004). The use of models in teaching proof by mathematical induction. In M. J. Høines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME),* (Vol 4, pp. 113-120). Bergen, Norway: Bergen University College.

Rossi, R. J. (2006). *Theorems, corollaries, lemmas, and methods of proof*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Rotman, J. J. (2007). *Journey into mathematics: An Introduction to Proofs*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.

Samkoff, A., & Weber, K. (2015). Lessons learned from an instructional intervention on proof comprehension. *Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 28-50. doi: https://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.05.002

Sarı, M. (2011). *Üniversite öğrencilerinin matematiksel kanıt ile ilgili güçlükleri ve kanıt öğretimi* (Doktora Tezi), Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Sarı, M., Altun, A. ve Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: Örnek olay çalışması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, *40*(2), 295-319. http://dergipark.gov.tr/auebfd/issue/38396/445309 adresinden 9.12.2016 tarihinde erişildi.

Sarı-Uzun, M. ve Bülbül, A. (2013). Matematik öğretmen adaylarının kanıtlama becerilerini geliştirmeye yönelik bir öğretme deneyi. *Eğitim ve Bilim*, *38*(169), 372-390. http://egitimvebilim.ted.org.tr/index.php/EB/article/view/2366 adresinden 28.12.2016 tarihinde erişildi.

Schwarz, B., & Kaiser, G. (2009). Professional competence of future mathematics teachers on argumentation and proof and how to evaluate it. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. De Villiers (Eds), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, (Vol. 2, pp.190-195). Taipei: National Taiwan Normal University.

Sears, R., Mueller-Hill, E., & Karadeniz, I. (2013, November 5-8). *Preservice teachers perception of their preparation program to cultivate their ability to teach proof.* Paper presented at the 1st Congress on Mathematics Education for Central America and the Caribbean (I CEMACYC). Santo Domingo, Dominican Republic.

Selden A., & Selden, J. (1987). Errors and misconceptions in college level theorem proving. In J. D. Novak (Ed.), *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics*, (Vol. III, pp. 457-470), Ithaca, NY: Cornell University.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. doi: https://dx.doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22. doi: https://dx.doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Siemens, G. (2002). *Instructional design in elearning*. Retrieved November 10, 2017 from http://www.elearnspace.org/Articles/InstructionalDesign.htm

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20-26.

Solow, D. (1982). *How to read and do proofs: An introduction to mathematical thought process*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher*, *91*(8), 670-675. Retrieved March 12, 2016 from http://www.jstor.org/stable/27970745

Steele, M. D., & Rogers, K. C. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: The case of proof. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(2), 159-180. doi: https://dx.doi.org/10.1007/s10857-012-9204-5

Stefanowicz, A. (2014). *Proofs and mathematical reasoning*. Birmingham: University of Birmingham.

Stirling, D. S. G. (2009). *Mathematical analysis and proof* (2nd ed.). Philadelphia, New Delhi: Woodhead Publishing Limited.

Stylianides, A. J. (2011). Towards a comprehensive knowledge package for teaching proof: A focus on the misconception that empirical arguments are proofs. *Pythagoras*, *32*(1), 1-14. doi: http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v32i1.14

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics*, *28*(1), 9-16. Retrieved May 5, 2016 from http://www.jstor.org/stable/40248592

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(4), 258-288. doi: https://dx.doi.org/10.1080/10986060903253954

Stylianides, G. J. (2010). Engaging secondary students in reasoning-and-proving. *Mathematics Teaching*, 219, 39-44. Retrieved April 5, 2017 from http://www.atm.org.uk/journal/archive/mt219.html

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2017). Research-based interventions in the area of proof: The past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 119-127. doi: https://dx.doi.org/10.1007/s10649-017-9782-3

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(3), 145-166. doi: http://dx.doi.org/10.1007/s10857-007-9034-z

Stylianou, D., Chae, N., & Blanton, M. (2006). Students' proof schemes: A closer look at what characterizes students' proof conceptions. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol 2, pp. 54-60). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Sundstrom, T. (2014). *Mathematical reasoning: Writing and proof* (Version 2.1). Retrieved June 20, 2017 from http:// scholarworks.gvsu.edu/books/7/

Swanson, I. (2017). *Introduction to analysis*. Publisher: Author. Retrieved March 11, 2017 from http://people.reed.edu/~iswanson/analysis2017.pdf

Şahin, B. (2016). Matematik öğretmen adaylarının bölünebilme ispatlarını yapma süreçlerinin incelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, *11*(2), 365-378. http://dergipark.gov.tr/befdergi/issue/28762/307847 adresinden 11.11.2018 tarihinde erişildi.

Şahin, Ç. (2014a). Verilerin analizi. R. Y. Kıncal (Ed.), *Bilimsel araştırma yöntemleri* (3. Baskı) içinde (183-219). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Şahin, Ç. (2014b). Veri toplama teknikleri. R. Y. Kıncal (Ed.), *Bilimsel araştırma yöntemleri* (3. Baskı) içinde (s. 125-182). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Şahin, S., Atasoy, B. ve Somyürek, S. (2010). Öğretmen eğitiminde örnek olay yöntemi. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, *9*(2), 253-277. http://dergipark.gov.tr/jss/issue/24246/257084 adresinden 10.11.2018 tarihinde erişildi.

Şengül, S., ve Güner, P. (2013). DNR tabanlı öğretime göre matematik öğretmen adaylarının ispat şemalarının incelenmesi. *The Journal of Academic Social Science Studies*, *6*(2), 869-878. doi: http://dx.doi.org/10.9761/JASSS_401

Şimşek, A. (Ed.). (2012). *Sosyal bilimlerde araştırma yöntemi*. Eskişehir: T.C. Anadolu Üniversitesi Yayını (No: 2653), Açiköğretim Fakültesi Yayını (No: 1619).

Şimşek, H. (2009). Eğitim tarihi araştırmalarında yöntem sorunu. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, *42*(1), 33-51. http://dergipark.gov.tr/auebfd/issue/38409/445485 adresinden 17.1.2017 tarihinde erişildi.

Tabach, M., Levenson, E., Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., & Dreyfus, T. (2011). Secondary school teachers' knowledge of elementary number theory proofs: The case of general cover proofs. *The Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(6), 465-481. doi: https://dx.doi.org/10.1007/s10857-011-9185-9

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y. H. (2012). Cognitive development of proof. In G. Hanna, & M. De Villiers, (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study*, (pp. 13-49). New York, NY: Springer.

Tamir, P. (1988). Subject matter and related pedagogical knowledge in teacher education. *Teaching and Teacher Education*, *4*(2), 99-110. doi: https://dx.doi.org/10.1016/0742-051X(88)90011-X

Taylor, S. J., Bogdan, R., & DeVault, M. L. (2016). *Introduction to qualitative research methods: A guidebook and resource* (4th ed.). Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Thematic working group teams (2018). Retrieved December 11, 2018 from https://cerme11.org/thematic-working-group-teams/

Thompson, R. (2010). *A comprehensive dictionary of mathematics*. New Delhi: Abhishek Publications. Retreved June 22, 2017 from http://31.210.87.4/ebook/pdf/A_Comprehensive_Dictionary_of_Mathematics.pdf

Tok, T. N. (2017). Etkili öğretim için yöntem ve teknikler. A. Doğanay (Ed.), *Öğretim ilke ve yöntemleri* (11. Baskı) içinde (s. 176-259). Ankara: Pegem Akdemi.

Topic study groups at ICME-13 (2017). Retrieved February 2, 2017 from http://www.icme13.org/topic_study_groups

Travers, M. (2001). *Qualitative research through case studies*. London, UK: Sage Publications, Inc.

Turan, İ., Şimşek, Ü. ve Aslan, H. (2015). Eğitim araştırmalarında likert ölçeği ve likert-tipi soruların kullanımı ve analizi. *Sakarya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30, 186-203. http://dergipark.gov.tr/sakaefd/issue/11235/134252 adresinden 25.8.2016 tarihinde erişildi.

Turan-Oluk, N. ve Ekmekci, G. (2017). Alternatif değerlendirme teknikleri ile geleneksel değerlendirme tekniklerinin öğrenci başarısını ölçme açısından karşılaştırılması. *Eğitim ve Toplum Araştırmaları Dergisi*, *4*(2), 172-199. http://dergipark.gov.tr/etad/issue/33483/358279 adresinden 23.12.2018 tarihinde erişildi.

Turgut, M. F. ve Baykul, Y. (2013). *Eğitimde ölçme ve değerlendirme* (5. Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Türk Dil Kurumu [TDK]. (2018). http://www.tdk.gov.tr/ adresinden 13.02.2018 tarihinde erişildi.

Uğur-Erdoğmuş, F. (2015). *Design and development of an electronic performance support system for novice instructional designers* (Doctoral dissertation), Middle East Technical University, Ankara.

Uğurel, I. (2010). *Ortaöğretim matematik programının temel öğeleri çerçevesinde öğrencilerin ispat kavramına yönelik matematiksel bilgilerini nasıl düzenlediklerinin söylem çözümlemesi ile belirlenmesi* (Doktora Tezi), Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243. http://dergipark.gov.tr/hunefd/issue/7812/102550 adresinden 1.8.2016 tarihinde erişildi.

Umay, A. ve Kaf, Y. (2005). Matematikte kusurlu akıl yürütme üzerine bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi*, 28, 188-195. http://dergipark.gov.tr/hunefd/issue/7808/102434 adresinden 1.8.2016 tarihinde erişildi.

Uygan, C., Tanışlı, D. ve Yavuzsoy-Köse, N. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtlardaki değerlendirme süreçlerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *5*(2), 137-157. doi: http://dx.doi.org/10.16949/turcomat.33155

Ünveren, E. N. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik tutumlarının matematiksel modelleme sürecinde incelenmesi* (Yüksek Lisans Tezi), Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight: A Theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Wang, F., & Hannafin, M. J. (2005). Design-based research and technology-enhanced learning environments. *Educational Technology Research and Development, 53*(4), 5-23. doi: https://dx.doi.org/10.1007/BF02504682

Waring, S. (2000). *Can you prove it? Developing concepts of proof in primary and secondary schools*. Leicester, UK: The Mathematical Association.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 101-119. doi: https://dx.doi.org/10.1023/A:1015535614355

Weber, K. (2004). A framework for describing the processes that undergraduates use to construct proofs. In M. J. Høines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, (Vol 4, pp. 425-432). Bergen, Norway: Bergen University College.

Weber, K. (2005). Problem solving, proving and learning: The relationship between problem solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behaviour*, *24*(3-4), 351-360. doi: https://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.005

Wegener, D. R. (2006). *Training library patrons the ADDIE way*. Oxford: Chandos Publishing.

Wilcoxon, F. (1945). Individual comparisons by ranking methods. *Biometrics Bulletin, 1*(6), 80-83. doi: http://dx.doi.org/10.2307/3001968

Yazıcı, F. (2017). *6. sınıf görme engelli öğrencilere ‘‘Vücudumuzdaki sistemler’’ ünitesinde yer alan kavramların öğretimi* (Doktora Tezi), Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Yeşil, R. (2014). Nicel ve nitel araştırma yöntemleri. R. Y. Kıncal (Ed.), *Bilimsel araştırma yöntemleri* (3. Baskı) içinde (s. 51-80). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Yeşildere, S. ve Akkoç, H. (2010). Matematik öğretmen adaylarının sayı örüntülerine ilişkin pedagojik alan bilgilerinin konuya özel stratejiler bağlamında incelenmesi. *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *29*(1), 125-149. http://dergipark.ulakbim.gov.tr/omuefd/article/view/5000079631/5000074006 adresinden 11.11.2016 tarihinde erişildi.

Yıldırım, A. (1999). Nitel araştırma yöntemlerinin temel özellikleri ve eğitim araştırmalarındaki yeri ve önemi. *Eğitim ve Bilim*, *23*(112), 7-17. http://egitimvebilim.ted.org.tr/index.php/EB/article/view/5326 adresinden 11.02.2017 tarihinde erişildi.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (1999). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayınevi.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (10. Baskı). Ankara: Seçkin Yayınevi.

Yılmaz, K. (2015). *Matematiksel modellerle teorem ispatlarının ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerine, ispatla ilgili görüşlerine ve akademik başarılarına etkisi* (Yüksek Lisans Tezi), Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Yoo, S. (2008). *Effects of traditional and problem-based instruction on conceptions of proof and pedagogy in undergraduates and prospective mathematics teachers*. (Doctoral dissertation), The University of Texas at Austin, Austin, TX. Retrieved January 23, 2016 from https://repositories.lib.utexas.edu/handle/2152/17834

Zaimoğlu, Ş. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri* (Yüksek Lisans Tezi), Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 131-148. doi: https://dx.doi.org/10.1007/s10649-008-9131-7

EKLER

Ek-1: Uygulama İzin Yazısı

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
Atatürk Eğitim Fakültesi

Sayı : 65796619-044-E.1800055273 19.02.2018
Konu : Fikret CİHAN'ın Uygulama İzni Hak.

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 08.02.2018 tarihli ve 16541545-302.08.01-E.1800043800 sayılı belge.

Enstitünüz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitim Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi tez aşamasında olan doktora öğrencisi Fikret CİHAN'ın (T.C 23677391424) ***"Matematik Öğretmen Adaylarının İspata Yönelik Pedagojik Alan Bilgilerinin Geliştirilmesi ve İncelemesi"*** başlıklı tez uygulamasını Fakültemiz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı ikinci sınıf öğrencileriyle ders saatleri dışında ve kendi gözetiminde yapması koşulu ile uygun görüldüğü hakkındaki Bölüm Başkanlığı yazısı ektedir.

Gereğini bilgilerinize rica ederim.

Prof. Dr. Ahmet Şükrü ÖZDEMİR
Dekan

EK: Bölüm Başkanlığı yazısı

Marmara Üniversitesi Göztepe Yerleşkesi Atatürk Eğitim Fakültesi 34722 Kadıköy / İSTANBUL
Telefon: 0216 345 90 90-345 47 05 Belgegeçer No: 338 80 60
aef@marmara.edu.tr http://aef.marmara.edu.tr
Kep Adresi: marmarauniversitesi@hs01.kep.tr

Ayrıntılı bilgi için:
Bilgi TENK
Şef

Ek-2: Bilgilendirilmiş Rıza Formu

BİLGİLENDİRİLMİŞ RIZA FORMU

Araştırmanın adı: Matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarımı.

Araştırmanın Kapsamı: Bu araştırma Sayın Doç. Dr. Hatice AKKOÇ'un danışmanlığında devam eden doktora tez çalışması kapsamında hazırlanmıştır.

Araştırmacı: Fikret CİHAN, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Öğrencisi.

Sayın Gönüllü

Bu araştırmanın amacı matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik kapsamlı ve sürdürülebilir bir lisans dersi tasarlamaktır. Tasarlanan dersin sizlerle bir dönem boyunca uygulaması yapılacaktır. Uygulama boyunca dersler ses ve görüntü kaydeden kamera ile kayıt edilecektir. Sizlerden dersin ikinci ve son haftasında İspat Alan Bilgi Anketi (İSABA) ve İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi (İSPABA) ile toplanan verilerle tasarlanan dersin değerlendirme aşaması yapılacaktır. Dersin son haftasında ilk haftasından farklı olarak Ders Değerlendirme Anketi de uygulanacaktır.

Anketlerden edinilecek veriler bilimsel araştırmalarda kullanılacak olup, üçüncü şahıslarla paylaşılmayacak ve kimliğiniz saklı tutulacaktır. Bu araştırmada katılım gönüllük esasına dayalıdır. Araştırmaya katılmayı reddedebilirsiniz, araştırmaya katıldıktan sonra istediğiniz zaman araştırmadan ayrılabilirsiniz. Araştırmaya katılmanız durumunda herhangi bir riskle karşılaşmazsınız. Araştırmaya katılmadığınız veya araştırmadan ayrıldığınız zaman herhangi bir olumsuzlukla asla karşılaşmazsınız. Ayrıca araştırmadan ayrılmanız durumunda sizinle ilgili veriler araştırmadan çıkarılacaktır. Araştırmaya katılıp katılmamaya karar vermeden önce araştırmanın amacı, araştırmanın süresi, sizin araştırma için harcayacağınız süre gibi konularda bilgi sahibi olmanız gerekmektedir. İstediğiniz tüm soruları araştırmaya katılmadan önce veya araştırma sırasında araştırmacıya sorabilirsiniz. Araştırmaya katılmaya karar verirseniz anketleri doldururken kimsenin etkisi ve baskısı altında kalmayınız.

"Bilgilendirilmiş rıza formunu okudum ve anladım. Araştırmaya katılıp katılmayacağımı düşünmem için yeterli süre şahsıma tanınmıştır. Ayrıca araştırma ile ilgili burada yazılı olmayan açıklayıcı bilgiler ve katılımcı haklarım tarafıma araştırmacı tarafından sözlü olarak sunulmuştur. Anlamadığım konularda soru sormam için bana fırsat verilmiştir. Tüm bu koşullar içinde araştırmaya katılmayı kabul ediyor ve bu bilgilendirilmiş rıza formunu kendi özgür irademle imzalıyorum. Araştırma kapsamında şahsımdan toplanan verilerin bilimsel amaçlarla gizlilik kurallarına riayet edilmek şartıyla kullanılmasını hiçbir etki, zorlama ve baskı altında kalmaksızın hür irademle beyan ederim. Ayrıca bu formun bir kopyası tarafıma verilmiştir."

Tarih	Tarih
Katılımcının Adı Soyadı	Araştırmacının Adı Soyadı
İmza	İmza

Ek-3: Yarı Yapılandırılmış Mülakat İzin Formu

YARI YAPILANDIRILMIŞ MÜLAKAT PROTOKOLÜ

Araştırmacı: Fikret CİHAN, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Öğrencisi.

Katılımcı: ……………………………………………………………………………………………….

Araştırmanın adı: Matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarımı.

Araştırmanın Kapsamı: Bu araştırma Sayın Doç. Dr. Hatice AKKOÇ'un danışmanlığında devam eden doktora tez çalışması kapsamında hazırlanmıştır.

Katılımcıdan Beklentiler:

Sizlerle dersin üçüncü ve son haftasında İspat Alan Bilgi Anketi (İSABA) ve İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi (İSPABA) üzerine yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılacaktır.

Yarı yapılandırılmış mülakat soruları:

Uygulama öncesi ve sonrasında sizlere öncelikle İspat Alan Bilgi Anketi (İSABA) üzerine sorular sonrasında ise İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi üzerine sorular sorulacaktır.

Yarı yapılandırılmış mülakat süresi:

Yaklaşık bir saattir.

Kayıt İşlemi:

Araştırmacı ve katılımcı arasında gerçekleşen yarı yapılandırılmış mülakatlar yazılı ve sesli kayıt altına alınacak olup basılı ve dijital ortamda kaydedilecektir.

Katılım Şartları:

Araştırma içerisinde mülakat sorularına vereceğiniz cevaplardan doğrudan ve dolaylı alıntılar yapılacaktır.

Katılımcı Hakları:

Yarı yapılandırılmış mülakata katılım gönüllük esasına göredir. Yarı yapılandırılmış mülakata katıldığınız zaman hiçbir riskle karşılaşmazsınız. Yarı yapılandırılmış mülakata katıldıktan sonra da istediğiniz zaman mülakatı bırakabilirsiniz. Mülakatı bıraktığınız zaman da asla bir olumsuzlukla karşılaşmazsınız ve sizinle ilgili veriler araştırmadan çıkarılır.

YARI YAPILANDIRILMIŞ MÜLAKAT İZİN FORMU

"Yarı yapılandırılmış mülakat protokolünü okudum ve anladım. Yarı yapılandırılmış mülakata katılıp katılmayacağımı düşünmem için yeterli süre şahsıma tanınmıştır. Ayrıca araştırma ve yarı yapılandırılmış mülakatlarla ilgili burada yazılı olmayan açıklayıcı bilgiler ve katılımcı haklarım tarafıma araştırmacı tarafından sözlü olarak sunulmuştur. Anlamadığım konularda soru sormam için bana fırsat verilmiştir. Yarı yapılandırılmış mülakatın ses ve yazılı olarak kayıt altına alınmasını ayrıca basılı ve dijital olarak kaydedilmesini kabul ediyorum. Doğrudan ve dolaylı alıntı yapılmayı kabul ediyorum. Tüm bu koşullar içinde mülakata katılmayı kabul ediyor ve bu bilgilendirilmiş rıza formunu kendi özgür irademle imzalıyorum. Araştırma kapsamında şahsımdan toplanan verilerin bilimsel amaçlarla gizlilik kurallarına riayet edilmek şartıyla kullanılmasını hiçbir etki, zorlama ve baskı altında kalmaksızın hür irademle beyan ederim. Ayrıca bu formun bir kopyası tarafıma verilmiştir."

Tarih	Tarih
Katılımcının Adı Soyadı	Araştırmacının Adı Soyadı
İmza	İmza

Ek-4: İspat Alan Bilgi Anketi (İSABA)

İSPAT ALAN BİLGİ ANKETİ (İSABA)

Değerli Öğretmen Adayları

Bu yedi soruluk anket sizlerin farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgileriniz ile ispat yaparken sahip olduğunuz ispat şemalarınızı belirlemek amacıyla hazırlanmıştır.

Her bir soruyu cevaplarken verilen ifadenin neden doğru veya neden yanlış olduğunu gerekçelendiriniz.

Her bir ispatı yaparken öncelikle seçtiğiniz ispat yöntemini belirtiniz.

İspatı yapamıyorsanız neden ispatlayamadığınızı belirtiniz.

Fikret CİHAN, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Öğrencisi.

1. **Soru:** $\forall m \geq 1$ *için* $\frac{d}{dx}(x^m) = m \cdot x^{m-1}$ olduğunu ispatlayınız (Swanson, 2017).

2. **Soru:** $\forall X$ matrisi için XX^T matrisi simetrik matristir. İspatlayınız (Garnier ve Taylor, 1996).

3. **Soru:** $\forall x \in R_{>0}$ için $x + \frac{1}{x} > 1$ olduğunu ispatlayınız (Cunningham, 2012).

4. **Soru:** Boştan farklı K, L ve M kümeleri için $g: K \to L$ ve $h: L \to M$ iki fonksiyon olsun. hog fonksiyonu birebir fonksiyon ise g fonksiyonu da birebir fonksiyondur. İspatlayınız (Chartrand, Polimeni ve Zhang, 2013).

5. **Soru:** $\forall m \in Z_{\geq 0}$ için $m^3 - m$ ifadesi 6 ile tam bölünür. İspatlayınız (Plumpton, Perry ve Shipton, 1984).

6. **Soru:** $\forall a \in R$ için $1 + tan^2 a = sec^2 a$ önermesinin doğru olmadığını ispatlayınız (Sundstrom, 2014).

7. **Soru:** Sonsuz sayıda asal sayı vardır (Öklid, M.Ö. 330-275). İspatlayınız.

Ek-5: İspat Alan Bilgi Anketi (İSABA)-Uzman Görüşü Formu

İSPAT ALAN BİLGİ ANKETİ (İSABA)–UZMAN GÖRÜŞÜ FORMU

Değerli akademisyenler ve matematik eğitimcileri;

Bu formun amacı "Matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarımı" başlıklı doktora tezi kapsamında oluşturulması hedeflenen "İspat Alan Bilgi Anketi (İSABA)"nin geçerlik çalışmasını yapmak için sizlerden uzman görüşü almaktır. Çalışmada öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerinin ölçülmesi hedeflenmektedir. Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgileri; farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgileri ve ispat yaparken sahip oldukları ispat şemaları ile ölçülmek istenmektedir.

Göstermiş olduğunuz katılımdan ve değerli katkılarınızdan dolayı teşekkür ederim.

Fikret CİHAN

YÖNERGE

Araştırmada yer almasının gerekli olduğu düşünülen kazanımlar aşağıdaki tablolarda belirtildiği şekilde sınıflandırılmıştır. Belirlenen kazanımlar ile ilgili öğretmen adaylarının alan bilgilerini ölçmeye yönelik sorular hazırlanmıştır. Bu soruların ifade ediliş biçimleri ile belirtilen kazanımları ölçmeye uygunluğunu değerlendiriniz.

Öğretmen adayı farklı ispat yöntemlerini bilir ve uygular.	
1. Tümevarımla ispat yöntemi 1.1. Zayıf tümevarım yöntemi 1.2. Genişletilmiş zayıf tümevarım yöntemi 1.3. Güçlü tümevarım yöntemi 1.4. Genişletilmiş güçlü tümevarım yöntemi	2. Tümdengelimle ispat yöntemi 2.1. Doğrudan ispat yöntemi 2.2. Dolaylı ispat yöntemi 2.2.1. Durum yoluyla ispat yöntemi 2.2.2. Tüketerek ispat yöntemi 2.2.3. Çelişki ile ispat yöntemi 2.2.4. Olmayan ergi yöntemi 2.2.5. Aksine örnek verme yöntemi

Öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır.
1. Dışsal ispat şemaları 1.1. Otoriter ispat şeması 1.2. Ritüel ispat şeması 1.3. Sembolik ispat şeması 2. Deneysel ispat şemaları 2.1. Algısal ispat şeması 2.2. Örnek-temelli ispat şeması 3. Analitik ispat şemaları 3.1. Dönüşümcü ispat şeması 3.2. Aksiyomatik ispat şeması

SORULAR	ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIMLAR	SORULARIN İFADE EDİLİŞ BİÇİMİ			ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIMLARA UYGUNLUK			ÖNERİLER
		Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	
1. Soru: $\forall m \geq 1$ için $\frac{d}{dx}(x^m) = m \cdot x^{m-1}$ olduğunu ispatlayınız (Swanson, 2017).	• Öğretmen adayı farklı ispat yöntemlerini bilir ve uygular. • Öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır.							
2. Soru: $\forall X$ matrisi için XX^T matrisi simetrik matristir. İspatlayınız (Garnier ve Taylor, 1996).								
3. Soru: $\forall x \in R_{>0}$ için $x + \frac{1}{x} > 1$ olduğunu ispatlayınız (Cunningham, 2012).								
4. Soru: Boştan farklı K, L ve M kümeleri için $g: K \to L$ ve $h: L \to M$ iki fonksiyon olsun. hog fonksiyonu birebir fonksiyon ise g fonksiyonu da birebir fonksiyondur. İspatlayınız (Chartrand, Polimeni ve Zhang, 2013).								
5. Soru: $\forall m \in Z_{\geq 0}$ için $m^3 - m$ ifadesi 6 ile tam bölünür. İspatlayınız (Plumpton, Perry ve Shipton, 1984).								
6. Soru: $\forall a \in R$ için $1 + tan^2 a = sec^2 a$ önermesinin doğru olmadığını ispatlayınız (Sundstrom, 2014).								
7. Soru: Sonsuz sayıda asal sayı vardır (Öklid, M.Ö. 330-275). İspatlayınız.								

Ek-6: Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları Sonucunda İspat Alan Bilgi Anketi (İSABA)

İSPAT ALAN BİLGİ ANKETİ (İSABA)

Değerli Öğretmen Adayları

Bu yedi soruluk anket sizlerin farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgileriniz ile ispat yaparken sahip olduğunuz ispat şemalarınızı belirlemek amacıyla hazırlanmıştır.

Her bir soruyu cevaplarken verilen ifadenin neden doğru veya neden yanlış olduğunu gerekçelendiriniz.

Her bir ispatı yaparken öncelikle seçtiğiniz ispat yöntemini belirtiniz.

İspatı yapamıyorsanız neden ispatlayamadığınızı belirtiniz.

Fikret CİHAN, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Öğrencisi.

1. **Soru:** f_m fibonacci dizisinin bir elemanı olmak üzere
   $m \geq 2$ ise $(f_m)^2 - f_{m+1} \cdot f_{m-1} = (-1)^{m+1}$ olduğunu ispatlayınız.

2. **Soru:** $\forall X$ matrisi için XX^T matrisi simetrik matristir. İspatlayınız.

3. **Soru:** $\forall x \in R_{>0}$ için $x + \frac{1}{x} > 1$ olduğunu ispatlayınız.

4. **Soru:** Boştan farklı K, L ve M kümeleri için $g: K \to L$ ve $h: L \to M$ iki fonksiyon olsun. hog fonksiyonu birebir fonksiyon ise g fonksiyonu da birebir fonksiyondur. İspatlayınız.

5. **Soru:** $\forall m \in Z_{\geq 0}$ için $m^3 - m$ ifadesi 6 ile tam bölünür. İspatlayınız.

6. **Soru:** $\forall a \in R$ için $1 + tan^2 a = sec^2 a$ önermesinin doğru olmadığını ispatlayınız.

7. **Soru:** $\sqrt{5}$ sayısı rasyonel sayı değildir. İspatlayınız.

Ek-7: İspat Alan Bilgi Anketi (İSABA) Cevap Anahtarı

1. Cevap: f_m fibonacci dizisinin bir elemanı ve $m \geq 2$ olsun.

$(f_m)^2 - f_{m+1} \cdot f_{m-1} = (-1)^{m+1}$ olduğunu "genişletilmiş güçlü tümevarımla ispat yöntemi" ile ispatlayalım.

$m = 2$ için $(f_2)^2 - f_{2+1} \cdot f_{2-1} = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 = (-1)^{2+1}$ Temel adım doğrulanmış olur.

$m = 3, \cdots, m = k-1, m = k$ tümevarım hipotezleri için teoremin doğru olduğunu kabul edelim.

$m = 3$ için $(f_3)^2 - f_{3+1} \cdot f_{3-1} = (-1)^{3+1}$ doğru olsun.

$\vdots$

$m = k-1$ için $(f_{k-1})^2 - f_k \cdot f_{k-2} = (-1)^k$ doğru olsun.

$m = k$ için $(f_k)^2 - f_{k+1} \cdot f_{k-1} = (-1)^{k+1}$ doğru olsun.

$m = k+1$ için $(f_{k+1})^2 - f_{k+2} \cdot f_k = (-1)^{k+2}$ doğru olduğunu gösterelim.

$(f_k)^2 - f_{k+1} \cdot f_{k-1} = (-1)^{k+1}$ ifadesinin her iki tarafını (-1) ile çarpalım.

$f_{k+1} \cdot f_{k-1} - (f_k)^2 = (-1)^{k+2}$ ise

$f_{k+1} \cdot (f_{k+1} - f_k) - (f_k)^2 = (-1)^{k+2}$ $\qquad$ $f_{k-1} = f_{k+1} - f_k$ olduğundan

$(f_{k+1})^2 - f_{k+1} \cdot f_k - (f_k)^2 = (-1)^{k+2}$

$(f_{k+1})^2 - f_k \cdot (f_{k+2} - f_k) - (f_k)^2 = (-1)^{k+2}$ $\qquad$ $f_{k+1} = f_{k+2} - f_k$ olduğundan

$(f_{k+1})^2 - f_k \cdot f_{k+2} + (f_k)^2 - (f_k)^2 = (-1)^{k+2}$

$(f_{k+1})^2 - f_{k+2} \cdot f_k = (-1)^{k+2}$ olur. O halde ispat bitmiş olur.

2. Cevap: X herhangi tipten herhangi bir matris olsun. $X \cdot X^T$ matrisinin simetrik matris olduğunu "doğrudan ispat yöntemi" ile ispatlayalım. Transpozesi kendisine eşit olan matrislere simetrik matris dendiğinden $(X \cdot X^T)^T = X \cdot X^T$ olduğunu göstermeliyiz.

$(X \cdot X^T)^T = (X^T)^T \cdot X^T$ (Matrislerde çarpma işlemi gereği)

$= X \cdot X^T$ (Bir matrisin transpozesinin transpozesi kendisidir)

Böylece teorem ispatlanmış olur.

3. Cevap: $x \in R_{>0}$ olsun. $x + \frac{1}{x} > 1$ olduğunu "durum yoluyla ispat yöntemi" ile ispatlayalım. Hipotezi durumlara bölelim. $x \in R_{>0}$ hipotezi $0 < x < 1$, $x = 1$ ve $x > 1$ olmak üzere üç duruma bölünmelidir.

$0 < x < 1$ için $x > 0$ ve $\frac{1}{x} > 1$ olduğundan $x + \frac{1}{x} > 1$ dir. (1)

$x = 1$ için $x + \frac{1}{x} = 1 + 1 = 2 > 1$ dir. (2)

$x > 1$ için $x > 1$ ve $\frac{1}{x} > 0$ olduğundan $x + \frac{1}{x} > 1$ dir. (3)

Dolayısıyla (1), (2) ve (3)'ten teorem ispatlanmış olur.

4. Cevap: Boştan farklı K, L ve M kümeleri için $g: K \to L$ ve $h: L \to M$ iki fonksiyon ve hog fonksiyonu birebir fonksiyon olsun. Bu durumda g fonksiyonunun da birebir fonksiyon olduğunu "olmayana ergi ile ispat yöntemi" ile ispatlayalım.
g fonksiyonu birebir fonksiyon olmasın. Bu durumda hog fonksiyonunun da birebir olmadığını gösterelim.
g fonksiyonu birebir fonksiyon değilse $g(p) = g(r)$ olacak şekilde $p, r \in K$ vardır. (*)
Buradan
$(hog)(p) = h(g(p))$ (bileşke fonksiyon tanımı gereği)
$(hog)(p) = h(g(p)) = h(g(r))$ (*) gereği
$(hog)(p) = h(g(p)) = h(g(r)) = (hog)(r)$ (bileşke fonksiyon tanımı gereği)
$(hog)(p) = (hog)(r)$ ise hog fonksiyonu birebir fonksiyon değildir. (birebir fonksiyon tanımı gereği)
O halde ispat tamamlanmış olur.

5. Cevap: $m \in Z_{\geq 0}$ olsun. Bu durumda $m^3 - m$ ifadesinin 6 ile tam bölündüğünü "tüketerek ispat yöntemi" ile ispatlayalım. 6 ile bölündüğünü göstermek için Mod 6'nın elemanları olan {0, 1, 2, 3, 4, 5} kümesinin elemanlarının tüketilmesi yeterli olacaktır.

$m = 0$ için $m^3 - m = 0^3 - 0 = 0$ 6 ile tam bölünür.

$m = 1$ için $m^3 - m = 1^3 - 1 = 0$ 6 ile tam bölünür.

$m = 2$ için $m^3 - m = 2^3 - 2 = 6$ 6 ile tam bölünür.

$m = 3$ için $m^3 - m = 3^3 - 3 = 24$ 6 ile tam bölünür.

$m = 4$ için $m^3 - m = 4^3 - 6 = 60$ 6 ile tam bölünür.

$m = 5$ için $m^3 - m = 125^3 - 5 = 120$ 6 ile tam bölünür.

İspat bitti.

6. Cevap: $\alpha \in R$ olsun. $1 + tan^2\alpha = sec^2\alpha$ önermesinin doğru olmadığını "aksine örnek verme yöntemi" ile ispatlayalım. Bunun için $1 + tan^2\alpha = sec^2\alpha$ önermesinin doğru olmadığını gösterecek (çürütecek) $\exists\alpha \in R$ (karşıt örnek) bulmalıyız.

$tan\alpha : \{\alpha | \alpha \in R \ ve \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z\} \rightarrow R$ tanımlıdır.

$sec\alpha : \{\alpha | \alpha \in R \ ve \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z\} \rightarrow R$ tanımlıdır.

O halde $1 + tan^2\alpha = sec^2\alpha$ önermesi $tan\alpha$ ve $sec\alpha$ fonksiyonlarının tanımı gereği $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$ değerleri için tanımsızdır. Bu değerlerde eşitlik doğru olmaz. Böylece önermenin doğru olmadığı ispatlanmış olur.

7. Cevap: $\sqrt{5}$ sayısının rasyonel sayı olmadığını "çelişki ile ispat yöntemi" ile ispatlayalım. $\sqrt{5}$ sayısının rasyonel sayı olduğunu kabul edip bir çelişkiye ulaşalım.

$\sqrt{5}$ rasyonel sayı olsun. Bu durumda $b \neq 0$ ve $(a, b) = 1$ iken $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilir. İçler dışlar çarpımından $a = \sqrt{5} \cdot b$ bulunur. İki tarafın karesi alınırsa $a^2 = 5 \cdot b^2$ olur. Yani $5| \ a$ bulunur. $5| \ a$ ise $a = 5 \cdot k$ olacak biçimde bir $k \in Z$ vardır. Eşitlikte a'yı yerine yazarsak $\sqrt{5} \cdot b = 5 \cdot k$ olur. Yine iki tarafın karesi alınırsa $5 \cdot b^2 = 25 \cdot k^2$ olur. Buradan da $b^2 = 5 \cdot k^2$ olur. Yani $5| \ b$ olur. O halde $(a, b) = 5 \neq 1$ bulunur. Çelişki. Teorem ispatlanmış olur.

Ek-8: İspat Alan Bilgi Anketi (İSABA) Üzerine Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formu

İSPAT ALAN BİLGİ ANKETİ (İSABA) ÜZERİNE

YARI YAPILANDIRILMIŞ MÜLAKAT FORMU

1. **Soru:** Bu soruda verilen önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını ispatlayınız.

(Mülakata katılan öğretmen adaylarından İSABA'ndeki yedi sorunun tek tek ispatı istenmiştir ve her bir cevap için aşağıdaki sorulardan uygun olanlar sorulmuştur.)

2. **Soru:** Bu soruda ispat için hangi ispat yöntemini seçtiniz?

Seçmediyse: İspat yöntemi olmadan ispat yapılabilir mi?
Seçtiyse: Neden bu yöntemi seçtiniz?
Seçtiyse: Seçtiğiniz yöntem hakkında bilgi veriniz.
Seçtiyse: Seçtiğiniz ispat yöntemi bu soru için uygun mu?

3. **Soru:** Bu soruda yaptığınız ispat sizi ve başkalarını ikna etmeye yeterli midir?

4. **Soru:** Sizce yaptığınız bu ispatta eksik noktalar var mı?

5. **Soru:** Bu sorunun sizin yaptığınızdan başka bir ispatı var mıdır?

6. **Soru:** Daha önceki öğrenim hayatınızda yaptığınız bu ispatı görmüş müydünüz? Ne zaman? Nerde? Kimden?

7. **Soru:** Bir ispat sadece matematiksel ifadelerle mi ispatlanmak zorundadır?

8. **Soru:** Yaptığınız bu ispatta attığınız adımları anlamlandırabilir misiniz?

9. **Soru:** Bu ispatı yaparken güçlük yaşadınız mı? Nedir?

10. **Soru:** Bu soruda örnek vermek ispat için yeterli mi?

11. **Soru:** Bu soruda şekil çizmek ispat için yeterli mi?

Ek-9: İspat Alan Bilgi Anketi Üzerine Yarı Yapılandırılmış Mülakat-Uzman Görüşü Formu

İSPAT ALAN BİLGİ ANKETİ (İSABA) ÜZERİNE YARI YAPILANDIRILMIŞ MÜLAKAT–UZMAN GÖRÜŞÜ FORMU

Değerli akademisyenler ve matematik eğitimcileri;

Bu formun amacı “Matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarımı” başlıklı doktora tezi kapsamında oluşturulması hedeflenen “İspat Alan Bilgi Anketi (İSABA) Üzerine Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formu”nun geçerlik çalışmasını yapmak için sizlerden uzman görüşü almaktır. Çalışmada öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerinin derinlemesine ölçülmesi hedeflenmektedir. Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgileri; farklı ispat yöntemlerini bilip uygulama bilgileri ve ispat yaparken sahip oldukları ispat şemaları ile ölçülmek istenmektedir.

Göstermiş olduğunuz katılımdan ve değerli katkılarınızdan dolayı teşekkür ederim.

Fikret CİHAN

YÖNERGE

Araştırmada yer almasının gerekli olduğu düşünülen kazanımlar aşağıdaki tablolarda belirtildiği şekilde sınıflandırılmıştır.

Belirlenen kazanımlar ile ilgili öğretmen adaylarının alan bilgilerini derinlemesine ölçmeye yönelik sorular hazırlanmıştır. Bu soruların ifade ediliş biçimleri ile belirtilen kazanımları ölçmeye uygunluğunu değerlendiriniz.

Öğretmen adayı farklı ispat yöntemlerini bilir ve uygular.	
1. Tümevarımla ispat yöntemi 1.1. Zayıf tümevarım yöntemi 1.2. Genişletilmiş zayıf tümevarım yöntemi 1.3. Güçlü tümevarım yöntemi 1.4. Genişletilmiş güçlü tümevarım yöntemi	2. Tümdengelimle ispat yöntemi 2.1. Doğrudan ispat yöntemi 2.2. Dolaylı ispat yöntemi 2.2.1. Durum yoluyla ispat yöntemi 2.2.2. Tüketerek ispat yöntemi 2.2.3. Çelişki ile ispat yöntemi 2.2.4. Olmayan ergi yöntemi 2.2.5. Aksine örnek verme yöntemi

Öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır.
1. Dışsal ispat şemaları 1.1. Otoriter ispat şeması 1.2. Ritüel ispat şeması 1.3. Sembolik ispat şeması 2. Deneysel ispat şemaları 2.1. Algısal ispat şeması 2.2. Örnek-temelli ispat şeması 3. Analitik ispat şemaları 3.1. Dönüşümcü ispat şeması 3.2. Aksiyomatik ispat şeması

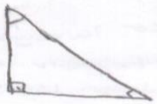
SORULAR	ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIM(LAR)	SORULARIN İFADE EDİLİŞ BİÇİMİ			ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIM(LAR)A UYGUNLUK			ÖNERİLER
		Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	
1. Soru: Bu soruda verilen önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını ispatlayınız. (Mülakata katılacak öğretmen adaylarından İSABA'ndeki yedi sorunun tek tek ispatı istenecektir ve her bir cevap için aşağıdaki sorulardan uygun olanlar sorulacaktır.)	• Öğretmen adayı farklı ispat yöntemlerini bilir ve uygular. • Öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır.							
2. Soru: Bu soruda ispat için hangi ispat yöntemini seçtiniz? *Seçmediyse:* İspat yöntemi olmadan ispat yapılabilir mi? *Seçtiyse:* Neden bu yöntemi seçtiniz? *Seçtiyse:* Seçtiğiniz yöntem hakkında bilgi veriniz. *Seçtiyse:* Seçtiğiniz ispat yöntemi bu soru için uygun mu?	• Öğretmen adayı farklı ispat yöntemlerini bilir ve uygular. • Öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır.							
3. Soru: Bu soruda yaptığınız ispat sizi ve başkalarını ikna etmeye yeterli midir?	• Öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır.							
4. Soru: Sizce yaptığınız bu ispatta eksik noktalar var mı?	• Öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır.							
5. Soru: Bu sorunun sizin yaptığınızdan başka bir ispatı var mıdır?	• Öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır.							
6. Soru: Daha önceki öğrenim hayatınızda yaptığınız bu ispatı görmüş müydünüz? Ne zaman? Nerde? Kimden?	• Öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır.							
7. Soru: Bir ispat sadece matematiksel ifadelerle mi ispatlanmak zorundadır?	• Öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır.							

SORULAR	ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIM(LAR)	SORULARIN İFADE EDİLİŞ BİÇİMİ			ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIM(LAR)A UYGUNLUK			ÖNERİLER
		Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	
8. Soru: Yaptığınız bu ispatta attığınız adımları anlamlandırabilir misiniz?	• Öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır.							
9. Soru: Bu ispatı yaparken güçlük yaşadınız mı? Nedir?	• Öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır.							
10. Soru: Bu soruda örnek vermek ispat için yeterli mi?	• Öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır.							
11. Soru: Bu soruda şekil çizmek ispat için yeterli mi?	• Öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır.							

Ek-10: İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi

İSPAT PEDAGOJİK ALAN BİLGİ (1. KISIM) ANKETİ

Değerli Öğretmen Adayları *Bu anket sizlerin ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit edip edemediğinizi, ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklayıp açıklayamadığınızı ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleyip belirleyemediğinizi tespit etmek amacıyla hazırlanmıştır. Beş sorunun her birindeki öğrencinin ispatlamayla ilgili yaşadığı güçlüğü, bu güçlüğün nedenini ve bu güçlüğün üstesinden gelecek öğretim stratejisini ilgili boşluklara yazınız.* *Fikret CİHAN, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Öğrencisi.*

İspatlamayla İlgili Sorular	**Güçlük**	**Nedeni**	**Öğretim Stratejisi**
1. Soru: Aylar (2014a) doktora tezinde öğrencilerden 3'ün katı olan iki sayının farkının da 3'e bölünebileceğini ispatlamalarını istemiştir (s. 90). Bir öğrencinin cevabı aşağıdaki gibidir (s. 90). 12 - 9 = 3 21 - 18 = 3 18 - 9 = 9 Doğru. Hepsinin katı 3 olduğu için, hepsinde aynı artış olduğu için. (Yazmak zor olduğu için açıklamalarım biraz garip oldu) Farkı da 3'e bölünebilir. Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğü tespit edip, bu güçlüğün nedenini açıklayınız ve bu güçlüğün üstesinden gelecek öğretim stratejisini belirleyiniz.			
2. Soru: Zaimoğlu (2012) yüksek lisans tezinde öğrencilerden bir dik üçgenin dar açılarının ölçülerinin toplamının 90° olduğunu ispatlamalarını istemiştir. Teorem ve bir öğrencinin ispatı aşağıdaki gibidir (s. 40). Bir dik üçgende dar açılarının ölçülerinin toplamı 90° dir. Neden? İspatlayınız.  Bir üçgenin iç açıları toplam ölçüleri 180°'dir. Dik açılı üçgenin bir açısı 90°dir 180'den, 90' çıkarırsak 90° kalır. Diğer iki açının toplamı da 90° olmalıdır. Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğü tespit edip, bu güçlüğün nedenini açıklayınız ve bu güçlüğün üstesinden gelecek öğretim stratejisini belirleyiniz.			

<table>
<tr><th>İspatlamayla İlgili Sorular</th><th>Güçlük</th><th>Nedeni</th><th>Öğretim Stratejisi</th></tr>
<tr><td>
3. Soru: Güler, Özdemir ve Dikici (2012) çalışmalarında öğrencilerden

$$(1)(3)+(2)(4)+(3)(5)+\cdots+n(n+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

teoremini ispatlamalarını istemiştir (s. 225). Bir öğrencinin cevabı aşağıdaki gibidir (s. 223).

n=1 için önerme doğrudur. Çünkü $(1)(3)=3=\frac{1.2.9}{6}$ olduğu görülür.
n=k için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,
$(1)(3)+\dots+k(k+2)=\frac{k.(k+1)(2k+7)}{6}$ olduğunu kabul edelim.
n=k+1 için doğruluğunu gösterelim. Yani,
$(1)(3)+\dots+k(k+2)+(k+1)(k+3)=\frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$ olduğunu gösterelim.
Burdan;
$\frac{k.(k+1)(2k+7)}{6}+(k+1)(k+3)=\frac{2k^3+9k^2+7k}{6}+k^2+4k+3=\frac{2k^3+15k^2+31k+18}{6}$ --- (I)
$\frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}=\frac{(k^2+3k+2)(2k+9)}{6}=\frac{2k^3+9k^2+6k^2+27k+4k+18}{6}=\frac{2k^3+15k^2+31k+18}{6}$ --- (II)
(I) ve (II) den n=k+1 için önerme doğrudur. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğü tespit edip, bu güçlüğün nedenini açıklayınız ve bu güçlüğün üstesinden gelecek öğretim stratejisini belirleyiniz.
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
4. Soru: Bir öğretmen öğrencisinden $\lim_{u\to v}\frac{1}{(u-v)^2}=-\infty$ eşitliğinin doğru olup olmadığını ispatlamasını istemiştir. Öğretmen ve öğrencisine ait diyalog aşağıdaki gibidir.

Öğretmen: Bu eşitlik doğru mu yoksa yanlış mıdır? İspatlayabilir misiniz?

Öğrenci: Yanlış.

Öğretmen: Neden yanlış? Gerekçelendirebilir misiniz?

Öğrenci: $\lim_{u\to v}\frac{1}{(u-v)^2}=\lim_{u\to v}\frac{1}{(v-v)^2}=\frac{1}{0}$ Matematik derslerinde öğrendiğimize göre u yerine v yazıyoruz, payda sıfır oluyor, payda sıfır olunca da tanımsız olur. Limiti olmamalı.

Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğü tespit edip, bu güçlüğün nedenini açıklayınız ve bu güçlüğün üstesinden gelecek öğretim stratejisini belirleyiniz
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

İspatlamayla İlgili Sorular	**Güçlük**	**Nedeni**	**Öğretim Stratejisi**
5. Soru: Güler ve Ekmekci (2016) çalışmalarında $1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$ teoreminin ispatını aşağıdaki gibi vermiş ve öğrencilerden yapılan bu ispatın doğru mu, eksik mi, yoksa yanlış mı olduğunu değerlendirmelerini istemiştir. İspat: $n=1$ için $P(1)=1=1^2$ doğrudur. $n=k$ için $P(k)=1+3+5+\cdots+2k-1=k^2$ doğru olsun. $n=k+1$ için doğru olduğunu yani $1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$ olduğunu göstermemiz gerekir. $$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$ O halde teorem ispatlanmış olur (s. 79-81). İspatın eksik olduğunu savunan bir öğrenciyle (Ö4) mülakatçının (M) diyaloğu aşağıdaki gibidir (s. 73). *M: 6. İspatın neden eksik olduğunu açıklayınız.* *Ö4: Sonsuz sayıyı denememiz gerekir k+1 e kadar deneyip hepsinin doğru olduğunu söyleyemeyiz. Açıklama yapmamış ayrıca. Direk k^2 yi kabul etmiş. Yukarda hiç açıklama yapmamış. Diğerlerinde hep n^2 olduğunu kabul etmeden buldular. Ama burada hemen n için n^2 kabul etmiş. Eksik olmuş.* *M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.* *Ö4: n=1 için doğru olsun demiş. Sonra n=k için doğru olsun demiş. Daha sonra n=k+1 için doğruluğunu göstermeliyiz demiş. Yani ben bunu pek anlayamadım ya!* *M: Eğer bu ispatı siz yapıyor olsaydınız ispatta gördüğünüz eksikliği nasıl giderirdiniz. Açıklayınız.* *Ö4: Doğru düzgün bir açıklama yapılması gerekti.* *M: Bu şekilde yapılan bir ispatla verilen ifadenin her doğal sayı için doğru olduğu gösterilebilir mi? Neden?* *Ö4: Her doğal sayı için geçerli değildir. İspatı kabul etmedim sonuçta.* *M: Tümevarım yönteminin özelliklerini açıklayınız.* *Ö4: Derste görmüştük. Bir değer veriyorduk. Sonra o değeri kabul ediyorduk. Sonra başka bir değer verdiğimizde bu da doğru oluyordu. Böyle yapıyorduk aslında ama nedense bu ispat bana eksik geldi.* İspatı değerlendiren bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğü tespit edip, bu güçlüğün nedenini açıklayınız ve bu güçlüğün üstesinden gelecek öğretim stratejisini belirleyiniz.			

İSPAT PEDAGOJİK ALAN BİLGİ (2. KISIM) ANKETİ

Değerli Öğretmen Adayları

Bu ankette öğrencilerin ispat yaparken kullandıkları ispat şemalarını sizlerin tespit edip edemediğinizi belirlemek amaçlanmıştır. Bunun için yedi farklı senaryo hazırlanmıştır.

Uygulama öncesi: Bu senaryolardaki öğrencilerin önermelerin doğruluğunu ya da yanlışlığını ispatlarken kullandıkları argümanları (gerekçelendirme biçimlerini) tespit ediniz.

Uygulama sonrası: Bu senaryolardaki öğrencilerin önermelerin doğruluğunu ya da yanlışlığını ispatlarken kullandıkları argümanları (gerekçelendirme biçimlerini) tespit ediniz. Ayrıca bu senaryolardaki öğrencilerin önermelerin doğruluğunu ya da yanlışlığını ispatlarken kullanmış oldukları ana ve alt ispat şemalarını Sowder ve Harel'in (1998) taksonomisine göre tespit ediniz. Bu şemaların özelliklerini özetleyiniz.

Fikret CİHAN, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Öğrencisi.

1. Senaryo: Ahmet öğretmen öğrencisine bir önerme yazıp bu önermenin doğru önerme mi yoksa yanlış önerme mi olduğunu sormuş ve cevabını gerekçelendirmesini istemiştir. Öğretmen ve öğrenciye ait diyalog aşağıdaki gibidir.

Öğretmen: Aşağıda yazdığım önerme doğru mudur yanlış mıdır? Doğruysa neden doğru, yanlışsa da neden yanlış olduğunu gerekçelendirir misin?

Önerme: X matrisi 2x2 tipinden herhangi bir matris ve I_{2x2} *aynı tipten birim matris iken*

$$X_{2x2} \cdot I_{2x2} = I_{2x2} \cdot X_{2x2} = X_{2x2}$$

dir.

Öğrenci: $X_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ *olsun. (1) Bu durumda*

$X_{2x2} \cdot I_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ *(2) ve*

$I_{2x2} \cdot X_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ *(3) olur. (1), (2) ve (3)'ten önermenin doğruluğu ispatlanmış olur.*

2. Senaryo: Ahmet öğretmen öğrencisine bir önerme yazıp bu önermenin doğru önerme mi yoksa yanlış önerme mi olduğunu sormuş ve cevabını gerekçelendirmesini istemiştir. Öğretmen ve öğrenciye ait diyalog aşağıdaki gibidir.

Öğretmen: Aşağıda yazdığım önerme doğru mudur yanlış mıdır? Doğruysa neden doğru, yanlışsa da neden yanlış olduğunu gerekçelendirir misin?

Önerme: $\forall a, b, c \in R^{+}\backslash\{1\}$ *ve* $\forall d \in R^{+}$ *olmak üzere*

$$log_a b \cdot log_b c \cdot log_c d = log_a d$$

Öğrenci: Doğrudan ispat yöntemi ile önermenin doğruluğunu ispatlayalım.

$a, b, c \in R^{+}\backslash\{1\}$ *ve* $d \in R^{+}$ *olsun. Taban değiştirme kuralı gereği*

$$log_a b = \frac{log\, b}{log\, a},\ log_b c = \frac{log\, c}{log\, b} \text{ ve } log_c d = \frac{log\, d}{log\, c} \text{ olduğundan}$$

$$log_a b \cdot log_b c \cdot log_c d = \frac{log\, b}{log\, a} \cdot \frac{log\, c}{log\, b} \cdot \frac{log\, d}{log\, c}$$

yazılabilir. Sadeleştirmeler yapılırsa

$$log_a b \cdot log_b c \cdot log_c d = \frac{log\, b}{log\, a} \cdot \frac{log\, c}{log\, b} \cdot \frac{log\, d}{log\, c} = \frac{log\, d}{log\, a}$$

olur. Yine taban değiştirme kuralı gereği

$$log_a b \cdot log_b c \cdot log_c d = \frac{log\, b}{log\, a} \cdot \frac{log\, c}{log\, b} \cdot \frac{log\, d}{log\, c} = \frac{log\, d}{log\, a} = log_a d \text{ olur.}$$

Böylece teorem ispatlanmış olur.

3. Senaryo: Ahmet öğretmen öğrencisine bir önerme yazıp bu önermenin doğru önerme mi yoksa yanlış önerme mi olduğunu sormuş ve cevabını gerekçelendirmesini istemiştir. Öğretmen ve öğrenciye ait diyalog aşağıdaki gibidir.

Öğretmen: Aşağıda yazdığım önerme doğru mudur yanlış mıdır? Doğruysa neden doğru, yanlışsa da neden yanlış olduğunu gerekçelendirir misin?

Önerme: $f: X \to Y$ *ve* $g: Y \to Z$ *iki fonksiyon olmak üzere* $gof: X \to Z$, $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ *dir.*

Öğrenci: $(gof)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ *dir. Buradan değişme özelliğinden*

$(gof)^{-1} = g^{-1}of^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ *olur. Böylece teorem ispatlanmış olur.*

4. Senaryo: Ahmet öğretmen öğrencisine bir önerme yazıp bu önermenin doğru önerme mi yoksa yanlış önerme mi olduğunu sormuş ve cevabını gerekçelendirmesini istemiştir. Öğretmen ve öğrenciye ait diyalog aşağıdaki gibidir.

Öğretmen: Aşağıda yazdığım önerme doğru mudur yanlış mıdır? Doğruysa neden doğru, yanlışsa da neden yanlış olduğunu gerekçelendirir misin?

Önerme: $sinm \cdot cosn = \frac{1}{2} \cdot [sin(m+n) + sin(m-n)]$ *dir.*

Öğrenci: Önerme doğrudur. Çünkü bu bir kural ve kitapta yazılıydı. Sınıfta da bu kuralı farklı örneklere uygulamıştık. O yüzden doğrudur. Başka bir gerekçelendirmem de maalesef yok.

5. Senaryo: Ahmet öğretmen öğrencisine bir önerme yazıp bu önermenin doğru önerme mi yoksa yanlış önerme mi olduğunu sormuş ve cevabını gerekçelendirmesini istemiştir. Öğretmen ve öğrenciye ait diyalog aşağıdaki gibidir.

Öğretmen: Aşağıda yazdığım önerme doğru mudur yanlış mıdır? Doğruysa neden doğru, yanlışsa da neden yanlış olduğunu gerekçelendirir misin?

Önerme: A ve B herhangi iki küme olsun. $A \subset B$ *ve* $B \subset A$ *ise* $A = B$

Öğrenci: Şekil çizebilirim. Önce $A \subset B$ *yi sonra* $B \subset A$ *yı çizeceğim.*

Buradan;

kümeleri eşit olur.

6. Senaryo: Ahmet öğretmen öğrencisine bir önerme yazıp bu önermenin doğru önerme mi yoksa yanlış önerme mi olduğunu sormuş ve cevabını gerekçelendirmesini istemiştir. Öğretmen ve öğrenciye ait diyalog aşağıdaki gibidir.

Öğretmen: Aşağıda yazdığım önerme doğru mudur yanlış mıdır? Doğruysa neden doğru, yanlışsa da neden yanlış olduğunu gerekçelendirir misin?

Önerme: 2'nin tam katı olan bir tam sayı ile 5'in tam katı olan bir tam sayının çarpımı 10'un tam katıdır.

Öğrenci: Birinci sayı 2'nin tam katı, ikincisi de 5'in tam katı çarpıldığında 10'un tam katı olur. Sözel olarak ifade edebiliyorum. Ama matematiksel bir şeyler yazmam gerek. Çünkü ispatlar matematiksel olmalıdır. Ama ben sözel olarak daha anlaşılır olduklarına inanıyorum. Ben böyle alıştım.

7. Senaryo: Ahmet öğretmen öğrencisine bir önerme yazıp bu önermenin doğru önerme mi yoksa yanlış önerme mi olduğunu sormuş ve cevabını gerekçelendirmesini istemiştir. Öğretmen ve öğrenciye ait diyalog aşağıdaki gibidir.

Öğretmen: Aşağıda yazdığım önerme doğru mudur yanlış mıdır? Doğruysa neden doğru, yanlışsa da neden yanlış olduğunu gerekçelendirir misin?

Önerme: A ve B herhangi iki küme olsun.

$A \subseteq B$ *ise* $A \cup B = B$

Öğrenci: $A \cup B \subseteq B$ *ve* $B \subseteq A \cup B$ *olduğunu göstermeliyiz.*

$A \subseteq B$ *ise* $A \cup B \subseteq B \cup B$ *dir. (Birleşim işlemi)*

Yani $A \cup B \subseteq B$ *dir.* $(B \cup B = B)$

$B \subseteq A \cup B$ *olduğu da aşikâr olduğundan* $A \cup B = B$ *dir* (Cadwallader-Olsker, 2011).

Uygulama öncesi: Bu senaryolardaki öğrencilerin önermelerin doğruluğunu ya da yanlışlığını ispatlarken kullandıkları argümanları (gerekçelendirme biçimlerini) tespit ediniz.

Uygulama sonrası: Bu senaryolardaki öğrencilerin önermelerin doğruluğunu ya da yanlışlığını ispatlarken kullandıkları argümanları (gerekçelendirme biçimlerini) tespit ediniz. Ayrıca bu senaryolardaki öğrencilerin önermelerin doğruluğunu ya da yanlışlığını ispatlarken kullanmış oldukları ana ve alt ispat şemalarını Sowder ve Harel'in (1998) taksonomisine göre tespit ediniz. Bu şemaların özelliklerini özetleyin.

Senaryolar	**Öğrencinin ispat yaparken kullandığı argümanı (gerekçelendirme biçimini) yazın (Uygulama Öncesi ve Sonrası)**	**Öğrencinin ana ispat şemasını yazın (Uygulama Sonrası)**	**Öğrencinin alt ispat şemasını yazın (Uygulama Sonrası)**	**Öğrencinin ispat şemasının özelliklerini özetleyin (Uygulama Sonrası)**
1. Senaryo				
2. Senaryo				
3. Senaryo				
4. Senaryo				
5. Senaryo				
6. Senaryo				
7. Senaryo				

Ek-11: İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi (İSPABA)-Uzman Görüşü Formu

İSPAT PEDAGOJİK ALAN BİLGİ ANKETİ (İSPABA)–UZMAN GÖRÜŞÜ FORMU

Değerli akademisyenler ve matematik eğitimcileri;

Bu formun amacı “Matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarımı” başlıklı doktora tezi kapsamında oluşturulması hedeflenen “İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi”nin geçerlik çalışmasını yapmak için sizlerden uzman görüşü almaktır. İspat pedagojik alan bilgi anketi iki kısımdan oluşmaktadır. İspat pedagojik alan bilgisi anketi ile öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin ölçülmesi hedeflenmektedir. Öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgileri; ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgileri, ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgileri, ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgileri ve öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgileri ile ölçülmek istenmektedir.

Göstermiş olduğunuz katılımdan ve değerli katkılarınızdan dolayı teşekkür ederim.

Fikret CİHAN

İSPAT PEDAGOJİK ALAN BİLGİ ANKETİ (İSPABA) (1. KISIM)–UZMAN GÖRÜŞÜ FORMU

Anketin 1. kısmında öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgileri; öğrencilerin ispatlamayla ilgili yaşadıkları güçlükleri tespit edip edemedikleri, bu güçlüklerin nedenlerini açıklayıp açıklayamadıkları ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleyip belirleyemedikleri ile ölçülmek istenmektedir.

YÖNERGE (1. KISIM İÇİN)

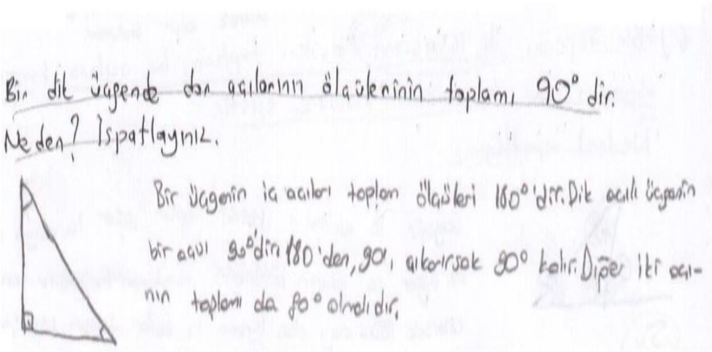
Pedagojik alan bilgisi ile ilgili çalışmalar incelenerek araştırmanın 1. kısmında yer almasının gerekli olduğu düşünülen kazanımlar aşağıdaki tablolarda belirtildiği şekilde sınıflandırılmıştır. Belirlenen kazanımlar ile ilgili öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerini ölçmeye yönelik sorular hazırlanmıştır. Bu soruların ifade ediliş biçimleri ile belirtilen kazanımları ölçmeye uygunluğunu değerlendiriniz.

Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit eder.
• İspatın doğasını kavrama güçlükleri • İspata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlükler • Problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlükler • İspat yöntemleri ile ilgili güçlükler • Matematiksel dil kullanımındaki güçlükler

Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklar.
• Genetik veya psikolojik neden • Didaktik neden • Epistemolojik neden

Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirler.
• Pekiştirme (Yineleme) stratejileri • Cebirsel gösterim • Akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme • DGY ve grafik çizimi • Anlamlandırma stratejileri

İSPATLAMAYLA İLGİLİ SORULAR	ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIMLAR	SORULARIN İFADE EDİLİŞ BİÇİMİ			ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIMLARA UYGUNLUK			ÖNERİLER
		Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	
1. Soru: Aylar (2014a) doktora tezinde öğrencilerden 3'ün katı olan iki sayının farkının da 3'e bölünebileceğini ispatlamalarını istemiştir (s. 90). Bir öğrencinin cevabı aşağıdaki gibidir (s. 90). 12-9=3 21-18=3 18-9=9 Doğru. Hepsinin katı 3 olduğu için, hepsinde aynı artış olduğu için. (Yazmak zor olduğu için açıklamalarım biraz garip oldu.) Farkı da 3'e bölünebilir. Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğü tespit edip, bu güçlüğün nedenini açıklayınız ve bu güçlüğün üstesinden gelecek öğretim stratejisini belirleyiniz.	• Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit eder. • Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklar. • Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirler.							

İSPATLAMAYLA İLGİLİ SORULAR	ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIMLAR	SORULARIN İFADE EDİLİŞ BİÇİMİ			ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIMLARA UYGUNLUK			ÖNERİLER
		Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	
2. Soru: Zaimoğlu (2012) yüksek lisans tezinde öğrencilerden bir dik üçgenin dar açılarının ölçülerinin toplamının 90° olduğunu ispatlamalarını istemiştir. Teorem ve bir öğrencinin ispatı aşağıdaki gibidir (s. 40).  Bir dik üçgende dar açılarının ölçülerinin toplamı 90° dir. Neden? İspatlayınız. Bir üçgenin iç açıları toplam ölçüleri 180°'dir. Dik açılı üçgenin bir açısı 90°'dir 180'den, 90, çıkarırsak 90° kalır. Diğer iki açının toplamı da 90° olmalıdır. **Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğü tespit edip, bu güçlüğün nedenini açıklayınız ve bu güçlüğün üstesinden gelecek öğretim stratejisini belirleyiniz.**	• Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit eder. • Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklar. • Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirler.							

<table>
<tr><th rowspan="2">İSPATLAMAYLA İLGİLİ SORULAR</th><th rowspan="2">ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIMLAR</th><th colspan="3">SORULARIN İFADE EDİLİŞ BİÇİMİ</th><th colspan="3">ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIMLARA UYGUNLUK</th><th rowspan="2">ÖNERİLER</th></tr>
<tr><th>Uygun</th><th>Uygun Ancak Geliştirilmeli</th><th>Uygun Değil</th><th>Uygun</th><th>Uygun Ancak Geliştirilmeli</th><th>Uygun Değil</th></tr>
<tr><td>3. Soru: Güler, Özdemir ve Dikici (2012) çalışmalarında öğrencilerden
$$(1)(3)+(2)(4)+(3)(5)+\cdots+n(n+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$
teoremini ispatlamalarını istemiştir (s. 225). Bir öğrencinin cevabı aşağıdaki gibidir (s. 223).

n=1 için önerme doğrudur. Çünkü $(1)(3)=3=\frac{1.2.9}{6}$ olduğu görülür.
n=k için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,
$(1)(3)+\dots+k(k+2)=\frac{k.(k+1)(2k+7)}{6}$ olduğunu kabul edelim.
n=k+1 için doğruluğunu gösterelim. Yani,
$(1)(3)+\dots+k(k+2)+(k+1)(k+3)=\frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$ olduğunu gösterelim.
Burdan;
$\frac{k.(k+1)(2k+7)}{6}+(k+1)(k+3)=\frac{2k^3+9k^2+7k}{6}+k^2+4k+3=\frac{2k^3+15k^2+31k+18}{6}$ --- (I)
$\frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}=\frac{(k^2+3k+2)(2k+9)}{6}=\frac{2k^3+9k^2+6k^2+27k+4k+18}{6}=\frac{2k^3+15k^2+31k+18}{6}$ --- (II)
(I) ve (II) den n=k+1 için önerme doğrudur. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğü tespit edip, bu güçlüğün nedenini açıklayınız ve bu güçlüğün üstesinden gelecek öğretim stratejisini belirleyiniz.</td><td>• Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit eder.

• Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklar.

• Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirler.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">İSPATLAMAYLA İLGİLİ SORULAR</th><th rowspan="2">ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIMLAR</th><th colspan="3">SORULARIN İFADE EDİLİŞ BİÇİMİ</th><th colspan="3">ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIMLARA UYGUNLUK</th><th rowspan="2">ÖNERİLER</th></tr>
<tr><th>Uygun</th><th>Uygun Ancak Geliştirilmeli</th><th>Uygun Değil</th><th>Uygun</th><th>Uygun Ancak Geliştirilmeli</th><th>Uygun Değil</th></tr>
<tr><td>4. Soru: Bir öğretmen öğrencisinden $\lim\limits_{u\to v}\frac{1}{(u-v)^2}=-\infty$ eşitliğinin doğru olup olmadığını ispatlamasını istemiştir. Öğretmen ve öğrencisine ait diyalog aşağıdaki gibidir.

Öğretmen: Bu eşitlik doğru mu yoksa yanlış mıdır? İspatlayabilir misiniz?

Öğrenci: Yanlış.

Öğretmen: Neden yanlış? Gerekçelendirebilir misiniz?

Öğrenci: $\lim\limits_{u\to v}\frac{1}{(u-v)^2}=\lim\limits_{u\to v}\frac{1}{(v-v)^2}=\frac{1}{0}$ Matematik derslerinde öğrendiğimize göre u yerine v yazıyoruz, payda sıfır oluyor, payda sıfır olunca da tanımsız olur. Limiti olmamalı.

Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğü tespit edip, bu güçlüğün nedenini açıklayınız ve bu güçlüğün üstesinden gelecek öğretim stratejisini belirleyiniz.</td><td>• Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit eder.

• Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklar.

• Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirler.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

5. Soru: Güler ve Ekmekci (2016) çalışmalarında $1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$ teoreminin ispatını aşağıdaki gibi vermiş ve öğrencilerden yapılan bu ispatın doğru mu, eksik mi, yoksa yanlış mı olduğunu değerlendirmelerini istemiştir. İspat: $n=1$ için $P(1)=1=1^2$ doğrudur. $n=k$ için $P(k)=1+3+5+\cdots+2k-1=k^2$ doğru olsun. $n=k+1$ için doğru olduğunu yani $1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$ olduğunu göstermemiz gerekir. $1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$ O halde teorem ispatlanmış olur (s. 79-81). İspatın eksik olduğunu savunan bir öğrenciyle (Ö) mülakatçının (M) diyaloğu aşağıdaki gibidir (s. 73). *M: 6. İspatın neden eksik olduğunu açıklayınız.* *Ö4: Sonsuz sayıyı denememiz gerekir k+1 e kadar deneyip hepsinin doğru olduğunu söyleyemeyiz. Açıklama yapmamış ayrıca. Direk k^2 yi kabul etmiş. Yukarda hiç açıklama yapmamış. Diğerlerinde hep n^2 olduğunu kabul etmeden buldular. Ama burada hemen n için n^2 kabul etmiş. Eksik olmuş.* *M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.* *Ö4: n=1 için doğru olsun demiş. Sonra n=k için doğru olsun demiş. Daha sonra n=k+1 için doğruluğunu göstermeliyiz demiş. Yani ben bunu pek anlayamadım ya!* *M: Eğer bu ispatı siz yapıyor olsaydınız ispatta gördüğünüz eksikliği nasıl giderirdiniz. Açıklayınız.* *Ö4: Doğru düzgün bir açıklama yapılması gerekti.* *M: Bu şekilde yapılan bir ispatla verilen ifadenin her doğal sayı için doğru olduğu gösterilebilir mi? Neden?* *Ö4: Her doğal sayı için geçerli değildir. İspatı kabul etmedim sonuçta.* *M: Tümevarım yönteminin özelliklerini açıklayınız.* *Ö4: Derste görmüştük. Bir değer veriyorduk. Sonra o değeri kabul ediyorduk. Sonra başka bir değer verdiğimizde bu da doğru oluyordu. Böyle yapıyorduk aslında ama nedense bu ispat bana eksik geldi.* İspatı değerlendiren bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğü tespit edip, bu güçlüğün nedenini açıklayınız ve bu güçlüğün üstesinden gelecek öğretim stratejisini belirleyiniz.	• Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit eder. • Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklar. • Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirler.							

İSPAT PEDAGOJİK ALAN BİLGİ ANKETİ (İSPABA) (2. KISIM)–UZMAN GÖRÜŞÜ FORMU

Anketin 2. kısmında öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgileri; öğrencilerin önermelerin doğruluğunu ya da yanlışlığını gerekçelendirirken kullanmış oldukları ispat şemalarını belirleyip belirleyemedikleri ile ölçülmek istenmektedir.

YÖNERGE (2. KISIM İÇİN)

Pedagojik alan bilgisi ile ilgili Sowder ve Harel (1998) referansı incelenerek araştırmanın 2. kısmında yer almasının gerekli olduğu düşünülen kazanım aşağıdaki tabloda belirtildiği şekilde sınıflandırılmıştır. Belirlenen kazanımlar ile ilgili öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerini ölçmeye yönelik sorular hazırlanmıştır. Bu soruların ifade ediliş biçimleri ile belirtilen kazanımları ölçmeye uygunluğunu değerlendiriniz.

Öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder.
1. Dışsal ispat şemaları 1.1. Otoriter ispat şeması 1.2. Ritüel ispat şeması 1.3. Sembolik ispat şeması 2. Deneysel ispat şemaları 2.1. Algısal ispat şeması 2.2. Örnek-temelli ispat şeması 3. Analitik ispat şemaları 3.1. Dönüşümcü ispat şeması 3.2. Aksiyomatik ispat şeması

<table>
<tr><th rowspan="2">SENARYO</th><th rowspan="2">ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIM</th><th colspan="3">SORULARIN İFADE EDİLİŞ BİÇİMİ</th><th colspan="3">ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIMA UYGUNLUK</th><th rowspan="2">ÖNERİLER</th></tr>
<tr><th>Uygun</th><th>Uygun Ancak Geliştirilmeli</th><th>Uygun Değil</th><th>Uygun</th><th>Uygun Ancak Geliştirilmeli</th><th>Uygun Değil</th></tr>
<tr><td>1. Senaryo: Ahmet öğretmen öğrencisine bir önerme yazıp bu önermenin doğru önerme mi yoksa yanlış önerme mi olduğunu sormuş ve cevabını gerekçelendirmesini istemiştir. Öğretmen ve öğrenciye ait diyalog aşağıdaki gibidir.
Öğretmen: Aşağıda yazdığım önerme doğru mudur yanlış mıdır? Doğruysa neden doğru, yanlışsa da neden yanlış olduğunu gerekçelendirir misin?
Önerme: X matrisi 2x2 tipinden herhangi bir matris ve I_{2x2} aynı tipten birim matris iken
$$X_{2x2} \cdot I_{2x2} = I_{2x2} \cdot X_{2x2} = X_{2x2}$$
dir.
Öğrenci: $X_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ olsun. (1) Bu durumda
$X_{2x2} \cdot I_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ (2) ve
$I_{2x2} \cdot X_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ (3) olur.
(1), (2) ve (3)’ten önermenin doğruluğu ispatlanmış olur.</td><td>• Öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">SENARYO</th><th rowspan="2">ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIM</th><th colspan="3">SORULARIN İFADE EDİLİŞ BİÇİMİ</th><th colspan="3">ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIMA UYGUNLUK</th><th>ÖNERİLER</th></tr>
<tr><th>Uygun</th><th>Uygun Ancak Geliştirilmeli</th><th>Uygun Değil</th><th>Uygun</th><th>Uygun Ancak Geliştirilmeli</th><th>Uygun Değil</th><th></th></tr>
<tr><td>2. Senaryo: Ahmet öğretmen öğrencisine bir önerme yazıp bu önermenin doğru önerme mi yoksa yanlış önerme mi olduğunu sormuş ve cevabını gerekçelendirmesini istemiştir. Öğretmen ve öğrenciye ait diyalog aşağıdaki gibidir.

Öğretmen: Aşağıda yazdığım önerme doğru mudur yanlış mıdır? Doğruysa neden doğru, yanlışsa da neden yanlış olduğunu gerekçelendirir misin?
Önerme: $\forall a,b,c \in R^+\setminus\{1\}$ ve $\forall d \in R^+$ olmak üzere
$$log_a b \cdot log_b c \cdot log_c d = log_a d$$
Öğrenci: Doğrudan ispat yöntemi ile önermenin doğruluğunu ispatlayalım.
$a,b,c \in R^+\setminus\{1\}$ ve $d \in R^+$ olsun. Taban değiştirme kuralı gereği
$log_a b = \frac{log\, b}{log\, a}$, $log_b c = \frac{log\, c}{log\, b}$ ve $log_c d = \frac{log\, d}{log\, c}$ olduğundan
$$log_a b \cdot log_b c \cdot log_c d = \frac{log\, b}{log\, a} \cdot \frac{log\, c}{log\, b} \cdot \frac{log\, d}{log\, c}$$
yazılabilir. Sadeleştirmeler yapılırsa
$$log_a b \cdot log_b c \cdot log_c d = \frac{log\, b}{log\, a} \cdot \frac{log\, c}{log\, b} \cdot \frac{log\, d}{log\, c} = \frac{log\, d}{log\, a}$$
olur. Yine taban değiştirme kuralı gereği
$log_a b \cdot log_b c \cdot log_c d = \frac{log\, b}{log\, a} \cdot \frac{log\, c}{log\, b} \cdot \frac{log\, d}{log\, c} = \frac{log\, d}{log\, a} = log_a d$ olur.
Böylece teorem ispatlanmış olur.</td><td>• Öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

SENARYO	ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIM	SORULARIN İFADE EDİLİŞ BİÇİMİ			ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIMA UYGUNLUK			ÖNERİLER
		Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	
3. Senaryo: Ahmet öğretmen öğrencisine bir önerme yazıp bu önermenin doğru önerme mi yoksa yanlış önerme mi olduğunu sormuş ve cevabını gerekçelendirmesini istemiştir. Öğretmen ve öğrenciye ait diyalog aşağıdaki gibidir. *Öğretmen: Aşağıda yazdığım önerme doğru mudur yanlış mıdır? Doğruysa neden doğru, yanlışsa da neden yanlış olduğunu gerekçelendirir misin?* *Önerme:* $f{:}X \rightarrow Y$ *ve* $g{:}Y \rightarrow Z$ *iki fonksiyon olmak üzere* $gof{:}X \rightarrow Z$, $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ *dir.* *Öğrenci:* $(gof)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ *dir. Buradan değişme özelliğinden* $(gof)^{-1} = g^{-1}of^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ *olur. Böylece teorem ispatlanmış olur.*	• Öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder.							

SENARYO	ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIM	SORULARIN İFADE EDİLİŞ BİÇİMİ			ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIMA UYGUNLUK			ÖNERİLER
		Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	
4. Senaryo: Ahmet öğretmen öğrencisine bir önerme yazıp bu önermenin doğru önerme mi yoksa yanlış önerme mi olduğunu sormuş ve cevabını gerekçelendirmesini istemiştir. Öğretmen ve öğrenciye ait diyalog aşağıdaki gibidir. *Öğretmen: Aşağıda yazdığım önerme doğru mudur yanlış mıdır? Doğruysa neden doğru, yanlışsa da neden yanlış olduğunu gerekçelendirir misin?* *Önerme:* $sinm \cdot cosn = \frac{1}{2} \cdot [sin(m+n) + sin(m-n)]$ *dir.* *Öğrenci: Önerme doğrudur. Çünkü bu bir kural ve kitapta yazılıydı. Sınıfta da bu kuralı farklı örneklere uygulamıştık. O yüzden doğrudur. Başka bir gerekçelendirmem de maalesef yok.*	• Öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder.							

SENARYO	ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIM	SORULARIN İFADE EDİLİŞ BİÇİMİ			ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIMA UYGUNLUK			ÖNERİLER
		Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	
5. Senaryo: Ahmet öğretmen öğrencisine bir önerme yazıp bu önermenin doğru önerme mi yoksa yanlış önerme mi olduğunu sormuş ve cevabını gerekçelendirmesini istemiştir. Öğretmen ve öğrenciye ait diyalog aşağıdaki gibidir. *Öğretmen: Aşağıda yazdığım önerme doğru mudur yanlış mıdır? Doğruysa neden doğru, yanlışsa da neden yanlış olduğunu gerekçelendirir misin?* *Önerme: A ve B herhangi iki küme olsun.* $A \subset B$ *ve* $B \subset A$ *ise* $A = B$ *Öğrenci: Şekil çizebilirim. Önce* $A \subset B$ *yi sonra* $B \subset A$ *yı çizeceğim.*  *Buradan;*  *kümeleri eşit olur.*	• Öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder.							

SENARYO	ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIM	SORULARIN İFADE EDİLİŞ BİÇİMİ			ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIMA UYGUNLUK			ÖNERİLER
		Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	
6. Senaryo: Ahmet öğretmen öğrencisine bir önerme yazıp bu önermenin doğru önerme mi yoksa yanlış önerme mi olduğunu sormuş ve cevabını gerekçelendirmesini istemiştir. Öğretmen ve öğrenciye ait diyalog aşağıdaki gibidir. *Öğretmen: Aşağıda yazdığım önerme doğru mudur yanlış mıdır? Doğruysa neden doğru, yanlışsa da neden yanlış olduğunu gerekçelendirir misin?* *Önerme: 2'nin tam katı olan bir tam sayı ile 5'in tam katı olan bir tam sayının çarpımı 10'un tam katıdır.* *Öğrenci: Birinci sayı 2'nin tam katı, ikincisi de 5'in tam katı çarpıldığında 10'un tam katı olur. Sözel olarak ifade edebiliyorum. Ama matematiksel bir şeyler yazmam gerek. Çünkü ispatlar matematiksel olmalıdır. Ama ben sözel olarak daha anlaşılır olduklarına inanıyorum. Ben böyle alıştım.*	• Öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder.							

SENARYO	ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIM	SORULARIN İFADE EDİLİŞ BİÇİMİ			ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIMA UYGUNLUK			ÖNERİLER
		Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	
7. Senaryo: Ahmet öğretmen öğrencisine bir önerme yazıp bu önermenin doğru önerme mi yoksa yanlış önerme mi olduğunu sormuş ve cevabını gerekçelendirmesini istemiştir. Öğretmen ve öğrenciye ait diyalog aşağıdaki gibidir. *Öğretmen: Aşağıda yazdığım önerme doğru mudur yanlış mıdır? Doğruysa neden doğru, yanlışsa da neden yanlış olduğunu gerekçelendirir misin?* *Önerme: A ve B herhangi iki küme olsun.* $A \subseteq B$ *ise* $A \cup B = B$ *Öğrenci:* $A \cup B \subseteq B$ *ve* $B \subseteq A \cup B$ *olduğunu göstermeliyiz.* $A \subseteq B$ *ise* $A \cup B \subseteq B \cup B$ *dir. (Birleşim işlemi)* *Yani* $A \cup B \subseteq B$ *dir.* $B \cup B = B$) $B \subseteq A \cup B$ *olduğu da aşikâr olduğundan* $A \cup B = B$ *dir* (Cadwallader-Olsker, 2011).	• Öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder.							

Ek-12: Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları Sonucunda İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi (İSPABA)

İSPAT PEDAGOJİK ALAN BİLGİ (1. KISIM) ANKETİ (İSPABA)

Değerli Öğretmen Adayları

Bu anket sizlerin öğrencilerin ispatlamayla ilgili yaşadıkları güçlükleri tespit edip edemediğinizi, bu güçlüklerin nedenlerini açıklayıp açıklayamadığınızı ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleyip belirleyemediğinizi saptamak amacıyla hazırlanmıştır. Öğrencilerin yaptıkları/değerlendirdikleri ispatlar aşağıdadır. Her bir soru için öğrencilerin ispatlamaya yönelik yaşadıkları güçlükleri, bu güçlüklerin nedenlerini ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirlenen boşluklara yazınız.

1. Soru : Öğrencilerden 3'ün katı olan iki sayının farkının da 3'e bölünebileceğini ispatlamaları istenmiştir. Bir öğrencinin cevabı aşağıdaki gibidir.

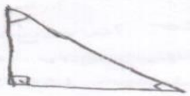
12 - 9 = 3
21 - 18 = 3
18 - 9 = 9

Doğru. Hepsinin katı 3 olduğu için, hepsinde aynı artış olduğu için. (Yazmak zor olduğu için açıklamalarım biraz garip oldu.) Farkı da 3'e bölünebilir.

1a) Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğü tespit ediniz.
1b) Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğün nedenini açıklayınız.
1c) Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğün üstesinden gelecek öğretim stratejisini belirleyiniz.

2. Soru: Öğrencilerden bir dik üçgenin dar açılarının ölçülerinin toplamının 90° olduğunu ispatlamaları istenmiştir. Bir öğrencinin ispatı aşağıdaki gibidir.

Bir dik üçgende dar açılarının ölçülerinin toplamı 90° dir. Neden? İspatlayınız.



Bir üçgenin iç açıları toplam ölçüleri 180° 'dir. Dik açılı üçgenin bir açısı 90° dir. 180 'den, 90', çıkarırsak 90° kalır. Diğer iki açının toplamı da 90° olmalıdır.

2a) Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğü tespit ediniz.
2b) Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğün nedenini açıklayınız.
2c) Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğün üstesinden gelecek öğretim stratejisini belirleyiniz.

3. Soru: Öğrencilerden $(1)(3)+(2)(4)+(3)(5)+\cdots+n(n+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ eoremini ispatlamaları istenmiştir. Bir öğrencinin cevabı aşağıdaki gibidir. n=1 için önerme doğrudur. Çünkü $(1)(3)=3=\frac{1.2.9}{6}$ olduğu görülür. n=k için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani, $(1)(3)+\dots+k(k+2)=\frac{k.(k+1)(2k+7)}{6}$ olduğunu kabul edelim. n=k+1 için doğruluğunu gösterelim. Yani, $(1)(3)+\dots+k(k+2)+(k+1)(k+3)=\frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$ olduğunu gösterelim. Burdan; $\frac{k.(k+1)(2k+7)}{6}+(k+1)(k+3)=\frac{2k^3+9k^2+7k}{6}+k^2+4k+3=\frac{2k^3+15k^2+31k+18}{6}$ --- (I) $\frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}=\frac{(k^2+3k+2)(2k+9)}{6}=\frac{2k^3+9k^2+6k^2+27k+4k+18}{6}=\frac{2k^3+15k^2+31k+18}{6}$ --- (II) (I) ve (II) den n=k+1 için önerme doğrudur. Böylece ispat tamamlanmıştır.
3-a) Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğü tespit ediniz.
3-b) Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğün nedenini açıklayınız.
3-c) Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğün üstesinden gelecek öğretim stratejisini belirleyiniz.

4. Soru: Öğretmen öğrencilerden $\lim_{u\to v}\frac{1}{(u-v)^2}=-\infty$ eşitliğinin doğru olup olmadığını ispatlamalarını istemiştir. Öğretmen ile öğrencisine ait diyalog aşağıdaki gibidir. *Öğretmen: Bu eşitlik doğru mu yoksa yanlış mıdır? İspatlayabilir misiniz?* *Öğrenci: Yanlış.* *Öğretmen: Neden yanlış? Gerekçelendirebilir misiniz?* *Öğrenci:* $\lim_{u\to v}\frac{1}{(u-v)^2}=\lim_{u\to v}\frac{1}{(v-v)^2}=\frac{1}{0}$ *Matematik derslerinde öğrendiğimize göre* u *yerine* v *yazıyoruz, payda sıfır oluyor, payda sıfır olunca da tanımsız olur. Limiti olmamalı.*
4a) Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğü tespit ediniz.
4b) Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğün nedenini açıklayınız.
4c) Bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğün üstesinden gelecek öğretim stratejisini belirleyiniz.

5. Soru: Öğrencilere $1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$ teoreminin ispatı aşağıdaki gibi verilmiş ve öğrencilerden yapılan bu ispatın doğru mu, eksik mi, yoksa yanlış mı olduğunu değerlendirmeleri istenmiştir. İspat: $n=1$ için $P(1)=1=1^2$ doğrudur. $n=k$ için $P(k)=1+3+5+\cdots+2k-1=k^2$ doğru olsun. $n=k+1$ için doğru olduğunu yani $1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$ olduğunu göstermemiz gerekir. $1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$ O halde teorem ispatlanmış olur. İspatın eksik olduğunu savunan bir öğrenciyle (Ö) mülakatçının (M) diyaloğu aşağıdaki gibidir. *M: 6. İspatın neden eksik olduğunu açıklayınız.* *Ö4: Sonsuz sayıyı denememiz gerekir k+1 e kadar deneyip hepsinin doğru olduğunu söyleyemeyiz. Açıklama yapmamış ayrıca. Direk k^2 yi kabul etmiş. Yukarda hiç açıklama yapmamış. Diğerlerinde hep n^2 olduğunu kabul etmeden buldular. Ama burada hemen n için n^2 kabul etmiş. Eksik olmuş.* *M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.* *Ö4: n=1 için doğru olsun demiş. Sonra n=k için doğru olsun demiş. Daha sonra n=k+1 için doğruluğunu göstermeliyiz demiş. Yani ben bunu pek anlayamadım ya!* *M: Eğer bu ispatı siz yapıyor olsaydınız ispatta gördüğünüz eksikliği nasıl giderirdiniz. Açıklayınız.* *Ö4: Doğru düzgün bir açıklama yapılması gerekti.* *M: Bu şekilde yapılan bir ispatla verilen ifadenin her doğal sayı için doğru olduğu gösterilebilir mi? Neden?* *Ö4: Her doğal sayı için geçerli değildir. İspatı kabul etmedim sonuçta.* *M: Tümevarım yönteminin özelliklerini açıklayınız.* *Ö4: Derste görmüştük. Bir değer veriyorduk. Sonra o değeri kabul ediyorduk. Sonra başka bir değer verdiğimizde bu da doğru oluyordu. Böyle yapıyorduk aslında ama nedense bu ispat bana eksik geldi.*
5a) İspatı değerlendiren bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğü tespit ediniz.
5b) İspatı değerlendiren bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğün nedenini açıklayınız.
5c) İspatı değerlendiren bu öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğün üstesinden gelecek öğretim stratejisini belirleyiniz.

İSPAT PEDAGOJİK ALAN BİLGİ (2. KISIM) ANKETİ (İSPABA)

Değerli Öğretmen Adayları

Bu ankette öğrencilerin ispat yaparken kullandıkları ispat şemalarını sizlerin tespit edip edemediğinizi belirlemek amaçlanmıştır. Bunun için bir öğretmen ve 10 öğrenci arasında geçen varsayımsal bir sınıf diyaloğu senaryosu hazırlanmıştır.

Uygulama öncesi: Bu senaryolardaki öğrencilerin önermelerin doğruluğunu ya da yanlışlığını ispatlarken kullandıkları argümanları (gerekçelendirme biçimlerini) tespit ediniz.

Uygulama sonrası: Bu senaryolardaki öğrencilerin önermelerin doğruluğunu ya da yanlışlığını ispatlarken kullandıkları argümanları (gerekçelendirme biçimlerini) tespit ediniz. Ayrıca bu senaryolardaki öğrencilerin önermelerin doğruluğunu ya da yanlışlığını ispatlarken kullanmış oldukları ana ve alt ispat şemalarını Sowder ve Harel'in (1998) taksonomisine göre tespit ediniz.

Ahmet öğretmen sınıfta bir önerme yazıp sınıftaki öğrencilerden bu önermenin doğru önerme mi yoksa yanlış önerme mi olduğunu sormuş ve cevabını gerekçelendirmelerini istemiştir. Öğretmen ve sınıftaki 10 öğrenciye ait sınıf diyaloğu aşağıdaki gibidir. Diyaloğa katılan 10 öğrenci *Ö1, Ö2, Ö3, … , Ö10* kodlarıyla adlandırılmıştır.

Öğretmen: *Aşağıda yazdığım önerme doğru mudur yanlış mıdır? Doğruysa neden doğru, yanlışsa da neden yanlış olduğunu gerekçelendirir misiniz?*

Önerme: "X, Y ve Z birer küme olmak üzere $X \subset Y$ ve $Y \subset Z$ ise $X \subset Z$'dir".

Ö1: *Bence doğru değil. Derste kümelerle ilgili birçok kural yazdık. Ama böyle bir kural yazdığımızı hatırlamıyorum.*

Öğretmen: *Derste yazmamış olabiliriz. Yine de doğru olamaz mı?*

Ö1: *Daha önce de böyle bir kural hiç duymadım öğretmenim. O yüzden yanlış olduğunu düşünüyorum.*

Ö2: *Öğretmenim doğrudur. Çünkü matematik kitabımızda bu teorem yazılıydı o yüzden kesinlikle doğrudur.*

Öğretmen: *Sence bu gerekçelendirme için yeterli mi? Herhangi bir işlem yapmadın?*

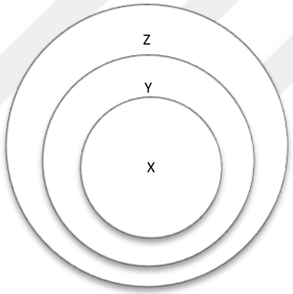
Ö2: *Bence yeterli, kitapta yazılıysa başka bir gerekçelendirmeye niye ihtiyaç olsun ki?*

Öğretmen: *Bir önermenin doğruluğu ya da yanlışlığı hakkında bizim akıl yürütmemiz son derece önemli.*

Ö3: *Öğretmenim ben bir şekil çizebilir miyim?*

Öğretmen: *Buyur çizebilirsin.*

Ö3:



(Öğrenci aşağıdaki şekli tahtaya çizdikten sonra) Bence böyle bir şekilden önermenin doğruluğu açıktır.

Öğretmen: *(Sınıfa dönerek) Sadece şekille çizim ispat için yeterli olur mu?*

Ö4: *Aslında şöyle. X kümesindeki her eleman Y kümesinin elemanıdır. Y kümesindeki her eleman da Z kümesinin de elemanıdır. Sözel olarak teoremin doğru olduğunu ifade edebiliyorum. Ama matematiksel bir şeyler yazmam lazım. Onu da yapamıyorum. Çünkü ispatlar hep matematiksel ifadelerle ispatlanır. Öyle olmamalı. Benim yaptığım gibi sözel ifadeler beni daha çok ikna ediyor. Böyle alıştım.*

Öğretmen: *İspatların sadece matematiksel ifadelerle yapıldığı kanısına nerden vardın?*

Ö4: *Çünkü benim gördüğüm ispatlar hep öyleydi.*

Öğretmen: *Peki matematiksel ifade kullanabilecek var mı?*

Ö5: $X \subset Y$ *ise* $s(X) < s(Y)$ *ve* $Y \subset Z$ *ise* $s(Y) < s(Z)$ *olur. Buradan* $s(X) < s(Z)$ *yani* $X \subset Z$ *olur.*

Öğretmen: *Bir kümenin eleman sayısı başka bir kümenin eleman sayısından küçükse alt kümesi olmak zorunda mıdır?*

Ö6: *Bence değildir. Ben daha kolay bir yolu olduğunu düşünüyorum.*

Öğretmen: *Nedir?*

Ö6: $X \subset Y$ *ve* $Y \subset Z$ *olacak şekilde*

$X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ *ve* $Z = \{1, 2 ,3, 4\}$ *olsun.*

Buradan $\{1,2\} \subset \{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4\}$ *olduğundan* $X \subset Z$ *olur.*

Öğretmen: *Peki bu örnek senin için yeterli mi?*

Ö6: *Doğru oldu öğretmenim. Bence yeterli.*

Öğretmen: *(Sınıfa dönerek) Sizin için yeterli oldu mu?*

Ö7: *Bu örnek değil de daha genel bir örnekle doğrulayabilirsek yeterli olur.*

Öğretmen: *Mesela?*

Ö7: $N \subset Z$ *ve* $Z \subset R$*'dir. O halde* $N \subset R$*'dir.*

Öğretmen: *Bu daha genel bir örnek oldu. Ama ispatın bir işlevi olan genelleme ihtiyacını karşılamadı.*

Ö8: *Öğretmenim! Sınıftaki herkes farklı bir örnek için doğruluğunu gösterse genellemeye ulaşmış oluruz.*

Öğretmen: *Genelleme dediğim tüm* X, Y *ve* Z *kümeleri için doğru olduğu. Genellemeye mantıksal çıkarım kuralları ve işlemsel düşünme ile ulaşabiliriz. Yani diğer kuralları kullanarak hipotezden hükme işlemsel düşünme ile ulaşmalıyız. Derslerde diğer yaptıklarımızdan bu genellemeye ulaşabilecek var mı?*

Ö9: $X \subset Y$ *ve* $Y \subset Z$ *olsun.*

Derste yazdığımız kural gereği $Y \subset Z$ *ise* $Y \cup Z = Z$ *olur.* $X \subset Y$ *olduğundan* $X \cup Z = Z$ *olur.* $X \cup Z = Z$ *ise* $X \subset Z$ *olur.*

Öğretmen: *Bu doğru. Ancak ispatın modern bileşenlerini düşünsek daha iyi olmaz mı? İspata başlarken tanımlardan ve aksiyomlardan başlamak en doğrusu. Alt küme tanımından hareket ederek ispat yapacak var mı?*

Ö10: $X \subset Y$ *ve* $Y \subset Z$ *olsun.*

Bu durumda alt küme tanımı gereği $X \subset Y$ *ise* $\forall a \in X$ *için* $a \in Y$*'dir.*

$Y \subset Z$ *ise* $\forall a \in X$ *için* $a \in Z$ *olur.*

Buradan $\forall a \in X$ *için* $a \in Z$ *olduğundan* $X \subset Z$ *olur. İspat Bitti.*

Öğretmen: *Bence de bitti.*

Uygulama öncesinde *Ö1, Ö2, Ö3, … , Ö10* kodlarıyla adlandırılmış öğrencilerin ispat yaparken kullandıkları argümanları (gerekçelendirme biçimlerini) uygulama sonrasında ise buna ilaveten bu öğrencilerin Sowder ve Harel'in (1998) sahip oldukları ana ve alt ispat şemalarını aşağıda belirlenen boşluklara açıkça yazınız.

Öğrenci kodu	**Öğrencinin ispat yaparken kullandığı argümanı (gerekçelendirme biçimini) yazın (Uygulama Öncesi ve Sonrası)**	**Öğrencinin ana ispat şemasını yazın (Uygulama Sonrası)**	**Öğrencinin alt ispat şemasını yazın (Uygulama Sonrası)**
Ö1			
Ö2			
Ö3			
Ö4			
Ö5			
Ö6			
Ö7			
Ö8			
Ö9			
Ö10			

Ek-13: İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi (İSPABA) Cevap Anahtarı

1a) İspatın doğasını kavrama güçlükleri
1b) Psikolojik ve genetik engel
1c) Pekiştirme (yineleme) stratejisi

2a) Matematiksel dil kullanımındaki güçlükler
2b) Psikolojik ve genetik engel
2c) Cebirsel gösterim

3a) Problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlükler
3b) Psikolojik ve genetik engel
3c) Akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme

4a) İspata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlükler
4b) Didaktik engel
4c) DGY veya grafik çizimi

5a) İspat yöntemleri ile ilgili güçlükler
5b) Epistemolojik engel
5c) Anlamlandırma stratejisi

Öğrenci kodu	**Öğrencinin ispat yaparken kullandığı argümanı (gerekçelendirme biçimini) yazın (Uygulama Öncesi ve Sonrası)**	**Öğrencinin ana ispat şemasını yazın (Uygulama Sonrası)**	**Öğrencinin alt ispat şemasını yazın (Uygulama Sonrası)**
Ö1	Dersteki kural	Dışsal ispat şeması	Otoriter
Ö2	Kitaptaki teorem	Dışsal ispat şeması	Otoriter
Ö3	Çizdiği şekil	Deneysel ispat şeması	Algısal
Ö4	İspatın biçimi, yapılış şekli, sunumu	Dışsal ispat şeması	Ritüel
Ö5	Anlamsız sembol manipülasyonları	Dışsal ispat şeması	Sembolik
Ö6	Sonlu kümelerin tek örneği	Deneysel ispat şeması	Örnek-temelli
Ö7	Sonsuz kümelerin tek örneği	Deneysel ispat şeması	Örnek-temelli
Ö8	Çoklu örnek	Deneysel ispat şeması	Örnek-temelli
Ö9	Genelleme, işlemsel düşünme, mantıksal çıkarım	Analitik ispat şeması	Dönüşümcü
Ö10	Aksiyomatik yapı içerisinde tanım ve aksiyomlardan hareketle genelleme, işlemsel düşünme ve mantıksal çıkarım	Analitik ispat şeması	Aksiyomatik

Ek-14: İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi (İSPABA) Üzerine Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formu

İSPAT PEDAGOJİK ALAN BİLGİ ANKETİ (İSPABA) ÜZERİNE YARI YAPILANDIRILMIŞ MÜLAKAT FORMU

1. Kısım için (Anketteki her bir soru için)

1. **Soru:** Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama öncesi ve sonrası)
2. **Soru:** Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama öncesi ve sonrası)
3. **Soru:** Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmek için nasıl bir öğretim stratejisi belirlenebilir? Açıklayınız. (Uygulama öncesi ve sonrası)

2. Kısım için (Senaryodaki her bir öğrenci için)

4. **Soru:** Bu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) nedir? Açıklayınız. (Uygulama öncesi ve sonrası)
5. **Soru:** Bu öğrencinin gerekçelendirmesi sizi ikna etti mi? Açıklayınız. (Uygulama öncesi ve sonrası)
6. **Soru:** Bu öğrencinin cevabı üzerine öğretmenin yerinde siz olsaydınız nasıl bir yaklaşım sergilerdiniz? Açıklayınız. (Uygulama öncesi ve sonrası)
7. **Soru:** Bu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması nedir? Açıklayınız. (Uygulama sonrası)
8. **Soru:** Bu öğrencinin sahip olduğu alt ispat şeması nedir? Açıklayınız. (Uygulama sonrası)
9. **Soru:** Bu öğrencinin sahip olduğu şemanın özellikleri nelerdir? Açıklayınız. (Uygulama sonrası)

Ek-15: İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi (İSPABA) Üzerine Yarı Yapılandırılmış Mülakat-Uzman Görüşü Formu

İSPAT PEDAGOJİK ALAN BİLGİ ANKETİ (İSPABA) ÜZERİNE

YARI YAPILANDIRILMIŞ MÜLAKAT–UZMAN GÖRÜŞÜ FORMU

Değerli akademisyenler ve matematik eğitimcileri;

Bu formun amacı “Matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarımı” başlıklı doktora tezi kapsamında oluşturulması hedeflenen “İspat Pedagojik Alan Bilgi Anketi (İSPABA) Üzerine Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formu”nun geçerlik çalışmasını yapmak için sizlerden uzman görüşü almaktır. Çalışmada öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerinin derinlemesine ölçülmesi hedeflenmektedir. Öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgileri; ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme bilgileri, ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklama bilgileri, ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirleme bilgileri ve öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit etme bilgileri ile ölçülmek istenmektedir.

Göstermiş olduğunuz katılımdan ve değerli katkılarınızdan dolayı teşekkür ederim.

Fikret CİHAN

YÖNERGE

Araştırmada yer almasının gerekli olduğu düşünülen kazanımlar aşağıdaki tablolarda belirtildiği şekilde sınıflandırılmıştır. Belirlenen kazanımlar ile ilgili öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerini derinlemesine ölçmeye yönelik sorular hazırlanmıştır. Bu soruların ifade ediliş biçimleri ile belirtilen kazanımları ölçmeye uygunluğunu değerlendiriniz.

Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit eder.
• İspatın doğasını kavrama güçlükleri • İspata dâhil olan içerik alanı ile ilgili güçlükler • Problem çözme becerisine ve matematiksel akıl yürütmeye dayalı güçlükler • İspat yöntemleri ile ilgili güçlükler • Matematiksel dil kullanımındaki güçlükler

Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklar.
• Genetik veya psikolojik neden • Didaktik neden • Epistemolojik neden

Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirler.
• Pekiştirme (Yineleme) stratejileri • Cebirsel gösterim • Akıl yürütmeyi ve tümevarımcı/tümdengelimci düşünmeyi geliştirecek farklı problemler çözme • DGY ve grafik çizimi • Anlamlandırma stratejileri

Öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder.
Sowder ve Harel’in (1998) ana ve alt ispat şemaları sınıflamasına göre öğrencilerin sahip oldukları ana ve alt ispat şemalarını tespit eder.

SORULAR	ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIM(LAR)	SORULARIN İFADE EDİLİŞ BİÇİMİ			ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIM(LAR)A UYGUNLUK			ÖNERİLER
		Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	
1. Soru: Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlük nedir? Açıklayınız. (Uygulama öncesi ve sonrası)	• Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit eder.							
2. Soru: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün nedeni nedir? Açıklayınız. (Uygulama öncesi ve sonrası)	• Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklar.							
3. Soru: Bu sorudaki öğrencinin yaşadığı güçlüğün üstesinden gelmek için nasıl bir öğretim stratejisi belirlenebilir? (Uygulama öncesi ve sonrası)	• Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirler.							
4. Soru: Bu öğrencinin argümanı (gerekçelendirme biçimi) nedir? Açıklayınız. (Uygulama öncesi ve sonrası)	• Öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder.							

SORULAR	ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIM(LAR)	SORULARIN İFADE EDİLİŞ BİÇİMİ			ÖLÇÜLMESİ HEDEFLENEN KAZANIM(LAR)A UYGUNLUK			ÖNERİLER
		Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	Uygun	Uygun Ancak Geliştirilmeli	Uygun Değil	
5. Soru: Bu öğrencinin gerekçelendirmesi sizi ikna etti mi? Açıklayınız. (Uygulama öncesi ve sonrası)	• Öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder.							
6. Soru: Bu öğrencinin cevabı üzerine öğretmenin yerinde siz olsaydınız nasıl bir yaklaşım sergilerdiniz? Açıklayınız. (Uygulama öncesi ve sonrası)	• Öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder.							
7. Soru: Bu öğrencinin sahip olduğu ana ispat şeması nedir? Açıklayınız. (Uygulama sonrası)	• Öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder.							
8. Soru: Bu öğrencinin sahip olduğu alt ispat şeması nedir? Açıklayınız. (Uygulama sonrası)	• Öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder.							
9. Soru: Bu öğrencinin sahip olduğu şemanın özellikleri nelerdir? Açıklayınız. (Uygulama sonrası)	• Öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder.							

Ek-16: Ders Gözlem Formu

DERS GÖZLEM FORMU

Dersin Adı: Matematik Eğitiminde İspat	**Hafta:**
Dersin Sorumlusu:	**Konu:**
Hedefler:	
Kazanımlar:	
İçerik-Sorular ve Etkinlikler:	
Öğretim Yöntem ve Teknikleri:	
Önemli Olaylar:	
Öğretmen Adaylarının Gelişimlerine Katkı Sağlayan Faktörler:	
Öğretmen Adaylarının Gelişimlerini Engelleyen Faktörler:	
Öğretmen Adaylarının Güçlük Yaşadığı Hususlar:	
Beklenmedik Durumlar:	
Tasarıma Yönelik Değişiklikler:	

Ek-17: Ders Değerlendirme Anketi

DERS DEĞERLENDİRME ANKETİ

Değerli Öğretmen Adayları

Bu anket 2017-2018 Eğitim Öğretim Yılı Bahar Döneminde bu araştırma kapsamında almış olduğunuz Matematik Eğitiminde İspat dersine yönelik süreci ve bu sürecin sizler üzerindeki etkisini değerlendirmeniz için hazırlanmıştır. Sorulara özenle ve içtenlikle cevap vermeye dikkat ediniz.

1. Soru: Aldığınız dersin ***ispatla ilgili alan bilgisine ait kazanımları*** aşağıdaki gibi iki tanedir.

Kazanım 1 **:**Öğretmen adayı farklı ispat yöntemlerini bilir ve uygular.

Kazanım 2 **:**Öğretmen adayı ispat yaparken analitik ispat şemalarını kullanır.

Bu kazanımlardan *kaç tanesine, hangisine veya hangilerine* ulaştığınızı düşünüyorsunuz? Açıklayınız.

2. Soru: Aldığınız dersin ***ispatla ilgili pedagojik alan bilgisine ait kazanımları*** aşağıdaki gibi dört tanedir.

Kazanım 3 **:**Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit eder.

Kazanım 4 **:**Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenlerini açıklar.

Kazanım 5 **:**Öğretmen adayı ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirler.

Kazanım 6 **:**Öğretmen adayı öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını tespit eder.

Bu kazanımlardan *kaç tanesine, hangisine veya hangilerine* ulaştığınızı düşünüyorsunuz? Açıklayınız.

3. Soru: Aldığınız dersin ***içeriğine*** yönelik görüşlerinizi belirtiniz.

4. Soru: Aldığınız dersin ***veriliş (işleniş) yöntemine*** ilişkin görüşlerinizi belirtiniz.

5. Soru: Aldığınız dersin ***değerlendirme sistemine ve araçlarına*** yönelik görüşlerinizi belirtiniz.

6. Soru: Sizce bu dersin öğretmen adaylarına ***daha faydalı olması için*** neler yapılabilir? Bunların dışında ***eklemek istediklerinizi*** belirtiniz.

Ek-18: Beşinci Hafta Çalışma Yaprağı Örneği

…(Kendi isminizi yazın)… öğretmen sınıfta bir önerme yazıp sınıftaki öğrencilerden bu önermenin doğru önerme mi yoksa yanlış önerme mi olduğunu sormuş ve cevaplarını gerekçelendirmelerini istemiştir. Öğretmen ve sınıftaki 11 öğrenciye ait sınıf diyaloğu aşağıdaki gibidir. Diyaloğa katılan 11 öğrenci *Ö1, Ö2, Ö3, ... ,Ö11* kodlarıyla adlandırılmıştır.

Öğretmen: *Aşağıda yazdığım önerme doğru mudur yanlış mıdır? Doğruysa neden doğru, yanlışsa da neden yanlış olduğunu gerekçelendirir misiniz?*

Önerme: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Ö1: *Böyle bir teorem hiç duymadım. Böyle bir teorem olsaydı kitapta yazardı. Kitapta da yazmadığına göre yanlıştır.*

Öğretmen: *Kitabı tam olarak incelediğine emin misin? Başka bir gerekçelendirmen yok mu?*

Ö1: *Başka bir gerekçelendirmem yok öğretmenim.*

Ö2: *Bence de yanlış. Bölü 2 nasıl gelir anlamadım. Ben yanlış olduğunu düşünüyorum.*

Öğretmen: *Başka bir gerekçelendirmen var mı?*

Ö2: *Yok öğretmenim. Sadece sezgilerime güveniyorum.*

Öğretmen: *Sezgileriniz sizi yanıltabilir.. Doğru olduğunu düşünen var mı?*

Ö3: *Var öğretmenim. Bu önermeyi geçen sene bize öğretmenimiz göstermişti. Şimdi hatırladım.*

Öğretmen: *Sence bu gerekçelendirme için yeterli mi? Herhangi bir işlem yapmadın?*

Ö3: *Neden doğru olduğunu bilmiyorum ama öğretmenimiz gösterdiğine göre doğrudur. Öğretmenimiz söylediğine göre başka bir gerekçelendirmeye niye ihtiyaç olsun ki?*

Öğretmen: *Hiçbir işlem yapmadan karar veriyorsunuz.*

Ö4: *Öğretmenim 1'den 5'e kadar olan tamsayılar için yaptım.*

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

eşit oldu. Bu yüzden bu önerme doğrudur.

Öğretmen: *5'e kadar göstermen ispat için yeterli mi?*

Ö4: *Doğru çıktı ama öğretmenim.*

Ö5: *Öğretmenim ben hesap makinesiyle 100'e kadar olan sayıları topladım. 5050 çıktı.*

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

Yine eşit çıktı.

Öğretmen: *Peki bu ispat için yeterli mi?*

Ö5: *100 büyük bir sayı. 100 için doğru oluyorsa bence doğrudur.*

Ö6: *Öğretmenim bende başka bir tamsayı için denedim doğru çıktı. 3 farklı sayı için denenmiş oldu.*

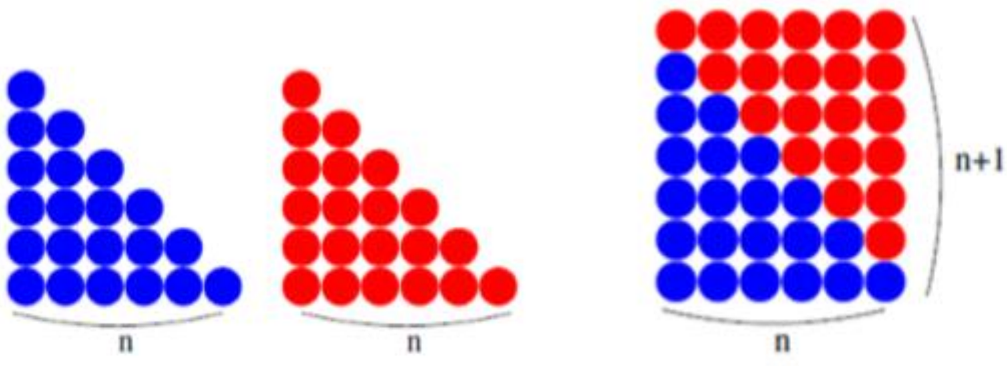
Öğretmen: *Sadece 3 farklı değer için denemek genelleme için yeterli midir?*

Ö6: *Yanlış olsa biri için yanlış çıkardı öğretmenim.*

Ö7: *Öğretmenim ben bir şekil çizebilir miyim?*

Öğretmen: *Buyur çizebilirsin.*

Ö7: *(Tahtaya şekli çizer.)* (Polat ve Demircioğlu, 2016, s. 137).



İki tane n toplamı ikinci şekilde o da n çarpı (n+1) olur. Bu yüzden 2'ye bölünür.

Öğretmen: *(Sınıfa dönerek) Sadece şekille çizim ispat için yeterli olur mu?*

Ö8: *Aslında şöyle. 1'den n sayma sayısına kadar olan sayma sayılarının toplamı son terim olan n ile 1 fazlası olan (n+1) in çarpımının yarısına eşit olur. Sözel olarak teoremin doğru olduğunu ifade edebiliyorum. Ama matematiksel bir şeyler yazmam lazım. Onu da yapamıyorum. Çünkü ispatlar hep matematiksel ifadelerle ispatlanır.*

Öğretmen: *İspatların sadece matematiksel ifadelerle yapıldığı kanısına nerden vardın?*

Ö8: *Çünkü benim gördüğüm ispatlar hep öyleydi.*

Öğretmen: *Peki matematiksel ifade kullanabilecek var mı?*

Ö9: $1+2+3+\cdots+n$

$=2+3+4+\cdots+n+1$ *(1'i sona yazdım)*

$=2+3+\cdots+n+n+1$ *(n+1 in önünde de n vardır)*

$=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ *(Son iki terimi olan n ile (n+1) i çarpıp ilk terim olan 2'ye böldüm.*

Doğru çıktı.

Öğretmen: *Neden böyle bir yol izledin. Attığın adımları anlamlandırabilir misin?*

Ö9: *Neden böyle yaptım? (Düşünüyor… Cevap veremiyor.)*

Öğretmen: *Yaptığın işlemler yanlış oldu. İspatta mantıksal çıkarımları doğru yapmak gerek. İşlemsel düşünme ve genelleme de olmalı.*

Ö10: *Öğretmenim ben bir işlem yapabilir miyim?*

Öğretmen: *Buyur.*

Ö10: $T=1+2+3+\cdots+(n-1)+n$ *(1'den n'e kadar olan sayma sayılarının toplamı T olsun).*

T= 1+ 2 + 3 +…+ (n-1) +n (T yi yazalım)

T= n+ (n-1)+ (n-2) +…+ 2 + 1 (T yi tersten yazalım)

2T= (n+1)+(n+1)+(n+1)+… +(n+1)+(n+1) (Taraf tarafa toplayalım)

2T= n·(n+1) (Çarpma işlemi toplamının kısa yoldan yapılışıdır)

$T=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ *(Her iki tarafı 2 ile bölersek)*

Doğru çıktı.

Öğretmen: *Bu doğru. İyi bir mantıksal çıkarım. İşlemleri de doğru yürüttün. Daha akiyomatik yapı içerisinde yapılamaz mı?*

Ö11: *Ben tümevarım yöntemi ile yapabilirim.*

Öğretmen: *Tümevarım yöntemini biliyor musun?*

Ö11: *Biliyorum şöyleydi.*

$n \in N$ *olsun. O halde* $1+2+3+\cdots n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ *olduğunu ispatlayalım.*

$n = 1$ *için* $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ *doğrudur.*

$n = k$ *için* $1+2+3+\cdots k = \frac{k\cdot(k+1)}{2}$ *olduğunu kabul edelim.*

$n = k+1$ *için* $1+2+3+\cdots k+(k+1) = \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$ *olduğunu ispatlayalım.*

Haydi başlayalım.

Tümevarım hipotezinin her iki tarafına $k+1$ *ekleyelim.*

$$1+2+3+\cdots k+(k+1) = \frac{k\cdot(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$= \frac{k\cdot(k+1)+2\cdot(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$$

İşte bitti.

Öğretmen: *Bence de bitti.*

***Ö1, Ö2, Ö3, … , Ö11* kodlarıyla adlandırılmış öğrencilerin ispat yaparken kullandıkları argümanları (gerekçelendirme biçimlerini) aşağıda belirlenen boşluklara açıkça yazınız.**

Öğrenci kodu	**Öğrencinin ispat yaparken kullandığı argümanı (gerekçelendirme biçimini) yazın**	**Öğrencinin ana ispat şemasını yazın**	**Öğrencinin alt ispat şemasını yazın**	**Öğrencinin alt ispat şemasının özelliklerini özetleyin**
Ö1				
Ö2				
Ö3				
Ö4				
Ö5				
Ö6				
Ö7				
Ö8				
Ö9				
Ö10				
Ö11				

Ek-19: Yedinci Hafta Tümevarımla İspat Yöntemi İle İlgili Alan Bilgisine Yönelik Çalışma Yapraklarındaki Sorular

1. Soru: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ teoremini (Swanson, 2017, s. 41) ispatlayınız.

2. Soru: $2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = n \cdot (n + 1)$ teoremini (Gauss Metodunun özel durumu) ispatlayınız.

3. Soru: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$ teoremini (Leung ve Cheung, 1988, s. 42; Sundstrom, 2014, s. 170; Swanson, 2017, s. 41) ispatlayınız.

4. Soru: $m \in N^+$ için $\prod_{t=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{2^t}\right) \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{m+1}}$ olduğunu (Gossett, 2003) ispatlayınız.

5. Soru: $n \in N$ ve $n \geq 3$ için $2n + 1 < 2^n$ teoremini (Epp, 2011, s. 202) ispatlayınız.

6. Soru: 2'den büyük her k doğal sayısı için $\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{k-2}{3k+3}$ olduğunu (Sundstrom, 2014) ispatlayınız.

7. Soru: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + m^3 = [\frac{m \cdot (m+1)}{2}]^2$ teoremini (Leung ve Cheung, 1988; Swanson, 2017) ispatlayınız.

8. Soru: m bir sayma sayısı ve $m \geq 4$ için $m! > 2^m$ olduğunu (Sundstrom, 2014) ispatlayınız.

9. Soru: $\forall m \in N_{>0}$ için f_m fibonacci dizisinin bir elemanı ise $f_m < 2^m$ olduğunu (Garnier ve Taylor, 2010, s.76) ispatlayınız.

10. Soru: L_n Lucas sayı dizisinin, f_n Fibonacci sayı dizisinin bir elemanı olmak üzere $n \geq 3$ ve $n \in N$ olmak üzere "$L_n = f_{n+2} - f_{n-2}$" eşitliği vardır (Sundstrom, 2014, s. 210).

Not: Derste her bir tümevarımla ispat yöntemi ile ilgili bir adet soru araştırmacı tarafından tahtada ispatlanmıştır. Sonrasında yukarıdaki 10 soru çalışma yapraklarında öğretmen adayları tarafından beşi grup, beşi de bireysel olarak çalışılmış ve sonrasında tartışılmıştır. Ders sonunda öğretmen adaylarına her bir tümevarımla ispat yöntemiyle ilgili ikişer soru olmak üzere toplamda sekiz soru ödev olarak verilmiştir.

Ek-20: Yedinci Hafta Tümevarımla İspat Yöntemi İle İlgili Pedagojik Alan Bilgisine Yönelik Bir Çalışma Yaprağı Örneği

Bir öğretmen sınıfta aşağıdaki teoremi yazıp öğrencilerden bu teoremin doğruluğunu ispatlamalarını isetmiştir. Bir öğrencinin verdiği cevap aşağıdadır. Bu sorudaki öğrencinin ispatlamaya yönelik yaşadığı güçlüğü tespit edip, bu güçlüğün nedenini açıklayın ve bu güçlüğün üstesinden gelebilecek öğretim stratejini belirleyiniz.

Teorem: $2+4+6+\cdots+2n = n\cdot(n+1)$

Öğrencinin verdiği cevap:

$n=1$ için 2

$1\cdot 2 = 2$ doğrudur.

$n=2$ için 2+4=6

$2\cdot 3 = 6$ doğrudur.

$n=3$ için 2+4+6=12

$3\cdot 4 = 12$ doğrudur.

…

$n=20$ için 2+4+6+⋯+40=420

$20\cdot 21 = 420$

1, 2 ve 3 için doğru oldu. Herhangi büyük bir sayı için de denedim ve doğru çıktı. Teoremin doğruluğunu ispatlamış oldum.

Güçlük	
Nedeni	
Öğretim Stratejisi	

Not: Tümevarımla ispat yöntemi ile ilgili ortaöğretim öğrencilerinin yaşayabileceği farklı güçlükler, bu güçlüklerin farklı nedenleri ve bu güçlüklerin üstesinden gelebilecek farklı öğretim stratejilerini içeren yukarıdakine benzer iki örnek olay ve beş farklı senaryo üzerinden grup ve bireysel çalışmalar yapılmıştır. Ödev olarak da beş farklı senaryo öğretmen adaylarına dağıtılmıştır.

Ek-21: Proje Destek Belgeleri

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJELERİ
DESTEKLEME SÖZLEŞMESİ
Proje No: EGT-C-DRP-120418-0202

1. TARAFLAR:

Marmara Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri adına Rektör veya ilgili Rektör Yardımcısı ile Proje Yürütücüsü arasında aşağıdaki şartlarla bu araştırma projesi sözleşmesi yapılmış ve taraflarca imzalanmıştır.

2. TANIMLAR:

a) Bu sözleşmenin bundan sonraki kısımlarında Marmara Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri "Komisyon", Proje Yürütücüsü Doç.Dr. HATİCE AKKOÇ "yürütücü", kabul edilen proje önerisi "proje" ve Marmara Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönergesi "Yönerge" olarak alınacaktır.
b) Bu sözleşmenin konusu "Matematik Öğretmen Adaylarının İspata Yönelik Pedagojik Alan Bilgilerinin Geliştirilmesi ve İncelenmesi" başlıklı EĞİTİM C-DRP projesinin Komisyon tarafından sözleşmede gösterilen şekilde desteklenmesidir.

3. PROJE YÜRÜTÜCÜSÜNÜN GÖREVLERİ:

a) Projenin, bu sözleşme ekinde belirtilen program içinde, öngörülen süre, amaç, kapsam ve diğer hususlara uygun olarak yürütülmesi, geliştirilmesi ve sonuçlandırılmasından proje yürütücüsü sorumludur.
b) Desteklenmesi kabul edilmiş projenin amaç, kapsam, süre, program ve bütçesinde Komisyon`un yazılı izni alınmadan hiçbir değişiklik yapılamaz.
c) Proje yürütücüsü; proje süresince herhangi bir sebepten dolayı ayrılması halinde yürütücü değişikliği işlemleri tamamlanmadan ilişik kesemez.

4. ARAÇ, GEREÇ VE DONANIM:

a) Proje bütçesi ile temin edilen mal ve malzemeler Taşınır Mal Yönetmeliği Hükümleri`ne tabiidir.
b) Bu teçhizat proje süresince, proje yürütücüsünün gözetimi ve sorumluluğu altındadır.

5. GELİŞME RAPORLARI:

a) Kabul edilen C, D ve tümü diğer kurumlar tarafından desteklenen projeler hariç araştırma projesinin yürütücüsü, BAP birimi başkanlığına altı ayda bir geçmiş dönemdeki çalışmalarla ilgili bilgilerin yer aldığı gelişme raporu sunar.
b) Gelişme raporları zamanında gönderilmediği ve kabul edilebilir özür bildirilmediği takdirde Komisyon Kararı ile rapor gelene kadar proje durdurulur ve bu süre içinde hiçbir ödeme yapılmaz.
c) Komisyon tarafından kısmen veya tamamen desteklenen projeler gerektiğinde yerinde inceleme yoluyla, Komisyon`ca görevlendirilen diğer Komisyon Üyesi (Proje izleyicisi) tarafından izlenir. Proje Yürütücüleri, Proje izleyicisinin talep ettiği her türlü bilgi ve belgeyi vermekle yükümlüdürler.

6.KESİN RAPOR:

a) A ve B Tipi Projeler: Bu tip projelerden, Marmara Üniversitesi atama ve yükseltme ölçütlerinde benimsenen uluslar arası bir bilimsel makale veya kitap içerisinde bölüm niteliğinde yayın beklenir. Bu şekilde yapılmış bir yayın/patent varsa, sonuç raporu olarak benimsenir. Aynı yürütücünün bir sonraki veya aynı dönemde aynı kategoride ikinci bir proje alabilmesi için bu yayın koşulunu sağlamış olması gerekir. Bir dergi tarafından değerlendirilmesi yapılmakta olan yayın için BAPKO karar verir. Bu koşulların yerine getirilmediği durumlarda BAP birimi başkanlığına kesin rapor sunulur.
b) C Tipi Projeler: Bu proje çerçevesinde desteklenen bir yüksek lisans, doktora veya tıpta uzmanlık projesi, tezin veya sanatta yeterlik (tez/sergi/proje) çalışmasının tamamlanması ile sonuçlanmış olur. Teze ait bir adet CD ve jüri tutanağı BAP birimi başkanlığına iletilir.
c) D Tipi Projeler: Proje yürütücüsü, bu kapsamda desteklenen projelerde, proje gerekçelerinin ve hedeflerinin gerçekleştiğini belirten bir raporu BAP birimi başkanlığına sunar.
d) E Tipi Projeler: Proje yürütücüsü verilen desteğin ne şekilde sonuçlandırıldığını ve alt yapının nasıl kullanılabilir hale geldiğini gösteren bir kesin raporu BAP birim başkanlığına sunar. Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından yerinde incelenir.
e) F Tipi Projeler: Bu kapsamda desteklenen projelerde, projeyi destekleyen kuruluş tarafından proje gerekçelerinin ve hedeflerinin gerçekleştiğini belirten bir belge istenir. Gizlilik aranmayan projelerin sonuçlandırılması A ve B tipi projelerde olduğu gibi yapılır.
f) I Tipi Projeler: Bu kapsamda desteklenen projelerin sonuçlandırılması için hazırlanan bir rapor ders araç ve gereçleri ile ilgili Fakülte/Yüksekokul/Enstitü/Merkez müdürlükleri birimlerinde oluşturulan Strateji Planlama Komisyonuna sunulur. Bu komisyon görüşlerini bir kesin rapor halinde BAP birimi başkanlığına sunar.

7. GÜVENLİK TEDBİRLERİ:

Proje yürütücüsü, proje yerinde kazaları önleme ve sağlık şartları bakımından İş Kanunu, Sosyal Sigortalar Kanunu ve ilgili diğer kanun, tüzük ve yönetmeliklere göre gerekli her türlü güvenlik önlemlerinin alınmasından sorumludur.

8. GİZLİLİK:

Proje yürütücüsü, projeyle ilgili olarak elde edilecek bilgilerin gizliliğinin korunması bakımından Kurum`a karşı sorumludur.

9. PATENT VE TELİF HAKLARI:

a) Projenin gerçekleştirilmesi sonucunda bir ihtira geldiği takdirde, bu ihtiradan dolayı usulüne uygun olarak istihsal edilecek patentin %30`u Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonuna, % 70`i Doç.Dr. HATİCE AKKOÇ, Doktora Öğr. FİKRET CİHAN aittir. Ancak, patent alındığının Kurum`a bildirilmesi zorunlu olup patentin yurtdışına satılması veya kiralanması kurumun iznine tabidir. Projeden elde edilen bilimsel sonuçların telif hakkı Marmara Üniversitesine aittir. Aksi taktirde her iki durumdada yasal işlem uygulanır.
b) Proje yürütücüsünün proje bitiminden itibaren 2 yıl içerisinde Sağlık ve Fen Bilimleri için Science Citation Index`te, Sosyal ve Eğitim Bilimleri için ise Uluslar arası bir bilimsel makale, sergi veya kitap içerisinde bölüm niteliğinde yayına dönüştürmesi zorunludur. Bu yayının bilgilendirme kısmında çalışmanın Marmara Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından EGT-C-DRP-120418-0202 proje numarası ile desteklendiği mutlaka belirtilecektir.

10. DESTEK MİKTARI

a) Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu`nca projeye 10,977.00 TL destek sağlanacaktır.
b) Bu sözleşme 12.04.2018 tarihinden 12.04.2019 tarihine kadar yürürlüktedir.
c) Bu sözleşme ile öngörülen toplam maddi destek miktarı ve buna ait ödeme planında, Komisyon`a tahsis edilen bütçe imkânları ile Komisyon`a nakit akışında meydana gelebilecek kısıntıların sebep olacağı aksamalar mücbir sebep olarak kabul edilir ve bundan ötürü taraflar sorumlu tutulamaz.

11. SÖZLEŞMENİN UZATILMASI:

A, B, E ve I tipi Bilimsel Araştırma Projeleri en çok üç yıl içinde tamamlanır. Proje yürütücüsünün gerekçeli başvurusu üzerine, proje süresi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu`nun kararı ile 1 (bir) yıl uzatılabilir.

12. UYGULAMA VE YÜRÜTME

Bu sözleşmede yer almayan hususlarda Marmara Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Uygulama Yönergesi ve Yüksek Öğretim Kurumları Bilimsel Araştırma Projeleri Hakkında Yönetmelik hükümleri uygulanır.

TARİH:........./........./2018

Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyon Başkanı	Yürütücü
Prof. Dr. Mehmet AKALIN Rektör Yardımcısı Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu Başkanı	Doç.Dr. HATİCE AKKOÇ