

**PARAMETRE BELİRSİZLİĞİ ALTINDA ÇOKLU
ALGILAYICILARA AİT BAĞIMLI ÖLÇÜMLERLE
HİPOTEZ SINAMASI**

**HYPOTHESIS TESTING WITH DEPENDENT
OBSERVATIONS OF MULTIPLE SENSORS IN THE
PRESENCE PARAMETER UNCERTAINTY**

SELİN IŞIK

Doç. Dr. BERKAN DÜLEK

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim - Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2019

SELİN IŞIK'ın hazırladığı “Parametre Belirsizliği Altında Çoklu Algılayıcılara Ait Bağımlı Ölçümlerle Hipotez Sınaması” adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından ELEKTRİK VE ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

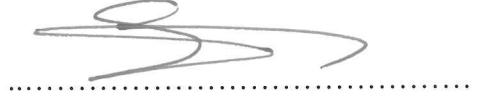
Doç. Dr. A. Melda YÜKSEL TURGUT

Başkan



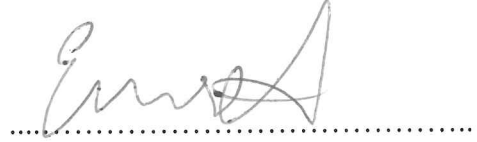
Doç. Dr. Berkan DÜLEK

Danışman



Prof. Dr. Emre AKTAŞ

Üye




Doç. Dr. Cenk TOKER

Üye



Dr. Öğr. Üyesi Mücahit ÜNER

Üye



Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak / /..... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

18 / 07 / 2019



Selin IŞIK

YAYINLANMA FİKRİ MÜLKİYET HAKKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**" kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricince YÖK Ulusal Tez Merkezi / H. Ü. Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- Enstitü / Fakülte yönetim kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.
- Enstitü / Fakülte yönetim kurulu gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren ay ertelenmiştir.
- Tezim ile ilgili gizlilik kararı verilmiştir.

18. / 07 / 2019



Selin IŞIK

ÖZET

PARAMETRE BELİRSİZLİĞİ ALTINDA ÇOKLU ALGILAYICILARA AİT BAĞIMLI ÖLÇÜMLERLE HİPOTEZ SINAMASI

SELİN IŞIK

Yüksek Lisans, Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Berkan Dülek

Haziran 2019, 91 sayfa

Çoklu algılayıcı ağlarında sinyal işleme, askeri ve sivil olmak üzere bir çok uygulama alanında sıklıkla kullanılmaktadır. Algılayıcı ağlarının, kablosuz iletişim ve elektronik alanlarındaki gelişmeler ile birlikte maliyetlerinin düşmesi ve uzaktan gerçek zamanlı veri izleme ve sinyal işleme süreçlerini kolaylaştırma- ları nedeniyle her geçen gün kullanımları artmaktadır. Bu nedenle, çoklu türdeş olmayan algılayıcılardan oluşan ağlarda, temel görevi bir olayı algılamak olan algılayıcılardan alınan verileri birleştirerek, bir durum ile ilgili global tahmin yapmak önemli bir konu haline gelmiştir.

Algılayıcıların topladığı verilerin global bir karar vermek için birleştirilmesi, çok modlu bir modelleme ve sinyal işleme yaklaşımı gerektirmektedir. Bu tez çalış- masında, çoklu algılayıcı bulunan ağlarda, farklı algılayıcılardan alınan ölçüm- lerin ve her bir sensörden ardışık zamanlarda alınan ölçümlerin bağımlı olması durumunda parametre belirsizliği altında bileşik hipotez sınaması problemi ele alınmıştır.

Farklı algılayıcılardan aynı anda alınan ölçümler arası bağımlılık, bağımlı ras- gele değişkenleri modellemek için yaygın olarak kullanılan kopula kuramı kulla- nılarak modellenmiştir. Kopula teorisi kullanılarak algılayıcı ölçümlerinin bileşik dağılımları parametrik olarak ifade edilmiştir. Bağımlı verilerin bileşik dağılımla-

rını modellemek için kopula kuramının kullanılmasının pek çok avantajı vardır. En önemlilerinden biri, marjinal dağılımların etkisini ve veri içindeki bağımlılık yapısını birbirinden ayırmasıdır. Ayrıca kopula fonksiyonları ile kapalı bir forma sahip olmayan bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu (PDF) modelleri de temsil edilebilmektedir. Bu tez çalışmasında, bağımlılık modellemede Gauss ve Student'in t kopula fonksiyonları ele alınmıştır. Ardışık zamanda alınan ölçümler arasındaki bağımlılık ise, Markov zincirleri kullanılarak modellenmiştir.

Sensör ölçümlerinin marjinal dağılımlarının ve kopula fonksiyonlarının bilinmeyen, deterministik parametreleri olduğu varsayılmıştır. Sensörlerden alınan ölçümlerin marjinal PDF'lerin parametrik olarak bilindiği ancak bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunun bilinmediği varsayılmıştır. Algılayıcılardan elde edilen ölçümler ile, müşterek sezim ve kestirim yöntemi kullanılarak, kopula fonksiyonunun ve marjinal dağılımların bilinmeyen parametreleri kestirilip, parametre belirsizliği altında dizi kestirimi yapılmıştır. Sonlu durum Markov süreçten oluşan gözlemlerle durum dizilimi tahmin etmek için en iyi özyinelemeli çözüm olan klasik Viterbi algoritması, parametre belirsizliği olması nedeniyle doğrudan kullanılamamaktadır. Sağ kalana dayalı işleme (PSP) algoritması kullanılarak, bilinmeyen parametrelerin kestirimi de Viterbi algoritmasının içine gömülmüştür. Böylece, durum dizilimi ve bilinmeyen parametreler için eş zamanlı kestirim yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında ele alınan problemi çözmek için, literatürde "Beklenti Enbüyütme (EM)" algoritmasına dayalı bir yöntem geliştirilmiştir. Çoklu algılayıcılardan alınan bağımlı gözlemlerle, parametre belirsizliği altında olası durum dizilimini bulmaya yönelik EM algoritmasına dayalı literatürdeki mevcut bu çözüme göre, aynı başarımlı kriteri için, işlem karmaşıklığı bakımından iyileştirme sağlanmıştır. Aynı zamanda literatürdeki bu yöntem tüm ölçümleri alıp, daha sonra çevrimdışı olarak tahmin yapmaktadır. Bu tez çalışmasında, her bir anda çevrimiçi olarak durum tahmini yapılmaktadır. Literatürde sunulan diğer çözümlerde, bazen modellerde yer verilmeyerek bazen de modellerde yer verilmesine rağmen yüksek işlem karmaşıklığı gerektirmesi nedeniyle çözümlerde tümüyle

kullanılmayarak, algılayıcı ölçümleri arasındaki zamansal korelasyon gözardı edilmiştir ve algılayıcılar arası bağımlılıkla beraber zamansal bağımlılığın da ele alındığı etkin bir çözüm yöntemi sunulmamıştır. Bu tez çalışmasında, algılayıcılar arası bağımlılığın ve zamanda bağımlılığın beraber hesaba katıldığı durum için, düşük işlem karmaşıklığına sahip ve asimptotik olarak en iyi müşterek sezim ve kestirim yöntemi geliştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kopula kuramı, Sağ kalana dayalı işleme (PSP), Beklenti Enbüyütme, Viterbi, Bileşik hipotez testi, Korelasyon, Markov zinciri, İşlem karmaşıklığı.



ABSTRACT

HYPOTHESIS TESTING WITH DEPENDENT OBSERVATIONS OF MULTIPLE SENSORS IN THE PRESENCE PARAMETER UNCERTAINTY

SELİN IŞIK

**Master of Science, Department of
Electrical and Electronics Engineering**

Supervisor: Doç. Dr. Berkan Dölek

June 2019, 91 pages

In sensor networks, signal processing are being used prevalently in military and civil applications. Usage of sensor networks has been on the rise each passing day due to reduction of costs with advances in wireless communication and electronic fields and ease in survey of remote real time data tracking and signal analysis processes. Thus, in networks formed up of multiple heterogeneous sensors, of which main task is detection of an event, making of global decisions by fusing collected data has been an important matter.

It requires multi-modal signal processing approach in collection of data from sensors in order to make a global decision. In this thesis work, in networks with multiple sensors, when measurements obtained simultaneously from different sensors and measurements obtained consecutively from each sensor are depended to each other, composite hypothesis test problem under parameter uncertainty has been taken into account.

The dependence between different measurements obtained simultaneously from different sensors has been modelled using copula theorem which is used

extensively in modelling of dependent random variables. Joint probability distribution of data using copula theorem has been defined parametrically. There are numerous advantages of copula function usage in modelling of joint probability distribution of dependent data. Major one is the separation of marginal distribution and dependence structure in data from each other. Joint probability distribution functions (PDF) that is not in closed form, could also be represented using copula functions. In this thesis, Gaussian and Student's t copula functions has been taken into account.

The dependence between consecutive measurements are modelled in Markovian chains.

It has been assumed that, marginal distributions of sensor measurements and copula functions have unknown deterministic parameters. It has been assumed that in data obtained from sensor measurements, marginal probability density functions (PDF) is known parametrically but joint probability distribution function is not known. The unknown parameters of copula functions and marginal distributions have been estimated and state sequence have been detected under parameter uncertainty using the joint detection and estimation method. The classical Viterbi algorithm, the optimal recursive solution in estimation of state sequence which is formed up of finite state Markovian processes, cannot be used directly due to unknown parameters. The estimation of unknown parameters using Per-Survivor Processing algorithm, is also embedded into the structure of the the Viterbi algorithm. Therefore, state sequence and unknown parameters have been estimated simultaneously.

To solve the problem taken into account in this thesis, it has been observed that a method based on "Expectation Maximization (EM)" has been developed in literature [1]. According to present EM algorithm solution [1] in literature, based on detecting probable state sequence with unknown parameters with dependent observations measured of multiple sensors, improvements in computational complexity have been accomplished. At the same time, this method makes detections offline, using all measurements during observation interval.

In this thesis, state of nature detection are made online manner each instant of time. In other solutions, presented in literature, although sometimes not taken into account in models and sometimes taken into account in models, not being used extensively in solutions due to high computational complexity requirement, the dependence in time between sensor measurements has been ignored and an effective solution that takes into account the time dependence together with spatial dependence between sensors has not been presented. In this thesis, for the case where dependence between sensors and dependence in time are taken into account together, a joint detection and estimation method that has minimum computational complexity and asymptotically optimal solution has been developed.

Keywords: Copula theory, Per-Survivor Processing, Expectation Maximization, Viterbi, Composite Hypothesis Testing, Dependence, Markov chain, Computational complexity.

TEŞEKKÜR



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
ÇİZELGELER DİZİNİ	xii
KISALTMALAR	xiii
SÖZLÜK DİZİNİ	xiv
1. GİRİŞ	1
2. BAĞIMLILIK MODELLEME	5
2.1. Kopula Kuramı	5
2.1.1. Gauss Kopula	16
2.1.2. Student-t Kopula (t Kopula)	20
2.2. Özbağımlı (AR) Model	23
3. PARAMETRE BELİRSİZLİĞİ ALTINDA DİZİ KESTİRİMİ	27
3.1. Markov ve Saklı Markov Modelleri	27
3.2. En Büyük Olabilirlik Dizi Kestirimi (MLSE) ve Viterbi Algoritması ..	32
3.3. Sağ Kalana Dayalı İşleme (PSP) Algoritması	36
4. PROBLEM FORMÜLASYONU	38
4.1. Gauss Kopula ile Bağımlılık Modelleme	45
4.2. t Kopula ile Bağımlılık Modelleme	52
5. DENEYSEL ÇALIŞMALAR	59
5.1. EM Algoritması	73
6. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME	86
KAYNAKLAR	87

EKLER	90
EK 1 - Tez Çalışması Orjinallik Raporu	90
ÖZGEÇMİŞ	91



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Copula fonksiyonu ve bileşik CDF ilişkisi	10
Şekil 2.2. Farklı kopulalara ait olasılık yoğunluk fonksiyonları	12
Şekil 2.3. Marjinal dağılımları Gauss olan x, y rasgele değişkenlerinin bağımlılıklarının Gauss kopula ile modellenmesi ile elde edilen bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonları	13
Şekil 2.4. Marjinal dağılımları Gauss olan x, y rasgele değişkenlerinin bağımlılıklarının Student-t kopula ile modellenmesi ile elde edilen bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonları	13
Şekil 2.5. Marjinal dağılımları Gauss olan x, y rasgele değişkenlerinin bağımlılıklarının Clayton kopula ile modellenmesi ile elde edilen bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonları	14
Şekil 2.6. Marjinal dağılımları Gauss olan x, y rasgele değişkenlerinin bağımlılıklarının Gumbel kopula ile modellenmesi ile elde edilen bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonları	14
Şekil 2.7. Farklı serbestlik derecelerine sahip t konum-ölçeklendirme dağılımı olasılık yoğunluk fonksiyonları	16
Şekil 2.8. Gauss marjinal dağılımlara sahip rasgele x, y değişkenlerinden birörnek dağılıma sahip u, v değişkenleri elde etme (Olasılık Tümler Dönüşüm Teoremi)	19
Şekil 2.9. Birörnek dağılıma sahip rasgele u, v değişkenlerinden marjinal dağılımları Gauss olan x, y değişkenleri elde etme ...	19
Şekil 2.10. μ ve σ parametrelerine sahip Gauss ve standart Student-t dağılımının σ ile ölçeklendirilip, μ kadar kaydırılması ile elde edilen t konum-ölçeklendirme dağılımı	21
Şekil 2.11. t konum-ölçeklendirme dağılımının serbestlik derecesi artarken ($\nu \rightarrow \infty$) Gauss dağılıma yakınsaması	21
Şekil 2.12. Transfer fonksiyonu ile giriş-çıkış ilişkisi	24
Şekil 3.1. Durum geçişleri verilmiş üç durumlu Markov Model Örneği [2]	28
Şekil 3.2. Saklı Markov Model (SMM) Mimarisi	30

Şekil 3.3. Durum geçişleri verilmiş üç durumlu Saklı Markov Model (SMM) Örneği	30
Şekil 3.4. Üç durumlu ve 4 olası çıktılı Ayırık Saklı Markov Model (SMM) Örneği	30
Şekil 3.5. Dört durumlu kaydıran yazmaç sürecinin durum diyagramı [3]	34
Şekil 3.6. Dört durumlu kaydıran yazmaç sürecinin kafes diyagramı [3]	35
Şekil 4.1. Mrkov zincirlerinin durum diyagramı ve bu durum diyagramı karşılık gelen çatı diyagramı	43
Şekil 4.2. Hayatta kalan yolları gösteren çatı diyagramı örneği	57
Şekil 5.1. Gauss kopula için PSP algoritmasının Senaryo 1 performansı	63
Şekil 5.2. t kopula için PSP algoritmasının Senaryo 1 performansı	65
Şekil 5.3. Gauss kopula için PSP algoritmasının Senaryo 1 ve Senaryo 2 performansı	65
Şekil 5.4. t kopula için PSP algoritmasının Senaryo 1 ve Senaryo 2 performansı	66
Şekil 5.5. Gauss kopula için PSP algoritmasının Senaryo 1 (S1) ve Senaryo 3 (S3) performansı	66
Şekil 5.6. t kopula için PSP algoritmasının Senaryo 1 (S1) ve Senaryo 3 (S3) performansı	67
Şekil 5.7. Gauss kopula için PSP algoritmasının Senaryo 1, Senaryo 4 ve Senaryo 5 performansı.....	67
Şekil 5.8. t kopula için PSP algoritmasının Senaryo 1, Senaryo 4 ve Senaryo 5 performansı	68
Şekil 5.9. Gauss kopula için 2 hipotez altındaki dağılımların eş yükselti eğrileri (Çizelge 5.1,K=2)	68
Şekil 5.10. Gauss kopula için PSP algoritmasının Senaryo 6, Senaryo 7 ve Senaryo 8 performansı.....	70
Şekil 5.11. t kopula ile oluşturulan bağımlılığın Gauss kopula ile modellenmesinin performansa etkisi.....	74
Şekil 5.12. EM algoritması ile PSP algoritmasının işlem karmaşıklık seviyelerinin karşılaştırılması	85

ÇİZELGELER DİZİNİ

- Çizelge 5.1. Aynı ortalama ve varyans değerlerine sahip marjinal sensör dağılımları için benzetim yapılan senaryolar ($\nu_0 = \nu_1 = 10, \sigma^2 = 20, \phi_0^{(k)} = 3, \phi_1^{(k)} = -3, t$ dağılımlar için $\mu_{j,i} = 3, i, j = 1, 2$) 62
- Çizelge 5.2. Bağımlılıkların hesaba katılmadığı durumlar için benzetimi yapılan senaryolar ($\nu_0 = \nu_1 = 10, \sigma^2 = 20, \phi_0^{(k)} = 3, \phi_1^{(k)} = -3, \alpha = 0.8, \pi_{ij} = 0.5, \rho = 0.4, K = 4$) 69



KISALTMALAR

AR	Özbağlanımlı
CDF	Birikimli Dağılım Fonksiyonu
EM	Beklenti Enbüyütme
MA	Kayan Ortalamalı
MAP	En Büyük Sonsal Olasılık
ML	En Büyük Olabilirlik
MLSE	En Büyük Olabilirlik Dizi Kestirimi
PDF	Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu
PD	Kesin Pozitif Matris
PSP	Sağ Kalana Dayalı İşleme
SMM	Saklı Markov Model
WSS	Geniş Anlamda Durağan

SÖZLÜK DİZİNİ

Ağır Kuyruklu Dağılım	: Heavy Tailed Distribution
Aktarım Fonksiyonu	: Transfer Function
Algılayıcı	: Sensor
Ayrık Zaman	: Discrete Time
Beklenti	: Expectation
Beklenti Enbüyütme	: Expectation Maximization
Benzetim	: Simulation
Bileşik	: Joint
Bileşik Hipotez	: Composite Hypothesis
Birikimli Dağılım Fonksiyonu	: Cumulative Distribution Function
Birim Matris	: Identity Matrix
Birörnek	: Uniform
Çok değişkenli	: Multivariate
Dizi	: Sequence
Durağan	: Stationary
En büyük	: Maximum
Enbüyütme	: Maximization
En Büyük Olabilirlik	: Maximum Likelihood
En Büyük Sonsal Olasılık	: Maximum a Posteriori Probability
En iyi	: Optimum
En iyileştirme	: Optimization
En küçük	: Minimum
Enküçültme	: Minimization
Eşyükselti eğrisi	: Contour plot
Korelasyon	: Correlation
Gözetim	: Surveillance

Kafes Diyagramı	: Trellis Diagram
Kapalı Form	: Closed form
Kararlı	: Stable
Kayan Ortalamalı	: Moving Average
Kayıran Yazmaç	: Shift Register
Kesin Pozitif Matris	: Positive Definite Matrix
Kestirim	: Estimation
Konuşma İşleme	: Speech Processing
Küme ortalaması	: Ensemble Average
Geniş Anlamda Duruğan	: Wide Sense Stationary
Marjinal	: Marginal
Olabilirlik	: Likelihood
Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu	: Probability Density Function
Olasılık Tümler Dönüşümü	: Probability Integral Transform
Olabilirlik Oranı	: Likelihood Ratio
Örnekleme Ortalaması	: Empirical Mean
Özbağlanımlı	: Autoregressive
Rasgele	: Random
Sağ Kalana Dayalı İşleme	: Per-Survivor Processing
Sağ Kalan Yol	: Survivor Path
Saklı Markov Model	: Hidden Markov Model
Serbestlik Derecesi	: Degree of Freedom
Sezim	: Detection
Süzgeç	: Filter
t Konum-Ölçeklendirme Dağılımı	: t Location-Scale Distribution
Tam Kerte	: Full Rank
Tek	: Unique
Uzamsal	: Spatial
Üstel	: Exponential
Yinelemeli	: Iterative
Zamanla değişmeyen	: Time Invariant

1. GİRİŞ

Algılayıcı ağlarının bazı uygulama alanlarında, dağıtık yerleştirilmiş algılayıcılardan alınan ölçümlerle global bir çıkarım yapılması gerekmektedir. Tıbbi görüntüleme [4], konuşmacı varlığını algılamak ve takip etmek için sesli ve görsel ipuçlarını birleştirme [5,6], radar ve sonar gibi sistemlerde askeri gözetleme [7], EMG ve fMRI (Fonksiyonel manyetik rezonans görüntüleme tekniği) dataalarını birleştirerek beyindeki farklı bölgelerdeki sinirsel aktiviteyi sezme, kimlik tespiti, yüz, iris ve parmak izi gibi farklı insan imzalarını birleştirme, akıllı evler, trafik gözetleme gibi kablosuz iletişim [8–12] ağları bu alanlara örnektir [13–17]. Bu uygulama alanlarında, algılayıcıların her biri ölçümlerini işlenmiş ya da işlenmemiş olarak füzyon merkezine gönderir ve füzyon merkezinde alınan ölçümler birleştirilerek global bir çıkarım yapılır. Çoklu algılayıcılardan oluşan bu tür ağların bulunduğu birçok uygulamada, füzyon merkezinde global çıkarım yapılırken, farklı algılayıcılardan alınan ölçümlerin ya da bir algılayıcının zamanda aldığı ölçümlerin bağımsız olduğu varsayılmaktadır. Ancak pratikte algılayıcılar arasında, gerek algılayıcıların gürültüleri arası zamansal bağımlılık, gerekse yakın mesafedeki algılayıcıların ortak kapsama alanlarına sahip olmaları nedeniyle uzamsal bağımlılık bulunabilmektedir. Gerçek yaşam verilerindeki bağımlılık için, EEG ve fMRI verilerinin bir araya getirilmesi durumu göz önünde bulundurulabilir. MR cihazında özel bir çekim yöntemi uygulanarak beyinin 3 boyutlu aktif bölgelerinin tespiti için kullanılan fMRI yönteminde aktif beyin bölgelerini tespit ederken elektriksel sinyaller yerine kan akışının hızı ve kandaki oksijen yoğunluğu bilgileri kullanılmaktadır. EEG, beyindeki sinir hücreleri tarafından hem uyanıklık, hem de uyku halindeyken üretilen elektriksel faaliyetin beyin dalgaları halinde gösterilmesidir. EEG'yi oluşturan beyin dalgalarının değerlendirilmesi ile bozukluğun yeri ve şekli hakkında bilgi edinilebilmektedir. Beynin çalışan bölgelerinin ayrıntılı görüntülenmesi amacıyla, EEG ve fMRI birlikte kullanıldığında, her iki çekim yönteminin verdiği bilgiler birleştirilerek beyin çalışması hakkında daha ayrıntılı bilgiye sahip olunabilmektedir. Her iki sinyal için de, aynı anda toplanan veriler zamanda bağımlıdır. Aynı zamanda

EEG ve fMRI sinyalleri ortak kapsama alanlarına sahip oldukları için uzamsal bağımlılığa da sahiptirler [18]. Benzer şekilde, ortam sıcaklık ölçümü, su kirliliği gibi aynı fiziksel olayı gözlemleyen algılayıcılar arasında da hem uzamsal hem de zamansal bağımlılık bulunabilmektedir [19]. Bağımlılık bulunan bu tür ağlarda, herhangi bir anda farklı algılayıcıların gözlemlerini birleştirirken (füzyon) uzamsal bağımlılığın, zamanda alınan birden çok ölçüme göre karar verilirken de zamansal bağımlılığın modele dahil edilmemesi halinde performans kaybı yaşanabilmektedir.

Son zamanlarda, bağımlı değişkenleri modellemek için kopula teorisi kullanımı popüler olmuştur [1, 20–25]. Saklı Markov zincir modelleri kullanılan modellerde çok bileşenli imge bölütleme [26], akustik ve sismik ölçümleri birleştirerek ayak sesi algılama [27] gibi konularda çok değişkenli dağılımlar kopula fonksiyonları ile ifade edilmiştir. Çok değişkenli dağılımların istatistiksel modellenmesinde kopula fonksiyonlarının kullanımı avantaj sağlamaktadır. Kopula fonksiyonları doğrusal olmayan bağımlılıkları modellerken kapalı formda çözümü olmayan ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarının (PDF) analitik ifade edilmesinde de kolaylık sağlamaktadır. Algılayıcı ağlarındaki her bir lokal algılayıcı heterojen yapıda (özdeş olmayan marjinal dağılımlar) olabilmektedirler. Bu tür algılayıcı ağlarında ortak PDF'lerin analitik ifadeleri zorlu bir problem olabilmektedir. Bu nedenle literatürde bu tür ağlarda bileşik PDF, alınan ölçümler bağımsız varsayılarak marjinaler çarpımı olarak ya da kovaryansı Σ olan çok değişkenli Gauss dağılımı olarak ifade edilmektedir. Bileşik PDF için çok değişkenli Gauss varsayımı ile marjinal dağılımların Gauss olma zorunluluğu ortaya çıkmaktadır. Ayrıca Σ ile değişkenler arasındaki yalnızca doğrusal bağımlılık karakterize edilmektedir. Bu nedenle Gauss dağılıma sahip olmayan değişkenler için işlem yaparken Gauss varsayımı ile bağımlılık ölçümü zayıf kalmaktadır [22]. Literatürdeki çoğu çalışma çok değişkenli dağılımlara ait marjinal dağılımların aynı aileye ait olmasını gerektirmez. Pratikte ise her bir rasgele değişkenin marjinal dağılımları farklı olabilmektedir. Bu durumda kopula fonksiyonun kullanılması, marjinal dağılımları ve bağımlılık yapısını ayırdığından esneklik

sağlamaktadır.

İstatiksel olarak bağımlı verilerin birleştirilmesi konusunda literatürde birçok çalışma mevcuttur [20–25, 28–30]. Bu çalışmalardan [20–25, 28, 29]’de uzamsal bağımlılık modele dahil edilirken, algılayıcı gözlemlerinin zamanda bağımsız özdeşçe dağılmış (iid) rasgele değişkenler olduğu varsayılmıştır. [20, 21]’de bilinmeyen uzamsal bağımlılık modele dahil edilerek bilinmeyen parametreler altında lokal algılayıcı kararları birleştirilerek global çıkarım yapmak için kopula teroisine dayalı genelleştirilmiş olabilirlik testine (GLRT) dayalı füzyon algoritması geliştirilmiştir. GLRT, iki adımdan oluşan bir algoritmadır. İlk adımda bilinmeyen parametrelerin en büyük olabilirlik (ML) kestirimleri elde edilmektedir. İkinci aşamasında ise olabilirlik oran testi (LRT) yapılmaktadır. [30]’da ise GLRT’ye dayalı füzyon algoritmasına göre işlem karmaşıklığı açısından avantaj sağlamak amacıyla Rao testi kullanılarak veriler birleştirilmiştir.

Bu tez çalışmasında çoklu algılayıcılardan oluşan ağlarda, ikili Markov süreçten üretildiği varsayılan rasgele hipotez dizilimi tahmini problemi ele alınmaktadır. Bu problemde, algılayıcı ölçümlerindeki gürültüler bağımlı ve kestirilmek istenen sinyal ise deterministiktir. Hem farklı algılayıcılardan aynı anda alınan ölçümlerin (uzamsal), hem de bir algılayıcının ardışık ölçümlerin (zamansal) bağımlı olduğu genel bir yaklaşım kullanılmıştır. Sensör ölçümlerini birleştirerek durum ile ilgili tahmin yaparken, verileri en iyi şekilde birleştirmek için her bir hipotez altındaki dağılımların bilinmesi gerekmektedir. Algılayıcıların marjinal dağılımlarının parametrik olarak bilindiği ancak ortalama değerlerinin bilinmediği varsayılmıştır. Farklı algılayıcıların ortak PDF’leri ise kopula fonksiyonları kullanılarak parametrik olarak ifade edilmiştir. Kopula fonksiyonlarının parametresi olan korelasyon matrisleri de bilinmiyor varsayılmıştır. Durum dizilimi ile ilgili tahmin yaparken tüm bu bilinmeyen parametrelerin kestirimine ihtiyaç vardır. Bu tez çalışmasında, bilinmeyen parametrelerin kestirimi ve durumun eş zamanlı sezimi için PSP algoritması kullanılmıştır. PSP algoritması, parametre belirsizliği altında çalıştırılan Viterbi algoritmasıdır. Viterbi algoritması da sonlu durumu Markov süreçlerinden gözlemlenen ölçümlerle durum diziliminin

özyinelemeli kestirimi için en uygun çözümdür [31]. Önerilen bu algoritmada çevrimiçi olarak, her bir yinelemede parametre kestirimi yapıp, durum tahmini yapılmaktadır. Literatür araştırması yapıldığında, bu problemi çevrimiçi olarak çözen başka yöntem bulunmadığı görülmüştür. [1]'de önerilen EM algoritmasına dayalı çözümde, gözlem sürecinin bitmesi beklenerek, bu süreçte alınan tüm ölçümlerin üzerinden belirlenen başarımlı kriteri sağlanıncaya kadar geçerek (toplu (batch) model) parametre kestirimleri yapıp her bir andaki durum ile ilgili tahmin yapılmıştır.

Tezin ilerleyen bölümlerindeki akış şu şekildedir: Bölüm 2'de algılayıcılar arası uzamsal bağımlılık modellemede kullanılan kopula kuramı ve zamansal bağımlılık modellemede kullanılan özbağlanımlı (AR) süreçlerin teorisine yer verilmiştir. Bölüm 3'de, bilinmeyen parametre belirsizliği altında dizi kestirimi için önerilen en büyük olasılık yöntemine dayalı PSP algoritması anlatılmıştır. Problemin formüle edilmesi ve Gauss ve t kopula fonksiyonları için çözümü Bölüm 4'de verilmiştir. Sırasıyla Bölüm 5 ve Bölüm 6'da ise farklı durumlar için yapılan benzetimler ve bu benzetimler için algoritmanın performans değerlendirilmesine yer verilmiştir.

2. BAĞIMLILIK MODELLEME

Bu bölümde, bu tez çalışmasında algılayıcılar arası uzamsal bağımlılığı modellemekte kullanılan kopula teorisi ve algılayıcıların zamansal bağımlılığını modellemekte kullanılan AR süreçler anlatılmaktadır.

2.1 Kopula Kuramı

Abe Sklar, 1973 yılında yayınladığı makalesinde kopulalar ve rasgele değişkenler arasında bir ilişki olduğunu göstermiştir. Kopulaların rasgele değişkenlerle olan ilişkisine ise ilk kez 1981'de Schweizer ve doktora öğrencisi Wolf'un "Rasgele değişkenler için parametrik olmayan bağımlılık ölçütleri" isimli makalesinde yer verilmiştir [32].

Kopulalar, tek değişkenli marjinal dağılımları, karşılık gelen çok değişkenli dağılımlarla ilişkilendiren parametrik fonksiyonlardır. Kopula fonksiyonları, marjinal dağılımların ne olduğundan bağımsız yalnızca değişkenler arası bağımlılığı modellemektedir. Hem parametrik hem de parametrik olmayan durumlarda bağımlılığın ölçülmesi ve parametrelerin tahmin edilebilmesi için kullanılabilir. Değişkenler arasındaki ilişkinin anlaşılması ve analiz edilmesi konularında sağladıkları kolaylık nedeniyle çok değişkenli olasılık modellemelerinde, başta finansal verilerin modellenmesi olmak üzere birçok alanda yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır.

Çok boyutlu olaylar ile ilgili problem çözümlerinde, birden fazla rasgele değişkenin ortak modellenmesinde genelde ya normal, log-normal, gamma gibi klasik sınıflar kullanılmakta ya da değişkenler bağımsız varsayıp, bileşik CDF'ler marjinal CDF'lerin çarpımı olarak ifade edilmektedir. Bileşik dağılımları Gauss gibi klasik fonksiyonlardan birini kullanılarak modellemek, değişkenlerin marjinal dağılımlarının da aynı sınıfta olmasını gerektirdiğinden, kısıtlayıcı bir durumdur. Ayrıca, bileşik dağılımları Gauss olan rasgele değişkenlerin bileşik CDF'leri, yalnızca, doğrusal ilintili değişkenler arası korelasyonun yönünü (pozitif ya da negatif) ve derecesini ölçmekte kullanılan Pearson korelasyon

katsayısı

$$\rho(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (2.1)$$

ile ifade edilen kovaryans matrisi $\text{cov}(x, y)$ ve marjinal dağılımlar ile ifade edilebilmektedir. Doğrusal olmayan bağımlılığa sahip değişkenlerin bileşik CDF'inin analitik ifade edilmesi zor olduğundan çoğu uygulamada ifadesindeki kolaylık nedeniyle bağımlılıkla ilgili doğrusal varsayımı yapılmaktadır. Kopula fonksiyonları ile, simetrik olmayan ya da doğrusal olmayan bağımlılıklar da birörnek marjinal dağılım dönüşümü ile modellenebildiğinden, değişkenler ile ilgili doğrusal ilintili ya da çok değişkenli Gauss varsayımı yapma kısıtı ortadan kaldırılmaktadır.

Marjinal dağılımları bilinen rasgele değişkenler için, bileşik CDF'in marjinaler cinsinden ifadesi her zaman kolay olmayabilmektedir. Değişkenlerin marjinal dağılımların bilinmesi halinde, bilinen marjinal dağılımlar ile birlikte, rasgele değişkenler arası bağımlılığı modelleyen bir kopula fonksiyonu kullanılarak bileşik PDF elde edilebilmektedir. Kopula fonksiyonları kullanılarak ifade edilen bileşik PDF'lerde, marjinal dağılımlar bağımlılık yapısını etkilememektedir. Bu fonksiyonlar ile ortak PDF'den değişkenlerin marjinal dağılımları ayrıştırılarak bağımlılık yapısının açıkça belirtilmesi sağlanır. Böylece, tek değişkenli teknikleri kullanabilmenin yanı sıra, parametrik olmayan bağımlılık ölçütleriyle de doğrudan bir bağlantı kurulabilmektedir.

$C : [0, 1]^K \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu için, eğer C marjinal dağılımları birörnek olan K rasgele değişkenin bileşik Birikimli Dağılım Fonksiyonu (CDF) ise, K boyutlu bir *kopula* fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır. Sklar Teoremi (Teorem 2.1), marjinal dağılımları G_1, G_2, \dots, G_K olan herhangi bir K boyutlu CDF olan G için tek bir kopula fonksiyonu olduğunu söylemektedir (Eş. 2.2) [33, Tanım 2].

$$G(x_1, x_2, \dots, x_K) = C(G_1(x_1), \dots, G_K(x_K)) \quad x_1, \dots, x_K \in [-\infty, \infty] \quad (2.2)$$

Eş. 2.2'nin K değişken için de birinci dereceden türevi alındığında bileşik PDF

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, \dots, x_K) &= \frac{\partial^K}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_K} C(G_1(x_1), \dots, G_K(x_K)) \\ &= \left(\prod_{k=1}^K g_k(x_k) \right) c(G_1(x_1), G_2(x_2), \dots, G_K(x_K)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

olarak elde edilmektedir. Eş. 2.3'de rasgele değişkenler $\{X_k\}_{k=1}^K$ arası bağımlılık kopula yoğunluk fonksiyonu $c(\cdot)$ tarafından ele alınmıştır [33, Teorem 1]. Bunun tersine, eğer G_1, G_2, \dots, G_K tek boyutlu marjinal CDF'ler, C de K boyutlu bir kopula ise, $\Upsilon : \mathbb{R}^K \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu (Eş. 2.4) marjinal dağılımları G_1, G_2, \dots, G_N olan, geçerli bir K değişkenli CDF'dir [33, Teorem 2].

$$\Upsilon(x_1, \dots, x_K) = C(G_1(x_1), \dots, G_K(x_K)) \quad (2.4)$$

Böylece, bilinen marjinal dağılımlar ve istenilen bağımlılık yapısı (C) birleştirilerek kopulaya dayanan parametrik bir model

$$\hat{g}(x_1, \dots, x_K) = \left(\prod_{k=1}^K g_k(x_k) \right) c(G_1(x_1), \dots, G_K(x_K)). \quad (2.5)$$

olarak elde edilmektedir.

Sklar Teoremi (Teorem 2.1), kopulaların, çok değişkenli dağılım fonksiyonları ve karşılık gelen marjinal dağılım fonksiyonları arasındaki ilişkideki rollerini açıklamaktadır [32]. Sklar teoremine göre herhangi bir çok değişkenli PDF, marjinal dağılımlar ve kopula fonksiyonu cinsinden ifade edilebilmektedir. Böylece ortak dağılımların ifadesinde esneklik sağlanmaktadır. Örneğin, korelasyon katsayısı ρ olan iki değişkenli Gauss kopulası için marjinal CDF'lerin, $F_1(\cdot)$ $F_2(\cdot)$, Gauss olması zorunlu değildir. Farklı PDF'lere sahip rasgele değişkenlerin ortak modellenmesi de zorlu bir problemdir. Ancak bu rasgele değişkenlerin arasındaki bağımlılığı modelleyen bir kopula fonksiyonu mevcut olduğundan, (Gauss, Student-t, Clayton vs.) bileşik PDF ifade edilebilmektedir.

Teorem 2.1 (Skalar Teoremi). *Ortak CDF'i*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_p) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_p \leq x_p) \quad (2.6)$$

marjinal CDF'i

$$F_j(x_j) = P(X_j \leq x_j), \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (2.7)$$

olarak verilen X_1, X_2, \dots, X_p rasgele değişkenleri için, $F_j(x)$ sürekli ise,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_p) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_p(x_p)) \quad (2.8)$$

eşitliğini sağlayan tek bir kopula ($C : [0, 1]^p$) vardır.

$$C(u_1, u_2, \dots, u_p) = F(F_1^{-1}(x_1), F_2^{-1}(x_2), \dots, F_p^{-1}(x_p)) \quad (2.9)$$

Eş. 2.8, X_1, X_2, \dots, X_p 'nin ortak CDF'inin ($F(x_1, x_2, \dots, x_p)$), marjinal CDF'ler $F_j(x_j)$ ve kopula C cinsinden ifadesini göstermektedir. Kopula, bileşik dağılımı oluşturmak için marjinal dağılımları bir araya getirmektedir.

Skalar Teoremi İspatı. Eğer X_1, X_2, \dots, X_p rasgele değişkenlerini ifade eden tüm olasılık dağılım fonksiyonları ($F_j(x)$) sürekli ise,

$$F_j[F_j^{-1}(u)] = u, \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (2.10)$$

eşitliğini sağlayan ters fonksiyonları ($F_j^{-1}(\cdot)$) mevcuttur.

$U = F_X(x)$ ile ifade edilen rasgele değişkenler, olasılık tümlev dönüşüm teoremine (Teorem 2.2) göre, $[0, 1]$ aralığında bir biçimli PDF'e sahiptirler ($U \sim U(0, 1)$).

Teorem 2.2 (Olasılık Tümlev Dönüşüm Teoremi). *CDF'i $F_X(x)$ olarak verilen,*

sürekli dağılıma sahip bir X rasgele değişkeni için,

$$U = F_X(x) \quad (2.11)$$

ile ifade edilen U rasgele değişkeni bir biçimli dağılıma sahiptir.

$$\begin{aligned} F_j(u_j) &= P(U_j \leq u_j) \\ &= P[F_j(X_j) \leq u_j] \\ &= P[X_j \leq F_j^{-1}(u_j)] \\ &= F_j[F_j^{-1}(u)] \\ &= u_j, \quad 0 \leq u_j \leq 1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Böylece, p boyutlu (değişkenli) kopula $C : [0, 1]^p \rightarrow [0, 1]$ her birinin marjinal dağılımları bir biçimli olan $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_p]$ değişkenlerinin bileşik CDF'i olarak tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_p) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_p \leq x_p) \\ &= P(F_1^{-1}(U_1) \leq x_1, F_2^{-1}(U_2) \leq x_2, \dots, F_p^{-1}(U_p) \leq x_p) \\ &= P(U_1 \leq F_1(x_1), U_2 \leq F_2(x_2), \dots, U_p \leq F_p(x_p)) \\ &= C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_p(x_p)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

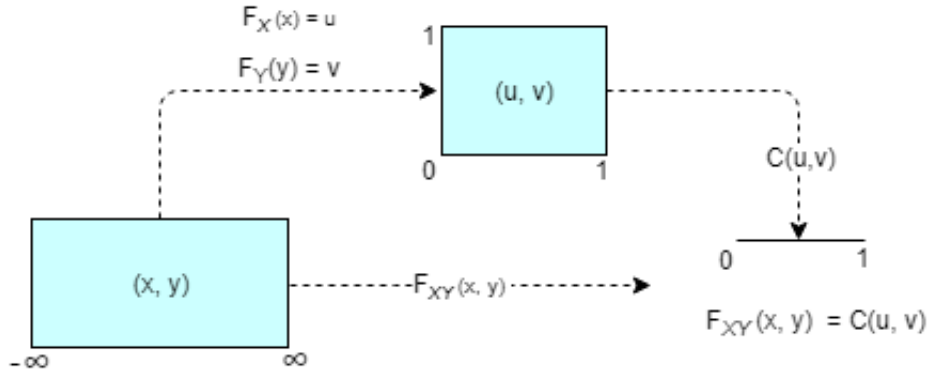
Eğer x_1, x_2, \dots, x_p değişkenleri bağımsız ise, kopula CDF'i C ,

$$C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_p(x_p)) = F_1(x_1)F_2(x_2), \dots, F_p(x_p) \quad (2.14)$$

şeklinde çarpım olarak ifade edilmektedir.

□

Rasgele değişkenler ve kopula fonksiyonu arasındaki ilişki Şekil 2.1'de verilmiştir.



Şekil 2.1. Copula fonksiyonu ve bileşik CDF ilişkisi

$$C(u_1, u_2, \dots, u_p) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_p \leq u_p) \quad (2.15)$$

olarak tanımlanan kopula CDF'i, $F(\cdot)$ ve $C(\cdot)$ türevlenebilir olduğunda, Eş. 2.13'ün türevinin alınmasıyla;

$$\begin{aligned} c(u_1, u_2, \dots, u_p) &= \frac{\partial^p}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_p} C(u_1, u_2, \dots, u_p) \\ &= \frac{\partial^p}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_p} F(x_1, x_2, \dots, x_p) \\ &= \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_p)}{f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_p(x_p)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

kopula PDF fonksiyonu, x_1, x_2, \dots, x_p rasgele değişkenlerinin bileşik PDF'inin, bu değişkenlerin marjinal PDF'lerinin çarpımına oranı olarak bulunmaktadır. Değişkenlerin bağımsız olması durumunda, bileşik PDF ($f(x_1, x_2, \dots, x_p)$) marjinal dağılımların çarpımına eşit olacağından copula PDF'i de 1'e eşit olur.

Kopula fonksiyonları kullanılarak bağımlılık yapısı ve değişkenlerin marjinal dağılımları ayrıştırıldığından, bu fonksiyonlar ile herhangi bir dağılıma sahip değişkenlerin bağımlılıkları modellenabilmektedir. Genelde Gauss olmayan dağılımların bağımlılıklarını modellemekte kullanılmasına rağmen bu metodoloji

Gauss için de çalışmaktadır. Bağımlılığın Gauss dağılımla ifade edilemeyeceği durumlar olabilmektedir. Örneğin, nadir gerçekleşen olaylar arasındaki bağımlılık Gauss ile ifade edilemez. Nadir gerçekleşen olayların ortaya çıkma olasılığının Gauss'a göre yüksek olduğu, Student-t dağılımı gibi kuyruklu bir dağılımla daha doğru modellenebilmektedir. Student-t kopula, uç olayların gerçekleşmesine imkan veren simetrik bir dağılıma sahiptir.

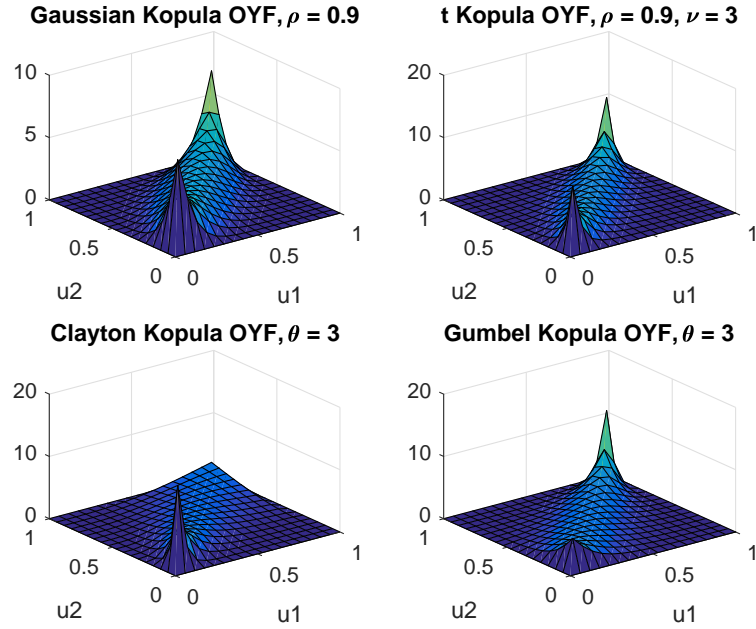
Eliptik, Archimedean ve uç-değerler olmak üzere 3 farklı çeşit kopula sınıfı vardır. Çok değişkenli dağılımları t ya da çok değişkenli Gauss gibi eliptik dağılımlar ile ifade edilebilen rasgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı doğrusaldır. Böylece, eliptik sınıf dağılımlar doğrusal korelasyon katsayısı kullanılarak ifade edilebilmektedir. Eliptik dağılımlar dışındaki dağılımlar için, doğrusal korelasyon katsayısı ile ifade etmek yanıltıcı sonuçlar ortaya çıkarabilmektedir. Bu sebeple, değişkenler arası korelasyonu ifade etmek için kopula teoremi kullanılmaktadır. Uç olaylarda simetrik olmayan şekilde olayların ortaya çıkma durumu olması durumunda da Student-t dağılımı da kısıtlayıcı olmaktadır. Bu durumda Archimedean kopulalar kullanılır. Archimedean kopula fonksiyonları çok değişkenli dağılımlardan türetilmeyen kapalı formları olan fonksiyonlardır. En bilindik Archimedean sınıfı kopulalar ise Clayton, Frank ve Gumbel kopula fonksiyonlarıdır. Özellikle finansta olumsuz olayların aynı anda gerçekleşme durumunu ele almak için simetrik olmayan kopula fonksiyonları ile modellemek önem taşımaktadır. Clayton kopula, negatif uçta pozitif uca göre daha yüksek bağımlılığa sahip olan simetrik olmayan bir kopuladır. Pozitif uçtaki bağımlılık katsayısı 0 iken, negatif uçtaki bağımlılık katsayısı $2^{-1/\theta}$ olarak ifade edilir (Eş. 2.17).

Gumbel kopula, pozitif uçta negatif uca göre daha yüksek bağımlılığa sahip olan simetrik olmayan bir kopuladır. Negatif uçtaki bağımlılık katsayısı 0 iken, pozitif uçtaki bağımlılık katsayısı $2 - 2^{1/\theta}$ olarak ifade edilir (Eş. 2.18).

$$C_{\theta}^{Clayton}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \left[\sum_{i=1}^d u_i^{-\theta} - p + 1 \right]^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \theta \in [0, \infty) \quad (2.17)$$

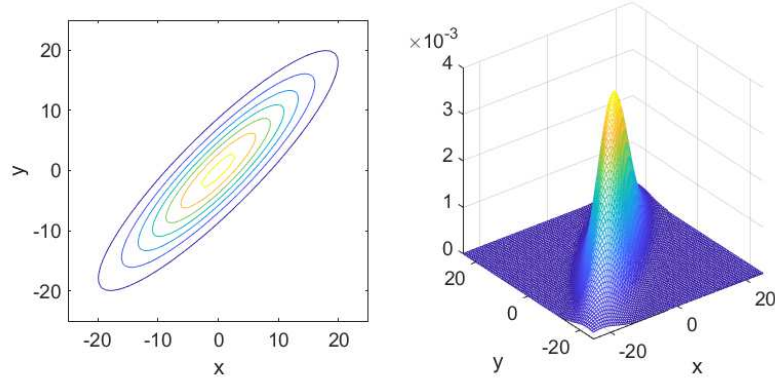
$$C_{\delta}^{Gumbel}(u_1, u_2, \dots, u_p) = e^{\left(-\sum_{i=1}^d (-\log u_i)^{\delta}\right)^{\frac{1}{\delta}}}, \quad \delta \in [1, \infty) \quad (2.18)$$

Marjinal dağılımların Gauss, bileşik CDF'lerin Gauss ile ifade edilmediği dağılımlar olabilmektedir. Her biri Gauss marjinal dağılıma sahip 2 rasgele değişkenin ($X \sim \mathcal{N}(0, 10)$, $Y \sim \mathcal{N}(0, 10)$) bağımlılıklarının Gauss, t, Gumbel ve Clayton fonksiyonları ile ifade edildiği durumlar için bileşik dağılımları Şekil 2.3 - Şekil 2.6'da verilmiştir. Bileşik PDF'leri elde etmede kullanılan $c(\cdot)$ kopula PDF'leri de Şekil 2.2'de verilmiştir.



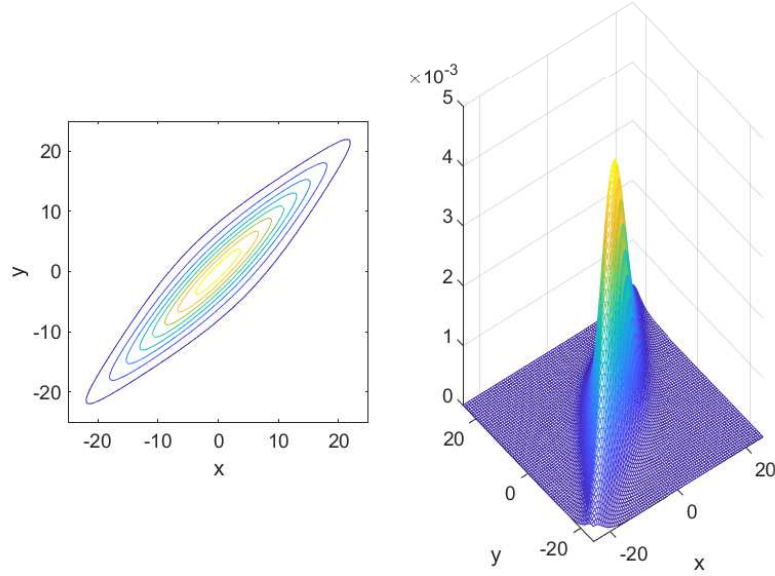
Şekil 2.2. Farklı kopulalara ait olasılık yoğunluk fonksiyonları

Gaussian Kopula, $\rho = 0.9$



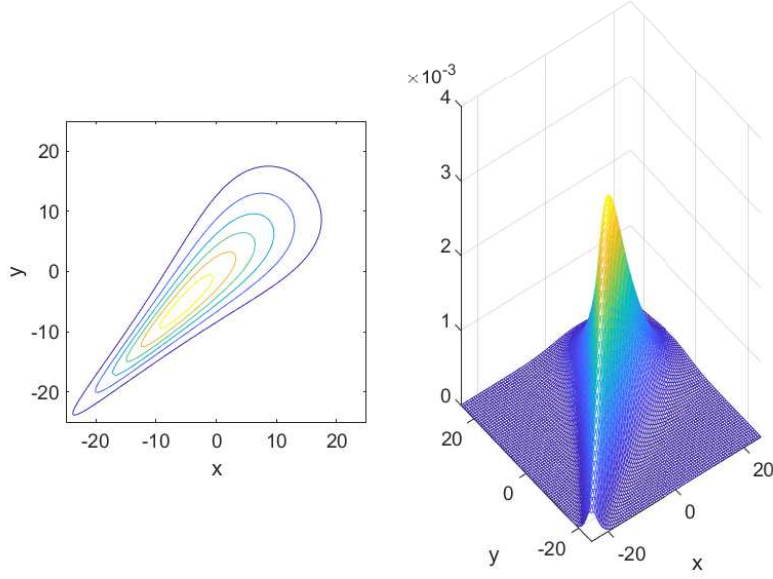
Şekil 2.3. Marjinal dağılımları Gauss olan x, y rasgele değişkenlerinin bağımlılıklarının Gauss kopula ile modellenmesi ile elde edilen bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonları

t Kopula, $\rho = 0.9, \nu = 3$



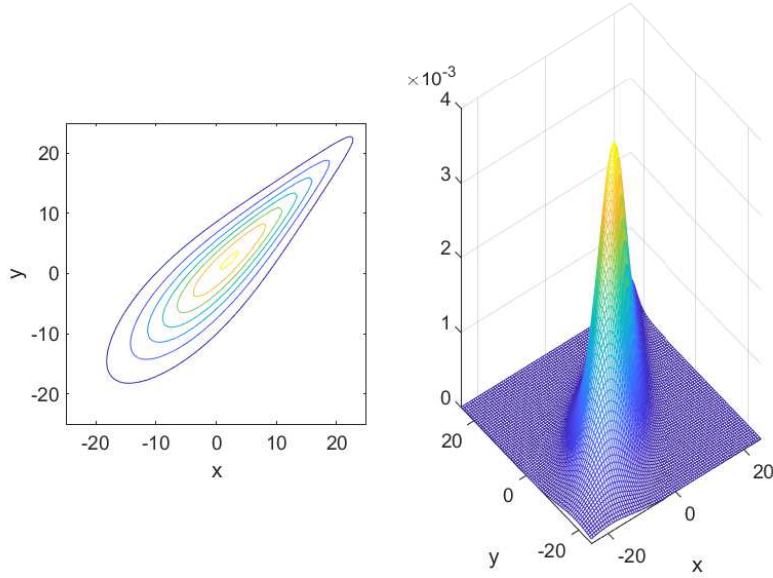
Şekil 2.4. Marjinal dağılımları Gauss olan x, y rasgele değişkenlerinin bağımlılıklarının Student-t kopula ile modellenmesi ile elde edilen bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonları

Clayton Kopula, $\theta = 3$



Şekil 2.5. Marjinal dağılımları Gauss olan x, y rasgele değişkenlerinin bağımlılıklarının Clayton kopula ile modellenmesi ile elde edilen bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonları

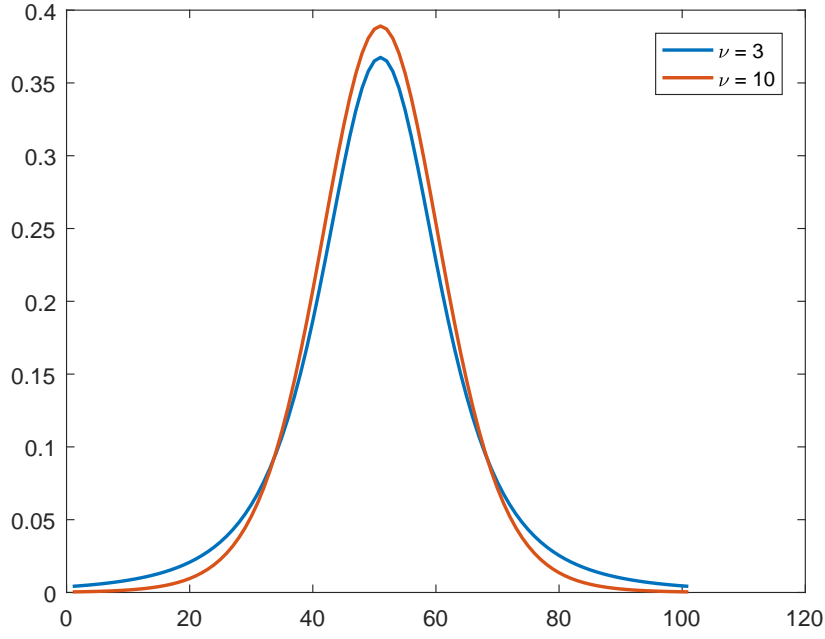
Gumbel Kopula, $\theta = 3$



Şekil 2.6. Marjinal dağılımları Gauss olan x, y rasgele değişkenlerinin bağımlılıklarının Gumbel kopula ile modellenmesi ile elde edilen bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonları

Sırasıyla $(F_1(\cdot), F_2(\cdot), \dots, F_p(\cdot))$ marjinal dağılımlarına sahip p bağımlı değişken (x_1, x_2, \dots, x_p) yaratmak istersek, öncelikle $[0, 1]^p$ 'de, istenilen bağımlılık yapısını modelleyen bir kopula fonksiyonu kullanılarak rasgele değişkenler üretilir (u_1, u_2, \dots, u_p) . Daha sonra üretilen bu değişkenler hangi dağılıma sahipse, ilgili dağılımların ters CDF'leri alınarak $(x_1 = F_1^{-1}(u_1), X_2 = F_2^{-1}(u_2), \dots, X_p = F_p^{-1}(u_p))$ bağımlı p değişken yaratılır.

Birbirine bağımlı iki rasgele değişkenin marjinal dağılımları t konum ölçeklendirme dağılımı olduğunda, ortak dağılımda iki boyutlu t konum ölçeklendirme olarak modellenebilmektedir. Bu modellemedeki kısıt, her bir marjinal t konum ölçeklendirme dağılımının kuyruklarındaki ağırlığın (serbestlik derecesi) aynı olması gereksinimidir. Ancak t konum ölçeklendirme marjinal dağılımlarının varyans ve ortalama değerleri ile normalize edilip standartlaştırılmasıyla elde edilen Student- t dağılımları, Şekil 2.7'deki gibi farklı serbestlik derecelerine (3, 5) sahip dağılımlar olabilmektedirler. Buradaki serbestlik derecesi dağılımın şeklini belirtmektedir. Copula teorisi kullanılarak çok değişkenli dağılım marjinaler ve bağımlılık yapısı ayrıştırıldığında her bir değişkenin dağılımı da daha doğru modellenebilmektedir.



Şekil 2.7. Farklı serbestlik derecelerine sahip t konum-ölçeklendirme dağılımı olasılık yoğunluk fonksiyonları

Kopula fonksiyonları herhangi bir dağılıma sahip tek değişkenli rasgele değişkenler setine uygulanabilmektedir. İki boyut için, Eş. 2.8’de verilen $F = F_1 \in F_\delta$, $F_2 = G \in G_\gamma$, $C \in C_\theta$ için, F , parametreleri $\delta = (\mu, \sigma^2)$ olan normal dağılım, G , parametreleri $\gamma = (\alpha, \lambda)$ olan gamma dağılımı, C ise Archimedian sınıfından Gumbel Copula (Eş. 2.18) olabilir.

Bu tez çalışmasında, bağımlılık modellerken Gauss ve t kopula kullanılmıştır.

2.1.1 Gauss Kopula

Eş. 2.8’de verilen $F(\cdot)$ çok değişkenli Gauss dağılım ($\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$) ise, $C(\cdot)$ de Gauss kopulasıdır. Dağılımın ortalaması ya da kovaryansı değişse bile, bağımlılık yapısı değişmeyeceğinden, kopula fonksiyonları değişmez. Bu nedenle kopula dağılımları ifade edilirken $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ ve $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{R}$ (korelasyon matrisi) olarak alınır.

$y_i, i = 1, 2, \dots, p$ değişkenlerinin standartlaştırılması ile elde edilen x_i değiş-

kenleri için, $F(y_1, y_2, \dots, y_p) = G(x_1, x_2, \dots, x_p)$ olduğundan,

$$F(y_1, y_2, \dots, y_p) = C(F_1(y_1), F_2(y_2), \dots, F_p(y_p)) \quad (2.19)$$

$$G(x_1, x_2, \dots, x_p) = C(G_1(x_1), G_2(x_2), \dots, G_p(x_p)) \quad (2.20)$$

$G(\cdot)$ çok değişkenli standart Gauss dağılımdır. $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ olduğunda, çok değişkenli Gauss dağılımı bağımsız standart normal değişkenlerden oluşuyor demektir. Gauss dağılımları için, değişkenler ilintisiz olduğunda aynı zamanda bağımsızdırlar. Bu durumda Eş. 2.8'de verilen kopula fonksiyonu sabit olur. Gauss kopula (Eş. 2.23), $[0, 1]^p$ 'de tanımlı bir dağılımdır. \mathbb{R}^p 'de tanımlı çok değişkenli Gauss dağılıma olasılık tümlev dönüşüm teoremi uygulayarak elde edilmektedir. Eş. 2.16 kullanılarak elde edilen Gauss kopula PDF'i

$$c_R^{Gauss}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \frac{\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |\mathbf{R}|}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}}}{\prod_{j=1}^p \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{1}{2} x_j^2}} = |\mathbf{R}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T (\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{I}) \mathbf{x}} \quad (2.21)$$

olarak verilmektedir.

$\mathbf{x} = (\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_p))$ için,

$$c_R^{Gauss}(u_1, u_2, \dots, u_p) = |\mathbf{R}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Phi^{-1}(u_1) \\ \Phi^{-1}(u_2) \\ \vdots \\ \Phi^{-1}(u_p) \end{bmatrix}^T \left[\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{I} \right] \begin{bmatrix} \Phi^{-1}(u_1) \\ \Phi^{-1}(u_2) \\ \vdots \\ \Phi^{-1}(u_p) \end{bmatrix}\right) \quad (2.22)$$

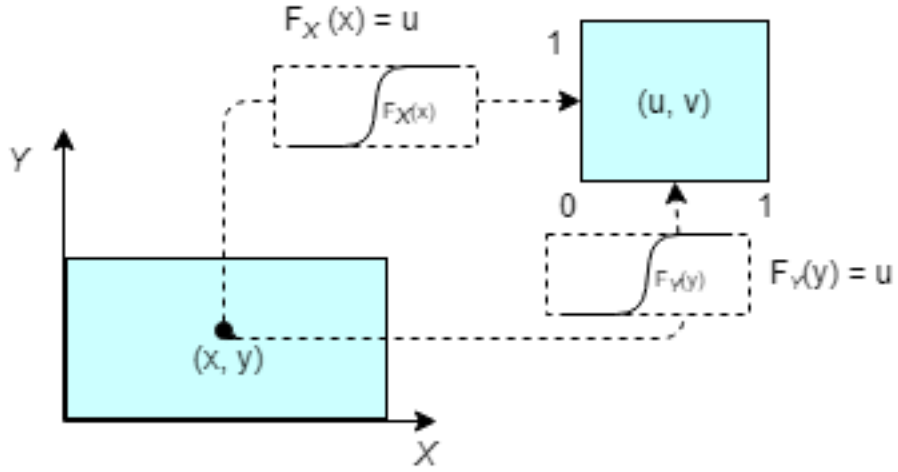
Gauss kopula gibi eliptik kopula fonksiyonlarının CDF'leri ($C_R(\mathbf{u})$) için analitik çözüm yoktur. Alttan ya da üstten sınırlandırılarak, nümerik integraller kullanılarak

$$C_R^{Gauss}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_p)) \quad (2.23)$$

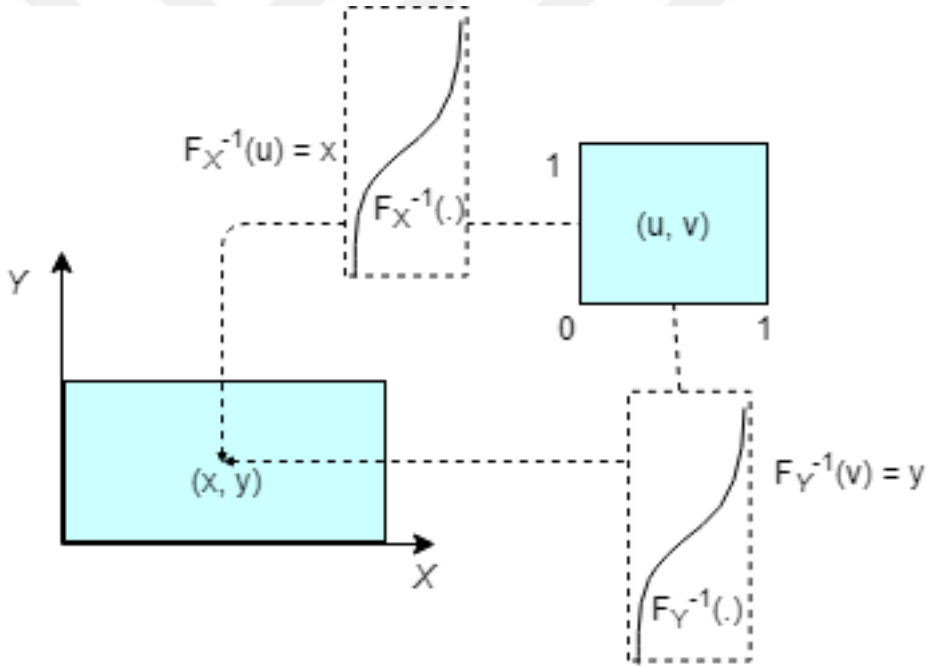
olarak yakınsanmıştır [34]. Eş. 2.23'de verilen R korelasyon matrisi, Φ^{-1} standart Gauss dağılımının ters CDF'i, Φ_R ise ortalaması sıfır vektörü olan, kovaryans matrisi (Σ) korelasyon matrisine (R) eşit olan çok değişkenli Gauss dağılımının ortak CDF'idir.

$$C_R^{Gauss}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_p)} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |\mathbf{R}|}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}} dx_1 dx_2 \dots dx_p \quad (2.24)$$

Rasgele değişkenlerin marjinal CDF'ini kullanarak (Şekil 2.8) birörnek dağılıma sahip değişkenler elde edilebilmektedir. Şekil 2.8'de her ikisi de Gauss dağılıma sahip iki boyutlu rasgele değişkenlerden birörnek dağılıma sahip rasgele değişkenler elde edildiği görülmektedir (F_X ve F_Y Gauss CDF'ler). Her iki değişken de marjinal Gauss CDF'lerinden geçirildiğinde birim karede iki boyutlu bir nokta elde edildiği görülmektedir. Benzer şekilde, birörnek dağılıma sahip rasgele değişkenlerden de istenilen dağılıma sahip rasgele değişkenler elde edilebilmektedir. İstenilen dağılıma sahip rasgele değişken, birörnek dağılıma sahip rasgele değişkenin, ilgili dağılımının ters CDF'inden geçirilmesiyle elde edilir. Şekil 2.9'da her ikisi de birörnek dağılıma sahip rasgele değişkenlerin ters Gauss CDF'ten geçirilmesiyle Gauss dağılıma sahip rasgele değişkenler elde edildiği görülmektedir.



Şekil 2.8. Gauss marjinal dağılımlara sahip rasgele x, y değişkenlerinden birörnek dağılıma sahip u, v değişkenleri elde etme (Olasılık Tümler Dönüşüm Teoremi)



Şekil 2.9. Birörnek dağılıma sahip rasgele u, v değişkenlerinden marjinal dağılımları Gauss olan x, y değişkenleri elde etme

2.1.2 Student-t Kopula (t Kopula)

Eş. 2.8'de verilen $F(\cdot)$ çok değişkenli t konum-ölçeklendirme dağılımı ($t_\nu(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$) ise, $C(\cdot)$ 'de Student-t kopuladır. $\boldsymbol{\mu}$ ortalama vektörü, $\boldsymbol{\Sigma}$ ise ölçeklendirme parametresidir. Kopula ifade edilirken $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ ve $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{R}$ (korelasyon matrisi) olarak alınır.

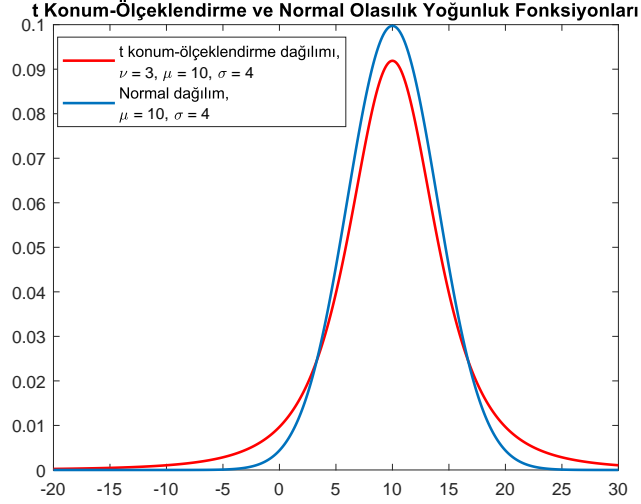
$\mathbf{R} = \mathbf{I}$ olunca, Student-t dağılımı için, ilintisiz rasgele değişkenler bağımsız olmalarını gerektirmediğinden, t-kopula yine de bağımlılığı ifade etmektedir.

$\mathbf{X} \sim t_\nu(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ için,

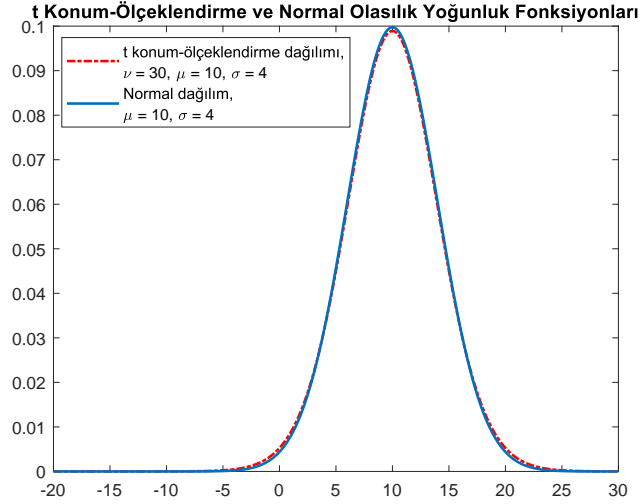
$$\begin{aligned} E[\mathbf{X}] &= \boldsymbol{\mu}, \quad \nu > 1 \\ \text{Var}(\mathbf{X}) &= \mathbf{S} = \frac{\nu}{\nu - 2} \boldsymbol{\Sigma}, \quad \nu > 2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

olur. \mathbf{S} kovaryans matrisidir. $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}$ olduğunda standart çok değişkenli Student-t dağılımıdır.

Standart Student-t dağılımı serbestlik derecesi parametresine bağlı olarak standart Gauss dağılımına göre kuyruklardaki ağırlığın fazla olduğu simetrik bir dağılımdır. Gauss kopulası daha çok ortalama etrafındaki rasgele değişkenlerin bağımlılığını modellemekte kullanılmaktadır. Student-t kopula, Gauss kopulasına göre ortak dağılımda şişman kuyruklara sahiptir. Bu da uç değerlerin ortak olasılığının Gauss'a göre daha yüksek olduğu anlamına gelir. Bu nedenle Student-t dağılımı uç değerlerin birlikte meydana gelme ihtimali olan durumları modele dahil ederek, kuyruklardaki bağımlılığın da hesaba katılması için kullanılabilir. t kopulanın serbestlik derecesi parametresinin değerine göre kuyruklardaki bağımlılığın seviyesi değişmektedir. Düşük serbestlik derecesi değerleri kuyruklarda güçlü bağımlılık olduğu anlamına gelmektedir. Buradaki değerleri alma olasılığı standart Gauss dağılımına göre yüksektir. Ortalama civarında değerleri alma olasılığı da standart Gauss dağılımına göre azalmaktadır (Şekil 2.10). Serbestlik derecesi arttıkça kuyruklardaki bağımlılık azalmaktadır. Serbestlik derecesi sonsuza giderken de Gauss kopulasına yakınsamaktadır.



Şekil 2.10. μ ve σ parametrelerine sahip Gauss ve standart Student-t dağılımının σ ile ölçeklendirilip, μ kadar kaydırılması ile elde edilen t konum-ölçeklendirme dağılımı



Şekil 2.11. t konum-ölçeklendirme dağılımının serbestlik derecesi artarken ($\nu \rightarrow \infty$) Gauss dağılıma yakınsaması

Standart Student-t dağılımının PDF'i

$$f(x|\nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad (2.26)$$

olarak verilmektedir. Standart Student-t dağılıma sahip olan x değişkenini

$$Y = \mu + \sigma X \quad (2.27)$$

şeklinde ölçeklendirilip, ortalama değerinin kaydırılması ile elde edilen t konum-ölçeklendirme dağılımına sahip y değişkenin dağılımı

$$f(y|\mu, \sigma, \nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu\sigma^2}} \left(1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad (2.28)$$

olarak verilmektedir.

Gauss kopula gibi, t kopula fonksiyonlarının CDF'leri ($C_{R,\nu}(\mathbf{u})$) için de analitik çözüm yoktur. Alttan ya da üstten sınırlandırılarak, nümerik integraller

$$C_{R,\nu}^T(u_1, u_2, \dots, u_p) = \mathcal{T}_{R,\nu}(\mathcal{T}_\nu^{-1}(u_1), \dots, \mathcal{T}_\nu^{-1}(u_p)) \quad (2.29)$$

olarak yakınsanmıştır. t kopula, $[0, 1]^{p'}$ 'de tanımlı bir dağılımdır. Eş. 2.29'da verilen R korelasyon matrisi, ν serbestlik derecesi, \mathcal{T}_ν^{-1} ortalaması 0, serbestlik derecesi ν , varyansı $\frac{\nu}{\nu-2}$ olan standart student-t dağılımın ters CDF'si, $\mathcal{T}_{R,\nu}$ ise ortalaması sıfır vektörü, ölçeklendirme parametresi Σ korelasyon matrisine (R) eşit olan çok değişkenli Student-t dağılımın ortak CDF'idir.

$$\begin{aligned} & C_{R,\nu}^T(u_1, u_2, \dots, u_p) \\ &= \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_2)} \dots \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_p)} \frac{\Gamma(\frac{\nu+p}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{(\pi\nu)^p |\mathbf{R}|}} \left(1 + \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+p}{2}} dx_1 dx_2 \dots dx_p \end{aligned} \quad (2.30)$$

$\mathbb{R}^{p'}$ 'de tanımlı çok değişkenli Student-t dağılıma olasılık tümlev dönüşüm te-
orimi uygulayarak elde edilmektedir. $\mathbf{x} = (\mathcal{T}_\nu^{-1}(u_1), \mathcal{T}_\nu^{-1}(u_2), \dots, \mathcal{T}_\nu^{-1}(u_p))$ için, t

kopula PDF'i

$$\begin{aligned}
c_{R,\nu}^T(u_1, u_2, \dots, u_p) &= \frac{\Gamma(\frac{\nu+p}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{(\pi\nu)^p|\mathbf{R}|}} \left(1 + \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}}{v}\right)^{-\frac{\nu+p}{2}} \\
&\quad \prod_{j=1}^p \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{(\pi\nu)}} \left(1 + \frac{x_j^2}{v}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \\
&= |\mathbf{R}|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+p}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2})^{p-1} \left(1 + \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}}{v}\right)^{-\frac{\nu+p}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})^p \prod_{j=1}^p \left(1 + \frac{x_j^2}{v}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}} \quad (2.31)
\end{aligned}$$

olarak verilmektedir.

2.2 Özbağlanımlı (AR) Model

Özbağlanımlı (AR) stokastik modeller, sinyal işlemede, zamanla değişen rasgele süreçleri tanımlamak için kullanılmaktadır. Bu model rasgele bir sürecin çıktısı olan değişkenin, aynı süreçten alınmış önceki çıktılarının doğrusal kombinasyonuna ve stokastik terime bağlı olduğunu söylemektedir.

Zamanda alınan ölçümler serisi x_t zaman serisi oluşturmaktadır. Ölçümler, zamanda farklı şekillerde alınmış olabilir. Her bir ölçüm yöntemi verinin farklı şekilde analiz edilmesini gerektirmektedir. Ölçümlerin eşit zaman aralıklarında alındığını varsayarak ($x_t : t \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z} = \dots, 0, 1, 2, \dots$), x_t 'nin ayırık zamanlı, doğrusal ve zamanla değişmeyen (LTI) bir sistemin girdisi, y_t 'nin ise bu sistemin çıktısı olduğunu düşünürsek, girdi ve çıktı arasındaki ilişki

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p} + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} \dots + b_q x_{t-q} \quad (2.32)$$

$$\sum_{k=0}^p a_k y_{t-k} = - \sum_{k=0}^q b_k x_{t-k}, \quad a_0 = 1 \quad (2.33)$$

olarak verilmektedir.

Başlangıç koşullarının 0 kabulü ile Eş. 2.33'ün Z-dönüşümü alınarak,

$$Y(z) \sum_{k=0}^p a_k z^{-k} = -X(z) \sum_{k=0}^q b_k z^{-k}$$

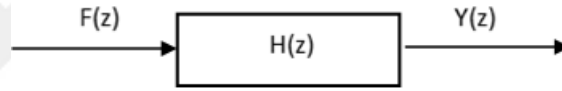
sistemin aktarım fonksiyonu $H(z)$,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}}$$

olarak elde edilmektedir.

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (2.34)$$

Eş. 2.34'teki ilişki Şekil 2.12'de verilmiştir.



Şekil 2.12. Transfer fonksiyonu ile giriş-çıkış ilişkisi

Eş. 2.32'de $p = 0$ olduğunda,

$$y_t = \sum_{k=0}^q b_k x_{t-k} \quad (2.35)$$

y_t , $q + 1$ uzunluğundaki pencere boyunca giriş sinyallerinin ağırlıklandırılmış toplamlarından elde edilir. Bu sistemin

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = -\sum_{k=0}^q b_k z^{-k} \quad (2.36)$$

olarak verilen aktarım fonksiyonu tür tüm-sıfır bir süzgeç modelidir. Tüm-sıfır bu süzgecin X süreciyle uyarımı sonucu elde edilen rasgele süreçler, kayan ortalamalı (MA) süreçlerdir. Böylece $p = 0$ için, sistem MA bir sistemdir ve y_t ,

q . dereceden $MA(q)$ bir sinyaldir.

Eş. 2.32'de $q = 0$ olduğunda,

$$y_t = b_0 x_t + \sum_{k=1}^p a_k y_{t-k} \quad (2.37)$$

y_t , p tane kendisi cinsinden değişkenin doğrusal ilişkisinin, t anındaki giriş değişkeni ile toplanmasıyla elde edilir. Bu sistemin

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} \quad (2.38)$$

olarak verilen aktarım fonksiyonu tüm-kutup bir süzgeç modelidir. a_k 'lar bağlantım katsayılarıdır. Tüm-kutup bu süzgecin X süreciyle uyarımı sonucu elde edilen rasgele süreçler, kayan özbağlanımlı (AR) süreçlerdir. AR süreç, X sürecini katsayıları $[a_1, a_2, \dots, a_p]$ olan tüm-kutup süzgeç ile süzgeçleme işlemidir. Böylece $q = 0$ için, sistem AR bir sistemdir ve y_t , p . dereceden $AR(p)$ bir sinyadır. Mertebesi p olan bir AR süreç, çıktıları geçmişteki p çıktılarına doğrusal olarak bağlı olan, zamanla değişen bir süreç için parametrik bir modeldir. Eş. 2.38'i, paydadaki kökleri kullanarak ayrıştırıp

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^p (1 - p_k z^{-1})} \quad (2.39)$$

olarak ifade ettiğimizde, p_k 'lar sistemin kutuplarını vermektedir. Stokastik AR modeller için x_t , ayrık zamanlı beyaz rasgele bir süreç olarak tanımlanmaktadır (Eş. 2.40).

$$E[x_t] = 0$$
$$E[x_t x_{t+h}] = \begin{cases} \sigma_x^2 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

$AR(1)$ süreçler, Markov süreç olarak da adlandırılmaktadır.

Süreçler için sürecin durağanlığı önemli bir kavramdır. Bir sürecin, birinci ve

ikinci momentleri zamanla değişmiyorsa, bu süreç geniş anlamda durağandır (WSS). Girdisi beyaz gürültü olan kararlı filtrelerin çıktıları WSS süreçlerdir. AR bir sürecin WSS olması için, Eş. 2.39'da verilen filtrenin tüm kutuplarının birim çember içinde yer alması gerekmektedir ($|p_k| < 1$).

Zamanda alınan ölçümler serisi $y_t, t \in T$, tüm h ve t_1, t_2, \dots, t_n değerleri için

$$f(y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_n}) = f(y_{t_1+h}, y_{t_2+h}, \dots, y_{t_n+h}) \quad (2.41)$$

eşitliğini sağlayan bir dağılıma sahipse durağandır. Durağanlık küme ortalaması cinsinden tanımlanmaktadır. Bir zaman serisi, ortalama değer fonksiyonu sabitse (Eş. 2.42) ve herhangi iki zamanda alınan veriler arası bağımlılık zamana bağlı olmayıp, zaman farkına bağlı ise (Eş. 2.43), durağandır.

$$E[y_t] = \mu \quad (2.42)$$

$$Corr(x_t, x_{t+h}) = \sigma(h) \quad (2.43)$$

AR modeller ses ve görüntü gibi sinyalleri modellemede de başarılıdır. Konuşma işleme alanında, sessiz harflerin ('s' gibi) telaffuzunu modellemek için kullanılmaktadır. Bu harfleri telaffuz ederken oluşan sinyal AR'a göre evrilmektedir. Bu tez çalışmasında her bir algılayıcının ölçümlerinin zamansal bağımlılığı AR süreç olarak modellenmiştir.

3. PARAMETRE BELİRSİZLİĞİ ALTINDA DİZİ KESTİRİMİ

Bu bölümde, Saklı Markov modeller, Saklı Markov modeller için dizi kestirimi yapmak için kullanılan Viterbi algoritması ve bu tez çalışmasında parametre belirsizliği altında dizi kestirimi yapmak için kullanılan PSP algoritması anlatılmaktadır.

3.1 Markov ve Saklı Markov Modelleri

Bir ayrık durumdan bir sonraki ayrık duruma geçiş rasgele olduğunda, Markov model bu rasgele olayın değişimini modellemek için kullanılmaktadır. Markov modellerde bir durumun olasılığı, geçmiş en son duruma bağlıdır. Markov konseptleri olasılıksal durum şemaları ile ifade edilmektedir (Şekil 3.1). Şekil 3.1'de tüm durumlar arası geçişin mümkün olduğu 3 durumlu bir Markov model örneği verilmiştir. Örneğin, durum 1'den durum 2'ye geçme olasılığı 0.2, durum 3'e geçme olasılığı ise 0.3'dür.

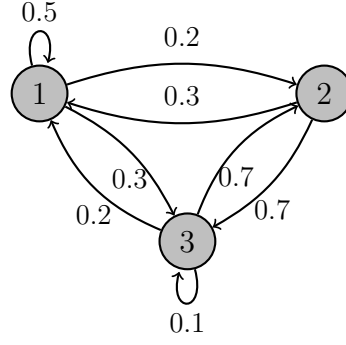
t . zamandaki durum, $\{q[t], q[t] \in \{S_1, S_2 \dots S_N\}\}$ ile ifade edildiğinde, ilk andaki durum

$$\pi_i = P(q[1] = S_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

olarak verilen olasılığa göre seçilir [2]. t . andaki durum ortaya çıkmış iken, $t+1$. andaki duruma geçiş olasılığı ise yalnızca t . andaki duruma bağlıdır (Eş. 3.2).

$$\begin{aligned} P(q[t+1] = S_j | q[t] = S_i, q[t-1] = S_k, q[t-2] = S_l \dots) \\ = P(q[t+1] = S_j | q[t] = S_i) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Markov modelden üretilmiş bu durum dizilimleri $q[1], q[2], \dots$ Markov zinciri olarak adlandırılmaktadır. $t+1$. andaki durumun S_j olma olasılığı da tüm olası durumlardan S_j durumuna geçme olasılıkları toplanarak elde edilmektedir (Eş.



Şekil 3.1. Durum geçişleri verilmiş üç durumlu Markov Model Örneği [2]

3.3).

$$P(q[t + 1] = S_j) = \sum_{i=1}^N P(q[t + 1] = S_j | q[t] = S_i) p(q[t] = S_i) \quad (3.3)$$

Sayılabılır sonlu durumlu Markov zincirleri aşağıdaki parametreler cinsinden tanımlanmaktadır:

- S_1, S_2, \dots, S_N , N durum
- Her bir elemanı i . durumdan j . duruma geçiş olasılığını ($a_{ij} = P(q[t] = S_i | q[t-1] = S_j)$) tanımlayan durum geçiş olasılık matrisi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} P(q[t] = S_1 | q[t-1] = S_1) & \dots & P(q[t] = S_1 | q[t-1] = S_N) \\ P(q[t] = S_2 | q[t-1] = S_1) & \dots & P(q[t] = S_2 | q[t-1] = S_N) \\ \vdots & & \vdots \\ P(q[t] = S_N | q[t-1] = S_1) & \dots & P(q[t] = S_N | q[t-1] = S_N) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}$$

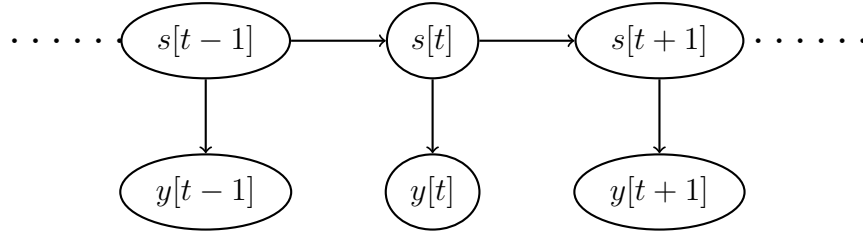
- Başlangıçta her bir durumda bulunma olasılığını (Eş. 3.1) tanımlayan başlangıç olasılıkları vektörü:

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} P(q[1] = S_1) \\ P(q[1] = S_2) \\ \vdots \\ P(q[1] = S_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_N \end{bmatrix}$$

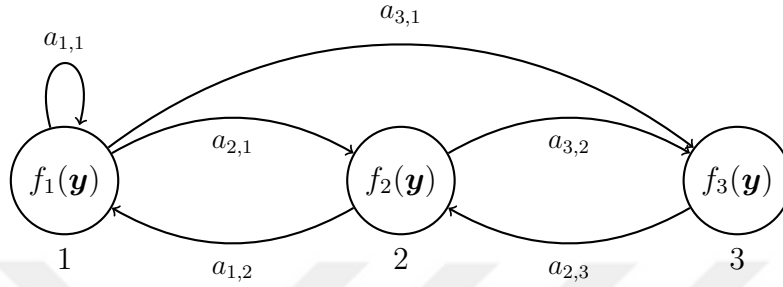
- Eş. 3.3'e göre hesaplanan, her bir durumda bulunma olasılığı vektörü:

$$\boldsymbol{p}[t] = \begin{bmatrix} P(q[t] = S_1) \\ P(q[t] = S_2) \\ \vdots \\ P(q[t] = S_N) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Saklı Markov modeller (SMM) ise, gözlenemeyen durumlu Markov sürecine göre oluşan sistemlerin istatistiksel modelidir. Markov modellerinde, durumlar gözlemci için doğrudan görülebilir ve bu yüzden tek parametresi geçiş olasılıklarıdır. SMM'de durum doğrudan görülemez, duruma bağlı çıkışlar görüldür. Her durum için olası rasgele çıkışların olasılıksal dağılımı mevcuttur. Oluşan model, arka planda işleyen, saklı ve gözlemlenemeyen bir istatistiksel süreç ile bu istatistiksel süreç sonucunda oluşan ve ölçülebilen gözlem dizilimi oluşturan başka istatistiksel süreçlerin birleşiminden oluşan çift katlı istatistiksel bir süreç halini alır ve Saklı Markov Modeli (SMM) olarak tanımlanır. Çıkış dizilimi, durumların sırası hakkında bilgi veren SMM tarafından üretilir. Saklı Markov mimarisi Şekil 3.2'de verilmiştir. $s[t]$ ($s[t] \in \{s[1], s[2], \dots\}$), t anındaki saklı durum, rasgele değişken $y[t]$, t anındaki $s[t]$ durumuna karşılık gözlem olarak tanımlanmıştır. t anındaki saklı değişken $s[t]$ yalnızca $s[t - 1]$ değişkenine bağlıdır. Benzer şekilde gözlenen $y[t]$ değişkeni sadece $s[t]$ durumuna bağlıdır. SMM t anında $s[t] = s$ durumuna geçiyse, gözlenen çıkış $y[t]$, $f(y[t]|s[t] = s) = f_s(y)$ dağılımına göre seçilen Y stokastik sürecinin bir çıktısı olur. Şekil 3.2'de, 3 du-



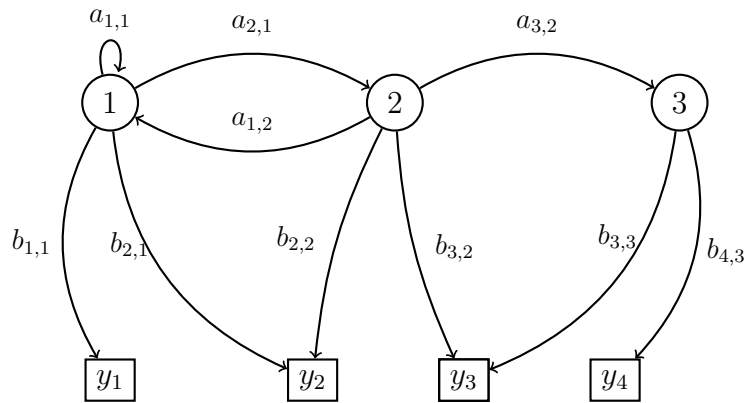
Şekil 3.2. Saklı Markov Model (SMM) Mimarisi



Şekil 3.3. Durum geçişleri verilmiş üç durumlu Saklı Markov Model (SMM) Örneği

rumlu ($s = 1, 2, 3$), 3 çıktılı SMM örneği, Şekil 3.4'de, 3 durumlu, 4 olası çıktılı SMM örneği verilmiştir.

Saklı Markov modelde sistemin herhangi bir t anında, hangi durumda olduğu bilinmez ancak sistemin içinde bulunduğu durumun tetiklediği gözlemi ortaya çıkarır.



Şekil 3.4. Üç durumlu ve 4 olası çıktılı Ayrık Saklı Markov Model (SMM) Örneği

Ayrık SMM aşağıdaki parametreler cinsinden tanımlanmaktadır:

- S_1, S_2, \dots, S_N , N durum
- y_1, y_2, \dots, y_M , M olası gözlem
- Her bir elemanı, i . durumdan j . duruma geçiş olasılığını ($a_{ij} = P(q[t] = S_j | q[t-1] = S_i)$) tanımlayan durum geçiş olasılık matrisi:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} P(q[t] = S_1 | q[t-1] = S_1) & \dots & P(q[t] = S_1 | q[t-1] = S_N) \\ P(q[t] = S_2 | q[t-1] = S_1) & \dots & P(q[t] = S_2 | q[t-1] = S_N) \\ & \vdots & \\ P(q[t] = S_N | q[t-1] = S_1) & \dots & P(q[t] = S_N | q[t-1] = S_N) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & & \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

- Her bir eleman i . durum için k . çıktının ortaya çıkma olasılığını ($b_{ik} = P(y_k | q[t] = S_i)$) tanımlayan gözlem olasılık matrisi:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} P(Y[t] = y_1 | q[t] = S_1) & \dots & P(Y[t] = y_1 | q[t] = S_N) \\ P(Y[t] = y_2 | q[t] = S_1) & \dots & P(Y[t] = y_2 | q[t] = S_N) \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ P(Y[t] = y_M | q[t] = S_1) & \dots & P(Y[t] = y_M | q[t] = S_N) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & \dots & b_{2N} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ b_{M1} & \dots & b_{MN} \end{bmatrix} \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

- Başlangıçta her bir durumda bulunma olasılığını tanımlayan başlangıç

olasılıkları vektörü:

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} P(q[1] = S_1) \\ P(q[1] = S_2) \\ \vdots \\ P(q[1] = S_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_N \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

SMM, ses, el yazısı, vücut hareketleri tanıma gibi konularda sıklıkla kullanılmaktadır. Örneğin, N kelimedenden oluşan bir sözlük için, ses verisinden üretilen öznitelik vektörlerinden oluşan çıktılar vardır. Bir kelimenin bu setteki hangi kelime ile eşleştiği bulurken, öznitelik vektörünün her bir A_i, B_i, π_i ($i = 1, 2, \dots, N$) için olabilirliği hesaplanır ve maksimum olabilirliğe sahip i seçilir.

3.2 En Büyük Olabilirlik Dizi Kestirimi (MLSE) ve Viterbi Algoritması

Viterbi algoritması, ayrık zamanlı, sınırlı durumdan oluşan Markov süreçten elde edilen durum dizilimini kestirme problemi için, özyinelemeli en iyi çözümdür. En büyük sonsal olasılık (MAP) kestirimi yapmaktadır. Viterbi algoritması, Kalman filtredeki gibi stokastik bir sürecin durumlarını takip etmektedir. Viterbi algoritmasının uygulanabilmesi için altta yatan süreç sınırlı-durum Markov olmalıdır [3].

Sınırlı sayıdaki M durum için, n . andaki durum x_n ise ($x_n \in 1, 2, \dots, M$), ardışık N zamanda ortaya çıkan durum dizilimi $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \dots, x_N)$ vektörüyle ifade edilmektedir. Bu durum diziliminde $k + 1$. zamanda x_{k+1} durumunda olma olasılığı yalnızca k . zamanda alınan duruma bağlı ise, süreç Markov'dur (Bölüm 3.1)(Eş. 3.8).

$$P(x_{k+1}|x_0, x_1, \dots, x_k) = P(x_{k+1}|x_k) \quad (3.8)$$

Bu model için, x_k 'dan x_{k+1} geçişi $\xi_k = (x_k, x_{k-1})$ olarak tanımlandığında, durum

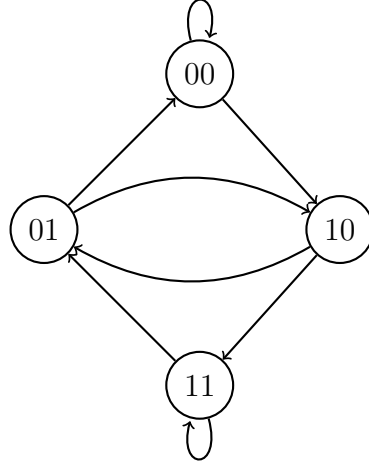
dizilimi x ve geçiş dizilimi $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K)$ arasında birebir bir iliŖi vardır. Süreç hafızasız bir gürültü içinde gözlendiği varsayıldığında, durumlara karŖılık gelen bir gözlem y vardır ve her bir andaki gözlem y_k durum geiŖine (ξ_k) bağlıdır (EŖ. 3.9).

$$P(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = P(\mathbf{y}|\xi) = \prod_{k=1}^K P(y_k|\xi_k) \quad (3.9)$$

SMM gibi saklı deĐiŖkenler içeren modellerde, dizilerin geçtiği kanalın tepkisinin bilinmesi durumunda, en büyük olabilirlik dizi kestirimi yönteminde (MLSE), alınan olmlerin altında yatan deĐiŖkenleri bulmak için, saklı durum dizilimi üzerinden gözlemlerin olabilirliği hesaplanıp en yüksek gözlem olabilirliğini veren saklı durum dizilimi seçilmektedir. Dizi uzunluğu arttığa test edilecek kombinasyonlar da üstel olarak artmaktadır. Bu nedenle, gözlem sayısı arttığa bu yöntem uygulanabilir olmaktan çıkmaktadır. Bunun yerine SMM'ler için en bilindik kod çözücü algoritma olan Viterbi kullanılarak, hesaplamalarda dizinin uzunluğu yerine kanalın uzunluğu hesaba katılarak iŖlem sayısı azalmaktadır. Viterbi algoritması ile MAP algoritması ile bulunabilecek en olası saklı durum dizilimi bulunabilmektedir.

Durum geiŖ olasılıkları ile ilgili önsel bilgiye sahip olunduğu durumda, Viterbi ile ML yerine MAP kestirimi yapılmaktadır. Hafızasız gürültü içindeki, ayrık zamanlı sonlu durum Markov süreçten elde edilen y gözlem dizilimi için, sonsal olasılık dağılımını $P(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ maksimum yapan durum dizilimi x bulunmaktadır. Algoritma ile MAP algoritmasının tüm diziyi algılamadaki hata olasılığı enkltlmektedir [3].

VA, hafızasız gürültü içinde, ayrık zamanlı, sonlu durum makinesinden üretilen çıktılarla durum diziliminin bulunmak istendiği tüm problemlere uygulanabilmektedir [3]. Durum makinesi $s = s_1, s_2, \dots$ durumlarına karŖılık $x = x_1, x_2, \dots$ ıkıŖlarını üretmektedir. ıkıŖlar gürültülü bir kanaldan geçtikten sonra gözlem-



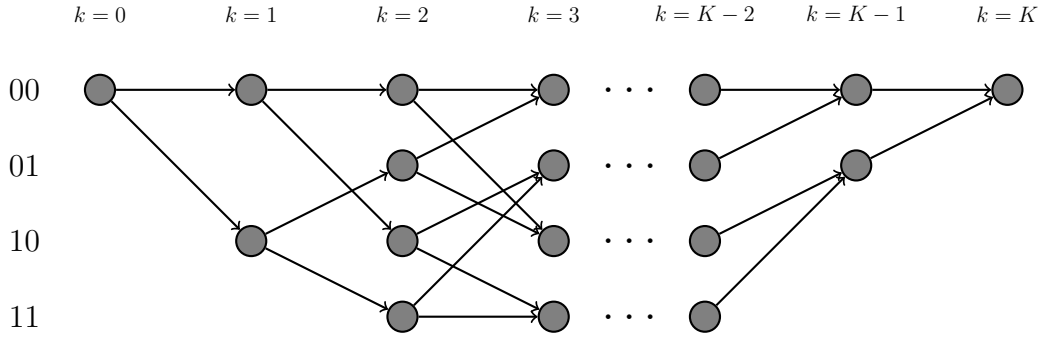
Şekil 3.5. Dört durumlu kaydıran yazmaç sürecinin durum diyagramı [3]

lenmektedir. Gürültünün eklenebilir gürültü olması durumunda gözlemler

$$r_k = x_k + n_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

olarak verilmiştir. MLSE problemi, alınan r için en olası durum dizilimini (x) bulmaktır. VA, bu problemi çözmek için kullanılmaktadır. r_k ve x_k arasındaki mesafe dal metriklerini ifade etmektedir.

Durum diyagramları ile ifade edilen süreçleri kafes diyagramları ile da açıklanabilmektedir. Kafes diyagramı zamanla değişen durumlar arasındaki geçişleri göstermek için kullanılmaktadır. Kaydıran yazmaç sürecinin 4 durum için durum ve kafes diyagramları sırasıyla Şekil 3.5 ve Şekil 3.6'da verilmiştir [3]. Kafes diyagramındaki her bir düğüm (00, 01, 10, 11), verilen andaki ($k, k \in 1, 2, \dots, K$) farklı bir durumu ifade eder. Her bir dal ise yeni bir duruma geçişi tanımlar. Kafes diyagramındaki her bir yol farklı durum dizilimine (x) karşılık gelir.



Şekil 3.6. Dört durumlu kaydıran yazmaç sürecinin kafes diyagramı [3]

Alınan gözlem dizilimi \mathbf{y} için, $P(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ (ML) ya da $P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 'yi maksimum yapan durum dizilimi \mathbf{x} bulunur. Bu durum dizilimi, kafes diyagramındaki uzunluğu $(-\ln P(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ minimum olan yoldur [3].

x_k dizisinin Markov ve y_k içindeki gürültünün k 'ya göre hafızasız olmasından dolayı $P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= P(\mathbf{x})P(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \\ &= \prod_{k=1}^K P(x_k|x_{k-1}) \prod_{k=1}^K P(y_k|x_{k-1}, x_k) \end{aligned} \quad (3.11)$$

olarak ifade edilebilmektedir. Her bir dalın (geçişin) uzunluğu

$$\lambda(\xi_k) = -\ln P(x_k|x_{k-1}) - \ln P(y_k|\xi_k) \quad (3.12)$$

gibidir. \mathbf{x} dizilimine karşılık gelen yolun toplam uzunluğu ise

$$-\ln P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^K \lambda(\xi_k) \quad (3.13)$$

gibidir. k . zamanda her bir düğümde biten uzunluğu

$$\lambda(\mathbf{x}_0^k) = \sum_{i=1}^k \lambda(\xi_i) \quad (3.14)$$

olarak verilen farklı yollar ($x_0^k = x_0, x_1, \dots, x_k$) vardır. Her bir düğüm x_k için en düşük uzunluğa sahip olan yol hayatta kalan yol ($\hat{x}(x_k)$) ve bu yollara karşılık gelen uzunluklar ($\Gamma(x_k) = \lambda[\hat{x}(x_k)]$) olarak gösterilmektedir.

Viterbi algoritması Algoritma 1'de verilmiştir.

Algoritma 1: Viterbi Algoritması

K : gözlem sayısı

İklendirme:

$$\hat{x}(x_1) = x_1,$$

$$\Gamma(x_1) = 0, \quad \Gamma(m) = \infty, \quad m \neq x_1$$

for $k=2:K$ **do**

- 1 | Tüm $\xi_k = (x_{k-1}, x_k)$ geçişleri için, dal metriklerini hesapla $\lambda[\xi_k = (x_{k-1}, x_k)]$,
 - 2 | Tüm x_k düğümleri için, minimum birikimli metriği bul

$$\Gamma(x_{k-1}, x_k) = \min_{x_k} [\Gamma(x_{k-1}) + \lambda(\xi_k)],$$
 - 3 | $\Gamma(x_k)$ 'ya karşılık gelen yolu hayatta kalan yol olarak seç $\hat{x}(x_k)$,
 - 4 | $\Gamma(x_k)$ ve $\hat{x}(x_k)$ sakla
- 5 **end**
-

3.3 Sağ Kalana Dayalı İşleme (PSP) Algoritması

PSP algoritması MLSE algoritmaları için genel bir çerçeve sunmaktadır. Bilinmeyen parametrelerin olması durumunda klasik Viterbi algoritması doğrudan kullanılamamaktadır. Sağ kalana dayalı işleme yöntemi ile bilinmeyen parametrelerin kestirimi de Viterbi algoritmasının içine gömülmektedir. Klasik Viterbi algoritması ile elde edilen her bir hayatta kalan yola karşılık gelen gözlem ve durum dizilimi kullanılarak, bilinmeyen parametreler için kestirim yapılmaktadır [35]. Böylece olası durum dizilimi ve bilinmeyen parametreler için eş zamanlı kestirim yapılabilmektedir.

Bilinmeyen parametrelerin ($\theta(x_k)$) hayatta kalan yollara dayalı kestirimi için, her bir düğümdeki durum için (x_k) bulunan hayatta kalan yola karşılık gelen durum

dizilimi ve gözlem dizilimi kullanılmaktadır (Eş. 3.15).

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(x_k) = G[\mathbf{y}(x_k), \hat{\mathbf{x}}(x_k)] \quad (3.15)$$

Eş. 3.15'de verilen $G[\cdot]$, x_k düğümündeki hayatta kalan yola ait durum dizilimini ($\hat{\mathbf{x}}(x_k)$) ve gözlem dizilimi ($\mathbf{y}(x_k)$) kullanan kestirici fonksiyonudur. Eş. 3.15'de bulunan hayatta kalan yollara dayalı kestirimler yapıldıktan sonra, ilgili parametreler dal metriklerini hesaplamada kullanılmaktadır (Eş. 3.16).

$$\lambda[\xi_{k+1} = (x_{k+1}, x_k)] = F[\xi_{k+1}, z_{k+1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}(x_k)] \quad (3.16)$$

Kod çözme kısmı ise klasik Viterbi ile aynıdır (Bölüm 3.2). Kod çözmenin aşamalarında hangi hayatta kalan yolun en iyi olduğu bilinmediği için, her bir düğümüne ait yolu genişletirken, ilgili düğümde kestirilen parametreler kullanılır. Optimum parametre kestirimleri kullanılmaması nedeniyle, PSP algoritması asimptotik olarak optimum bir algoritmadır.

4. PROBLEM FORMÜLASYONU

Bu tez çalışmasında, çoklu sensör bulunan ağlarda, eş zamanlı olarak farklı sensörlerden alınan ölçümlerin ve her bir sensörden ardışık zamanlarda alınan ölçümlerin bağımlı olması durumunda, parametre belirsizliği altında hipotez sınaması problemi ele alınmıştır. N gözlem süresince, stokastik bir süreçten alınan gözlemlerini füzyon merkezine gönderen K sensörden alınan ölçümlerle, bu stokastik sürecin durum dizilimi algılanmaya çalışılmıştır. n . zamandaki durum ikili rasgele değişken z_n ile ifade edilmektedir. $z_n = i$, n . zamanda durumun \mathcal{H}_i ($i = 0, 1$) olduğunu göstermektedir. Gözlem süresi boyunca oluşan rasgele ikili değişkenler $\mathbf{z} := (z_1, z_2, \dots, z_N)$ ile ifade edilmektedir. $n - 1$. zamandan n . zamana geçiş $\xi_n := (z_{n-1}, z_n)$ durum çifti ile gösterilmektedir. Durum dizilimi \mathbf{z} ile geçiş dizilimi $\xi_n := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ arasında birebir bağıntı bulunmaktadır. Durum \mathcal{H}_i 'den durum \mathcal{H}_j 'ye geçiş olasılığı $\pi_{ij} \in [0, 1]$ ($i, j = 0, 1$) ile gösterilmektedir. Tanımı gereği, tüm i durumları için, i . durumdan 0 durumuna ve 1 durumuna geçme olasılıkları toplamı 1'e eşit olur ($\sum_{j=0}^{j=1} \pi_{ij} = 1$). k . sensörden n . zamanda alınan ölçüm $y_{n,k}$ ($y_{n,k} \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, K$ ve $n = 1, 2, \dots, N$) ile gösterilmektedir. Tüm sensörlerden n . zamanda alınan ölçümler ise $\mathbf{y}_n := (y_{n,1}, y_{n,2}, \dots, y_{n,K})$ vektörü ile ifade edilmektedir.

Ele alınan problem için, eğer durum n . zamanda \mathcal{H}_i olarak değiştiyse ($\xi_n = (1 - i, i)$), n . zamandaki k . sensör gözleminin alınan tüm geçmiş gözlemlerden bağımsız olduğu varsayılmıştır. Bu durumda n . zamanda k . sensörün H_i hipotezi altındaki gözleminin CDF'i $F_i^{(k)}(y_{n,k}; \varphi_i^{(k)})$ ile gösterilmektedir. $\varphi_i^{(k)}$, k . sensörün H_i durumuna geçiş sonucunda dağılımının bilinmeyen parametresidir. Diğer bir yandan, eğer n . zamandaki durum \mathcal{H}_i , $n - 1$. zamandaki durum ile aynı ise ($\xi_n = (1 - i, i)$), n . zamandaki k . sensörün gözlemi yalnızca $n - 1$. zamandaki gözleme bağlı olup, diğer tüm geçmiş gözlemlerden bağımsız olduğu varsayılmıştır. Bu durumda n . zamanda k . sensörün \mathcal{H}_i hipotezi altındaki gözleminin koşullu CDF'i $F_i^{(k)}(y_{n,k} | y_{n-1,k}; \tilde{\varphi}_i^{(k)})$ ile gösterilmektedir. $\tilde{\varphi}_i^{(k)}$, k . sensörün H_i durumunda kalma sonucunda dağılımının bilinmeyen parametresidir.

Böylece, her bir sensörün ardışık zamanlarda aldığı ölçümler arası bağımlılık Markov olarak modellenenmektedir (Bölüm 3.1). Herhangi bir anda sensörler arası bağımlılık ise kopula fonksiyonları kullanılarak modellenmiştir (Bölüm 2.1). Eğer durum n . zamanda \mathcal{H}_i olarak geçiyse ($\xi_n = (1 - i, i)$), n . zamandaki sensör gözlemleri arasındaki bağımlılık *kopula* fonksiyonu ile Eş. 4.1'deki gibi modellenmiştir.

$$F_i(\mathbf{y}_n; \Phi_i, \lambda_{1,i}) = C_1 \left(F_i^{(1)}(y_{n,1}; \varphi_i^{(1)}), \dots, F_i^{(K)}(y_{n,K}; \varphi_i^{(K)}); \lambda_{1,i} \right) \quad (4.1)$$

Eş. 4.1'de $\lambda_{1,i}$, \mathcal{H}_i , $i = 0, 1$ hipotezine geçiş olduğu durumdaki kopula fonksiyonu $C_1(\cdot)$ 'in bilinmeyen parametreleri, $\Phi_i := \{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(K)}\}_{i=0,1}$ ise geçiş esnasındaki sensör gözlemlerinin dağılımlarının bilinmeyen parametreleridir. Eğer n . zamandaki durum \mathcal{H}_i , $n - 1$. zamandaki durum ile aynı ise ($\xi_n = (1 - i, i)$), n . zamandaki sensör gözlemlerinin bileşik CDF'leri Eş. 4.2'deki gibi modellenmiştir.

$$F_i(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}; \tilde{\Phi}_i, \lambda_{2,i}) = C_2 \left(F_i^{(1)}(y_{n,1} | y_{n-1,1}; \tilde{\varphi}_i^{(1)}), \dots, F_i^{(K)}(y_{n,K} | y_{n-1,K}; \tilde{\varphi}_i^{(K)}); \lambda_{2,i} \right) \quad (4.2)$$

Eş. 4.2'de $\lambda_{2,i}$, geçiş olmadığı durumdaki ($\xi_n = (1 - i, i)$) kopula fonksiyonu $C_2(\cdot)$ 'nin bilinmeyen parametreleri, $\tilde{\Phi}_i := \{\tilde{\varphi}^{(1)}, \tilde{\varphi}^{(2)}, \dots, \tilde{\varphi}^{(K)}\}_{i=0,1}$ ise geçiş olmadığı durumda, n . zamandaki sensör gözlemlerinin dağılımlarının bilinmeyen parametreleridir.

Sırasıyla $C_1(\cdot)$ ve $C_2(\cdot)$ kopula fonksiyonlarına ait bilinmeyen parametreler $\Lambda_1 := \{\lambda_{1,0}, \lambda_{1,1}\}$ ve $\Lambda_2 := \{\lambda_{2,0}, \lambda_{2,1}\}$ bilinmiyor ve kestirilecektir. Benzer şekilde, ardışık zamanlarda durum geçişi olduğu ve olmadığı durumlardaki gözlemlere ait dağılımların bilinmeyen parametreleri $\{\Phi, \tilde{\Phi}\}$ de kestirilecektir. Tüm bilinmeyen parametreler $\Theta := \{\Phi, \tilde{\Phi}, \Lambda_1, \Lambda_2\}$ ile ifade edilmektedir. Eş. 4.1 ve Eş. 4.2'nin K . dereceden türevi alındığında, sensör gözlemlerinin bileşik PDF'leri,

n . zamanda \mathcal{H}_i , $i = 0, 1$ hipotezine geçiş olduğu durum için ($\xi_n = (1 - i, i)$) Eş. 4.3'de, \mathcal{H}_i , $i = 0, 1$ hipotezinde kalma durumu için ($\xi_n = (i, i)$) Eş. 4.4'de verilmiştir.

$$f_i(\mathbf{y}_n; \Theta) = \left(\prod_{k=1}^K f_i^{(k)}(y_{n,k}; \varphi_i^{(k)}) \right) \times c_1 \left(F_i^{(1)}(y_{n,1}; \varphi_i^{(1)}), \dots, F_i^{(K)}(y_{n,K}; \varphi_i^{(K)}); \lambda_{1,i} \right) \quad (4.3)$$

$$f_i(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}; \Theta) = \left(\prod_{k=1}^K f_i^{(k)}(y_{n,k} | y_{n-1,k}; \tilde{\varphi}_i^{(k)}) \right) \times c_2 \left(F_i^{(1)}(y_{n,1} | y_{n-1,1}; \tilde{\varphi}_i^{(1)}), \dots, F_i^{(K)}(y_{n,K} | y_{n-1,K}; \tilde{\varphi}_i^{(K)}); \lambda_{2,i} \right) \quad (4.4)$$

Eş. 4.3 ve 4.4'de verilen $c_j(\cdot)$, $C_j(\cdot)$ 'in $j = 1, 2$ için K . dereceden türevidir. Verilen bir durum dizilimi \mathbf{z} için, tüm sensörlerin ölçüm süresi boyunca gözlemlerinin ($\mathcal{Y} := (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N)$) bileşik PDF'i

$$p(\mathcal{Y} | \mathbf{z}; \Theta) = \prod_{n=1}^N p(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}, z_n, z_{n-1}; \Theta), \quad (4.5)$$

gibidir. Eş. 4.5'de verilen $p(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}, z_n, z_{n-1}; \Theta)$ Eş. 4.6'da açıklanmıştır.

$$p(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}, z_n, z_{n-1}; \Theta) = f_0(\mathbf{y}_n; \Theta)^{z_{n-1}(1-z_n)} f_0(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}; \Theta)^{(1-z_{n-1})(1-z_n)} \times f_1(\mathbf{y}_n; \Theta)^{(1-z_{n-1})z_n} f_1(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}; \Theta)^{z_{n-1}z_n} \quad (4.6)$$

İlk gözlem için $z_1 = 1 - z_0$ (durum geçişi) olduğu varsayılmıştır.

Füzyon merkezinin görevi, bilinmeyen parametreler Θ altında, tüm ölçüm setine (\mathcal{Y}) dayanarak her bir zamanda $n = 1, \dots, N$ durumu algılamaktır. Bu durumda standart yaklaşım olarak, tüm ölçümler verildiğinde hipotezlerin sonsal olasılıklarına göre seçim yapılabilir. Eğer $p(z_n = 0 | \mathcal{Y}, \hat{\Theta}) > p(z_n = 1 | \mathcal{Y}, \hat{\Theta})$ koşulu sağlanıyorsa \mathcal{H}_0 , sağlanmıyorsa \mathcal{H}_1 seçilir. $\hat{\Theta}$ bilinmeyen parametrelerin kestirimini ifade etmektedir. Ancak bu çözümde, her bir sensörün gözlemleri-

nin zamanda bağımlılığı nedeniyle, işlem sayısı N ile birlikte üssel olarak artmaktadır (2 hipotez için $O(2^N)$). Bu amaçla literatürde bilinmeyen parametreleri kestirmek için EM algoritması kullanılmıştır [1]. n . zamandaki durum için sonsal olasılıkları, yalnızca $n - 1$. ve n . zamandaki sensör gözlemleri ele alınarak yaklaşık olarak hesaplanmıştır. Eğer $p(z_n = 0 | \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1}, \hat{\Theta}) > p(z_n = 1 | \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1}, \hat{\Theta})$ koşulu sağlanıyorsa \mathcal{H}_0 , sağlanmıyorsa \mathcal{H}_1 seçilir. $\hat{\Theta}$, EM algoritmasının yatkınsadığı Θ kestirim sonucudur. [1]'de EM algoritmasının her beklenti (E) adımıda sonsal olasılıklarının gerçek değerleri yerine yakın değerlerinin kullanılması dışında, yaklaşık değerleri hesaplama yolu da diğer bir dezavantajıdır. Makalede, sonsal olasılıkları $i = 0, 1$ için $p(z_n = i | \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1}, \hat{\Theta}) = p(z_n = i, z_{n-1} = 1 | \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1}, \hat{\Theta}) + p(z_n = i, z_{n-1} = 0 | \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1}, \hat{\Theta})$ hesabı kullanılmış ancak $p(z_n = i | \mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{y}_n, \hat{\Theta}) = p(z_{n+1} = 1, z_n = i | \mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{y}_n, \hat{\Theta}) + p(z_{n+1} = 0, z_n = i | \mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{y}_n, \hat{\Theta})$ olarak hesaplamak da mümkündür. İki farklı şekilde hesaplamada farklı sonuçlar elde edilmesi durumunda belirsizliğin nasıl çözüldüğü açıklanmamıştır.

Bu tez çalışmasında literatürdeki çalışmalara alternatif bir yöntem önerilmiştir. Gözlemlerin sonuna kadar olan durum dizilimi z , genelleştirilmiş en büyük sonsal olasılık (MAP) yaklaşımı ile sezme mümkündür (Eş. 4.7). z ile ifade edilen durum, rasgele değişken, Θ ise deterministik kabul modellenmiştir.

$$\hat{z} = \arg \max_z \max_{\Theta} \log p(\mathcal{Y}, z; \Theta), \quad (4.7)$$

Eş. 4.7'de verilen z , uzunluğu N olan ikili vektördür. Stokastik süreç Markov yapısında olduğundan $p(\mathcal{Y}, z; \Theta)$

$$\begin{aligned} p(\mathcal{Y}, z; \Theta) &= p(z)p(\mathcal{Y}|z; \Theta) \\ &= \prod_{n=1}^N \underbrace{p(z_n | z_{n-1})}_{=\pi_{z_{n-1}, z_n}} p(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}, z_n, z_{n-1}; \Theta) \end{aligned} \quad (4.8)$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. O halde, Eş. 4.8 durum diyagramı ve kafes diyagramı ile bağdaştırılabilmektedir (Şekil 4.1). Kafes diyagramındaki her bir dal

(geçiş) için metrik

$$\gamma(\xi_n; \Theta) := -\log \pi_{\xi_n} - \log p(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}, \xi_n; \Theta), \quad (4.9)$$

olarak tanımlanabilmektedir. Bu durumda Eş. 4.7, Eş. 4.9'u kullanılarak

$$\hat{z} = \arg \min_z \min_{\Theta} \sum_{n=1}^N \gamma(\xi_n; \Theta). \quad (4.10)$$

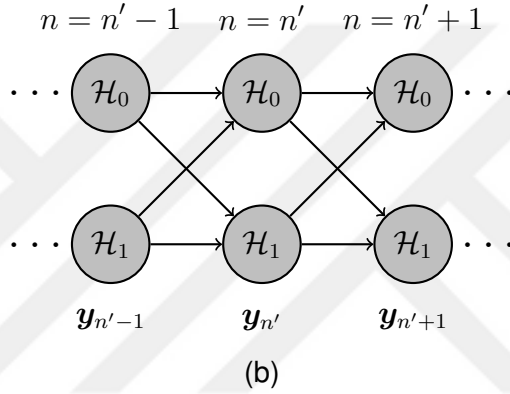
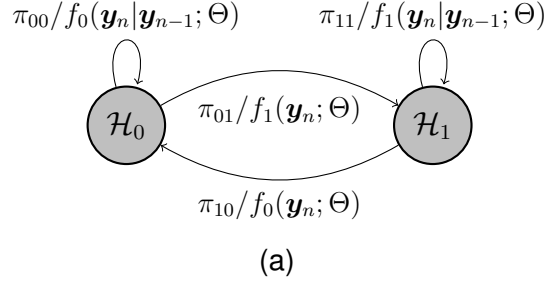
şeklinde ifade edilebilmektedir. Eş. 4.10'da Θ üzerinden eniyileme yaparsak, Eş. 4.10'daki eniyileme problemi, gözlemlere dayanarak kafes diyagramındaki en düşük toplam dal metriğini veren yolu bulmaya denk gelmektedir. VA, bu problem için nümerik olarak etkin olan bir çözüm sunmaktadır (Bölüm 3.2) [3,31]. Ancak bilinmeyen parametreler olduğu için geçiş metrikleri (Eş. 4.9) VA ile doğrudan hesaplanamamaktadır. Bu sebeple, klasik Viterbi algoritmasını doğrudan kullanmak yerine, sağ kalan yolları kullanarak parametre kestirimi yapıp, geçişlerin hesaplanmasına ek bilgi sağlayan PSP algoritması kullanılmıştır (Bölüm 3) [35].

$\mathbf{z}_1^n := (z_1, \dots, z_n)$, n . zamana kadarki durum dizilimi olduğunu varsayalım. Bu durumda \mathbf{z}_1^n kafes diyagramında z_1 durumundan başlayıp z_n durumunda son bulan, metriği

$$\gamma(\mathbf{z}_1^n; \Theta) = \sum_{m=1}^n \gamma(\xi_m; \Theta). \quad (4.11)$$

olarak verilen bir yola karşılık gelir (Bölüm 3.2). z_n düğümünde biten en düşük metriğe sahip olana sağ kalan yol denir ve $\hat{z}(z_n)$ ya da $\hat{\xi}(z_n)$ ile gösterilir. Bu yolların biriken metrikleri de $\Gamma(z_n) = \gamma(\hat{z}(z_n); \Theta)$ ile gösterilir. Bu tez çalışmasında ele alınan problem için, Markov zincirinde 2 farklı durum olduğundan, n . zamanda $z_n = 0$ ve $z_n = 1$ düğümlerinde biten 2 sağ kalan yol bulunur.

$n > 1$ olan tüm zamanlarda, VA her bir durum z_n için, yalnızca sağ kalan yolları ve onların biriken metriklerini saklamaktadır.



Şekil 4.1. (a) Markov zincirlerinin durum diyagramı. Döğümlemler durumları, dallar ise geçişleri temsil etmektedir. Gözlemler bitene kadar sürecin durum geçişlerinde izlediği yol, bu durum diyagramına göreler. π_{ij} , $i, j = 0, 1$ için \mathcal{H}_i durumundan \mathcal{H}_j durumuna geçiş olasılığıdır. $f_i(\mathbf{y}_n; \Theta)$, n . zamanda durum \mathcal{H}_{1-i} 'den durum \mathcal{H}_i 'ye geçiş olduysa $(\xi_n = (1 - i, i))$, \mathbf{y}_n gözlemlenme olasılığıdır. $f_i(\mathbf{y}_n|\mathbf{y}_{n-1}; \Theta)$, n . zamanda durum değışmeyip durum \mathcal{H}_i 'de kaldıysa $(\xi_n = (i, i))$, \mathbf{y}_n gözlemlenme olasılığıdır. (b) (a)'da verilen Markov zinciri için gözlem diziliminin $(\dots, \mathbf{y}_{n'-1}, \mathbf{y}_{n'}, \mathbf{y}_{n'+1}, \dots)$ çatı diyagramı. Her döğüm verilen bir zamandaki farklı bir durumu, her dal bir sonraki zam anda yeni bir duruma geçişini temsil etmektedir. Her durum dizilimi z çatı diyagramında biricik bir yola karşılık gelmektedir.

Özyinelemeli VA $n + 1$. zamana ilerlerken, n . zamandaki tüm sağ kalan yollardan çıkan dallara karşılık gelen metrikleri ($\gamma(\xi_{n+1}; \Theta)$) hesaplar ve her z_{n+1} . durumu için biriken metriklerden ($\Gamma(z_n) + \gamma(\xi_{n+1}; \Theta)$) en düşük olanını $n + 1$. zamanı için sağ kalan yol olarak seçer (Eş. 4.12).

$$\Gamma(z_{n+1}) = \min_{z_n} [\Gamma(z_n) + \gamma(\xi_{n+1}; \Theta)], \quad (4.12)$$

Eş. 4.12'deki minimumu bulma işlemi, güncel durum z_n ve z_n druumundan z_{n+1} durumuna geçiş (ξ_{n+1}) için tanımlanan metrik üzerinden gerçekleştirilir. $\Gamma(z_{n+1})$ ve bu minimum metriğe karşılık gelen sağ kalan yol her bir durum z_{n+1} için saklanmaktadır [3].

Bilinmeyen parametrelerin olması durumunda, PSP algoritması, sağ kalan yollar bulunduğundan sonra, bu yollara karşılık gelen veriler ile yaptığı parametre kestirimini VA içine gömerek standart VA'ya yaklaşım sağlamaktadır [35]. n . zamanda sağ kalan her bir yol için ayrı bir kestirici atanır ve bilinmeyen parametreler vektörü Θ 'nın sağ kalana dayalı kestirimi sağ kalan yol $\hat{z}(z_n)$ 'e dayanarak

$$\hat{\Theta}(z_n) = \arg \min_{\Theta} \gamma(\hat{z}(z_n); \Theta), \quad z_n = 0, 1. \quad (4.13)$$

olarak hesaplanmaktadır. Parametre kestiriminden sonra, her bir sağ kalan yol kendi durum dizilimi kullanılarak kestirilmiş parametreleri kullanılarak genişletilmektedir. Özetle, her bir sağ kalana dayalı parametre kestirimi, kestirimin yapıldığı durumdan çıkan dallar için geçiş metrikleri hesabında ($\gamma(\xi_{n+1}; \hat{\Theta}(z_n))$) kullanılır ve algoritma standart VA'da olduğu gibi Eş. 4.12'deki yineleme ile devam eder.

Bu tez çalışmasında sensörler arası bağımlılığı modellemek için Gauss kopula ve Student'ın t kopulası model olarak kullanılmıştır.

4.1 Gauss Kopula ile Bağımlılık Modelleme

Bu bölümde sensörlerin marjinal dağılımlarının Gauss olduğu, sensörler arası bağımlılığın Gauss kopulası ile modellendiği durum ele alınmıştır. Eğer durum n . zamanda \mathcal{H}_i olarak değiştiyse ($\xi_n = (1-i, i)$), k . sensörün n . zamandaki gözleminin dağılımının bilinmeyen ortalama değeri $\varphi_i^{(k)}$, bilinen varyans değeri $\nu_i^{(k)}$ olan Gauss $f_i^{(k)}(y_{n,k}; \varphi_i^{(k)}) \sim \mathcal{N}(\varphi_i^{(k)}, \nu_i^{(k)})$ olduğu varsayılmıştır. Öte yandan, eğer n zamanda durum değişmediyse ($\xi_n = (i, i)$), zamanda bağımlı gürültüler birince dereceden AR süreç olarak modellenmiştir (Eş. 4.14).

$$a_{n,k} = \alpha a_{n-1,k} + \omega_n^{(k)} \quad (4.14)$$

Eş. 4.14'de verilen α biliniyor varsayılmıştır. $\omega_n^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, \nu_i^{(k)})$ ise zamanda (n) bağımsız olan beyaz Gauss rasgele değişkenleridir. Durum geçişi olmadığı durumdaki n . zamandaki k . sensör gözlemi $y_{n,k}$ ise Eş. 4.15'de verilmiştir.

$$y_{n,k} = a_{n,k} + \varphi_i^{(k)} \quad (4.15)$$

Eş. 4.14 ve Eş. 4.15'i kullanarak, n . zamanda durum geçişi olmadığında, $y_{n-1,k}$ verildiği zaman $y_{n,k}$ dağılımı $f_i^{(k)}(y_{n,k}|y_{n-1,k}; \varphi_i^{(k)}) \sim \mathcal{N}(\alpha y_{n-1,k} + \varphi_i^{(k)}(1-\alpha), \nu_i^{(k)})$ olarak bulunmaktadır. Sensörlerin gözlemleri arası bağımlılık ($c_1(\cdot)$) (Eş. 4.3) ve $c_2(\cdot)$ (Eş. 4.4) kopula fonksiyonları Gauss kopulası kullanılarak modellenmiştir.

Gauss kopulası

$$c(u_1, \dots, u_K; \mathbf{R}) = |\mathbf{R}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T (\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{I}_K) \mathbf{x} \right], \quad (4.16)$$

olarak ifade edilmektedir. Gauss kopulası, korelasyon matrisi \mathbf{R} ile ifade edilmektedir (Eş. 2.22). Eş.4.16'daki terimlerin açıklaması aşağıdaki gibidir.

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_K)^T$, $x_i = \mathcal{G}^{-1}(u_i)$, \mathcal{G} : standart Gauss CDF,

\mathbf{I}_K , $K \times K$ birim matris,

\mathbf{R} , köşegen elemanları 1, her bir elemanı $\in [-1, 1]$ olan simetrik kesin pozitif

korelasyon matrisi

$|R|$, R 'nin determinanı

Gauss kopulası $c_j(\cdot)$ 'nin \mathcal{H}_i hipotezi altındaki korelasyon matrisi $\lambda_{j,i}$ ($j = 1, 2$ ve $i = 0, 1$) ile ifade edilmektedir.

$\lambda_{1,0} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0$ hipotez geçişindeki kopula $c_1(\cdot)$ 'in korelasyon matrisi

$\lambda_{1,1} : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_1$ hipotez geçişindeki kopula $c_1(\cdot)$ 'in korelasyon matrisi

$\lambda_{2,0} : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$ hipotez geçişi olmadığı durumdaki kopula $c_2(\cdot)$ 'nin korelasyon matrisi

$\lambda_{2,1} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ hipotez geçişi olmadığı durumdaki kopula $c_2(\cdot)$ 'nin korelasyon matrisi

Yukarıda verilen ifadeler için Eş. 4.3, \mathcal{H}_0 hipotezi için Eş. 4.17'de, \mathcal{H}_1 hipotezi için Eş. 4.18'de verilmiştir.

$$f_0(\mathbf{y}_n; \Theta) = \left(\prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu_0^{(k)}}} \exp\left(-\frac{x_0^{(k)}(n)^2}{2}\right) \right) \times |\lambda_{1,0}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}_0(n)^T (\lambda_{1,0}^{-1} - \mathbf{I}_K) \mathbf{x}_0(n)\right) \quad (4.17)$$

$$f_1(\mathbf{y}_n; \Theta) = \left(\prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu_1^{(k)}}} \exp\left(-\frac{x_1^{(k)}(n)^2}{2}\right) \right) \times |\lambda_{1,1}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}_1(n)^T (\lambda_{1,1}^{-1} - \mathbf{I}_K) \mathbf{x}_1(n)\right) \quad (4.18)$$

Yukarıda verilen ifadeler için Eş. 4.4, \mathcal{H}_0 hipotezi için Eş. 4.19'da, \mathcal{H}_1 hipotezi için Eş. 4.20'de verilmiştir.

$$f_0(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}; \Theta) = \left(\prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu_0^{(k)}}} \exp\left(-\frac{\tilde{x}_0^{(k)}(n)^2}{2}\right) \right) \times |\lambda_{2,0}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_0(n)^T (\lambda_{2,0}^{-1} - \mathbf{I}_K) \tilde{\mathbf{x}}_0(n)\right) \quad (4.19)$$

$$f_1(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}; \Theta) = \left(\prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu_1^{(k)}}} \exp\left(-\frac{\tilde{\mathbf{x}}_1^{(k)}(n)^2}{2}\right) \right) \times |\lambda_{2,1}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_1(n)^T (\lambda_{2,1}^{-1} - \mathbf{I}_K) \tilde{\mathbf{x}}_1(n)\right) \quad (4.20)$$

Eş. 4.17, Eş. 4.18, Eş. 4.19, Eş. 4.20 ve Eş. 4.9'u kullanarak z_{n-1} durumundan z_n durumuna geçişteki dal metriği

$$\begin{aligned} \gamma(\xi_n; \Theta) = & -\log \pi_{\xi_n} + 0.5K \log 2\pi \\ & + 0.5(1 - z_n) \sum_{k=1}^K \log \nu_0^{(k)} + 0.5z_n \sum_{k=1}^K \log \nu_1^{(k)} \\ & + 0.5z_{n-1}(1 - z_n) (\log |\lambda_{1,0}| + \mathbf{x}_0(n)^T \lambda_{1,0}^{-1} \mathbf{x}_0(n)) \\ & + 0.5(1 - z_{n-1})(1 - z_n) (\log |\lambda_{2,0}| + \tilde{\mathbf{x}}_0(n)^T \lambda_{2,0}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0(n)) \\ & + 0.5(1 - z_{n-1})z_n (\log |\lambda_{1,1}| + \mathbf{x}_1(n)^T \lambda_{1,1}^{-1} \mathbf{x}_1(n)) \\ & + 0.5z_{n-1}z_n (\log |\lambda_{2,1}| + \tilde{\mathbf{x}}_1(n)^T \lambda_{2,1}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_1(n)), \end{aligned} \quad (4.21)$$

olarak bulunmaktadır. Eş. 4.21'de verilen $x_i^{(k)}(n)$, $n - 1$. zamanda \mathcal{H}_{1-i} hipotezi gözleyip, n . zamanda \mathcal{H}_i hipotezine geçiş olması durumunda, k . sensörün n . zamanda \mathcal{H}_i hipotezi altındaki ölçümünün normalleştirilmesiyle

$$x_i^{(k)}(n) = \mathcal{G}^{-1}(F_i^{(k)}(y_{n,k}; \varphi_i^{(k)})) = \frac{y_{n,k} - \varphi_i^{(k)}}{\sqrt{\nu_i^{(k)}}} \quad i = 0, 1 \text{ ve } k = 1, \dots, K \quad (4.22)$$

olarak elde edilmiştir. Tüm sensörlerin ölçümlerinin normalleştirilmesiyle elde edilen vektör ise $\mathbf{x}_i(n)$ ile gösterilmiştir ($\mathbf{x}_i(n) = (x_i^{(1)}(n), \dots, x_i^{(K)}(n))^T$). Benzer şekilde, Eş. 4.21'de verilen $\tilde{x}_i^{(k)}(n)$, $n - 1$. ve n . zamanlarda \mathcal{H}_i hipotezi gözlenmesi durumunda, k . sensörün n . zamanda \mathcal{H}_i hipotezi altındaki ölçümünün normalleştirilmesiyle

$$\tilde{x}_i^{(k)}(n) = \mathcal{G}^{-1}(F_i^{(k)}(y_{n,k} | y_{n-1,k}; \tilde{\varphi}_i^{(k)}))$$

$$= \frac{y_{n,k} - \alpha y_{n-1,k} - \varphi_i^{(k)}(1 - \alpha)}{\sqrt{\nu_i^{(k)}}} \quad i = 0, 1 \text{ ve } k = 1, \dots, K \quad (4.23)$$

olarak elde edilmiştir. Tüm sensörlerin ölçümlerinin normalleştirilmesiyle elde edilen vektör ise $\tilde{\mathbf{x}}_i(n)$ ile gösterilmiştir ($\tilde{\mathbf{x}}_i(n) = (\tilde{x}_i^{(1)}(n), \dots, \tilde{x}_i^{(K)}(n))^T$). n . zamanda verilen bir geçiş ξ_n için Eş. 4.21'deki ikinci satırdaki iki terimden yalnızca biri ve son dört satırdaki terimlerden biri sıfır sonucu vermemektedir. Diğer tüm terimler sıfır sonucunu vermektedir.

$\mathcal{A}_i(z_n)$, kafes diyagramında, n . zamanda durum z_n 'de sonlanan sağ kalan yoldaki, durum \mathcal{H}_{1-i} 'den durum \mathcal{H}_i 'ye geçişler olarak tanımlanmıştır.

$$\mathcal{A}_i(z_n) := \{\xi_m \in \hat{\xi}(z_n) : \xi_m = (1 - i, i), m = 1, \dots, n\}, \quad i = 0, 1 \text{ için} \quad (4.24)$$

Benzer şekilde, $\tilde{\mathcal{A}}_i(z_n)$ ise durum \mathcal{H}_i 'den durum \mathcal{H}_i 'ye geçişler olarak tanımlanmıştır.

$$\tilde{\mathcal{A}}_i(z_n) := \{\xi_m \in \hat{\xi}(z_n) : \xi_m = (i, i), m = 1, \dots, n\}, \quad i = 0, 1 \text{ için} \quad (4.25)$$

n . zamanda her iki düğüm ($z_n = 0$ ve $z_n = 1$) içinde parametre kestirimi yapılmaktadır. Parametrelerin (Θ) ML kestirimi, Eş.4.13'de ifade edildiği gibi, bu düğümlerde sonlanan sağ kalan yollara dayanmaktadır.

Kopula fonksiyonun korelasyon matrisleri Eş. 4.26'yı, sensörlerin \mathcal{H}_i hipotezi altındaki marjinal dağılımların ortalama vektörü ise Eş. 4.27'yi kullanarak bulunmaktadır.

$$\hat{\lambda}_{j,i}(z_n) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_{j,i}} \sum_{m=1}^n \gamma(\xi_m; \Theta) = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2 \text{ ve } i = 0, 1 \quad (4.26)$$

$$\hat{\varphi}_i(z_n) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \sum_{m=1}^n \gamma(\xi_m; \Theta) = \mathbf{0}, \quad i = 0, 1 \quad (4.27)$$

Eş. 4.26 ve Eş. 4.27'de yer alan ξ_m , sağ kalan yola ait geçişleri ifade etmektedir ($\xi_m \in \hat{\xi}(z_n)$).

$j = 1, 2$ ve $i = 0, 1$ için Eş. 4.26, Eş. 4.21'i kullanarak Eş. 4.28'deki gibi ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_{1,0}(z_n) &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_{1,0}} \sum_{m=1}^n 0.5 z_{m-1} (1 - z_m) (\log |\lambda_{1,0}| + \mathbf{x}_0(m)^T \lambda_{1,0}^{-1} \mathbf{x}_0(m)) = \mathbf{0} \\
\hat{\lambda}_{1,1}(z_n) &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_{1,1}} \sum_{m=1}^n 0.5 (1 - z_{m-1}) z_m (\log |\lambda_{1,1}| + \mathbf{x}_1(m)^T \lambda_{1,1}^{-1} \mathbf{x}_1(m)) = \mathbf{0} \\
\hat{\lambda}_{2,0}(z_n) &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_{2,0}} \sum_{m=1}^n 0.5 (1 - z_{m-1}) (1 - z_m) (\log |\lambda_{2,0}| + \tilde{\mathbf{x}}_0(m)^T \lambda_{2,0}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0(m)) = \mathbf{0} \\
\hat{\lambda}_{2,1}(z_n) &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_{2,1}} \sum_{m=1}^n 0.5 z_{m-1} z_m (\log |\lambda_{2,1}| + \tilde{\mathbf{x}}_1(m)^T \lambda_{2,1}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_1(m)) = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Eş. 4.29 ve Eş. 4.31'de verilen bilgiler ([36], [37]) ile birlikte Eş. 4.28'in çözülmesiyle elde edilen sonuç Eş. 4.32'de verilmiştir.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (\log |\lambda|) = \lambda^{-1} \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (\mathbf{x}^T \lambda^{-1} \mathbf{x}) = -\lambda^{-T} \mathbf{x} \mathbf{x}^T \lambda^{-T} \tag{4.30}$$

λ matrisi simetrik olduğundan ($\lambda^T = \lambda$) :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (\mathbf{x}^T \lambda^{-1} \mathbf{x}) = -\lambda^{-1} \mathbf{x} \mathbf{x}^T \lambda^{-1} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_{1,0}(z_n) &= \frac{\sum_{\xi_m \in \mathcal{A}_0} \mathbf{x}_0(m) \mathbf{x}_0(m)^T}{|\mathcal{A}_0|}, \\
\hat{\lambda}_{1,1}(z_n) &= \frac{\sum_{\xi_m \in \mathcal{A}_1} \mathbf{x}_1(m) \mathbf{x}_1(m)^T}{|\mathcal{A}_1|}, \\
\hat{\lambda}_{2,0}(z_n) &= \frac{\sum_{\xi_m \in \tilde{\mathcal{A}}_0} \tilde{\mathbf{x}}_0(m) \tilde{\mathbf{x}}_0(m)^T}{|\tilde{\mathcal{A}}_0|}, \\
\hat{\lambda}_{2,1}(z_n) &= \frac{\sum_{\xi_m \in \tilde{\mathcal{A}}_1} \tilde{\mathbf{x}}_1(m) \tilde{\mathbf{x}}_1(m)^T}{|\tilde{\mathcal{A}}_1|}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Eş. 4.32'de verilen ifade örneklem korelasyon matris hesabıdır. Örneğin, $\lambda_{1,i}$ 'yi hesaplamak için yalnızca hipotezin \mathcal{H}_{1-i} 'den \mathcal{H}_i 'ye geçtiği anlardaki veriyi kullanarak, $\lambda_{2,i}$ için ise \mathcal{H}_i hipotezinin değişmediği anlardaki veriyi kullanarak kestirim yapılmaktadır. Eş. 4.32'de verilen korelasyon matrisi ifadelerinde çıkan sonucun geçerli bir korelasyon matrisi olmasını (PSD, simetrik, köşegenleri 1) garanti etmez. Elde edilen kestirimlerin simetrik olacağı garantidir, onun dışındaki PSD olması ve köşegenlerinin 1 olması garanti değildir. Eğer 4.32'de verilen $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_i(m), m = 1, 2, \dots, n\}$ setinde K tane doğrusal bağımsız vektör bulunuyorsa, $\lambda_{j,i}$ tam kertedir ve dolayısıyla kesin pozitif (PSP) matristir. $\lambda_{1,i}$ kestiriminde kullanılan veriler zamanda bağımsızdır (Eş. 4.14 ve Eş. 4.15, $\alpha = 0$). Bu nedenle $n \geq K$ için, yapılan kestirimlerden elde edilen matris PSD olur. Ancak $\lambda_{2,i}$ için ardışık zamanlarda alınan ölçümler bağımlıdır ve $n \geq K$ olduğunda kullanılan verilerle kestirilen matrisin PSD olması garanti değildir. Kestirilen matrisin hem PSD olması hem de köşegenlerinin 1 olması için, kestirilen korelasyon matrislerine Higham tarafından önerilen method [38] döngülü çözüm uygulanmıştır. Higham, verilen bir simetrik matris için, ağırlıklı Frobenius norm anlamında bu simetrik matrise en yakın olan eşsiz bir korelasyon matrisi olduğunu göstermiştir. Kullanılan algoritmada en genel ifade ile, verilen bir simetrik matrisin, PSD, köşegenleri 1 olan matrislerden oluşan dışbükey sete izdüşümünün alınması ile en yakın korelasyon matrisi elde edilmektedir. Bu algoritma Eş. 4.32'deki kestirilen tüm korelasyon matrislerine ($\lambda_{i,j}$, $i = 0, 1$ $j = 1, 2$) uygulanmıştır.

$i = 0, 1$ için Eş. 4.27, Eş. 4.21'i kullanarak Eş. 4.33'deki gibi ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_0(z_n) &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \sum_{m=1}^n \left(0.5 z_{m-1} (1 - z_m) \left(\mathbf{x}_0(m)^T \hat{\lambda}_{1,0}^{-1} \mathbf{x}_0(m) \right) \right. \\ &\quad \left. + 0.5 (1 - z_{m-1}) (1 - z_m) \left(\tilde{\mathbf{x}}_0(m)^T \hat{\lambda}_{2,0}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0(m) \right) \right) = 0 \\ \hat{\varphi}_1(z_n) &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \sum_{m=1}^n \left(0.5 (1 - z_{m-1}) z_m \left(\mathbf{x}_1(m)^T \hat{\lambda}_{1,1}^{-1} \mathbf{x}_1(m) \right) \right. \\ &\quad \left. + 0.5 (z_{m-1}) (z_m) \left(\tilde{\mathbf{x}}_1(m)^T \hat{\lambda}_{2,1}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_1(m) \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Eş. 4.33'de verilen \mathbf{x}_i ve $\tilde{\mathbf{x}}_i$ vektörleri, \mathcal{H}_i hipotezi altında alınan ölçümlerin normalize edilmesi (Eş. 4.22 ve Eş. 4.23) ile elde edilen $K \times 1$ boyutlu vektörlerdir (Eş. 4.34).

$$\Delta_i = \text{diag}((\nu_i^{(1)})^{0.5}, (\nu_i^{(2)})^{0.5}, \dots, (\nu_i^{(K)})^{0.5})$$

$$\mathbf{x}_i(m) = \begin{bmatrix} \frac{y_{m,1} - \varphi_i^{(1)}}{\sqrt{\nu_i^{(1)}}} \\ \vdots \\ \frac{y_{m,K} - \varphi_i^{(K)}}{\sqrt{\nu_i^{(K)}}} \end{bmatrix}, = \Delta_i^{-1}(\mathbf{y}_m - \boldsymbol{\varphi}_i)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_i(m) = \begin{bmatrix} \frac{y_{m,1} - \alpha y_{m-1,1} - \varphi_i^{(1)}(1 - \alpha)}{\sqrt{\nu_i^{(1)}}} \\ \vdots \\ \frac{y_{m,1} - \alpha y_{m-1,K} - \varphi_i^{(K)}(1 - \alpha)}{\sqrt{\nu_i^{(K)}}} \end{bmatrix} = \Delta_i^{-1}(\mathbf{y}_m - \alpha \mathbf{y}_{m-1} - \boldsymbol{\varphi}_i(1 - \alpha))$$

(4.34)

Eş. 4.35 ve Eş. 4.36'da verilen bilgiler ile birlikte Eş. 4.33'ün çözülmesiyle elde edilen, sensörlerin her bir hipotez (\mathcal{H}_i) altındaki marjinal dağılımlarının ortalama vektörü kestirimi Eş. 4.37'de verilmiştir. Eş. 4.37'de verilen $|\cdot|$ küme niceliğini ifade etmektedir.

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varphi}_i} ((\mathbf{y}_m - \boldsymbol{\varphi}_i)^T \mathbf{C}(\mathbf{y}_m - \boldsymbol{\varphi}_i)) = -2\mathbf{C}(\mathbf{y}_m - \boldsymbol{\varphi}_i) \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varphi}_i} ((\mathbf{y}_m - \alpha \mathbf{y}_{m-1} - \boldsymbol{\varphi}_i(1 - \alpha))^T \mathbf{D}(\mathbf{y}_m - \alpha \mathbf{y}_{m-1} - \boldsymbol{\varphi}_i(1 - \alpha))) \\ = -2\mathbf{D}(1 - \alpha)(\mathbf{y}_m - \alpha \mathbf{y}_{m-1} - \boldsymbol{\varphi}_i(1 - \alpha)) \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_0(z_n) = \Delta_0 \left(|\mathcal{A}_0| \hat{\lambda}_{1,0}^{-1} + |\tilde{\mathcal{A}}_0| \hat{\lambda}_{2,0}^{-1} (1 - \alpha)^2 \right)^{-1} \left(\hat{\lambda}_{1,0}^{-1} \Delta_0^{-1} \sum_{\xi_m \in \mathcal{A}_0} \mathbf{y}_m + \hat{\lambda}_{2,0}^{-1} \Delta_0^{-1} (1 - \alpha) \sum_{\xi_m \in \tilde{\mathcal{A}}_0} (\mathbf{y}_m - \alpha \mathbf{y}_{m-1}) \right),$$

$$\hat{\varphi}_1(z_n) = \Delta_1 \left(|\mathcal{A}_1| \hat{\lambda}_{1,1}^{-1} + |\tilde{\mathcal{A}}_1| \hat{\lambda}_{2,1}^{-1} (1 - \alpha)^2 \right)^{-1} \left(\hat{\lambda}_{1,1}^{-1} \Delta_1^{-1} \sum_{\xi_m \in \mathcal{A}_1} \mathbf{y}_m + \hat{\lambda}_{2,1}^{-1} \Delta_1^{-1} (1 - \alpha) \sum_{\xi_m \in \tilde{\mathcal{A}}_1} (\mathbf{y}_m - \alpha \mathbf{y}_{m-1}) \right) \quad (4.37)$$

4.2 t Kopula ile Bağımlılık Modelleme

Bu bölümde, sensörlerin marjinal dağılımlarını t olduğu, sensörler arası bağımlılığın Student'in t kopulası ile modellendiği durum ele alınmıştır. Eğer durum n . zamanda \mathcal{H}_i olarak değiştiyse ($\xi_n = (1 - i, i)$), k . sensörün n . zamandaki gözleminin dağılımının, bilinmeyen ortalama değeri $\varphi_i^{(k)}$, bilinen ölçek parametresi $(\nu_i^{(k)})^{0.5}$ ve bilinen serbestlik derecesi parametresi μ olan t $f_i^{(k)}(y_{n,k}; \varphi_i^{(k)}) \sim \mathcal{T}_\mu(\varphi_i^{(k)}, \nu_i^{(k)}, \mu_{1,i})$ olduğu varsayılmıştır. Bu dağılımın varyansı $\nu_i^{(k)} \mu / (\mu - 2)$ 'dir ($\nu > 2$ için). Öte yandan, eğer n zamanda durum değişmediyse ($\xi_n = (i, i)$), zamanda bağımlı gürültüler birince dereceden AR süreç olarak modellenmiştir (Eş. 4.38).

$$a_{n,k} = \alpha a_{n-1,k} + \omega_n^{(k)} \quad (4.38)$$

Eş. 4.38'de verilen α biliniyor varsayılmıştır. $\omega_n^{(k)} \sim \mathcal{T}_\mu(0, \nu_i^{(k)}, \mu_{j,i})$ ise zamanda (n) bağımsız olan beyaz t rasgele değişkenleridir. Durum geçişi olmadığı durumdaki n . zamandaki k . sensör gözlemi $y_{n,k}$ ise Eş. 4.39'da verilmiştir.

$$y_{n,k} = a_{n,k} + \varphi_i^{(k)} \quad (4.39)$$

Eş. 4.38 ve Eş. 4.39'u kullanarak, n . zamanda durum geçişi olmadığında, $y_{n-1,k}$ verildiği zaman $y_{n,k}$ dağılımı $f_i^{(k)}(y_{n,k} | y_{n-1,k}; \varphi_i^{(k)}) \sim \mathcal{T}_\mu(\alpha y_{n-1,k} + \varphi_i^{(k)} (1 - \alpha), \nu_i^{(k)}, \mu_{2,i})$ olarak bulunmaktadır. Sensörlerin gözlemleri arası bağımlılık ($c_1(\cdot)$) (Eş. 4.3) ve $c_2(\cdot)$ (Eş. 4.4) kopula fonksiyonları Student'in t kopulası kullanılarak modellenmiştir.

t kopula dağılımı, ilinkisi R ve serbestlik derecesi μ ile

$$c(u_1, \dots, u_K; R, \mu) = |R|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+K}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)^{K-1} \left(1 + \frac{1}{\mu} \mathbf{x}^T R^{-1} \mathbf{x}\right)^{-\frac{\mu+K}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)^K \prod_{k=1}^K \left(1 + \frac{1}{\mu} x_k^2\right)^{-\frac{\mu+1}{2}}} \quad (4.40)$$

olarak ifade edilmektedir. Eş. 4.40'daki ifadeler aşağıdaki gibidir.

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_K)^T$, $x_i = \mathcal{T}_\mu^{-1}(u_i)$, \mathcal{T}_μ serbestlik derecesi μ olan standart t CDF, R , köşegen elemanları 1, her bir elemanı $\in [-1, 1]$ olan simetrik kesin pozitif korelasyon matrisi

$|R|$, R 'nin determinanı

Student'ın t kopulası $c_j(\cdot)$ 'nin \mathcal{H}_i hipotezi altındaki korelasyon matrisi $\lambda_{j,i}$ ($j = 1, 2$ ve $i = 0, 1$) ile ifade edilmektedir.

$\lambda_{1,0} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0$ hipotez geçişindeki kopula $c_1(\cdot)$ 'nin korelasyon matrisi

$\lambda_{1,1} : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_1$ hipotez geçişindeki kopula $c_1(\cdot)$ 'nin korelasyon matrisi

$\lambda_{2,0} : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$ hipotez geçişi olmadığı durumdaki kopula $c_2(\cdot)$ 'nin korelasyon matrisi

$\lambda_{2,1} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ hipotez geçişi olmadığı durumdaki kopula $c_2(\cdot)$ 'nin korelasyon matrisi

Serbestlik derecesi (μ) parametresi biliniyor varsayılmıştır. \mathcal{H}_i , $i = 0, 1$, hipotezi altındaki $c_j(\cdot)$, $j = 1, 2$ kopulası için, $\mu_{j,i}$ ile gösterilmektedir.

Yukarıda verilen ifadeler için Eş. 4.3, \mathcal{H}_0 hipotezi için Eş. 4.41'de, \mathcal{H}_1 hipotezi için Eş. 4.42'de verilmiştir.

$$f_0(\mathbf{y}_n; \Theta) = \left(\prod_{k=1}^K \frac{\Gamma\left(\frac{\mu_{1,0}+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu_{1,0}}{2}\right) \sqrt{\pi \mu_{1,0} \nu_0^{(k)}}} \left(1 + \frac{1}{\mu_{1,0}} x_0^{(k)}(n)^2\right)^{-\frac{\mu_{1,0}+1}{2}} \right) \times |\lambda_{1,0}|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu_{1,0}+K}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu_{1,0}}{2}\right)^{K-1} \left(1 + \frac{1}{\mu_{1,0}} \mathbf{x}_0(n)^T \lambda_{1,0}^{-1} \mathbf{x}_0(n)\right)^{-\frac{\mu_{1,0}+K}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mu_{1,0}+1}{2}\right)^K \prod_{k=1}^K \left(1 + \frac{1}{\mu_{1,0}} x_0^{(k)}(n)^2\right)^{-\frac{\mu_{1,0}+1}{2}}} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned}
f_1(\mathbf{y}_n; \Theta) &= \left(\prod_{k=1}^K \frac{\Gamma\left(\frac{\mu_{1,1}+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu_{1,1}}{2}\right) \sqrt{\pi \mu_{1,1} \nu_1^{(k)}}} \left(1 + \frac{1}{\mu_{1,1}} x_1^{(k)}(n)^2\right)^{-\frac{\mu_{1,1}+1}{2}} \right) \\
&\times |\lambda_{1,1}|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu_{1,1}+K}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu_{1,1}}{2}\right)^{K-1} \left(1 + \frac{1}{\mu_{1,1}} \mathbf{x}_1(n)^T \lambda_{1,1}^{-1} \mathbf{x}_1(n)\right)^{-\frac{\mu_{1,1}+K}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mu_{1,1}+1}{2}\right)^K \prod_{k=1}^K \left(1 + \frac{1}{\mu_{1,1}} x_1^{(k)}(n)^2\right)^{-\frac{\mu_{1,1}+1}{2}}} \quad (4.42)
\end{aligned}$$

Yukarıda verilen ifadeler için Eş. 4.4, \mathcal{H}_0 hipotezi için Eş. 4.43'de, \mathcal{H}_1 hipotezi için Eş. 4.44'de verilmiştir.

$$\begin{aligned}
f_0(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}; \Theta) &= \left(\prod_{k=1}^K \frac{\Gamma\left(\frac{\mu_{2,0}+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu_{2,0}}{2}\right) \sqrt{\pi \mu_{2,0} \nu_0^{(k)}}} \left(1 + \frac{1}{\mu_{2,0}} \tilde{x}_0^{(k)}(n)^2\right)^{-\frac{\mu_{2,0}+1}{2}} \right) \\
&\times |\lambda_{2,0}|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu_{2,0}+K}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu_{2,0}}{2}\right)^{K-1} \left(1 + \frac{1}{\mu_{2,0}} \tilde{\mathbf{x}}_0(n)^T \lambda_{2,0}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0(n)\right)^{-\frac{\mu_{2,0}+K}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mu_{2,0}+1}{2}\right)^K \prod_{k=1}^K \left(1 + \frac{1}{\mu_{2,0}} \tilde{x}_0^{(k)}(n)^2\right)^{-\frac{\mu_{2,0}+1}{2}}} \quad (4.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}; \Theta) &= \left(\prod_{k=1}^K \frac{\Gamma\left(\frac{\mu_{2,1}+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu_{2,1}}{2}\right) \sqrt{\pi \mu_{2,1} \nu_1^{(k)}}} \left(1 + \frac{1}{\mu_{2,1}} \tilde{x}_1^{(k)}(n)^2\right)^{-\frac{\mu_{2,1}+1}{2}} \right) \\
&\times |\lambda_{2,1}|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu_{2,1}+K}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu_{2,1}}{2}\right)^{K-1} \left(1 + \frac{1}{\mu_{2,1}} \tilde{\mathbf{x}}_1(n)^T \lambda_{2,1}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_1(n)\right)^{-\frac{\mu_{2,1}+K}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mu_{2,1}+1}{2}\right)^K \prod_{k=1}^K \left(1 + \frac{1}{\mu_{2,1}} \tilde{x}_1^{(k)}(n)^2\right)^{-\frac{\mu_{2,1}+1}{2}}} \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Eş. 4.41, Eş. 4.42, Eş. 4.43, Eş. 4.44 ve Eş. 4.9'u kullanarak z_{n-1} durumundan z_n durumuna geçişteki dal metriği t kopula için

$$\begin{aligned}
\gamma(\xi_n; \Theta) &= -\log \pi_{\xi_n} + 0.5(1 - z_n) \sum_{k=1}^K \log \nu_0^{(k)} + 0.5z_n \sum_{k=1}^K \log \nu_1^{(k)} \\
&+ 0.5z_{n-1}(1 - z_n) \\
&\times \left(\log |\lambda_{1,0}| + \log \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\mu_{1,0}}{2}\right)^2 (\pi \mu_{1,0})^K}{\Gamma\left(\frac{\mu_{1,0}+K}{2}\right)^2} \left(1 + \frac{\mathbf{x}_0(n)^T \lambda_{1,0}^{-1} \mathbf{x}_0(n)}{\mu_{1,0}}\right)^{\mu_{1,0}+K} \right) \right) \\
&+ 0.5(1 - z_{n-1})(1 - z_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\log |\lambda_{2,0}| + \log \left(\frac{\Gamma \left(\frac{\mu_{2,0}}{2} \right)^2 (\pi \mu_{2,0})^K}{\Gamma \left(\frac{\mu_{2,0}+K}{2} \right)^2} \left(1 + \frac{\tilde{\mathbf{x}}_0(n)^T \lambda_{2,0}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0(n)}{\mu_{2,0}} \right)^{\mu_{2,0}+K} \right) \right) \\
& + 0.5(1 - z_{n-1})z_n \\
& \times \left(\log |\lambda_{1,1}| + \log \left(\frac{\Gamma \left(\frac{\mu_{1,1}}{2} \right)^2 (\pi \mu_{1,1})^K}{\Gamma \left(\frac{\mu_{1,1}+K}{2} \right)^2} \left(1 + \frac{\mathbf{x}_1(n)^T \lambda_{1,1}^{-1} \mathbf{x}_1(n)}{\mu_{1,1}} \right)^{\mu_{1,1}+K} \right) \right) \\
& + 0.5z_{n-1}z_n \\
& \times \left(\log |\lambda_{2,1}| + \log \left(\frac{\Gamma \left(\frac{\mu_{2,1}}{2} \right)^2 (\pi \mu_{2,1})^K}{\Gamma \left(\frac{\mu_{2,1}+K}{2} \right)^2} \left(1 + \frac{\tilde{\mathbf{x}}_1(n)^T \lambda_{2,1}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_1(n)}{\mu_{2,1}} \right)^{\mu_{2,1}+K} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

olarak bulunmaktadır. Eş. 4.45'de verilen $x_i^{(k)}(n)$ vektörü Eş. 4.46'da, $\tilde{x}_i^{(k)}(n)$ vektörü Eş. 4.47'de verilmiştir.

$$x_i^{(k)}(n) = \mathcal{T}_{\mu_{1,i}}^{-1}(F_i^{(k)}(y_{n,k}; \varphi_i^{(k)})) = \frac{y_{n,k} - \varphi_i^{(k)}}{\sqrt{\nu_i^{(k)}}} \quad i = 0, 1 \text{ ve } k = 1, \dots, K \tag{4.46}$$

$$\mathbf{x}_i(n) = (x_i^{(1)}(n), \dots, x_i^{(K)}(n))^T$$

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_i^{(k)}(n) &= \mathcal{T}_{\mu_{2,i}}^{-1}(F_i^{(k)}(y_{n,k}|y_{n-1,k}; \tilde{\varphi}_i^{(k)})) \\
&= \frac{y_{n,k} - \alpha y_{n-1,k} - \varphi_i^{(k)}(1 - \alpha)}{\sqrt{\nu_i^{(k)}}} \quad i = 0, 1 \text{ ve } k = 1, \dots, K \tag{4.47}
\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_i(n) = (\tilde{x}_i^{(1)}(n), \dots, \tilde{x}_i^{(K)}(n))^T$$

Kopula fonksiyonun korelasyon matrisleri Eş. 4.48'i, sensörlerin \mathcal{H}_i hipotezi altındaki marjinal dağılımların ortalama vektörü ise Eş. 4.49'u kullanarak bulunmaktadır. Eş. 4.48 ve Eş. 4.49'da yer alan ξ_m , sağ kalan yola ait geçişleri ifade

etmektedir ($\xi_m \in \hat{\xi}(z_n)$).

$$\hat{\lambda}_{j,i}(z_n) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_{j,i}} \sum_{m=1}^n \gamma(\xi_m; \Theta) = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2 \text{ ve } i = 0, 1 \quad (4.48)$$

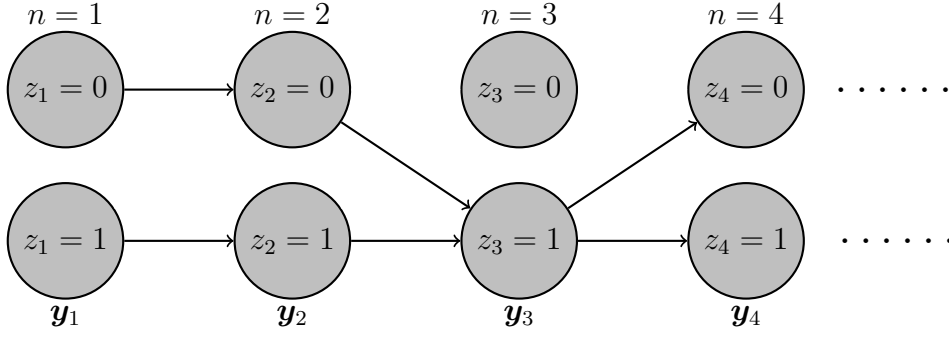
$$\hat{\varphi}_i(z_n) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \sum_{m=1}^n \gamma(\xi_m; \Theta) = \mathbf{0}, \quad i = 0, 1 \quad (4.49)$$

$j = 1, 2$ ve $i = 0, 1$ için Eş. 4.48, Eş. 4.45'i kullanarak Eş. 4.50'deki gibi ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{1,0}(z_n) &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_{1,0}} \sum_{m=1}^n 0.5 z_{m-1} (1 - z_m) \\ &\quad \times \left(\log |\lambda_{1,0}| + \log \left(1 + \frac{\mathbf{x}_0(n)^T \lambda_{1,0}^{-1} \mathbf{x}_0(n)}{\mu_{1,0}} \right)^{\mu_{1,0} + K} \right) = \mathbf{0} \\ \hat{\lambda}_{1,1}(z_n) &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_{1,1}} \sum_{m=1}^n 0.5 (1 - z_{m-1}) z_m \\ &\quad \times \left(\log |\lambda_{1,1}| + \log \left(1 + \frac{\mathbf{x}_1(n)^T \lambda_{1,1}^{-1} \mathbf{x}_1(n)}{\mu_{1,1}} \right)^{\mu_{1,1} + K} \right) = \mathbf{0} \\ \hat{\lambda}_{2,0}(z_n) &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_{2,0}} \sum_{m=1}^n 0.5 (1 - z_{m-1}) (1 - z_m) \\ &\quad \times \left(\log |\lambda_{2,0}| + \log \left(1 + \frac{\tilde{\mathbf{x}}_0(n)^T \lambda_{2,0}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0(n)}{\mu_{2,0}} \right)^{\mu_{2,0} + K} \right) = \mathbf{0} \\ \hat{\lambda}_{2,1}(z_n) &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_{2,1}} \sum_{m=1}^n 0.5 z_{m-1} z_m \\ &\quad \times \left(\log |\lambda_{2,1}| + \log \left(1 + \frac{\tilde{\mathbf{x}}_1(n)^T \lambda_{2,1}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_1(n)}{\mu_{2,1}} \right)^{\mu_{2,1} + K} \right) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Eş. 4.29 ve Eş. 4.52'de verilen bilgiler ([36], [37]) ile birlikte Eş. 4.50'nin çözülmesiyle elde edilen sonuç Eş. 4.53'de verilmiştir.

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \log(1 + \mathbf{x}^T \boldsymbol{\lambda}^{-1} \mathbf{x}) = \frac{-\boldsymbol{\lambda}^{-T} \mathbf{x} \mathbf{x}^T \boldsymbol{\lambda}^{-T}}{1 + \mathbf{x}^T \boldsymbol{\lambda}^{-1} \mathbf{x}} \quad (4.51)$$



Şekil 4.2. Hayatta kalan yolları gösteren çatı diyagramı örneği

λ matrisi simetrik olduğundan ($\lambda^T = \lambda$) :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log(1 + \mathbf{x}^T \lambda^{-1} \mathbf{x}) = \frac{-\lambda^{-1} \mathbf{x} \mathbf{x}^T \lambda^{-1}}{1 + \mathbf{x}^T \lambda^{-1} \mathbf{x}} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{1,0}(z_n) &= \frac{\mu_{1,0} + K}{|\mathcal{A}_0|} \sum_{\xi_m \in \mathcal{A}_0} \frac{\mathbf{x}_0(m) \mathbf{x}_0(m)^T}{\mu_{1,0} + \mathbf{x}_0(m)^T \hat{\lambda}_{1,0}^{-1} \mathbf{x}_0(m)}, \\ \hat{\lambda}_{1,1}(z_n) &= \frac{\mu_{1,1} + K}{|\mathcal{A}_1|} \sum_{\xi_m \in \mathcal{A}_1} \frac{\mathbf{x}_1(m) \mathbf{x}_1(m)^T}{\mu_{1,1} + \mathbf{x}_1(m)^T \hat{\lambda}_{1,1}^{-1} \mathbf{x}_1(m)}, \\ \hat{\lambda}_{2,0}(z_n) &= \frac{\mu_{2,0} + K}{|\tilde{\mathcal{A}}_0|} \sum_{\xi_m \in \tilde{\mathcal{A}}_0} \frac{\tilde{\mathbf{x}}_0(m) \tilde{\mathbf{x}}_0(m)^T}{\mu_{2,0} + \tilde{\mathbf{x}}_0(m)^T \hat{\lambda}_{2,0}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0(m)}, \\ \hat{\lambda}_{2,1}(z_n) &= \frac{\mu_{2,1} + K}{|\tilde{\mathcal{A}}_1|} \sum_{\xi_m \in \tilde{\mathcal{A}}_1} \frac{\tilde{\mathbf{x}}_1(m) \tilde{\mathbf{x}}_1(m)^T}{\mu_{2,1} + \tilde{\mathbf{x}}_1(m)^T \hat{\lambda}_{2,1}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_1(m)} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Eş. 4.53'de, $\lambda_{ij}(z_n)$ kestirimlerinde kullanılan $\hat{\lambda}_{ij}$ 'ler, z_n düğümüne yoldan gelindiyse, $n - 1$ anında ilgili düğümde yapılan korelasyon matrisi kestirimleridir. Şekil 4.2'de verilen örnek için, $n = 4$ iken, $z_4 = 0$ düğümü için sağ kalan yol $\hat{z}(z_4 = 0) = \{0, 0, 1, 0\}$ olarak, $z_4 = 1$ düğümü için sağ kalan yol $\hat{z}(z_4 = 1) = \{0, 0, 1, 1\}$ olarak bulunmuş olsun. Bu durumda $n = 4$ anında hem $z_4 = 0$ hem de $z_4 = 1$ düğümlerinde yapılacak korelasyon matrisi kestirimleri için, $z_3 = 1$ düğümünde yapılmış olan korelasyon matrisi kestirimleri kullanılmaktadır.

Eş. 4.27'nin kapalı form ifadesi bulunmamaktadır. Bu nedenle sağ kalan yollar

için gözlemlere dayalı ortalama vektör kestirimi (örneklem ortalaması) yapılmıştır (Eş. 4.54).

$$\hat{\varphi}_i(z_n) = \frac{\sum_{\xi_m \in \mathcal{A}_i} \mathbf{y}_m + \sum_{\xi_m \in \tilde{\mathcal{A}}_i} \frac{(\mathbf{y}_m - \alpha \mathbf{y}_{m-1})}{(1-\alpha)}}{|\mathcal{A}_i| + |\tilde{\mathcal{A}}_i|} \quad (4.54)$$



5. DENEYSEL ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, PSP algoritmasının performansını gözlemlemek için yapılan benzetimlerin sayısal sonuçları sunulmaktadır. Sensörlerin her bir hipotez (\mathcal{H}_i , $i = 0, 1$) altındaki ortalama değerleri (φ_i , $i = 0, 1$) ve ardışık zamanlarda hipotez geçişi olup olmasına bağlı olarak değişen korelasyon matrislerinin ($\lambda_{j,i}$, $j = 1, 2$; $i = 0, 1$) kestirim performansları ve hipotez sezim hata olasılığı, zamanın bir fonksiyonu olarak elde edilmiştir. Algılayıcıların gözlem verileri benzetimler ile oluşturulmuştur. Veriler oluşturulurken, ardışık zamanlarda hipotez geçişi olması durumunda PDF $f_i^{(k)}(y_{n,k}; \varphi_i^{(k)}) \sim \mathcal{N}(\varphi_i^{(k)}, \nu_i^{(k)})$, hipotez geçişi olmaması durumunda ise PDF $f_i^{(k)}(y_{n,k}|y_{n-1,k}; \varphi_i^{(k)}) = \mathcal{N}(\tilde{\varphi}_i^{(k)}, \nu_i^{(k)}) \sim \mathcal{N}(\alpha y_{n-1,k} + \varphi_i^{(k)}(1 - \alpha), \nu_i^{(k)})$ kullanılmıştır. α ve $\nu_i^{(k)}$ parametreleri için önsel bilgimiz olduğu varsayıp, $\varphi_i^{(k)}$ ortalama değerleri için kestirim yapılmıştır. Farklı algılayıcılar tarafından alınan ölçümler arası bağımlılık ise, verinin sırasıyla Bölüm 4.1 ve Bölüm 4.2'de anlatılan Gauss ve t kopulalara göre,

$$\lambda_{j,i} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{(K-1)} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{(K-2)} \\ & & \ddots & & \\ \rho^{(K-2)} & & & 1 & \rho \\ \rho^{(K-1)} & \dots & \dots & \rho & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

olarak verilen korelasyon matrisleri kullanılarak oluşturulması ile sağlanmıştır. Parametre kestirimi ve hipotez sezimi için kullanılan yöntem Algoritma 2'de özetlenmiştir.

Algoritma 2: PSP algoritmasına dayalı parametre seti, Φ , kestirimi ve hipotez

sezimi

 N : gözlem süresi K : sensör sayısı**Bilinen Parametreler:** π_{ij}, α **İklendirme:**

$$\hat{\varphi}_0^{(k)}(z_1) \sim \mathcal{N}(\varphi_0^{(k)}, \sigma^2),$$

$$\hat{\varphi}_1^{(k)}(z_1) \sim \mathcal{N}(\varphi_1^{(k)}, \sigma^2),$$

$$\hat{\lambda}_{j,i}(z_1) = I_K, \quad j = 1, 2 \quad i = 0, 1$$

Gaussian kopula için Eş. 4.21'i, t kopula için Eş. 4.45'i kullanarak;

1 $z_1 = 0$ düğüm metriği hesapla ($\Gamma(z_1 = 0) = \gamma(\xi_1), \xi_1 := (1, 0)$)2 $z_1 = 1$ düğüm metriği hesapla ($\Gamma(z_1 = 1) = \gamma(\xi_1), \xi_1 := (0, 1)$)**for** $n=2:N$ **do**3 Gaussian kopula için Eş. 4.21, t kopula için Eş. 4.45 kullanarak her bir düğümde en son kestirilen parametreler için hesapla ($\gamma(\xi_n)$);4 Eş. 4.12'yi kullanarak, n anındaki en düşük biriken düğüm metriklerini belirle ($\Gamma(z_n), z_n = 0, 1$);5 4. adımda bulunan en düşük biriken düğüm metriklerine karşılık gelen yolu sağ kalan yol olarak seç ($\hat{z}(z_n), z_n = 0, 1$);6 Gaussian kopula için Eş. 4.32, t kopula için Eş. 4.53'ü kullanarak, her bir düğüm için sağ kalan yollara ait veri ile korelasyon matris kestirimlerini güncelle ($\hat{\lambda}_{j,i}(z_n); j = 1, 2 \quad i = 0, 1$);7 Bulunan korelasyon matrislerine en yakın geçerli korelasyon matrislerini bul ([38]) ($\hat{\lambda}_{j,i}(z_n); j = 1, 2 \quad i = 0, 1$);8 Gaussian copula için Eş. 4.37, t kopula için Eş. 4.54'ü kullanarak, her bir düğüm için sağ kalan yollara ait veri ile ortalama değer kestirimlerini güncelle ($\hat{\varphi}_i(z_n), i = 0, 1$);9 **end**

Algoritma 2’de,

- İlk hipotez ($n = 1$) için bir önceki zamana göre hipotez geçişi ($n = 0$ ’dan bağımsız varsayımı ile) olduğu varsayılmıştır. Bu varsayımla, $n = 1$. zamanında, $z_1 = 0$ düğümü için başlangıç metriği, Gaussian kopula için Eş. 4.21’e, t kopula için Eş. 4.45’e göre $z_1 = 0, z_0 = 1$ için hesaplanmıştır. Benzer şekilde, $z_1 = 1$ düğümü için başlangıç metriği, Gaussian kopula için Eş. 4.21’e, t kopula için Eş. 4.45’e göre $z_1 = 1, z_0 = 0$ için hesaplanmıştır.
- Ortalama vektörleri, ortalaması gerçek ortalama değeri, varyans değeri ise σ^2 olan Gauss dağılıma göre ilklendirilmiştir.
- Korelasyon matrisleri tüm benzetimler için birim matris olarak ilklendirilmiştir.

Benzetimlerde, $n \gg K$ olduğunda ilinti matrisi için parametre kestirimine başlanmıştır. Böylece kestirilen matrisin ($\lambda_{j,i}$ için) PSD olma ihtimali artırılmıştır.

Durum sezim performansı,

$$\Delta_H(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n |z_k - \hat{z}_k| \quad (5.2)$$

olarak hesaplanmıştır. Her bir hipotez \mathcal{H}_i altındaki ortalama değer kestirim hatası,

$$\Delta_{\varphi_i}(n) = \frac{1}{K} \frac{\|\hat{\varphi}_i(n) - \varphi_i\|_F^2}{\|\varphi_i\|_F^2} \quad (5.3)$$

olarak hesaplanmıştır. Ortalama değer kestirim hatalarının ortalaması ise,

$$\Delta_{\varphi}(n) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 \Delta_{\varphi_i} \quad (5.4)$$

olarak hesaplanmıştır. Korelasyon matrislerinin kestirim hatası,

$$\Delta_{\lambda_{j,i}}(n) = \frac{1}{K^2} \frac{\|\hat{\lambda}_{j,i}(n) - \lambda_{j,i}\|_F^2}{\|\lambda_{j,i}\|_F^2} \quad (5.5)$$

olarak hesaplanmıştır. Durum geçişi olduğu ve olmadığı duruma göre değişen korelasyon matris kestirim hatalarının ortalaması,

$$\Delta_{\lambda_j}(n) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 \Delta_{\lambda_{j,i}}(n) \quad (5.6)$$

olarak hesaplanmıştır. Korelasyon matris kestirim hatalarının ortalaması ise,

$$\Delta_{\lambda}(n) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^2 \Delta_{\lambda_{j,i}}(n) \quad (5.7)$$

olarak hesaplanmıştır.

Sensörlerin \mathcal{H}_i hipotezi altındaki marjinal dağılımlarının ortalama değerlerinin ve varyans değerlerinin aynı olduğu durum için yapılan benzetimler Çizelge 5.1'de verilmiştir.

Çizelge 5.1. Aynı ortalama ve varyans değerlerine sahip marjinal sensör dağılımları için benzetim yapılan senaryolar

($\nu_0 = \nu_1 = 10$, $\sigma^2 = 20$, $\phi_0^{(k)} = 3$, $\phi_1^{(k)} = -3$, t dağılımlar için $\mu_{j,i} = 3$, $i, j = 1, 2$)

	α	π_{00}	π_{01}	ρ	K
Senaryo 1	0.1	0.5	0.5	0.2	1, 2, 4, 8
Senaryo 2	0.8	0.5	0.5	0.2	4
Senaryo 3	0.1	0.8	0.9	0.2	4
Senaryo 4	0.1	0.5	0.5	0.4	4
Senaryo 5	0.1	0.5	0.5	-0.2	4

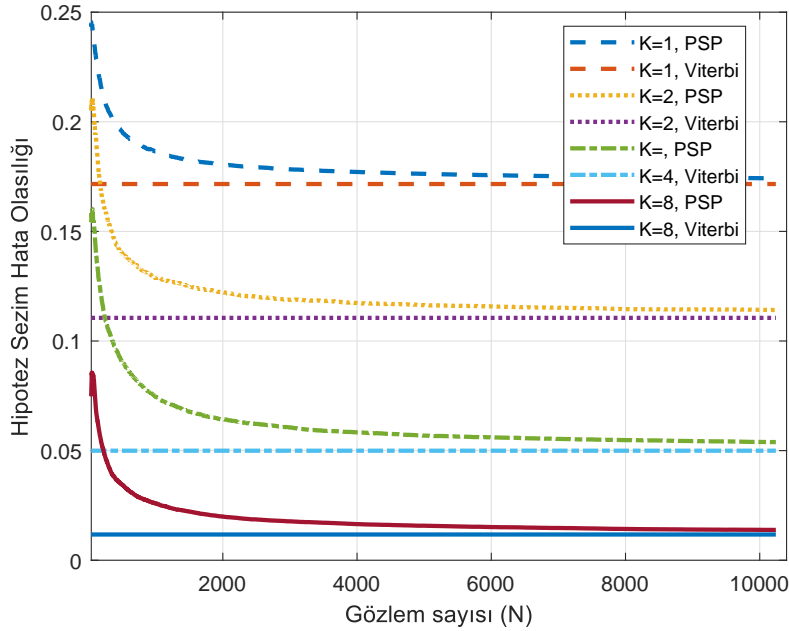
Çizelge 5.1'deki tüm durumlar için sensörlerinin tümünün;

- \mathcal{H}_0 ve \mathcal{H}_1 hipotezleri altındaki marjinal dağılımlarının varyans değerleri (ν_0, ν_1) 10 alınmıştır.

- \mathcal{H}_0 hipotezi altındaki marjinal dağılımlarının ortalama değerleri 3, \mathcal{H}_1 hipotezi altındaki marjinal dağılımlarının ortalama değerleri -3 alınmıştır.
- Ortalama değer kestirimlerinin iklenmesinde (Algoritma 2) kullanılan varyans değeri 20 alınmıştır.

Çizelge 5.1'deki Senaryo 1 için yapılan benzetim sonuçlarında (Şekil 5.1, Şekil 5.2) algılayıcı sayısındaki artışın algoritmanın hipotez sezim performansını iyileştirdiği görülmüştür. Sensör sayısı arttıkça gelen ek bilgiler algoritma içinde kullanılarak saklı gözlemler ($\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$) hakkındaki tahminlerdeki hata olasılığı azaltılmıştır. Aynı zamanda bu benzetim sonuçlarında, önerilen PSP algoritmasının ölçüm sayısı arttıkça parametre belirsizliği olmadığı durumda çalışan Viterbi algoritmasına yakınsadığı görülmüştür.

Çizelge 5.1'deki Senaryo 1 ve Senaryo 2'yi $K = 4$ için karşılaştırmak için yapı-



Şekil 5.1. Gauss kopula için PSP algoritmasının Senaryo 1 performansı

lan benzetim sonuçlarında (Şekil 5.3, Şekil 5.4) zamansal bağımlılıktaki (α) artışın sezim performansını iyileştirdiği görülmüştür. Ardışık zamanlarda durum geçişi olmadığında, $n - 1$ anında yapılan tahmin ne kadar doğruysa, bağım-

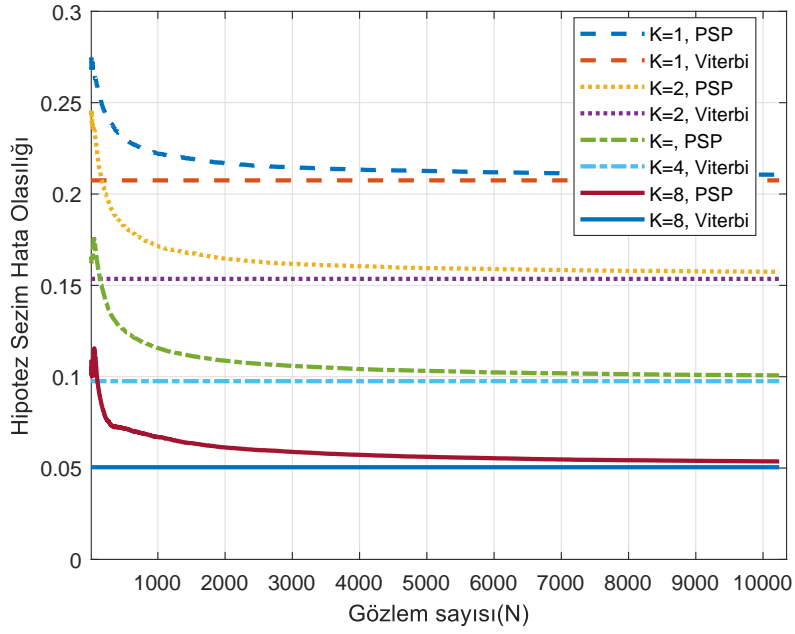
lilik arttıkça n anında yapılan tahminin doğruluğu da artmaktadır. Bu nedenle hipotez sezim hata olasılığı azalan Senaryo 1'e göre, tüm parametreler aynı tutulup α artırıldığında sezim performansı da iyileşmektedir.

Çizelge 5.1'deki Senaryo 1 ve Senaryo 3'ü karşılaştırmak için yapılan benzetim sonuçlarında (Şekil 5.5, Şekil 5.6) durumlar arası geçiş olasılığındaki (π_{ij}) artışın sezim performansını iyileştirdiği görülmüştür. Durumlar arası geçiş olasılığı birörnek olduğunda, hipotezler arası geçiş olası eşit olduğundan, durum dizilimi için ML kestirim yapılmaktadır. Durumlar arası geçiş olasılıkları birörnek değilse, bu önsel bilgi algoritmada kullanılarak MAP ile daha güçlü kestirim yapılmaktadır.

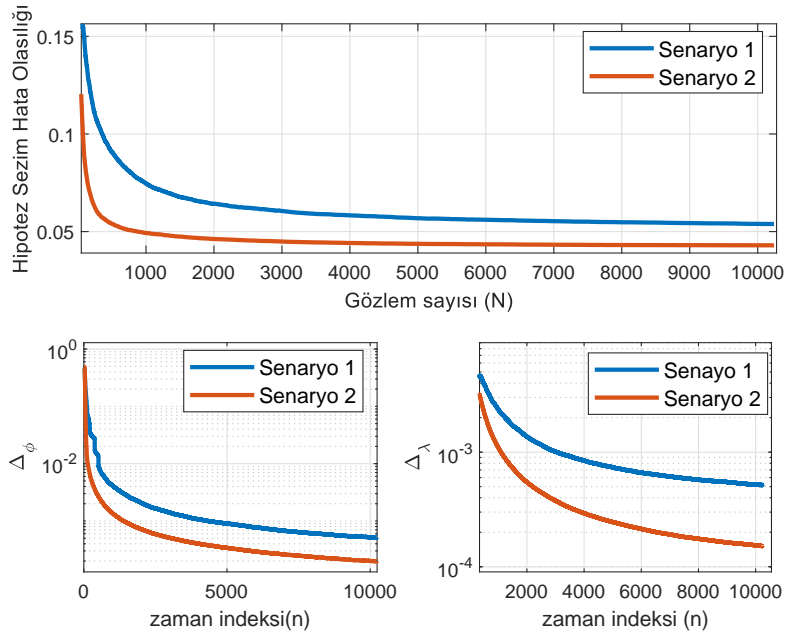
Çizelge 5.1'deki Senaryo 1, Senaryo 4, Senaryo 5'i karşılaştırmak için yapılan benzetim sonuçlarında (Şekil 5.7, Şekil 5.8) algılayıcılar arası bağımlılık azaldığında sezim performansının iyileştiği görülmüştür. Bu sonuç algoritma için özel bir sonuç olmayıp, algoritmadan bağımsız olarak tanımlanan senaryoya özgüdür. Bu durum, 2 algılayıcı için Şekil 5.9 ile açıklanabilmektedir. 2 algılayıcının, \mathcal{H}_0 ve \mathcal{H}_1 hipotezi altındaki ortalama ve varyans değerlerine göre çizilen eş yükselti eğrilerinden algılayıcılar arası korelasyon arttıkça dağılımların daha çok iç içe girdikleri görülmektedir. Bu da sezim performansında hipotezlerin ayrıştırılmasında güçlük yaratacağından, hatalı karar verme ihtimalini arttırmaktadır.

Şu ana kadar algılayıcıların gözlemleri arası bağımlılığın ve bir algılayıcının aldığı ölçümlerin zamanda bağımlılığının hesaba katıldığı durumlar incelenmiştir. Bağımlılıkların hesaba katılmaması durumu için Çizelge 5.2'de verilen benzetimler yapılmıştır. Bağımlılıkların hesaba katılmaması durumunda yaşanacak performans kaybı Şekil 5.10'da verilmiştir. Zamansal ve uzamsal bağımlılığın hesaba katılmadığı durumda hipotez seziminde performans kaybı yaşanmaktadır.

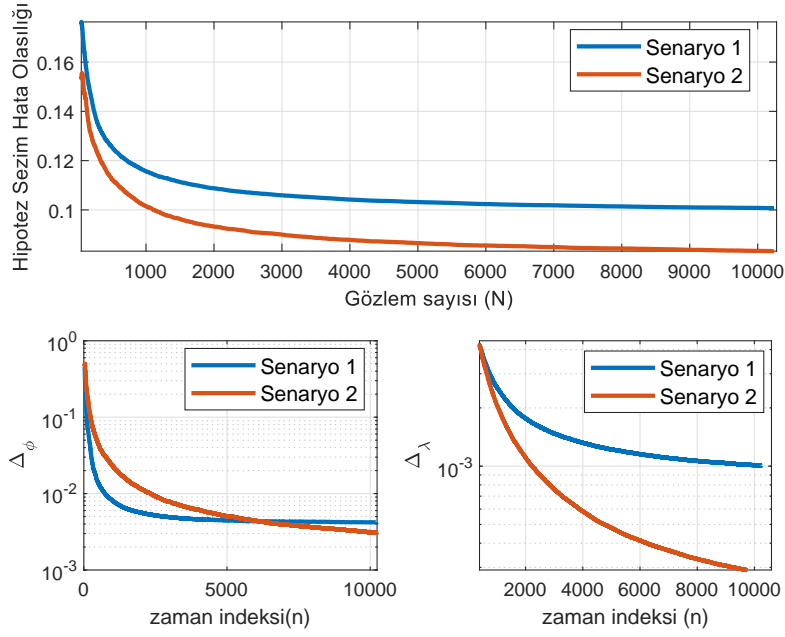
Çizelge 5.2 Senaryo 6 için, algılayıcıların marjinal dağılımının Gauss olması ve algılayıcılar arası bağımlılığın Gauss kopula ile oluşturulması durumunda,



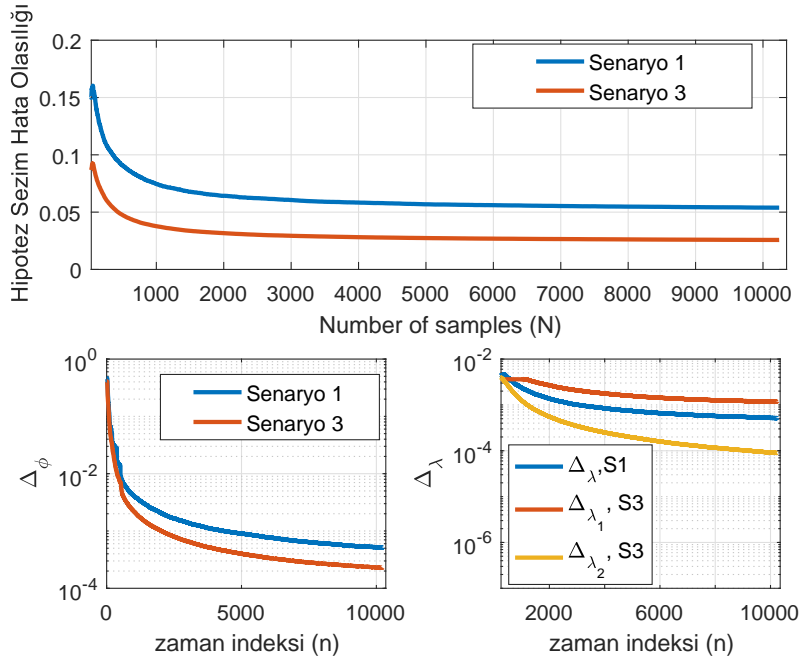
Şekil 5.2. t kopula için PSP algoritmasının Senaryo 1 performansı



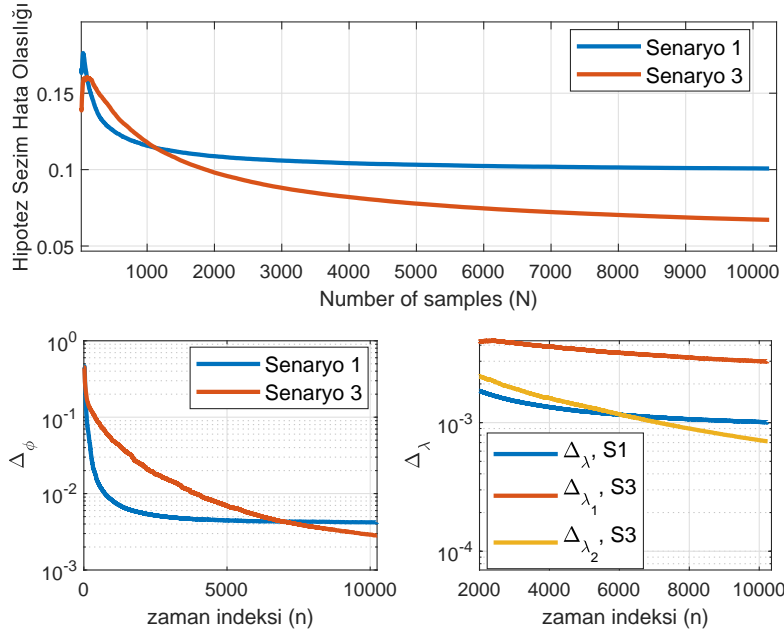
Şekil 5.3. Gauss kopula için PSP algoritmasının Senaryo 1 ve Senaryo 2 performansı



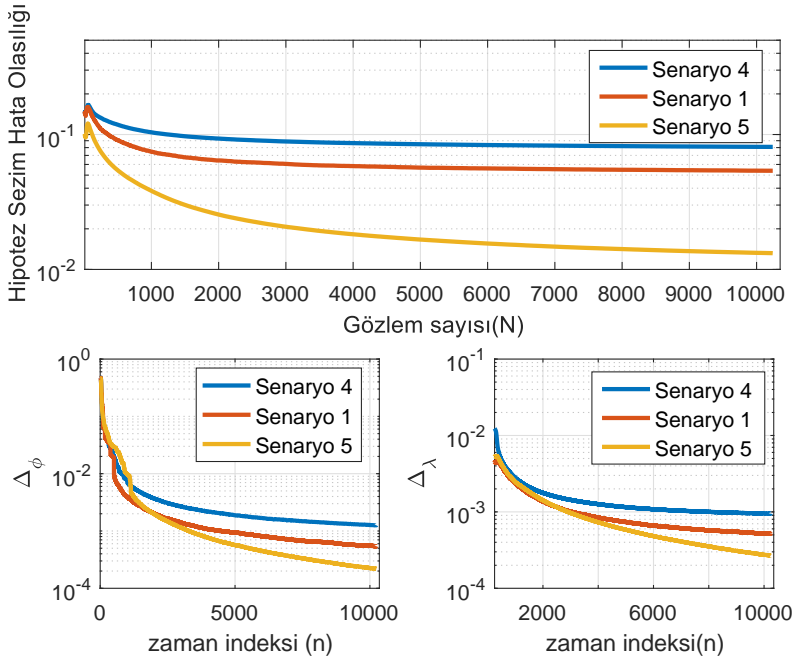
Şekil 5.4. t kopula için PSP algoritmasının Senaryo 1 ve Senaryo 2 performansı



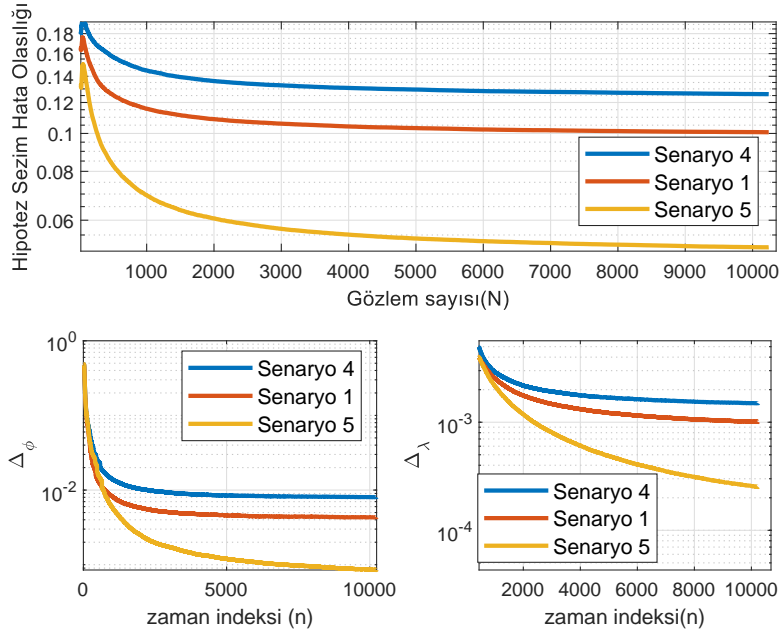
Şekil 5.5. Gauss kopula için PSP algoritmasının Senaryo 1 (S1) ve Senaryo 3 (S3) performansı



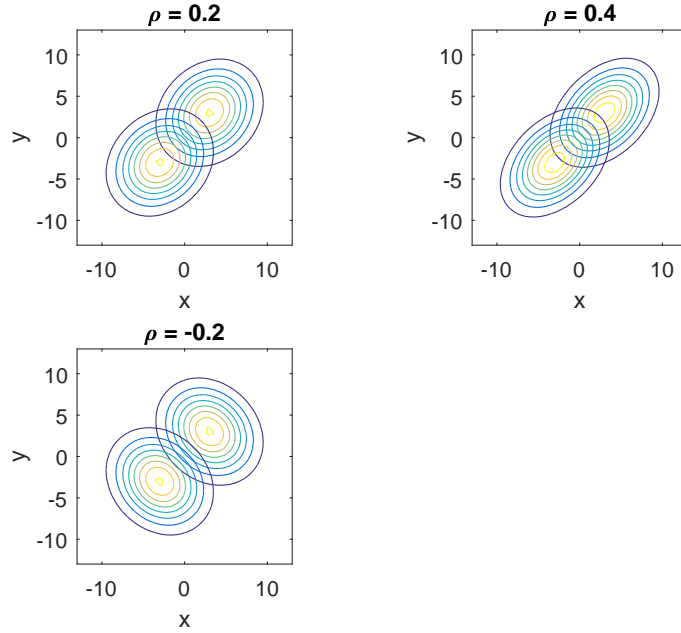
Şekil 5.6. t kopula için PSP algoritmasının Senaryo 1 (S1) ve Senaryo 3 (S3) performansı



Şekil 5.7. Gauss kopula için PSP algoritmasının Senaryo 1, Senaryo 4 ve Senaryo 5 performansı



Şekil 5.8. t kopula için PSP algoritmasının Senaryo 1, Senaryo 4 ve Senaryo 5 performansı



Şekil 5.9. Gauss kopula için 2 hipotez altındaki dağılımların eş yükselti eğrileri (Çizelge 5.1, K=2)

Çizelge 5.2. Bağımlılıkların hesaba katılmadığı durumlar için benzetimi

yapılan senaryolar ($\nu_0 = \nu_1 = 10$, $\sigma^2 = 20$,
 $\phi_0^{(k)} = 3$, $\phi_1^{(k)} = -3$, $\alpha = 0.8$, $\pi_{ij} = 0.5$, $\rho = 0.4$, $K = 4$)

Açıklama	
Senaryo 6	Algılayıcıların ölçümlerinin zamansal bağımsız olduğu varsayılmıştır.
Senaryo 7	Algılayıcı ölçümlerinin uzamsal bağımsız olduğu varsayılmıştır.
Senaryo 8	Sensör ölçümlerinin hem zamansal, hem de uzamsal bağımsız olduğu varsayılmıştır.

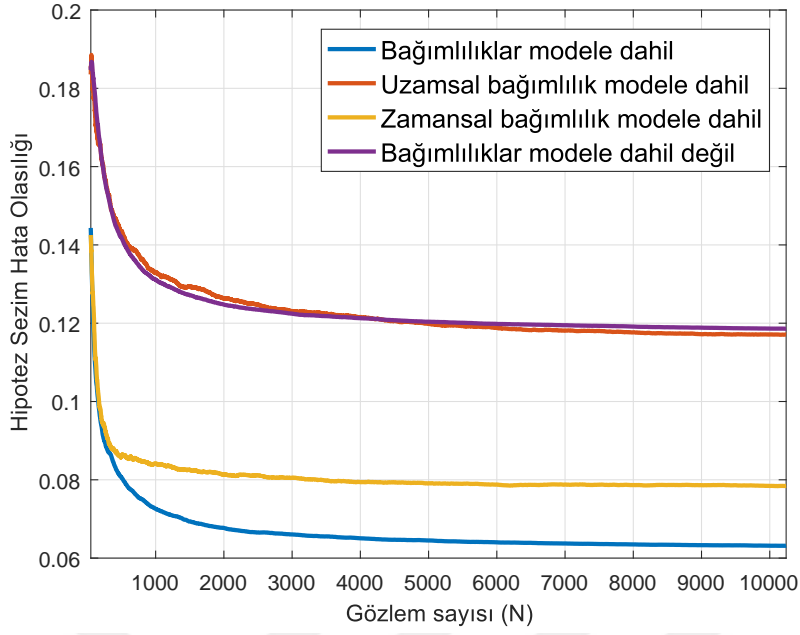
Bölüm 4.1'de hesaplanan dal metriği Eş. 4.21, korelasyon matrisi kestirimleri Eş. 4.32, ortalama değer kestirimi Eş. 4.37 formülleri sırasıyla Eş. 5.8, Eş. 5.9, Eş. 5.10'daki gibi elde edilmektedir. Zamanda bağımlılık yok sayıldığında parametresi λ_i olan tek Gauss kopula fonksiyonu vardır ($\lambda_{1,i} = \lambda_{2,i} = \lambda_i$).

$$\begin{aligned}
 \gamma(\xi_n; \Theta) &= -\log \pi_{\xi_n} + 0.5K \log 2\pi \\
 &+ 0.5(1 - z_n) \sum_{k=1}^K \log \nu_0^{(k)} + 0.5z_n \sum_{k=1}^K \log \nu_1^{(k)} \\
 &+ 0.5(1 - z_n) (\log |\lambda_0| + \mathbf{x}_0(n)^T \lambda_0^{-1} \mathbf{x}_0(n)) \\
 &+ 0.5z_n (\log |\lambda_1| + \mathbf{x}_1(n)^T \lambda_1^{-1} \mathbf{x}_1(n))
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\lambda}_0(z_n) &= \frac{\sum_{\xi_m \in \mathcal{B}_0} \mathbf{x}_0(m) \mathbf{x}_0(m)^T}{|\mathcal{B}_0|}, \\
 \hat{\lambda}_1(z_n) &= \frac{\sum_{\xi_m \in \mathcal{B}_1} \mathbf{x}_1(m) \mathbf{x}_1(m)^T}{|\mathcal{B}_1|}
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\varphi}_0(z_n) &= \frac{\sum_{m=1}^n (1 - z_m) \mathbf{y}_m}{\sum_{m=1}^n (1 - z_m)} = \frac{\sum_{\xi_m \in \mathcal{B}_0} \mathbf{y}_m}{|\mathcal{B}_0|}, \\
 \hat{\varphi}_1(z_n) &= \frac{\sum_{m=1}^n z_m \mathbf{y}_m}{\sum_{m=1}^n z_m} = \frac{\sum_{\xi_m \in \mathcal{B}_1} \mathbf{y}_m}{|\mathcal{B}_1|}
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

$\mathcal{B}_i(z_n)$, kafes diyagramında, n . zamanda durum z_n 'de sonlanan sağ kalan yol-daki, hipotez \mathcal{H}_i 'ler olarak tanımlanmıştır.



Şekil 5.10. Gauss kopula için PSP algoritmasının Senaryo 6, Senaryo 7 ve Senaryo 8 performansı

Çizelge 5.2 Senaryo 6 için, algılayıcıların marjinal dağılımının Student t olması ve algılayıcılar arası bağımlılığın t kopula ile oluşturulması durumunda, Bölüm 4.2'de hesaplanan dal metriği Eş. 4.45, korelasyon matrisi kestirimleri Eş. 4.53, ortalama değer kestirimi Eş. 4.54 formülleri sırasıyla Eş. 5.11, Eş. 5.12, Eş. 5.13'deki gibi elde edilmektedir. Zamanda bağımlılık yok sayıldığında parametresi λ_i ve μ_i olan tek t kopula fonksiyonu vardır ($\lambda_{1,i} = \lambda_{2,i} = \lambda_i$).

$$\begin{aligned}
\gamma(\xi_n; \Theta) &= -\log \pi_{\xi_n} + 0.5(1 - z_n) \sum_{k=1}^K \log \nu_0^{(k)} + 0.5z_n \sum_{k=1}^K \log \nu_1^{(k)} \\
&+ 0.5(1 - z_n) \\
&\times \left(\log |\lambda_0| + \log \left(\frac{\Gamma(\frac{\mu_0}{2})^2 (\pi \mu_0)^K}{\Gamma(\frac{\mu_0 + K}{2})^2} \left(1 + \frac{\mathbf{x}_0(n)^T \lambda_{1,0}^{-1} \mathbf{x}_0(n)}{\mu_0} \right)^{\mu_0 + K} \right) \right) \\
&+ 0.5z_n \\
&\times \left(\log |\lambda_1| + \log \left(\frac{\Gamma(\frac{\mu_1}{2})^2 (\pi \mu_1)^K}{\Gamma(\frac{\mu_1 + K}{2})^2} \left(1 + \frac{\mathbf{x}_1(n)^T \lambda_1^{-1} \mathbf{x}_1(n)}{\mu_1} \right)^{\mu_1 + K} \right) \right)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_0(z_n) &= \frac{\mu_0 + K}{|\mathcal{B}_0|} \sum_{\xi_m \in \mathcal{B}_0} \frac{\mathbf{x}_0(m) \mathbf{x}_0(m)^T}{\mu_0 + \mathbf{x}_0(m)^T \hat{\lambda}_0^{-1} \mathbf{x}_0(m)}, \\
\hat{\lambda}_1(z_n) &= \frac{\mu_1 + K}{|\mathcal{B}_1|} \sum_{\xi_m \in \mathcal{B}_1} \frac{\mathbf{x}_1(m) \mathbf{x}_1(m)^T}{\mu_1 + \mathbf{x}_1(m)^T \hat{\lambda}_1^{-1} \mathbf{x}_1(m)}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_0(z_n) &= \frac{\sum_{\xi_m \in \mathcal{B}_0} \mathbf{y}_m}{|\mathcal{B}_0|}, \\
\hat{\varphi}_1(z_n) &= \frac{\sum_{\xi_m \in \mathcal{B}_1} \mathbf{y}_m}{|\mathcal{B}_1|}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Çizelge 5.2 Senaryo 7 için, sensörler arası bağımlılık hesaba katılmadığında modelde kopulalar yer almaz. Sensörlerin marjinal dağılımlarının Gauss olması durumunda, dal metrikleri 5.14, ortalama değer kestirimleri ise Eş. 5.15'e göre bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}
\gamma(\xi_n; \Theta) &= -\log \pi_{\xi_n} + 0.5K \log 2\pi \\
&+ 0.5(1 - z_n) \sum_{k=1}^K \log \nu_0^{(k)} + 0.5z_n \sum_{k=1}^K \log \nu_1^{(k)} \\
&+ 0.5z_{n-1}(1 - z_n) \mathbf{x}_0(n)^T \lambda_{1,0}^{-1} \mathbf{x}_0(n) \\
&+ 0.5(1 - z_{n-1})(1 - z_n) \tilde{\mathbf{x}}_0(n)^T \lambda_{2,0}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0(n) \\
&+ 0.5(1 - z_{n-1})z_n \mathbf{x}_1(n)^T \lambda_{1,1}^{-1} \mathbf{x}_1(n) \\
&+ 0.5z_{n-1}z_n \tilde{\mathbf{x}}_1(n)^T \lambda_{2,1}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_1(n)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_0(z_n) &= \left(|\mathcal{A}_0| + |\tilde{\mathcal{A}}_0|(1 - \alpha)^2 \right)^{-1} \\
&\left(\sum_{\xi_m \in \mathcal{A}_0} \mathbf{y}_m + (1 - \alpha) \sum_{\xi_m \in \tilde{\mathcal{A}}_0} (\mathbf{y}_m - \alpha \mathbf{y}_{m-1}) \right), \\
\hat{\varphi}_1(z_n) &= \left(|\mathcal{A}_1| + |\tilde{\mathcal{A}}_1|(1 - \alpha)^2 \right)^{-1} \\
&\left(\sum_{\xi_m \in \mathcal{A}_1} \mathbf{y}_m + (1 - \alpha) \sum_{\xi_m \in \tilde{\mathcal{A}}_1} (\mathbf{y}_m - \alpha \mathbf{y}_{m-1}) \right)
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Çizelge 5.2 Senaryo 7 için, algılayıcıların marjinal dağılımlarının Student t olması durumunda, dal metrikleri 5.16, ortalama kestirimi ise Eş. 5.17'ye göre bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}
\gamma(\xi_n; \Theta) = & -\log \pi_{\xi_n} + 0.5(1 - z_n) \sum_{k=1}^K \log \nu_0^{(k)} + 0.5z_n \sum_{k=1}^K \log \nu_1^{(k)} \\
& + 0.5z_{n-1}(1 - z_n) \times \\
& \log \left(\frac{\Gamma \left(\frac{\mu_{1,0}}{2} \right)^2 (\pi \mu_{1,0})^K}{\Gamma \left(\frac{\mu_{1,0}+K}{2} \right)^2} \left(1 + \frac{\mathbf{x}_0(n)^T \mathbf{x}_0(n)}{\mu_{1,0}} \right)^{\mu_{1,0}+K} \right) \\
& + 0.5(1 - z_{n-1})(1 - z_n) \times \\
& \log \left(\frac{\Gamma \left(\frac{\mu_{2,0}}{2} \right)^2 (\pi \mu_{2,0})^K}{\Gamma \left(\frac{\mu_{2,0}+K}{2} \right)^2} \left(1 + \frac{\tilde{\mathbf{x}}_0(n)^T \tilde{\mathbf{x}}_0(n)}{\mu_{2,0}} \right)^{\mu_{2,0}+K} \right) \\
& + 0.5(1 - z_{n-1})z_n \times \\
& \log \left(\frac{\Gamma \left(\frac{\mu_{1,1}}{2} \right)^2 (\pi \mu_{1,1})^K}{\Gamma \left(\frac{\mu_{1,1}+K}{2} \right)^2} \left(1 + \frac{\mathbf{x}_1(n)^T \mathbf{x}_1(n)}{\mu_{1,1}} \right)^{\mu_{1,1}+K} \right) \\
& + 0.5z_{n-1}z_n \times \\
& \log \left(\frac{\Gamma \left(\frac{\mu_{2,1}}{2} \right)^2 (\pi \mu_{2,1})^K}{\Gamma \left(\frac{\mu_{2,1}+K}{2} \right)^2} \left(1 + \frac{\tilde{\mathbf{x}}_1(n)^T \tilde{\mathbf{x}}_1(n)}{\mu_{2,1}} \right)^{\mu_{2,1}+K} \right) \tag{5.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_0(z_n) &= \frac{\sum_{\xi_m \in \mathcal{B}_0} \mathbf{y}_m}{|\mathcal{B}_0|}, \\
\hat{\varphi}_1(z_n) &= \frac{\sum_{\xi_m \in \mathcal{B}_1} \mathbf{y}_m}{|\mathcal{B}_1|} \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Çizelge 5.2 Senaryo 8 için, algılayıcıların marjinal dağılımlarının Gauss olması durumunda, dal metrikleri 5.18, ortalama kestirimi ise Eş. 5.19'a göre bulunur.

$$\gamma(\xi_n; \Theta) = -\log \pi_{\xi_n} + 0.5K \log 2\pi$$

$$\begin{aligned}
& + 0.5(1 - z_n) \sum_{k=1}^K \log \nu_0^{(k)} + 0.5z_n \sum_{k=1}^K \log \nu_1^{(k)} \\
& + 0.5(1 - z_n) \mathbf{x}_0(n)^T \mathbf{x}_0(n) + 0.5z_n \mathbf{x}_1(n)^T \mathbf{x}_1(n)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_0(z_n) &= \frac{\sum_{\xi_m \in \mathcal{B}_0} \mathbf{y}_m}{|\mathcal{B}_0|}, \\
\hat{\varphi}_1(z_n) &= \frac{\sum_{\xi_m \in \mathcal{B}_1} \mathbf{y}_m}{|\mathcal{B}_1|}
\end{aligned} \tag{5.19}$$

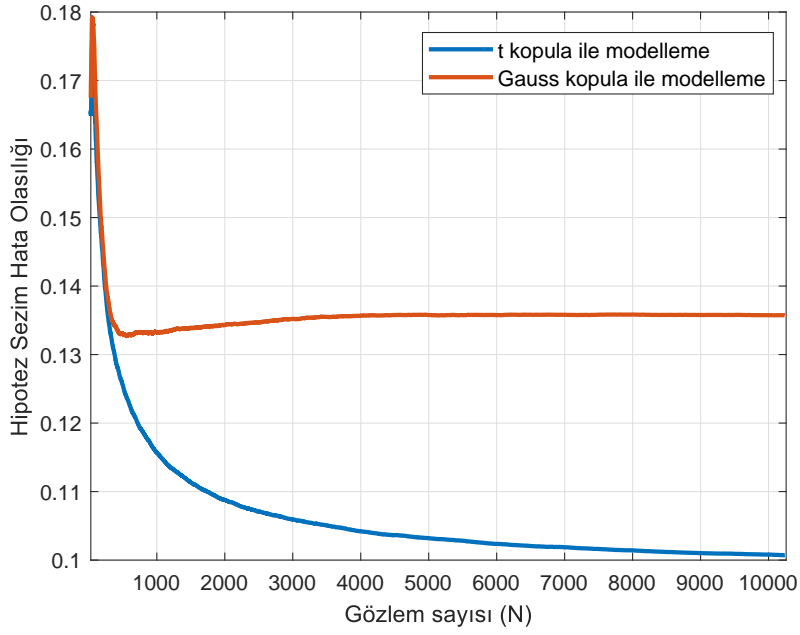
Çizelge 5.2 Senaryo 8 için, algılayıcıların marjinal dağılımlarının Student t olması durumunda, dal metrikleri 5.20, ortalama kestirimi ise Eş. 5.19'a göre bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}
\gamma(\xi_n; \Theta) &= -\log \pi_{\xi_n} + 0.5(1 - z_n) \sum_{k=1}^K \log \nu_0^{(k)} + 0.5z_n \sum_{k=1}^K \log \nu_1^{(k)} \\
& + 0.5(1 - z_n) \times \left(\log \left(\frac{\Gamma(\frac{\mu_0}{2})^2 (\pi \mu_0)^K}{\Gamma(\frac{\mu_0+K}{2})^2} \left(1 + \frac{\mathbf{x}_0(n)^T \mathbf{x}_0(n)}{\mu_0} \right)^{\mu_0+K} \right) \right) \\
& + 0.5z_n \times \left(\log \left(\frac{\Gamma(\frac{\mu_1}{2})^2 (\pi \mu_1)^K}{\Gamma(\frac{\mu_1+K}{2})^2} \left(1 + \frac{\mathbf{x}_1(n)^T \mathbf{x}_1(n)}{\mu_1} \right)^{\mu_1+K} \right) \right)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Benzetimler Bölüm 4'de verilen Eş. 4.3, Eş. 4.4'de yer alan C_1 ve C_2 kopula fonksiyonlarının parametrik olarak bilindiği ve bilinmediği iki farklı durum için yapılmıştır. Çizelge 5.1'de Senaryo 1 için, t kopulaya göre oluşturulan bağımlı veriler için modellemede Gauss kopula kullanılması durumunda hipotez seziminde yaşanan performans kaybı Şekil 5.11'de verilmiştir.

5.1 EM Algoritması

Bu bölümde bu tez çalışmasında ele alınan problemin literatürdeki alternatif çözümü olan EM algoritması anlatılmaktadır.



Şekil 5.11. t kopula ile oluşturulan bağımlılığın Gauss kopula ile modellenmesinin performansa etkisi

Gözlem süresi boyunca alınan gözlemlerin bileşik PDF'leri,

$$p(\mathcal{Y}|\mathcal{z}; \Theta) = \prod_{n=1}^N p(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}, z_n, z_{n-1}; \Theta), \quad (5.21)$$

olarak ifade edilmektedir. Eş. 5.21'de verilen $p(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}, z_n, z_{n-1}; \Theta)$ Eş. 5.22'de açıklanmıştır.

$$p(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}, z_n, z_{n-1}; \Theta) = f_0(\mathbf{y}_n; \Theta)^{z_{n-1}(1-z_n)} f_0(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}; \Theta)^{(1-z_{n-1})(1-z_n)} \\ \times f_1(\mathbf{y}_n; \Theta)^{(1-z_{n-1})z_n} f_1(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}; \Theta)^{z_{n-1}z_n} \quad (5.22)$$

n . zamanda \mathcal{H}_i hipotezinin ortaya çıkma olasılığı, $\{\phi_{i,n}; i = 0, 1\}$ olarak tanımlanmıştır. n . zamanda \mathcal{H}_i , $n - 1$. zamanda ise \mathcal{H}_j hipotezinin ortaya çıkma

olasılığı ise $\tilde{\phi}_{i,j,n} = Pr(z_n = i, z_{n-1} = j)$ olarak tanımlanmıştır. Bu durumda;

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{0,0,1} & \tilde{\phi}_{0,0,2} \cdots \tilde{\phi}_{0,0,N} \\ \tilde{\phi}_{0,1,1} & \tilde{\phi}_{0,1,2} \cdots \tilde{\phi}_{0,1,N} \\ \tilde{\phi}_{1,0,1} & \tilde{\phi}_{1,0,2} \cdots \tilde{\phi}_{1,0,N} \\ \tilde{\phi}_{1,1,1} & \tilde{\phi}_{1,1,2} \cdots \tilde{\phi}_{1,1,N} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

için;

$$\begin{aligned} \phi_{0,n} &= \tilde{\phi}_{0,0,n} + \tilde{\phi}_{0,1,n} \\ \phi_{1,n} &= \tilde{\phi}_{1,0,n} + \tilde{\phi}_{1,1,n} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Alınan gözlemler ile bilinmeyen parametrelerin ML kestirimi:

$$\hat{\Theta} = \arg \max_{\Theta} \log p(\mathcal{Y}|\mathbf{z}; \Theta), \quad (5.25)$$

Eş. 5.25'de verilen $p(\mathcal{Y}|\Theta)$ bilinmediğinden, $\sum_z p(\mathcal{Y}, z|\Theta)$ ile elde edilir. $p(\mathcal{Y}, z|\Theta)$:

$$\begin{aligned} p(\mathcal{Y}, z|\Theta) &= p(\mathcal{Y}|\mathbf{z}; \Theta)p(\mathbf{z}|\Theta) \\ &= \prod_{n=1}^N (P(z_n = 0|z_{n-1} = 1)f_0(\mathbf{y}_n; \Theta))^{z_{n-1}(1-z_n)} \\ &\quad \times (P(z_n = 0|z_{n-1} = 0)f_0(\mathbf{y}_n|\mathbf{y}_{n-1}; \Theta))^{(1-z_{n-1})(1-z_n)} \\ &\quad \times (P(z_n = 1|z_{n-1} = 0)f_1(\mathbf{y}_n; \Theta))^{(1-z_{n-1})z_n} \\ &\quad \times (P(z_n = 1|z_{n-1} = 1)f_1(\mathbf{y}_n|\mathbf{y}_{n-1}; \Theta))^{z_{n-1}z_n} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Eş. 5.26, Eş. 4.3, Eş. 4.4 ve Eş. 5.24 kullanılarak,

$$\begin{aligned} p(\mathcal{Y}, z|\Theta) &= p(\mathcal{Y}|\mathbf{z}; \Theta)p(\mathbf{z}|\Theta) \\ &= \prod_{n=1}^N \left(\frac{\tilde{\phi}_{0,1,n}}{\phi_{1,n}} \left(\prod_{k=1}^K f_0^{(k)}(y_{n,k}; \varphi_0^{(k)}) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \left(F_0^{(1)}(y_{n,1}; \varphi_0^{(1)}), \dots, F_0^{(K)}(y_{n,K}; \varphi_0^{(K)}); \lambda_{1,0} \right)^{z_{n-1}(1-z_n)} \\
& \times \left(\frac{\tilde{\phi}_{0,0,n}}{\phi_{0,n}} \left(\prod_{k=1}^K f_0^{(k)}(y_{n,k} | y_{n-1,k}; \tilde{\varphi}_0^{(k)}) \right) \right. \\
& c_2 \left(F_0^{(1)}(y_{n,1} | y_{n-1,1}; \tilde{\varphi}_0^{(1)}), \dots, F_0^{(K)}(y_{n,K} | y_{n-1,K}; \tilde{\varphi}_0^{(K)}); \lambda_{2,0} \right)^{(1-z_{n-1})(1-z_n)} \\
& \times \left(\frac{\tilde{\phi}_{1,0,n}}{\phi_{0,n}} \left(\prod_{k=1}^K f_1^{(k)}(y_{n,k}; \varphi_1^{(k)}) \right) \right. \\
& c_1 \left(F_1^{(1)}(y_{n,1}; \varphi_1^{(1)}), \dots, F_1^{(K)}(y_{n,K}; \varphi_1^{(K)}); \lambda_{1,1} \right)^{(1-z_{n-1})z_n} \\
& \times \left(\frac{\tilde{\phi}_{1,1,n}}{\phi_{1,n}} \left(\prod_{k=1}^K f_1^{(k)}(y_{n,k} | y_{n-1,k}; \tilde{\varphi}_1^{(k)}) \right) \right. \\
& c_2 \left(F_1^{(1)}(y_{n,1} | y_{n-1,1}; \tilde{\varphi}_1^{(1)}), \dots, F_1^{(K)}(y_{n,K} | y_{n-1,K}; \tilde{\varphi}_1^{(K)}); \lambda_{2,1} \right)^{z_{n-1}z_n} \\
\end{aligned} \tag{5.27}$$

olarak bulunmaktadır. [1]'de bilinmeyen parametre seti Φ kestirimleri için, parametrelerin en büyük olabilirlik (ML) ya da en büyük sonsal olasılık (MAP) kestirimlerini bulmak için yinelemeli bir algoritma olan EM algoritması kullanılmıştır. z algoritmada saklı değişken olarak seçilmiştir.

EM algoritmasının ' E ' adımında; verilen \mathcal{Y} gözlemleri ve en son döngüde tahmin edilen Φ parametre seti ile, $L(\Phi; \mathcal{Y}, z) = \log p(\mathcal{Y}, z | \Theta)$ olarak tanımlanan olabilirlik fonksiyonunun z 'lere göre beklentisi ($Q(\Phi; \Phi^{old}) = E_{z|\mathcal{Y}, \Phi}[L(\Phi; \mathcal{Y}, z)]$) hesaplanmıştır (Eş. 5.29).

$$\begin{aligned}
Q(\Phi; \Phi^{old}) = & \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \alpha_1(0, n) \left(\frac{1}{K} \log \left(\frac{\tilde{\phi}_{0,1,n}}{\tilde{\phi}_{1,0,n-1} + \tilde{\phi}_{1,1,n-1}} \right) + f_0^{(k)}(y_{n,k}; \varphi_0^{(k)}) \right. \\
& \left. + \frac{1}{K} c_1 \left(F_0^{(1)}(y_{n,1}; \varphi_0^{(1)}), \dots, F_0^{(K)}(y_{n,K}; \varphi_0^{(K)}); \lambda_{1,0} \right) \right) \\
& + \alpha_2(0, n) \left(\frac{1}{K} \log \left(\frac{\tilde{\phi}_{0,0,n}}{\tilde{\phi}_{0,0,n-1} + \tilde{\phi}_{0,1,n-1}} \right) + f_0^{(k)}(y_{n,k} | y_{n-1,k}; \tilde{\varphi}_0^{(k)}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{K} c_2 \left(F_0^{(1)}(y_{n,1}|y_{n-1,1}; \tilde{\varphi}_0^{(1)}), \dots, F_0^{(K)}(y_{n,K}|y_{n-1,K}; \tilde{\varphi}_0^{(K)}); \lambda_{2,0} \right) \\
& + \alpha_1(1, n) \left(\frac{1}{K} \log \left(\frac{\tilde{\phi}_{0,0,n}}{\tilde{\phi}_{0,0,n-1} + \tilde{\phi}_{0,1,n-1}} \right) + f_1^{(k)}(y_{n,k}; \varphi_1^{(k)}) \right. \\
& + \frac{1}{K} c_1 \left(F_1^{(1)}(y_{n,1}; \varphi_1^{(1)}), \dots, F_1^{(K)}(y_{n,K}; \varphi_1^{(K)}); \lambda_{1,1} \right) \\
& + \alpha_2(1, n) \left(\frac{1}{K} \log \left(\frac{\tilde{\phi}_{1,1,n}}{\tilde{\phi}_{1,0,n-1} + \tilde{\phi}_{1,1,n-1}} \right) + f_1^{(k)}(y_{n,k}|y_{n-1,k}; \tilde{\varphi}_1^{(k)}) \right. \\
& + \frac{1}{K} c_2 \left(F_1^{(1)}(y_{n,1}|y_{n-1,1}; \tilde{\varphi}_1^{(1)}), \dots, F_1^{(K)}(y_{n,K}|y_{n-1,K}; \tilde{\varphi}_1^{(K)}); \lambda_{2,1} \right) \\
& \left. + \left(\frac{\tilde{\phi}_{1,1,n}}{\phi_{1,n}} \left(\prod_{k=1}^K f_1^{(k)}(y_{n,k}|y_{n-1,k}; \tilde{\varphi}_1^{(k)}) \right) \right) \right) \quad (5.28)
\end{aligned}$$

$i = 0, 1$ için Eş. 5.28'deki $\alpha_1(i, n)$ ve $\alpha_2(i, n)$

$$\begin{aligned}
\alpha_1(i, n) &= E[z_n = i, z_{n-1} = 1 - i | \mathbf{Y}; \Phi^{old}] \\
\alpha_2(i, n) &= E[z_n = i, z_{n-1} = i | \mathbf{Y}; \Phi^{old}] \quad (5.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1(i, n) &= \frac{\sum_{\tilde{z}} Pr(\mathbf{Y}, z_n = i, z_{n-1} = 1 - i, \tilde{z} | \Phi^{old})}{\sum_{\mathbf{z}} Pr(\mathbf{Y}, \mathbf{z} | \Phi^{old})} \\
\alpha_2(i, n) &= \frac{\sum_{\tilde{z}} Pr(\mathbf{Y}, z_n = i, z_{n-1} = i, \tilde{z} | \Phi^{old})}{\sum_{\mathbf{z}} Pr(\mathbf{Y}, \mathbf{z} | \Phi^{old})} \quad (5.30)
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Eş. 5.30'daki \tilde{z} ifadesi n ve $n - 1$ dışında kalan $N - 2$ zaman için durum dizilimidir. Bu ifade N uzunluğundaki tüm olası diziler üzerinden toplama gerektirdiğinden, işlem sayısı N ile birlikte üstel olarak artar. Bu nedenle n zamandaki durum ile ilgili tahmin yapılırken yalnızca n ve $n - 1$ zamanındaki veriler hesaba katılmıştır.

$$\begin{aligned}
\alpha_1(i, n) &= \frac{Pr(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1} | z_n = i, z_{n-1} = 1 - i, \Phi^{old}) \tilde{\phi}_{i,1-i,n}}{\sum_{j=0}^1 \sum_{l=0}^1 Pr(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1} | z_n = i, z_{n-1} = l, \Phi^{old}) \tilde{\phi}_{j,l,n}} \\
\alpha_2(i, n) &= \frac{Pr(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1} | z_n = i, z_{n-1} = i, \Phi^{old}) \tilde{\phi}_{i,i,n}}{\sum_{j=0}^1 \sum_{l=0}^1 Pr(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1} | z_n = i, z_{n-1} = l, \Phi^{old}) \tilde{\phi}_{j,l,n}} \quad (5.31)
\end{aligned}$$

5.31'de yer alan $Pr(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1} | z_n = i, z_{n-1} = 1 - i, \Phi^{old})$ ve $Pr(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1} | z_n = i, z_{n-1} = i, \Phi^{old})$ ifadesi;

$$\begin{aligned}
Pr(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1} | z_n = i, z_{n-1} = 1 - i, \Phi^{old}) &= \\
Pr(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}, z_n = i, z_{n-1} = 1 - i, \Phi^{old}) Pr(\mathbf{y}_{n-1} | z_n = i, z_{n-1} = 1 - i, \Phi^{old}) & \\
Pr(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1} | z_n = i, z_{n-1} = i, \Phi^{old}) &= \\
Pr(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{n-1}, z_n = i, z_{n-1} = i, \Phi^{old}) Pr(\mathbf{y}_{n-1} | z_n = i, z_{n-1} = i, \Phi^{old}) &
\end{aligned}$$

ifadelerine eşittir. Eş.4.3 ve Eş. 4.4 kullanılarak bu ifadeler;

$$\begin{aligned}
Pr(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1} | z_n = i, z_{n-1} = 1 - i, \Phi^{old}) &= \\
= \left(c_1 \left(F_i^{(1)}(y_{n,1}; \varphi_i^{(1)}), \dots, F_i^{(K)}(y_{n,K}; \varphi_i^{(K)}); \lambda_{1,i} \right) \prod_{k=1}^K f_i^{(k)}(y_{n,k}; \varphi_i^{(k)}) \right) & \\
\times \left(c_1 \left(F_{1-i}^{(1)}(y_{n-1,1}; \varphi_{1-i}^{(1)}), \dots, F_{1-i}^{(K)}(y_{n-1,K}; \varphi_{1-i}^{(K)}); \lambda_{1,1-i} \right) \prod_{k=1}^K f_{1-i}^{(k)}(y_{n-1,k}; \varphi_{1-i}^{(k)}) \right) & \\
Pr(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1} | z_n = i, z_{n-1} = i, \Phi^{old}) &= \\
= \left(c_2 \left(F_i^{(1)}(y_{n,1} | y_{n-1,1}; \tilde{\varphi}_i^{(1)}), \dots, F_i^{(K)}(y_{n,K} | y_{n-1,K}; \tilde{\varphi}_i^{(K)}); \lambda_{2,i} \right) \right) & \\
\times \prod_{k=1}^K f_i^{(k)}(y_{n,k} | y_{n-1,k}; \tilde{\varphi}_i^{(k)}) & \\
\times \left(c_1 \left(F_i^{(1)}(y_{n-1,1}; \varphi_i^{(1)}), \dots, F_i^{(K)}(y_{n-1,K}; \varphi_i^{(K)}); \lambda_{1,i} \right) \prod_{k=1}^K f_i^{(k)}(y_{n-1,k}; \varphi_i^{(k)}) \right) & \\
& \tag{5.32}
\end{aligned}$$

olarak bulunmuştur.

EM algoritmasının 'M' adımında; $(\Phi; \Phi^{old})$ fonksiyonunu en büyük yapan parametre seti, bir sonraki döngüdeki parametre tahminleri olarak belirlenmiştir.

$Q(\Phi; \Phi^{old})$ fonksiyonunu $\{\tilde{\phi}_{i,j,n}, i = 0, 1\}$ 'a göre büyütmek için, $\sum_{i=0}^1 (\phi_{i,i,n} +$

$\phi_{i,1-i,n} = 1$ kısıtı kullanılmıştır. \mathcal{L}_ϕ Lagrange fonksiyonundaki;

$$\mathcal{L}_\phi = Q(\Phi; \Phi^{old}) + \lambda_\phi \left[\sum_{i=0}^1 (\tilde{\phi}_{i,i,n} + \tilde{\phi}_{i,1-i,n}) - 1 \right] \quad (5.33)$$

λ_ϕ Lagrange çarpanını bulmak için;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_{i,i,n}} &= \frac{\alpha_2(i, n)}{\tilde{\phi}_{i,i,n}} + \lambda_\phi = \alpha_2(i, n) + \lambda_\phi \tilde{\phi}_{i,i,n} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_{i,1-i,n}} &= \frac{\alpha_1(i, n)}{\tilde{\phi}_{i,1-i,n}} + \lambda_\phi = \alpha_1(i, n) + \lambda_\phi \tilde{\phi}_{i,1-i,n} = 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

ifadelerini taraf tarafa toplanarak;

$$\alpha_2(i, n) + \alpha_1(i, n) + \lambda_\phi [\tilde{\phi}_{i,i,n} + \tilde{\phi}_{i,1-i,n}] = 0 \quad (5.35)$$

$\sum_{i=0}^1 (\phi_{i,i,n} + \phi_{i,1-i,n}) = 1$ olduğundan, $\lambda_\phi = -1$ olarak bulunmuştur. Bu değer Eş. 5.34'de yerine koyulduğunda, bilinmeyen parametreler $\phi_{i,i,n}$ ve $\phi_{i,1-i,n}$,

$$\begin{aligned} \alpha_2(i, n) &= \phi_{i,i,n} \\ \alpha_1(i, n) &= \phi_{i,1-i,n} \end{aligned} \quad (5.36)$$

olarak bulunmuştur.

$Q(\Phi; \Phi^{old})$ fonksiyonunu \mathcal{H}_i hipotezi altındaki sensörlerin marjinal dağılımlarındaki ortalama $\varphi_i^{(k)}$ 'ya göre büyötmek için, $\int_0^1 \dots \int_0^1 f_i^{(k)}(x; \varphi_i^{(k)}) dx = 1$, $1 \leq k \leq K$, $i = 0, 1$ kısıtı kullanılmıştır.

$Q(\Phi; \Phi^{old})$ fonksiyonunu, kopula dağılımlarının parametresi $\lambda_{j,i}$ 'ye göre büyötmek için, $\int_{-\infty}^{\infty} c_j(\mathbf{x}; \lambda_{j,i}) d\mathbf{x} = 1$, $j = 1, 2$, $i = 0, 1$ kısıtı kullanılmıştır. \mathbf{x} rasgele değişkenleri birbiçimli dağılıma sahip olduklarından, integral $[0, 1]$ aralığında alınmıştır.

Gauss kopula fonksiyonları için, Eş. 5.28'e Eş. 4.17 - Eş. 4.20'deki ifadeleri yerine koyduğumuzda, $Q(\Phi; \Phi^{old})$ fonksiyonunu, kopula dağılımlarının parametresi $\lambda_{j,i}$ 'ye göre en-büyütmek, aşağıda verilen fonksiyonlara göre en-küçültmeye denk olmaktadır.

$$r(1, i) = \sum_{n=1}^N \alpha_1(i, n) (\log |\lambda_{1,i}| + \mathbf{x}_i(n)^T \lambda_{1,i}^{-1} \mathbf{x}_i(n))$$

$$r(2, i) = \sum_{n=1}^N \alpha_2(i, n) (\log |\lambda_{2,i}| + \tilde{\mathbf{x}}_i(n)^T \lambda_{2,i}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_i(n))$$

Yukarıdaki ifadelerin $\lambda_{j,i}$ 'lara göre gradyanlarını alıp sıfıra eşitlediğimizde:

$$\hat{\lambda}_{1,0} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_{1,0}} \sum_{n=1}^N \alpha_1(0, n) (\log |\lambda_{1,0}| + \mathbf{x}_0(n)^T \lambda_{1,0}^{-1} \mathbf{x}_0(n)) = \mathbf{0}$$

$$\hat{\lambda}_{1,1} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_{1,1}} \sum_{n=1}^N \alpha_1(1, n) (\log |\lambda_{1,1}| + \mathbf{x}_1(n)^T \lambda_{1,1}^{-1} \mathbf{x}_1(n)) = \mathbf{0}$$

$$\hat{\lambda}_{2,0} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_{2,0}} \sum_{n=1}^N \alpha_2(0, n) (\log |\lambda_{2,0}| + \tilde{\mathbf{x}}_0(n)^T \lambda_{2,0}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0(n)) = \mathbf{0}$$

$$\hat{\lambda}_{2,1} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_{2,1}} \sum_{n=1}^N \alpha_2(1, n) (\log |\lambda_{2,1}| + \tilde{\mathbf{x}}_1(n)^T \lambda_{2,1}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_1(n)) = \mathbf{0}$$

Eş. 4.29 ve Eş. 4.30 kullanarak ilinti matrislerinin her bir döngüdeki kestirimleri için,

$$\hat{\lambda}_{1,0}(z_n) = \frac{\sum_{n=1}^N \mathbf{x}_0(n) \mathbf{x}_0(n)^T}{\sum_{n=1}^N \alpha_1(0, n)},$$

$$\hat{\lambda}_{1,1}(z_n) = \frac{\sum_{n=1}^N \mathbf{x}_1(n) \mathbf{x}_1(n)^T}{\sum_{n=1}^N \alpha_1(1, n)},$$

$$\hat{\lambda}_{2,0}(z_n) = \frac{\sum_{n=1}^N \tilde{\mathbf{x}}_0(n) \tilde{\mathbf{x}}_0(n)^T}{\sum_{n=1}^N \alpha_2(0, n)},$$

$$\hat{\lambda}_{2,1}(z_n) = \frac{\sum_{n=1}^N \tilde{\mathbf{x}}_1(n) \tilde{\mathbf{x}}_1(n)^T}{\sum_{n=1}^N \alpha_2(1, n)} \quad (5.37)$$

olarak bulunmuştur.

Gauss kopula fonksiyonları için, Eş. 5.28'e Eş. 4.17 - Eş. 4.20'deki ifadeleri ye-

rine koyduğumuzda, $Q(\Phi; \Phi^{old})$ fonksiyonunu, φ_i vektörlerine göre en-büyütmek, aşağıda verilen fonksiyonlara göre en-küçültmeye denk olmaktadır.

$$r(\varphi_i) = \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_1(i, n)}{2} \mathbf{x}_i(n)^T \lambda_{1,i}^{-1} \mathbf{x}_i(n) + \frac{\alpha_2(i, n)}{2} \tilde{\mathbf{x}}_i(n)^T \lambda_{2,i}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_i(n)$$

Yukarıdaki ifadelerin φ_i 'lara göre gradyanlarını alıp sıfıra eşitlediğimizde:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \sum_{n=1}^N \alpha_1(0, n) \mathbf{x}_0(n)^T \lambda_{1,0}^{-1} \mathbf{x}_0(n) + \frac{\alpha_2(0, n)}{2} \tilde{\mathbf{x}}_0(n)^T \lambda_{2,0}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0(n) = \mathbf{0} \\ \hat{\varphi}_1 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \sum_{n=1}^N \alpha_1(1, n) \mathbf{x}_1(n)^T \lambda_{1,1}^{-1} \mathbf{x}_1(n) + \frac{\alpha_2(1, n)}{2} \tilde{\mathbf{x}}_1(n)^T \lambda_{2,1}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_1(n) = \mathbf{0} \quad (5.38) \end{aligned}$$

Eş. 4.35 ve Eş. 4.36 kullanarak \mathcal{H}_i hipotezi altındaki ortalama değerlerinin her bir döngüdeki kestirimleri,

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_0 &= \Delta_0 \left(\sum_{n=1}^N \alpha_1(0, n) \hat{\lambda}_{1,0}^{-1} + \alpha_2(0, n) \hat{\lambda}_{2,0}^{-1} (1 - \alpha)^2 \right)^{-1} \\ &\quad \left(\hat{\lambda}_{1,0}^{-1} \Delta_0^{-1} \sum_{n=1}^N \alpha_1(0, n) \mathbf{y}_n + \hat{\lambda}_{2,0}^{-1} \Delta_0^{-1} (1 - \alpha) \sum_{n=1}^N \alpha_2(0, n) (\mathbf{y}_n - \alpha \mathbf{y}_{n-1}) \right), \\ \hat{\varphi}_1 &= \Delta_1 \left(\sum_{n=1}^N \alpha_1(1, n) \hat{\lambda}_{1,1}^{-1} + \alpha_2(1, n) \hat{\lambda}_{2,1}^{-1} (1 - \alpha)^2 \right)^{-1} \\ &\quad \left(\hat{\lambda}_{1,1}^{-1} \Delta_1^{-1} \sum_{n=1}^N \alpha_1(1, n) \mathbf{y}_n + \hat{\lambda}_{2,1}^{-1} \Delta_1^{-1} (1 - \alpha) \sum_{n=1}^N \alpha_2(1, n) (\mathbf{y}_n - \alpha \mathbf{y}_{n-1}) \right), \end{aligned} \quad (5.39)$$

ile elde edilmektedir. EM algoritmasının 'E' adımında hesaplanan $\alpha_j(i, n)$ (Eş. 5.31) değerleri, Gauss kopula için, Eş. 4.17, Eş. 4.18, Eş. 4.19, Eş. 4.20 kullanılarak,

$$\begin{aligned} P_{10}(n) &= \tilde{\phi}_{0,1,n} \left(|\hat{\lambda}_{1,0}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}_0(n)^T (\hat{\lambda}_{1,0}^{-1} - \mathbf{I}_K) \mathbf{x}_0(n) \right) \right) \\ &\quad \times \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu_0^{(k)}}} \exp \left(-\frac{x_0^{(k)}(n)^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times |\hat{\lambda}_{1,1}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}_1(n-1)^T(\hat{\lambda}_{1,1}^{-1} - \mathbf{I}_K)\mathbf{x}_1(n-1)\right) \\ & \times \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu_1^{(k)}}} \exp\left(-\frac{x_1^{(k)}(n-1)^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{01}(n) &= \tilde{\phi}_{1,0,n} \left(|\hat{\lambda}_{1,1}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}_1(n)^T(\hat{\lambda}_{1,1}^{-1} - \mathbf{I}_K)\mathbf{x}_1(n)\right) \right. \\ & \times \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu_1^{(k)}}} \exp\left(-\frac{x_1^{(k)}(n)^2}{2}\right) \\ & \times |\hat{\lambda}_{1,0}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}_0(n-1)^T(\hat{\lambda}_{1,0}^{-1} - \mathbf{I}_K)\mathbf{x}_0(n-1)\right) \\ & \left. \times \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu_0^{(k)}}} \exp\left(-\frac{x_0^{(k)}(n-1)^2}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{00}(n) &= \tilde{\phi}_{0,0,n} \left(|\hat{\lambda}_{2,0}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}_0(n)^T(\hat{\lambda}_{2,0}^{-1} - \mathbf{I}_K)\tilde{\mathbf{x}}_0(n)\right) \right. \\ & \times \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu_0^{(k)}}} \exp\left(-\frac{\tilde{x}_0^{(k)}(n)^2}{2}\right) \\ & \times |\hat{\lambda}_{1,0}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}_0(n-1)^T(\hat{\lambda}_{1,0}^{-1} - \mathbf{I}_K)\mathbf{x}_0(n-1)\right) \\ & \left. \times \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu_0^{(k)}}} \exp\left(-\frac{x_0^{(k)}(n-1)^2}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{11}(n) &= \tilde{\phi}_{1,1,n} \left(|\hat{\lambda}_{2,1}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}_1(n)^T(\hat{\lambda}_{2,1}^{-1} - \mathbf{I}_K)\tilde{\mathbf{x}}_1(n)\right) \right. \\ & \times \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu_1^{(k)}}} \exp\left(-\frac{\tilde{x}_1^{(k)}(n)^2}{2}\right) \\ & \left. \times |\hat{\lambda}_{1,1}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}_1(n-1)^T(\hat{\lambda}_{1,1}^{-1} - \mathbf{I}_K)\mathbf{x}_1(n-1)\right) \right) \end{aligned}$$

$$\times \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu_1^{(k)}}} \exp\left(-\frac{x_1^{(k)}(n-1)^2}{2}\right)$$

ifadeleri için;

$$\begin{aligned}\alpha_1(0, n) &= \frac{P_{10}(n)}{P_{00}(n) + P_{01}(n) + P_{10}(n) + P_{11}(n)}, \\ \alpha_1(1, n) &= \frac{P_{01}(n)}{P_{00}(n) + P_{01}(n) + P_{10}(n) + P_{11}(n)}, \\ \alpha_2(0, n) &= \frac{P_{00}(n)}{P_{00}(n) + P_{01}(n) + P_{10}(n) + P_{11}(n)}, \\ \alpha_2(1, n) &= \frac{P_{11}(n)}{P_{00}(n) + P_{01}(n) + P_{10}(n) + P_{11}(n)},\end{aligned}\tag{5.40}$$

olarak bulunur. Kestirilen $\alpha_j(i, n) = \tilde{\phi}$ olasılık değerleri için n . zaman için hipotez tahmini,

$$\begin{aligned}\phi_{0,n} &= \tilde{\phi}_{0,0,n} + \tilde{\phi}_{0,1,n} = \alpha_2(0, n) + \alpha_1(0, n) \\ \phi_{1,n} &= \tilde{\phi}_{1,0,n} + \tilde{\phi}_{1,1,n} = \alpha_2(1, n) + \alpha_1(1, n)\end{aligned}\tag{5.41}$$

için, Eş. 5.42'ye göre yapılmıştır.

$$\phi_{0,n} \underset{\mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_0}{\geq}} \phi_{1,n}\tag{5.42}$$

Algoritma 3: EM algoritmasına dayalı parametre seti, Φ , kestirimi ve hipotez sezimi

N : gözlem süresi

K : sensör sayısı

Bilinen Parametreler: α

İklendirme:

$$\hat{\varphi}_0^{(k)}(z_1) \sim \mathcal{N}(\varphi_0^{(k)}, \sigma^2),$$

$$\hat{\varphi}_1^{(k)}(z_1) \sim \mathcal{N}(\varphi_1^{(k)}, \sigma^2),$$

$$\hat{\lambda}_{j,i}(z_1) = I_K, \quad j = 1, 2 \quad i = 0, 1$$

$$\phi_{i,j,n} = 0.25, \quad n = 1, \dots, N$$

while $E_{conv} > E_{threshold}$ **do**

1 E adımı:

2 Gaussian kopula için, Eş. 5.31'i kullanarak $\alpha_j(i, n)$ hesapla,

3 M adımı:

4 Gaussian kopula için, Eş. 5.37'yi kullanarak ilinti matris kestirimlerini güncelle ($\hat{\lambda}_{j,i}; j = 1, 2 \quad i = 0, 1$);

5 Bulunan ilinti matrislerine en yakın geçerli ilinti matrislerini bul ([38])

$$(\hat{\lambda}_{j,i}; j = 1, 2 \quad i = 0, 1);$$

6 Gaussian kopula için Eş. 5.39'u kullanarak ortalama değer kestirimlerini güncelle ($\hat{\varphi}_i, i = 0, 1$);

7 Yakınsama kriterini hesapla:

$$E_\phi = \frac{1}{2K} \sum_{i=0}^1 \sum_{k=1}^K \left| \frac{\hat{\varphi}_i^{(k)} - (\hat{\varphi}_i^{(k)})^{old}}{(\hat{\varphi}_i^{(k)})^{old}} \right|, \quad E_\lambda = \frac{1}{4K^2} \sum_{j=1}^2 \sum_{i=0}^1 \frac{\|\hat{\lambda}_{j,i} - (\hat{\lambda}_{j,i})^{old}\|_1}{\|(\hat{\lambda}_{j,i})^{old}\|_1}$$
$$E_{conv} = E_\phi + E_\lambda$$

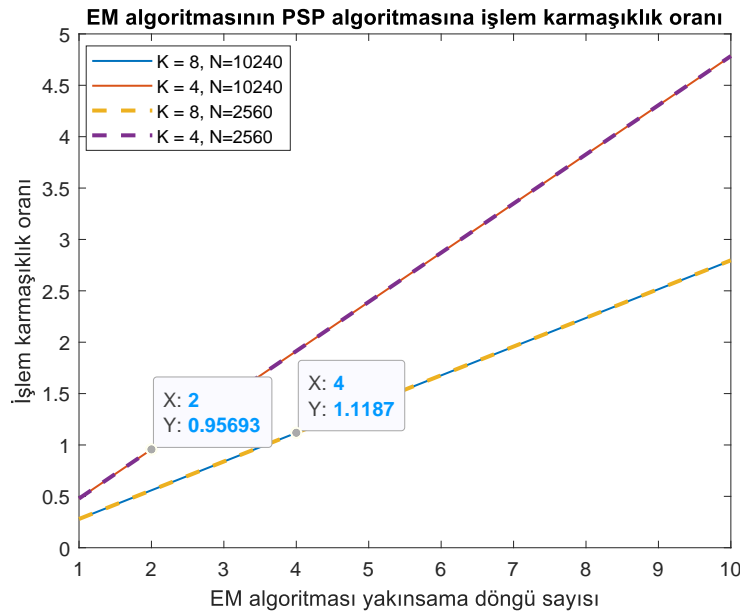
8 **end**

9 Eş. 5.41 ve Eş. 5.42'yi kullanarak n . zamandaki doğanın durumunu (H_i^*)

belirle

Algoritma 3'de verilen EM algoritmasına dayalı sezim ve kestirim yönteminin işlem karmaşıklığı $\mathcal{O}(I_{dongu} \times (6K^3 + 16NK^2 + 24NK))$ (I_{dongu} : Algoritma

3'deki $E_{conv} > E_{threshold}$ yakınsama kriterinin sağlandığı iterasyon sayısı), Algoritma 2'de verilen PSP algoritmasına dayalı sezim kestirim yöntemi için işlem karmaşıklığı ise $\mathcal{O}(6NK^3 + 18NK^2 + 16NK)$ olarak hesaplanmıştır. Farklı gözlem sayısı N ve sensör sayısı K değerleri için işlem karmaşıklık oranları Şekil 5.12'de verilmiştir. Gözlem sayısı aynı iken, sensör sayısı azaldıkça EM algoritmasının PSP algoritmasına göre işlem karmaşıklığı artmaktadır. Sensör sayısı aynı iken, gözlem sayısındaki değişim EM algoritmasının işlem karmaşıklığının PSP algoritmasına işlem karmaşıklık oranını etkilememektedir. 4 sensör için, EM algoritmasının, PSP algoritması ile aynı hata değerlerine yakınsaması için gerekli döngü sayısı 2'den fazla ise, EM algoritmasını kullanmanın PSP algoritmasına göre işlem karmaşıklığı, döngü sayısına göre doğrusal olarak artmaktadır.



Şekil 5.12. EM algoritması ile PSP algoritmasının işlem karmaşıklık seviyelerinin karşılaştırılması

6. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

Bu tez çalışmasında, çoklu algılayıcılardan alınan zamansal ve uzamsal bağımlı ölçümlerle parametre belirsizliği altında durum dizilimi kestirimi problemi ele alınmıştır. Hem zamansal hem de uzamsal bağımlılıklar problem çözümünde modele dahil edilmiştir. Zamansal bağımlılık birinci dereceden AR süreç olarak, uzamsal bağımlılık ise kopula teorisi kullanılarak modellenmiştir. Uzamsal bağımlılık modellerinde Gauss ve t kopula fonksiyonları kullanılmıştır. Kopula fonksiyonlarının korelasyon matrislerinin bilinmediği varsayılmıştır. Algılayıcıların her bir hipotez altındaki marjinal dağılımlarının parametrik olarak bilindiği ancak ortalama değerlerinin bilinmediği varsayılmıştır. Bilinmeyen parametrelerin kestirilip durum diziliminin tahmini için PSP algoritmasına dayalı çözüm yöntemi önerilmiştir. PSP ile bilinmeyen parametrelerin kestirimi de klasik Viterbi algoritmasının içine gömülerek eş zamanlı sezim ve kestirim yapılmıştır. PSP algoritmasına dayalı bu çözümde, sensörlerden alınan gözlem sayısı arttıkça klasik Viterbi algoritmasına yakınsanarak asimptotik olarak en iyi çözüm elde edildiği görülmüştür.

Kopula fonksiyonlarının parametrik olarak bilinmediği durumda ya da zamansal, uzamsal bağımlılıkların modele dahil edilmediğinde hipotez seziminde performans kaybına yol açtığı görülmüştür.

Literatürde, ele alınan problem için EM algoritmasına dayalı bir çözüm olduğu görülmüştür [1]. Önerdiğimiz çözümde EM algoritmasına göre işlem karmaşıklığı açısından avantaj sağlanmıştır. Bu tez çalışmasının, problemin EM algoritmasına dayanan çözümüne [1] göre bir diğer avantajı da hesaplamaların çevrimiçi yapılmasıdır. Sağ kalan yollara dayalı parametre kestirimi çevrimiçi olarak hesaplanmaktadır. Dolayısıyla, sensörlerden ilk anda alınan gözlem setinden başlayarak, sıfır gecikme ile durum dizilimi belirlenebilmektedir. [1]'da önerilen algılayıcıda, gözlem süresi boyunca veriler toplanıp, toplanan bu verilerin çevrimdışı işlenmesi sonucu durum dizilimi ve parametre kestirimleri belirlenmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] S. Sobhiyeh and M. Naraghi-Pour, "Hypothesis testing with dependent observations," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 65, no. 5, pp. 1183–1195, March 2017.
- [2] T. K. Moon and W. C. Stirling, *Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing*. Prentice Hall, 2000.
- [3] G. D. Forney, "The Viterbi algorithm," *Proc. of the IEEE*, vol. 61, no. 3, pp. 268–278, March 1973.
- [4] M. Luessi, S. D. Babacan, R. Molina, J. R. Booth, and A. K. Katsaggelos, "Optimal distributed detection in clustered wireless sensor networks," *NeuroImage*, vol. 55, no. 1, pp. 113–132, 2011.
- [5] T. F. Quatieri, K. Brady, D. Messing, J. P. Campbell, W. M. Campbell, M. S. Brandstein, C. J. Weinstein, J. D. Tardelli, , and P. D. Gatewood, "Exploiting nonacoustic sensors for speech encoding," *IEEE Trans. Audio Speech. Lang. Process.*, vol. 14, no. 2, pp. 533–544, March 2006.
- [6] D. Gatica-Perez, G. Lathoud, J. M. Odobez, and I. McCowan, "Audiovisual probabilistic tracking of multiple speakers in meetings," *IEEE Trans. Audio Speech. Lang. Process.*, vol. 15, no. 2, pp. 601–616, Feb. 2007.
- [7] R. Srinivasan, "Distributed radar detection theory," *IEE Proc. Commun., Radar Signal Process.*, vol. 133, no. 1, pp. 55–60, Feb 1986.
- [8] S. Sobhiyeh and M. Naraghi-Pour, "Online detection and parameter estimation with correlated data in wireless sensor networks," *Proc. IEEE Wirel. Commun. Netw. Conf. (WCNC)*, pp. 1–6, 2018.
- [9] M. Abdelhakim, L. E. Lightfott, and J. Ren, "Distributed detection in mobile access wireless sensor networks under byzantine attacks," *IEEE Trans. on Paral. and Dist. Sys.*, vol. 25, no. 4, pp. 950–959, April 2014.
- [10] E. Soltanmohammadi, M. Orooji, and M. Naraghi-Pour, "Decentralized hypothesis testing in wireless sensor networks in the presence of misbehaving nodes," *IEEE Trans. on Info. Frons. and Secur.*, vol. 8, no. 1, pp. 205–215, Jan 2013.
- [11] E. Soltanmohammadi and M. Naraghi-Pour, "Nonparametric density estimation, hypotheses testing, and sensor classification in centralized detection," *IEEE Trans. on Info. Frons. and Secur.*, vol. 9, no. 3, pp. 426–435, March 2014.

- [12] Q. Tian and E. J. Coyle, "Optimal distributed detection in clustered wireless sensor networks," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 55, no. 7, pp. 3892–3904, July 2007.
- [13] I. F. Akyildiz, W. Su, Y. Sankarasubramaniam, and E. Cayirci, "A survey on sensor networks," *IEEE Commun. Mag.*, pp. 102–114, Aug. 2002.
- [14] C. Chong and S. P. Kumar, "Sensor networks: evolution, opportunities, and challenges," *Proc. of the IEEE*, vol. 91, no. 8, pp. 1247–1256, Aug. 2003.
- [15] D. Estrin, L. Girod, G. Pottie, and M. Srivastavai, "Instrumenting the world with wireless sensor networks," *Proc. IEEE Int. Conf. Aco. Spe. Sig. Proc. (ICASSP)*, vol. 4, pp. 2033–2036, 2001.
- [16] L. Oliveira and J. Rodrigues, "Wireless sensor networks: a survey on environmental monitoring," vol. 6, no. 2, pp. 143–151, Apr. 2011.
- [17] T. H. et al., "Achieving real-time target tracking using wireless sensor networks," *Proc. IEEE Real Time Technol. Appl. Symp.*, pp. 37–48, 2006.
- [18] T. Deneux and O. Faugeras, "Eeg-fmri fusion of paradigm-free activity using kalman filtering," *Neural Comput.*, vol. 22, no. 4, pp. 906–948, April 2010.
- [19] A. Jindal and K. Psounis, "Modelling spatially correlated data in sensor networks, year=2006, volume=2, number=4, pages=466–499, month=," *ACM Trans. Sensor Netw.*
- [20] S. G. Iyengar, R. Niu, and P. K. Varshney, "Fusing dependent decisions for hypothesis testing with heterogeneous sensors," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 60, no. 9, pp. 4888–4897, Sept 2012.
- [21] H. He and P. K. Varshney, "Fusing censored dependent data for distributed detection," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 63, no. 16, pp. 4385–4395, Aug. 2015.
- [22] S. G. Iyengar, P. K. Varshney, and T. Damarla, "A parametric copula-based framework for hypothesis testing using heterogeneous data," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 59, no. 5, pp. 2308–2319, May 2011.
- [23] A. Subramanian, A. Sundaresan, and P. K. Varshney, "Fusion for the detection of dependent signals using multivariate copulas," *Proc. 14th Int. Inf. Fusion Conf.*, pp. 1–8, 2011.
- [24] O. Ozdemir, T. G. Allen, S. Choi, T. Wimalajeewa, and P. K. Varshney, "Copula based classifier fusion under statistical dependence," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 24, no. 3, pp. 381–396, Mar. 2002.

- [25] A. Sundaresan, P. K. Varshney, and N. S. V. Rao, "Copula-based fusion of correlated decisions," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 47, no. 1, pp. 454–471, Jan. 2011.
- [26] Y. Stitou, N. Lasmar, and Y. Berthoumieu, "Copulas in vectorial hidden markov chains for multicomponent image segmentation," *Proc. IEE Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Process.*, pp. 717–720, 2005.
- [27] S. Iyengar, P. Varshney, and T. Damarla, "On the detection of footsteps based on acoustic and seismic sensing," *Proc. Conf. Rec. 41st Asilomar Conf. Signals, Syst. Comput.*, pp. 2248–2252, Nov. 2007.
- [28] T. Wimalajeewa and P. K. Varshney, "Compressive sensing-based detection with multimodal dependent data," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 66, no. 3, pp. 627–640, Feb. 2018.
- [29] D. Ciuonzo, P. S. Rossi, and P. Willett, "Generalized rao test for decentralized detection of an uncooperative target," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 24, no. 5, pp. 678–682, May 2017.
- [30] D. Ciuonzo, G. Papa, G. Romano, P. S. Rossi, and P. Willett, "One-bit decentralized detection with a rao test for multisensor fusion," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 20, no. 9, pp. 861–864, Sept. 2013.
- [31] A. Viterbi, "Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 13, no. 2, pp. 260–269, April 1967.
- [32] R. B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*. New York Springer, **1999**.
- [33] S. G. Iyengar, R. Niu, and P. K. Varshney, "Fusing dependent decisions for hypothesis testing with heterogeneous sensors," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 60, no. 9, pp. 4888–4897, Sept 2012.
- [34] Z. I. Botev, "The normal law under linear restrictions: simulation and estimation via minimax tilting," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, vol. 7, no. 1, pp. 125–148, Jan. 2017.
- [35] R. Raheli, A. Polydoros, and C.-K. Tzou, "Per-Survivor Processing: a general approach to MLSE in uncertain environments," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 43, no. 2/3/4, pp. 354–364, Feb 1995.
- [36] K. B. Petersen and M. S. Pedersen, *The Matrix Cookbook*. Technical University of Denmark, Nov. 2012.
- [37] S. Boyd and V. L., *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [38] N. J. Higham, "Computing the nearest correlation matrix a problem from finance," *IMA Journal and Numerical Analysis*, vol. 22, no. 3, pp. 329–343, 2002.



HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
ELEKTRİK VE ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih:05/07/2019

Tez Başlığı / Konusu: PARAMETRE BELİRSİZLİĞİ ALTINDA ÇOKLU ALGILİYİCİLERE AİT BAĞIMLI ÖLÇÜMLERLE HİPOTEZ SINAMASI

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 86 sayfalık kısmına ilişkin, 05/07/2019 tarihinde tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 10 'dur.

Uygulanan filtrelemeler:

- 1- Kaynakça hariç
- 2- Alıntılar hariç
- 3- 5 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Selin Işık
Öğrenci No: N15223482
Anabilim Dalı: Elektrik ve Elektronik Mühendisliği
Programı: Elektrik ve Elektronik Mühendisliği - Tezli Yüksek Lisans
Statüsü: Y.Lisans Doktora Bütünleşik Dr.

05.07.2019

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Doç. Dr. Berkan Dülek

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : SELİN IŞIK
Doğum Yeri : Ankara
Medeni Hali : Bekar
E-posta : selini@aselsan.com.tr
Adresi : Şehit Osman Avcı Mahallesi, 1419. Cadde,
No: 12/82, Etimesgut / ANKARA

Eğitim

Lisans : Hacettepe Üniversitesi
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, ANKARA
(2010-2015)
Yüksek Lisans : Hacettepe Üniversitesi
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, ANKARA
(2016-2019)

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce : İyi

İş Deneyimi

Ocak 2016- ... : Mühendis,
ASELSAN REHİS, ANKARA

Deneyim Alanları

Sinyal İşleme, Telokomünikasyon, Elektronik Harp Sistemleri