

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**DAĞILIM FONKSİYONLARI KONVOLÜSYONLARININ MONTE CARLO
TAHMİNİ VE BAZI UYGULAMALARI**

Ömer ALTINDAĞ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2012

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DAĞILIM FONKSİYONLARI KONVOLÜSYONLARININ MONTE CARLO TAHMİNİ VE BAZI UYGULAMALARI

Ömer ALTINDAĞ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Halil AYDOĞDU

Dağılım fonksiyonları konvolüsyonları sayma süreçleri teorisi, güvenilirlik analizi, risk analizi, envanter teorisi gibi olasılık modellerine bağlı uygulamaların geniş bir alanında kullanılmaktadır. Fakat bazı özel dağılımlar dışında konvolüsyon fonksiyonu analitik olarak elde edilemez. Bu durumda bu fonksiyonun sayısal olarak hesaplanması gerekmektedir. Literatürde buna ilişkin değişik yöntemler vardır. Bunların yanı sıra diğer bir yöntem ise bu fonksiyona Monte Carlo simülasyonu ile yaklaşmaktır. Bu çalışmada dağılım fonksiyonları konvolüsyonları için bazı Monte Carlo tahmin edicileri verilmiş ve istatistiksel olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca var olan tahmin edicilerin doğrusal birleşimleri ile yeni bir Monte Carlo tahmin edicisi tanımlanmıştır. Bu tahmin ediciler yardımı ile birer sayma süreci olan yenileme ve geometrik süreçler için bu süreçlerin ortalama değer ve varyans fonksiyonları hesaplanmıştır.

Haziran 2012, 89 sayfa

Anahtar Kelimeler: Dağılım Fonksiyonu, Konvolüsyon, Monte Carlo Tahmini, Yenileme Süreci, Geometrik Süreç, Yenileme Fonksiyonu, Ortalama Değer Fonksiyonu, Varyans Fonksiyonu

ABSTRACT

Master Thesis

MONTE CARLO ESTIMATION FOR THE CONVOLUTIONS OF DISTRIBUTION FUNCTIONS AND SOME APPLICATIONS

Ömer ALTINDAĞ

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Statistics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

The convolutions of distribution functions are used in a wide variety of applications of probabilistic models such as counting process theory, reliability theory, risk analysis and inventory theory. But except some special distributions, the convolution function can't be obtained in analytical form. It is necessary to apply a numerical method for evaluating this function. In the literature there exist numerous methods. Another method in addition to these is to use Monte Carlo simulation to approximate this function. In this study, it is considered some Monte Carlo estimators given in the literature and compared statistically. Further a new Monte Carlo estimator which is the linear combination of existing estimators is presented. The mean value and variance function of some counting processes, renewal process and geometric process, are calculated by using these estimators.

June 2012, 89 pages

Key Words: Distribution Function, Convolution, Monte Carlo Estimation, Renewal Process, Geometric Process, Renewal Function, Mean Value Function, Variance Function

TEŞEKKÜR

“Dağılım Fonksiyonları Konvolüsyonlarının Monte Carlo Tahmini ve Bazı Uygulamaları” ile ilgili yaptığım bu çalışmada bana araştırma olanağı sağlayan, çalışmamın hiçbir anında benden yardımını esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Halil AYDOĞDU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Anabilim Dalı)’ ya teşekkürü bir borç bilirim. Bana bu bilimi öğreten ve sevdiren bütün Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü çalışanlarına emeklerinden dolayı teşekkür ederim. Ayrıca maddi ve manevi desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen aileme, sevdiklerime ve üzerimde hakkı bulunan herkese teşekkür ederim.

Ömer ALTINDAĞ

Ankara, Haziran 2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	xiii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1 Konvolüsyon İşlemi ve Özellikleri.....	3
2.2 Laplace ve Laplace-Stieltjes Dönüşümleri.....	7
2.3 Karakteristik Fonksiyon.....	7
2.4 Bozulma Oranı Fonksiyonu ve IFR, DFR Dağılım Fonksiyonları.....	8
2.5 Stokastik Sıralama.....	9
2.6 Yenileme Denklemi.....	9
2.7 En İyi Doğrusal Yansız Tahmin Edici.....	10
3. DAĞILIM FONKSİYONLARI KONVOLÜSYONLARI.....	13
3.1 Dağılım Fonksiyonları Konvolüsyonları için Analitik İfadeler.....	13
3.1.1 Düzgün dağılım.....	14
3.1.2 Üstel dağılım.....	15
3.1.3 İki parametrelili Üstel dağılım.....	16
3.1.4 Gama dağılımı.....	17
3.2 Dağılım Fonksiyonları Konvolüsyonları için Bazı Sayısal Çözümler.....	18
3.2.1 Laplace dönüşümü.....	18
3.2.2 Kuvvet serisi yaklaşımı.....	18
3.2.3 Kübik spline yaklaşımı.....	18
3.2.4 İntegral hesabı.....	19
4. SAYMA SÜREÇLERİ.....	21
4.1 Yenileme Süreci.....	24
4.1.1 Yenileme ve Varyans Fonksiyonu.....	25
4.2 Geometrik Süreç.....	30
4.2.1 Geometrik Fonksiyon ve Varyans Fonksiyonu.....	31
5. DAĞILIM FONKSİYONLARI KONVOLÜSYONLARI İÇİN MONTE CARLO TAHMİN EDİCİLERİ.....	34
5.1 Basit Monte Carlo Tahmin Edicisi.....	34
5.2 Brown, Solomon ve Stevens' in Monte Carlo Tahmin Edicisi.....	35

5.3 Gertsbakh ve Shpungin' in Monte Carlo Tahmin Edicisi.....	35
5.4 Tahmin Edicilerin İstatistiksel Özellikleri.....	36
5.5 Yeni Bir Monte Carlo Tahmin Edicisi	41
6. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI.....	43
6.1 Yenileme ve Varyans Fonksiyonu için Monte Carlo Tahmin Edicileri	43
6.2 Geometrik Fonksiyon ve Varyans Fonksiyonu için Monte Carlo Tahmin Edicileri	44
7. SONUÇ.....	85
KAYNAKLAR	87
ÖZGEÇMİŞ.....	89

SİMGELER DİZİNİ

$F(t)$	Dağılım fonksiyonu
$f(t)$	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
$F_{LS}(t)$	F nin Laplace-Stieltjes dönüşümü
$f_L(t)$	f nin Laplace dönüşümü
*	Stieltjes konvolüsyon işlemi
$F^{n*}(t)$	F nin kendisi ile n . konvolüsyonu
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
$K_n(t)$	Konvolüsyon fonksiyonu
$\hat{K}_{in}(t)$	i . Monte Carlo tahmin edicisi
$\{N(t), t \geq 0\}$	Yenileme süreci
$M(t)$	Yenileme fonksiyonu
$V(t)$	Varyans fonksiyonu
$\hat{M}_i(t)$	$M(t)$ nin i . Monte Carlo tahmin edicisi
$\hat{V}_i(t)$	$V(t)$ nin i . Monte Carlo tahmin edicisi
$\hat{\sigma}(\hat{M}_i(t))$	$M(t)$ için i . tahmin edicinin standart hatası
$\hat{\sigma}(\hat{V}_i(t))$	$V(t)$ için i . tahmin edicinin standart hatası
$HKO(\hat{M}_i(t))$	$M(t)$ için i . tahmin edicinin hata kareler ortalaması
$HKO(\hat{V}_i(t))$	$V(t)$ için i . tahmin edicinin hata kareler ortalaması
$\{N^G(t), t \geq 0\}$	Geometrik süreç
$M^G(t)$	Geometrik sürecin ortalama değer fonksiyonu
$V^G(t)$	Geometrik sürecin varyans fonksiyonu
$\hat{M}_i^G(t)$	$M^G(t)$ nin i . Monte Carlo tahmin edicisi
$\hat{V}_i^G(t)$	$V^G(t)$ nin i . Monte Carlo tahmin edicisi
$\hat{\sigma}(\hat{M}_i^G(t))$	$M^G(t)$ için i . tahmin edicinin standart hatası
$\hat{\sigma}(\hat{V}_i^G(t))$	$V^G(t)$ için i . tahmin edicinin standart hatası
$HKO(\hat{M}_i^G(t))$	$M^G(t)$ için i . tahmin edicinin hata kareler ortalaması
$HKO(\hat{V}_i^G(t))$	$V^G(t)$ için i . tahmin edicinin hata kareler ortalaması
$M_{an}(t)$	$M(t)$ nin analitik değeri

$V_{an}(t)$	$V(t)$ nin analitik değeri
$M_{id}(t)$	$M(t)$ nin integral denklemden elde edilen değeri
$V_{id}(t)$	$V(t)$ nin integral denklemden elde edilen değeri
$M_{sk}(t)$	$M(t)$ nin sayısal konvolüsyon ile elde edilen değeri
$V_{sk}(t)$	$V(t)$ nin sayısal konvolüsyon ile elde edilen değeri
$M_{id}^G(t)$	$M^G(t)$ nin integral denklemden elde edilen değeri
$M_{sk}^G(t)$	$M^G(t)$ nin sayısal konvolüsyon ile elde edilen değeri
$V_{sk}^G(t)$	$V^G(t)$ nin sayısal konvolüsyon ile elde edilen değeri
IFR	Artan bozulma oranı
DFR	Azalan bozulma oranı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 6.1 Yenileme Sürecinde $\text{Üstel}(1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini	50
Şekil 6.2 Yenileme Sürecinde $\text{Üstel}(1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	50
Şekil 6.3 Yenileme Sürecinde $\text{Üstel}(1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	50
Şekil 6.4 Yenileme Sürecinde $\text{Üstel}(1)$ durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini	51
Şekil 6.5 Yenileme Sürecinde $\text{Üstel}(1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	51
Şekil 6.6 Yenileme Sürecinde $\text{Üstel}(1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	51
Şekil 6.7 Yenileme Sürecinde $Gama(0.5, 2)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini	53
Şekil 6.8 Yenileme Sürecinde $Gama(0.5, 2)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	53
Şekil 6.9 Yenileme Sürecinde $Gama(0.5, 2)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	53
Şekil 6.10 Yenileme Sürecinde $Gama(0.5, 2)$ durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini	54
Şekil 6.11 Yenileme Sürecinde $Gama(0.5, 2)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	54
Şekil 6.12 Yenileme Sürecinde $Gama(0.5, 2)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	54
Şekil 6.13 Yenileme Sürecinde $Gama(2, 0.5)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini	56
Şekil 6.14 Yenileme Sürecinde $Gama(2, 0.5)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	56
Şekil 6.15 Yenileme Sürecinde $Gama(2, 0.5)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	56

Şekil 6.16 Yenileme Sürecinde $Gama(2, 0.5)$ durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini	57
Şekil 6.17 Yenileme Sürecinde $Gama(2, 0.5)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	57
Şekil 6.18 Yenileme Sürecinde $Gama(2, 0.5)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	57
Şekil 6.19 Yenileme Sürecinde $Weibull(0.5, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini	59
Şekil 6.20 Yenileme Sürecinde $Weibull(0.5, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	59
Şekil 6.21 Yenileme Sürecinde $Weibull(0.5, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	59
Şekil 6.22 Yenileme Sürecinde $Weibull(0.5, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini	60
Şekil 6.23 Yenileme Sürecinde $Weibull(0.5, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	60
Şekil 6.24 Yenileme Sürecinde $Weibull(0.5, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	60
Şekil 6.25 Yenileme Sürecinde $Weibull(2, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini	62
Şekil 6.26 Yenileme Sürecinde $Weibull(2, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	62
Şekil 6.27 Yenileme Sürecinde $Weibull(2, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	62
Şekil 6.28 Yenileme Sürecinde $Weibull(2, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini	63
Şekil 6.29 Yenileme Sürecinde $Weibull(2, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	63
Şekil 6.30 Yenileme Sürecinde $Weibull(2, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	63
Şekil 6.31 Yenileme Sürecinde $Lognormal(0, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini	65

Şekil 6.32 Yenileme Sürecinde <i>Lognormal</i> (0, 1) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	65
Şekil 6.33 Yenileme Sürecinde <i>Lognormal</i> (0, 1) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları	65
Şekil 6.34 Yenileme Sürecinde <i>Lognormal</i> (0, 1) durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini	66
Şekil 6.35 Yenileme Sürecinde <i>Lognormal</i> (0, 1) durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	66
Şekil 6.36 Yenileme Sürecinde <i>Lognormal</i> (0, 1) durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları	66
Şekil 6.37 Geometrik Süreçte <i>Üstel</i> (1) durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini	68
Şekil 6.38 Geometrik Süreçte <i>Üstel</i> (1) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	68
Şekil 6.39 Geometrik Süreçte <i>Üstel</i> (1) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları	68
Şekil 6.40 Geometrik Süreçte <i>Üstel</i> (1) durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini	69
Şekil 6.41 Geometrik Süreçte <i>Üstel</i> (1) durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	69
Şekil 6.42 Geometrik Süreçte <i>Üstel</i> (1) durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları	69
Şekil 6.43 Geometrik Süreçte <i>Gama</i> (0.5, 2) durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini	71
Şekil 6.44 Geometrik Süreçte <i>Gama</i> (0.5, 2) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	71
Şekil 6.45 Geometrik Süreçte <i>Gama</i> (0.5, 2) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları	71
Şekil 6.46 Geometrik Süreçte <i>Gama</i> (0.5, 2) durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini	72
Şekil 6.47 Geometrik Süreçte <i>Gama</i> (0.5, 2) durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	72

Şekil 6.48 Geometrik Süreçte $Gama(0.5, 2)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	72
Şekil 6.49 Geometrik Süreçte $Gama(2, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini	74
Şekil 6.50 Geometrik Süreçte $Gama(2, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	74
Şekil 6.51 Geometrik Süreçte $Gama(2, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	74
Şekil 6.52 Geometrik Süreçte $Gama(2, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini	75
Şekil 6.53 Geometrik Süreçte $Gama(2, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	75
Şekil 6.54 Geometrik Süreçte $Gama(2, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	75
Şekil 6.55 Geometrik Süreçte $Weibull(0.5, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini	77
Şekil 6.56 Geometrik Süreçte $Weibull(0.5, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	77
Şekil 6.57 Geometrik Süreçte $Weibull(0.5, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	77
Şekil 6.58 Geometrik Süreçte $Weibull(0.5, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini	78
Şekil 6.59 Geometrik Süreçte $Weibull(0.5, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	78
Şekil 6.60 Geometrik Süreçte $Weibull(0.5, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	78
Şekil 6.61 Geometrik Süreçte $Weibull(2, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini	80
Şekil 6.62 Geometrik Süreçte $Weibull(2, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	80
Şekil 6.63 Geometrik Süreçte $Weibull(2, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	80

Şekil 6.64 Geometrik Süreçte <i>Weibull</i> (2, 1) durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini	81
Şekil 6.65 Geometrik Süreçte <i>Weibull</i> (2, 1) durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	81
Şekil 6.66 Geometrik Süreçte <i>Weibull</i> (2, 1) durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	81
Şekil 6.67 Geometrik Süreçte <i>Lognormal</i> (0, 1) durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini	83
Şekil 6.68 Geometrik Süreçte <i>Lognormal</i> (0, 1) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	83
Şekil 6.69 Geometrik Süreçte <i>Lognormal</i> (0, 1) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	83
Şekil 6.70 Geometrik Süreçte <i>Lognormal</i> (0, 1) durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini	84
Şekil 6.71 Geometrik Süreçte <i>Lognormal</i> (0, 1) durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları	84
Şekil 6.72 Geometrik Süreçte <i>Lognormal</i> (0, 1) durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları.....	84

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 6.1 Yenileme Sürecinde $\text{Üstel}(1)$ durumunda $M(t)$, $V(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini.....	49
Çizelge 6.2 Yenileme Sürecinde $\text{Üstel}(1)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO.....	49
Çizelge 6.3 Yenileme Sürecinde $\text{Gama}(0.5, 2)$ durumunda $M(t)$, $V(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini.....	52
Çizelge 6.4 Yenileme Sürecinde $\text{Gama}(0.5, 2)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO.....	52
Çizelge 6.5 Yenileme Sürecinde $\text{Gama}(2, 0.5)$ durumunda $M(t)$, $V(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini.....	55
Çizelge 6.6 Yenileme Sürecinde $\text{Gama}(2, 0.5)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO.....	55
Çizelge 6.7 Yenileme Sürecinde $\text{Weibull}(0.5, 1)$ durumunda $M(t)$, $V(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini.....	58
Çizelge 6.8 Yenileme Sürecinde $\text{Weibull}(0.5, 1)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO.....	58
Çizelge 6.9 Yenileme Sürecinde $\text{Weibull}(2, 1)$ durumunda $M(t)$, $V(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini.....	61
Çizelge 6.10 Yenileme Sürecinde $\text{Weibull}(2, 1)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO.....	61
Çizelge 6.11 Yenileme Sürecinde $\text{Lognormal}(0,1)$ durumunda $M(t)$, $V(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini.....	64
Çizelge 6.12 Yenileme Sürecinde $\text{Lognormal}(0,1)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO.....	64
Çizelge 6.13 Geometrik Süreçte $\text{Üstel}(1)$ durumunda $MG(t)$, $VG(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini.....	67
Çizelge 6.14 Geometrik Süreçte $\text{Üstel}(1)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO.....	67
Çizelge 6.15 Geometrik Süreçte $\text{Gama}(0.5, 2)$ durumunda $MG(t)$, $VG(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini.....	70

Çizelge 6.16 Geometrik Süreçte $Gama(0.5, 2)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO.....	70
Çizelge 6.17 Geometrik Süreçte $Gama(2, 1)$ durumunda $MG(t)$, $VG(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini.....	73
Çizelge 6.18 Geometrik Süreçte $Gama(2, 1)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO.....	73
Çizelge 6.19 Geometrik Süreçte $Weibull(0.5, 1)$ durumunda $MG(t)$, $VG(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini.....	76
Çizelge 6.20 Geometrik Süreçte $Weibull(0.5, 1)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO.....	76
Çizelge 6.21 Geometrik Süreçte $Weibull(2, 1)$ durumunda $MG(t)$, $VG(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini.....	79
Çizelge 6.22 Geometrik Süreçte $Weibull(2, 1)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO.....	79
Çizelge 6.23 Geometrik Süreçte $Lognormal(0, 1)$ durumunda $MG(t)$, $VG(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini.....	82
Çizelge 6.24 Geometrik Süreçte $Lognormal(0, 1)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO.....	82

1. GİRİŞ

Dağılım fonksiyonları konvolüsyonları olasılık modellerine dayalı birçok alanda ortaya çıkan önemli bir fonksiyondur. Örneğin stokastik modellemede sıkça kullanılan sayma süreçlerinde, sürecin ortalama değer ve varyans fonksiyonu dağılım fonksiyonları konvolüsyonlarının serileri ile ifade edilebilmektedir. Bu yüzden bu fonksiyonun hesaplanması oldukça önemlidir. Fakat bazı özel dağılımlar dışında bu fonksiyon analitik olarak elde edilemez. Bu durumda bu fonksiyonun hesaplanması için bir sayısal yöntemin uygulanması gerekmektedir. Literatürde bu fonksiyonun hesabı için değişik sayısal yöntemler mevcuttur. Bunlar; integral hesabı, Laplace, Laplace-Stieltjes dönüşümleri, kuvvet serileri ve kübik spline yöntemleridir (Baxter 1981). Bunların yanı sıra diğer bir yöntem ise bu fonksiyona Monte Carlo simülasyonu ile yaklaşımdır (Gertsbakh ve Shpungin 2004). Monte Carlo yöntemi diğerlerine göre daha kolay bir yöntem olarak öne çıkmaktadır.

Bu çalışmada dağılım fonksiyonları konvolüsyonları için literatürde verilen Monte Carlo tahmin edicileri ele alınarak, istatistiksel olarak değerlendirilmiştir. Bu tahmin ediciler yardımı ile yeni bir Monte Carlo tahmin edicisi tanımlanmış ve diğer tahmin edicilerle istatistiksel olarak karşılaştırılmıştır. Ayrıca bu tahmin edicilerin işlerliğini görmek amacıyla özel olarak seçilen bazı yenileme süreçler ve geometrik süreçlerde ortalama değer ve varyans fonksiyonunun tahmin değerleri ile gerçek değerler karşılaştırılmıştır.

İkinci bölümde çalışmanın temelini oluşturan kavramlar üzerinde durularak konvolüsyon işlemi kısaca tanıtılmış ve bu işlemin özellikleri incelenmiştir. Ayrıca çalışmada kullanılacak olan Laplace, Laplace-Stieltjes dönüşümleri, karakteristik fonksiyon, bozulma oranı fonksiyonu ve bazı dağılım fonksiyonu sınıfları, stokastik sıralama, yenileme denklemi ve en iyi doğrusal yansız tahmin edici diğer bölümlerle bütünlük oluşturması bakımından hatırlatılmıştır.

Üçüncü bölümde dağılım fonksiyonları konvolüsyonları için bazı özel dağılımlar altında analitik ifadeler verilmiştir. Bu fonksiyonun sayısal çözümü için literatürdeki mevcut

yöntemlerden kısaca bahsedilerek, konvolüsyon integrallerinin sayısal hesabı için yamuk integrasyon kuralına dayalı bir yöntem verilmiştir.

Dördüncü bölümde stokastik modellemede araştırmacıların sıklıkla kullandığı sayma süreçleri genel anlamda tanıtılmıştır. Ayrıca özel birer sayma süreci olan yenileme süreci ve geometrik süreç belirli özellikleri ile birlikte detaylıca incelenerek dağılım fonksiyonları konvolüsyonlarının serileri ile bu süreçlerin ortalama değer ve varyans fonksiyonlarının ifade edilebildiği vurgulanmıştır.

Beşinci bölümde dağılım fonksiyonları konvolüsyonları için literatürde verilen Monte Carlo tahmin edicileri verilerek, bu tahmin ediciler yardımıyla yeni bir Monte Carlo tahmin edicisi elde edilmiştir. Son olarak tahmin edicilerin yansızlık ve etkinlik gibi istatistiksel özellikleri incelenmiştir.

Altıncı bölümde, yenileme süreci ve geometrik sürecin ortalama değer ve varyans fonksiyonları için beşinci bölümde verilen dağılım fonksiyonları konvolüsyonlarının Monte Carlo tahmin edicilerine bağı tahmin ediciler verilmiştir. Bu tahmin edicilerin işlerliğini görmek için üstel, gama, Weibull ve lognormal gibi ömür dağılımının modellenmesinde önemli yer tutan dağılımlar altında bir simülasyon çalışması yapılmıştır.

Son bölümde ise simülasyon çalışması ile elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmanın temelini oluşturan konvolüsyon işlemi tanıtılıp, bu işlemin özelliklerinden bahsedilmiştir. Ayrıca bu işlemin olasılık teorisindeki karşılığı verilmiştir. Bununla birlikte çalışmada kullanılacak olan tam olasılık formülü, Laplace, Laplace-Stieltjes dönüşümleri, karakteristik fonksiyon, bozulma oranı fonksiyonu ve bazı dağılım fonksiyonu sınıfları, stokastik sıralama, yenileme denklemi ve en iyi doğrusal yansız tahmin edici hatırlatılmıştır.

2.1 Konvolüsyon İşlemi ve Özellikleri

Tanım 2.1.1 F ve G , \mathbb{R} üzerinde tanımlı herhangi iki dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$F * G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-x)dF(x), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

ile ifade edilen $F * G$ fonksiyonuna F ile G dağılım fonksiyonlarının konvolüsyonu denir. Burada “*” konvolüsyon işlemi göstermektedir. Lebesgue ölçüsüne göre hemen hemen her t için (2.1) denkleminin sağ tarafındaki integral vardır (Kawata 1972). $t < 0$ için $F(t) = G(t) = 0$ şartı sağlanıyor ise $t \geq 0$ için

$$F * G(t) = \int_0^t G(t-x)dF(x), \quad t \geq 0 \quad (2.2)$$

olarak ifade edilmektedir.

Konvolüsyon işlemi dağılım fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf üzerinde değişme ve birleşme özelliğine sahiptir. Ayrıca sıfır noktasında yoğunlaşmış dağılımın dağılım fonksiyonu “*” işlemine göre birim elemandır. Bu özellikler aşağıdaki gibi gösterilmektedir.

F, G ve H herhangi birer dağılım fonksiyonu olsun. $G(-\infty) = 0$ ve $G(t - y) = \int_{-\infty}^{t-y} dG(z)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 F * G(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{t-y} dG(z) \right\} dF(y) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{t-z} dF(y) \right\} dG(z) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t - z) dG(z) \\
 &= G * F(t)
 \end{aligned}$$

dır. O halde konvolüsyon işlemi dağılım fonksiyonları için değişme özelliğine sahiptir. Bununla birlikte

$$\begin{aligned}
 F * G * H(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (G * H)(t - x) dF(x) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (H * G)(t - x) dF(x) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(t - x - y) dH(y) dF(x) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} F * G(t - y) dH(y) \\
 &= H * (F * G)(t) \\
 &= (F * G) * H(t)
 \end{aligned}$$

olduğundan konvolüsyon işlemi dağılım fonksiyonları için birleşme özelliğine de sahiptir (Feller 1971).

Tanım 2.1.2 F herhangi bir dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$F^{0*}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

ile verilen dağılıma sıfır noktasında yoğunlaşmış dağılım ya da sıfır noktasındaki Dirac dağılımı denir.

$$\begin{aligned} F^{0*} * F(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t-x) dF^{0*}(x) \\ &= \int_{-\infty}^{0^-} F(t-x) dF^{0*}(x) + \int_{0^-}^{0^+} F(t-x) dF^{0*}(x) + \int_{0^+}^{\infty} F(t-x) dF^{0*}(x) \\ &= F(t-0)(F^{0*}(0^+) - F^{0*}(0^-)) \\ &= F(t) \end{aligned}$$

olduğundan sıfır noktasında yoğunlaşmış dağılım konvolüsyon işlemi için birim elemandır.

Teorem 2.1.1 X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız ve sırasıyla F ve G dağılım fonksiyonuna sahip iki rasgele değişken olsun. Bu durumda $X + Y$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_{X+Y}(t) = F * G(t) \tag{2.3}$$

dır. Yani bağımsız iki rasgele değişkenin toplamlarının dağılım fonksiyonu, bu iki rasgele değişkenin dağılım fonksiyonları konvolüsyonlarına eşittir (Feller 1971).

İspat.

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(t) &= P(X + Y \leq t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X + Y \leq t | Y = y) dG(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} P(X \leq t - y | Y = y) dG(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P(X \leq t - y) dG(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(t - y) dG(y) \\
&= F * G(t).
\end{aligned}$$

Teorem 2.1.2 X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenleri bağımsız ve sırası ile F_1, F_2, \dots, F_n dağılım fonksiyonlarına sahip olsunlar. Bu durumda

$$F_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = F_1 * F_2 * \dots * F_n(t), \quad t \geq 0 \quad (2.4)$$

dır.

Teorem 2.1.2 nin ispatı Teorem 2.1.1 in ispatına benzer bir yolla kolaylıkla gösterilebilir.

Özel olarak X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı F dağılımına sahip olduğunda $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = F^{n*}(t), \quad t \geq 0 \quad (2.5)$$

dır. Burada F^{n*} , F dağılım fonksiyonunun kendisi ile n kez konvolüsyonudur.

F ve G dağılım fonksiyonları sırası ile f ve g yoğunluk fonksiyonlarına sahip olduğunda, $F * G$ nin yoğunluk fonksiyonu $f * g$ dir. Ayrıca F^{n*} dağılım fonksiyonunun yoğunluk fonksiyonu f^{n*} dir (Feller 1971).

2.2 Laplace ve Laplace-Stieltjes Dönüşümleri

F tek değişkenli bir fonksiyon olmak üzere

$$F_L(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} F(x) dx \quad (2.6)$$

olsun. Eşitliğin sağ tarafındaki integral mevcut olduğunda $F_L(t)$ ile verilen fonksiyona F fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir.

F \mathbb{R} de tanımlı, sağdan sürekli ve azalmayan bir fonksiyon olmak üzere

$$F_{LS}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} dF(x) \quad (2.7)$$

ile verilen $F_{LS}(t)$ fonksiyonuna, F fonksiyonunun Laplace-Stieltjes dönüşümü denir. F ve G \mathbb{R} de tanımlı, sağdan sürekli, azalmayan ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$ şartını sağlayan iki fonksiyon olmak üzere

$$(F * G)_{LS}(t) = F_{LS}(t)G_{LS}(t) \quad (2.8)$$

dır (Kawata 1972).

2.3 Karakteristik Fonksiyon

X herhangi bir rasgele değişken olmak üzere

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

ile verilen φ_X fonksiyonuna X rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu denir. Karakteristik fonksiyon her zaman mevcuttur ve ilgili rasgele değişkenin dağılımını tek

olarak belirler. Ayrıca karakteristik fonksiyon bağımsız rasgele değişkenlerin toplamlarının dağılımlarının belirlenmesinde kullanılabilen önemli bir araçtır.

Teorem 2.3.1 X_1, X_2, \dots, X_n bağımsız herhangi rasgele değişkenler ve a_1, a_2, \dots, a_n birer sabit olmak üzere

$$\varphi_{a_1X_1+\dots+a_nX_n}(t) = \varphi_{X_1}(a_1t) \dots \varphi_{X_n}(a_nt) \quad (2.10)$$

dır.

2.4 Bozulma Oranı Fonksiyonu ve IFR, DFR Dağılım Fonksiyonları

X, F dağılım fonksiyonuna sahip negatif değerler almayan bir rasgele değişken olsun. Burada X rasgele değişkeni bir parçanın, sistemin ya da herhangi bir canlının ömür değişkeni olarak düşünülebilir. X bir parçanın ömrü olarak düşünüldüğünde, $1 - F(t) > 0$ olan t yaşındaki parçanın t anından sonra x süreli bir aralıkta koşullu bozulma olasılığı

$$F(x|t) = P(t < X \leq t + x | X > t) = \frac{P(t < X < t + x)}{P(X > t)} = \frac{F(t + x) - F(t)}{1 - F(t)}$$

dır.

F dağılım fonksiyonu f yoğunluk fonksiyonuna sahip olduğunda

$$\begin{aligned} r(t) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x|t)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - F(t)} \frac{F(t + x) - F(t)}{x} \\ &= \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \quad 1 - F(t) > 0 \end{aligned}$$

ile tanımlanan r fonksiyonuna bozulma oranı fonksiyonu denir.

Tanım 2.4.1 F kesikli olmayan bir dağılım fonksiyonu ve $F(t) < 1$ olmak üzere $t \geq 0$ ve $x > 0$ için $\frac{F(t+x)-F(x)}{1-F(t)}$, t nin artan(azalan) bir fonksiyonu ise F ye IFR(DFR) dağılım fonksiyonu denir (Barlow ve Proschan 1965).

Eğer F dağılım fonksiyonu f yoğunluk fonksiyonuna sahip ise bu tanım $F(t) < 1$ ve $t \geq 0$ için $r(t)$ nin t nin artan(azalan) bir fonksiyonu olmasına denktir.

2.5 Stokastik Sıralama

X ve Y herhangi iki rasgele değişken olmak üzere, eğer $\forall a \in \mathbb{R}$ için

$$P(X > a) \leq (\geq) P(Y > a) \quad (2.11)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise “ X stokastik olarak Y den küçüktür(büyüktür)” denir ve $X \leq_{st} (\geq_{st}) Y$ ile gösterilir (Ross 1983). Ayrıca bir $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ stokastik süreci için $X_k \leq_{st} (\geq_{st}) X_{k+1}$ eşitsizliği her k için sağlanıyor ise, bu sürece stokastik artan (azalan) denir ve $X_k \uparrow_{st} (\downarrow_{st})$ ile gösterilir.

2.6 Yenileme Denklemi

A bilinmeyen bir fonksiyon, a ve dağılım fonksiyonu özelliklerine sahip F bilinen birer fonksiyon olmak üzere

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x) dF(x), \quad t \geq 0 \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanan integral denkleme “yenileme denklemi” denir (Karlin ve Taylor 1975).

Teorem 2.6.1 a sınırlı bir fonksiyon ve F bir dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)dF(x), \quad t \geq 0$$

denklemini sağlayan sonlu aralıklar üzerinde sınırlı tek bir A çözümü vardır ve bu çözüm

$$A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x)dM(x), \quad t \geq 0 \quad (2.13)$$

dır. Burada $M(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(x)$ dir (Karlin ve Taylor 1975).

2.7 En İyi Doğrusal Yansız Tahmin Edici

Parametre tahmini istatistiksel sonuç çıkarımın ilgilendiği önemli konulardan birisidir. Bazı durumlarda herhangi bir parametrenin tahmini için birden çok tahmin edici bulunabilmektedir. Hata kareler ortalaması tahmin edici için bir ölçüt olarak kabul edildiğinde, bu tahmin ediciler arasından yansız ve en küçük varyanslı olanı tercih edilir. Fakat söz konusu parametre için birden çok yansız tahmin edici mevcut ise, bu tahmin edicilerin doğrusal birleşimleri ile yansız ve daha etkin yani hata kareler ortalaması ölçütüne göre daha iyi bir tahmin edici elde etmek mümkündür.

Teorem 2.7.1 T_1, T_2, \dots, T_n herhangi bir θ parametresi için yansız ve sonlu varyanslı tahmin ediciler olsunlar. $\mathbf{T}' = [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_n]$ rasgele vektörünün varyans-kovaryans matrisi Σ ve $\boldsymbol{\alpha}' = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]$ olmak üzere

$$\hat{\theta} = \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{T}$$

ile verilen tahmin edici $\boldsymbol{\alpha} = \Sigma^{-1}\mathbf{1}/(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1})$ seçimi ile θ için yansız ve

$$Var(\hat{\theta}) \leq \min\{Var(T_1), \dots, Var(T_n)\}$$

dır. Burada $\mathbf{1}$ bütün elemanları “1” olan $n \times 1$ boyutlu vektördür.

İspat.

$\alpha = \Sigma^{-1}\mathbf{1}/(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1})$ için

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}) &= E(\alpha'T) \\ &= \alpha'E(T) \\ &= \alpha'\mathbf{1}\theta \\ &= \frac{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}\theta \\ &= \theta \end{aligned}$$

olur, yani $\hat{\theta}$ θ için yansızdır. Ayrıca $\hat{\theta}$ tahmin edicisinin varyansı

$$\begin{aligned} Var(\hat{\theta}) &= Var(\alpha'T) \\ &= \alpha'Var(T)\alpha \\ &= \frac{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}\Sigma\frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \\ &= \frac{1}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Genişletilmiş Cauchy-Shwarz eşitsizliği (Jonhson ve Wichern 2007) gereği $n \times 1$ boyutlu herhangi bir β vektörü ve pozitif tanımlı $n \times n$ boyutlu bir B matrisi için

$$(\beta'\mathbf{1})^2 \leq (\beta'B\beta)(\mathbf{1}'B^{-1}\mathbf{1})$$

dır. Varyans kovaryans matrisi Σ her zaman pozitif tanımlı olmak üzere buradan

$$\frac{1}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \leq \frac{(\beta'\Sigma\beta)}{(\beta'\mathbf{1})^2}$$

elde edilir. $i = 1, \dots, n$ için $\beta = [\beta_1 = 0 \dots \beta_{i-1} = 0 \beta_i = 1 \beta_{i+1} = 0 \dots \beta_n = 0]$

olarak seçildiğinde ise

$$\frac{1}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \leq \text{Var}(T_i), \quad i = 1, \dots, n$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \leq \min \{\text{Var}(T_1), \dots, \text{Var}(T_n)\}$$

sonucuna ulaşılır ve böylelikle ispat tamamlanır.

3. DAĞILIM FONKSİYONLARI KONVOLÜSYONLARI

X_1, X_2, \dots, X_n pozitif ve sırasıyla F_1, F_2, \dots, F_n dağılım fonksiyonlarına sahip bağımsız rasgele değişkenler olsunlar. $n = 1, 2, \dots$ için

$$K_n(t) = F_1 * F_2 * \dots * F_n(t), \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

yazalım. (2.4) eşitliği göz önüne alındığında

$$K_n(t) = F_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t), \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

dır. Uygulamalarda sıklıkla karşılaşılan düzgün, üstel, iki parametrelili üstel ve Erlang(şekil parametresi doğal sayı olan gama) dağılımlarının aynı dağılım durumunda $K_n(t)$ konvolüsyon fonksiyonu için analitik ifadeler mevcut olmasına rağmen, farklı dağılım durumunda bu ifadeler kolaylıkla bulunamamaktadır. Bununla birlikte lognormal, Weibull, Rayleigh gibi önemli dağılımlar için ise aynı dağılım durumunda bile dağılım fonksiyonları konvolüsyonlarının bir kapalı form ifadeleri bulunmamaktadır. Lognormal, Weibull ve Rayleigh dağılımları için bazı yaklaşımlar literatürde verilmiştir. Genelde bu fonksiyonun hesabı oldukça önemlidir. Bu bölümde $K_n(t)$ konvolüsyon fonksiyonu için bazı özel dağılımlar altında analitik ifadeler verilmiştir. Ayrıca analitik ifade mevcut olmadığında sayısal hesap için kullanılacak bazı yöntemlerden kısaca bahsedilerek, yamuk integrasyon kuralına dayalı bir sayısal çözüm yöntemi verilmiştir.

3.1 Dağılım Fonksiyonları Konvolüsyonları için Analitik İfadeler

Bu kısımda X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı F dağılımlı olduğunda düzgün, üstel, iki parametrelili üstel ve gama durumlarında $K_n(t)$ konvolüsyon fonksiyonu için analitik ifadeler verilmektedir.

3.1.1 Düzgün dağılım

X rasgele değişkeni $U(0, \theta)$ dağılımına sahip olsun. Bu durumda X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0, & d. d. \end{cases} \quad (3.3)$$

dır. X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenleri birbirlerinden bağımsız ve yukarıda verilen dağılıma sahip olsun. Bu durumda olasılık yoğunluk fonksiyonlarının konvolüsyonu, konvolüsyon integrallerinin ardışık olarak alınması ile

$$f^{n*}(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{(n-1)! \theta^n}, & 0 < x \leq \theta \\ \frac{1}{(n-1)! \theta^n} \left(x^{n-1} - \binom{n}{1} (x-\theta)^{n-1} \right), & \theta \leq x \leq 2\theta \\ \vdots \\ \frac{(x^{n-1} - \binom{n}{1} (x-\theta)^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} (x - (n-1)\theta)^{n-1})}{(n-1)! \theta^n}, & (n-1)\theta \leq x \leq n\theta \\ 0, & d. d. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n}{j} (x - j\theta)^{n-1}}{(n-1)! \theta^n}, & k\theta \leq x \leq (k+1)\theta; k = 0, \dots, n-1 \\ 0, & d. d. \end{cases} \quad (3.4)$$

olarak elde edilir. Bu ifadenin yardımı ile de X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları konvolüsyonları

$$F^{n*}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n}{j} (x - j\theta)^n}{n! \theta^n}, & k\theta \leq x \leq (k+1)\theta; k = 0, \dots, n-1 \\ 1, & x \geq n\theta \end{cases} \quad (3.5)$$

olarak bulunur (Aydoğdu 1997).

3.1.2 Üstel dağılım

X rasgele değişkeni $Ustel(\theta)$ dağılıma sahip olsun. Bu durumda X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & d. d. \end{cases} \quad (3.6)$$

dır. X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenleri birbirlerinden bağımsız ve yukarıda verilen dağılıma sahip olsun. Bu durumda olasılık yoğunluk fonksiyonları konvolüsyonları, konvolüsyon integrallerinin ardışık olarak alınması ile

$$f^{n*}(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(n)\theta^n}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

olarak elde edilir. Bilindiği üzere (3.7) eşitliğinde verilen fonksiyon $Gama(n, \theta)$ dağılımı için olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

$$F^{n*}(x) = \int_0^x f^{n*}(u) du \quad (3.8)$$

olmak üzere tam olmayan gama fonksiyonunun n pozitif tamsayı iken bilinen özelliğinden yararlanarak

$$F^{n*}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\frac{x}{\theta}} \left(\frac{x}{\theta}\right)^k}{k!} \quad (3.9)$$

denkliği elde edilir ve üstel dağılım için dağılım fonksiyonları konvolüsyonları bulunmuş olur.

X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenleri bağımsız fakat farklı parametrelili Üstel(θ_i), $i = 1, 2, \dots, n$ dağılımına sahip olduğunda ise $K_n(t)$ için analitik ifade bulmak kolay olmamakla birlikte bazı araştırmacılar tarafından irdelenmiştir (Nadarajah 2008).

3.1.3 İki parametrelili Üstel dağılım

X rasgele değişkeni $Ustel(\theta_1, \theta_2)$ dağılıma sahip olsun. Bu durumda X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \theta_1 e^{-\theta_1(x-\theta_2)}, & x > \theta_2; \theta_1, \theta_2 > 0 \\ 0, & d.d. \end{cases} \quad (3.10)$$

dır. X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenleri birbirlerinden bağımsız ve yukarıda verilen dağılıma sahip olsun. Bu durumda olasılık yoğunluk fonksiyonlarının konvolüsyonu, konvolüsyon integrallerinin ardışık olarak alınması ile üstel dağılım durumuna benzer şekilde

$$f^{n*}(x) = \begin{cases} \frac{\theta_1^n (x - n\theta_2)^{n-1} e^{-\theta_1(x-\theta_2)}}{\Gamma(n)}, & x > n\theta_2 \\ 0, & x \leq n\theta_2 \end{cases} \quad (3.11)$$

olarak elde edilir.

$$F^{n*}(x) = \int_0^x f^{n*}(u) du \quad (3.12)$$

olmak üzere tam olmayan gama fonksiyonunun n pozitif tamsayı iken bilinen özelliğinden yararlanarak

$$F^{n*}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\theta_1(x - n\theta_2))^k e^{-\theta_1(x-\theta_2)}}{k!} \quad (3.13)$$

elde edilir (Aydoğdu 1997).

3.1.4 Gama dağılımı

X rasgele değişkeni $Gama(\alpha, \beta)$ dağılımına sahip olsun. Bu durumda X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

dır. X rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu ise (2.9) tanımından hareketle

$$\varphi_X(t) = (1 - \beta it)^\alpha \quad (3.15)$$

olarak elde edilir. X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenleri birbirlerinden bağımsız ve yukarıda verilen dağılıma sahip olsun. Bu durumda $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ rasgele değişkeni için karakteristik fonksiyon (2.10) de verilen eşitlikten hareketle

$$\varphi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = (1 - \beta it)^{n\alpha} \quad (3.16)$$

olarak elde edilir. Karakteristik fonksiyon bir dağılımın bütün özelliklerini tümüyle ve tek olarak belirttiği için (3.16) da elde edilen fonksiyon $Gama(n\alpha, \beta)$ dağılımının karakteristik fonksiyonudur. Böylelikle X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenleri için dağılım fonksiyonları konvolüsyonu

$$F^{n*}(x) = \int_0^x \frac{u^{n\alpha-1} e^{-\frac{u}{\beta}}}{\Gamma(n\alpha)\beta^{n\alpha}} du \quad (3.17)$$

dır. Eğer $n\alpha$ pozitif bir tamsayı ise dağılım fonksiyonları konvolüsyonu için bir kapalı form

$$F^{n*}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n\alpha-1} \frac{e^{-\frac{x}{\beta}} \left(\frac{x}{\beta}\right)^k}{k!} \quad (3.18)$$

olarak elde edilir.

3.2 Dağılım Fonksiyonları Konvolüsyonları için Bazı Sayısal Çözümler

Bu kısımda dağılım fonksiyonları konvolüsyonlarının hesabı için literatürde verilen bazı sayısal yöntemler kısaca hatırlatılarak, yamuk integrasyon kuralına dayalı bir çözüm yöntemi verilmiştir.

3.2.1 Laplace dönüşümü

Laplace dönüşümleri, teorik çalışmalarda kullanılan önemli bir integral dönüşümdür ve ters dönüşüm için çeşitli algoritmalar geliştirilmiştir. Fakat uygulamalarda karşılaşılan bazı(lognormal, Weibull, ters Gauss) dağılımlar için dönüşümün bir analitik ifadesi yoktur. Böyle durumlarda sayısal olarak ters alma oldukça zordur. Bu yüzden Laplace dönüşümleri sayısal hesaplamada kısıtlı kullanıma sahiptir (Baxter 1981).

3.2.2 Kuvvet serisi yaklaşımı

Dağılım fonksiyonları konvolüsyonlarının sayısal çözümü için bir diğer yöntem kuvvet serisi açılımıdır. White (1964) ve Lomnicki (1966) F^{n*} için çeşitli kuvvet serisi açılımları sunmuşlardır. Bazı dağılımlar için açılımın var olmaması bu yöntemin uygulanabilirliğini sınırlamaktadır (Baxter 1981).

3.2.3 Kübik spline yaklaşımı

Cleroux ve McConalogue (1976) tarafından verilen algoritma sayısal konvolüsyon için yukarıda bahsedilen yöntemlerden daha genel bir yaklaşım sağlar. Bu algoritma F^{n*} ve $F^{n*} * G^{n*}$ yapısındaki konvolüsyonlar için kübik spline yaklaşımları oluşturur. Burada F ve G dağılım fonksiyonlarının yoğunluk fonksiyonu olan f ve g fonksiyonlarının sınırlı ve f' ve g' in ise sürekli olması şartı aranır. Cleroux-McConalogue algoritmasının temel kısıtlaması yoğunluk fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında sınırlı olma şartıdır. Birçok dağılım için bu koşul sağlanmasına rağmen şekil parametresi $\alpha < 1$ olan gama ve Weibull dağılımları için sağlanmaz. Uygulamalarda karşılaşılan DFR dağılımların en önemlilerini oluşturan bu iki dağılım için bu durum bir engeldir. Ayrıca

lognormal ve ters Gauss dağılımları için orijin etrafında yoğunluk fonksiyonları ve onların türevleri mevcut olmadığı için kübik spline yaklaşımı yetersizdir (Baxter 1981).

McConalogue, yoğunluk fonksiyonu orijin etrafında “iyi davranışlı” olmayan dağılımlardaki sorunu ortadan kaldırmak için yarı-analitik teknikler kullanarak kısıtlamaları kaldırmış ve genişletilmiş bir algoritma sunmuştur. Genişletilmiş algoritma F nin orijin etrafında sınırlı olmasını gerektirmez fakat F^{n*} nun türevinin $n \geq 2$ için sınırlı olduğunu varsayar. Bu $\alpha \geq 1/2$ için gama ve Weibull dağılımlarının konvolüsyonlarının hesabını mümkün kılar ve lognormal ve ters Gauss dağılımlar için daha yaklaşık sonuçlar elde edilmesini mümkün kılar (Baxter 1981).

3.2.4 İntegral hesabı

Bu kısımda konvolüsyon integralinin sayısal hesabının yamuk integrasyon kuralına dayalı çözümü üzerinde durulacaktır.

Şimdi $\int_a^b g(x)dh(x)$ tipindeki bir integrali göz önüne alalım. $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ $[a, b]$ aralığının $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$ şeklinde bir parçalanması olmak üzere bu integral yamuk integrasyon kuralı yardımı ile

$$\int_a^b g(x)dh(x) \cong \sum_{i=1}^m \frac{g(x_{i-1}) + g(x_i)}{2} (h(x_i) - h(x_{i-1})) \quad (3.19)$$

şeklinde yaklaşık olarak hesap edilebilir.

F_1, F_2, \dots, F_n destek kümesi $[0, \infty)$ olan birer dağılım fonksiyonu olsunlar. Bilindiği üzere dağılım fonksiyonları konvolüsyonları

$$F_1 * F_2(t) = \int_0^t F_2(t-x)dF_1(x)$$

integrali ile tanımlıdır. F_1, F_2, \dots, F_n dağılım fonksiyonlarının konvolüsyonları ise dağılım fonksiyonları konvolüsyonlarının değişme özelliğinden yararlanılması ile genel olarak

$$F_1 * F_2 * \dots * F_n(t) = \int_0^t (F_1 * F_2 * \dots * F_{n-1})(t-x) dF_n(x) \quad (3.20)$$

şeklinde ifade edilebilir. $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ $[0, t)$ aralığının $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = t$ olan bir parçalanması olmak üzere $F_1 * F_2 * \dots * F_n(t)$, $t \geq 0$ fonksiyonu verilen sabit t değeri için (3.20) ifadesinin göz önüne alınması ile

$$F_1 * \dots * F_n(t) \cong \sum_{i=1}^m \frac{F_1 * \dots * F_{n-1}(t_{i-1}) + F_1 * \dots * F_{n-1}(t_i)}{2} (F_n(t_i) - F_n(t_{i-1}))$$

şeklinde yaklaşık olarak hesaplanabilir. Burada $F_1 * \dots * F_{n-1}$ fonksiyonunun $t_i, i = 1, \dots, m$ değerlerine $k = 2, \dots, n - 1$ için

$$F_1 * \dots * F_k(t_i) \cong \sum_{j=1}^i \frac{F_1 * \dots * F_{k-1}(t_{j-1}) + F_1 * \dots * F_{k-1}(t_j)}{2} (F_k(t_j) - F_k(t_{j-1}))$$

hesabının ardışık olarak yapılması ile ulaşılır (Aydoğdu 2005).

4. SAYMA SÜREÇLERİ

Bu bölümde stokastik modellemede sıkça kullanılan sayma süreçleri üzerinde durulmuştur. Sayma sürecinin genel tanımı yapıldıktan sonra özel bir sayma süreci olan yenileme süreci ve monoton eğilimli bir sayma süreci olan geometrik süreç tanıtılmıştır. Ayrıca bu süreçlerin dağılım fonksiyonlarının konvolüsyonlarına bağlı ortalama değer ve varyans fonksiyonları verilmiştir.

Tanım 4.1 $N(t), (0, t]$ aralığında gerçekleşen belli bir tür olayın sayısı olmak üzere, $\{N(t), t \geq 0\}$ ile verilen stokastik sürece bir “sayma süreci” denir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci, sürekli parametre ($T = [0, \infty)$) ve kesikli durum uzaylı ($E = \{0, 1, 2, \dots\}$) bir stokastik süreçtir ve

- i. $N(t) \geq 0, \forall t \in T,$
- ii. $N(t)$ tamsayı değerli bir rasgele değişkendir,
- iii. $s < t$ için $N(s) \leq N(t),$
- iv. $s < t$ için $N(t) - N(s), (s, t]$ aralığında gerçekleşen olay sayısıdır.

özelliklerine sahiptir. $\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olmak üzere, X_k rasgele değişkeni, $(k - 1)$. olay ile k . olay arası geçen zamanı gösterebilir. $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ dizisine $\{N(t), t \geq 0\}$ sürecinin varışlar arası zaman dizisi denir. Bu dizi sayma sürecini tek olarak belirler. $S_0 = 0, S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ olmak üzere

$$N(t) = \sup\{n: S_n \leq t\} \quad (4.1)$$

olduğu açıktır. Burada S_n n . olayın gerçekleşme zamanını gösterir. Ayrıca $(N(t) \geq n)$ olayı $(S_n \leq t)$ olayına denk olduğundan

$$P(N(t) \geq n) = P(S_n \leq t) \quad (4.2)$$

dır. Buradan, her sabit $t \in T$ için $N(t)$ nin olasılık dağılımı

$$\begin{aligned}
P(N(t) = n) &= P(S_n \leq t, S_{n+1} > t) \\
&= P(S_{n+1} > t) - P(S_{n+1} > t, S_n > t) \\
&= P(S_{n+1} > t) - P(S_n > t) \\
&= (1 - P(S_{n+1} \leq t)) - (1 - P(S_n \leq t)) \\
&= F_{S_n}(t) - F_{S_{n+1}}(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{4.3}$$

olarak bulunur. Burada F_{S_n} , S_n nin dağılım fonksiyonudur.

$\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci için

$$M(t) = E(N(t)), \quad t \geq 0 \tag{4.4}$$

ve

$$V(t) = \text{Var}(N(t)), \quad t \geq 0 \tag{4.5}$$

ile verilen M ve V fonksiyonlarına sırasıyla sürecin “ortalama değer” ve “varyans fonksiyonu” denir. Bu fonksiyonlara aşağıdaki gibi ulaşılır.

$k = 1, 2, \dots$ için

$$I_k(t) = \begin{cases} 1, & S_k \leq t \\ 0, & S_k > t \end{cases} \tag{4.6}$$

olsun. Bu durumda

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k(t) \tag{4.7}$$

olarak ifade edilebilir. $N(t)$ nin beklenen değeri alındığında

$$E(N(t)) = E\left(\sum_{k=1}^{\infty} I_k(t)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} E(I_k(t)) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} F_{S_k}(t), \quad t \geq 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. Buradan

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{S_k}(t), \quad t \geq 0 \tag{4.9}$$

dır. Sürecin varyans fonksiyonu ise

$$\begin{aligned}
V(t) &= \text{Var}(N(t)), \quad t \geq 0 \\
&= E[N^2(t)] - E[N(t)]^2, \quad t \geq 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

olmak üzere öncelikle $E[N^2(t)]$ elde edilmelidir.

$$\begin{aligned}
E[N^2(t)] &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(N(t) = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (F_{S_k}(t) - F_{S_{k+1}}(t)) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - (k-1)^2) F_{S_k}(t) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) F_{S_k}(t)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

olduğundan gerekli düzenlemeler yapıldığında sürecin varyans fonksiyonu

$$V(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} k F_{S_k}(t) - \left(\sum_{k=1}^{\infty} F_{S_k}(t) \right)^2, \quad t \geq 0 \tag{4.12}$$

olarak elde edilir.

4.1 Yenileme Süreci

Bu bölümde bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin dizisi üzerine kurulu bir sayma süreci olan yenileme süreci tanıtılıp, bu sürecin ortalama değer ve varyans fonksiyonu verilmektedir.

Özel bir sayma süreci olan yenileme süreci risk analizi, güvenilirlik teorisi, trafik akışlarının modellenmesi, kuyruk teorisi ve envanter teorisi gibi alanlarda kullanılan önemli bir araçtır. Bu sürecin tanımı ise aşağıdaki gibidir.

X_1, X_2, \dots birbirlerinden bağımsız aynı F dağılımlı pozitif rasgele değişkenler olsunlar. Aşıkardurumlardan sakınmak için $F(0) < 1$ kabul edelim. Yani X_n rasgele değişkeni 1 olasılıkla sifira eşit olmasın. $n = 1, 2, \dots$ için

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

olmak üzere

$$N(t) = \sup\{n: S_n \leq t\}, \quad t \geq 0 \quad (4.13)$$

ile tanımlanan $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine “yenileme süreci“ denir. $\{N(t), t \geq 0\}$ yenileme süreci, $(0, t]$ aralığında gerçekleşen olayların sayısını sayan negatif olmayan tamsayı değerli bir stokastik süreçtir. Burada X_k lar yenilemeler arası geçen zaman sürelerini ifade ederken S_n n . yenilemenin gerçekleşme zamanıdır. $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci ile birlikte $\{S_n, n \geq 0\}$ kısmi toplamlar süreci de yenileme süreci olarak ifade edilmektedir. Yenileme teorisinin temel amacı, gelişler arası zaman dağılımı F nin bilgisine dayanarak $N(t)$ ve S_n ile ilgili belirli özellikleri elde etmektir. $F(0) < 1$ olduğundan F dağılımının ortalaması μ sıfırdan farklı olup, güçlü büyük sayılar yasasının göz önüne alınması ile $N(t)$ sonlu olmak zorundadır. Bu durumda $N(t)$ nin tanımında kullanılan \sup ifadesi yerine \max ifadesi kullanılabilir. Ayrıca $N(t)$ her mertebeden sonlu momentlere sahiptir (Ross 1983).

$$\begin{aligned}
P(N(\infty) < \infty) &= P(\text{En az bir } n \text{ için } X_n = \infty) \\
&= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n = \infty)\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = \infty) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan her sabit $t \geq 0$ için $N(t)$ sonlu olmasına rağmen $P(\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty) = 1$ dir. $N(t)$ rasgele değişkeninin olasılık dağılımı (4.3) ifadesinin göz önüne alınması ile

$$\begin{aligned}
P(N(t) = n) &= F_{S_n}(t) - F_{S_{n+1}}(t) \\
&= F^{n*}(t) - F^{(n+1)*}(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{4.14}$$

olarak elde edilir. Ayrıca $N(t)$ için aşağıdaki limit ifadeleri geçerlidir.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \tag{4.15}$$

ve σ^2 sonlu olmak üzere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left(\frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} < x\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-x^2/2} dx \tag{4.16}$$

dır (Karlin ve Taylor 1975). Burada μ ve σ^2 X_n rasgele değişkeninin beklenen değer ve varyansdır. Yukarıdaki limit ifadelerine göre uzun bir zaman sonunda birim zamanda yapılan yenileme sayısı yaklaşık olarak $1/\mu$ dür ve $N(t)$, t/μ ortalamalı ve $\sigma^2 t/\mu^3$ varyanslı asimptotik normal dağılımlıdır.

4.1.1 Yenileme ve Varyans Fonksiyonu

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olmak üzere

$$M(t) = E(N(t)), t \geq 0 \quad (4.17)$$

ile verilen $M(t)$ fonksiyonuna sürecin ortalama değer fonksiyonu veya “yenileme fonksiyonu” denir (Karlin ve Taylor 1975). Burada $M(t)$, $(0, t]$ aralığında gerçekleşen olayların beklenen sayısıdır. Yenileme sürecinin sonlu dereceden momentlerinin sonlu olması sebebi ile $\forall t \geq 0$ için $M(t) < \infty$ dir. Yenileme fonksiyonu (4.9) ifadesinin göz önüne alınması ile

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t), \quad t \geq 0 \quad (4.18)$$

olarak elde edilir. (4.18) ifadesinden görüleceği üzere M sağdan sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur. Ayrıca $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \infty$ olmak üzere M , $t \rightarrow \infty$ için bire yakınsamamasının dışında dağılım fonksiyonu özelliklerine sahiptir. $M(t)$ için bir integral denklem ise birinci yenileme zamanı üzerinden koşullandırma ile

$$\begin{aligned} E(N(t)) &= E[E(N(t)|X_1)], & E(N(t)|X_1 = x) &= \begin{cases} 0, & x > t \\ 1 + M(t - x), & x \leq t \end{cases} \\ &= \int_0^{\infty} E(N(t)|X_1 = x) dF(x), \\ &= \int_0^t (1 + M(t - x)) dF(x) \\ &= F(t) + \int_0^t M(t - x) dF(x) \end{aligned} \quad (4.19)$$

olarak elde edilir. Bu durumda M yenileme fonksiyonu $a(t) = F(t)$ olan (2.12) yenileme denklemini sağlar. Bununla birlikte M yenileme fonksiyonu

$$M(t) = F(t) + M * F(t), \quad t \geq 0 \quad (4.20)$$

şeklinde ya da konvolüsyon işleminin değişme özelliğinden

$$M(t) = F(t) + F * M(t), \quad t \geq 0 \quad (4.21)$$

olarak da ifade edilebilir. F ve M fonksiyonlarının Laplace-Stieltjes dönüşümleri

$$F_{LS}(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dF(x)$$

ve

$$M_{LS}(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dM(x)$$

olmak üzere (4.20) ifadesinden

$$M_{LS}(t) = F_{LS}(t) + F_{LS}(t)M_{LS}(t) \quad (4.22)$$

eşitliği geçerlidir. Bu durumda M yenileme fonksiyonunun Laplace-Stieltjes dönüşümü için

$$M_{LS}(t) = \frac{F_{LS}(t)}{1 - F_{LS}(t)} \quad (4.23)$$

ve F dağılım fonksiyonunun Laplace-Stieltjes dönüşümü için

$$F_{LS}(t) = \frac{M_{LS}(t)}{1 + M_{LS}(t)} \quad (4.24)$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca F dağılım fonksiyonu bir f yoğunluk fonksiyonuna sahip olduğunda f ve M fonksiyonlarının sırası ile Laplace dönüşümleri

$$f_L(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} f(x) dx$$

ve

$$M_L(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} M(x) dx$$

olmak üzere (4.19) integral denkleminde

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)f(x)dx \quad (4.25)$$

eşitliği elde edilir. Her iki tarafın Laplace dönüşümü alındığında, $F_L(t) = f_L(t)/t$ olmak üzere

$$M_L(t) = \frac{f_L(t)}{t} + M_L(t)f_L(t) \quad (4.26)$$

olarak elde edilir. Böylelikle

$$M_L(t) = \frac{f_L(t)}{t(1-f_L(t))} \quad (4.27)$$

ve

$$f_L(t) = \frac{tM_L(t)}{(1+tM_L(t))} \quad (4.28)$$

dır.

Bir fonksiyonun Laplace-Stieltjes dönüşümü, o fonksiyonu tek olarak belirlediğinden (Kawata 1972), (4.23) ve (4.24) ifadelerinin göz önüne alınması ile M yenileme fonksiyonu F dağılım fonksiyonunu ve F dağılım fonksiyonu da M yenileme fonksiyonunu tek olarak belirler.

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olmak üzere

$$V(t) = \text{Var}(N(t)), t \geq 0 \quad (4.29)$$

ile verilen V fonksiyonuna sürecin varyans fonksiyonu denir (Karlin ve Taylor 1975). Yenileme sürecinin sonlu dereceden bütün momentlerinin sonlu olması sebebi ile $\forall t \in [0, \infty)$ için $V(t) < \infty$ dir. Bir yenileme sürecinin varyans fonksiyonu

$$V(t) = E(N^2(t)) - E^2(N(t)), t \geq 0 \quad (4.30)$$

olmak üzere $E(N^2(t))$ nin birinci yenileme zamanı X_1 rasgele değişkeni üzerinden koşullandırılması ile varyans fonksiyonu için bilinen

$$V(t) = M(t)(1 - M(t)) + 2M * M(t) \quad (4.31)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade ayrıca Stieltjes konvolüsyonunun tanımından hareketle

$$V(t) = M(t)(1 - M(t)) + 2 \int_0^t M(t-x) dM(x)$$

olarak da yazılabilir. Ayrıca V varyans fonksiyonu

$$V(t) = M(t) + M * F(t) - M^2(t) + M^2 * F(t) + \int_0^t V(t-x) dF(x) \quad (4.32)$$

integral denklemini sağlar ve bu denklem aynı zamanda bir yenileme denklemdir. Teorem 2.6.1 gereği bu integral denkleminin sonlu aralıklar üzerinde sınırlı bir ve tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$V(t) = M(t)(1 - M(t)) + 2M * M(t) \quad (4.33)$$

dır. Böylelikle (4.31) ifadesi tekrar elde edilir (Aydoğdu 1997). Bununla birlikte (4.12) ifadesinin göz önüne alınması ile V varyans fonksiyonu

$$V(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} nF^{n*}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t) \right), t \geq 0 \quad (4.34)$$

şeklinde konvolüsyon serileri yardımı ile de ifade edilebilir.

4.2 Geometrik Süreç

Bu bölümde Lam (1988) tarafından verilen yenileme sürecinin bir genellemesi olan geometrik süreç kısaca tanıtılarak, bu sürece ilişkin ortalama değer ve varyans fonksiyonu verilmektedir.

Yenileme süreci stokastik modellemede kullanılan çok güçlü bir araçtır. Fakat bazı süreçler için, sürece konu olan rasgele değişkenlerin aynı dağılımlı olma özelliği değişebilmektedir. Örneğin bozulan bir sistem düşünölsün. Sistem bozulup yerine yenisi yerleştirildiğinde ve bu işlem devam ettikçe bu süreç bir yenileme süreci ile modellenebilir. Fakat sistem yenisiyle değiştirilmeyip tamir edildiğinde, tamirler arası geçen zaman sürelerinin stokastik olarak azalan olması, aynı dağılımlı olma şartına göre daha kabul edilebilir bir yaklaşımdır. Bu sebeple Lam aşağıdaki gibi bir stokastik monoton süreç tanımlamıştır.

$(X_n)_{n=1,2,\dots}$ bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere

$$X_n^G = \frac{X_n}{a^{n-1}}, n = 1, 2, \dots, S_0^G = 0, S_n^G = \sum_{i=1}^n X_i^G$$

olsun. Bu durumda $(X_n^G)_{n=1,2,\dots}$ dizisi üzerine kurulu

$$N^G(t) = \sup\{n: S_n^G \leq t\}, t \geq 0 \quad (4.35)$$

ile tanımlanan sürece “*a oranlı geometrik süreç*” denir. Burada S_n^G n . olayın gerçekleşme zamanını, $N^G(t)$ de $(0, t]$ aralığında gerçekleşen olay sayısını ifade eder. Açık ki $a = 1$ için $N^G(t)$ bir yenileme süreci oluşturur. Yani geometrik süreç yenileme sürecinin bir genellemesidir. Ayrıca kolaylıkla gösterilebilir ki $0 < a < 1$ için geometrik süreç stokastik artan, $a > 1$ için ise stokastik azalandır.

$\{N^G(t), t \geq 0\}$ a oranlı bir geometrik süreç olmak üzere X_1 ; μ ortalamalı ve $\sigma^2 < \infty$ varyanslı F dağılımına sahip olsun. Bu durumda

$$F_{X_n^G}(x) = F(a^{n-1}x), n = 1, 2, \dots \quad (4.36)$$

olarak elde edilir. Ayrıca kolaylıkla gösterilebilir ki

$$E(X_n^G) = a^{1-n}\mu, n = 1, 2, \dots \quad (4.37)$$

ve

$$Var(X_n^G) = a^{2-2n}\sigma^2, n = 1, 2, \dots \quad (4.38)$$

dır. Geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı

$$\begin{aligned} P(N^G(t) = n) &= P(N^G(t) \geq n) - P(N^G(t) \geq n + 1) \\ &= P(S_n^G \leq t) - P(S_{n+1}^G \leq t) \\ &= F_{X_1^G} * F_{X_2^G} * \dots * F_{X_n^G} * (1 - F_{X_{n+1}^G})(t), t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

dır. Burada $*$ Stieltjes konvolüsyon işlemini belirtir.

4.2.1 Geometrik Fonksiyon ve Varyans Fonksiyonu

$\{N^G(t), t \geq 0\}$ a oranlı bir geometrik süreç olmak üzere

$$M^G(t) = E(N^G(t)), t \geq 0 \quad (4.40)$$

ile verilen M^G fonksiyonuna geometrik sürecin ortalama değer fonksiyonu denir. Bu fonksiyon aynı zamanda “*geometrik fonksiyon*” olarak da adlandırılır. Burada $M^G(t)$ $(0, t]$ aralığında gerçekleşen olayların beklenen değeri olmak üzere (4.9) ifadesinin göz önüne alınması ile

$$M^G(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{X_1^G} * \dots * F_{X_k^G}(t), \quad t \geq 0 \quad (4.41)$$

olarak elde edilir. Ayrıca M^G geometrik fonksiyon için X_1^G 1. zaman süresi rasgele değişkeni üzerinden koşullandırma yardımı ile

$$M^G(t) = F(t) + \int_0^t M^G(a(t-x))dF(x), t \geq 0. \quad (4.42)$$

integral denklem elde edilir. Lam (2007) M^G geometrik fonksiyonun $a \leq 1$ için sonlu bir çözüme sahip olduğunu göstermiştir, fakat $a > 1$ için geometrik fonksiyonun sonlu bir çözümü yoktur.

Bu sürecin varyans fonksiyonu ise

$$V^G(t) = Var(N^G(t)), t \geq 0. \quad (4.43)$$

olarak tanımlanır. V^G varyans fonksiyonu (4.12) ifadesinin göz önüne alınması ile

$$V^G(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \left(F_{X_1^G} * \dots * F_{X_k^G}(t) \right) - \sum_{k=1}^{\infty} F_{X_1^G} * \dots * F_{X_k^G}(t) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{X_1^G} * \dots * F_{X_k^G}(t) \right), t \geq 0 \quad (4.44)$$

olarak elde edilir.

Geometrik sürecin M^G ortalama değer ve V^G varyans fonksiyonu için analitik ifade elde etmek oldukça zor olup, bazı önemli dağılımlar için bu fonksiyonların analitik ifadeleri mevcut değildir. Bu durumda bu fonksiyonların hesabı için sayısal bir yöntemin uygulanması gerekmektedir. Tang ve Lam (2007) $a < 1$ için M^G geometrik fonksiyonun hesabı için (4.42) integral denklemine dayalı sayısal bir yöntem vermiştir. Bu yöntem integral denklemin adımsal olarak hesaplanması temeline dayanmaktadır. Fakat bu yöntem f yoğunluk fonksiyonunun orijin etrafında singüler olmasına izin vermez. Bu durum uygulamalarda karşılaşılan DFR dağılımların en önemlilerini oluşturan gama ve Weibull için şekil parametresi birden küçük ($\alpha < 1$) iken bu yöntemi uygulanamaz kılar. V^G varyans fonksiyonunun hesabı için ise mevcut bir çalışma bulunmamaktadır.

5. DAĞILIM FONKSİYONLARI KONVOLÜSYONLARI İÇİN MONTE CARLO TAHMİN EDİCİLERİ

Bu bölümde olasılık modellerine bağlı uygulamaların birçok sahasında ortaya çıkan dağılım fonksiyonları konvolüsyonlarının tahmini üzerinde durulur. Dağılım fonksiyonları konvolüsyonları için literatürde mevcut olan Monte Carlo tahmin edicileri verilir. Bu tahmin ediciler yardımıyla yeni bir Monte Carlo tahmin edicisi tanımlanmış ve bu tahmin ediciler yansızlık ve etkinlik bakımından değerlendirilmiştir.

X_1, X_2, \dots, X_n pozitif ve sırasıyla F_1, F_2, \dots, F_n dağılım ve f_1, f_2, \dots, f_n yoğunluk fonksiyonlarına sahip bağımsız rasgele değişkenler olsunlar. $n = 1, 2, \dots$ için

$$K_n(t) = F_1 * F_2 * \dots * F_n(t), \quad t \geq 0$$

yazalım. (2.4) eşitliğinin göz önüne alınması ile

$$K_n(t) = F_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t), \quad t \geq 0$$

olduğunu biliyoruz. Genellikle $K_n(t)$ konvolüsyon fonksiyonu analitik olarak elde edilemez. Bu durumda bu fonksiyonun hesabı için Monte Carlo yaklaşımı kullanılabilir. Bu bölümde F_1, F_2, \dots, F_n dağılım fonksiyonları bilindiğinde $K_n(t)$ konvolüsyon fonksiyonu için bazı Monte Carlo tahmin edicileri ele alınmaktadır.

5.1 Basit Monte Carlo Tahmin Edicisi

$n = 1, 2, \dots$ için

$$I_n(t) = \begin{cases} 1, & X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq t \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (5.1)$$

olarak verilsin. $i = 1, 2, \dots, N$ için $I_n^{(i)}(t)$, $I_n(t)$ nin i . gözlem değeri olsun. Bu durumda

$$\hat{K}_{1n}(t) = \frac{\sum_{i=1}^N I_n^{(i)}(t)}{N} \quad (5.2)$$

ile tanımlanan tahmin edici $K_n(t)$ için basit Monte Carlo tahmin edicisidir (Gertsbakh ve Shpungin 2004). Burada N simülasyon sayısını göstermektedir.

5.2 Brown, Solomon ve Stevens' in Monte Carlo Tahmin Edicisi

$n = 1, 2, \dots$ için $I_n(t)$ rasgele değişkenini göz önüne alalım. $I_n(t)$ rasgele değişkenini X_1, X_2, \dots, X_{n-1} rasgele değişkenleri üzerinden koşullandırma ile $I_n(t)$ nin koşullu beklenen değeri

$$\begin{aligned} E(I_n(t)|X_1, \dots, X_{n-1}) &= P(X_1 + \dots + X_n \leq t | X_1, \dots, X_{n-1}) \\ &= P(X_n + X_1 + \dots + X_{n-1} \leq t | X_1, \dots, X_{n-1}) \\ &= P\left(X_n \leq t - \left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right)\right) \\ &= F_n(t - S_{n-1}) \end{aligned}$$

olarak bulunur. $n = 1, 2, \dots$ için

$$A_n(t) = F_n(t - S_{n-1}), \quad t \geq 0 \quad (5.3)$$

yazalım. $i = 1, 2, \dots, N$ için $A_n^{(i)}(t)$, $A_n(t)$ nin i . gözlem değeri olmak üzere

$$\hat{K}_{2n}(t) = \frac{\sum_{i=1}^N A_n^{(i)}(t)}{N} \quad (5.4)$$

ile tanımlanan tahmin edici $K_n(t)$ için bir Monte Carlo tahmin edicisidir (Brown vd 1981).

5.3 Gertsbakh ve Shpungin' in Monte Carlo Tahmin Edicisi

$n > 1$ için $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1})$ rasgele vektörünü göz önüne alalım. Y rasgele vektörü için ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_Y(y_1, \dots, y_{n-1}) = f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1) \dots f_{Y_{n-1}|Y_1, \dots, Y_{n-2}}(y_{n-1}|y_1, \dots, y_{n-2})$$

olmak üzere

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{f_1(y_1)}{F_1(t)}, y_1 \in [0, t]$$

ve $i = 2, 3, \dots, n - 1$ için

$$f_{Y_i|Y_1, \dots, Y_{i-1}}(y_i|y_1, \dots, y_{i-1}) = \frac{f_i(y_i)}{F_i(t - y_1 - \dots - y_{i-1})}$$

olsun. Burada $y_i \in [0, t - y_1 - \dots - y_{i-1}]$ olup F_i ve f_i sırası ile X_i rasgele değişkenin dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

$n = 1, 2, \dots$ için

$$B_n(t) = F_1(t)F_2(t - Y_1) \dots F_n(t - (Y_1 + \dots + Y_{n-1})), t \geq 0 \quad (5.5)$$

yazalım. $i = 1, 2, \dots, N$ için $B_n^{(i)}(t)$, $B_n(t)$ nin i . gözlem değeri olmak üzere

$$\hat{K}_{3n}(t) = \frac{\sum_{i=1}^N B_n^{(i)}(t)}{N} \quad (5.6)$$

ile tanımlanan tahmin edici $K_n(t)$ için bir Monte Carlo tahmin edicisidir (Gertsbakh ve Shpungin 2004).

5.4 Tahmin Edicilerin İstatistiksel Özellikleri

Bu kısımda yukarıda tanımlanan tahmin edicilerin yansızlığı incelenip tahmin ediciler için varyans karşılaştırması yapılmaktadır.

$$\begin{aligned} E\left(\hat{K}_{1n}(t)\right) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^N I_n^{(i)}(t)}{N}\right) \\ &= N \frac{1}{N} E(I_n(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq t) \\
&= K_n(t)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

ve

$$\begin{aligned}
E(\widehat{K}_{2n}(t)) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^N A_n^{(i)}(t)}{N}\right) \\
&= N \frac{1}{N} E(A_n(t)) \\
&= E(E(I_n(t)|X_1, X_2, \dots, X_{n-1})) \\
&= E(I_n(t)) \\
&= K_n(t)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

olduğundan $\widehat{K}_{1n}(t)$ ve $\widehat{K}_{2n}(t)$ Monte Carlo tahmin edicileri $K_n(t)$ için yansızdır.

$$\begin{aligned}
E(\widehat{K}_{3n}(t)) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^N B_n^{(i)}(t)}{N}\right) \\
&= N \frac{1}{N} E(B_n(t)) \\
&= E(B_n(t)) \\
&= \int \dots \int F_1(t) F_2(t - y_1) \dots F_n(t - (y_1 + \dots + y_{n-1})) \\
&\quad \times f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}}(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) dy_{n-1} \dots dy_1 \\
&= \int \dots \int F_1(t) F_2(t - y_1) \dots F_n(t - (y_1 + \dots + y_{n-1})) f_{Y_1}(y_1) \\
&\quad \times f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1) \dots f_{Y_{n-1}|Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-2}}(y_{n-1}|y_1, y_2, \dots, y_{n-2}) dy_{n-1} \dots dy_1 \\
&= \int \dots \int F_1(t) F_2(t - y_1) \dots F_n(t - (y_1 + \dots + y_{n-1})) \\
&\quad \times \frac{f_1(y_1)}{F_1(t)} \frac{f_2(y_2)}{F_2(t - y_1)} \dots \frac{f_{n-1}(y_{n-1})}{F_{n-1}(t - (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-2}))} dy_{n-1} \dots dy_1 \\
&= \int \dots \int F_n(t - (y_1 + \dots + y_{n-1})) dF_{n-1}(y_{n-1}) \dots dF_1(y_1)
\end{aligned} \tag{5.9}$$

elde edilir. Tam olasılık formülü yardımı ile

$$\begin{aligned}
F_1 * F_2 * \dots * F_n(t) &= P(X_1 + \dots + X_n \leq t) \\
&= \int \dots \int P(X_1 + \dots + X_n \leq t | (X_1, \dots, X_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1})) \\
&\quad \times f_{X_1, \dots, X_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_{n-1} \dots dx_1 \\
&= \int \dots \int P(X_n \leq t - (x_1 + \dots + x_{n-1})) f_{X_1}(x_1) dx_1 \dots f_{X_{n-1}}(x_{n-1}) dx_{n-1} \\
&= \int \dots \int F_n(t - (x_1 + \dots + x_{n-1})) dF_{n-1}(x_{n-1}) \dots dF_1(x_1) \quad (5.10)
\end{aligned}$$

yazılabileceğinden (5.9) eşitliğinin $K_n(t)$ ye eşit olduğu açıktır. Böylelikle $\hat{K}_{3n}(t)$ Monte Carlo tahmin edicisinin $K_n(t)$ için yansız olduğu sonucuna ulaşılır.

Şimdi de bu tahmin edicilerin varyanslarını inceleyelim. $n = 1, 2, \dots$ için

$$Var(I_n(t)) = Var(E(I_n(t)|X_1, \dots, X_{n-1})) + E(Var(I_n(t)|X_1, \dots, X_{n-1}))$$

ve

$$Var(A_n(t)) = Var(E(I_n(t)|X_1, X_2, \dots, X_{n-1}))$$

olduğundan

$$Var(A_n(t)) \leq Var(I_n(t)) \quad (5.11)$$

sonucuna ulaşılır.

$n = 1, 2, \dots$ için $E(A_n(t)) = E(B_n(t)) = K_n(t)$ olduğundan varyansların karşılaştırılması için ikinci momentlerin karşılaştırılması gereklidir.

$$E(A_n^2(t)) = \int \dots \int F_n^2(t - (x_1 + \dots + x_{n-1})) dF_{n-1}(x_{n-1}) \dots dF_1(x_1) \quad (5.12)$$

ve

$$\begin{aligned}
E(B_n^2(t)) &= \int \dots \int F_1^2(t) \dots F_{n-1}^2(t - (y_1 + \dots + y_{n-2})) \\
&\quad \times F_n^2(t - (y_1 + \dots + y_{n-1})) f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}}(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) dy_{n-1} \dots dy_1 \\
&= \int \dots \int F_1^2(t) \dots F_{n-1}^2(t - (y_1 + \dots + y_{n-2})) \\
&\quad \times F_n^2(t - (y_1 + \dots + y_{n-1})) f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1) \dots \\
&\quad \times f_{Y_{n-1}|Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-2}}(y_{n-1}|y_1, y_2, \dots, y_{n-2}) dy_{n-1} \dots dy_1 \\
&= \int \dots \int F_1^2(t) \dots F_{n-1}^2(t - (y_1 + \dots + y_{n-2})) \\
&\quad \times F_n^2(t - (y_1 + \dots + y_{n-1})) \frac{f_1(y_1)}{F_1(t)} \frac{f_2(y_2)}{F_2(t - y_1)} \dots \\
&\quad \times \frac{f_{n-1}(y_{n-1})}{F_{n-1}(t - (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-2}))} dy_{n-1} \dots dy_1 \\
&= \int \dots \int F_1(t) \dots F_{n-1}(t - (y_1 + \dots + y_{n-2})) \\
&\quad \times F_n^2(t - (y_1 + \dots + y_{n-1})) dF_{n-1}(y_{n-1}) \dots dF_1(y_1) \tag{5.13}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. $i = 1, 2, \dots, n - 1$ için $F_i(t - (y_1 + \dots + y_{i-1})) \leq F_i(t)$ olduğundan

$$E(B_n^2(t)) \leq \prod_{i=1}^{n-1} F_i(t) E(A_n^2(t)) \tag{5.14}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin kullanılması ile tahmin edicilerin varyansları için

$$\begin{aligned}
Var(A_n(t)) - Var(B_n(t)) &= E(A_n^2(t)) - E(B_n^2(t)) \\
&\geq E(A_n^2(t)) - \prod_{i=1}^{n-1} F_i(t) E(A_n^2(t)) \\
&= E(A_n^2(t)) - E^2(A_n(t)) - \prod_{i=1}^{n-1} F_i(t) E(A_n^2(t)) + E^2(A_n(t)) \\
&\geq Var(A_n(t)) - \prod_{i=1}^{n-1} F_i(t) E(A_n^2(t)) + \prod_{i=1}^{n-1} F_i(t) E^2(A_n(t)) \\
&= Var(A_n(t)) - \prod_{i=1}^{n-1} F_i(t) Var(A_n(t))
\end{aligned}$$

$$= \text{Var}(A_n(t)) \left(1 - \prod_{i=1}^{n-1} F_i(t) \right) \quad (5.15)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlendiğinde

$$\text{Var}(A_n(t)) - \text{Var}(B_n(t)) \geq \text{Var}(A_n(t)) \left(1 - \prod_{i=1}^{n-1} F_i(t) \right) \quad (5.16)$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\text{Var}(B_n(t)) \leq \prod_{i=1}^{n-1} F_i(t) \text{Var}(A_n(t)) \quad (5.17)$$

sonucuna ulaşılır. Buradan görüleceği üzere

$$\text{Var}(B_n(t)) \leq \text{Var}(A_n(t)) \quad (5.18)$$

dır.

Yukarıda bulunan (5.11) ve (5.18) ifadeleri birlikte ele alındığında

$$\text{Var}(B_n(t)) \leq \text{Var}(A_n(t)) \leq \text{Var}(I_n(t)) \quad (5.19)$$

elde edilir. Böylece $\widehat{K}_{1n}(t)$, $\widehat{K}_{2n}(t)$ ve $\widehat{K}_{3n}(t)$ Monte Carlo tahmin edicilerinin varyansları için

$$\text{Var}(\widehat{K}_{3n}(t)) \leq \text{Var}(\widehat{K}_{2n}(t)) \leq \text{Var}(\widehat{K}_{1n}(t)) \quad (5.20)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

5.5 Yeni Bir Monte Carlo Tahmin Edicisi

Bu kısımda yukarıda tanımlanan tahmin ediciler yardımıyla dağılım fonksiyonları konvolüsyonları için yeni bir Monte Carlo tahmin edicisi verilmektedir.

Kısım 2.7 de verilen Teorem 2.7.1 i göz önüne alalım. Bu teoreme göre yansız ve sonlu varyanslı tahmin edicilerin uygun doğrusal birleşimleri yardımı ile daha etkin bir tahmin edici oluşturulabilir.

$I_n(t)$, $A_n(t)$ ve $B_n(t)$, $K_n(t)$ için yansız birer tahmin ediciler olmak üzere bu tahmin edicilerin sonlu varyansa sahip olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu durumda $n = 1, 2, \dots$ ve her sabit $t \geq 0$ için

$$C_n(t) = \alpha_1 I_n(t) + \alpha_2 A_n(t) + \alpha_3 B_n(t), \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad (5.21)$$

ile tanımlanan $C_n(t)$ tahmin edicisini $I_n(t)$, $A_n(t)$ ve $B_n(t)$ tahmin edicilerine göre daha etkin kılacak, yani

$$\text{Var}(C_n(t)) \leq \text{Var}(B_n(t)) \leq \text{Var}(A_n(t)) \leq \text{Var}(I_n(t)) \quad (5.22)$$

şartını sağlayacak $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sabitleri vardır. $n = 1, 2, \dots$ ve her sabit $t \geq 0$ için Σ_n , $[I_n(t) A_n(t) B_n(t)]$ rasgele vektörünün varyans kovaryans matrisi olmak üzere bu sabitlere $\alpha' = \Sigma_n^{-1} \mathbf{1} / (\mathbf{1}' \Sigma_n^{-1} \mathbf{1})$ eşitliği ile ulaşılabilir.

α_1, α_2 ve α_3 yukarıdaki eşitlikten elde edilen değerler olmak üzere, (5.21) de tanımlanan $C_n(t)$ rasgele değişkenini göz önüne alalım. $i = 1, 2, \dots, N$ için $C_n^{(i)}(t)$, $C_n(t)$ nin i . gözlem değeri olsun. Bu durumda

$$\hat{K}_{4n}(t) = \frac{\sum_{i=1}^N C_n^{(i)}(t)}{N} \quad (5.23)$$

ile tanımlanan tahmin edici $K_n(t)$ için bir Monte Carlo tahmin edicisidir. Bu tahmin edicinin yansız ve (5.22) eşitsizliği ile diğer Monte Carlo tahmin edicilerine göre daha etkin olduğu açıktır.

6. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde $K_n(t)$ konvolüsyon fonksiyonunun $\widehat{K}_{in}(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$ Monte Carlo tahmin edicilerine dayalı olarak yenileme ve geometrik süreçlerin ortalama değer ve varyans fonksiyonları için tahmin ediciler verilmiştir. Bu tahmin edicilerin işlerliği ve kullanılabilirliği bir simülasyon çalışması yardımı ile incelenmiştir.

6.1 Yenileme ve Varyans Fonksiyonu için Monte Carlo Tahmin Edicileri

Bir yenileme sürecinin yenileme ve varyans fonksiyonunun konvolüsyon serilerine bağlı (4.18) ve (4.34) ifadelerini göz önüne alalım. Bu serilerin sonlu sayıdaki terimlerinin kullanılmasıyla $M(t)$ ve $V(t)$ fonksiyonları yaklaşık olarak hesap edilebilir. Bu durumda verilen sabit t değeri için $\widehat{K}_{in}(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) Monte Carlo tahmin edicilerine bağlı olarak $M(t)$ ve $V(t)$ fonksiyonlarının Monte Carlo tahmin edicileri $i = 1, 2, 3, 4$ için

$$\widehat{M}_i(t) = \sum_{k=1}^{m_1} \widehat{K}_{ik}(t), \quad t \geq 0 \quad (6.1)$$

$$\widehat{V}_i(t) = 2 \sum_{k=1}^{m_2} k \widehat{K}_{ik}(t) - \sum_{k=1}^{m_1} \widehat{K}_{ik}(t) \left(1 + \sum_{k=1}^{m_1} \widehat{K}_{ik}(t) \right), \quad t \geq 0 \quad (6.2)$$

olarak verilebilir. Burada m_1 ve m_2 serilerin durma noktası olup bu sabitlere aşağıdaki gibi ulaşılır.

Verilen t değeri için $\sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t)$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} kF^{k*}(t)$ serilerinin sırasıyla ilk m_1 ve m_2 sayıdaki terimlerinin hesaplanmasıyla yapılacak hatalar

$$e(m_1, t) = \sum_{k=m_1+1}^{\infty} F^{k*}(t)$$

ve

$$e(m_2, t) = \sum_{k=m_2+1}^{\infty} kF^{k*}(t)$$

dır. $k = 1, 2, \dots$ için $F^{k*}(t) \leq F^k(t)$ olduğundan

$$e(m_1, t) \leq \frac{F^{m_1+1}(t)}{1 - F(t)} \quad (6.3)$$

ve

$$e(m_2, t) \leq \frac{F^{m_2+1}(t)[m_2 + 1 - m_2F(t)]}{[1 - F(t)]^2} \quad (6.4)$$

eşitsizlikleri kolayca elde edilir. Böylece ε hata için önceden belirlenmiş bir sabit olmak üzere m_1 ve m_2 , $\frac{F^{m_1+1}(t)}{1-F(t)} \leq \varepsilon$ ve $\frac{F^{m_2+1}(t)[m_2+1-m_2F(t)]}{[1-F(t)]^2} \leq \varepsilon$ şartını sağlayan en küçük doğal sayı olarak seçilebilir.

6.2 Geometrik Fonksiyon ve Varyans Fonksiyonu için Monte Carlo Tahmin Edicileri

$\{N^G(t), t \geq 0\}$ a oranlı bir geometrik süreç olmak üzere $n \geq 1$ için X_n^G , μ_n ortalamalı ve $\sigma_n^2 < \infty$ varyanslı F_n dağılım ve f_n yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. N^G geometrik sürecin M^G ortalama değer ve V^G varyans fonksiyonlarının konvolüsyon serilerine bağlı (4.41) ve (4.44) ifadelerini göz önüne alalım. Bu serilerin sonlu sayıdaki terimlerinin kullanılmasıyla M^G ve V^G fonksiyonları yaklaşık olarak hesap edilebilir. Bu durumda verilen sabit t değeri için $\widehat{K}_{in}(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) Monte Carlo tahmin edicilerine bağlı olarak $M^G(t)$ ve $V^G(t)$ fonksiyonlarının Monte Carlo tahmin edicileri $i = 1, 2, 3, 4$ için

$$\widehat{M}_i^G(t) = \sum_{k=1}^{m_3} \widehat{K}_{ik}(t), \quad t \geq 0 \quad (6.5)$$

$$\hat{V}_i^G(t) = 2 \sum_{k=1}^{m_4} k \hat{K}_{ik}(t) - \sum_{k=1}^{m_3} \hat{K}_{ik}(t) \left(1 + \sum_{k=1}^{m_3} \hat{K}_{ik}(t) \right), \quad t \geq 0 \quad (6.6)$$

olarak önerilebilir. Burada m_3 ve m_4 sabitlerine aşağıdaki gibi ulaşılır.

Verilen sabit t değeri için $\sum_{k=1}^{\infty} F_1 * \dots * F_k(t)$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} k(F_1 * \dots * F_k)(t)$ serilerinin sırasıyla ilk m_3 ve m_4 sayıdaki terimlerinin hesaplanmasıyla yapılacak hatalar

$$e(m_3, t) = \sum_{k=m_3+1}^{\infty} F_1 * \dots * F_k(t)$$

ve

$$e(m_4, t) = \sum_{k=m_4+1}^{\infty} k F_1 * \dots * F_k(t)$$

dır. $a < 1$ için X_k^G rasgele değişkenleri stokastik artan bir dizi oluşturacağından $k = 1, 2, \dots$ için $F_1 * \dots * F_k(t) \leq F_1^k(t)$ olduğundan

$$e(m_3, t) \leq \frac{F_1^{m_3+1}(t)}{1 - F_1(t)} \quad (6.7)$$

ve

$$e(m_4, t) \leq \frac{F_1^{m_4+1}(t)[m_4 + 1 - m_4 F_1(t)]}{[1 - F_1(t)]^2} \quad (6.8)$$

eşitsizlikleri kolayca elde edilir. Böylece ε hata için önceden belirlenmiş bir sabit olmak üzere m_3 ve m_4 , $\frac{F_1^{m_3+1}(t)}{1 - F_1(t)} \leq \varepsilon$ ve $\frac{F_1^{m_4+1}(t)[m_4 + 1 - m_4 F_1(t)]}{[1 - F_1(t)]^2} \leq \varepsilon$ şartını sağlayan en küçük doğal sayı olarak seçilebilir.

Yukarıda tanımlanan tahmin edicilerin değerlendirilmesi için simülasyon çalışması

▪ Yenileme Süreci

- $X_i \sim \text{Üstel}(\lambda = 1, \mu = 1)$
- $X_i \sim \text{Gama}(\alpha = 0.5, \beta = 2, \mu = 1)$
- $X_i \sim \text{Gama}(\alpha = 2, \beta = 0.5, \mu = 1)$
- $X_i \sim \text{Weibull}(\alpha = 0.5, \beta = 1, \mu = 2)$
- $X_i \sim \text{Weibull}(\alpha = 2, \beta = 1, \mu \cong 0.8862)$
- $X_i \sim \text{Lognormal}(\lambda = 0, \tau^2 = 1, \mu \cong 1.6487)$

▪ $a = 0.95$ ile Geometrik Süreç

- $X_1^G \sim \text{Üstel}(\lambda = 1, \mu = 1)$
- $X_1^G \sim \text{Gama}(\alpha = 0.5, \beta = 2, \mu = 1)$
- $X_1^G \sim \text{Gama}(\alpha = 2, \beta = 1, \mu = 2)$
- $X_1^G \sim \text{Weibull}(\alpha = 0.5, \beta = 1, \mu = 2)$
- $X_1^G \sim \text{Weibull}(\alpha = 2, \beta = 1, \mu \cong 0.8862)$
- $X_1^G \sim \text{Lognormal}(\lambda = 0, \tau^2 = 1, \mu \cong 1.6487)$

durumlarında, simülasyon sayısı $N = 10000$ ve hata üst sınırı $\varepsilon = 1/1000$ alınarak MATLAB7.10 da gerçekleştirilmiş ve $t = 0.2(0.2)10$ noktalarında $M(t)$, $V(t)$, $M^G(t)$ ve $V^G(t)$ fonksiyonlarının $i = 1, 2, 3, 4$ için $\hat{M}_i(t)$, $\hat{V}_i(t)$, $\hat{M}_i^G(t)$ ve $\hat{V}_i^G(t)$ tahmin değerleri elde edilmiştir. $\hat{M}_4(t)$, $\hat{V}_4(t)$, $\hat{M}_4^G(t)$ ve $\hat{V}_4^G(t)$ tahmin edicileri hesaplanırken $n \geq 1$ için $I_n(t)$, $A_n(t)$ ve $B_n(t)$ tahmin edicilerinin sırası ile $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ katsayıları varyans kovaryans matrisinin tahmini kullanılarak bulunmuştur. $M(t)$ ve $V(t)$, $\text{Üstel}(\lambda = 1)$ ve $\text{Gama}(\alpha = 2, \beta = 0.5)$ durumlarında Aydoğdu (1997) da elde edilen analitik ifadeler yardımı ile hesaplatılmıştır. Diğer durumlarda ise $M(t)$, Xie (1989) de verilen integral denklemin sayısal çözüm yöntemine dayanarak, $V(t)$ ise benzer şekilde Aydoğdu (1997) da verilen sayısal yöntem ile hesaplatılmıştır. Burada verilen sabit t değeri için $M(t)$ nin hesabı yapılırken parçalanmalar arası uzaklık eşit ve $1/100$, $V(t)$ nin hesabı yapılırken ise yine eşit ve $2/100$ olarak seçilmiştir. $M^G(t)$ ise (4.46) integral denkleminin çözümü için Tang ve Lam (2007) tarafından verilen yöntem ile

sayısal olarak hesaplatılmıştır. Burada da parçalanmalar arası uzaklık eşit ve 1/100 olarak seçilmiştir. Ayrıca $M(t)$, $V(t)$, $M^G(t)$ ve $V^G(t)$ fonksiyonları verilen sabit t değerleri için sırasıyla (4.18), (4.34), (4.41) ve (4.43) konvolüsyon serilerinin sonlu sayıdaki terimlerine bağlı olarak Kısım 3.2.4 de verilen yamuk yöntemi kullanılarak tekrar hesaplatılmıştır. Burada da yine parçalanmalar arası uzaklık eşit ve 1/100 olarak seçilmiştir. Farklı yollarla elde edilen değerler karışıklığa mahal vermemek için yöntem adları ile indislenmiştir. Buna göre “an”, “id” ve “sk” kısaltmaları sırası ile analitik ifade çözümünü, integral denklemin sayısal çözümünü ve konvolüsyon serilerinin sayısal çözümünü ifade etmektedir. M , V , M^G ve V^G fonksiyonları için farklı yollarla elde edilen değerler, bunlara ilişkin tahmin değerleri, tahmin ediciler için standart hata ve hata kareler ortalaması değerleri şekil 6.1-6.72’de çizdirilmiştir. Bununla birlikte bu fonksiyonların $t = 0.2(0.2)1,2,3,5,10$ noktalarında elde edilen değerleri çizelge 6.1-6.24’te verilmiştir. Tahmin edicilere ilişkin hata kareler ortalaması hesaplanırken var olduğu durumlarda analitik çözüm değerleri, yoksa yenileme süreci için integral denklemlerin sayısal çözüm değerleri, geometrik süreç için ise sayısal konvolüsyon değerleri gerçek değer olarak kabul edilmiştir.

Çalışmada kullanılan dağılımlar için olasılık yoğunluk fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

- Üstel(λ) dağılımı

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x\lambda}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

- Gama(α , β) dağılımı

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

- Weibull(α , β) dağılımı

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

- *Lognormal*(λ, τ^2) dağılım

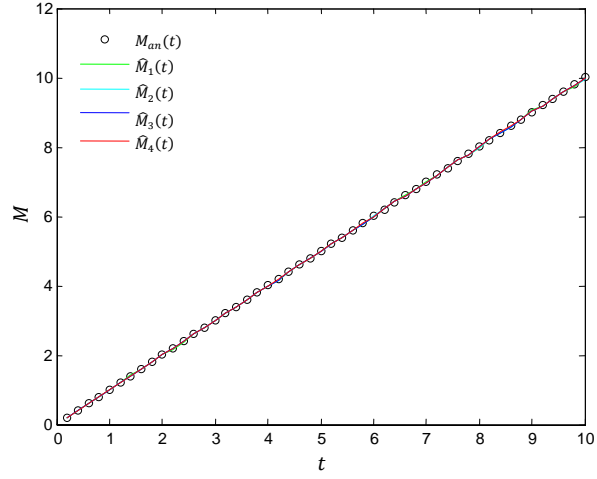
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\tau\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\tau}\right)^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Çizelge 6.1 Yenileme Sürecinde Üstel(1) durumunda $M(t)$, $V(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini

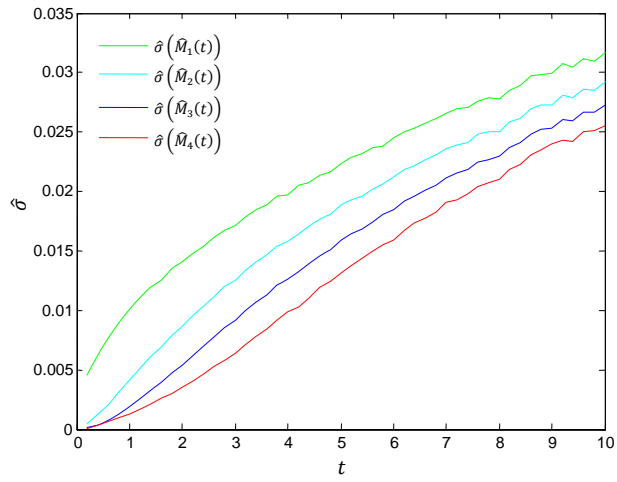
t	$M_{an}(t)$	$M_{sk}(t)$	$\hat{M}_1(t)$	$\hat{M}_2(t)$	$\hat{M}_3(t)$	$\hat{M}_4(t)$	$V_{an}(t)$	$V_{sk}(t)$	$\hat{V}_1(t)$	$\hat{V}_2(t)$	$\hat{V}_3(t)$	$\hat{V}_4(t)$
0.2	0.2	0.2000	0.1989	0.1996	0.1999	0.2000	0.2	0.2000	0.2045	0.1994	0.1998	0.1999
0.4	0.4	0.4000	0.4004	0.3992	0.4002	0.4003	0.4	0.4000	0.4013	0.3988	0.4006	0.4010
0.6	0.6	0.6000	0.5966	0.5979	0.5994	0.5998	0.6	0.6000	0.5965	0.5942	0.5979	0.5987
0.8	0.8	0.8000	0.7945	0.7991	0.7989	0.7988	0.8	0.8000	0.7977	0.7981	0.7971	0.7971
1	1	1.0000	1.0091	1.0037	1.0017	1.0012	1	1.0000	1.0146	1.0113	1.0032	1.0018
2	2	2.0000	2.0181	2.0099	2.0090	2.0075	2	2.0000	1.9868	2.0006	2.0119	2.0184
3	3	3.0000	3.0008	2.9997	3.0035	3.0060	3	3.0000	2.9542	2.9579	2.9763	2.9869
5	5	5.0000	5.0085	5.0084	5.0061	5.0039	5	5.0000	5.0128	5.0515	5.0413	5.0326
10	10	9.9999	9.9653	9.9639	9.9666	9.9707	10	9.9999	10.0467	10.0093	9.9815	9.9572

Çizelge 6.2 Yenileme Sürecinde Üstel(1) durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO

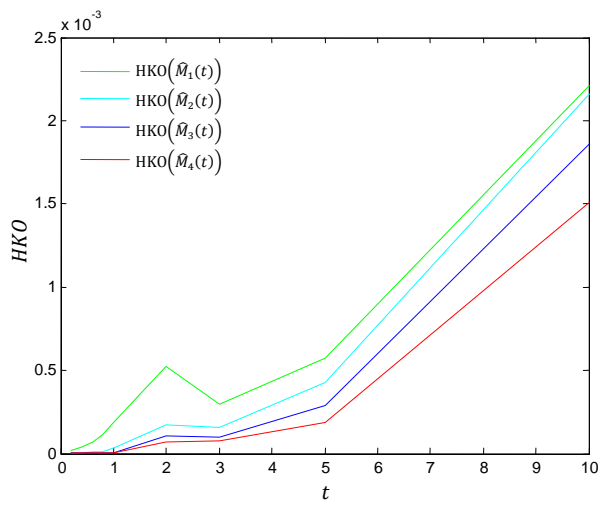
t		$\hat{M}_1(t)$	$\hat{M}_2(t)$	$\hat{M}_3(t)$	$\hat{M}_4(t)$	$\hat{V}_1(t)$	$\hat{V}_2(t)$	$\hat{V}_3(t)$	$\hat{V}_4(t)$
0.2	$\hat{\sigma}$	0.0045	0.0005	0.0001	0.0001	0.0127	0.0022	0.0005	0.0004
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
0.4	$\hat{\sigma}$	0.0063	0.0013	0.0004	0.0003	0.0202	0.0060	0.0018	0.0015
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
0.6	$\hat{\sigma}$	0.0077	0.0021	0.0008	0.0006	0.0280	0.0106	0.0038	0.0030
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000
0.8	$\hat{\sigma}$	0.0089	0.0031	0.0013	0.0010	0.0358	0.0165	0.0067	0.0049
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0013	0.0003	0.0001	0.0000
1	$\hat{\sigma}$	0.0101	0.0041	0.0019	0.0013	0.0455	0.0234	0.0103	0.0073
	HKO	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0023	0.0007	0.0001	0.0001
2	$\hat{\sigma}$	0.0141	0.0087	0.0054	0.0035	0.0927	0.0631	0.0387	0.0264
	HKO	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001	0.0088	0.0040	0.0016	0.0010
3	$\hat{\sigma}$	0.0172	0.0125	0.0091	0.0064	0.1479	0.1131	0.0814	0.0596
	HKO	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0240	0.0146	0.0072	0.0037
5	$\hat{\sigma}$	0.0224	0.0189	0.0159	0.0131	0.2853	0.2453	0.2052	0.1733
	HKO	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.0815	0.0628	0.0438	0.0311
10	$\hat{\sigma}$	0.0317	0.0292	0.0272	0.0255	0.7172	0.6617	0.6154	0.5800
	HKO	0.0022	0.0022	0.0019	0.0015	0.5166	0.4379	0.3791	0.3383



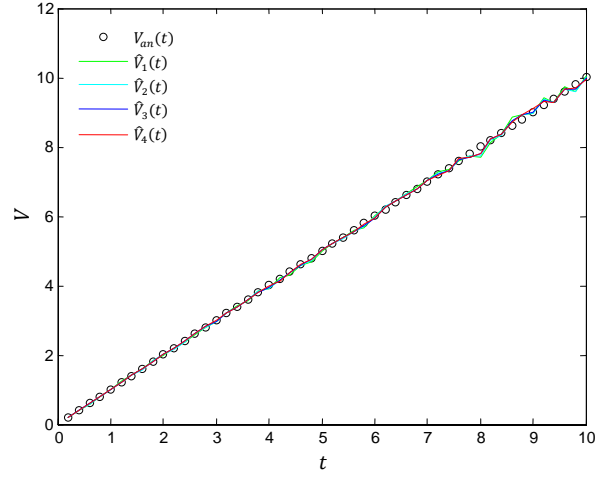
Şekil 6.1 Yenileme Sürecinde Üstel(1) durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini



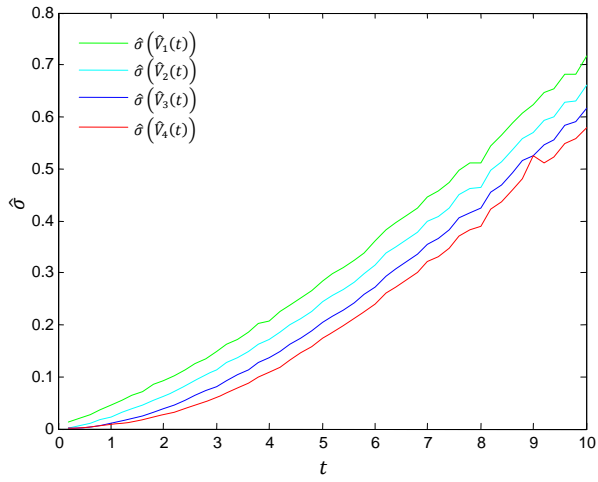
Şekil 6.2 Yenileme Sürecinde Üstel(1) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



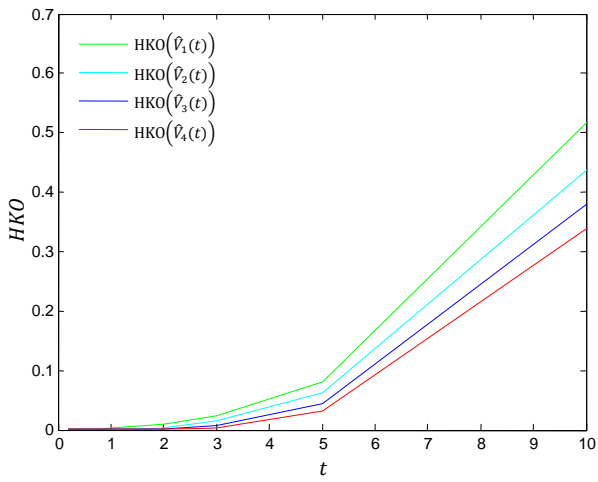
Şekil 6.3 Yenileme Sürecinde Üstel(1) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları



Şekil 6.4 Yenileme Sürecinde Üstel(1) durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini



Şekil 6.5 Yenileme Sürecinde Üstel(1) durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



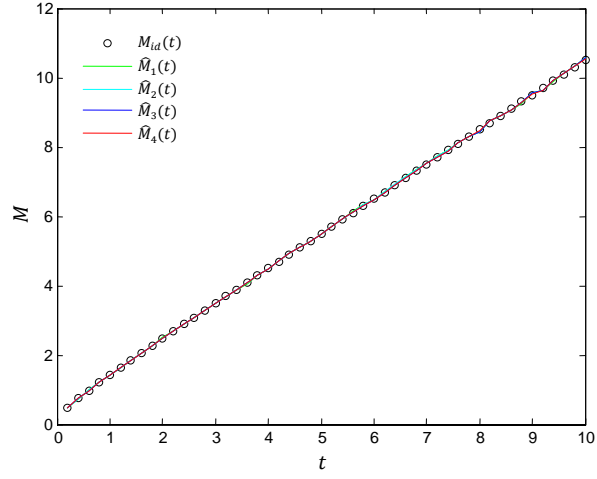
Şekil 6.6 Yenileme Sürecinde Üstel(1) durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları

Çizelge 6.3 Yenileme Sürecinde $Gama(0.5, 2)$ durumunda $M(t)$, $V(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini

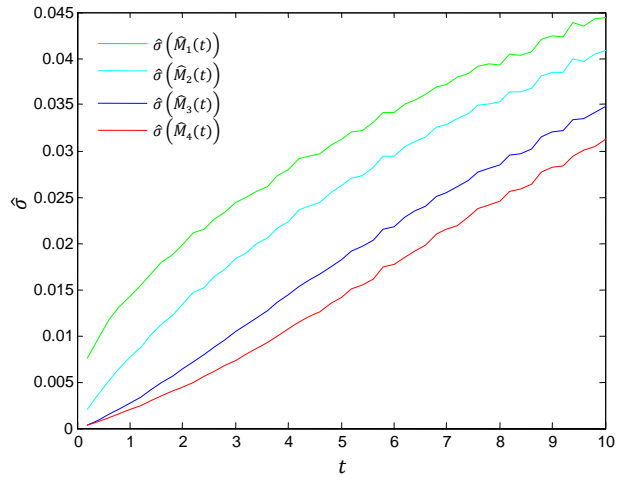
t	$M_{id}(t)$	$M_{sk}(t)$	$\hat{M}_1(t)$	$\hat{M}_2(t)$	$\hat{M}_3(t)$	$\hat{M}_4(t)$	$V_{id}(t)$	$V_{sk}(t)$	$\hat{V}_1(t)$	$\hat{V}_2(t)$	$\hat{V}_3(t)$	$\hat{V}_4(t)$
0.2	0.4685	0.4680	0.4700	0.4703	0.4689	0.4688	0.5648	0.5637	0.5721	0.5712	0.5667	0.5664
0.4	0.7375	0.7370	0.7275	0.7336	0.7369	0.7374	0.9521	0.9508	0.9454	0.9426	0.9507	0.9515
0.6	0.9780	0.9775	1.0039	0.9889	0.9792	0.9779	1.3238	1.3222	1.3913	1.3710	1.3316	1.3274
0.8	1.2052	1.2046	1.2149	1.2068	1.2067	1.2065	1.6920	1.6902	1.6981	1.6937	1.6992	1.6991
1	1.4246	1.4240	1.4163	1.4229	1.4247	1.4251	2.0605	2.0584	2.0468	2.0587	2.0628	2.0639
2	2.4716	2.4708	2.4974	2.4830	2.4735	2.4693	3.9338	3.9304	3.9442	3.9605	3.9519	3.9459
3	3.4877	3.4867	3.4946	3.4972	3.4879	3.4845	5.8567	5.8521	5.9292	5.9278	5.8777	5.8732
5	5.4974	5.4959	5.4894	5.4933	5.4969	5.4989	9.7854	9.7783	9.7247	9.7773	9.7803	9.7614
10	10.5003	10.4978	10.5671	10.5686	10.5640	10.5604	19.7512	19.7378	19.6821	19.8386	19.9313	20.0247

Çizelge 6.4 Yenileme Sürecinde $Gama(0.5, 2)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO

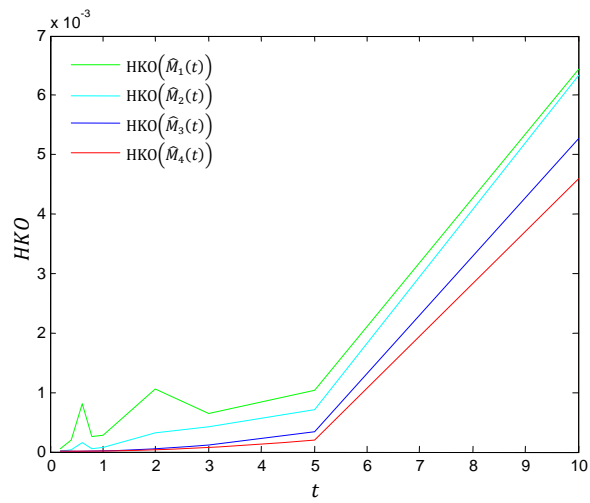
t		$\hat{M}_1(t)$	$\hat{M}_2(t)$	$\hat{M}_3(t)$	$\hat{M}_4(t)$	$\hat{V}_1(t)$	$\hat{V}_2(t)$	$\hat{V}_3(t)$	$\hat{V}_4(t)$
0.2	$\hat{\sigma}$	0.0076	0.0021	0.0004	0.0003	0.0282	0.0109	0.0020	0.0018
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000
0.4	$\hat{\sigma}$	0.0097	0.0036	0.0009	0.0007	0.0432	0.0210	0.0051	0.0043
	HKO	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0019	0.0005	0.0000	0.0000
0.6	$\hat{\sigma}$	0.0118	0.0052	0.0015	0.0012	0.0617	0.0336	0.0092	0.0075
	HKO	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0084	0.0033	0.0001	0.0001
0.8	$\hat{\sigma}$	0.0130	0.0063	0.0021	0.0016	0.0747	0.0436	0.0138	0.0109
	HKO	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0056	0.0019	0.0002	0.0002
1	$\hat{\sigma}$	0.0143	0.0077	0.0027	0.0020	0.0890	0.0566	0.0194	0.0150
	HKO	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0081	0.0032	0.0004	0.0002
2	$\hat{\sigma}$	0.0199	0.0133	0.0064	0.0045	0.1702	0.1264	0.0596	0.0434
	HKO	0.0011	0.0003	0.0000	0.0000	0.0291	0.0167	0.0039	0.0020
3	$\hat{\sigma}$	0.0244	0.0183	0.0104	0.0074	0.2653	0.2125	0.1181	0.0891
	HKO	0.0006	0.0004	0.0001	0.0001	0.0756	0.0502	0.0144	0.0082
5	$\hat{\sigma}$	0.0312	0.0262	0.0183	0.0141	0.4621	0.4015	0.2787	0.2237
	HKO	0.0010	0.0007	0.0003	0.0002	0.2172	0.1612	0.0777	0.0506
10	$\hat{\sigma}$	0.0444	0.0409	0.0348	0.0313	1.1271	1.0493	0.8909	0.8156
	HKO	0.0064	0.0063	0.0053	0.0046	1.2752	1.1087	0.8261	0.7400



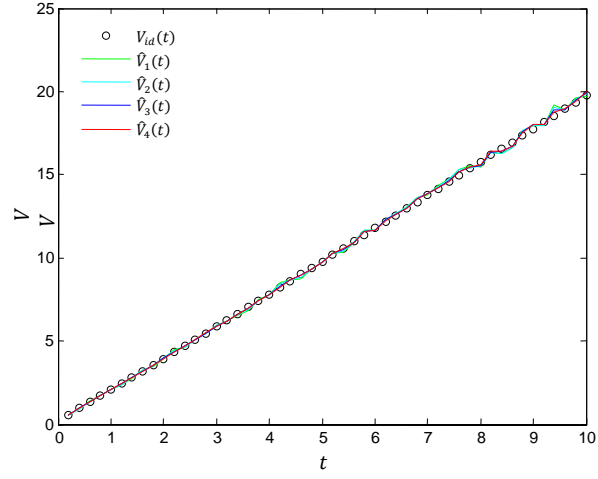
Şekil 6.7 Yenileme Sürecinde $Gama(0.5, 2)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini



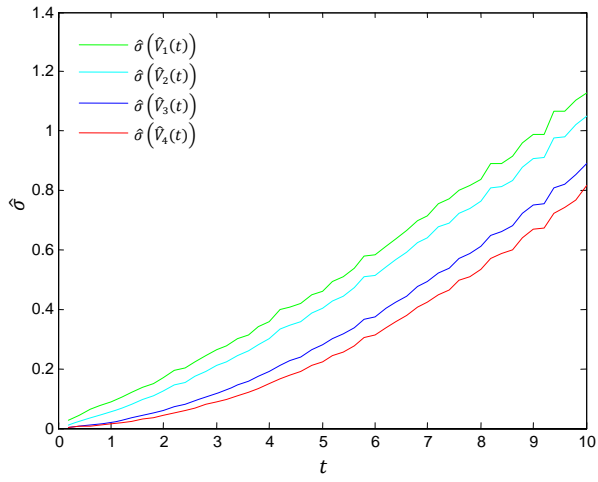
Şekil 6.8 Yenileme Sürecinde $Gama(0.5, 2)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



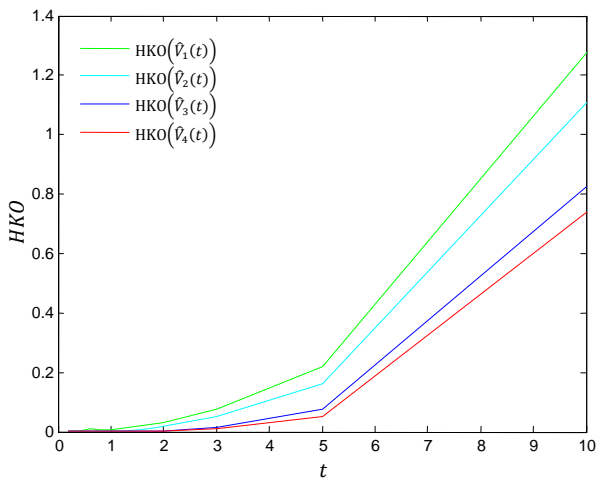
Şekil 6.9 Yenileme Sürecinde $Gama(0.5, 2)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları



Şekil 6.10 Yenileme Sürecinde $Gama(0.5, 2)$ durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini



Şekil 6.11 Yenileme Sürecinde $Gama(0.5, 2)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



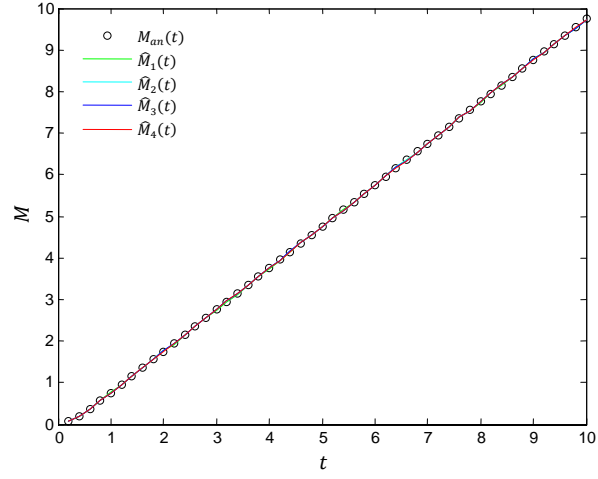
Şekil 6.12 Yenileme Sürecinde $Gama(0.5, 2)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları

Çizelge 6.5 Yenileme Sürecinde $Gama(2, 0.5)$ durumunda $M(t)$, $V(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini

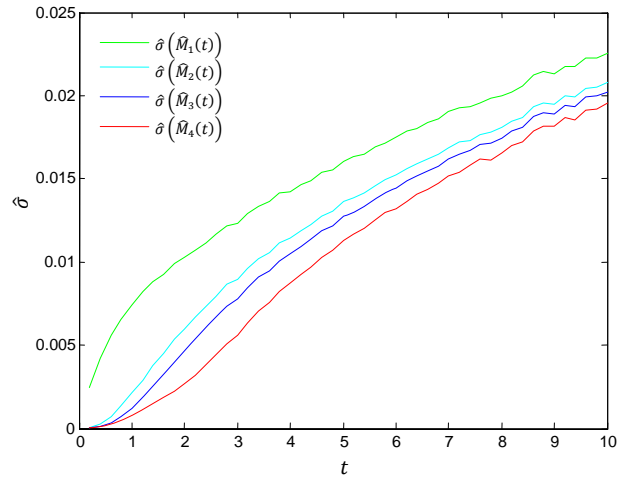
t	$M_{an}(t)$	$M_{sk}(t)$	$\hat{M}_1(t)$	$\hat{M}_2(t)$	$\hat{M}_3(t)$	$\hat{M}_4(t)$	$V_{an}(t)$	$V_{sk}(t)$	$\hat{V}_1(t)$	$\hat{V}_2(t)$	$\hat{V}_3(t)$	$\hat{V}_4(t)$
0.2	0.0623	0.0623	0.0604	0.0623	0.0623	0.0623	0.0600	0.0600	0.0604	0.0600	0.0600	0.0600
0.4	0.2005	0.2005	0.1970	0.2002	0.2005	0.2005	0.1792	0.1792	0.1772	0.1784	0.1792	0.1793
0.6	0.3727	0.3727	0.3678	0.3719	0.3724	0.3726	0.3076	0.3076	0.3087	0.3056	0.3069	0.3073
0.8	0.5602	0.5602	0.5562	0.5606	0.5599	0.5595	0.4298	0.4298	0.4246	0.4299	0.4291	0.4284
1	0.7546	0.7546	0.7613	0.7558	0.7555	0.7554	0.5442	0.5442	0.5487	0.5467	0.5457	0.5452
2	1.7501	1.7501	1.7579	1.7573	1.7562	1.7532	1.0618	1.0619	1.0581	1.0628	1.0647	1.0670
3	2.7500	2.7500	2.7436	2.7515	2.7523	2.7524	1.5625	1.5626	1.5129	1.5347	1.5411	1.5520
5	4.7500	4.7500	4.7593	4.7580	4.7545	4.7479	2.5625	2.5627	2.5790	2.5973	2.5867	2.5770
10	9.7500	9.7500	9.7200	9.7217	9.7227	9.7248	5.0625	5.0628	5.0864	5.0539	5.0554	5.0613

Çizelge 6.6 Yenileme Sürecinde $Gama(2, 0.5)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO

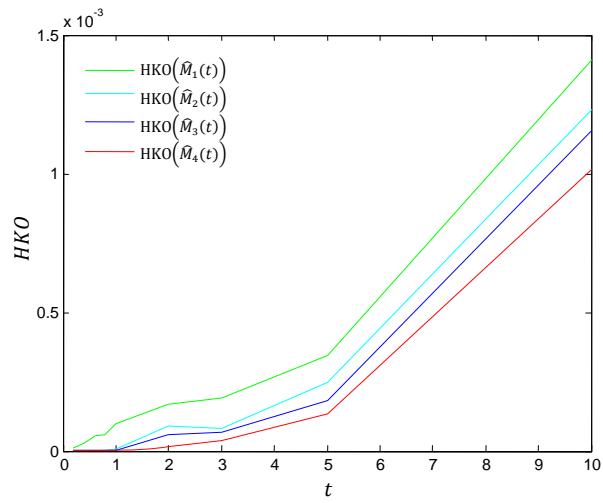
t		$\hat{M}_1(t)$	$\hat{M}_2(t)$	$\hat{M}_3(t)$	$\hat{M}_4(t)$	$\hat{V}_1(t)$	$\hat{V}_2(t)$	$\hat{V}_3(t)$	$\hat{V}_4(t)$
0.2	$\hat{\sigma}$	0.0025	0.0000	0.0000	0.0000	0.0059	0.0002	0.0000	0.0000
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.4	$\hat{\sigma}$	0.0042	0.0003	0.0001	0.0001	0.0105	0.0012	0.0004	0.0003
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.6	$\hat{\sigma}$	0.0056	0.0007	0.0003	0.0002	0.0154	0.0031	0.0013	0.0010
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
0.8	$\hat{\sigma}$	0.0065	0.0014	0.0007	0.0005	0.0199	0.0061	0.0031	0.0022
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
1	$\hat{\sigma}$	0.0074	0.0021	0.0012	0.0008	0.0257	0.0098	0.0055	0.0036
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
2	$\hat{\sigma}$	0.0103	0.0060	0.0046	0.0027	0.0554	0.0354	0.0270	0.0167
	HKO	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0031	0.0013	0.0007	0.0003
3	$\hat{\sigma}$	0.0123	0.0090	0.0078	0.0056	0.0898	0.0684	0.0588	0.0446
	HKO	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0105	0.0054	0.0039	0.0021
5	$\hat{\sigma}$	0.0161	0.0136	0.0127	0.0113	0.1842	0.1574	0.1464	0.1312
	HKO	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0342	0.0260	0.0220	0.0174
10	$\hat{\sigma}$	0.0226	0.0208	0.0202	0.0195	0.4816	0.4437	0.4316	0.4171
	HKO	0.0014	0.0012	0.0012	0.0010	0.2325	0.1970	0.1863	0.1739



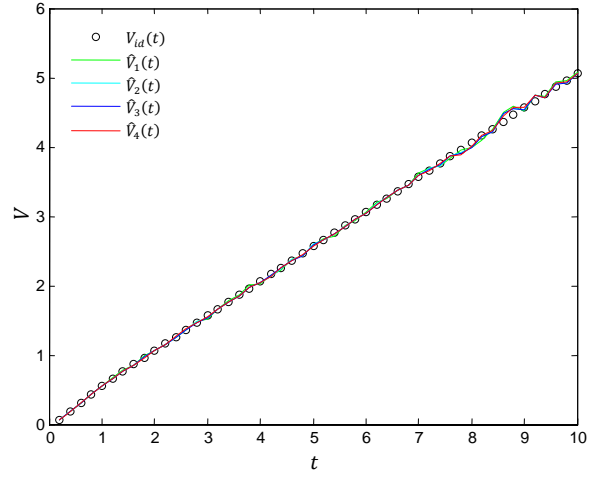
Şekil 6.13 Yenileme Sürecinde $Gama(2, 0.5)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini



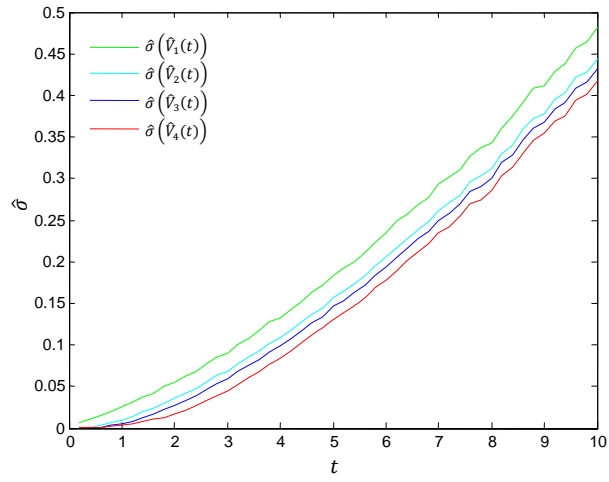
Şekil 6.14 Yenileme Sürecinde $Gama(2, 0.5)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



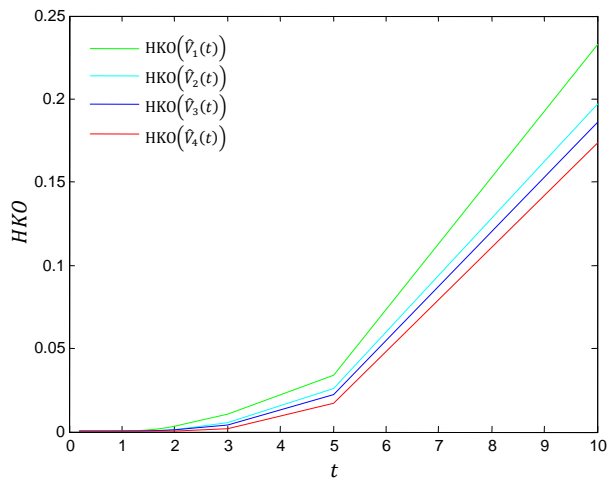
Şekil 6.15 Yenileme Sürecinde $Gama(2, 0.5)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları



Şekil 6.16 Yenileme Sürecinde $Gama(2, 0.5)$ durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini



Şekil 6.17 Yenileme Sürecinde $Gama(2, 0.5)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



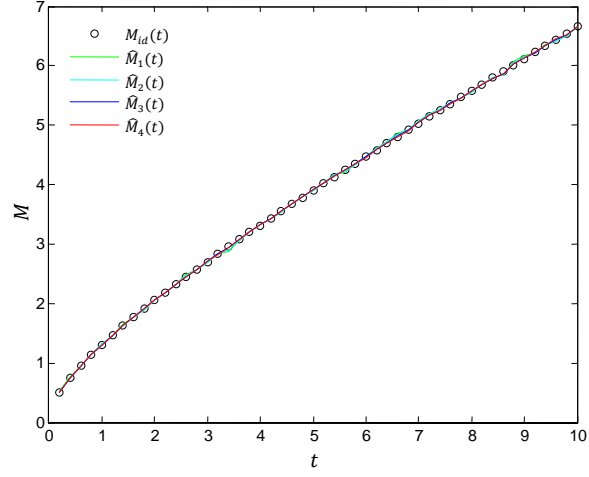
Şekil 6.18 Yenileme Sürecinde $Gama(2, 0.5)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları

Çizelge 6.7 Yenileme Sürecinde *Weibull*(0.5, 1) durumunda $M(t)$, $V(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini

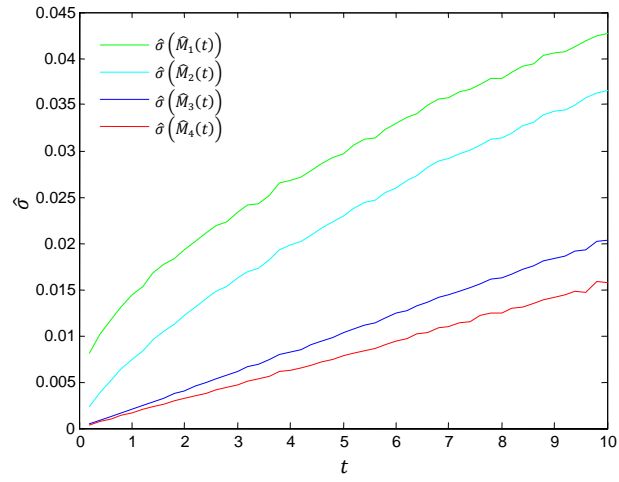
t	$M_{id}(t)$	$M_{sk}(t)$	$\hat{M}_1(t)$	$\hat{M}_2(t)$	$\hat{M}_3(t)$	$\hat{M}_4(t)$	$V_{id}(t)$	$V_{sk}(t)$	$\hat{V}_1(t)$	$\hat{V}_2(t)$	$\hat{V}_3(t)$	$\hat{V}_4(t)$
0.2	0.5062	0.5056	0.5133	0.5076	0.5065	0.5064	0.6362	0.6347	0.6534	0.6441	0.6384	0.6382
0.4	0.7523	0.7517	0.7584	0.7537	0.7522	0.7521	1.0286	1.0269	1.0370	1.0351	1.0292	1.0291
0.6	0.9564	0.9558	0.9483	0.9524	0.9560	0.9564	1.3884	1.3865	1.3850	1.3808	1.3887	1.3896
0.8	1.1389	1.1384	1.1292	1.1348	1.1373	1.1375	1.7344	1.7323	1.7039	1.7157	1.7302	1.7311
1	1.3080	1.3074	1.3171	1.3131	1.3086	1.3079	2.0736	2.0713	2.0769	2.0835	2.0793	2.0777
2	2.0476	2.0470	2.0542	2.0503	2.0513	2.0514	3.7442	3.7410	3.7255	3.7458	3.7571	3.7586
3	2.7014	2.7007	2.6983	2.6974	2.7031	2.7046	5.4339	5.4298	5.4573	5.4464	5.4425	5.4461
5	3.9002	3.8993	3.9095	3.9086	3.9105	3.9101	8.9378	8.9321	8.8369	8.8986	9.0031	9.0258
10	6.6530	6.6518	6.6516	6.6584	6.6569	6.6559	18.3900	18.3801	18.1920	18.2455	18.3511	18.3703

Çizelge 6.8 Yenileme Sürecinde *Weibull*(0.5, 1) durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO

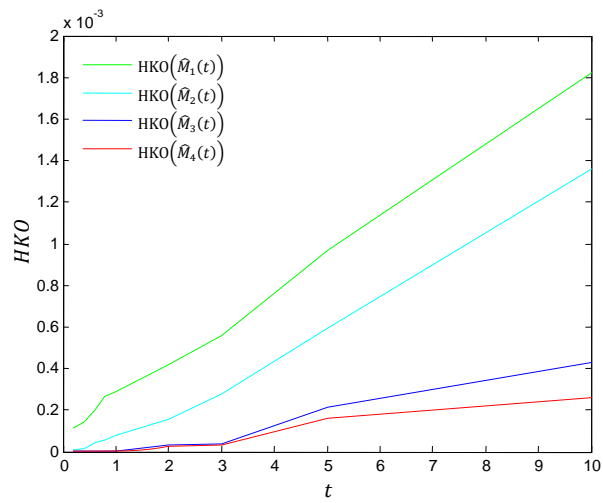
t		$\hat{M}_1(t)$	$\hat{M}_2(t)$	$\hat{M}_3(t)$	$\hat{M}_4(t)$	$\hat{V}_1(t)$	$\hat{V}_2(t)$	$\hat{V}_3(t)$	$\hat{V}_4(t)$
0.2	$\hat{\sigma}$	0.0081	0.0024	0.0004	0.0004	0.0315	0.0129	0.0022	0.0020
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0013	0.0002	0.0000	0.0000
0.4	$\hat{\sigma}$	0.0102	0.0039	0.0008	0.0007	0.0482	0.0240	0.0049	0.0043
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0024	0.0006	0.0000	0.0000
0.6	$\hat{\sigma}$	0.0118	0.0052	0.0012	0.0010	0.0621	0.0344	0.0079	0.0068
	HKO	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0039	0.0012	0.0001	0.0000
0.8	$\hat{\sigma}$	0.0131	0.0063	0.0017	0.0014	0.0748	0.0446	0.0113	0.0096
	HKO	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0065	0.0023	0.0001	0.0001
1	$\hat{\sigma}$	0.0144	0.0075	0.0021	0.0017	0.0898	0.0556	0.0150	0.0125
	HKO	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0081	0.0032	0.0003	0.0002
2	$\hat{\sigma}$	0.0193	0.0122	0.0041	0.0032	0.1592	0.1136	0.0371	0.0301
	HKO	0.0004	0.0002	0.0000	0.0000	0.0257	0.0129	0.0015	0.0011
3	$\hat{\sigma}$	0.0234	0.0162	0.0061	0.0047	0.2334	0.1778	0.0654	0.0516
	HKO	0.0006	0.0003	0.0000	0.0000	0.0550	0.0318	0.0043	0.0028
5	$\hat{\sigma}$	0.0297	0.0229	0.0103	0.0079	0.3749	0.3084	0.1382	0.1120
	HKO	0.0010	0.0006	0.0002	0.0002	0.1507	0.0967	0.0234	0.0203
10	$\hat{\sigma}$	0.0427	0.0365	0.0203	0.0158	0.7975	0.7058	0.3964	0.3184
	HKO	0.0018	0.0014	0.0004	0.0003	0.6753	0.5191	0.1586	0.1018



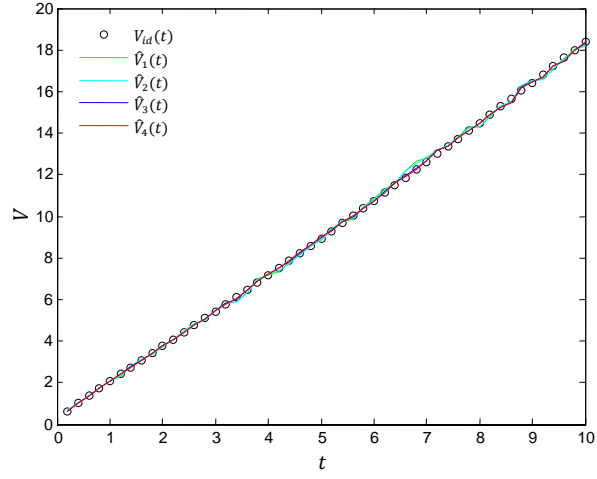
Şekil 6.19 Yenileme Sürecinde *Weibull*(0.5, 1) durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini



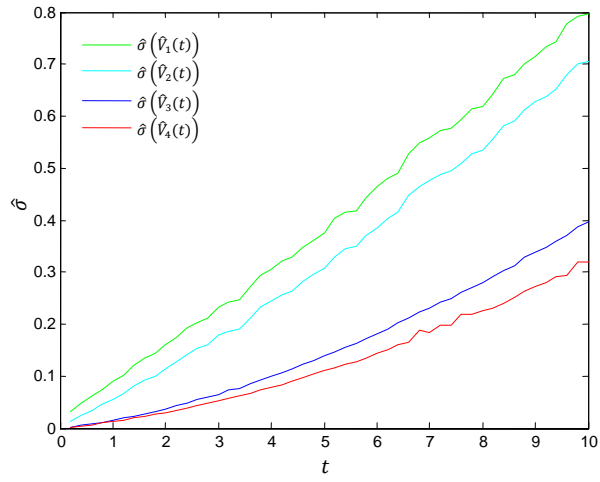
Şekil 6.20 Yenileme Sürecinde *Weibull*(0.5, 1) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



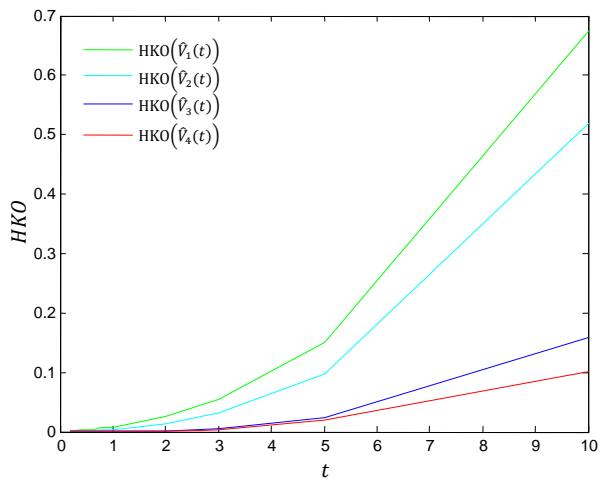
Şekil 6.21 Yenileme Sürecinde *Weibull*(0.5, 1) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları



Şekil 6.22 Yenileme Sürecinde *Weibull*(0.5, 1) durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini



Şekil 6.23 Yenileme Sürecinde *Weibull*(0.5, 1) durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



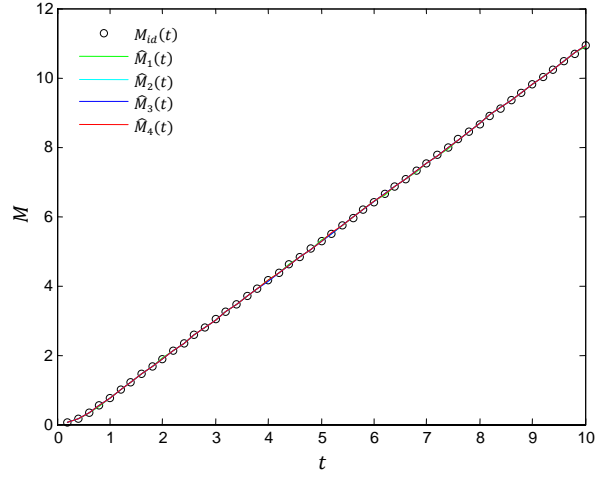
Şekil 6.24 Yenileme Sürecinde *Weibull*(0.5, 1) durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları

Çizelge 6.9 Yenileme Sürecinde *Weibull(2, 1)* durumunda $M(t)$, $V(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini

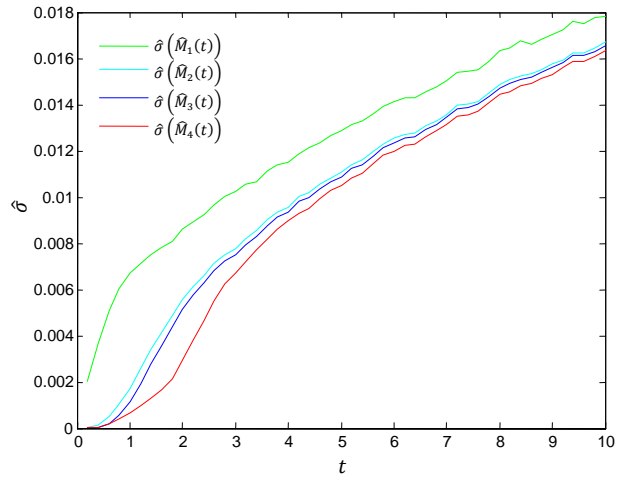
t	$M_{id}(t)$	$M_{sk}(t)$	$\hat{M}_1(t)$	$\hat{M}_2(t)$	$\hat{M}_3(t)$	$\hat{M}_4(t)$	$V_{id}(t)$	$V_{sk}(t)$	$\hat{V}_1(t)$	$\hat{V}_2(t)$	$\hat{V}_3(t)$	$\hat{V}_4(t)$
0.2	0.0395	0.0395	0.0420	0.0395	0.0395	0.0395	0.0384	0.0384	0.0410	0.0385	0.0384	0.0384
0.4	0.1519	0.1519	0.1478	0.1519	0.1519	0.1519	0.1370	0.1370	0.1338	0.1370	0.1370	0.1370
0.6	0.3215	0.3215	0.3164	0.3212	0.3213	0.3214	0.2575	0.2575	0.2579	0.2568	0.2570	0.2571
0.8	0.5283	0.5283	0.5175	0.5274	0.5275	0.5275	0.3653	0.3653	0.3661	0.3632	0.3635	0.3636
1	0.7537	0.7537	0.7597	0.7558	0.7553	0.7546	0.4463	0.4463	0.4496	0.4492	0.4488	0.4478
2	1.8940	1.8941	1.8992	1.8915	1.8920	1.8945	0.7299	0.7299	0.7430	0.7351	0.7350	0.7326
3	3.0218	3.0218	3.0174	3.0143	3.0144	3.0158	1.0418	1.0418	1.0429	1.0314	1.0318	1.0285
5	5.2785	5.2785	5.3036	5.2933	5.2923	5.2897	1.6582	1.6584	1.6556	1.6595	1.6576	1.6526
10	10.9204	10.9204	10.9080	10.9152	10.9160	10.9190	3.1999	3.2002	3.1801	3.2104	3.2091	3.2040

Çizelge 6.10 Yenileme Sürecinde *Weibull(2, 1)* durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO

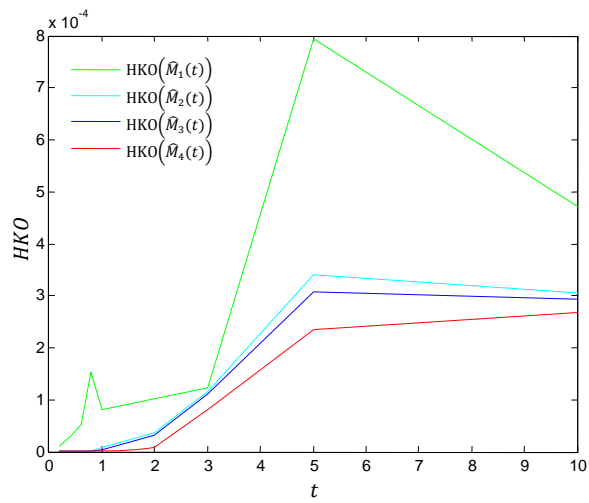
t		$\hat{M}_1(t)$	$\hat{M}_2(t)$	$\hat{M}_3(t)$	$\hat{M}_4(t)$	$\hat{V}_1(t)$	$\hat{V}_2(t)$	$\hat{V}_3(t)$	$\hat{V}_4(t)$
0.2	$\hat{\sigma}$	0.0020	0.0000	0.0000	0.0000	0.0046	0.0001	0.0000	0.0000
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.4	$\hat{\sigma}$	0.0037	0.0002	0.0000	0.0000	0.0087	0.0007	0.0002	0.0002
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.6	$\hat{\sigma}$	0.0051	0.0005	0.0002	0.0002	0.0132	0.0020	0.0009	0.0007
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
0.8	$\hat{\sigma}$	0.0061	0.0010	0.0006	0.0004	0.0174	0.0044	0.0024	0.0016
	HKO	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
1	$\hat{\sigma}$	0.0067	0.0017	0.0011	0.0007	0.0216	0.0076	0.0050	0.0029
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
2	$\hat{\sigma}$	0.0086	0.0056	0.0051	0.0029	0.0477	0.0321	0.0291	0.0188
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0024	0.0011	0.0009	0.0004
3	$\hat{\sigma}$	0.0102	0.0078	0.0075	0.0067	0.0791	0.0610	0.0583	0.0528
	HKO	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0063	0.0038	0.0035	0.0030
5	$\hat{\sigma}$	0.0129	0.0111	0.0109	0.0105	0.1585	0.1363	0.1334	0.1287
	HKO	0.0008	0.0003	0.0003	0.0002	0.0251	0.0186	0.0178	0.0166
10	$\hat{\sigma}$	0.0178	0.0167	0.0166	0.0163	0.4206	0.3947	0.3913	0.3855
	HKO	0.0005	0.0003	0.0003	0.0003	0.1773	0.1559	0.1532	0.1486



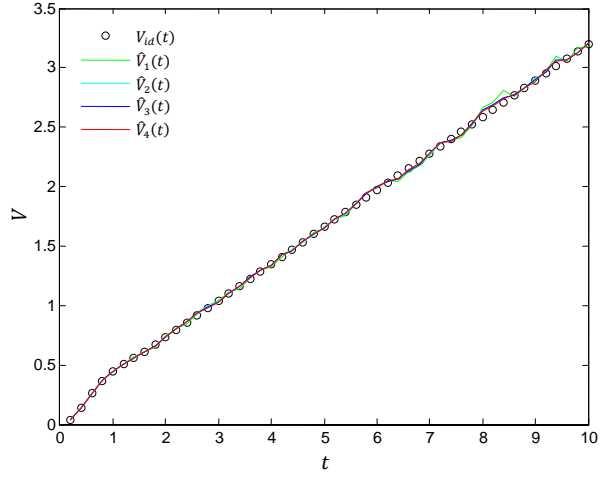
Şekil 6.25 Yenileme Sürecinde *Weibull*(2, 1) durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini



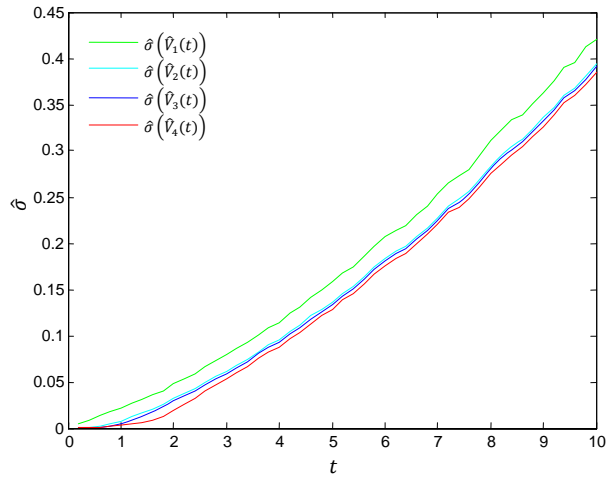
Şekil 6.26 Yenileme Sürecinde *Weibull*(2, 1) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



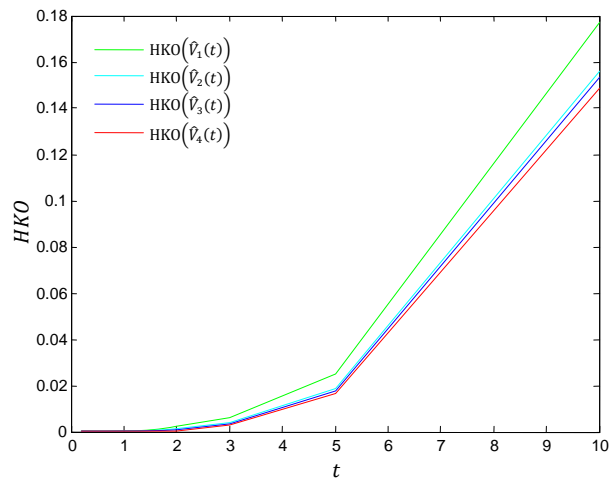
Şekil 6.27 Yenileme Sürecinde *Weibull*(2, 1) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları



Şekil 6.28 Yenileme Sürecinde *Weibull*(2, 1) durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini



Şekil 6.29 Yenileme Sürecinde *Weibull*(2, 1) durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



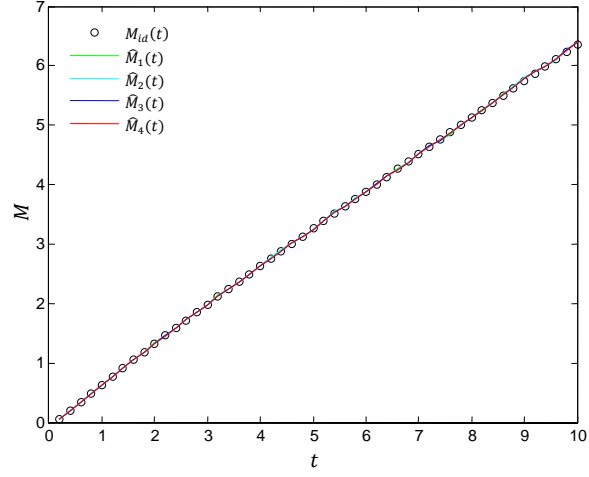
Şekil 6.30 Yenileme Sürecinde *Weibull*(2, 1) durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları

Çizelge 6.11 Yenileme Sürecinde *Lognormal*(0,1) durumunda $M(t)$, $V(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini

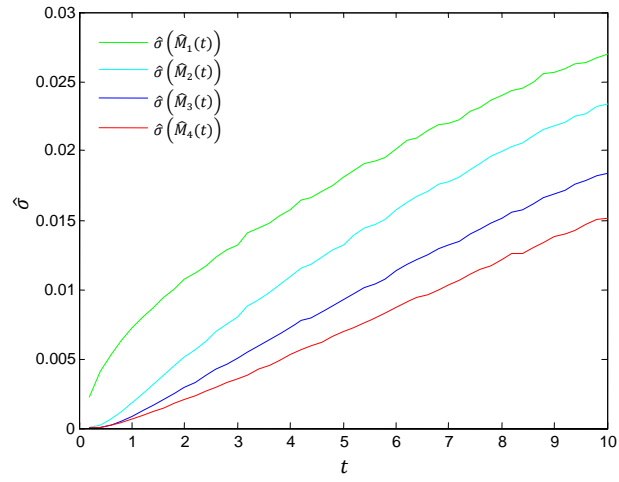
t	$M_{id}(t)$	$M_{sk}(t)$	$\hat{M}_1(t)$	$\hat{M}_2(t)$	$\hat{M}_3(t)$	$\hat{M}_4(t)$	$V_{id}(t)$	$V_{sk}(t)$	$\hat{V}_1(t)$	$\hat{V}_2(t)$	$\hat{V}_3(t)$	$\hat{V}_4(t)$
0.2	0.0541	0.0541	0.0535	0.0541	0.0541	0.0541	0.0518	0.0518	0.0512	0.0518	0.0518	0.0518
0.4	0.1866	0.1867	0.1866	0.1869	0.1867	0.1867	0.1658	0.1658	0.1652	0.1663	0.1659	0.1658
0.6	0.3339	0.3339	0.3304	0.3334	0.3336	0.3337	0.2827	0.2827	0.2808	0.2815	0.2821	0.2823
0.8	0.4813	0.4813	0.4775	0.4799	0.4808	0.4811	0.3982	0.3982	0.3915	0.3946	0.3971	0.3977
1	0.6264	0.6264	0.6287	0.6266	0.6262	0.6260	0.5142	0.5142	0.5226	0.5149	0.5139	0.5136
2	1.3194	1.3194	1.3309	1.3262	1.3222	1.3202	1.1255	1.1255	1.1506	1.1413	1.1326	1.1289
3	1.9799	1.9799	1.9658	1.9747	1.9774	1.9793	1.7935	1.7935	1.7504	1.7721	1.7802	1.7854
5	3.2573	3.2573	3.2403	3.2383	3.2439	3.2474	3.2630	3.2631	3.2760	3.2125	3.2315	3.2388
10	6.3595	6.3595	6.3999	6.3893	6.3895	6.3900	7.4273	7.4274	7.2868	7.3459	7.3893	7.4170

Çizelge 6.12 Yenileme Sürecinde *Lognormal*(0,1) durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO

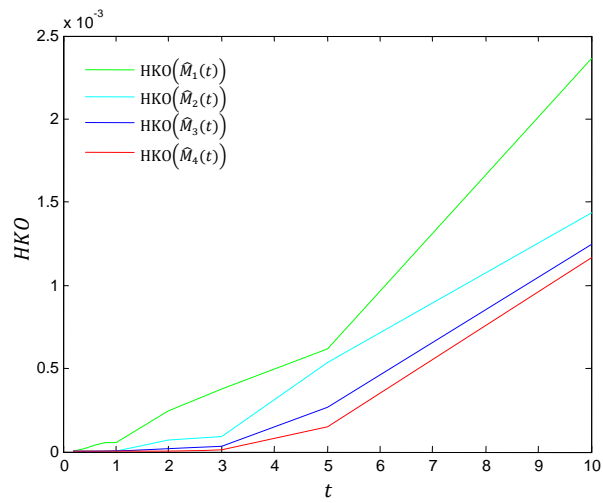
t		$\hat{M}_1(t)$	$\hat{M}_2(t)$	$\hat{M}_3(t)$	$\hat{M}_4(t)$	$\hat{V}_1(t)$	$\hat{V}_2(t)$	$\hat{V}_3(t)$	$\hat{V}_4(t)$
0.2	$\hat{\sigma}$	0.0023	0.0000	0.0000	0.0000	0.0051	0.0001	0.0000	0.0000
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.4	$\hat{\sigma}$	0.0041	0.0002	0.0001	0.0001	0.0099	0.0010	0.0003	0.0003
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.6	$\hat{\sigma}$	0.0053	0.0006	0.0003	0.0002	0.0144	0.0027	0.0011	0.0009
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
0.8	$\hat{\sigma}$	0.0063	0.0012	0.0005	0.0004	0.0185	0.0051	0.0023	0.0018
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
1	$\hat{\sigma}$	0.0072	0.0018	0.0009	0.0007	0.0239	0.0083	0.0039	0.0030
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000
2	$\hat{\sigma}$	0.0107	0.0051	0.0029	0.0021	0.0515	0.0290	0.0164	0.0120
	HKO	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0033	0.0011	0.0003	0.0002
3	$\hat{\sigma}$	0.0132	0.0081	0.0050	0.0035	0.0806	0.0549	0.0344	0.0247
	HKO	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0083	0.0035	0.0014	0.0007
5	$\hat{\sigma}$	0.0181	0.0132	0.0092	0.0070	0.1572	0.1212	0.0854	0.0660
	HKO	0.0006	0.0005	0.0003	0.0001	0.0249	0.0172	0.0083	0.0049
10	$\hat{\sigma}$	0.0270	0.0234	0.0184	0.0151	0.4021	0.3556	0.2846	0.2378
	HKO	0.0024	0.0014	0.0012	0.0012	0.1814	0.1331	0.0824	0.0566



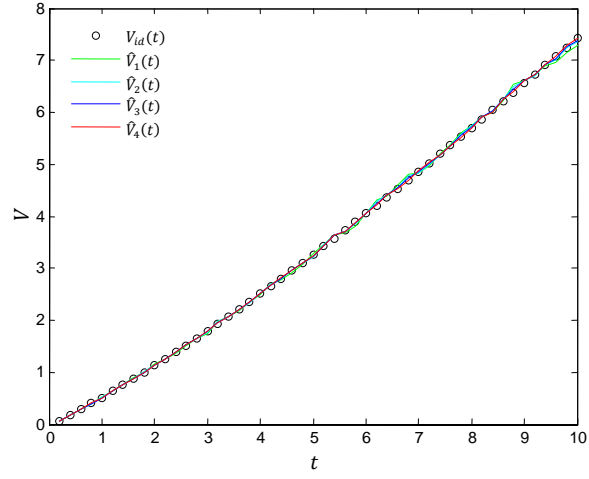
Şekil 6.31 Yenileme Sürecinde *Lognormal*(0, 1) durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini



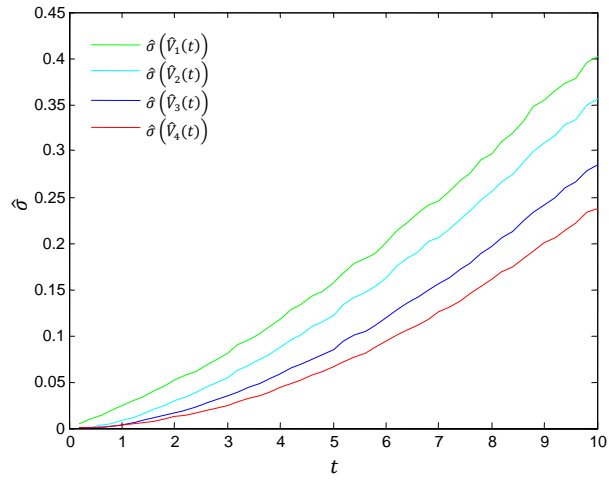
Şekil 6.32 Yenileme Sürecinde *Lognormal*(0, 1) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



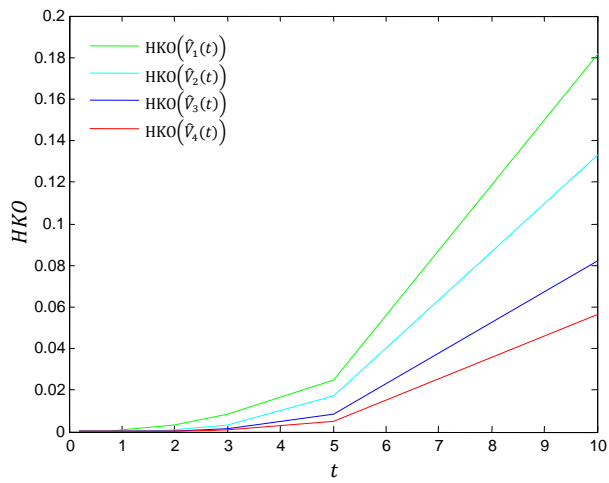
Şekil 6.33 Yenileme Sürecinde *Lognormal*(0, 1) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları



Şekil 6.34 Yenileme Sürecinde $Lognormal(0, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini



Şekil 6.35 Yenileme Sürecinde $Lognormal(0, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



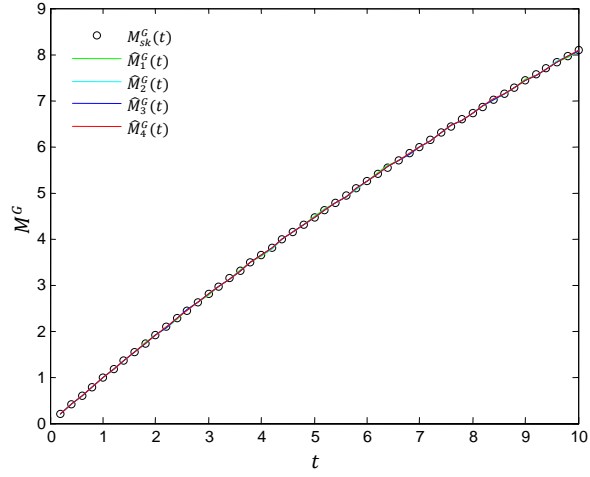
Şekil 6.36 Yenileme Sürecinde $Lognormal(0, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları

Çizelge 6.13 Geometrik Süreçte Üstel(1) durumunda $M^G(t)$, $V^G(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini

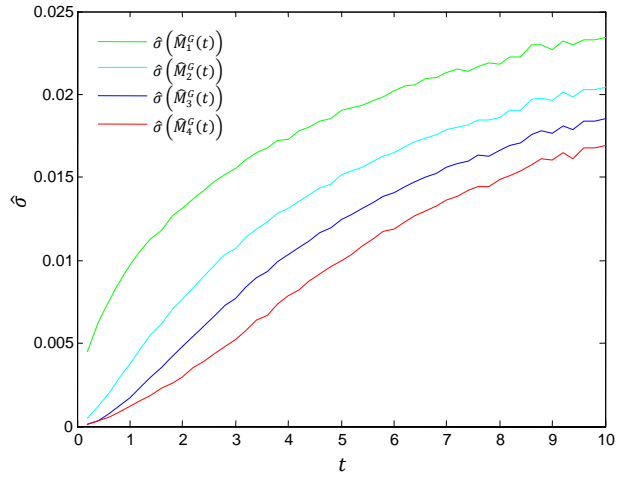
t	$M_{id}^G(t)$	$M_{sk}^G(t)$	$\hat{M}_1^G(t)$	$\hat{M}_2^G(t)$	$\hat{M}_3^G(t)$	$\hat{M}_4^G(t)$	$V_{id}^G(t)$	$V_{sk}^G(t)$	$\hat{V}_1^G(t)$	$\hat{V}_2^G(t)$	$\hat{V}_3^G(t)$	$\hat{V}_4^G(t)$
0.2	0.1990	0.1990	0.1979	0.1986	0.1989	0.1990	-	0.1970	0.2015	0.1963	0.1968	0.1969
0.4	0.3959	0.3960	0.3964	0.3953	0.3962	0.3964	-	0.3883	0.3893	0.3871	0.3888	0.3892
0.6	0.5878	0.5912	0.5874	0.5892	0.5906	0.5910	-	0.5740	0.5692	0.5685	0.5722	0.5730
0.8	0.7837	0.7844	0.7797	0.7835	0.7834	0.7833	-	0.7544	0.7558	0.7524	0.7519	0.7519
1	0.9698	0.9758	0.9861	0.9792	0.9774	0.9769	-	0.9296	0.9451	0.9396	0.9324	0.9312
2	1.8923	1.9061	1.9209	1.9150	1.9139	1.9120	-	1.7349	1.7174	1.7352	1.7443	1.7491
3	2.7717	2.7948	2.7891	2.7952	2.7984	2.8000	-	2.4369	2.4026	2.4011	2.4197	2.4300
5	4.4380	4.4613	4.4783	4.4686	4.4651	4.4623	-	3.5942	3.6365	3.6408	3.6169	3.6011
10	8.0234	8.1008	8.0660	8.0735	8.0775	8.0816	-	5.5319	5.4912	5.5089	5.5120	5.5069

Çizelge 6.14 Geometrik Süreçte Üstel(1) durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO

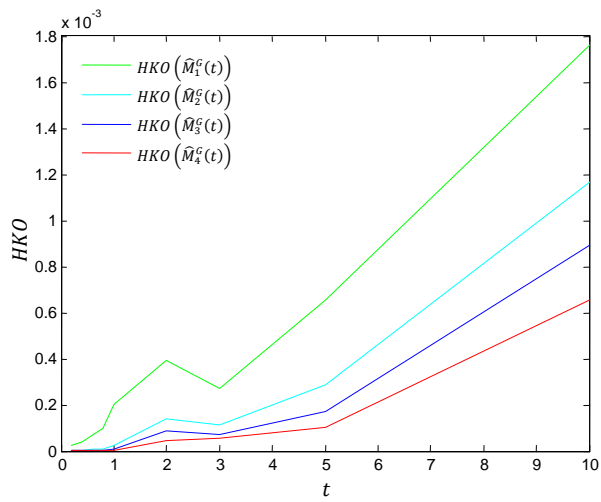
t		$\hat{M}_1(t)$	$\hat{M}_2(t)$	$\hat{M}_3(t)$	$\hat{M}_4(t)$	$\hat{V}_1(t)$	$\hat{V}_2(t)$	$\hat{V}_3(t)$	$\hat{V}_4(t)$
0.2	$\hat{\sigma}$	0.0045	0.0005	0.0001	0.0001	0.0125	0.0020	0.0004	0.0004
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
0.4	$\hat{\sigma}$	0.0062	0.0012	0.0004	0.0003	0.0196	0.0055	0.0016	0.0014
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
0.6	$\hat{\sigma}$	0.0075	0.0020	0.0007	0.0006	0.0266	0.0097	0.0035	0.0027
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
0.8	$\hat{\sigma}$	0.0087	0.0029	0.0012	0.0009	0.0341	0.0148	0.0061	0.0044
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000
1	$\hat{\sigma}$	0.0097	0.0038	0.0017	0.0012	0.0425	0.0207	0.0092	0.0064
	HKO	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0020	0.0005	0.0001	0.0000
2	$\hat{\sigma}$	0.0131	0.0077	0.0048	0.0030	0.0807	0.0524	0.0320	0.0212
	HKO	0.0004	0.0001	0.0001	0.0000	0.0068	0.0028	0.0011	0.0007
3	$\hat{\sigma}$	0.0155	0.0107	0.0077	0.0053	0.1221	0.0884	0.0629	0.0455
	HKO	0.0003	0.0001	0.0001	0.0001	0.0161	0.0091	0.0043	0.0021
5	$\hat{\sigma}$	0.0191	0.0152	0.0125	0.0100	0.2137	0.1731	0.1404	0.1150
	HKO	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001	0.0475	0.0321	0.0202	0.0133
10	$\hat{\sigma}$	0.0234	0.0205	0.0186	0.0169	0.4229	0.3708	0.3337	0.3054
	HKO	0.0018	0.0012	0.0009	0.0007	0.1805	0.1380	0.1117	0.0939



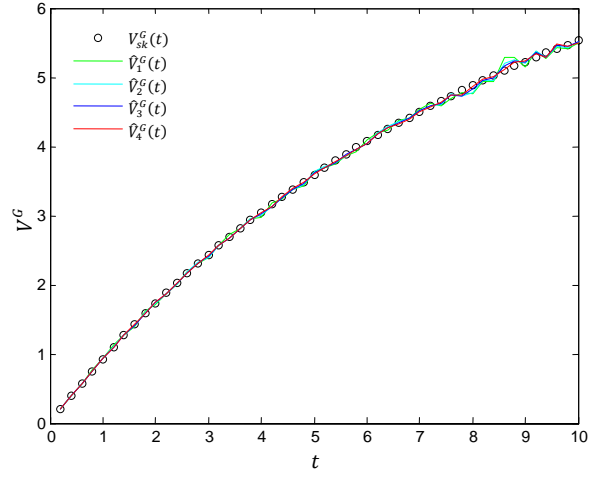
Şekil 6.37 Geometrik Süreçte Üstel(1) durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini



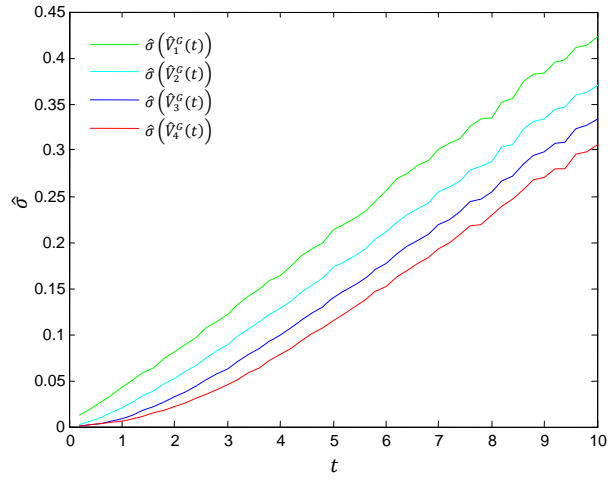
Şekil 6.38 Geometrik Süreçte Üstel(1) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



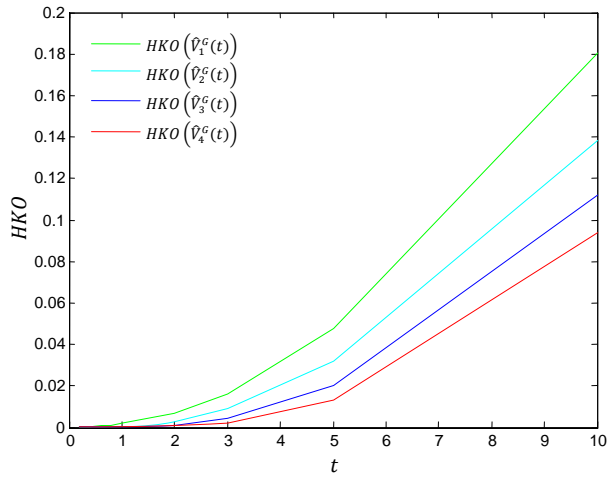
Şekil 6.39 Geometrik Süreçte Üstel(1) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları



Şekil 6.40 Geometrik Süreçte Üstel(1) durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini



Şekil 6.41 Geometrik Süreçte Üstel(1) durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



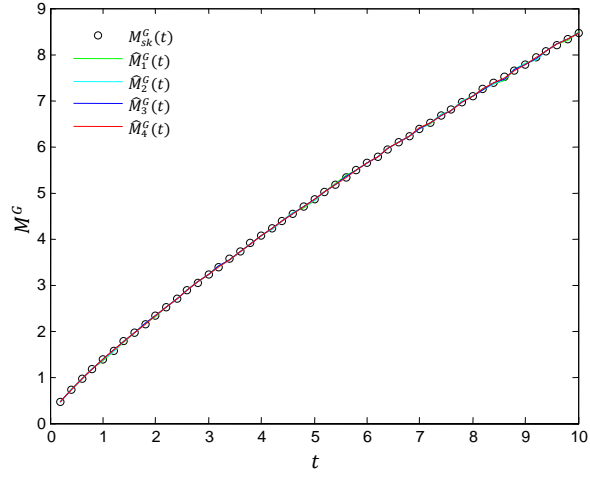
Şekil 6.42 Geometrik Süreçte Üstel(1) durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları

Çizelge 6.15 Geometrik Süreçte $Gama(0.5, 2)$ durumunda $M^G(t)$, $V^G(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini

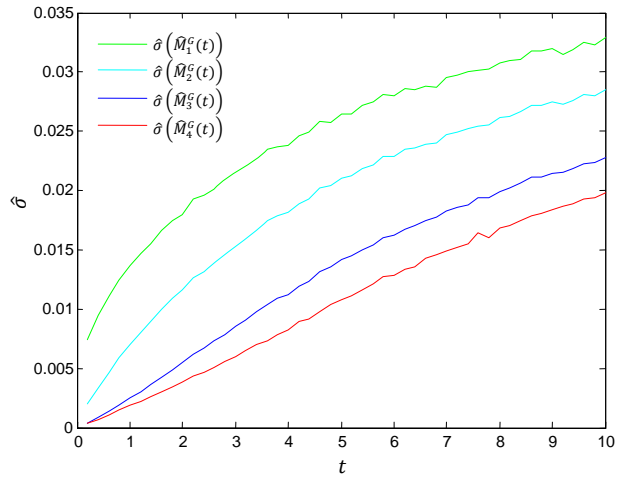
t	$M_{id}^G(t)$	$M_{sk}^G(t)$	$\hat{M}_1^G(t)$	$\hat{M}_2^G(t)$	$\hat{M}_3^G(t)$	$\hat{M}_4^G(t)$	$V_{id}^G(t)$	$V_{sk}^G(t)$	$\hat{V}_1^G(t)$	$\hat{V}_2^G(t)$	$\hat{V}_3^G(t)$	$\hat{V}_4^G(t)$
0.2	-	0.4632	0.4648	0.4647	0.4639	0.4638	-	0.5465	0.5556	0.5522	0.5487	0.5485
0.4	-	0.7249	0.7211	0.7226	0.7258	0.7262	-	0.9045	0.8917	0.8959	0.9074	0.9084
0.6	-	0.9560	0.9611	0.9578	0.9570	0.9568	-	1.2366	1.2430	1.2431	1.2385	1.2383
0.8	-	1.1718	1.1724	1.1730	1.1724	1.1723	-	1.5558	1.5447	1.5568	1.5580	1.5578
1	-	1.3782	1.3633	1.3727	1.3748	1.3753	-	1.8661	1.8661	1.8582	1.8616	1.8629
2	-	2.3342	2.3080	2.3205	2.3299	2.3327	-	3.3208	3.2403	3.2656	3.3022	3.3080
3	-	3.2203	3.2358	3.2293	3.2272	3.2256	-	4.6344	4.6324	4.6326	4.6433	4.6433
5	-	4.8655	4.8162	4.8377	4.8441	4.8493	-	6.8750	6.9848	6.9198	6.8784	6.8584
10	-	8.4566	8.4773	8.4710	8.4664	8.4632	-	10.7488	10.8069	10.7621	10.7734	10.7865

Çizelge 6.16 Geometrik Süreçte $Gama(0.5, 2)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO

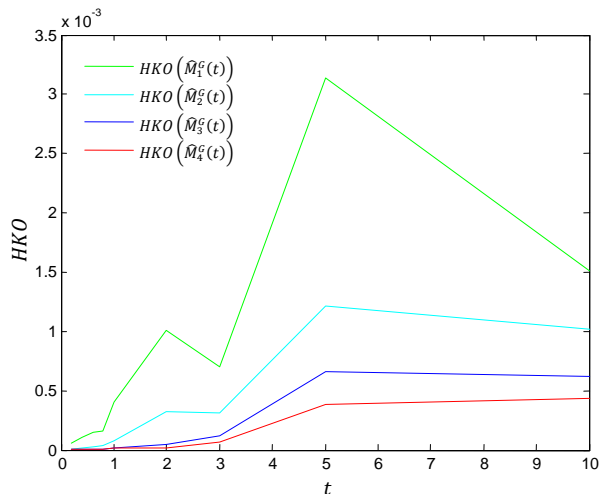
t		$\hat{M}_1^G(t)$	$\hat{M}_2^G(t)$	$\hat{M}_3^G(t)$	$\hat{M}_4^G(t)$	$\hat{V}_1^G(t)$	$\hat{V}_2^G(t)$	$\hat{V}_3^G(t)$	$\hat{V}_4^G(t)$
0.2	$\hat{\sigma}$	0.0075	0.0020	0.0004	0.0003	0.0280	0.0102	0.0019	0.0017
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000
0.4	$\hat{\sigma}$	0.0094	0.0033	0.0008	0.0007	0.0408	0.0190	0.0046	0.0039
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0018	0.0004	0.0000	0.0000
0.6	$\hat{\sigma}$	0.0111	0.0047	0.0013	0.0011	0.0561	0.0293	0.0080	0.0065
	HKO	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0032	0.0009	0.0001	0.0000
0.8	$\hat{\sigma}$	0.0124	0.0059	0.0019	0.0014	0.0672	0.0385	0.0121	0.0096
	HKO	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0046	0.0015	0.0002	0.0001
1	$\hat{\sigma}$	0.0137	0.0070	0.0025	0.0019	0.0802	0.0488	0.0170	0.0131
	HKO	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0064	0.0024	0.0003	0.0002
2	$\hat{\sigma}$	0.0180	0.0116	0.0055	0.0038	0.1405	0.1001	0.0467	0.0345
	HKO	0.0010	0.0003	0.0000	0.0000	0.0262	0.0131	0.0025	0.0014
3	$\hat{\sigma}$	0.0215	0.0153	0.0085	0.0059	0.2092	0.1578	0.0865	0.0632
	HKO	0.0007	0.0003	0.0001	0.0001	0.0438	0.0249	0.0076	0.0041
5	$\hat{\sigma}$	0.0264	0.0210	0.0141	0.0108	0.3398	0.2789	0.1838	0.1452
	HKO	0.0031	0.0012	0.0007	0.0004	0.1275	0.0798	0.0338	0.0214
10	$\hat{\sigma}$	0.0329	0.0285	0.0228	0.0198	0.6520	0.5664	0.4465	0.3915
	HKO	0.0015	0.0010	0.0006	0.0004	0.4284	0.3209	0.2000	0.1547



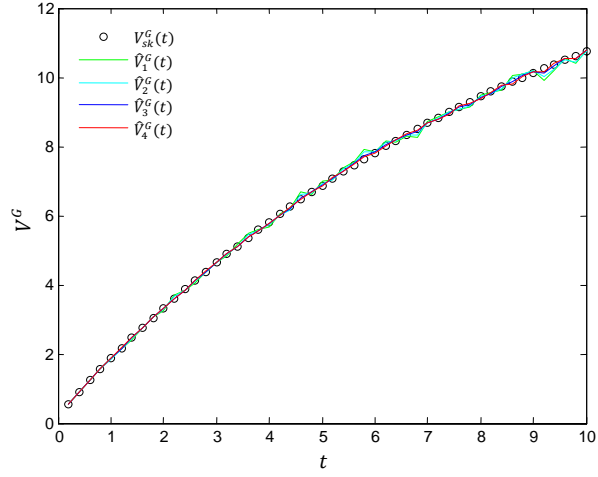
Şekil 6.43 Geometrik Süreçte $Gama(0.5, 2)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini



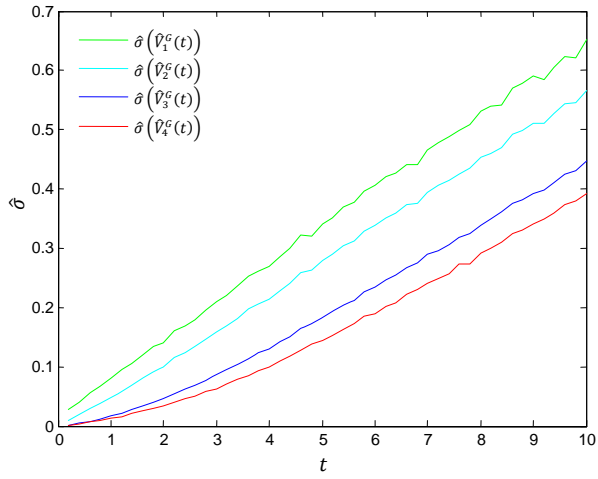
Şekil 6.44 Geometrik Süreçte $Gama(0.5, 2)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



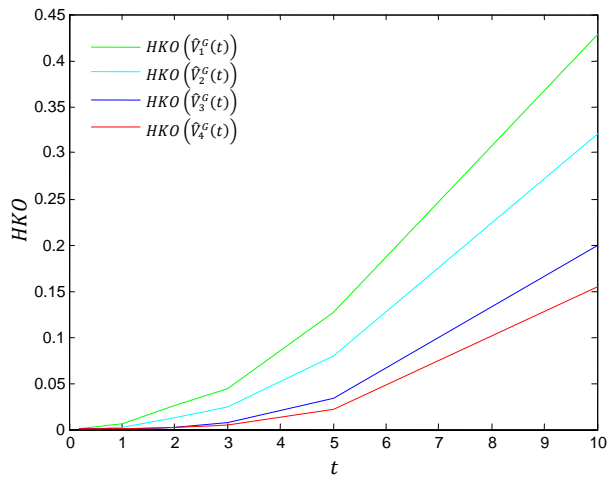
Şekil 6.45 Geometrik Süreçte $Gama(0.5, 2)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları



Şekil 6.46 Geometrik Süreçte $Gama(0.5, 2)$ durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini



Şekil 6.47 Geometrik Süreçte $Gama(0.5, 2)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



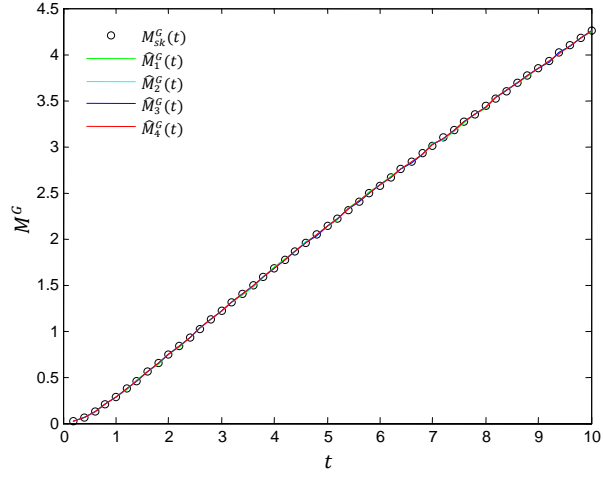
Şekil 6.48 Geometrik Süreçte $Gama(0.5, 2)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları

Çizelge 6.17 Geometrik Süreçte $Gama(2, 1)$ durumunda $M^G(t)$, $V^G(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini

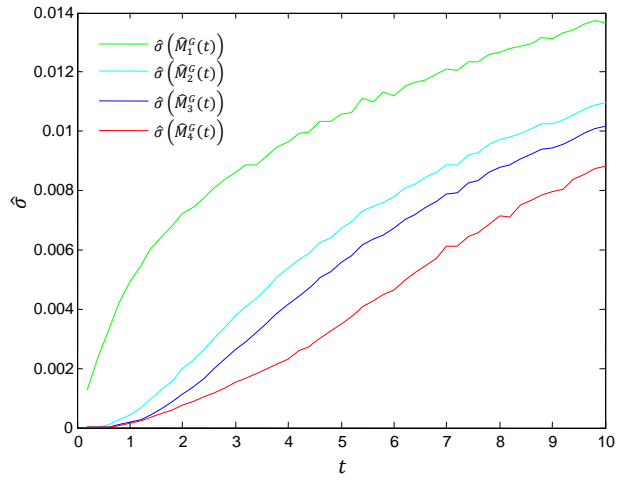
t	$M_{id}^G(t)$	$M_{sk}^G(t)$	$\hat{M}_1^G(t)$	$\hat{M}_2^G(t)$	$\hat{M}_3^G(t)$	$\hat{M}_4^G(t)$	$V_{id}^G(t)$	$V_{sk}^G(t)$	$\hat{V}_1^G(t)$	$\hat{V}_2^G(t)$	$\hat{V}_3^G(t)$	$\hat{V}_4^G(t)$
0.2	0.0176	0.0176	0.0168	0.0176	0.0176	0.0176	-	0.0174	0.0165	0.0174	0.0174	0.0174
0.4	0.0623	0.0623	0.0589	0.0622	0.0623	0.0623	-	0.0598	0.0570	0.0596	0.0598	0.0598
0.6	0.1250	0.1250	0.1209	0.1249	0.1250	0.1250	-	0.1156	0.1113	0.1153	0.1156	0.1157
0.8	0.1997	0.1997	0.2026	0.1997	0.1997	0.1997	-	0.1770	0.1760	0.1770	0.1772	0.1772
1	0.2822	0.2822	0.2861	0.2824	0.2822	0.2822	-	0.2394	0.2434	0.2398	0.2395	0.2395
2	0.7417	0.7417	0.7433	0.7438	0.7424	0.7417	-	0.5162	0.5222	0.5220	0.5182	0.5166
3	1.2142	1.2142	1.2125	1.2149	1.2140	1.2132	-	0.7398	0.7441	0.7439	0.7417	0.7400
5	2.1326	2.1326	2.1339	2.1323	2.1325	2.1330	-	1.1206	1.1214	1.1194	1.1201	1.1201
10	4.2577	4.2578	4.2419	4.2509	4.2529	4.2572	-	1.8706	1.8668	1.8657	1.8669	1.8704

Çizelge 6.18 Geometrik Süreçte $Gama(2, 1)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO

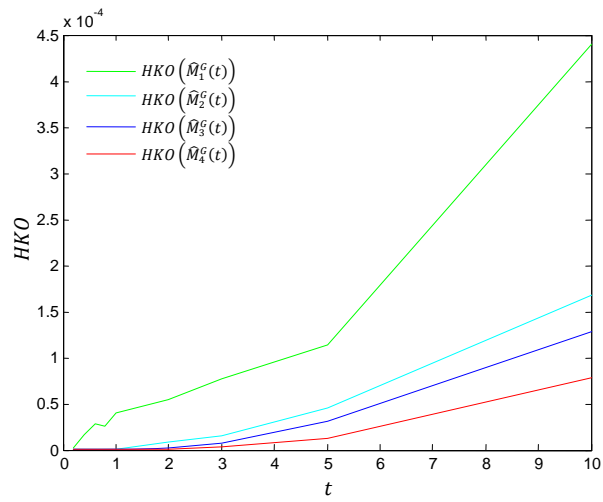
t		$\hat{M}_1^G(t)$	$\hat{M}_2^G(t)$	$\hat{M}_3^G(t)$	$\hat{M}_4^G(t)$	$\hat{V}_1^G(t)$	$\hat{V}_2^G(t)$	$\hat{V}_3^G(t)$	$\hat{V}_4^G(t)$
0.2	$\hat{\sigma}$	0.0013	0.0000	0.0000	0.0000	0.0029	0.0000	0.0000	0.0000
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.4	$\hat{\sigma}$	0.0024	0.0000	0.0000	0.0000	0.0055	0.0002	0.0000	0.0000
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.6	$\hat{\sigma}$	0.0033	0.0001	0.0000	0.0000	0.0079	0.0005	0.0001	0.0001
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.8	$\hat{\sigma}$	0.0042	0.0003	0.0001	0.0001	0.0103	0.0011	0.0003	0.0003
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
1	$\hat{\sigma}$	0.0049	0.0004	0.0002	0.0001	0.0128	0.0019	0.0007	0.0006
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
2	$\hat{\sigma}$	0.0072	0.0020	0.0011	0.0007	0.0243	0.0090	0.0050	0.0033
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000
3	$\hat{\sigma}$	0.0086	0.0038	0.0026	0.0015	0.0361	0.0190	0.0130	0.0079
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0013	0.0004	0.0002	0.0001
5	$\hat{\sigma}$	0.0106	0.0067	0.0056	0.0035	0.0635	0.0425	0.0349	0.0236
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0040	0.0018	0.0012	0.0006
10	$\hat{\sigma}$	0.0137	0.0109	0.0102	0.0088	0.1388	0.1122	0.1034	0.0908
	HKO	0.0004	0.0002	0.0001	0.0001	0.0193	0.0126	0.0107	0.0082



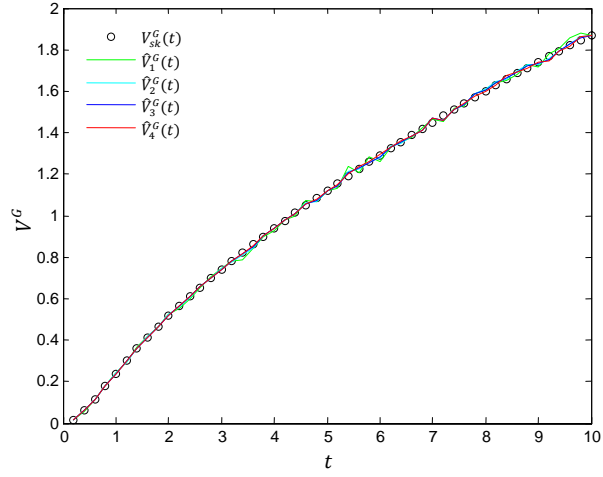
Şekil 6.49 Geometrik Süreçte $Gama(2, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini



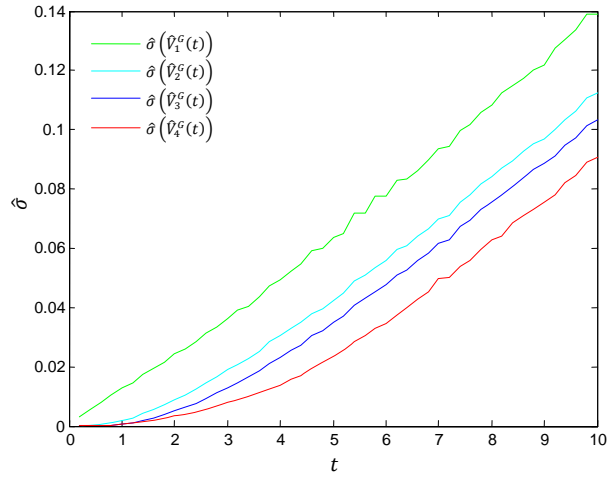
Şekil 6.50 Geometrik Süreçte $Gama(2, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



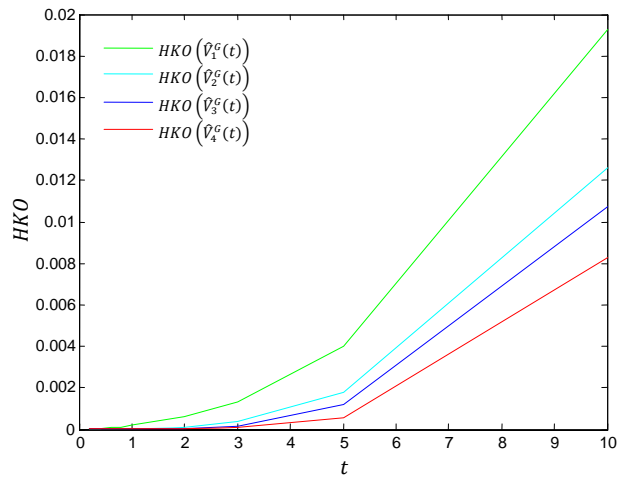
Şekil 6.51 Geometrik Süreçte $Gama(2, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları



Şekil 6.52 Geometrik Süreçte $Gama(2, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini



Şekil 6.53 Geometrik Süreçte $Gama(2, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



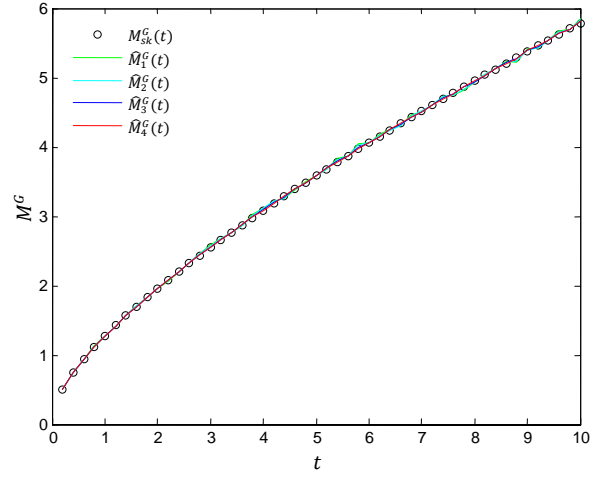
Şekil 6.54 Geometrik Süreçte $Gama(2, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları

Çizelge 6.19 Geometrik Süreçte $Weibull(0.5, 1)$ durumunda $M^G(t)$, $V^G(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini

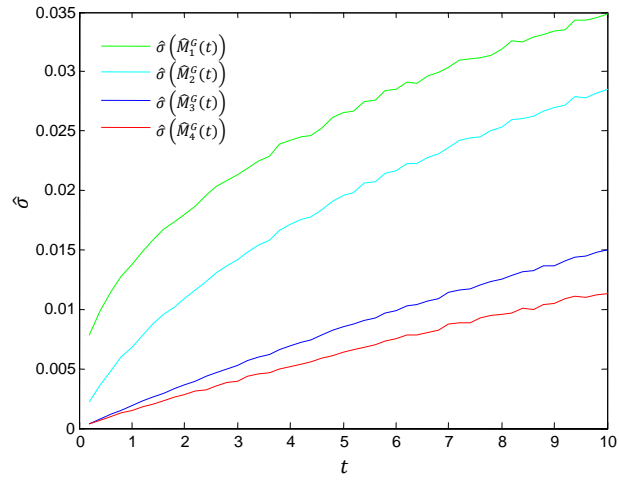
t	$M_{id}^G(t)$	$M_{sk}^G(t)$	$\hat{M}_1^G(t)$	$\hat{M}_2^G(t)$	$\hat{M}_3^G(t)$	$\hat{M}_4^G(t)$	$V_{id}^G(t)$	$V_{sk}^G(t)$	$\hat{V}_1^G(t)$	$\hat{V}_2^G(t)$	$\hat{V}_3^G(t)$	$\hat{V}_4^G(t)$
0.2	-	0.5003	0.4981	0.5005	0.5004	0.5004	-	0.6147	0.6134	0.6148	0.6158	0.6158
0.4	-	0.7400	0.7377	0.7399	0.7399	0.7398	-	0.9783	0.9663	0.9724	0.9782	0.9782
0.6	-	0.9366	0.9405	0.9369	0.9361	0.9361	-	1.3028	1.3182	1.3117	1.3030	1.3026
0.8	-	1.1110	1.1274	1.1203	1.1139	1.1131	-	1.6078	1.6200	1.6346	1.6202	1.6180
1	-	1.2712	1.2688	1.2694	1.2714	1.2717	-	1.9006	1.8869	1.8859	1.8993	1.9015
2	-	1.9582	1.9527	1.9575	1.9589	1.9590	-	3.2671	3.2431	3.2516	3.2694	3.2716
3	-	2.5470	2.5891	2.5738	2.5568	2.5530	-	4.5442	4.5533	4.5990	4.5662	4.5625
5	-	3.5844	3.5859	3.5912	3.5825	3.5808	-	6.9347	7.0258	7.0247	6.9551	6.9464
10	-	5.7848	5.8423	5.8363	5.8241	5.8192	-	12.1842	12.1264	12.2031	12.2789	12.2953

Çizelge 6.20 Geometrik Süreçte $Weibull(0.5, 1)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO

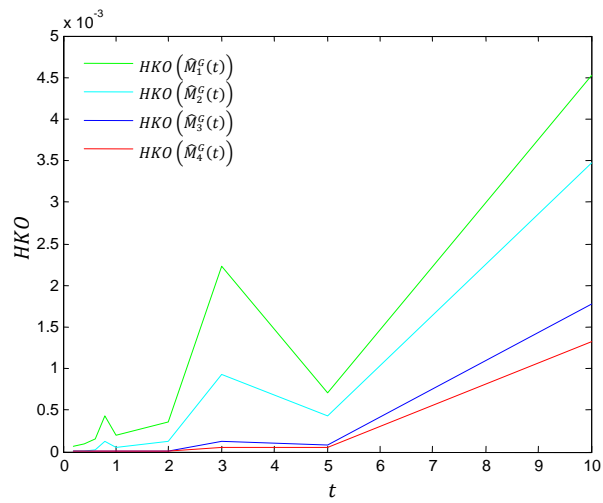
t		$\hat{M}_1^G(t)$	$\hat{M}_2^G(t)$	$\hat{M}_3^G(t)$	$\hat{M}_4^G(t)$	$\hat{V}_1^G(t)$	$\hat{V}_2^G(t)$	$\hat{V}_3^G(t)$	$\hat{V}_4^G(t)$
0.2	$\hat{\sigma}$	0.0078	0.0022	0.0004	0.0004	0.0304	0.0120	0.0021	0.0019
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000
0.4	$\hat{\sigma}$	0.0098	0.0036	0.0008	0.0007	0.0443	0.0212	0.0045	0.0039
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0021	0.0005	0.0000	0.0000
0.6	$\hat{\sigma}$	0.0115	0.0049	0.0012	0.0010	0.0582	0.0313	0.0072	0.0062
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0036	0.0011	0.0001	0.0000
0.8	$\hat{\sigma}$	0.0127	0.0060	0.0015	0.0013	0.0697	0.0403	0.0101	0.0085
	HKO	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0050	0.0023	0.0003	0.0002
1	$\hat{\sigma}$	0.0137	0.0068	0.0019	0.0015	0.0813	0.0484	0.0130	0.0112
	HKO	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0068	0.0026	0.0002	0.0001
2	$\hat{\sigma}$	0.0180	0.0109	0.0036	0.0028	0.1376	0.0938	0.0308	0.0246
	HKO	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0195	0.0090	0.0010	0.0006
3	$\hat{\sigma}$	0.0213	0.0142	0.0052	0.0040	0.1931	0.1410	0.0510	0.0401
	HKO	0.0022	0.0009	0.0001	0.0001	0.0374	0.0229	0.0031	0.0019
5	$\hat{\sigma}$	0.0265	0.0196	0.0085	0.0064	0.2988	0.2355	0.1006	0.0788
	HKO	0.0007	0.0004	0.0001	0.0001	0.0976	0.0636	0.0105	0.0064
10	$\hat{\sigma}$	0.0348	0.0285	0.0150	0.0113	0.5438	0.4592	0.2426	0.1903
	HKO	0.0045	0.0035	0.0018	0.0013	0.2990	0.2112	0.0678	0.0486



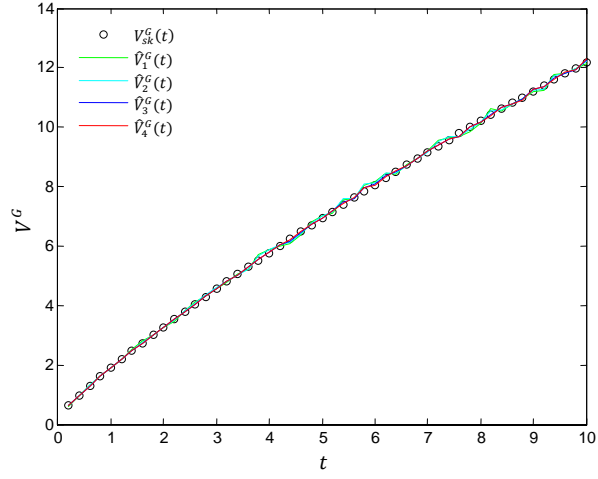
Şekil 6.55 Geometrik Süreçte *Weibull*(0.5, 1) durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini



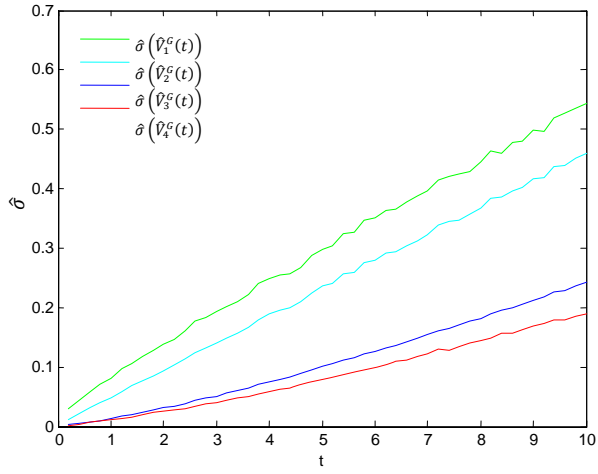
Şekil 6.56 Geometrik Süreçte *Weibull*(0.5, 1) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



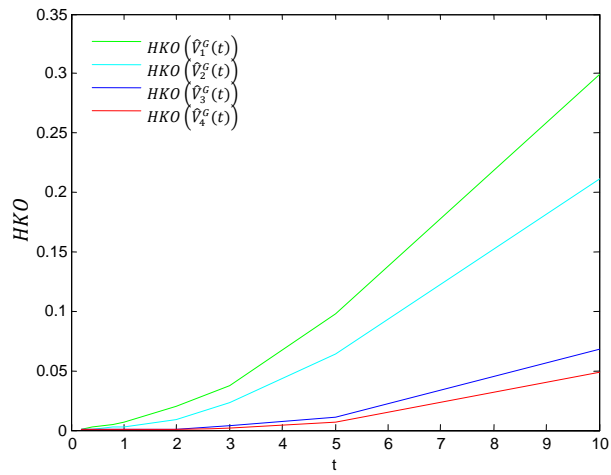
Şekil 6.57 Geometrik Süreçte *Weibull*(0.5, 1) durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları



Şekil 6.58 Geometrik Süreçte $Weibull(0.5, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini



Şekil 6.59 Geometrik Süreçte $Weibull(0.5, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



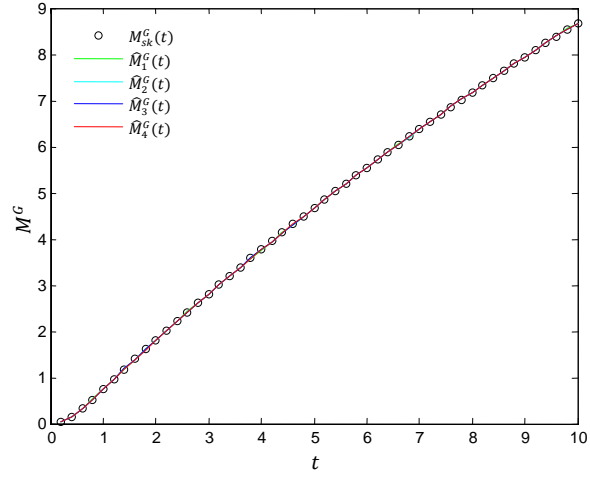
Şekil 6.60 Geometrik Süreçte $Weibull(0.5, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları

Çizelge 6.21 Geometrik Süreçte $Weibull(2, 1)$ durumunda $M^G(t)$, $V^G(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini

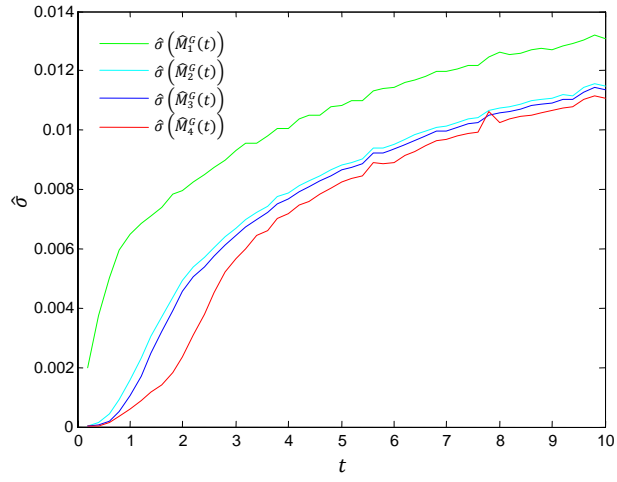
t	$M_{id}^G(t)$	$M_{sk}^G(t)$	$\hat{M}_1^G(t)$	$\hat{M}_2^G(t)$	$\hat{M}_3^G(t)$	$\hat{M}_4^G(t)$	$V_{id}^G(t)$	$V_{sk}^G(t)$	$\hat{V}_1^G(t)$	$\hat{V}_2^G(t)$	$\hat{V}_3^G(t)$	$\hat{V}_4^G(t)$
0.2	0.0394	0.0394	0.0403	0.0395	0.0394	0.0394	-	0.0384	0.0389	0.0384	0.0384	0.0384
0.4	0.1515	0.1515	0.1527	0.1515	0.1515	0.1515	-	0.1359	0.1390	0.1358	0.1359	0.1360
0.6	0.3197	0.3197	0.3235	0.3196	0.3198	0.3199	-	0.2530	0.2530	0.2530	0.2532	0.2534
0.8	0.5230	0.5231	0.5269	0.5222	0.5223	0.5224	-	0.3539	0.3552	0.3521	0.3523	0.3525
1	0.7424	0.7425	0.7416	0.7440	0.7437	0.7433	-	0.4249	0.4208	0.4274	0.4272	0.4265
2	1.8117	1.8117	1.8086	1.8137	1.8132	1.8128	-	0.6403	0.6354	0.6438	0.6428	0.6394
3	2.8140	2.8141	2.8092	2.8106	2.8110	2.8125	-	0.8505	0.8648	0.8482	0.8486	0.8491
5	4.6779	4.6782	4.6808	4.6763	4.6767	4.6774	-	1.1826	1.1703	1.1807	1.1831	1.1844
10	8.6830	8.6838	8.6819	8.6835	8.6834	8.6841	-	1.7146	1.7079	1.7231	1.7212	1.7185

Çizelge 6.22 Geometrik Süreçte $Weibull(2, 1)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO

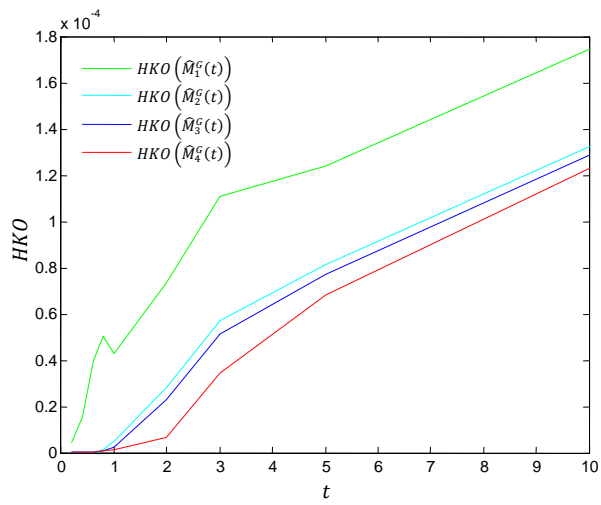
t		$\hat{M}_1^G(t)$	$\hat{M}_2^G(t)$	$\hat{M}_3^G(t)$	$\hat{M}_4^G(t)$	$\hat{V}_1^G(t)$	$\hat{V}_2^G(t)$	$\hat{V}_3^G(t)$	$\hat{V}_4^G(t)$
0.2	$\hat{\sigma}$	0.0020	0.0000	0.0000	0.0000	0.0044	0.0001	0.0000	0.0000
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.4	$\hat{\sigma}$	0.0037	0.0001	0.0000	0.0000	0.0090	0.0006	0.0002	0.0001
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.6	$\hat{\sigma}$	0.0050	0.0004	0.0002	0.0001	0.0128	0.0018	0.0008	0.0006
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
0.8	$\hat{\sigma}$	0.0060	0.0009	0.0005	0.0003	0.0168	0.0040	0.0022	0.0015
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
1	$\hat{\sigma}$	0.0065	0.0016	0.0010	0.0006	0.0202	0.0069	0.0045	0.0026
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
2	$\hat{\sigma}$	0.0080	0.0049	0.0046	0.0023	0.0422	0.0270	0.0246	0.0145
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0018	0.0007	0.0006	0.0002
3	$\hat{\sigma}$	0.0093	0.0067	0.0064	0.0056	0.0672	0.0489	0.0467	0.0414
	HKO	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0047	0.0024	0.0022	0.0017
5	$\hat{\sigma}$	0.0108	0.0088	0.0087	0.0082	0.1175	0.0963	0.0940	0.0896
	HKO	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0140	0.0093	0.0088	0.0080
10	$\hat{\sigma}$	0.0131	0.0115	0.0113	0.0111	0.2455	0.2164	0.2131	0.2079
	HKO	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0603	0.0469	0.0455	0.0433



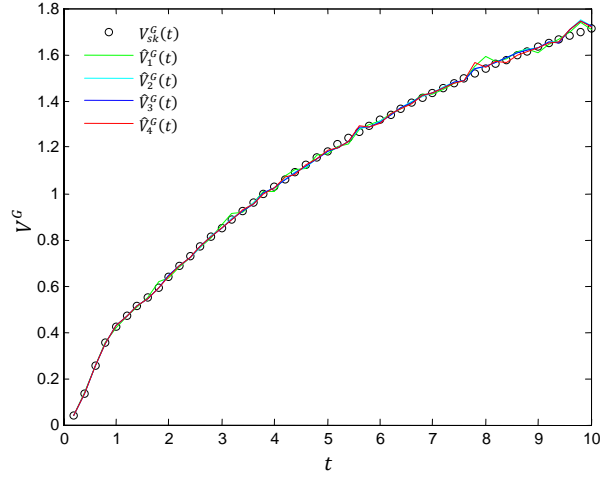
Şekil 6.61 Geometrik Süreçte $Weibull(2, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini



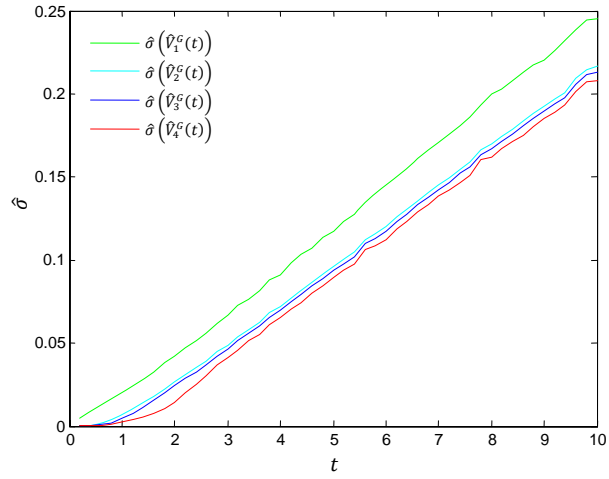
Şekil 6.62 Geometrik Süreçte $Weibull(2, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



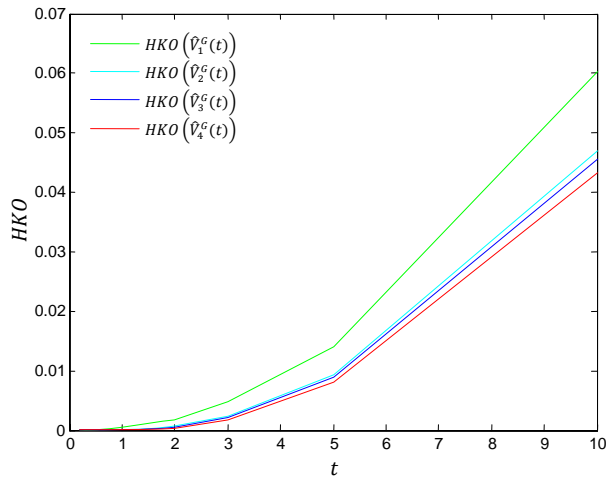
Şekil 6.63 Geometrik Süreçte $Weibull(2, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları



Şekil 6.64 Geometrik Süreçte $Weibull(2, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini



Şekil 6.65 Geometrik Süreçte $Weibull(2, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



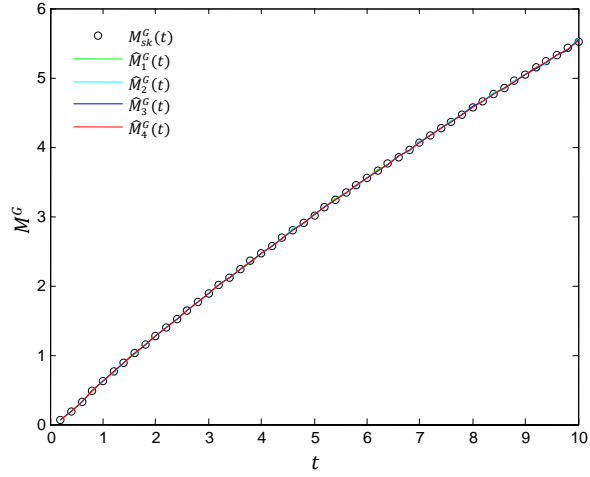
Şekil 6.66 Geometrik Süreçte $Weibull(2, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları

Çizelge 6.23 Geometrik Süreçte $Lognormal(0, 1)$ durumunda $M^G(t)$, $V^G(t)$ ve bu fonksiyonların tahmini

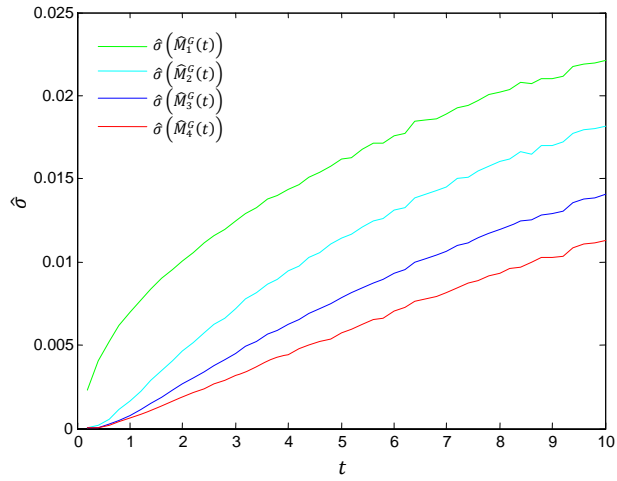
t	$M_{id}^G(t)$	$M_{sk}^G(t)$	$\hat{M}_1^G(t)$	$\hat{M}_2^G(t)$	$\hat{M}_3^G(t)$	$\hat{M}_4^G(t)$	$V_{id}^G(t)$	$V_{sk}^G(t)$	$\hat{V}_1^G(t)$	$\hat{V}_2^G(t)$	$\hat{V}_3^G(t)$	$\hat{V}_4^G(t)$
0.2	0.0540	0.0540	0.0552	0.0540	0.0540	0.0540	-	0.0517	0.0528	0.0517	0.0516	0.0516
0.4	0.1860	0.1860	0.1884	0.1859	0.1860	0.1860	-	0.1640	0.1651	0.1636	0.1640	0.1640
0.6	0.3314	0.3314	0.3236	0.3305	0.3313	0.3316	-	0.2764	0.2703	0.2740	0.2762	0.2767
0.8	0.4759	0.4759	0.4680	0.4756	0.4755	0.4755	-	0.3849	0.3836	0.3846	0.3842	0.3841
1	0.6170	0.6170	0.6157	0.6186	0.6179	0.6175	-	0.4915	0.4822	0.4936	0.4933	0.4928
2	1.2774	1.2774	1.2735	1.2761	1.2765	1.2768	-	1.0229	1.0161	1.0219	1.0210	1.0204
3	1.8872	1.8872	1.8782	1.8807	1.8832	1.8846	-	1.5568	1.5476	1.5426	1.5507	1.5552
5	3.0164	3.0164	3.0276	3.0281	3.0253	3.0236	-	2.6026	2.6200	2.6304	2.6170	2.6092
10	5.5195	5.5195	5.5636	5.5623	5.5508	5.5412	-	4.9192	4.9016	4.9117	4.9443	4.9649

Çizelge 6.24 Geometrik Süreçte $Lognormal(0, 1)$ durumunda tahmin ediciler için standart hata ve HKO

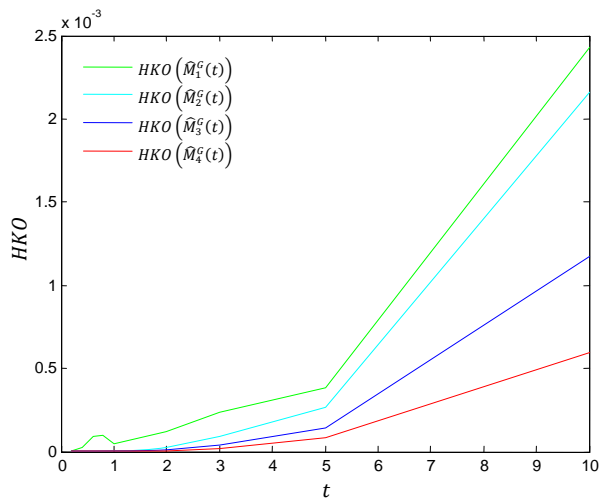
t		$\hat{M}_1^G(t)$	$\hat{M}_2^G(t)$	$\hat{M}_3^G(t)$	$\hat{M}_4^G(t)$	$\hat{V}_1^G(t)$	$\hat{V}_2^G(t)$	$\hat{V}_3^G(t)$	$\hat{V}_4^G(t)$
0.2	$\hat{\sigma}$	0.0023	0.0000	0.0000	0.0000	0.0052	0.0001	0.0000	0.0000
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.4	$\hat{\sigma}$	0.0041	0.0002	0.0001	0.0001	0.0098	0.0008	0.0003	0.0002
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.6	$\hat{\sigma}$	0.0052	0.0006	0.0002	0.0002	0.0139	0.0024	0.0010	0.0008
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
0.8	$\hat{\sigma}$	0.0062	0.0011	0.0005	0.0004	0.0182	0.0048	0.0021	0.0017
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
1	$\hat{\sigma}$	0.0069	0.0017	0.0008	0.0006	0.0220	0.0074	0.0036	0.0027
	HKO	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000
2	$\hat{\sigma}$	0.0101	0.0046	0.0027	0.0019	0.0459	0.0250	0.0143	0.0102
	HKO	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0022	0.0006	0.0002	0.0001
3	$\hat{\sigma}$	0.0124	0.0072	0.0045	0.0032	0.0715	0.0461	0.0290	0.0209
	HKO	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0052	0.0023	0.0009	0.0004
5	$\hat{\sigma}$	0.0162	0.0115	0.0078	0.0057	0.1293	0.0973	0.0670	0.0500
	HKO	0.0004	0.0003	0.0001	0.0001	0.0170	0.0102	0.0047	0.0025
10	$\hat{\sigma}$	0.0221	0.0182	0.0140	0.0113	0.2825	0.2366	0.1851	0.1513
	HKO	0.0024	0.0022	0.0012	0.0006	0.0801	0.0560	0.0349	0.0250



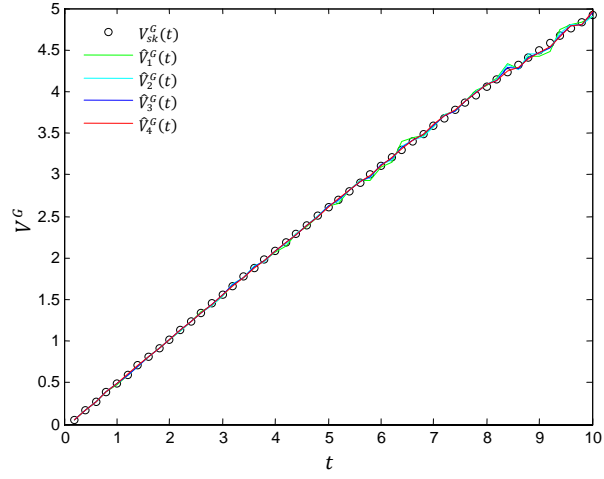
Şekil 6.67 Geometrik Süreçte $Lognormal(0, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu ve tahmini



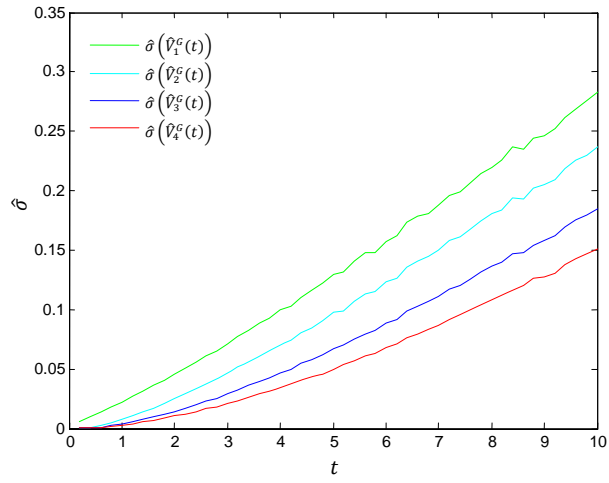
Şekil 6.68 Geometrik Süreçte $Lognormal(0, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



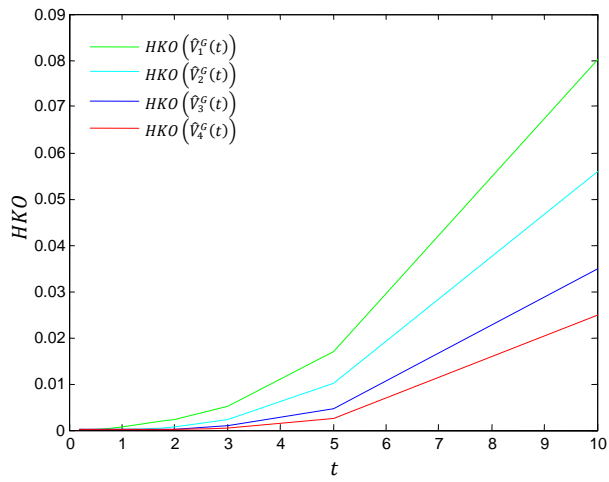
Şekil 6.69 Geometrik Süreçte $Lognormal(0, 1)$ durumunda ortalama değer fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları



Şekil 6.70 Geometrik Süreçte $Lognormal(0, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu ve tahmini



Şekil 6.71 Geometrik Süreçte $Lognormal(0, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin standart hataları



Şekil 6.72 Geometrik Süreçte $Lognormal(0, 1)$ durumunda varyans fonksiyonu tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları

7. SONUÇ

Bu çalışmada stokastik modellemede sıklıkla karşılaşılan dağılım fonksiyonlarının konvolüsyonları üzerinde durulmuştur. Konvolüsyon fonksiyonu için düzgün, üstel, iki parametrelili üstel ve Erlang dağılım durumlarında analitik ifadeler verilmiştir. Analitik ifade var olmadığı durumlarda kullanılabilir bazı sayısal yöntemlerden kısaca bahsedilmiş ve konvolüsyon integrallerinin hesabı için yamuk integrasyon kuralına bağlı sayısal bir yöntem sunulmuştur. Daha sonra stokastik modellemede sıklıkla kullanılan sayma süreçleri ve özel birer sayma süreci olan yenileme süreci ve geometrik süreç kısaca tanıtılmıştır. Bu süreçlere ilişkin ortalama değer ve varyans fonksiyonlarının konvolüsyon serileri ile ifade edilebildiği vurgulanmıştır. Konvolüsyon fonksiyonu için Monte Carlo tahmin edicileri ele alınmış ve bu tahmin ediciler istatistiksel olarak değerlendirilmiştir. Mevcut tahmin edicilerin doğrusal birleşimleri ile yeni bir tahmin edici tanımlanmış ve bu tahmin edicinin diğerlerinden daha etkin olduğu gösterilmiştir. Son bölümde ise yenileme süreci ve geometrik sürecin ortalama değer ve varyans fonksiyonları için beşinci bölümde verilen tahmin edicilere bağlı olarak bazı tahmin ediciler tanımlanmıştır ve bu tahmin edicilerin işlevliliğini değerlendirmek üzere bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Burada üstel, gama, Weibull ve lognormal gibi uygulamada çoğu kez karşılaşılan dağılımlar için hesaplama yapılmıştır. Buna göre $i = 1, 2, 3, 4$ için $\widehat{K}_{in}(t)$ konvolüsyon fonksiyonu tahmin edicilerine bağlı $\widehat{M}_i(t)$, $\widehat{V}_i(t)$, $\widehat{M}_i^G(t)$ ve $\widehat{V}_i^G(t)$ tahmin edicileri $M(t)$, $V(t)$, $M^G(t)$ ve $V^G(t)$ fonksiyonları için hemen hemen bütün durumlarda istenilen performansı göstermiştir. Beklendiği üzere, diğerlerinin uygun doğrusal birleşimi olarak tanımlanan $\widehat{K}_{4n}(t)$ tahmin edicisine dayalı $\widehat{M}_4(t)$, $\widehat{V}_4(t)$, $\widehat{M}_4^G(t)$ ve $\widehat{V}_4^G(t)$ tahmin edicileri hata kareler ortalaması ölçütüne göre diğerlerinden ($i = 1, 2, 3$) daha iyi bir performans göstermiş olup t nin büyük değerleri ve DFR dağılım durumları için bile hata kareler ortalaması değerleri oldukça küçük gözlemlenmiştir.

Sonuç olarak

$$K_n(t) = F_1 * F_2 * \dots * F_n(t), t \geq 0$$

ile tanımlanan $K_n(t)$ konvolüsyon fonksiyonu $i = 1, \dots, n$ için F_i dağılım fonksiyonları bütünüyle bilindiğinde ve analitik olarak elde edilemediğinde, beşinci bölümde tanımlanan $\hat{K}_{in}(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) tahmin edicileri ile kolaylıkla tahmin edilebilir. Ayrıca bu tahmin ediciler, dağılım fonksiyonları konvolüsyonlarının herhangi bir fonksiyonunun tahmini için de güçlü bir araç olarak kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Aydoğdu, H. 1997. Yenileme Süreçlerinde Tahmin. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 158 s., Ankara.
- Aydoğdu, H. 2005. A Pointwise Estimator for the k-Fold Convolution of a Distribution Function. *Commun. Stat. Theo. Meth.* Vol. 34; pp. 1939-1956.
- Barlow, E. R. and Proschan, F. 1965. *Mathematical Theory of Reliability*. John Wiley&Sons Inc. 258 p., New York.
- Baxter, L.A. 1981. Some Remarks on Numerical Convolution. *Comm. In Stat. B*(10); pp. 281-288.
- Brown, M., Solomon, H. and Stevens, M. A. 1981. Monte Carlo Simulation of Renewal Function. *J. Appl. Probab.* Vol. 13; pp. 426-434.
- Cleroux, R. and McConalogue, D. J. 1976. A Numerical Algorithm for Recursively-Defined Convolution Integrals Involving Distribution Functions. *Management Sci.* Vol. 22; pp. 1138-1146.
- Feller, W. 1971. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume II*. Second Edition. John Wiley&Sons Inc. 669 p., New York.
- Gertsbakh, I. and Shpungin, Y. 2004. Renewal Function and Interval Availability: A Numerical Monte Carlo Study. *Commun. Stat. Theo. Method.* Vol. 33(3); pp. 639-649.
- Grimmet, G. R. and Stirzaker, D. R. 1992. *Probability and Random Processes*. Oxford University Press Inc. 596 p., New York.
- Johnson, R. A. and Wichern, D. W. 2007. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Pearson Education Inc. 486 p., New Jersey.
- Karlin, S. and Taylor, H. M. 1975. *A First Course in Stochastic Process*. Second Edition. Academic Press. 557 p., New York.
- Kawata, T. 1972. *Fourier Analysis in Probability Theory*. Academic Press. 668 p., New York.
- Lam, Y. 1988. Geometric Process and Replacement Problem. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*. Vol. 4; pp. 366-377.
- Lam, Y. 2007. *Geometric Process and Its Applications*. World Scientific. 229 p., Singapore.
- Lomnicki, Z. A. 1966. A Note on the Weibull Renewal Process. *Biometrika*. Vol. 53; pp. 375-381.

- Nadarajah, S. 2008. A Review of Results on Sums of Random Variables. *Acta. Appl. Math.* Vol. 103; pp. 131-140.
- Ross, S. M. 1983. *Stochastic Processes*. John Wiley and Sons Inc. 510 p., New York.
- Tang, Y. and Lam, Y. 2007. Numerical Solution to an Integral Equation in Geometric Process. *Journal of Statistical Computation and Simulation* Vol. 77; pp. 549-560.
- White, J. S. 1964. Weibull Renewal Analysis. *Proceedings of the Aerospace Reliability and Maintainability Conference*. Washington.
- Xie, M. 1989 Some Results on the Renewal-type Equations. *Commun. Stat Theo. Meth.* Vol. 18(3); pp. 1159-1171.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı :Ömer ALTINDAĞ
Doğum Yeri :Altındağ/ANKARA
Doğum Tarihi :13.10.1987
Medeni Hali :Bekar
Yabancı Dili :İngilizce

Eğitim Durumu (Kurumu ve Yıl)

Lise :İncirli Lisesi (2001-2005)
Lisans :Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü (2005-2009)
Yüksek Lisans :Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı
(2009-)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Bilecik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü Araştırma
Görevlisi (2010-2011)

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü Araştırma Görevlisi (2011-)