

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**BİR BOYUTTA ÇARPANLARINA AYRILABİLEN BAZI SİSTEMLERİN  
SPEKTRUM ÜRETEN CEBİRLERİ: KLASİK VE KUANTUM MEKANİKSEL  
İNCELEME**

**Ebru ŞİMŞEK**

**FİZİK ANABİLİM DALI**

**ANKARA**  
**2012**

**Her hakkı saklıdır**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### BİR BOYUTTA ÇARPANLARINA AYRILABİLEN BAZI SİSTEMLERİN SPEKTRUM ÜRETEN CEBİRLERİ: KLASİK VE KUANTUM MEKANİKSEL İNCELEME

Ebru ŞİMŞEK

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Şengül KURU

Bu çalışmada ilk olarak çarpanlara ayırma yöntemini içeren süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemleri kısaca gözden geçirilmiştir. Kuantum mekaniğinde, harmonik salınıcı, trigonometrik ve hiperbolik Pöschl-Teller potansiyellerinin spektrumları çarpanlarına ayırma yöntemi kullanılarak cebirsel olarak elde edilmiştir ve bu sistemler için spektrum üreten cebirler kurulmuştur. Bu potansiyellerin klasik benzerleri için benzer yolla klasik spektrum üreten cebirler kurulmuştur. Daha sonra klasik mekanik çerçevesinde bu sistemlerin hareketlerinin cebirsel olarak nasıl çözüldüğü gösterilmiştir.

**Haziran 2012, 35 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Spektrum üreten cebir, çarpanlara ayırma yöntemi, süpersimetrik kuantum mekaniği, Pöschl-Teller potansiyeli, hareket sabiti

## ABSTRACT

Master Thesis

### SPECTRUM GENERATING ALGEBRAS FOR SOME FACTORIZABLE SYSTEMS IN ONE DIMENSION: CLASSICAL AND QUANTUM MECHANICAL STUDY

Ebru ŞİMŞEK

Ankara University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Physics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Şengül KURU

In this work first the methods of supersymmetric quantum mechanics, including factorization method are reviewed briefly. The spectrum of harmonic oscillator, trigonometric and hyperbolic Pöschl-Teller potentials are obtained algebraically in quantum mechanics by using the factorization method and the spectrum generating algebras for these systems are constructed. The classical spectrum generating algebras are also set up, in a similar way, for the classical analogues of these potentials. Then, it is shown how the motion of these systems can also be solved algebraically in the frame of classical mechanics.

**June 2012, 35 sayfa**

**Key Words:** Spectrum generating algebra, factorization method, supersymmetric quantum mechanics methods, Pöschl-Teller potential, constant of motion

## TEŞEKKÜR

Tez alıŐmamn her aŐamasında sabır ve anlayıŐ gÖsteren, bilgi ve deneyimlerinden faydalandığım kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Őengöl KURU'ya (Ankara Üniwersitesi Fizik Anabilim Dalı) teŐekkürlerimi sunarım. Ayrıca Sayın tez hocamla tanışıp, çalıŐmama vesile olan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah VERÇİN'e (Ankara Üniwersitesi Fizik Anabilim Dalı), her konuda sürekli yanımda olan tez arkadaŐım Engin AŐLAR'a, maddi ve manevi yardımlarını hiç esirgemeyen aileme en içten teŐekkürleri bir borç bilirim.

Ebru ŞİMŞEK  
Ankara, Haziran 2012

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	vi
1. GİRİŞ .....	1
2. SÜPERSİMETRİK KUANTUM MEKANİĞİ .....	3
3. SÜPERSİMETRİK KUANTUM MEKANİĞİ YÖNTEMLERİ.....	5
3.1 Darboux Dönüşümü .....	5
3.2 Bağlaştırım Yöntemi .....	6
3.3 Şekil Değişmez Potansiyeller .....	7
3.4 Çarpanlara Ayırma Yöntemi .....	7
4. HARMONİK SALINICI .....	11
4.1 Kuantum Mekaniksel İnceleme .....	11
4.2 Klasik Mekaniksel İnceleme.....	13
5. TRİGONOMETRİK PÖSCHL-TELLER POTANSİYELİ .....	16
5.1 Kuantum Mekaniksel İnceleme .....	16
5.1.1 Faktör işlemcileri .....	16
5.1.2 Ladder işlemcileri.....	19
5.2 Klasik Mekaniksel İnceleme.....	21
6. HİPERBOLİK PÖSCHL-TELLER POTANSİYELİ .....	24
6.1 Kuantum Mekaniksel İnceleme .....	24
6.1.1 Faktör işlemcileri .....	24
6.1.2 Ladder işlemcileri.....	27
6.2 Klasik Mekaniksel İnceleme.....	29
7. TARTIŞMA VE SONUÇ .....	32
KAYNAKLAR .....	33
ÖZGEÇMİŞ.....	35

## SİMGELER DİZİNİ

$\hat{Q}$	Süperyük işlemcisi
$\hat{H}$	Hamiltoniyen işlemcisi
$H$	Hamiltoniyen fonksiyonu
$W(x)$	Süperpotansiyel
$\hat{L}$	Bağlaştırım işlemcisi
$\hat{A}^\pm$	Faktör işlemcileri
$\hat{B}^\pm$	Ladder işlemcileri
$\hat{N}$	Sayı işlemcisi
$Q^\pm$	Zamana bağlı hareket sabitleri

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 Üç süpersimetrik eş potansiyelin enerji düzeyleri .....	10
Şekil 4.1 Harmonik salıncı potansiyeli .....	11
Şekil 4.2 Harmonik salıncı için faz yörüngeleri .....	15
Şekil 5.1 Farklı $\ell$ parametreleri için trigonometrik PT potansiyeli .....	16
Şekil 5.2 Trigonometrik PT potansiyeli için faz yörüngeleri.....	23
Şekil 6.1 Farklı $\ell$ parametreleri için hiperbolik PT potansiyeli .....	24
Şekil 6.2 Hiperbolik PT potansiyeli için faz yörüngeleri.....	31

## 1. GİRİŞ

Fizikte simetriler, hem klasik hem de kuantum mekaniksel sistemlerin anlaşılmasını kolaylaştırırlar. Noether teoreminin sonucuna göre bir fiziksel sistemle ilgili korunan nicelikler sistemin simetrisi ile ilişkilidir. Korunan nicelikler Hamiltoniyeni değişmez bırakan dönüşümlerin üretici fonksiyonlarıdır ve bu nicelikler sistemin simetri cebri oluştururlar. Genel olarak sistemin simetrisinin bilinmesi problemin anlaşılmasını kolaylaştırdığı gibi bazen de problemin tam olarak çözülmesine izin verir.

Kuantum mekaniğinde bir fiziksel sistemin altında yatan cebirlerin bilinmesi, o sisteme karşı gelen Schrödinger denklemini çözmeye gerek kalmadan spektrumun cebirsel olarak bulunmasında kolaylık sağlar. Sistemin tüm özfonksiyon ve özdeğerlerinin bulunmasını sağlayan cebirler spektrum üreten cebir olarak bilinir. Bir Hamiltoniyen hiyerarşisi içindeki potansiyellerin spektrumunu belirleyen cebirler de potansiyel cebri olarak adlandırılır. Sistemle ilgili tüm bilgileri yani spektrumu, varsa dejenerelikleri, saçılma durumlarını içeren cebirler de sistemin dinamik cebri olarak adlandırılır. Klasik sistemler için de kuantum mekaniğindeki benzer olarak spektrum üreten cebirler kurulabilir ve bu cebirler yardımıyla sistem cebirsel olarak çözülebilir.

Süpersimetri 1971 yılında Gel'fand, Likhman, Ramond, Neveu ve Schwartz tarafından keşfedilmiş olup bozonları fermiyonlara, fermiyonları bozonlara dönüştüren bir simetridir. Süpersimetrinin fiziğin birçok alanında uygulaması vardır. 1981 yılında Witten, yaptığı çalışmalar sonucu süpersimetrik kuantum mekaniğini bir model olarak ileri sürmüştür (Junker 1996). Daha sonra süpersimetrik kuantum mekaniği kuramsal fiziğin pek çok alanında uygulanmaya başlamıştır. Örneğin, nükleer fizikte saçılma problemlerinde ve yoğun madde fiziğinde ise çözümü bilinen bir Hamiltoniyenden başlanarak yeni çözülebilir Hamiltoniyenler elde etmede kullanılmaktadır.

Süpersimetrik kuantum mekaniğinde süperyük işlemcileri bir matris Hamiltoniyenin aynı enerjili iki dik özfonksiyonu arasında dönüşüm üretir (Junker 1996, Sukumar 1996 ve Cooper 2001). Darboux dönüşümü, bağlaştırm (intertwining) yöntemi, şekil değişmez potansiyeller ve çarpanlara ayırma yöntemi süpersimetrik kuantum mekaniği



yöntemleri olarak bilinirler. Darboux dönüşümü çözümü bilinen bir problemten başlayarak, tam olarak çözülebilen problemlerin hiyerarşisini kurmak ve çizgisel olmayan denklemlerin çözümlerini elde etmek için kullanılan bir yöntemdir. Darboux dönüşümü ilk olarak 1882’de G. Darboux tarafından ileri sürülmüştür (Matveev ve Salle 1990). Bağlaştırım yöntemi, tam olarak çözülebilen çizgisel ve çizgisel olmayan problemler ile bunların hiyerarşilerini kurmak için kullanılan bir yöntemdir (Kuru 2004). İlk olarak 1982’de Gendenshtein tarafından ortaya atılmış olan şekil değişmez potansiyeller şekilleri aynı, sadece bağlı oldukları parametreleri farklı olan süpersimetrik eş potansiyellerdir (Cooper 2001). Çarpanlara ayırma yöntemi ise, hemen hemen eş spektrumlu tam olarak çözülebilen Hamiltoniyenlerin hiyerarşisini kurmada ve bu hiyerarşideki tüm Hamiltoniyenlerin özdeğerlerini ve özfonksiyonlarını bulmada kullanılır (Junker 1996, Sukumar 1996, Cooper 2001 ve Dong 2010). Bu yöntem ilk olarak Schrödinger tarafından Hidrojen atomunu cebirsel olarak çözmek için ortaya atılmış ve daha sonra Infeld ve Hull tarafından çözülebilir potansiyelleri elde etmek için kullanılmıştır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemleri kısaca gözden geçirilmiştir. Daha sonra harmonik salıncı ve 1830 yılında Herta Pöschl ve Edward Teller tarafından ortaya atılan ve molekül titreşimlerini tanımlayan Pöschl-Teller (PT) potansiyelleri hem kuantum mekaniği hem de klasik mekanik çerçevesinde ele alınmıştır. Bu problemler için hareket, karşı gelen diferansiyel denklemler doğrudan çözümlenerek belirlenebilir (Flüge 1994). Ancak, bu çalışmada süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemlerinden çarpanlara ayırma yöntemi kullanılarak bu sistemlerin spektrumları belirlenmiştir. Ayrıca bu sistemlerin spektrum üreten cebirleri ve potansiyel cebirleri kurulmuştur (Cruz vd. 2008, Kuru ve Negro 2009, Dong 2010). Daha sonra kuantum mekaniksel inceleme bu sistemlerin klasik benzerlerine uygulanarak klasik spektrum üreten cebirler kurulmuş ve böylece bu sistemler klasik mekanik çerçevesinde de cebirsel olarak çözülmüştür (Kuru ve Negro 2008).

## 2. SÜPERSİMETRİK KUANTUM MEKANİĞİ

$\hat{H}$  Hamiltoniyeni ile belirlenen bir kuantum mekaniksel sistemi ele alalım.  $\hat{Q}_i$  süperyük işlemcilerinin varlığında,

$$\{\hat{Q}_i, \hat{Q}_j\} = \hat{H} \delta_{ij}, \quad [\hat{Q}_i, \hat{H}] = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

bağıntılarını sağlayan sistem,  $\{\hat{H}, \hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_N\}$ , süpersimetrik olarak adlandırılır. Burada  $[\cdot, \cdot]$  komütatör,  $\{\cdot, \cdot\}$  anti-komütatör,  $\hat{H}$  süpersimetrik Hamiltoniyen ve  $N$  süperyük işlemcilerinin sayısıdır. Bu süperyükler kendine-eşlenikdirler,  $\hat{Q}_i = \hat{Q}_i^\dagger$ . Süpersimetrik kuantum mekaniğinde kompleks süperyükler de tanımlanabilir:  $\hat{Q} = (\hat{Q}_1 + i\hat{Q}_2) / \sqrt{2}$  ve  $\hat{Q}^\dagger = (\hat{Q}_1 - i\hat{Q}_2) / \sqrt{2}$ . Bu süperyükler Hamiltoniyen işlemcisi ile birlikte

$$\hat{H} = \{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\} \quad (2.1)$$

şeklinde bir cebir kapatır. Burada  $\hat{Q}$ 'ler nilpotentdir:  $\hat{Q}^2 = 0$ ,  $\hat{Q}^{\dagger 2} = 0$ . Bu cebir aşağıdaki bağıntıları gerektirir

$$[\hat{Q}, \hat{H}] = 0, \quad [\hat{Q}^\dagger, \hat{H}] = 0$$

Kompleks süperyükler matris formunda

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A}^- & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \hat{A}^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

olarak tanımlanabilir. Burada  $\hat{A}^-$  bir işlemci ve  $\hat{A}^+$ 'da  $\hat{A}^-$ 'nin eşleniğidir:  $(\hat{A}^-)^\dagger = \hat{A}^+$ . Denklem (2.1) ve (2.2)'den yararlanarak süpersimetrik Hamiltoniyen,

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{A}^+ \hat{A}^- & 0 \\ 0 & \hat{A}^- \hat{A}^+ \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $\hat{A}^+ \hat{A}^-$  ve  $\hat{A}^- \hat{A}^+$  sırasıyla  $\hat{H}_0$  ve  $\hat{H}_1$  olarak adlandırılabilir.  $\hat{Q}$  ve  $\hat{Q}^\dagger$  süperyüklerinin  $\hat{H}$  Hamiltoniyenin öz durumları üzerine etkisi aşağıdaki gibidir:

$$\hat{Q} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{A}^- \alpha \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}^+ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Burada  $(\alpha, 0)^T$  'ler "bozonik" durumları,  $(0, \beta)^T$  'ler de "fermiyonik" durumları gösterir. Böylece  $\hat{Q}$  ve  $\hat{Q}^\dagger$  süperyükleri "bozonik" durumları "fermiyonik" durumlara, "fermiyonik" durumları da "bozonik" durumlara dönüştürürler. Ayrıca  $\hat{H}_0$  ve  $\hat{H}_1$  işlemcileri yarı-pozitif tanımlıdır. Yani bu işlemcilerin özdeğerleri sıfıra eşit veya sıfırdan büyüktür ( $E \geq 0$ ). Varsayalım ki,  $\hat{H}_0$  'ın  $E_0^n$  özdeğerli normalize özfonksiyonları  $\psi_0^n$  olsun,

$$\hat{A}^+ \hat{A}^- \psi_0^n = E_0^n \psi_0^n \quad (2.3)$$

$\psi_0^n$  'de alt indis Hamiltoniyeni, üst indis  $n=0,1,2,\dots$  ise enerji düzeyini göstermektedir.

Denklem (2.3) soldan  $\hat{A}^-$  ile çarpılırsa

$$\hat{A}^- \hat{A}^+ (\hat{A}^- \psi_0^n) = E_0^n (\hat{A}^- \psi_0^n)$$

bulunur. Bu denklemde  $\hat{A}^- \psi_0^n \neq 0$  ise,  $E_0^n$  aynı zamanda  $\hat{H}_1$  'in de bir özdeğeridir.

Böylece  $\psi_0^n$  'ler biliniyorsa  $\hat{H}_1$  Hamiltoniyenin normalize özfonksiyonları

$$\psi_1^n = \frac{1}{\sqrt{E_0^n}} (\hat{A}^- \psi_0^n)$$

denkleminde bulunabilir. Burada  $1/\sqrt{E_0^n}$  normalizasyon katsayısıdır. Benzer şekilde,

$\hat{H}_1$  'in  $E_1^n$  özdeğerli normalize özfonksiyonları  $\psi_1^n$  olsun,

$$\hat{A}^- \hat{A}^+ \psi_1^n = E_1^n \psi_1^n$$

Bu denklem soldan  $\hat{A}^+$  ile çarpılırsa

$$\hat{A}^+ \hat{A}^- (\hat{A}^+ \psi_1^n) = E_1^n (\hat{A}^+ \psi_1^n)$$

elde edilir. Bu denklemde  $\hat{A}^+ \psi_1^n \neq 0$  ise  $E_1^n$   $\hat{H}_0$  'ın da bir özdeğeridir ve  $\hat{H}_0$

Hamiltoniyenin normalize özfonksiyonları  $\psi_0^n$

$$\psi_0^n = \frac{1}{\sqrt{E_1^n}} (\hat{A}^+ \psi_1^n)$$

bağıntısı ile verilir.

### 3. SÜPERSİMETRİK KUANTUM MEKANİĞİ YÖNTEMLERİ

Süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemleri genel olarak, çözülebilir bir Hamiltoniyenden başlayarak çözülebilir potansiyeller hiyerarşisi kurmada ve bu potansiyellerin spektrumlarını elde etmede kullanılırlar. Süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemleri, Darboux dönüşümü, bağlaştırm, çarpanlara ayırma, şekil değişmez potansiyeller olarak sıralanabilir. Bu bölümde süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemleri kısaca ele alınacaktır.

#### 3.1 Darboux Dönüşümü

Darboux dönüşümü çözümü bilinen bir problemde başlayarak, tam olarak çözülebilen problemlerin hiyerarşisini kurmak ve çizgisel olmayan denklemlerin çözümlerini elde etmek için kullanılan bir yöntemdir.

Aşağıdaki gibi verilen Sturm-Liouville denklemini ele alalım:

$$-\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi \quad (3.1)$$

Bu denklemin  $\lambda_1$  özdeğerine karşı gelen çözümü  $\psi_1$  olsun. Burada ve bundan sonra alt

indis, fonksiyonun argümanına göre türevini gösterecektir:  $\psi_x \equiv \frac{d\psi}{dx}$ ,  $\psi_{xx} \equiv \frac{d^2\psi}{dx^2}$ .

Denklemin (3.1)'in keyfi bir çözümü için  $\psi_1 = \psi_1(x, \lambda_1)$  çözümünün ürettiği Darboux dönüşümü,

$$\psi[1] = \left( \frac{d}{dx} - \sigma_1 \right) \psi = \psi_x - \frac{\psi_{1x}}{\psi_1} \psi = \frac{W(\psi_1, \psi)}{\psi_1} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\sigma = \psi_{1x} / \psi_1$  ve  $W(\psi_1, \psi) = \psi_1 \psi_x - \psi_{1x} \psi$  Wronskian determinantıdır. Eğer  $W(\psi_1, \psi) \neq 0$  ise,  $\psi_1$  ve  $\psi$  çizgisel bağımsız çözümlerdir.

Darboux dönüşmüş  $\psi[1]$  fonksiyonu Sturm-Liouville denklemini sağlar:

$$-\psi_{xx}[1] + u[1]\psi[1] = \lambda\psi[1]$$

Burada  $u[1]$  ise,

$$u[1] = u - 2\sigma_{1x} = u - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_1 \quad (3.3)$$

şeklinde dönüşür. Darboux dönüşümü, Sturm-Liouville denklemini form değişmez (kovaryant) bırakan bir dönüşümdür. Darboux dönüşümü ard arda uygulanarak yeni çözülebilen Sturm-Liouville denklemleri elde edilir. Darboux dönüşümünün N defa uygulanmasıyla elde edilen dönüşüm Crum dönüşümü olarak adlandırılır (Matveev ve Salle 1990).

### 3.2 Bağlaştırım Yöntemi

Bağlaştırım yöntemi, tam olarak çözülebilen çizgisel ve çizgisel olmayan problemler ile bunların hiyerarşilerini kurmak için kullanılan bir yöntemdir.  $\hat{H}_0$  ve  $\hat{H}_1$  Hermitik Hamiltoniyen işlemcileri,  $\hat{L}$  bağlaştırım işlemcisi ile aşağıdaki şekilde ilişkilendirilebilir:

$$\hat{L}\hat{H}_0 = \hat{H}_1\hat{L} \quad (3.4)$$

Burada  $\hat{L}$  bağlaştırım işlemcisi çizgisel diferansiyel işlemcidir. Bağlaştırım yönteminin üç temel özelliği şu şekilde sıralanabilir.

i)  $\psi_0^n$ ,  $\hat{H}_0$ 'ın  $E_0^n$  özdeğerli özfonksiyonu ise,  $\psi_1^n = \hat{L}\psi_0^n$ 'de  $\hat{H}_1$ 'in  $E_0^n$  özdeğerli bir özfonksiyonudur.  $\hat{H}_0$  ve  $\hat{H}_1$  için Schrödinger denklemleri

$$\hat{H}_0\psi_0^n = E_0^n\psi_0^n \quad (3.5)$$

$$\hat{H}_1\psi_1^n = E_1^n\psi_1^n \quad (3.6)$$

ile verilir.  $\hat{L}$  bağlaştırım işlemcisi Denk. (3.5)'e uygulanıp

$$\hat{L}\hat{H}_0\psi_0^n = \hat{L}E_0^n\psi_0^n$$

Denk. (3.4) ile verilen bağlaştırım bağıntısı kullanılırsa,

$$\hat{H}_1(\hat{L}\psi_0^n) = E_0^n(\hat{L}\psi_0^n)$$

eşitliği elde edilir. Yani  $\psi_1^n = \hat{L}\psi_0^n$ ,  $\hat{H}_1$ 'in  $E_0^n$  özdeğerli bir özfonksiyonudur.

ii)  $\hat{L}^\dagger$ ,  $\hat{L}$ 'nin tersi doğrultusunda bağlantırım yapar:  $\hat{H}_0 \hat{L}^\dagger = \hat{L}^\dagger \hat{H}_1$ . Bu bağıntı ve Denk. (3.4) ile verilen bağlantırım bağıntısı  $\hat{H}_0$  ve  $\hat{H}_1$  için iki gizli dinamik simetri işlemcisini verir:

$$[\hat{H}_0, \hat{L}^\dagger \hat{L}] = 0 = [\hat{H}_1, \hat{L} \hat{L}^\dagger]$$

iii)  $\hat{H}_1$ ,  $\hat{H}_0$  ve  $\hat{H}_2$  Hamiltoniyen işlemcileri için bağlantırım bağıntıları,

$$\hat{L}_{10} \hat{H}_0 = \hat{H}_1 \hat{L}_{10}, \quad \hat{H}_0 \hat{L}_{10}^\dagger = \hat{L}_{10}^\dagger \hat{H}_1, \quad \hat{L}_{21} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \hat{L}_{21}, \quad \hat{H}_1 \hat{L}_{21}^\dagger = \hat{L}_{21}^\dagger \hat{H}_2$$

şeklindedir. Eğer  $\hat{H}_1$ 'in ek simetri işlemcisi  $\hat{Z}_1$  ise,  $[\hat{H}_1, \hat{Z}_1] = 0$ 'dır ve

$$\hat{Z}_0 = \hat{L}_{10}^\dagger \hat{Z}_1 \hat{L}_{10}$$

$$\hat{Z}_2 = \hat{L}_{21}^\dagger \hat{Z}_1 \hat{L}_{21}$$

sırasıyla  $\hat{H}_0$  ve  $\hat{H}_2$ 'nin yeni simetri işlemcileridir. Bu özellikler boyut ve formdan bağımsızdır (Kuru 2004).

### 3.3 Şekil Değişmez Potansiyeller

Şekilleri aynı, sadece bağlı oldukları parametreleri farklı olan süperes potansiyellere şekil değişmez potansiyeller denir. Matematiksel olarak,  $V_{1,2}(x, a_1)$  eş potansiyelleri,

$$R(a_1) = V_2(x, a_1) - V_1(x, a_2)$$

şeklindedir. Burada  $a_1$  parametrelerin kümesini,  $a_2$  de  $a_1$ 'in bir fonksiyonunu göstermektedir.  $R(a_1)$   $x$ 'den bağımsız olmak üzere  $V_1(x, a_1)$  ve  $V_2(x, a_2)$  şekil değişmez potansiyellerdir (Cooper vd. 2001).

### 3.4 Çarpanlara Ayırma Yöntemi

Çarpanlara ayırma yöntemiyle hemen hemen eş spektrumlu tam olarak çözülebilen Hamiltoniyenlerin hiyerarşisi kurulabilir. Bu yöntem ile hiyerarşideki tüm Hamiltoniyenlerin özdeğerleri ve özfonksiyonları ya tam olarak çözülebilen bir Hamiltoniyenden ya da hiyerarşideki tüm Hamiltoniyenler için taban durum dalga fonksiyonlarından başlanarak bulunabilir.

Tek parçacık için Hamiltoniyen işlemcisi,

$$\hat{H}_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (3.7)$$

şeklindedir.  $\hat{H}_1$ 'in taban durum enerjisi  $E_1^0=0$  ise, taban durum dalga fonksiyonu  $\psi_1^0(x)$  için Schrödinger denklemi aşağıdaki gibidir:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_1^0}{dx^2} + V_1(x) \psi_1^0(x) = 0$$

Buradan potansiyel,

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi_1^0(x)} \frac{d^2 \psi_1^0(x)}{dx^2}$$

şeklinde bulunur.  $\hat{H}_1$  Hamiltoniyeni, türeve göre birinci mertebeden iki tane işlemcinin çarpımı olarak ifade edilebilir:

$$\hat{H}_1 = \hat{A}_1^+ \hat{A}_1^- \quad (3.8)$$

Burada,

$$\hat{A}_1^- = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (3.9)$$

$$\hat{A}_1^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (3.10)$$

olup,  $W(x)$  süperpotansiyel olarak adlandırılır. Denklem (3.9) ve (3.10) ile verilen  $\hat{A}_1^\pm$  Denk. (3.8)'de yerine yazılırsa  $V_1(x)$  potansiyeli, süperpotansiyel cinsinden

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W_x(x) \quad (3.11)$$

olarak elde edilir. Denklem (3.11)  $W(x)$  için bir Riccati denklemdir.  $\hat{A}_1^- \psi_1^0 = 0$  taban durum dalga fonksiyonunu verir ve süperpotansiyel de  $\psi_1^0$  cinsinden

$$W(x) = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\psi_{1x}^0}{\psi_1^0} \quad (3.12)$$

şeklinde ifade edilir.

$\hat{H}_1$  Hamiltoniyeni ile ilişkili,

$$\hat{H}_2 = \hat{A}_1^- \hat{A}_1^+ \quad (3.13)$$

şeklinde yeni bir Hamiltoniyen işlemcisi tanımlanabilir. Bu yeni Hamiltoniyen,

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{2m} W_x(x) \quad (3.14)$$

olmak üzere,

$$\hat{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad (3.15)$$

olarak yazılır. Denklem (3.11) ve (3.14) ile verilen  $V_1(x)$  ve  $V_2(x)$  potansiyelleri süpersimetrik eş potansiyeller ya da kısaca süpereş potansiyeller olarak adlandırılır. Bu Hamiltoniyenlerin özdeğerleri ve özfonksiyonları birbirleri ile ilişkilidir. Bu ilişki aşağıdaki adımlar izlenerek kolayca görülür.  $\hat{H}_1$  için Schrödinger denklemi,

$$\hat{H}_1 \psi_1^n = \hat{A}_1^+ \hat{A}_1^- \psi_1^n = E_1^n \psi_1^n \quad (3.16)$$

şeklindedir. Denklem (3.16)'ya soldan  $\hat{A}_1^-$  etki ederse,

$$\hat{A}_1^- \hat{A}_1^+ \hat{A}_1^- \psi_1^n = \hat{H}_2 (\hat{A}_1^- \psi_1^n) = E_1^n (\hat{A}_1^- \psi_1^n) \quad (3.17)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde  $\hat{H}_2$  için Schrödinger denklemi,

$$\hat{H}_2 \psi_2^n = \hat{A}_1^- \hat{A}_1^+ \psi_2^n = E_2^n \psi_2^n \quad (3.18)$$

ile verilir ve bu da

$$\hat{A}_1^+ \hat{A}_1^- \hat{A}_1^+ \psi_2^n = \hat{H}_1 (\hat{A}_1^+ \psi_2^n) = E_2^n (\hat{A}_1^+ \psi_2^n) \quad (3.19)$$

eşitliğini gerektirir.  $E_1^0 = 0$  için  $\hat{H}_1$  ve  $\hat{H}_2$  'nin özdeğerleri ve özfonksiyonları arasındaki ilişki, (3.16) - (3.19) yardımıyla

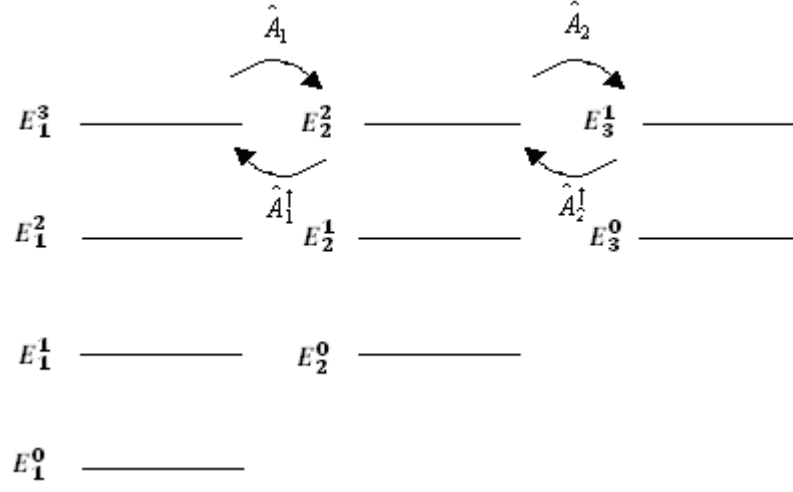
$$\begin{aligned} E_2^n &= E_1^{n+1} \\ \psi_2^n &= (E_1^{n+1})^{-1/2} \hat{A}_1^- \psi_1^{n+1} \\ \psi_1^{n+1} &= (E_2^n)^{-1/2} \hat{A}_1^+ \psi_2^n \end{aligned}$$

şeklinde bulunur (Cooper vd. 2001).

$\hat{H}_2$  Hamiltoniyen işlemcisi,  $\hat{A}_2^\pm$  işlemcileri cinsinden tekrar çarpanlarına ayrılabilir ve  $\hat{H}_2$  'nin süpereşi olan bir başka  $\hat{H}_3$  Hamiltoniyen işlemcisi bulunur.  $\hat{H}_3$  'ün özdeğerleri de benzer olarak elde edilir:  $E_3^n = E_2^{n+1} = E_1^{n+2}$ . Böylece her yeni Hamiltoniyen işlemcisi



bir tane daha az enerji düzeyine sahip olur. Şekil 3.1’de üç tane süpersimetrik eş potansiyelin enerji düzeyleri arasındaki ilişki görülmektedir.

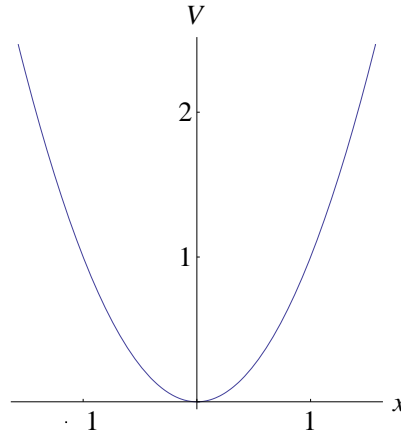


Şekil 3.1 Üç süpersimetrik eş potansiyelin enerji düzeyleri

## 4. HARMONİK SALINICI

Harmonik salıncı problemi hem klasik mekanikte hem de kuantum mekaniğinde tam olarak çözülebilen önemli bir problemdir. Moleküllerde, kristallerin örgü titreşimlerinin incelenmesinde ve bir kovuk içindeki elektromanyetik ışımının kuantum mekaniksel incelenmesi gibi fiziğin bir çok alanında uygulaması vardır. Genel olarak, harmonik salıncının özdeğer problemini çözmek için iki yöntem vardır. Bunlardan ilki, karşı gelen diferansiyel denklemin doğrudan çözülmesine dayanan analitik yöntem, ikincisi ise daha basit ve şık olan cebirsel yöntemdir.

Bu bölümde harmonik salıncı potansiyeli hem kuantum mekaniksel hem de klasik olarak ele alınacaktır. Şekil 4.1’de harmonik salıncı potansiyeli görülmektedir. Her iki durumda da harmonik salıncı potansiyeli için spektrum üreten cebirler kurularak problemler cebirsel olarak çözülecektir.



Şekil 4.1 Harmonik salıncı potansiyeli

### 4.1 Kuantum Mekaniksel İnceleme

Bir boyutta Harmonik salıncı potansiyeli için Hamiltoniyen işlemcisi

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

şeklindedir. Burada  $m$  kütleyi ve  $\omega$  açısal frekansı göstermektedir.  $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$  ve  $\hat{x}$  de sırasıyla momentum ve konum işlemcileridir. Bu işlemciler  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$  bağıntısını sağlarlar. Hamiltoniyen işlemcisi boyutsuz  $\hat{a}$  ve  $\hat{a}^+$  işlemcileri cinsinden çarpanlarına ayrılabilir:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.1)$$

Burada  $\hat{a}$  ve  $\hat{a}^+$  işlemcileri

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx} \right), \quad \hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx} \right) \quad (4.2)$$

şeklinde verilirler (Dereli ve Verçin 2009). Ayrıca sayı işlemcisi  $\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$  olarak tanımlanır. Böylece Denk. (4.1) aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.3)$$

Denklem (4.3)'den de görüldüğü gibi Hamiltoniyen işlemcisi ile sayı işlemcisi birbirleriyle sıra değiştirir:  $[\hat{H}, \hat{N}] = 0$  ve bu işlemciler ortak özfonksiyonlara sahiptir

$$\begin{aligned} \hat{H} \psi^n &= E^n \psi^n \\ \hat{N} \psi^n &= n \psi^n \end{aligned}$$

Böylece Denk. (4.3) ile verilen Hamiltoniyen işlemcisinin  $\psi^n$  özfonksiyonları üzerine etkisinden enerji özdeğerleri

$$E^n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

olarak bulunur.  $\hat{a}$  ve  $\hat{a}^+$  işlemcilerinin  $\psi^n$  özfonksiyonları üzerine etkileri

$$\begin{aligned} \hat{a} \psi^n &= \sqrt{n} \psi^{n-1} \\ \hat{a}^+ \psi^n &= \sqrt{n+1} \psi^{n+1} \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu bağıntılardan  $\hat{a}$  ve  $\hat{a}^+$  işlemcilerinin sırasıyla yokedicisi ve yaratıcısı işlemciler olduğu açıkça görülür.

Taban durum dalga fonksiyonu,  $\hat{a} \psi^0 = 0$ 'dan  $\psi^0 = N_x^0 e^{-m\omega x^2/2\hbar}$  olarak bulunur.  $N_x^0$  normalizasyon katsayısı

$$N_x^0 = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4}$$

ile verilir. Uyarılmış durumlar ise taban durumu dalga fonksiyonuna  $\hat{a}^+$  işlemcileri ard arda uygulanarak bulunabilir:

$$\psi^n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n \psi^0$$

Denklem (4.2) ile verilen yokedici ve yaratıcı işlemciler, (4.1) ile verilen Hamiltoniyen işlemcisi ile birlikte

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1, \quad [\hat{H}, \hat{a}^\pm] = \pm \hbar\omega \hat{a}^\pm$$

salıncı cebirini sağlarlar (Dereli ve Verçin 2009).

## 4.2 Klasik Mekaniksel İnceleme

Harmonik salıncı için Hamiltoniyen fonksiyonu

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (4.4)$$

şeklindedir. Burada  $m$  kütle,  $p$  ve  $x$  de kanonik koordinatları göstermektedir. Harmonik salıncı potansiyeli  $V(x) = \beta x^2 + \gamma_0$  olarak alınabilir. Burada  $\beta$  ve  $\gamma_0$  sabitlerdir. Hamiltoniyen fonksiyonu kuantum mekaniksel incelemede olduğu gibi çarpanlarına ayrılabilir (Kuru ve Negro 2008):

$$H = B^+ B^- + \gamma_0 \quad (4.5)$$

Ancak, bu durumda  $B^\pm$ 'ler birbirinin kompleks eşleniği olan iki fonksiyondur ve

$$B^\pm = \mp \frac{ip}{\sqrt{2m}} + \sqrt{\beta} x \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlıdır.  $B^\pm$ 'ler Denk. (4.5)'de yerine yazılırsa, Denk. (4.4)'ün sağlandığı açıktır.

$B^\pm$  fonksiyonları Hamiltoniyen fonksiyonu ile birlikte aşağıdaki klasik salıncı cebirini sağlarlar:

$$\{H, B^\pm\} = \mp i \sqrt{\frac{2\beta}{m}} B^\pm, \quad \{B^+, B^-\} = i \sqrt{\frac{2\beta}{m}} \quad (4.7)$$

Burada  $\{, \}$  Poisson parantezi olup,  $\{x, p\}=1$  'dir. Bu cebir kuantum mekaniksel salıncı cebrine çok benzerdir. Bu benzerlik, Denk. (4.7) ile verilen cebirde fonksiyonlar yerine işlemciler ve Poisson parantezi  $\{, \}$  yerine de,  $-i[,]$  alınarak kolayca görülebilir.

Denklem (4.7) ile verilen cebir aşağıdaki gibi zamana bağlı hareket sabitleri, tanımlamaya izin verir (Kuru ve Negro 2008):

$$Q^\pm = B^\pm e^{\mp i \sqrt{\frac{2\beta}{m}} t}$$

$Q^\pm$  'lerin hareket sabiti olduğu

$$\frac{dQ^\pm}{dt} = \{Q^\pm, H\} + \frac{\partial Q^\pm}{\partial t} = 0 \quad (4.8)$$

bağıntısından kolayca görülür (Goldstein 2001). Bu hareket sabitlerinin değerleri genel olarak

$$Q^\pm = B^\pm e^{\mp i \sqrt{\frac{2\beta}{m}} t} = q_0 e^{\pm i \theta_0}, \quad q_0 = \sqrt{E - \gamma_0} \quad (4.9)$$

şeklinde alınabilir. Hamiltoniyen zamana açıkça bağlı olmadığından bir hareket sabitidir ve bu da sistemin toplam enerjisidir,  $E$ . Denklem (4.9) düzenlenirse

$$B^+ = q_0 e^{i(\sqrt{\frac{2\beta}{m}} t + \theta_0)}, \quad B^- = q_0 e^{-i(\sqrt{\frac{2\beta}{m}} t + \theta_0)} \quad (4.10)$$

eşitlikleri elde edilir. Denklem (4.6)'daki  $B^\pm$  fonksiyonlarının açık ifadeleri Denk. (4.10)'da yerine yazılırsa

$$-\frac{ip}{\sqrt{2m}} + \sqrt{\beta} x = \sqrt{E - \gamma_0} e^{i(\sqrt{\frac{2\beta}{m}} t + \theta_0)} \quad (4.11)$$

$$\frac{ip}{\sqrt{2m}} + \sqrt{\beta} x = \sqrt{E - \gamma_0} e^{-i(\sqrt{\frac{2\beta}{m}} t + \theta_0)} \quad (4.12)$$

ifadelerine ulaşılır. Bulunan (4.11) ve (4.12) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

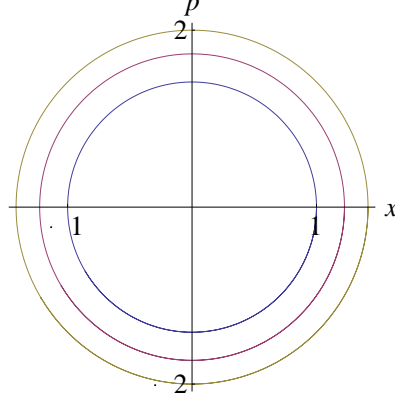
$$x(t) = \sqrt{\frac{E - \gamma_0}{\beta}} \cos\left(\sqrt{\frac{2\beta}{m}} t + \theta_0\right) \quad (4.13)$$

ve taraf tarafa çıkarılırsa

$$p(t) = -\sqrt{2m(E - \gamma_0)} \sin\left(\sqrt{\frac{2\beta}{m}} t + \theta_0\right) \quad (4.14)$$

bilinen kanonik koordinatlar bulunur (Goldstein 2001, Kuru ve Negro 2008). Denklem (4.13) ve (4.14) ile verilen kanonik koordinatlara karşı gelen faz yörüngeleri şekil 4.2'de görüldüğü gibi kapalıdır ve hareketin periyodu enerjiden bağımsızdır,

$$\omega = \sqrt{2\beta / m} .$$



Şekil 4.2 Harmonik salıncı için faz yörüngeleri

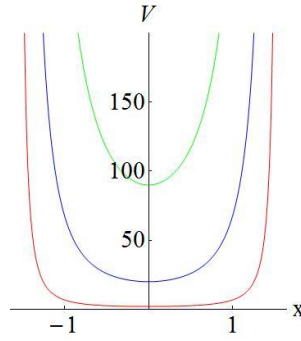
## 5. TRİGONOMETRİK PÖSCHL-TELLER POTANSİYELİ

Bu bölümde klasik ve kuantum mekaniksel trigonometrik PT potansiyeli için spektrum üreten cebirler kurulacak ve her iki durumda da problem cebirsel olarak çözülecektir.

Trigonometrik PT potansiyeli

$$V_\ell = \frac{\ell(\ell-1)}{\cos^2 x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad (5.1)$$

ile verilir. Burada  $\ell$  potansiyel parametresidir ve  $\ell > 1$ 'dir. Şekil 5.1'de, Süpersimetrik kuantum mekaniğindeki şekil değişmez potansiyellere örnek olan trigonometrik PT potansiyelinin farklı  $\ell$  parametreleri için grafikleri görülmektedir.



Şekil 5.1 Farklı  $\ell$  parametreleri için trigonometrik PT potansiyeli

### 5.1 Kuantum Mekaniksel İnceleme

#### 5.1.1 Faktör işlemcileri

Trigonometrik PT potansiyeline karşı gelen Hamiltoniyen hiyerarşisi ve hiyerarşideki tüm Hamiltoniyenler için enerji özdeğerleri ve özfonksiyonları çarpanlarına ayırma yöntemi ile bulunabilir. Bu PT potansiyeline karşı gelen Hamiltoniyen işlemcisi

$$\hat{H}_\ell = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\ell(\ell-1)}{\cos^2 x} \quad (5.2)$$

şeklinindedir. Burada kolaylık olsun diye  $\hbar = 2m = 1$  alınmıştır. Bu Hamiltoniyen işlemcisi çarpanlarına aşağıdaki şekilde ayrılabilir:

$$\hat{H}_\ell = \hat{A}_\ell^+ \hat{A}_\ell^- + \lambda_\ell \quad (5.3)$$

Burada türeve göre birinci mertebeden  $\hat{A}_\ell^\pm$  işlemcileri

$$\hat{A}_\ell^\pm = \mp \frac{d}{dx} + F_\ell(x) \quad (5.4)$$

olarak seçilebilir.  $A_\ell^\pm$ 'ler Denk. (5.3)'de yerlerine yazılıp, Denk. (5.2) ile eşitlenirse aşağıdaki Riccati denklemi elde edilir:

$$F_\ell^2(x) - F_\ell'(x) + \lambda_\ell = \frac{\ell(\ell-1)}{\cos^2 x} \quad (5.5)$$

Bu denklemden  $F_\ell = \ell \tan x$  ve  $\lambda_\ell = E_\ell^0 = \ell^2$  olarak bulunur. Böylece, bu potansiyel için faktör işlemcileri

$$\hat{A}_\ell^\pm = \mp \frac{d}{dx} + \ell \tan x$$

şeklinde elde edilir. Bu işlemcilerin ters sıradaki çarpımı potansiyel hiyerarşisini bulmaya izin verir,

$$\hat{H}_\ell = \hat{A}_{\ell-1}^- \hat{A}_{\ell-1}^+ + \lambda_{\ell-1} = \hat{A}_\ell^+ \hat{A}_\ell^- + \lambda_\ell \quad (5.6)$$

Bu hiyerarşiden, bağlantım bağıntıları

$$\hat{A}_\ell^- \hat{H}_\ell = \hat{H}_{\ell+1} \hat{A}_\ell^-, \quad \hat{A}_\ell^+ \hat{H}_{\ell+1} = \hat{H}_\ell \hat{A}_\ell^+$$

olarak yazılır. Buradan da görüldüğü gibi  $\hat{A}_\ell^\pm$  işlemcileri aynı enerjili durumları birbirleri ile ilişkilendirirler. Yani  $\hat{H}_\ell$  Hamiltoniyenin bir özfonksiyonu biliniyorsa, bu özfonksiyona  $\hat{A}_\ell^-$  işlemcisi uygulanarak  $\hat{H}_{\ell+1}$  Hamiltoniyenin aynı enerjili özfonksiyonları elde edilebildiği gibi tersine  $\hat{A}_\ell^+$  işlemcisi  $\hat{H}_{\ell+1}$ 'in özfonksiyonlarına uygulanarak  $\hat{H}_\ell$ 'nin aynı enerjili özfonksiyonları elde edilir:

$$\hat{A}_{\ell+1}^+ \psi_{\ell+1}^{n-1} = N \psi_\ell^n \quad (5.7)$$

$$\hat{A}_\ell^- \psi_\ell^n = N \psi_{\ell+1}^{n-1} \quad (5.8)$$

Burada  $n=0,1,2,\dots$  değerlerini alır.  $\hat{A}_\ell^\pm$ 'ler birbirlerinin Hermitik eşleniği olduklarından  $\hat{A}_\ell^+ = (\hat{A}_\ell^-)^\dagger$ , Denk. (5.7)'deki  $N$  katsayısı özfonksiyonların normalizasyonundan

$$\begin{aligned} N^2 \langle \psi_\ell^n | \psi_\ell^n \rangle &= \langle \hat{A}_\ell^+ \psi_{\ell+1}^{n-1} | \hat{A}_\ell^+ \psi_{\ell+1}^{n-1} \rangle = \langle \psi_{\ell+1}^{n-1} | \hat{A}_\ell^- \hat{A}_\ell^+ \psi_{\ell+1}^{n-1} \rangle \\ N^2 &= \langle \psi_{\ell+1}^{n-1} | (\hat{H}_{\ell+1} - \lambda_\ell) \psi_{\ell+1}^{n-1} \rangle = E_{\ell+1}^{n-1} - \lambda_\ell = [(\ell+n)^2 - \ell^2] \\ N &= \sqrt{(2\ell+n)n} \end{aligned}$$



olarak bulunur. Burada  $\langle \psi_\ell^n | \psi_\ell^n \rangle = 1$ 'dir. Yani, özfonksiyonlar bire normalizedir. Benzer şekilde Denk. (5.8)'deki  $N$  katsayısı da bulunarak,  $\hat{A}_\ell^\pm$ 'lerin normalize özfonksiyonlar üzerindeki etkileri

$$\hat{A}_\ell^+ \psi_{\ell+1}^{n-1} = \sqrt{(2\ell+n)n} \psi_\ell^n, \quad \hat{A}_\ell^- \psi_\ell^n = \sqrt{(2\ell+n)n} \psi_{\ell+1}^{n-1}$$

şeklinde elde edilir.

$\hat{A}^- \psi_\ell^0 = 0$  bağıntısından taban durum dalga fonksiyonu  $\psi_\ell^0 = N_\ell^0 \cos^\ell x$  olarak bulunur.

Burada  $N_\ell^0$  normalizasyon katsayısı

$$N_\ell^0 = \sqrt{\frac{2\Gamma(\ell+1)}{\pi^{1/2} \Gamma(\ell+1/2)}} \quad (5.9)$$

ile verilir. Enerji özdeğerleri  $E_\ell^n = E_{\ell+1}^{n-1} = \dots = E_{\ell+n}^0 = (\ell+n)^2$  şeklindedir.  $E_\ell^n$  enerjili duruma karşı gelen  $\psi_\ell^n$  özfonksiyonu ise

$$\psi_\ell^n = N_\ell^n \hat{A}_\ell^+ \hat{A}_{\ell+1}^+ \dots \hat{A}_{\ell+n-1}^+ \psi_{\ell+n}^0 \quad (5.10)$$

bağıntısından bulunur. Burada  $N_\ell^n$  normalizasyon katsayısıdır. Taban durum dalga fonksiyonuna  $\hat{A}_\ell^+$  işlemcileri ard arda uygulanarak normalizasyon katsayısı aşağıdaki gibi bulunur (Cruz, Kuru ve Negro 2008, Kuru ve Negro 2009):

$$N_\ell^n = \sqrt{\frac{\Gamma(2(\ell+n)-n)}{n! \Gamma(2(\ell+n))}}$$

Şimdi, özfonksiyonlar üzerine etki eden indissiz işlemciler tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} \hat{A}^+ \psi_{\ell+1}^{n-1} &\equiv \hat{A}_\ell^+ \psi_{\ell+1}^{n-1} \\ \hat{A}^- \psi_\ell^n &\equiv \hat{A}_\ell^- \psi_\ell^n \end{aligned}$$

Bu işlemcilerin sıra değişimi

$$\begin{aligned} [\hat{A}^+, \hat{A}^-] \psi_\ell^n &= (\hat{A}_\ell^+ \hat{A}_\ell^- - \hat{A}_{\ell-1}^- \hat{A}_{\ell-1}^+) \psi_\ell^n \\ &= [(\hat{H}_\ell - \lambda_\ell) - (\hat{H}_\ell - \lambda_{\ell-1})] \psi_\ell^n \\ &= 2 \left( \frac{1}{2} - \ell \right) \psi_\ell^n \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu bağıntıdan diagonal işlemci  $\hat{A}$  aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\hat{A} \psi_\ell^n \equiv \left( \frac{1}{2} - \ell \right) \psi_\ell^n \quad (5.11)$$

$\hat{A}^\pm$  işlemcileri diagonal işlemci  $\hat{A}$  ile birlikte su(2) cebirinin sıradışı bağınımlarını sağlarlar:

$$[\hat{A}^+, \hat{A}^-] = 2\hat{A}, \quad [\hat{A}, \hat{A}^\pm] = \pm\hat{A}^\pm$$

Bu cebir bazen potansiyel cebri olarak adlandırılır. Trigonometrik PT potansiyeli için bu potansiyel cebirinin temsili sonlu boyutludur.

### 5.1.2 Ladder işlemcileri

Verilen bir Hamiltoniyen işlemcisinin farklı özfonksiyonlarını birbirine dönüştüren işlemcilere ladder ya da merdiven işlemcileri denir. Trigonometrik PT potansiyeli için Schrödinger denklemi

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\ell(\ell-1)}{\cos^2 x} \right) \psi_\ell^n = E_\ell^n \psi_\ell^n, \quad E_\ell^n = (\ell+n)^2 \quad (5.12)$$

şeklindeir. Bu denklemin her iki tarafı  $\cos^2 x$  ile çarpılıp aşağıdaki gibi düzenlenirse,

$$\left[ -\cos^2 x \frac{d^2}{dx^2} - (\ell+n)^2 \cos^2 x \right] \psi_\ell^n = -\ell(\ell-1) \psi_\ell^n \quad (5.13)$$

eşitliği elde edilir. Denklem (5.13)'ün sol tarafındaki parantezin içi  $\hat{h}_n$  olarak adlandırılırsa, Denk. (5.13)

$$\hat{h}_n \psi_\ell^n = -\ell(\ell-1) \psi_\ell^n \quad (5.14)$$

şeklinde yazılır. İkinci mertebeden diferansiyel işlemci  $\hat{h}_n$

$$\hat{h}_n = -\cos^2 x \frac{d^2}{dx^2} - (\ell+n)^2 \cos^2 x$$

Türeve göre 1. mertebeden iki tane diferansiyel işlemcinin çarpımı olarak yazılabilir:

$$\hat{h}_n = \hat{B}_n^- \hat{B}_n^+ + \gamma_n \quad (5.15)$$

Buradaki  $\hat{B}_n^\pm$  işlemcileri aşağıdaki şekilde seçilebilir,

$$\hat{B}_n^- = \cos x \frac{d}{dx} + \beta(x), \quad \hat{B}_n^+ = -\cos x \frac{d}{dx} + \alpha(x) \quad (5.16)$$

Denklem (5.14)'de,  $\hat{B}_n^\pm$  işlemcileri cinsinden verilen  $\hat{h}_n$  ifadesi (5.15) yerine yazılırsa

$$\beta(x) = (\ell + n)\sin x, \quad \alpha(x) = (\ell + n + 1)\sin x, \quad \gamma = -(\ell + n)(\ell + n + 1)$$

olarak bulunur.  $\hat{B}_n^+$  ve  $\hat{B}_n^-$  işlemcilerinin ters sıradaki çarpımı  $\hat{h}_n$ 'ler için bir hiyerarşi kurmaya izin verir:

$$\hat{h}_n = \hat{B}_n^- \hat{B}_n^+ + \gamma_n = \hat{B}_{n-1}^+ \hat{B}_{n-1}^- + \gamma_{n-1} \quad (5.16)$$

Bu durumda bağlaştırım bağıntıları

$$\hat{B}_n^+ \hat{h}_n = \hat{h}_{n+1} \hat{B}_n^+, \quad \hat{B}_n^- \hat{h}_{n+1} = \hat{h}_n \hat{B}_n^- \quad (5.17)$$

ile verilir.  $\hat{B}_n^\pm$  işlemcileri aynı bir Hamiltoniyeenin farklı enerjili durumlarını birbirleri ile ilişkilendirirler. Bağlaştırım bağıntılarından yola çıkarak bu ilişki

$$\hat{B}_n^- \psi_\ell^{n+1} = b_- \psi_\ell^n, \quad \hat{B}_n^+ \psi_\ell^n = b_+ \psi_\ell^{n+1}$$

şeklinde bulunur. Buradaki  $b_+$  ve  $b_-$  katsayıları faktör işlemcilerindeki gibi doğrudan bulunamazlar, çünkü  $(\hat{B}_n^+)^\dagger \neq \hat{B}_n^-$ 'dir. Bu katsayıları bulmak için birçok yol vardır. Örneğin birleştirilmiş Legendre polinomlarının tekrarlama bağıntıları kullanılarak bu katsayılar

$$b_- = \sqrt{\frac{(n+1)(2\ell+n)(\ell+n+1)}{(\ell+n)}}, \quad b_+ = \sqrt{\frac{(n+1)(2\ell+n)(\ell+n)}{(\ell+n+1)}}$$

şeklinde elde edilir (Cruz vd. 2008).

Taban durum dalga fonksiyonu,  $\hat{B}_{-1}^- \psi_\ell^0 = 0$ 'dan  $\psi_\ell^0 = N_0 \cos^\ell x$  olarak bulunur. Burada  $N_0$  normalizasyon katsayısıdır. Bu normalizasyon katsayısı Denk. (5.9)'da verilmiştir. Ayrıca uyarılmış durumların sayısı sonsuz olup taban durumu dalga fonksiyonuna  $\hat{B}^+$  işlemcileri uygulanarak bulunurlar:

$$\psi_\ell^n = N_\ell \hat{B}_{n-1}^+ \hat{B}_{n-2}^+ \dots \hat{B}_0^+ \psi_\ell^0 \quad (5.18)$$

Burada da indissiz  $\hat{B}^\pm$  işlemcileri tanımlanabilir.  $\hat{A}^\pm$  işlemcilerinde olduğu gibi  $\hat{B}^\pm$  işlemcilerinin kapattığı cebri bulmak için  $\hat{B}^\pm$ 'lerin sıradeğişiminden

$$\begin{aligned} [\hat{B}^-, \hat{B}^+] \psi_\ell^n &= (\hat{B}_n^- \hat{B}_n^+ - \hat{B}_{n-1}^+ \hat{B}_{n-1}^-) \psi_\ell^n \\ &= [(\hat{h}_n - \gamma_n) - (\hat{h}_n - \gamma_{n-1})] \psi_\ell^n \\ &= 2(\ell + n) \psi_\ell^n \end{aligned}$$

diagonal işlemci  $\hat{B}$

$$\hat{B} \psi_\ell^n \equiv (\ell + n) \psi_\ell^n \quad (5.19)$$

olarak tanımlanır.  $\hat{B}^\pm$  işlemcileri,  $\hat{B}$  işlemcisi ile birlikte su(1,1) cebrinin sıradeğişme bağıntılarını sağlarlar:

$$[\hat{B}^-, \hat{B}^+] = 2\hat{B}, \quad [\hat{B}, \hat{B}^\pm] = \pm \hat{B}^\pm$$

Bu cebir bazen  $\hat{H}_\ell$  Hamiltoniyeni için spektrum üreten cebir olarak adlandırılır, ve bu cebirin temsilleri sonsuz boyutludur.

## 5.2 Klasik İnceleme

PT potansiyeli için Hamiltoniyen fonksiyonu

$$H = p^2 + \frac{\alpha^2}{\cos^2 x} \quad (5.20)$$

şeklindedir. Burada kolaylık olsun diye  $m=1/2$  alınmıştır. Hamiltoniyen fonksiyonunun her iki tarafı  $\cos^2 x$  ile çarpılıp düzenlenirse

$$p^2 \cos^2 x - H \cos^2 x = -\alpha^2$$

bulunur. Bu eşitliğin sol tarafı birbirinin kompleks eşleniği olan iki fonksiyonun çarpımı cinsinden

$$M^+ M^- + \gamma(H) = -\alpha^2 \quad (5.21)$$

olarak yazılabilir. Burada  $M^\pm$  fonksiyonları,

$$M^\pm = \mp i p \cos x + \sqrt{H} \sin x, \quad \gamma(H) = -H \quad (5.22)$$

şeklindedir. Böylece, Denk. (5.21)'den Hamiltoniyen fonksiyonunun da  $M^\pm$  fonksiyonları cinsinden çarpanlarına ayrılmış olduğu görülür:

$$H = M^+ M^- + \alpha^2 \quad (5.23)$$

Kuantum mekaniksel incelemedeki ladder işlemcilerine benzer olarak  $M^\pm$  fonksiyonları Hamiltoniyen fonksiyonu ile birlikte aşağıdaki cebri sağlarlar:

$$\{H, M^\pm\} = \mp 2i\sqrt{H}M^\pm, \quad \{M^+, M^-\} = 2i\sqrt{H}$$

Bu cebirden yararlanarak zamana bağlı hareket sabitleri

$$Q^\pm = M^\pm e^{\pm 2i\sqrt{H}t} \quad (5.24)$$

şeklinde tanımlanabilir.  $Q^\pm$ 'lerin Denk. (4.8) ile verilen aşağıdaki bağıntıyı sağladığı cebir kullanılarak kolayca doğrulanır. Bu hareket sabitlerinin değeri

$$Q^\pm = M^\pm e^{\mp 2i\sqrt{H}t} = q_0 e^{\pm i\theta_0}, \quad q_0 = \sqrt{E - \alpha^2} \quad (5.25)$$

olarak alınabilir. Burada  $E$  sistemin toplam enerjisidir ve bir hareket sabitidir. Bu denklem düzenlenirse

$$M^+ = q_0 e^{i(2\sqrt{E}t + \theta_0)}, \quad M^- = q_0 e^{-i(2\sqrt{E}t + \theta_0)} \quad (5.26)$$

bulunur. Denklem (5.22) ile verilen  $M^\pm$  fonksiyonlarının açık ifadeleri Denk. (5.26)'da yerine yazılırsa

$$-i\text{pcos}x + \sqrt{E} \sin x = q_0 e^{i(2\sqrt{E}t + \theta_0)} \quad (5.27)$$

$$i\text{pcos}x + \sqrt{E} \sin x = q_0 e^{-i(2\sqrt{E}t + \theta_0)} \quad (5.28)$$

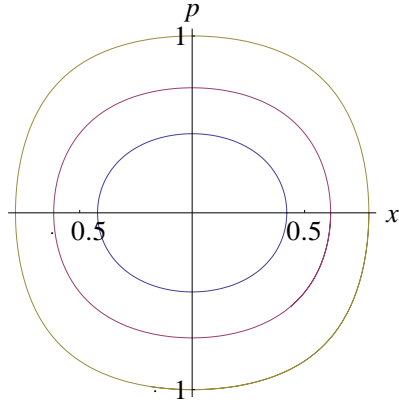
eşitlikleri elde edilir. (5.27) ve (5.28) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$x(t) = \arcsin \left[ \sqrt{\frac{E - \alpha^2}{E}} \cos(2\sqrt{E}t + \theta_0) \right] \quad (5.29)$$

ve taraf tarafa çıkarılırsa

$$p(t) = - \frac{\sqrt{(E - \alpha^2)} \sin(2\sqrt{E}t + \theta_0)}{\sqrt{1 - \left(\frac{E - \alpha^2}{E}\right) \cos^2(2\sqrt{E}t + \theta_0)}} \quad (5.30)$$

kanonik koordinatları elde edilir. Bu ifadelerden görüldüğü gibi, hareket periyodiktir ve hareketin frekansı enerjiye bağlıdır:  $\omega = 2\sqrt{E}$ . Şekil 5.2'den görüldüğü gibi Denk. (5.29) ve (5.30) ile verilen  $x(t)$  ve  $p(t)$  ile belirlenen periyodik hareket için faz yörüngeleri kapalıdır.



Şekil 5.2 Trigonometrik PT potansiyeli için faz yörüngeleri

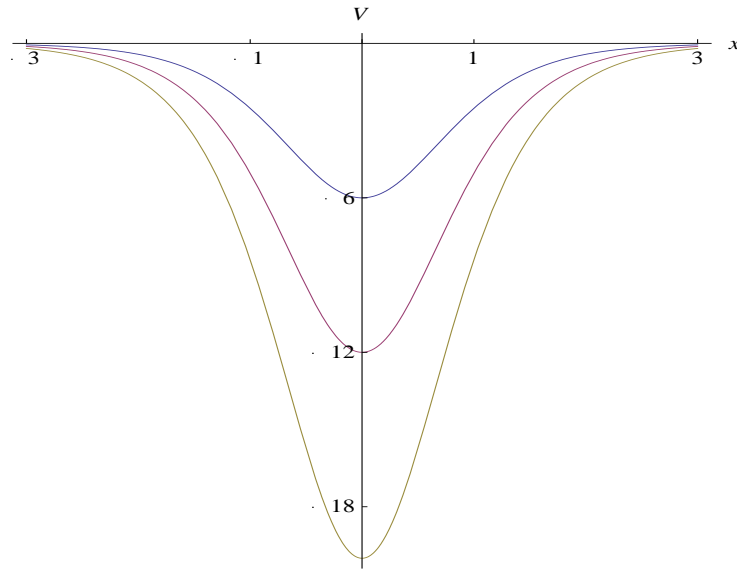
## 6. HİPERBOLİK PÖSCHL-TELLER POTANSİYELİ

Bu bölümde hiperbolik PT potansiyeli hem kuantum mekaniği hem de klasik mekanik çerçevesinde ele alınacaktır. Her iki durumda da bu potansiyelin altında yatan spektrum üreten cebirler bulunacak ve problem cebirsel olarak çözülecektir.

Hiperbolik PT potansiyeli

$$V_\ell = -\frac{\ell(\ell+1)}{\cosh^2 x}, \quad -\infty < x < \infty \quad (6.1)$$

şeklinde verilir. Burada  $\ell$  potansiyelin derinliğini belirleyen bir parametredir ve  $\ell > 0$ 'dır. Bu potansiyel süpersimetrik kuantum mekaniğindeki şekil değişmez potansiyellere bir örnektir. Şekil 6.1'de farklı  $\ell$  parametreleri için hiperbolik PT potansiyeli çizilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi  $\ell$  arttıkça potansiyelin derinliği de artmaktadır.



Şekil 6.1 Farklı  $\ell$  parametreleri için hiperbolik PT potansiyeli

### 6.1 Kuantum Mekaniksel İnceleme

#### 6.1.1 Faktör işlemcileri

Hiperbolik PT potansiyeline karşı gelen Hamiltoniyen işlemcisi

$$\hat{H}_\ell = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\cosh^2 x} \quad (6.2)$$

olarak yazılır. Bu Hamiltoniyen işlemcisi aşağıdaki şekilde çarpanlarına ayrılabilir:

$$\hat{H}_\ell = \hat{A}_\ell^+ \hat{A}_\ell^- + \lambda_\ell \quad (6.3)$$

Burada,

$$\hat{A}_\ell^\pm = \mp \frac{d}{dx} + F_\ell(x) \quad (6.4)$$

şeklinde birinci mertebeden diferansiyel işlemcilerdir.  $\hat{A}_\ell^\pm$ 'ler Denk. (6.3)'de yerlerine yazılıp, Denk. (6.2) ile karşılaştırılırsa,

$$F_\ell^2(x) - F_\ell'(x) + \lambda_\ell = -\frac{\ell(\ell+1)}{\cosh^2 x}$$

Riccati denklemi elde edilir. Bu denklemden  $F_\ell = \ell \tanh x$  ve  $\lambda_\ell = E_\ell^0 = -\ell^2$  olarak bulunur. Böylece faktör işlemcilerinin formu belirlenmiş olur

$$\hat{A}_\ell^\pm = \mp \frac{d}{dx} + \ell \tanh x$$

Bu işlemcilerin ters sıradaki çarpımından yararlanarak hiyerarşi

$$\hat{H}_\ell = \hat{A}_\ell^+ \hat{A}_\ell^- + \lambda_\ell = \hat{A}_{\ell+1}^- \hat{A}_{\ell+1}^+ + \lambda_{\ell+1} \quad (6.5)$$

olarak elde edilir. Bu hiyerarşi ile ilişkili bağlantım bağıntıları

$$\hat{A}_\ell^- \hat{H}_\ell = \hat{H}_{\ell-1} \hat{A}_\ell^-, \quad \hat{A}_\ell^+ \hat{H}_{\ell-1} = \hat{H}_\ell \hat{A}_\ell^+$$

şeklindedir.  $\hat{A}_\ell^\pm$  işlemcileri aynı enerjili durumları birbirleri ile ilişkilendirirler. Yani  $\hat{H}_\ell$  Hamiltoniyenin bir özfonksiyonu biliniyorsa, bu özfonksiyona  $\hat{A}_\ell^-$  işlemcisi uygulanarak  $\hat{H}_{\ell-1}$  Hamiltoniyenin aynı enerjili özfonksiyonları elde edilebilir. Ya da tersine  $\hat{A}_\ell^+$  işlemcisi  $\hat{H}_{\ell-1}$ 'in özfonksiyonlarına uygulanarak  $\hat{H}_\ell$ 'nin aynı enerjili özfonksiyonları elde edilir. Bu ilişki,

$$\hat{A}_\ell^- \psi_\ell^n = N \psi_{\ell-1}^{n-1} \quad (6.6)$$

$$\hat{A}_\ell^+ \psi_{\ell-1}^{n-1} = N \psi_\ell^n \quad (6.7)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\hat{A}_\ell^\pm$ 'ler birbirlerinin Hermitik eşleniği olduklarından  $\hat{A}_\ell^+ = (\hat{A}_\ell^-)^\dagger$ , Denk. (6.6)'daki  $N$  katsayısı öz fonksiyonların normalizasyonundan,

$$N^2 \langle \psi_\ell^n | \psi_\ell^n \rangle = \langle \hat{A}_\ell^- \psi_\ell^n | \hat{A}_\ell^- \psi_\ell^n \rangle = \langle \psi_\ell^n | \hat{A}_\ell^+ \hat{A}_\ell^- \psi_\ell^n \rangle$$



$$N^2 = \langle \psi_\ell^n | (\hat{H} - \lambda_\ell) \psi_\ell^n \rangle = E_\ell^n - \lambda_\ell = [-(\ell - n)^2 - (-\ell^2)]$$

$$N = \sqrt{(2\ell - n)n}$$

olarak bulunur. Denklem (6.7)'deki  $N$  katsayısı da benzer şekilde bulunabilir. Böylece  $\hat{A}_\ell^\pm$  'lerin normalize özfonksiyonlar üzerindeki etkileri

$$\hat{A}_\ell^- \psi_\ell^n = \sqrt{(2\ell - n)n} \psi_{\ell-1}^{n-1}$$

$$\hat{A}_\ell^+ \psi_{\ell-1}^{n-1} = \sqrt{(2\ell - n)n} \psi_\ell^n$$

şeklindedir.

Taban durum dalga fonksiyonu,  $\hat{A}_\ell^- \psi_\ell^0 = 0$  'dan  $\psi_\ell^0 = N_\ell^0 \cosh^{-\ell} x$  olarak bulunur.  $N_\ell^0$  normalizasyon katsayısı

$$N_\ell^0 = \sqrt{\frac{2\Gamma(\ell + 1/2)}{\pi^{1/2} \Gamma(\ell)}} \quad (6.8)$$

ile verilir. Burada  $\ell > 0$  'dır. Enerji özdeğerleri  $E_\ell^n = E_{\ell-1}^{n-1} = \dots = E_{\ell-n}^0 = -(\ell - n)^2$  şeklindedir.  $E_\ell^n$  enerjili duruma karşı gelen  $\psi_\ell^n$  özfonksiyonu ise

$$\psi_\ell^n = N_\ell^n \hat{A}_{\ell+n}^+ \hat{A}_{\ell+n-1}^+ \dots \hat{A}_{\ell+2}^+ \hat{A}_{\ell+1}^+ \psi_\ell^0$$

bağıntısından bulunur. Buradaki  $N_\ell^n$  normalizasyon katsayısı taban durum dalga fonksiyonuna  $\hat{A}_\ell^+$  işlemcileri ard arda uygulanarak

$$N_\ell^n = \sqrt{\frac{\Gamma(2\ell + 1)}{n! \Gamma(2\ell + n + 1)}}$$

elde edilir.

Burada da indissiz  $\hat{A}^\pm$  işlemcileri tanımlanabilir. Bu  $\hat{A}^\pm$  işlemcilerinin sıradeğişimi

$$\begin{aligned} [\hat{A}_\ell^-, \hat{A}_\ell^+] \psi_\ell^n &= (\hat{A}_{\ell+1}^- \hat{A}_{\ell+1}^+ - \hat{A}_\ell^+ \hat{A}_\ell^-) \psi_\ell^n \\ &= [(\hat{H}_{\ell+1} - \lambda_{\ell+1}) - (\hat{H}_\ell - \lambda_\ell)] \psi_\ell^n \\ &= 2 \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \psi_\ell^n \end{aligned}$$

diagonal işlemci  $\hat{A}$  'yı aşağıdaki şekilde tanımlamaya izin verir

$$\hat{A} \psi_\ell^n \equiv \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \psi_\ell^n \quad (6.9)$$

Böylece,  $\{\hat{A}^\pm, \hat{A}\}$  işlemcilerinin su(1,1) cebirinin sıradışı bağıntılarını sağladığı görülür:

$$[\hat{A}^-, \hat{A}^+] = 2\hat{A}, \quad [\hat{A}, \hat{A}^\pm] = \pm\hat{A}^\pm$$

Bu durumda potansiyel cebirinin temsili sonsuz boyutludur.

### 6.1.2 Ladder işlemcileri

Bu potansiyel için ladder işlemcileri trigonometrik PT potansiyelindeki adımlar izlenerek bulunur. Denklem (6.2) ile verilen PT potansiyeli için Schrödinger denklemi

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\cosh^2 x} \right) \psi_\ell^n = E_\ell^n \psi_\ell^n, \quad E_\ell^n = -(\ell-n)^2 \quad (6.10)$$

şeklindedir. Bu denklemin her iki tarafı  $\cosh^2 x$  ile çarpılıp düzenlenirse,

$$\left[ -\cosh^2 x \frac{d^2}{dx^2} + (\ell-n)^2 \cosh^2 x \right] \psi_\ell^n = \ell(\ell+1) \psi_\ell^n \quad (6.11)$$

elde edilir. Denklem (6.11)'in sol tarafındaki parantezin içi  $\hat{h}_n$  olarak alınırsa,

$$\hat{h}_n = -\cosh^2 x \frac{d^2}{dx^2} + (\ell-n)^2 \cosh^2 x$$

Denk. (6.11)

$$\hat{h}_n \psi_\ell^n = \ell(\ell+1) \psi_\ell^n \quad (6.12)$$

şeklinde yazılır.  $\hat{h}_n$  ikinci mertebeden diferansiyel işlemcisi türeve göre birinci mertebeden iki tane diferansiyel işlemcinin çarpımı olarak yazılabilir:

$$\hat{h}_n = \hat{B}_n^+ \hat{B}_n^- + \gamma_n \quad (6.13)$$

Burada  $B_n^\pm$  işlemcileri,

$$\hat{B}_n^- = \cosh x \frac{d}{dx} + \beta(x), \quad \hat{B}_n^+ = -\cosh x \frac{d}{dx} + \alpha(x) \quad (6.14)$$

olarak önerilebilir. Denklem (6.13)'de bu işlemciler yerine yazılıp, Denk. (6.12) ile karşılaştırılırsa,

$$\beta(x)=(\ell-n)\sinh x, \quad \alpha(x)=(\ell-n+1)\sinh x, \quad \gamma=(\ell-n)(\ell-n+1)$$

şeklinde bulunur.  $\hat{B}_n^+$  ve  $\hat{B}_n^-$  işlemcileri ters sırada çarpılarak hiyerarşi kurulabilir:

$$\hat{h}_n = \hat{B}_n^+ \hat{B}_n^- + \gamma_n = \hat{B}_{n+1}^- \hat{B}_{n+1}^+ + \gamma_{n+1} \quad (6.15)$$

Bu hiyerarşi ile ilişkili bağlaştırım bağıntıları

$$\hat{B}_n^- \hat{h}_n = \hat{h}_{n-1} \hat{B}_n^-, \quad \hat{B}_n^+ \hat{h}_{n-1} = \hat{h}_n \hat{B}_n^+$$

şeklinindedir.  $\hat{B}_n^\pm$  işlemcileri aynı bir Hamiltoniyenin farklı enerjili durumlarını birbirleri ile ilişkilendirirler. Bağlaştırım bağıntılarından bu ilişki aşağıdaki gibi verilir (Cruz, Kuru ve Negro 2008):

$$\hat{B}_n^- \psi_\ell^n = \sqrt{\frac{n(\ell-n)(2\ell-n+1)}{\ell-n+1}} \psi_\ell^{n-1}, \quad \hat{B}_n^+ \psi_\ell^{n-1} = \sqrt{\frac{n(\ell-n+1)(2\ell-n+1)}{\ell-n}} \psi_\ell^n \quad (6.16)$$

Taban durum dalga fonksiyonu,  $\hat{B}_0^- \psi_\ell^0 = 0$  'dan  $\psi_\ell^0 = N_\ell^0 \cosh^{-\ell} x$  olarak bulunur.  $N_\ell^0$  normalizasyon katsayısı Denk. (6.8) ile verilir. Ayrıca uyarılmış durumlar taban durumu dalga fonksiyonuna  $\hat{B}^+$  işlemcileri ard arda uygulanarak bulunabilir:

$$\psi_\ell^n = N_\ell^n \hat{B}_n^+ \dots \hat{B}_2^+ \hat{B}_1^+ \psi_\ell^0$$

Bu potansiyel için bağlı durumların sayısı sonludur ve  $\hat{B}^+$  işlemcisi tarafından yok edilen bir en son bağlı durum vardır. Tamsayı olan  $\ell$  'ler için en son bağlı durum  $n = \ell - 1$  'e karşı gelir. Tamsayı olmayan  $\ell$  'ler için en son bağlı durum  $\ell$  'ye en yakın tamsayı değeri  $[\ell]$  ile gösterilmek üzere  $n = [\ell] - 1$  'e karşı gelir. Bu durum (6.16)'dan açıkça görülmez. Bunun için birbirlerinin Hermitik eşleniği olan  $\hat{B}^\pm$  işlemcileri tanımlanabilir:

$$\hat{B}_n^- = \sqrt{\frac{(\ell-n+1)([\ell]-n)}{(2\ell-n+1)(\ell-n)}} \hat{B}_n^-, \quad \hat{B}_n^+ = \sqrt{\frac{(\ell-n)([\ell]-n)}{(2\ell-n+1)(\ell-n+1)}} \hat{B}_n^+$$

Böylece bu işlemcilerin özfonksiyonlar üzerindeki etkileri

$$\hat{B}_n^- \psi_\ell^n \equiv \hat{B}_n^- \psi_\ell^n = \sqrt{n([\ell]-n)} \psi_\ell^{n-1}, \quad \hat{B}_n^+ \psi_\ell^n \equiv \hat{B}_{n+1}^+ \psi_\ell^n = \sqrt{(n+1)([\ell]-n-1)} \psi_\ell^{n+1}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan da görüldüğü gibi  $\hat{B}^-$  taban durumunu ve  $\hat{B}^+$  ise  $\psi_\ell^{\ell-1}$  durumunu yok eder.  $\hat{B}^\pm$  işlemcilerinin sıradışılarından diagonal işlemci

$$\hat{B} \psi_\ell^n \equiv (n - \frac{[\ell]-1}{2}) \psi_\ell^n$$

olarak elde edilir.  $\{\hat{B}^\pm, \hat{B}\}$  işlemcileri  $su(2)$  cebrinin sıradışı bağınımlarını sağlarlar:

$$[\hat{B}^-, \hat{B}^+] = -2\hat{B}, \quad [\hat{B}, \hat{B}^\pm] = \pm\hat{B}^\pm$$

Bu potansiyel için spektrum üreten cebirin temsili beklenildiği gibi sonlu boyutludur.

## 6.2 Klasik İnceleme

PT potansiyeli için Hamiltoniyen fonksiyonu

$$H = p^2 - \frac{\gamma_0}{\cosh^2 x} \quad (6.17)$$

şeklindedir. Hamiltoniyen fonksiyonun her iki tarafı  $\cosh^2 x$  ile çarpılıp düzenlenirse

$$p^2 \cosh^2 x - H \cosh^2 x = \gamma_0$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sol tarafı birbirinin kompleks eşleniği olan iki fonksiyonun çarpımı olarak yazılabilir

$$M^+ M^- + \gamma(H) = \gamma_0$$

Burada  $M^\pm$

$$M^\pm = \mp i p \cosh x + \sqrt{-H} \sinh x, \quad \gamma(H) = -H \quad (6.18)$$

şeklindedir. Buradan Hamiltoniyen fonksiyonu da  $M^\pm$ 'lerin çarpımı olarak ifade edilmiş olur,

$$H = M^+ M^- - \gamma_0$$

Kuantum mekaniksel incelemedeki ladder işlemcilerine benzer olarak  $M^\pm$  fonksiyonları Hamiltoniyen fonksiyonu ile birlikte aşağıdaki cebri sağlarlar:

$$\{H, M^\pm\} = \mp 2i \sqrt{-H} M^\pm, \quad \{M^+, M^-\} = 2i \sqrt{-H} \quad (6.19)$$

Bu cebirden yararlanarak zamana bağlı hareket sabitleri

$$Q^\pm = M^\pm e^{\pm 2i \sqrt{-H} t}$$

şeklinde tanımlanabilir.  $Q^\pm$  'ler (4.8) ile verilen bağıntıyı sağlarlar.

Hiperbolik PT potansiyelinde  $E < 0$  ve  $E > 0$  durumları için parçacığın davranışı farklı olacağından bu durumlar ayrı ayrı ele alınacaktır.

1)  $E < 0$  için bağlı durumlar söz konusudur. Bu durumda zamana bağlı hareket sabitleri

$$Q^\pm = M^\pm e^{\mp 2i\sqrt{-H}t} = q_0 e^{\pm i\theta_0}, \quad q_0 = \sqrt{E + \gamma_0} \quad (6.20)$$

şeklindedir. Bu denklemler düzenlenirse

$$M^+ = q_0 e^{i(2\sqrt{-E}t + \theta_0)}, \quad M^- = q_0 e^{-i(2\sqrt{-E}t + \theta_0)} \quad (6.21)$$

bulunur. Denklem (6.18) ile verilen  $M^\pm$  fonksiyonları Denk. (6.21)'de yerine yazılırsa

$$-i\text{pcosh}x + \sqrt{-H} \sinh x = q_0 e^{i(2\sqrt{-E}t + \theta_0)} \quad (6.22)$$

$$i\text{pcosh}x + \sqrt{-H} \sinh x = q_0 e^{-i(2\sqrt{-E}t + \theta_0)} \quad (6.23)$$

elde edilir. Bulunan (6.22) ve (6.23) denklemleri taraf tarafa toplanıp çıkarılırsa kanonik koordinatlar

$$x(t) = \text{arcsinh} \sqrt{\frac{E + \gamma_0}{E}} \cos(2\sqrt{-E}t + \theta_0) \quad (6.24)$$

$$p(t) = -\frac{\sqrt{E(E + \gamma_0)} \sin(2\sqrt{-E}t + \theta_0)}{\sqrt{E - (E + \gamma_0) \cos^2(2\sqrt{-E}t + \theta_0)}} \quad (6.25)$$

şeklinde bulunur. Bu denklemlerden hareketin frekansının enerjiye bağlı olduğu ( $\omega = 2\sqrt{-E}$ ) ve bunun da (6.19) ile verilen cebir tarafından belirlendiği açıktır. Şekil 6.2'den faz yörüngelerinin kapalı olduğu görülür.

2)  $E > 0$  koşulu bağlı olmayan durumlara karşı gelir. Bu durumda yukarıdaki ifadelerde  $\sqrt{-H} = i\sqrt{H}$  değişikliği yapılmalıdır. Böylece zamana bağlı hareket sabitleri

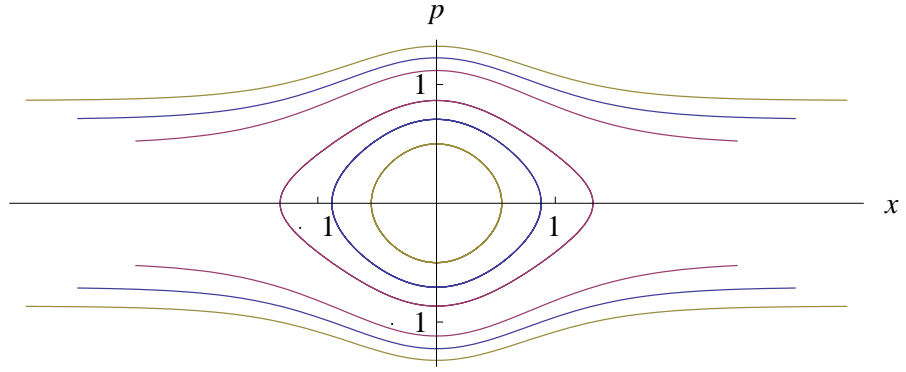
$$Q^\pm = M^\pm e^{\pm 2\sqrt{H}t}$$

şeklini alır.  $E < 0$  için yapılan işlemler bağlı olmayan bu durumlar için de yapılırsa kanonik koordinatlar

$$x(t) = \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{E + \gamma_0}{E}} \sinh(2\sqrt{E}t + \theta_0) \quad (6.26)$$

$$p(t) = -\frac{\sqrt{E(E + \gamma_0)} \cosh(2\sqrt{E}t + \theta_0)}{\sqrt{E + (E + \gamma_0) \sinh^2(2\sqrt{E}t + \theta_0)}} \quad (6.27)$$

olarak bulunur. Bu durumda, şekil 6.2'den de görüldüğü gibi periyodik olmayan harekete karşı gelen yörüngeler açıktır.



Şekil 6.2 Hiperbolik PT potansiyeli için faz yörüngeleri

## 7. TARTIŞMA ve SONUÇ

Süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemleri eş spektrumlu potansiyel hiyerarşisi kurmada ve hiyerarşideki tüm potansiyeler için özdeğer ve özfonksiyonları elde etmede kullanılırlar. Bu yöntemler, fiziksel sistemler için aşikar olmayan hareket sabitlerini bulmaya ve fiziksel sistemlerin altında yatan cebirleri kurmaya da izin verirler. Bilindiği gibi cebirsel yöntemler spektrumun Schrödinger denklemi çözülmeden bulunmasını sağlarlar. Bu yöntemlerin klasik mekaniğe genişletilmesi ile klasik mekanikte de spektrum üreten cebirler elde edilebilir. Böylece sistem ile ilgili pek çok bilgi ve çözümler cebirsel olarak kolayca bulunabilir.

Bu çalışmada trigonometrik ve hiperbolik PT potansiyelleri ve harmonik salıncının spektrumları süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemleri kullanılarak elde edilmiş ve bu sistemlere karşı gelen spektrum üreten cebirler kurulmuştur. Klasik mekaniksel incelemede ise, kuantum mekaniksel incelemeye benzer olarak bu potansiyellere karşı gelen Hamiltoniyen fonksiyonları iki fonksiyon cinsinden çarpanlarına ayrılmıştır. Daha sonra, bu fonksiyonların uyduğu klasik spektrum üreten cebirler bulunmuştur. Bu cebir yardımıyla zamana bağlı iki hareket sabiti tanımlanıp, klasik sistemin hareketi bu hareket sabitlerinden kolayca belirlenmiştir.

Görüldüğü gibi burada sunulan yöntemlerle problemler hem kuantum mekaniği hem de klasik mekanik çerçevesinde aynı bir bakış açısı ile ele alınabilmekte ve problemler cebirsel olarak kolay ve şık bir şekilde çözülebilmektedir. Bu yöntemlerle daha karmaşık problemlerin anlaşılması ve çözülmesi kolaylaşmaktadır. Bu nedenle bu yöntemlerin iyi bir şekilde anlaşılması, fizikte pek çok alana uygulanması ve geliştirilmesi önemli bir çalışmadır.

## KAYNAKLAR

- Cooper, F. , Khare, A. and Sukhatme, U. 2001. Supersymmetry in Quantum Mechanics pp. 15-33, World Scientific, London.
- Cruz, S. , Kuru, Ş. and Negro, J. 2008. Classical motion and coherent states for Pöschl-Teller potentials, Physics Letters A, Vol. 372, Issue 9, pp. 1391-1405.
- Dong, S. 2010. Factorization Method in Quantum Mechanics pp. 3-32, Springer, Netherlands
- Flügge, S. 1994. Practical Quantum Mechanics pp. 89-93, Springer-Verlag, Germany.
- Goldstein, H. , Poole, C. and Safko, J. 2001. Classical Mechanics, pp. 377-380, Addison Wesley, San Francisco.
- Junker, G. 1996. Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics pp. 7-16, Springer-Verlag, Berlin.
- Kuru, Ş. 2004. Çizgisel ve Çizgisel Olmayan Integrellenebilir Sistemler, Darboux Dönüşümleri ve Süpersimetri. Doktora tezi (basılmamış). Ankara Üniversitesi, 110 s., Ankara.
- Kuru, Ş. and Negro, J. 2008. Factorization of one-dimensional classical systems, Annals of Physics, Vol. 323, Issue 12, pp. 413-431.
- Kuru, Ş. and Negro, J. 2009. Dynamical algebras for Pöschl-Teller Hamiltonian hierarchies, Annals of Physics, Vol. 324, Issue 12, pp. 2548-2560.
- Matveev, V.B. and Salle, M.A. 1990. Darboux Transformations and Solitons pp. 7-15, Springer-Verlag, Berlin.



Sukumar, C.V. 1996. Supersymmetric Quantum Mechanics and Its Applications, Wadham Colloge, pp. 4-6, England.

Verçin, A. ve Dereli, T. 2009. Kuantum Mekanîği Temel Kavramlar ve Uygulamalar, Türkiye Bilimler Akademisi, Ankara.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ebru ŞİMŞEK

Doğum Yeri : Diyarbakır

Doğum Tarihi : 23.04.1987

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

### **Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)**

Lise : Ziya Gökalp Lisesi (2004)

Lisans : Dicle Üniversitesi Fizik Bölümü (2009)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı  
(Eylül 2010-Haziran 2012)