ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİFERENSİYEL OPERATÖRLER İÇİN WEYL TEORİSİ

İbrahim ERDAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2013

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFERENSİYEL OPERATÖRLER İÇİN WEYL TEORİSİ

İbrahim ERDAL

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, spektral analiz için gerekli olan bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, simetrik diferensiyel operatörler için Weyl Teorisi'nden bahsedilmiştir. Limit noktası, limit çemberi durumlarını belirleyen bazı bilinen kriterler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, simetrik olmayan diferensiyel operatörler için Weyl Teorisi'nden bahsedilmiştir. Klasik Weyl Teorisi'nde benzeri olmayan durum ve diğer durumlar için kriterler anlatılmıştır.

Beşinci bölümde, $M(\lambda)$ fonksiyonunun özelliklerinden bahsedilmiştir.

Ocak 2013, 46 sayfa

Anahtar Kelimeler : Weyl noktası,Weyl çemberi, Weyl fonksiyonu, indis sayıları, Sturm-Liouville operatörleri.

ABSTRACT

Master Thesis

WEYL THORY FOR DIFFERENTIAL OPERATORS

İbrahim ERDAL

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is introduction.

In the second chapter, some definitions and theorems which are necessary for spectral analysis have been given.

In the third chapter, Weyl Theory for symmetric differential operators has been mentioned. Some known criterias for the cases of limit point and limit circle have been given.

In the fourth chapter,Weyl Theory for non-symmetric differential operators has been mentioned. Some criterias for undefined case in classical Weyl Theory and other situations have been expressed.

In the fifth chapter, the properties of the $M(\lambda)$ functions have been studied.

January 2013, 46 pages

Key Words: Weyl point, Weyl circle, Weyl function, index defect, Sturm-Liouville operators.

TEŞEKKÜR

Bu konuda çalışmama imkan tanıyan ve desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Şeyhmus YARDIMCI'ya (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi), değerli bilgi ve önerileriyle beni yönlendiren hocam Sayın Prof. Dr. Elgiz BAYRAM'a (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi), haftalık seminerlerimiz boyunca benimle birlikte olan değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. Murat OLGUN'a (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi), Araş. Gör. Yelda AYGAR 'a, Ekin UĞURLU'ya ve sevgili arkadaşlarım, Pembe İPEK'e ve Çağla CAN'a en içten duygularımla teşekkür ederim.

Ayrıca hayatımın her aşamasında yanımda olup hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan, her an desteklerini hissettiğim sevgili aileme ve arkadaşlarım Adem AYDIN ve Enes DANIŞMAZ' a sonsuz minnetlerimi ve teşekkürlerimi sunarım.

İbrahim ERDAL

Ankara, Ocak 2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\Re z$	z kompleks sayısının reel kısmı
$\Im z$	z kompleks sayısının imajiner (sanal) kısmı
L	maksimal operatör
L_0	minimal operatör
L^2	Mutlak değerlerinin karesi Lebesque integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$N_\lambda, N_{\overline{\lambda}}$	simetrik operatörün eksiklik uzayları

1. GİRİŞ

İkinci mertebeden diferensiyel denklemler teorisi önemli bir geçmişe sahiptir. İyi bilinmektedir ki diferensiyel ifadenin katsayıları tanımlı olduğu aralığın her bir noktasında regülerse uygun sınır koşulları, çözümlerin uç noktalarda aldıkları değerler ile verilebilir. Ayrıca regüler diferensiyel operatörler ile kurulan diferensiyel denklemlerin tüm çözümleri karesel integrallenebilirdir. Fakat singüler operatörler için bu durum genel olarak doğru değildir. İlk defa 1910 yılında Weyl göstermiştir ki ikinci mertebeden singüler simetrik bir operatör ile kurulan diferensiyel denklemin mutlaka bir çözümü karesel integrallenebilirdir. Bu önemli sonuç neticesinde diferensiyel operatörler ikiye ayrılabilir: limit çemberi durumunda olanlar ve limit noktası durumunda olanlar. Limit çemberi durumundaki diferensiyel operatörler ile ele alınan diferensiyel denklemlerin tüm çözümleri karesel integrallenebilirken, limit noktası durumundakiler için lineer bağımsız çözümlerden sadece biri karesel integrallenebilirdir. Weyl'in bu analizi yaklaşık 35 yıl kadar sonra Titchmarsh tarafından tekrar ele alınmıştır. Özel olarak Titchmarsh, Titchmarsh-Weyl fonksiyonu olarak bilinen m-fonksiyonlarının bazı özelliklerini incelemiştir. Literatürde Titchmarsh-Weyl fonksiyonu yardımıyla spektral fonksiyon, sınır değer operatörleri, saçılma fonksiyonu, karakteristik fonksiyon kurulabilmektedir. Bu teoriler hakkında detaylı bilgi Coddington ve Levinson (1955), Gorbachuk (1991), Kuzhel'in (1995) kitaplarında ve Malamud'un (2006, 2008) makalelerinde bulunabilir. Ayrıca m- fonksiyonlarının teorisini destekleyen pek çok başka çalışma da literatüre kazandırılmıştır.

Diğer yandan 1957 yılında Sims, Weyl'in ortaya koyduğu bu analiz metodunu kompleks katsayılı diferensiyel operatörlere uygulamıştır. Sims bu analizinde çok önemli bir sonuç elde etmiştir. Klasik durumda olmayan ancak kompleks katsayılı durumda görülen sonuç şudur: limit noktası durumunda lineer bağımsız iki çözüm karesel integrallenebilirdir (DurumII). Ayrıca Sims, Titchamarsh-Weyl fonksiyonlarının özelliklerini de incelemiştir ve bazı sonuçlar elde etmiştir.

Bu tezde ikinci mertebeden simetrik ve simetrik olmayan singüler diferensiyel operatörler için Weyl teorisi incelenmiştir. Bu tez hazırlanırken temel olarak Coddington ve Levinson'un kitabından (1955) ve Sims'in makalesinden (1957) faydalanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde spektral analiz için gerekli bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 H reel veya kompleks vektör uzayı olsun. H üzerinde bir iç çarpım H uzayındaki vektörlerin her sıralı çiftini bir skalere eşleyen ve aşağıdaki özellikleri gerçekleyen $(,)$ fonksiyonudur:

1. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

2. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$;

3. $(y, x) = \overline{(x, y)}$;

4. $(x, x) \geq 0; (x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

Böyle bir iç çarpımla belirtilen H uzayına bir iç çarpım uzayı denir (Hoffman 1962).

Tanım 2.2 H reel veya kompleks vektör uzayı olsun. H üzerinde bir norm H üzerinde aşağıdaki özellikleri gerçekleyen, negatif olmayan, reel değerli $\|.\|$ fonksiyondur:

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

H üzerinde bu şekilde tanımlanan bir norm ile birlikte H vektör uzayına normlu lineer uzay denir. $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ formülü H üzerinde bir norm belirtir. Eğer H bu norma göre tam ise H uzayına Hilbert uzayı denir (Hoffman 1962).

Tanım 2.3 Bir L fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesi aynı cisim üzerinde lineer uzaylarsa ve cisimdeki her α ve L nin tanım uzayındaki her x, y vektör çifti için

$$\begin{aligned} L(x+y) &= Lx + Ly; \\ L(\alpha x) &= \alpha Lx \end{aligned}$$

koşulları gerçekleniyorsa L fonksiyonuna lineer operatör denir (Naimark 1968).

Tanım 2.4 Tüm H uzayı üzerinde tanımlı L operatörüne

$$\|Lx\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in H$$

koşulunu gerçeklemesi durumunda sınırlı operatör denir. En küçük C sayısına L operatörünün normu denir ve $\|L\|$ ile gösterilir (Naimark 1968).

Tanım 2.5 H Hilbert uzayı ve L bu uzayda lineer operatör olmak üzere L nın tanım kümesi $D(L)$, H Hilbert uzayında yoğun olsun. $f \in D(L)$ için

$$(Lf, g) = (f, L^*g)$$

eşitliğini sağlayan L^* operatörüne L nin adjoint operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $g \in H$ vektörler kümesine L^*in tanım kümesi denir ve $D(L^*)$ ile gösterilir (Naimark 1968).

Tanım 2.6 Eğer $L = L^*$ ise L ye self adjoint operatör adı verilir (Naimark 1968).

Tanım 2.7 L operatörünün tanım kümesi olan $D(L)$ kümesi H Hilbert uzayında yoğun bir alt küme olsun. Eğer her $f, g \in D(L)$ için

$$(Lf, g) = (f, Lg)$$

gerçekleniyorsa L lineer operatörüne simetrik operatör denir (Naimark 1968).

Tanım 2.8 Her sınırlı kümeyi kompakt kümeye dönüştüren operatöre kompakt operatör denir (Naimark 1968).

Teorem 2.9 (Vitali Yakınsaklık Teoremi) $f_n(z)$, bir $\mathcal{D}$ bölgesinde her biri regüler olan fonksiyonların bir dizisi olsun. Her n doğal sayısı ve her $z \in \mathcal{D}$ için $f_n(z)$,

$$|f_n(z)| \leq M$$

eşitsizliğini gerçeklesin ve $n \to \infty$ için $\mathcal{D}$ bölgesinde bir limit noktasına sahip olsun. Bu durumda $f_n(z)$, $\mathcal{D}$ bölgesinin içindeki herhangi bir sınırlı bölgede düzgün yakınsaktır ve düzgün yakınsadığı limit fonksiyonu z nin analitik fonksiyonudur (Titchmarsh 1939).

Tanım 2.10 L bir simetrik operatör ve λ keyfi bir kompleks sayı olsun. $R_{\overline{\lambda}}$ ve R_λ ile sırasıyla $\left(L-\overline{\lambda}I\right)$ ve $(L-\lambda I)$ operatörlerinin değer kümeleri gösterilsin. $R_{\overline{\lambda}}$ ve R_λ kümeleri H Hilbert uzayının alt kümesidir. Bunların ortogonal tümleyenleri sırası ile $(H \ominus R_{\overline{\lambda}})$ ve $(H \ominus R_\lambda)$ ile gösterilsin.

$$\begin{aligned} N_\lambda &= H \ominus R_\lambda \\ N_{\overline{\lambda}} &= H \ominus R_{\overline{\lambda}} \end{aligned}$$

uzaylarına L operatörünün eksiklik uzayları denir (Naimark 1968).

Lemma 2.11 N_λ ve $N_{\overline{\lambda}}$ eksiklik uzayları sırası ile L^* operatörünün $\overline{\lambda}$ ve λ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerinden oluşur (Naimark 1968).

Tanım 2.12

$$m = \dim N_i,\ n = \dim N_{-i}$$

sayılarına L opeatörünün eksiklik (indis) sayıları denir. L operatörü simetrik ise $m = n$ gerçeklenir (Naimark 1968).

Tanım 2.13 İkinci mertebeden bir diferensiyel operatör için $(1,1)$ eksiklik sayısı, limit noktası durumu; $(2,2)$ eksiklik sayısı durumu ise limit çemberi durumu olarak bilinir (Naimark 1968).

Teorem 2.14 Üst yarı düzlemden olan her λ kompleks sayısı için

$$\begin{aligned} \dim N_{\overline{\lambda}} &= \dim N_{-i} \\ \dim N_\lambda &= \dim N_i \end{aligned}$$

sağlanır (Naimark 1968).

3. SİMETRİK DİFERENSİYEL OPERATÖRLER İÇİN WEYL TEORİSİ

Bu bölümde ikinci mertebeden reel katsayılı simetrik bir diferensiyel operatör için limit çemberi ve limit noktası durumları incelenecektir. Bu bölüm Coddington ve Levinson'un kitabı (1955) kaynak alınarak hazırlanmıştır.

Şimdi

$$\ell(y) = -\left(p(x)\,y'\right)' + q(x)\,y, \quad x \in [0,\infty) \tag{3.1}$$

diferensiyel ifadesi ele alınsın. Burada, $p, q; [0,\infty)$ aralığında reel değerli, Lebesque ölçülebilir fonksiyonlar ve $p^{-1}, q \in L^1_{loc}[0,\infty)$ dur.

Bu bölümde L ;

$$Ly = -\left(p(x)\,y'\right)' + q(x)\,y$$

şeklinde tanımlı self-adjoint diferensiyel operatörünü göstersin. Burada x_0 keyfi olmak üzere herhangi bir $[0, x_0]$ aralığı üzerinde p, p', q fonksiyonları reel, sürekli ve $p(x) > 0$ kabul edilecektir.

f ve g , L nin tanım kümesinden seçilen iki fonksiyon ve $[x_1, x_2] \subset [0,\infty)$ keyfi aralığı için incelemelerde büyük önemi olan Green formülü aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\overline{g}Lf - f\overline{Lg}\right) dx = [fg]\,(x_2) - [fg](x_1)\ .$$

Burada

$$[fg](x) = p(x)\left(f(x)\overline{g}'(x) - f'(x)\overline{g}(x)\right)$$

şeklindedir.

Ayrıca $\lambda \in \mathbb{C}$ için f ve g aynı $Ly = \lambda y$ denkleminin çözümleri ise $[f\overline{g}]\,(x)$ in sabit olup x den bağımsız olacağı açıktır.

Tanım 3.1 Eğer bir λ kompleks sayısı için

$$Ly = \lambda y$$

diferensiyel denkleminin her çözümü $L^2\,(a,b)$ $(-\infty \le a \le b \le \infty)$ uzayındansa, L

operatörüne limit çemberi durumundadır denir. Aksi takdirde L ye limit noktası durumundadır denir (Coddington ve Levinson 1955).

Regüler diferensiyel operatörlerin limit çemberi durumunda oldukları açık olduğundan bu tezde singiler diferensiyel operatörler incelenecektir.

Weyl'in analizinin anlamlı olması için λ spektral parametresinin keyfi seçilmesi önem arz eder. Aşağıdaki teorem bu durumu açıklar.

Teorem 3.2 Eğer bir λ_0 kompleks sayısı için $Ly = \lambda_0 y$ denkleminin her çözümü $L^2(0,\infty)$ sınıfından ise keyfi λ kompleks sayısı için de $Ly = \lambda y$ denkleminin her çözümü $L^2(0,\infty)$ sınıfındandır (Coddington ve Levinson 1955).

İspat $Ly = \lambda_0 y$ denkleminin $L^2(0,\infty)$ sınıfından olan iki lineer bağımsız çözümü φ ve ψ olarak verilsin. κ ise $Ly = \lambda y$ denkleminin keyfi bir çözümü olsun. $Ly = \lambda y$ denklemi

$$Ly - \lambda_0 y = (\lambda - \lambda_0)\, y \tag{3.2}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda φ ve ψ, $Ly - \lambda_0 y = 0$ homogen denkleminin iki lineer bağımsız çözümü olur. O halde homogen olmayan denklemin özel çözümünü bulmak için paramatrelerin değişimi yöntemi uygulanırsa (3.2) denkleminin bir özel çözümü

$$y(x) = \int_c^x (\lambda - \lambda_0)\, \kappa(\tau) \left(\varphi(x)\, \psi(\tau) - \varphi(\tau)\, \psi(x)\right) d\tau$$

olarak bulunur. $\kappa(x)$, (3.2) denkleminin genel çözümü olduğundan

$$\kappa(x) = c_1 \varphi(x) + c_2 \psi(x) + (\lambda - \lambda_0) \int_c^x \left(\varphi(x)\, \psi(\tau) - \varphi(\tau)\, \psi(x)\right) \kappa(\tau)\, d\tau \tag{3.3}$$

yazılır. Burada c, c_1, c_2 sabitlerdir.

$$\|\kappa\|_c = \left(\int_c^x |\kappa|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

notasyonu kullanılsın.

$\forall x \geq c$ için $\|\varphi\|_c \leq M, \|\psi\|_c \leq M$ olduğu ve Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\left| \int_c^x \left(\varphi(x)\psi(\tau) - \varphi(\tau)\psi(x)\right)\kappa(\tau)\,d\tau \right| \leq M\left(|\varphi(x)| + |\psi(x)|\right)\|\kappa\|_c \tag{3.4}$$

bulunur. (3.4) eşitsizliği (3.3) ifadesinde dikkate alınır ve Minkowski eşitsizliği kullanılırsa

$$\|\kappa\|_c \leq \left(|c_1| + |c_2|\right)M + 2\left|\lambda - \lambda_0\right| M^2 \|\kappa\|_c \tag{3.5}$$

elde edilir.

Eğer c, $|\lambda - \lambda_0|\, M^2 < \frac{1}{4}$ eşitsizliği sağlanacak şekilde yeterince büyük seçilirse (3.5) ifadesinden

$$\|\kappa\|_c \leq 2\left(|c_1| + |c_2|\right)M$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafı x den bağımsız olduğundan

$$\lim_{x\to\infty}\left(\int_c^x |\kappa|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\left(|c_1| + |c_2|\right)M$$

gerçeklenir. Buradan $\kappa \in L^2(0,\infty)$ bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Limit noktası durumunda $Ly = \lambda y$ denkleminin en çok bir lineer bağımsız çözümü $L^2(0,\infty)$ sınıfındandır. Gösterilecektir ki bu durumda $\Im\lambda \neq 0$ olacak biçimdeki herhangi bir λ için $Ly = \lambda y$ denkleminin sadece bir çözümü $L^2(0,\infty)$ sınfındandır.

φ ve ψ ; $Ly = \lambda y$ denkleminin $0 \leq \alpha < \pi$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\varphi(0,\lambda) = \sin\alpha \qquad && \psi(0,\lambda) = \cos\alpha \\ &p(0)\varphi'(0,\lambda) = -\cos\alpha \quad && p(0)\psi'(0,\lambda) = \sin\alpha \end{aligned} \tag{3.6}$$

koşullarını sağlayan iki çözümü olsun. Açıktır ki φ ve ψ lineer bağımsız çözümlerdir. $\varphi, \varphi', \psi, \psi'$; λ nın tam fonksiyonları ve x ve λ değişkenlerine göre sürekli fonksiyonlardır. Ek olarak (3.6) dan

$$[\varphi\overline{\psi}\,](0) = p(0)\Big(\varphi(0)\,\psi'(0) - \varphi'(0)\,\psi(0)\Big) = 1$$

olup $[\varphi\overline{\psi}\,](x)$, x den bağımsız olduğundan her x için $[\varphi\overline{\psi}\,](x) = 1$ gerçeklenir. Bu çözümler reel λ lar için reeldir ve 0 noktasında aşağıdaki sınır koşulu sağlar.

$$\cos\alpha\varphi\left(0,\lambda\right)+\sin\alpha p(0)\varphi^{'}\left(0,\lambda\right)=0$$
$$\sin\alpha\psi\left(0,\lambda\right)-\cos\alpha p(0)\psi^{'}\left(0,\lambda\right)=0$$

$Ly=\lambda y$ denkleminin lineer bağımsız iki çözümü φ ve ψ olduğundan genel çözüm λ ya bağlı olan her m için

$$\kappa=\varphi+m\psi \tag{3.7}$$

şeklinde düşünülebilir. Şimdi $0<b<\infty$ olacak şekildeki b noktasında aşağıdaki reel sınır koşul gözönüne alınsın.

$$\cos\beta x(b)+\sin\beta p(b)x^{'}(b)=0 \qquad (0\leq\beta<\pi) \tag{3.8}$$

κ çözümünün (3.8) ifadesini sağlaması için:

$$m=-\frac{\cot\beta\varphi\left(b,\lambda\right)+p(b)\varphi^{'}(b,\lambda)}{\cot\beta\psi\left(b,\lambda\right)+p(b)\psi^{'}(b,\lambda)} \tag{3.9}$$

formunda olmalıdır. Bu durumda $m=m\left(\lambda,b,\beta\right)$ şeklinde λ,b,β değişkenlerinin bir fonksiyonu olur. $\varphi,\varphi^{'},\psi,\psi^{'}$; λ nın tam fonksiyonları olduğundan m ; λ nın meromorf fonksiyonudur ve reel λ lar için reeldir.

Eğer $z=\cot\beta$ alınır ve λ, b değişkenleri sabitlenirse, $A:=\varphi\left(b,\lambda\right)$, $B:=p(b)\varphi^{'}(b,\lambda)$, $C:=\psi\left(b,\lambda\right)$, $D:=p(b)\psi^{'}(b,\lambda)$ fonksiyonları sabitlenir ve (3.9) eşitliği

$$m=-\frac{Az+B}{Cz+D} \tag{3.10}$$

şeklinde yazılabilir. β ; 0 ile π arasında değiştikçe z, reel eksen üzerinde değerler alır. (3.10) daki kesirli lineer dönüşüm z düzlemindeki reel ekseni m düzlemindeki C_b çemberine dönüştürür.

Böylece κ nın (3.8) denklemini sağlaması için gerek ve yeter koşul m nin C_b çemberi üzerinde olmasıdır. (3.10) denkleminden

$$z=-\frac{B+Dm}{A+Cm}$$

elde edilir. Reel eksenin görüntüsünün denklemi için $\Im z=0$ olduğundan $\dfrac{z-\overline{z}}{2i}=0$

eşitliği yardımıyla

$$\left(\frac{-\left(\overline{A}+\overline{C}\overline{m}\right)(B+Dm)+(A+Cm)\left(\overline{B}+\overline{D}\overline{m}\right)}{|A|^2+|C|^2|m|^2+2\Re(\overline{A}Cm)}\right)\frac{1}{2i}=0$$

sağlanıp

$$\left(\overline{A}+\overline{C}\overline{m}\right)(B+Dm)-(A+Cm)\left(\overline{B}+\overline{D}\overline{m}\right)=0 \tag{3.11}$$

elde edilir. Bu C_b çemberi için bir denklemdir.

Kompleks düzlemde yarıçapı r, merkezi c olan bir çember denklemi $|z-c|=r$ şeklindedir. Bu durumda

$$\begin{aligned}|z-c|^2 &= r^2 \Rightarrow (z-c)(\overline{z-c})=r^2\\ &\Rightarrow z.\overline{z}-z\overline{c}-c\overline{z}+c\overline{c}-r^2=0\end{aligned} \tag{3.12}$$

olup ayrıca (3.11) eşitliği açılırsa

$$|m|^2+m\frac{\overline{A}D-C\overline{B}}{\overline{C}D-C\overline{D}}+\overline{m}\frac{B\overline{C}-A\overline{D}}{\overline{C}D-C\overline{D}}+\frac{\overline{A}B-A\overline{B}}{\overline{C}D-C\overline{D}}=0 \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.12) ve (3.13) karşılaştırıldığında C_b çemberinin merkezi,

$$m_b=\frac{A\overline{D}-B\overline{C}}{\overline{C}D-C\overline{D}}$$

ve yarıçapı,

$$r_b=\frac{|AD-BC|}{\left|\overline{C}D-C\overline{D}\right|}$$

şeklinde bulunur.

(3.11) denklemi açılırsa

$$\begin{aligned}0 &= (A+mC)\left(\overline{B}+\overline{m}\overline{D}\right)-(B+mD)\left(\overline{A}+\overline{m}\overline{C}\right)\\ &= p(b)\,(A+mC)\left(\overline{\varphi}'(b)+\overline{m}\overline{\psi}'(b)\right)-(B+mD)\left(\overline{\varphi}(b)+\overline{m}\overline{\psi}(b)\right)\\ &= p(b)\,(\varphi(b)+m\psi(b))\,\overline{\kappa}'(b)-p(b)\left(\varphi'(b)+m\psi'(b)\right)\overline{\kappa}(b)\\ &= p(b)\kappa(b)\,\overline{\kappa}'(b)-p(b)\kappa'(b)\overline{\kappa}(b)\\ &= p(b)\left(\kappa(b)\,\overline{\kappa}'(b)-\kappa'(b)\overline{\kappa}(b)\right)\\ &= [\kappa\kappa](b)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece C_b çemberinin denklemi

$$[\kappa\kappa](b)=0 \tag{3.14}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} [\varphi\psi](b) &= A\overline{D}-B\overline{C} \\ -[\psi\psi](b) &= \overline{C}D-C\overline{D} \\ [\varphi\overline{\psi}](b) &= AD-BC=1 \end{aligned}$$

eşitlikleri gerçeklendiğinden C_b çemberinin merkezi ve yarıçapı

$$m_b=-\frac{[\varphi\psi](b)}{[\psi\psi](b)} \quad , \quad r_b=\frac{1}{|[\psi\psi](b)|} \tag{3.15}$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir.

(3.14) ifadesinde $m\overline{m}$ teriminin katsayısı $[\psi\psi](b)$ olduğundan m düzleminde C_b nin içi

$$\frac{[\kappa\kappa](b)}{[\psi\psi](b)}<0 \tag{3.16}$$

ile verilir.

Green formülünde $f=g=\psi$ ve $x_1=0$, $x_2=b$ alınırsa

$$\int_0^b \left(\overline{\psi}L\psi-\psi\overline{L\psi}\ \right)dx=[\psi\psi](b)-[\psi\psi](0)$$

bulunur. $[\psi\psi](0)=p\,(0)\Big(\psi\,(0)\,\overline{\psi}'\,(0)-\psi'\,(0)\,\overline{\psi}\,(0)\Big)=0$ ve $L\psi=\lambda\psi$ olduğu dikkate alınırsa

$$[\psi\psi](b)=\int_0^b |\psi|^2\left(\lambda-\overline{\lambda}\right)dx \Rightarrow [\psi\psi](b)=2i\Im\lambda\int_0^b |\psi|^2\,dx$$

elde edilir.

Benzer şekilde yine Green formülünde $f = g = \kappa$ ve $x_1 = 0$, $x_2 = b$ alınırsa

$$[\kappa\kappa](b) = 2i\Im\lambda \int_0^b |\kappa|^2 \, dx + [\kappa\kappa](0)$$

bulunur. Diğer taraftan $[\kappa\kappa](0) = -2i\Im m$ olup bunlar (3.16) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\int_0^b |\kappa|^2 \, dx < \frac{\Im m}{\Im\lambda} \qquad (\Im\lambda \neq 0) \tag{3.17}$$

elde edilir.

(3.17) ifadesi C_b çemberinin içini tanımlar. Yani m noktalarının C_b nin içinde olması için gerek ve yeter koşuldur.

Ek olarak m noktalarının C_b nin üzerinde olması için gerek ve yeter koşul

$$\int_0^b |\kappa|^2 \, dx = \frac{\Im m}{\Im\lambda} \qquad (\Im\lambda \neq 0) \tag{3.18}$$

olmasıdır.

(3.15) de ifade edilen r_b yarıçapı,

$$r_b = \frac{1}{|[\psi\psi](b)|}$$

ve

$$[\psi\psi](b) = 2i\Im\lambda \int_0^b |\psi|^2 \, dx$$

olduğundan $\Im\lambda > 0$ için

$$r_b^{-1} = 2\Im\lambda \int_0^b |\psi|^2 \, dx \tag{3.19}$$

ile verilir.

Şimdi $0 < a < b < \infty$ olsun. Bu durumda eğer m noktası C_b çemberinin içinde veya üzerinde ise

$$\int_0^a |\kappa|^2 \, dx < \int_0^b |\kappa|^2 \, dx \leq \frac{\Im m}{\Im\lambda}$$

olduğundan m noktası C_a çemberinin içinde olur. O halde $a < b$ için C_a çemberi C_b çemberini kapsayacaktır. Böylece verilen bir λ $(\Im\lambda > 0)$ için $b \to \infty$ durumunda C_b çemberleri ya bir C_∞ çemberine ya da bir m_∞ noktasına yakınsar.

Eğer C_b bir çembere yakınsarsa onun yarıçapı $r_\infty = \lim r_b$ pozitiftir ve (3.19) ifadesinden $\psi \in L^2(0,\infty)$ bulunur. Eğer $\widetilde{m}_\infty$, C_∞ limit çemberi üzerinde herhangi bir nokta ise $b > 0$ için $\widetilde{m}_\infty$, C_b çemberinin içindedir. Bu nedenle

$$\int_0^b |\varphi + \widetilde{m}_\infty \psi|^2 \, dx < \frac{\Im \widetilde{m}_\infty}{\Im\lambda}$$

olup $b \to \infty$ için $(\varphi + \widetilde{m}_\infty\psi) \in L^2(0,\infty)$ bulunur. Aynı ispat $\widetilde{m}_\infty$ nın m_∞ a kısıtlanması durumunda da geçerlidir. Bu nedenle $\Im\lambda \neq 0$ için $Ly = \lambda y$ denkleminin $L^2(0,\infty)$ sınıfından olan daima bir çözümü vardır.

$C_b \to C_\infty$ olması durumunda $\Im\lambda \neq 0$ için tüm çözümler $L^2(0,\infty)$ sınıfındandır. Çünkü ψ ve $(\varphi + \widetilde{m}_\infty\psi)$ nin $L^2(0,\infty)$ sınıfından olduğu gösterildi. Böylece C_∞ çemberinin varlığı ile limit çemberi durumu m_∞ noktasının varlığı ile de limit noktası durumu tanımlanır.

$C_b \to m_\infty$ olması durumu $\lim r_b = 0$ anlamına gelir. Böylece (3.19) ifadesinden $\psi \notin L^2(0,\infty)$ elde edilir. Bu durumda $\Im\lambda \neq 0$ için lineer bağımsız çözümlerden sadece bir tanesi $L^2(0,\infty)$ sınıfındandır.

Limit çemberi durumunda m nin C_b çemberi üzerinde olması için gerek ve yeter koşul (3.18) in sağlanmasıdır.

$$\kappa = \varphi(x,\lambda) + m\psi(x,\lambda)$$

olduğundan buradan elde edilir ki m nin C_∞ çemberi üzerinde olması için gerek ve yeter koşul

$$\Im\lambda \int_0^\infty |\kappa|^2 \, dx = \Im m$$

olmasıdır. $[\kappa\kappa](0) = -2i\Im m$ olduğundan m nin C_∞ limit çemberi üzerinde olması için gerek ve yeter koşul $[\kappa\kappa](\infty) = 0$ olmasıdır.

Limit noktası durumunda eğer m , C_b üzerinde herhangi bir nokta ise $m \to m_\infty$ limit noktası olur ve bu (3.8) sınır koşulundaki β nın seçiminden bağımsız olarak sağlanır.

O halde $\beta = 0$ için de sağlanır ve bu durumda limit noktası

$$m_\infty(\lambda) = -\lim_{b\to\infty} \frac{\varphi(b,\lambda)}{\psi(b,\lambda)} \tag{3.20}$$

ile verilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3 Eğer $\Im\lambda \neq 0$ ve φ ile ψ ; $Ly = \lambda y$ denkleminin (3.6) koşulunu sağlayan lineer bağımsız çözümleri ise $\kappa = \varphi + m\psi$ çözümünün (3.8) reel sınır koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul m nin kompleks düzlemde bir C_b çemberi üzerinde olmasıdır. Burada C_b çemberi

$$[\kappa\kappa](b) = 0$$

ile verilir. $b \to \infty$ için C_b ; ya bir C_∞ limit çemberine ya da bir m_∞ limit noktasına yakınsar. Birinci durumda $Ly = \lambda y$ denkleminin tüm çözümleri $L^2(0,\infty)$ sınıfındandır. İkinci durumda ise lineer bağımsız çözümlerden sadece biri $L^2(0,\infty)$ sınıfındandır. Ayrıca limit çemberi durumunda bir noktanın $C_\infty(\lambda)$ limit çemberi üzerinde olması için gerek ve yeter şart $[\kappa\kappa](\infty) = 0$ olmasıdır (Coddington ve Levinson 1955).

3.1 Limit Çemberi ve Limit Noktası Durumları İçin Kriterler

Bu kısımda L operatörünün limit çemberi veya limit noktası durumunda olduğunu karakterize eden bazı koşullar verilecektir.

Teorem 3.1.1 M, pozitif diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve k_1, k_2 pozitif sabitler olsun. Yeterince büyük x ler için

$$q(x) \geq -k_1 M(x) \ , \ \int_x^\infty (pM)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \infty$$

$$\left| p^{\frac{1}{2}}(x)\, M'(x)\, M^{-\frac{3}{2}}(x) \right| \leq k_2 \tag{3.21}$$

koşulları sağlansın. Bu durumda L operatörü singüler noktada (sonsuzlukta) limit noktası durumundadır (Coddington ve Levinson 1955).

İspat İspat için $Ly = 0$ denkleminin $L^2(0,\infty)$ uzayından olan iki lineer bağımsız çözüme sahip olamayacağı gösterilecektir. Burada Teorem 3.2 gereğince $\lambda = 0$ alınmasının bir sakıncası yoktur. Kabul edelimki κ, $Ly = 0$ denkleminin $L^2(0,\infty)$ sınıfından reel bir çözümü olsun. $(p\kappa')' = q\kappa$ olduğundan $c > 0$ için (3.21) koşulundan

$$\int_c^x \frac{(p\kappa')'\kappa}{M}dx = \int_c^x \frac{q\kappa^2}{M}dx \geq -k_1\int_c^x \kappa^2 dx$$

sağlanır. Sol taraftaki integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$k_3 = k_1\int_c^x \kappa^2 dx - \frac{p(c)\kappa'(c)\kappa(c)}{M(c)}$$

olmak üzere

$$-\frac{p\kappa'\kappa}{M} + \int_c^x \frac{(p\kappa')^2}{M}dx - \int_c^x \frac{p\kappa'\kappa M'}{M^2}dx < k_3 \tag{3.22}$$

elde edilir.

$$H(x) = \int_c^x \frac{(p\kappa')^2}{M}dx$$

olarak tanımlansın. (3.21) dikkate alınır ve Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|\int_c^x \frac{p\kappa'\kappa M'}{M^2}dx\right|^2 \leq k_2^2 H(x)\int_c^x \kappa^2 dx$$

bulunur. Buradan her iki taraftan karekök alınırsa

$$k_4 = k_2\left(\int_c^x \kappa^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

olmak üzere

$$\int_c^x \frac{p\kappa'\kappa M'}{M^2}dx \leq k_4 H^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Bu son eşitsizlik (3.22) de göz önüne alınırsa

$$-\frac{p\kappa'\kappa}{M} + H - k_4 H^{\frac{1}{2}} < k_3 \tag{3.23}$$

bulunur. Eger $x \to \infty$ için $H(x) \to \infty$ sağlanırsa (3.23) eşitsizliğinden $\frac{p\kappa'\kappa}{M} > H$

gerçeklenir. H fonksiyonu pozitif olduğundan $\frac{p\kappa'\kappa}{M} > 0$ sağlanır. p ve M pozitif fonksiyonlar olduğundan $\kappa'\kappa > 0$ dır. Bu ise $\kappa \in L^2(0,\infty)$ olması ie çelişir. Bu durumda H fonksiyonu sonlu olmalıdır. Yani ;

$$\int_c^\infty \frac{(p\kappa')^2}{M} dx < \infty \tag{3.24}$$

olmalıdır.Şimdi kabul edelim ki φ ve ψ, $Ly = 0$ denkleminin $L^2(0,\infty)$ sınıfndan olan iki lineer bağımsız çözümü olsunlar. Yani L operatörü limit çemberi durumunda olsun. Bu çözümlerin reel ve

$$[\varphi\overline{\psi}\ ] = p(\varphi\psi' - \psi\varphi') = 1 \tag{3.25}$$

olduğu kabul edilebilir.

(3.25) ifadesinin her iki yanı $(pM)^{\frac{1}{2}}$ ye bölünürse

$$\varphi\frac{p^{\frac{1}{2}}\psi'}{M^{\frac{1}{2}}} - \psi\frac{p^{\frac{1}{2}}\varphi'}{M^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(pM)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.26}$$

bulunur. (3.24) ve Schwarz eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\int_c^\infty \left| \varphi\frac{p^{\frac{1}{2}}\psi'}{M^{\frac{1}{2}}} - \psi\frac{p^{\frac{1}{2}}\varphi'}{M^{\frac{1}{2}}} \right| dx < \infty \tag{3.27}$$

elde edilir. (3.26) ifadesinin sağ tarafındaki ifade (3.21) den dolayı $(0.\infty)$ aralığında integrallenebilir değildir. Bu ise (3.27) ifadesiyle çelişir. O halde L operatörü limit noktası durumundadır.

$0 \le x < \infty$ için $M(x) = 1$ durumunda Teorem 3.1.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.2 Eğer k pozitif bir sabit olmak üzere

$$q(x) \ge -k \quad \text{ve} \quad \int^\infty p^{-\frac{1}{2}} dx = \infty$$

ise bu durumda L operatörü sonsuzlukta limit noktası durumundadır (Coddington ve Levinson 1955).

Bir çok ikinci basamaktan diferensiyel denklemde $p(t) = 1$ dir. Bu durumda Teorem 3.1.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.3 Eğer $0 \leq x < \infty$ için $p(x) = 1$ ve k pozitif sabiti için $q(x) \geq -kx^2$ ise bu durumda L operatörü sonsuzlukta limit noktası durumundadır (Coddington ve Levinson 1955).

Teorem 3.1.4 L_0 operatörü $L^2[0, \infty)$ da (3.1) diferensiyel ifadesi tarafından üretilen minimal simetrik operatör olsun. Eğer $a_0 \neq 0$ ve a_1 sabitleri için

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{a_0}\ , \ q - a_1$$

fonksiyonları $[0, \infty)$ da integrallenebilir ise L operatörünün eksiklik sayıları $(1, 1)$ dir (Naimark 1968).

Teorem 3.1.5 L_0 operatörü $L^2[0, \infty)$ da (3.1) diferensiyel ifadesi tarafından üretilen minimal simetrik operatör olsun. Eğer $q(x) \in L^2(0, \infty)$ ise L_0 operatörünün eksiklik sayıları $(1, 1)$ dir (Naimark 1968).

Teorem 3.1.6 L_0 operatörü $L^2[0, \infty)$ da (3.1) diferensiyel ifadesi tarafından üretilen minimal simetrik operatör olsun. Kabul edelim ki $p, q, q' \in AC_{loc}[0, \infty)$, $p'p^{-1} \in L^1[0, \infty)$, ve q' ile q'' yeterince büyük x_0 için aynı işaretli olsun. $x \to \infty$ için $q \to +\infty$ ve $q' = O(|q|^{\beta})$, $0 < \beta < \frac{3}{2}$ gerçeklensin. Bu durumda L_0 operatörü

$$\int^{\infty} |q(x)|^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

integralinin yakınsaması durumunda $(2, 2)$, ıraksaması durumunda $(1, 1)$ eksiklik sayılarına sahiptir (Naimark 1968).

Teorem 3.1.7 L_0 operatörü, pozitif yarı eksen üzerinde

$$\ell y = -y'' - q(x)y$$

diferensiyel ifadesi ile üretilen operatör olarak düşünülsün. Burada $q(x)$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyondur.

$$q^*(x) = \inf_{d>0} \left\{ d^{-1} : d^{-1} \geq \int\limits_x^{x+d} q(t)dt \right\}$$

fonksiyonu ele alınsın. Eğer aşağıdaki koşullar

1) $\lim\limits_{x\to\infty} q^*(x) = \infty$,

2) $q^{*'}(x) \geq 0$, $x \geq R$,

3) $q^*(x)q^{*'}(x) = O(q^*(x))^{2\alpha}, x \geq R$ için $0 < \alpha < 3/2$,

4) $q^*(x)\displaystyle\int_t^{\infty}((q(x) - q^{*^2}(x))/q^*(x)dx$, yeterince büyük R için $[R, \infty)$ üzerinde integrallenebilir,

gerçekleniyorsa bu durumda L_0 operatörü,

$$\int^{\infty} q^{*^{-1}}(x)dt$$

integralinin yakınsaması durumunda limit çemberi, ıraksaması durumunda limit noktası durumundadır (Sultanaev 1984).

4. SİMETRİK OLMAYAN DİFERENSİYEL OPERATÖRLER İÇİN WEYL TEORİSİ

Bu bölümde ikinci mertebeden kompleks katsalyılı simetrik olmayan bir diferensiyel operatör için limit noktası ve limit çemberi durumları anlatılacak ve çeşitli kriterler verilecektir. Bu bölüm Sims'in makalesi (1957) kaynak alınarak hazırlanmıştır.

r sonlu b keyfi singüler nokta olmak üzere ikinci mertebeden kompleks katsayılı diferensiyel eşitlik $[r, b)$ üzerinde

$$-y^{''} + [q(x) - \lambda] y = 0 \tag{4.1}$$

şeklinde ele alınacaktır. (4.1) denkleminin

$$\begin{aligned} \phi(r,\lambda) &= \sin\alpha \qquad \theta(r,\lambda) = \cos\alpha \\ \phi^{'}(r,\lambda) &= -\cos\alpha \quad \theta^{'}(r,\lambda) = \sin\alpha \end{aligned} \tag{4.2}$$

başlangıç koşullarına sahip $\phi(x,\lambda)$ ve $\theta(x,\lambda)$ çözümleri mevcuttur. (4.1) denkleminin genel çözümü $\widetilde{y} = \theta + l\phi$ formunda düşünülebilir. $r < b^{'} < b$ olacak şekilde $b^{'}$ noktasında β bir kompleks sayı olmak üzere

$$cos\beta y\left(b^{'}\right) + \sin\beta y^{'}\left(b^{'}\right) = 0$$

sınır koşulu verilsin. (4.1) denkleminin $\widetilde{y} = \theta + l\phi$ formundaki çözümlerinin yukarıdaki sınır koşulu sağlaması için l, $z = \cot\beta$ alınmak üzere

$$l\left(b^{'},\lambda,z\right) = -\frac{\theta(b^{'},\lambda) z + \theta^{'}(b^{'},\lambda)}{\phi(b^{'},\lambda) z + \phi^{'}(b^{'},\lambda)} \tag{4.3}$$

şeklinde elde edilir. $\phi\left(b^{'},\lambda\right) \neq 0$ ve $\phi^{'}\left(b^{'},\lambda\right) \neq 0$ kabul edilsin. Sabitlenmiş λ ve $b^{'}$ seçimi için (4.3) ifadesi z düzleminden l düzlemine bir kesirli lineer dönüşüm tanımlar. (4.3) denkleminde z çekilirse

$$z\left(b^{'},\lambda,\ell\right) = -\frac{\phi^{'}(b^{'},\lambda) l + \theta^{'}(b^{'},\lambda)}{\phi(b^{'},\lambda) l + \theta(b^{'},\lambda)} \tag{4.4}$$

bulunur. $\lambda = u + iv$, $q = q_1 + iq_2$ ve $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ olsun.

f ve g, (4.1) diferensiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri olmak üzere

$W_x[f,g] = f(x)\,g'(x) - f'(x)\,g(x)$ şeklinde tanımlansın.

$f(x)$; (4.1) denkleminin $g(x)$ de $-y'' + \left[\overline{q}(x) - \lambda'\right] y = 0$ denkleminin çözümü ise

$$\left(\lambda' - \lambda\right) \int\limits_r^{b'} f(x)g(x)dx = -2i \int\limits_r^{b'} q_2 f(x)g(x)dx + W_r[f,g] - W_{b'}[f,g] \tag{4.5}$$

elde edilir. Ek olarak $f(x)$; (4.1) denkleminin $g(x)$ de $-y'' + \left[q(x) - \lambda'\right] y = 0$ denkleminin çözümü ise (4.5) ifadesi

$$\left(\lambda' - \lambda\right) \int\limits_r^{b'} f(x)g(x)dx = W_r[f,g] - W_{b'}[f,g] \tag{4.6}$$

şekline dönüşecektir. $\lambda = u + iv$ olmak üzere (4.5) eşitliğinde $\lambda' = \overline{\lambda} = u - iv$ ve $g = \overline{f}$ alınırsa

$$2\int\limits_r^{b'} (v - q_2)\,|f(x)|^2\,dx = iW_r\left[f,\overline{f}\,\right] - iW_{b'}\left[f,\overline{f}\,\right] \tag{4.7}$$

gerçeklenir. (4.3) ifadesinin kritik noktasının imajiner kısmı

$$\Im\left[-\frac{\phi'(b',\lambda)}{\phi(b',\lambda)}\right] = \frac{1}{2i}\left(-\frac{\phi'(b',\lambda)}{\phi(b',\lambda)} + \frac{\overline{\phi'}(b',\lambda)}{\overline{\phi}(b',\lambda)}\right) = -\frac{1}{2}i\frac{W_{b'}\left[\phi,\overline{\phi}\,\right]}{|\phi|^2} \tag{4.8}$$

şeklinde elde edilir. (4.7) ifadesinde $W_r\left[\phi,\overline{\phi}\,\right] = -i\sinh 2\alpha_2$ olduğu yerine yazıldığında

$$W_{b'}\left[\phi,\overline{\phi}\,\right] = 2i\int\limits_r^{b'} (v - q_2)\,|f(x)|^2\,dx - i\sinh 2\alpha_2 \tag{4.9}$$

bulunur. (4.9) ifadesi (4.8) eşitliğinde dikkate alındığında

$$\Im\left[-\frac{\phi'(b',\lambda)}{\phi(b',\lambda)}\right] = \frac{1}{|\phi|^2}\left[\int\limits_r^{b'} (v - q_2)\,|\phi|^2\,dx - \frac{1}{2}\sinh 2\alpha_2\right] \tag{4.10}$$

elde edilir. $q_2 \leq 0$, $\alpha_2 \leq 0$ ve $v > 0$ durumunda kritik nokta üst-yarı z düzlemindedir ve alt-yarı z düzlemi, l düzleminde bir $C_{b'}(\lambda)$ çemberine dönüşür. Yani, bir l noktasının $C_{b'}(\lambda)$ çemberinin içinde olması için gerek ve yeter şart $\Im\left[z\left(b',\lambda,l\right)\right] < 0$ olmasıdır ve üzerinde olması için gerek ve yeter şart ise $\Im\left[z\left(b',\lambda,l\right)\right] = 0$ olmasıdır.

(4.4) eşitliği son ifadede kullanıldığında l, $C_{b'}(\lambda)$ çemberinin içinde veya üzerindeyse

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \ \Im\left[z\left(b',\lambda,l\right)\right] \le 0\\
&\Rightarrow \ \Im\left[-\frac{\phi' l+\theta'}{\phi l+\theta}\right] \le 0\\
&\Rightarrow \ i\left[-\frac{\phi' l+\theta'}{\phi l+\theta}+\frac{\overline{\phi'}\,\overline{l}+\overline{\theta'}}{\overline{\phi}\,\overline{l}+\overline{\theta}}\right] \ge 0\\
&\Rightarrow \ i\left[\frac{|l|^2\left(\phi\overline{\phi}'-\phi'\overline{\phi}\right)+\overline{l}\left(\theta\overline{\phi}'-\theta'\overline{\phi}\right)+l\left(\phi\overline{\theta}'-\phi'\overline{\theta}\right)+\left(\theta\overline{\theta}'-\theta'\overline{\theta}\right)}{|\phi|^2|l|^2+|\theta|^2+2\Re\left(\overline{\theta}l\phi\right)}\right] \ge 0\\
&\Rightarrow \ i\left\{|l|^2 W_{b'}\left[\phi,\overline{\phi}\,\right]+\overline{l}W_{b'}\left[\theta,\overline{\phi}\,\right]+lW_{b'}\left[\phi,\overline{\theta}\,\right]+W_{b'}\left[\theta,\overline{\theta}\,\right]\right\} \ge 0\\
&\Rightarrow \ iW_{b'}\left[\phi l+\theta,\overline{\phi}\,\overline{l}+\overline{\theta}\,\right] \ge 0
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

sağlanmalıdır. $\phi l+\theta$, (4.1) diferensiyel denkleminin çözümü olup (4.7) ifadesinden

$$2\int_r^{b'}(v-q_2)|\phi l+\theta|^2\,dx = iW_r\left[\phi l+\theta,\overline{\phi}\,\overline{l}+\overline{\theta}\,\right]-iW_{b'}\left[\phi l+\theta,\overline{\phi}\,\overline{l}+\overline{\theta}\,\right]$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte (4.11) ifadesi göz önüne alındığında

$$2\int_r^{b'}(v-q_2)|\phi l+\theta|^2\,dx \le iW_r\left[\phi l+\theta,\overline{\phi}\,\overline{l}+\overline{\theta}\,\right] \tag{4.12}$$

gerçeklenir.

$$
\begin{aligned}
W_r\left[\phi,\overline{\phi}\,\right] &= -i\sinh 2\alpha_2 & \qquad W_r\left[\theta,\overline{\phi}\,\right] &= -\cosh 2\alpha_2\\
W_r\left[\phi,\overline{\theta}\,\right] &= \cosh 2\alpha_2 & \qquad W_{b'}\left[\theta,\overline{\theta}\,\right] &= -i\sinh 2\alpha_2
\end{aligned}
$$

olup l, $C_{b'}(\lambda)$ çemberinin içinde veya üzerindeyse (4.12) eşitsizliğinden

$$2\int_r^{b'}(v-q_2)|\phi l+\theta|^2\,dx \le \left(1+|l|^2\right)\sinh 2\alpha_2-2\Im l\cosh 2\alpha_2 \tag{4.13}$$

bulunur.

$C_{b'}(\lambda)$ çemberinin merkezi $p_{b'}(\lambda) = l\left[b', \lambda, -\overline{\phi'}\left(b', \lambda\right)/\overline{\phi}\left(b', \lambda\right)\right]$ veya

$$p_{b'}(\lambda) = -\frac{W_{b'}\left[\,\overline{\phi}, \theta\right]}{W_{b'}\left[\,\overline{\phi}, \phi\right]} \tag{4.14}$$

ile verilir. Ayrıca $z = 0$ ın l düzlemindeki görüntüsü $-\dfrac{\theta'\left(b', \lambda\right)}{\phi'\left(b', \lambda\right)}$ olup bu nokta $C_{b'}(\lambda)$ çemberinin üzerinde olduğundan çemberin yarıçapı

$$\begin{aligned} r_{b'}(\lambda) &= \left|-\frac{W_{b'}\left[\,\overline{\phi}, \theta\right]}{W_{b'}\left[\,\overline{\phi}, \phi\right]} + \frac{\theta'\left(b', \lambda\right)}{\phi'\left(b', \lambda\right)}\right| \\ &= \left|\frac{\overline{\phi'}}{\phi'}\right|\left|\frac{W_{b'}\left[\theta, \phi\right]}{W_{b'}\left[\,\overline{\phi}, \phi\right]}\right| \\ &= \frac{1}{\left|W_{b'}\left[\,\overline{\phi}, \phi\right]\right|} \end{aligned} \tag{4.15}$$

şeklinde elde edilir. ϕ, (4.1) denkleminin bir çözümü olup (4.7) ifadesinden

$$W_{b'}\left[\,\overline{\phi}, \phi\right] = -2i\int_{r}^{b'}\left(v - q_2\right)\left|\phi\right|^2 dx + i\sinh 2\alpha_2$$

eşitliği gerçeklenir. Bu eşitlik (4.15) de dikkate alınırsa $C_{b'}(\lambda)$ çemberinin yarıçapı

$$r_{b'}(\lambda) = \left[-\sinh 2\alpha_2 + 2\int_{r}^{b'}\left(v - q_2\right)\left|\phi\right|^2 dx\right]^{-1} \tag{4.16}$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir.

(4.4) dönüşümü $C_{b'}(\lambda)$ çemberini z düzlemindeki reel eksen üzerine götürür. Bu nedenle (4.4) dönüşümünün kritik noktası $-\theta\left(b', \lambda\right)/\phi\left(b', \lambda\right)$ da $C_{b'}(\lambda)$ çemberinin üzerinde olmalıdır.

Şimdi $C_{b'}(\lambda)$ çemberinin üzerinde $-\dfrac{\theta\left(b', \lambda\right)}{\phi\left(b', \lambda\right)}$ ve $-\dfrac{\theta'\left(b', \lambda\right)}{\phi'\left(b', \lambda\right)}$ noktaları elde edildi. Bu durumda

$$\Rightarrow \quad \left| -\frac{\theta'(b',\lambda)}{\phi'(b',\lambda)} + \frac{\theta(b',\lambda)}{\phi(b',\lambda)} \right| \leq 2r_{b'}(\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad \left| \frac{W_{b'}[\theta,\phi]}{\phi'(b',\lambda)\,\phi(b',\lambda)} \right| \leq 2r_{b'}(\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad [r_{b'}(\lambda)]^{-1} \leq 2\left|\phi'\left(b',\lambda\right)\right|\left|\phi\left(b',\lambda\right)\right|$$

$$\Rightarrow \quad -\sinh 2\alpha_2 + 2\int_r^{b'} (v-q_2)\,|\phi|^2\,dx \leq 2\left|\phi'\left(b',\lambda\right)\right|\left|\phi\left(b',\lambda\right)\right| \qquad (4.17)$$

gerçeklenir. Şu ana kadar $\phi\left(b',\lambda\right) \neq 0$ ve $\phi'\left(b',\lambda\right) \neq 0$ kısıtlaması altında ilerlendi. Şimdi bu kısıtlama kaldırılacak fakat $q_2 \leq 0$, $\alpha_2 \leq 0$ ve $v > 0$ durumları hala geçerli olacaktır.

Eğer $r < b' < b$ olacak şekildeki keyfi b' için $\phi\left(b',\lambda_0\right) = 0$ olacak biçimde bir λ_0 varsa bu durumda λ_0 ın bir $N(\lambda_0)$ komşuluğu mevcuttur öyle ki $\lambda \neq \lambda_0$ ve $\lambda \in N(\lambda_0)$ olduğu sürece $\phi\left(b',\lambda\right) \neq 0$ gerçeklenir. $\lambda \to \lambda_0$ için (4.17) eşitsizliğinin sağ tarafı sıfıra gider. Bu durum q, α ve λ nın imajiner kısmı üzerindeki kısıtlamalardan eşitsizliğin sol tarafının kesinlikle pozitif olması ile çelişir. Yani $\phi\left(b',\lambda\right)$ sıfıra eşit olamaz.

Benzer şekilde $\phi'\left(b',\lambda\right) \neq 0$ olduğu da gösterilebilir.

$r \leq b' < b$ olacak şekildeki her b' için bir $C_{b'}(\lambda)$ çemberi mevcut olup (4.13) eşitsizliği gerçeklendiğinden $C_{b''}(\lambda) \subset C_{b'}(\lambda)$ olması için gerek ve yeter şart $b'' \geq b'$ olmasıdır. Yani $b' \to b$ için $C_{b'}(\lambda)$ çemberileri ya bir limit çemberine ya da bir limit noktasına yakınsar. Her iki durumda da tüm $C_{b'}(\lambda)$ çemberlerinin içinde bir nokta vardır. Bu nokta $M(\lambda)$ olsun. $b' \to b$ için (4.13) eşitsizliği l ile $M(\lambda)$ yerdeğiştirdiğinde de sağlanacaktır yani

$$\int_r^b |\phi M + \theta|^2 (v - q_2)\,dx < \infty$$

gerçeklenir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1 r sonlu b keyfi singüler nokta olmak üzere $[r, b]$ kapalı bir aralık ve $r \leq x < b$ için $q(x)$ sürekli olsun. $q_2 \leq 0$, $\alpha_2 \leq 0$ ve $v > 0$ olsun. Ayrıca $M(\lambda)$ tüm

$C_{b'}(\lambda)$ çemberlerinin içinde herhangi bir nokta olsun. Bu durumda

$$\psi(x,\lambda) = \phi(x,\lambda) M(\lambda) + \theta(x,\lambda)$$

(4.1) denkleminin bir çözümüdür ve

$$\int_r^b |\psi(x,\lambda)|^2 (v - q_2)\, dx < \infty$$

sağlanır (Sims 1957).

l düzleminin geometrisi açısından görüldü ki b noktasında ya limit çemberi durumu ya da limit noktası durumu vardır. Eğer b noktasında limit çemberi durumu gerçeklenirse $b' \to b$ için $r_{b'}(\lambda)$ pozitif limite sahip olmalıdır. Böylece (4.16) ifadesinden

$$\int_r^b |\phi(x,\lambda)|^2 (v - q_2)\, dx < \infty$$

elde edilir. Sonuç olarak limit çemberi durumunda (4.1) denkleminin $(v - q_2)$ ağırlık fonksiyonuna göre $[r, b]$ aralığında kare integrallenebilen iki lineer bağımsız çözümü mevcuttur (ϕ ve ψ çözümleri). Eğer b noktasında limit noktası durumu gerçekleniyorsa tüm $C_{b'}(\lambda)$ çemberlerinin içinde sadece bir $M(\lambda)$ noktası vardır. Böylece (4.16) eşitliğinden ϕ çözümü $(v - q_2)$ ağırlık fonksiyonuna göre $[r, b]$ aralığında kare integrallenemez. Yani bu durumda (4.1) denkleminin sadece bir çözümü $(v - q_2)$ ağırlık fonksiyonuna göre $[r, b]$ aralığında kare integrallenebilirdir (ψ çözümü).

$$\int_r^b |\phi|^2\, dx < \infty \quad \text{fakat} \quad \int_r^b |\phi|^2 (v - q_2)\, dx = \infty$$

olduğunda limit noktası durumunun özel bir alt durumu ortaya çıkar. O halde b singüler noktasında 3 farklı durum vardır.

Durum I. Limit noktası durumu, sadece bir $\psi(x,\lambda)$ çözümü $(v - q_2)$ ağırlık fonksiyonuna göre $[r, b]$ aralığında kare integrallenebilirdir.

Durum II. Limit noktası durumu, $[r, b]$ aralığında kare integrallenebilen iki lineer bağımsız çözüm mevcuttur ancak sadece $\psi(x,\lambda)$ çözümü $(v - q_2)$ ağırlık fonksiyonuna göre $[r, b]$ aralığında kare integrallenebilirdir.

Durum III. Limit çemberi durumu, $(v-q_2)$ ağırlık fonksiyonuna göre $[r,b]$ aralığında kare integrallenebilen iki lineer bağımsız çözüm mevcuttur.

Durum II nin klasik Weyl $(q_2=0)$ teorisinde benzeri yoktur. Bu durumun varlığına ilişkin aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 4.2 (Sims 1957) $q(x)=\dfrac{5}{16}x^{-2}-ix^{-1}$ olmak üzere

$$-y^{''}+q(x)\,y=0,\;\; x\in(0,1)$$

diferensiyel denklemi için $x_0=0$ denklemin düzgün aykırı noktası olup çözüm

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r}$$

Frobenius Serisi şeklinde aranacaktır.

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r} \\ y^{'} &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,a_nx^{n+r-1} \\ y^{''} &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)\,a_nx^{n+r-2} \end{aligned}$$

ifadeleri denklemde yerine yazıldığında

$$(4r+1)(4r-5)\,a_0x^r+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(4n+4r+5)(4n+4r-1)\,a_{n+1}+16ia_n\right]x^{n+r+1}=0$$

elde edilir. Burada

$$(4r+1)(4r-5)\,a_0=0,\quad a_0\neq 0$$

ifadesi indisel denklem ve

$$a_{n+1}=-\frac{16i}{(4n+4r+5)(4n+4r-1)}a_n\;\;;\;(n=0,1,2,...)$$

ifadesi de genel indirgeme bağıntısıdır.

$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_1}$ ve $y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_2}$ olmak üzere denklemin genel çözümü $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ tipindedir.

$r_1 = -\dfrac{1}{4}$ için

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -\frac{16i}{(4n+4)(4n-2)} a_n \ , \quad n \geq 0 \\ a_n &= \frac{(-2)^n i^n}{n!(-1)\, 1.3.5...(2n-3)} a_0 \end{aligned}$$

olup

$$y_1 = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n i^n}{n!(-1)\, 1.3.5...(2n-3)} x^{n-1/4}$$

bulunur. $r_2 = \dfrac{5}{4}$ için

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -\frac{16i}{(4n+10)(4n+4)} a_n \ , \quad n \geq 0 \\ a_n &= \frac{(-2)^n i^n}{n!5.7...(2n+3)} a_0 \end{aligned}$$

olup

$$y_2 = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n i^n}{n!5.7...(2n+3)} x^{n+5/4}$$

elde edilir. Özel olarak $a_0 = 1$ alınırsa $x \to 0$ için

$$y_1 \sim x^{-1/4} \quad \text{ve} \quad y_2 \sim x^{5/4}$$

lineer bağımsız iki çözümü bulunur.

Buradan açıktır ki çözümlerin ikisi de $(0,1)$ aralığında kare integrallenebilirdir. Ancak sadece y_2 çözümü $(v - q_2)$ ağırlık fonksiyonuna göre $(0,1)$ aralığında kare integrallenebilirdir.

Teorem 4.3 Durumlar sadece $q(x)$ katsayı fonksiyonuna bağlıdır. Eğer

$$\int_r^b |\phi(x,\lambda_0)|^2 \, dx < \infty \text{ ve } \int_r^b |\theta(x,\lambda_0)|^2 \, dx < \infty$$

sağlanırsa aynı sonuç λ nın tüm diğer değerleri için de geçerlidir. Eğer

$$\int_r^b |\phi(x,\lambda_0)|^2 (v_0 - q_2)\, dx < \infty \text{ ve } \int_r^b |\theta(x,\lambda_0)|^2 (v_0 - q_2)\, dx < \infty$$

ise aynı sonuç λ nın tüm diğer değerleri için de geçerlidir (Sims 1957).

İspat $Ly = \lambda_0 y$ denkleminin $L^2[r,b]$ sınıfından olan iki lineer bağımsız çözümü $\phi(x,\lambda_0)$ ve $\theta(x,\lambda_0)$ olsun. $\phi(x,\lambda)$ da $Ly = \lambda y$ denkleminin keyfi bir çözümü olsun. $Ly = \lambda y$ denklemi

$$Ly - \lambda_0 y = (\lambda - \lambda_0)\, y$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda $\phi(x,\lambda_0)$ ve $\theta(x,\lambda_0)$, $Ly - \lambda_0 y = 0$ homogen denkleminin iki lineer bağımsız çözümü olur. Homogen olmayan denklemin çözümünü bulmak için parametrelerin değişimi yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \phi(x,\lambda) &= \phi(x,\lambda_0) + (\lambda_0 - \lambda)\,\theta(x,\lambda_0)\int_r^x \phi(t,\lambda_0)\,\phi(t,\lambda)\,dt - \\ &\quad - (\lambda_0 - \lambda)\,\phi(x,\lambda_0)\int_r^x \theta(t,\lambda_0)\,\phi(t,\lambda)\,dt \end{aligned} \tag{4.18}$$

elde edilir. (4.18) ifadesinde gerekli düzenlemeler yapılıp Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |\phi(x,\lambda)| &\leq |\phi(x,\lambda_0)| + |\lambda_0 - \lambda|\,|\theta(x,\lambda_0)| \int_r^x |\phi(t,\lambda_0)\,\phi(t,\lambda)|\,dt \\ &\quad + |\lambda_0 - \lambda|\,|\phi(x,\lambda_0)| \int_r^x |\theta(t,\lambda_0)\,\phi(t,\lambda)|\,dt \\ &\leq |\phi(x,\lambda_0)| + |\lambda_0 - \lambda|\,|\theta(x,\lambda_0)| \left(\int_r^b |\phi(t,\lambda_0)|^2\,dt\right)^{1/2} \left(\int_r^{b'} |\phi(t,\lambda)|^2\,dt\right)^{1/2} \\ &\quad + |\lambda_0 - \lambda|\,|\phi(x,\lambda_0)| \left(\int_r^b |\theta(t,\lambda_0)|^2\,dt\right)^{1/2} \left(\int_r^{b'} |\phi(t,\lambda)|^2\,dt\right)^{1/2} \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitsizlikte her iki tarafın karesi alındığında $r \leq x \leq b' < b$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
|\phi(x,\lambda)|^2 &\leq 3|\phi(x,\lambda_0)|^2 + \\
&+3|\lambda-\lambda_0|^2 |\theta(x,\lambda_0)|^2 \int_r^b |\phi(t,\lambda_0)|^2 dt \int_r^{b'} |\phi(t,\lambda)|^2 dt + \qquad (4.19)\\
&+3|\lambda-\lambda_0|^2 |\phi(x,\lambda_0)|^2 \int_r^b |\theta(t,\lambda_0)|^2 dt \int_r^{b'} |\phi(t,\lambda)|^2 dt
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. $b'' < b'$ olmak üzere (4.19) ifadesinde b'' den b' ye integral alınırsa

$$
\begin{aligned}
\int_{b''}^{b'} |\phi(t,\lambda)|^2 dt &\leq 3\int_r^b |\phi(t,\lambda_0)|^2 dt + \\
&+3|\lambda-\lambda_0|^2 \int_{b''}^b |\theta(t,\lambda_0)|^2 dt \int_r^b |\phi(t,\lambda_0)|^2 dt \int_r^{b'} |\phi(t,\lambda)|^2 dt \\
&+3|\lambda-\lambda_0|^2 \int_{b''}^b |\phi(t,\lambda_0)|^2 dt \int_r^b |\theta(t,\lambda_0)|^2 dt \int_r^{b'} |\phi(t,\lambda)|^2 dt
\end{aligned}
$$

gerçeklenir. Burada $K_0 = 3\int_r^b |\phi(t,\lambda_0)|^2 dt$ ve

$$
K(b'') = 3|\lambda-\lambda_0|^2 \left[\int_{b''}^b |\theta(t,\lambda_0)|^2 dt \int_r^b |\phi(t,\lambda_0)|^2 dt + \int_{b''}^b |\phi(t,\lambda_0)|^2 dt \int_r^b |\theta(t,\lambda_0)|^2 dt \right]
$$

denirse

$$
\int_{b''}^{b'} |\phi(t,\lambda)|^2 dt \leq K_0 + K(b'') \int_r^{b'} |\phi(t,\lambda)|^2 dt \qquad (4.20)
$$

eşitsizliği elde edilir. b'', $K(b'') < \frac{1}{2}$ olacak şekilde yeterince büyük seçilirse (4.20) ifadesinden

$$
\int_{b''}^{b'} |\phi(t,\lambda)|^2 dt < K_0 + \frac{1}{2}\int_r^{b'} |\phi(t,\lambda)|^2 dt
$$

bulunur. Son eşitsizlikte sağ taraftaki integral sola atılıp gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$\int_{b''}^{b'} |\phi(t,\lambda)|^2 dt < 2K_0 + \int_{r}^{b''} |\phi(t,\lambda)|^2 dt \tag{4.21}$$

elde edilir. (4.21) ifadesinin sağ tarafı b' den bağımsız olduğundan b'' sabitlenirse $b' \to b$ için

$$\int_{r}^{b} |\phi(x,\lambda)|^2 dx < \infty$$

bulunur.

Benzer bir ispat $\theta(x,\lambda)$ için de geçerlidir.

Teoremin ikinci kısmının ispatı için birinci kısmın sonucu (4.19) ifadesinde göz önüne alınarak eşitsizlikte b' yerine b yazılabilir. Ayrıca (4.19) ifadesinin her iki yanı $(v_0 - q_2)$ ile çarpılıp b' den b ye integral alınırsa

$$\int_{b'}^{b} |\phi(t,\lambda)|^2 (v_0 - q_2)\, dt \leq 3\int_{r}^{b} |\phi(t,\lambda_0)|^2 (v_0 - q_2)\, dt +$$

$$+ 3|\lambda - \lambda_0|^2 \int_{b'}^{b} |\theta(t,\lambda_0)|^2 (v_0 - q_2)\, dt \int_{r}^{b} |\phi(t,\lambda_0)|^2 dt \int_{r}^{b} |\phi(t,\lambda)|^2 dt +$$

$$+ 3|\lambda - \lambda_0|^2 \int_{b'}^{b} |\phi(t,\lambda_0)|^2 (v_0 - q_2)\, dt \int_{r}^{b} |\theta(t,\lambda_0)|^2 \int_{r}^{b} |\phi(t,\lambda)|^2 dt$$

gerçeklenir. b' sabitlenirse eşitsizliğin sağ tarafı teoremin ikinci kısmının hipotezinden ve birinci kısmının hükmünden sonlu bir değer olup

$$\int_{r}^{b} |\phi(x,\lambda)|^2 (v_0 - q_2)\, dx < \infty$$

bulunur.

Benzer şekilde $\int_{r}^{b} |\theta(x,\lambda)|^2 (v_0 - q_2)\, dx < \infty$ olduğu da gösterilebilir.

4.1 Durum I, Durum II ve Durum III İçin Kriterler

$$\ell y(x) = -y''(x) + q(x)\,y(x)\,, \qquad 0 \le x < \infty$$

kompleks katsayılı diferensiyel ifadesi düşünülsün.

Bu kısımda L^2 kompleks Hilbert uzayı $L^2(0,\infty)$ u göstersin. $\mathcal{D}^*$, $f \in L^2$ fonksiyonlarının kümesi olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlasın:

1. Her $X > 0$ için f', $[0, X]$ üzerinde mutlak sürekli,

2. $\ell f \in L^2$.

$\mathcal{D}^*$ kümesi üzerinde $Lf = \ell f$ şeklinde tanımlanan L operatörü için bilinen bazı kriterler aşağıda verilmiştir.

Lemma 4.1.1 M kesinlikle pozitif diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $x \ge c > 0$ için

$$M'(x) = O\left(M^{3/2}(x)\right)$$

olsun. Eğer bir k pozitif sabiti için $x \ge c$ oldukça

$$q_1(x) \ge -kM(x)$$

sağlanıyorsa her $f \in D^*$ için $M^{-\frac{1}{2}} f' \in L^2(c,\infty)$ gerçeklenir (Evans 1970).

İspat

$$\int_c^X \frac{f''\overline{f}}{M} dx = \int_c^X \left(-\frac{\overline{f} l f}{M} + \frac{q\,|f|^2}{M} \right) dx$$

eşitliğinde sol tarafta kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_c^X \left(-\frac{\overline{f} l f}{M} + \frac{q\,|f|^2}{M} \right) dx = \left[\frac{f'\overline{f}}{M} \right]_c^X - \int_c^X \left(\frac{|f'|^2}{M} - \frac{f'\overline{f}M'}{M^2} \right) dx \tag{4.22}$$

bulunur. (4.22) ifadesinde her iki tarafın reel kısımları eşitlenirse

$$\int_c^X \left(-\frac{\Re\left(\overline{f} lf\right)}{M} + \frac{q_1 |f|^2}{M}\right) dx = \left[\frac{\Re\left(f'\overline{f}\right)}{M}\right]_c^X - \int_c^X \left(\frac{|f'|^2}{M} - \frac{\Re\left(f'\overline{f}\right) M'}{M^2}\right) dx \qquad (4.23)$$

elde edilir.

$$H(X) = \int_c^X \frac{|f'|^2}{M} dx$$

olsun. $f \in D^*$ ve $x \geq c$ için $M'(x) = O\left(M^{3/2}(x)\right)$ olup Schwarz eşitsizliğinden k_1, k_2, k_3 pozitif sabitleri mevcuttur öyle ki

$$\int_c^X \frac{q_1 |f|^2}{M} dx \geq -k \int_c^X |f|^2 dx \geq -k_1 \qquad (4.24)$$

$$\left| \int_c^X -\frac{\Re\left(\overline{f} lf\right)}{M} dx \right| \leq \int_c^X \frac{\left|\overline{f} lf\right|}{M} dx \leq k_2 \qquad (4.25)$$

$$\left| \int_c^X \frac{\Re\left(f'\overline{f}\right) M'}{M^2} dx \right| \leq \int_c^X \left|\frac{M'}{M^{\frac{3}{2}}}\right| \left|\overline{f}\right| \left|\frac{f'}{M^{\frac{1}{2}}}\right| dx \leq k_3 H^{\frac{1}{2}}(X) \qquad (4.26)$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. (4.24), (4.25) ve (4.26) ifadeleri (4.23) de göz önüne alınırsa

$$H(X) - k_3 H^{\frac{1}{2}}(X) - \left[\frac{\Re\left(f'\overline{f}\right)}{M}\right]_c^X \leq k_1 + k_2 \qquad (4.27)$$

bulunur. Eğer $M^{-\frac{1}{2}} f' \notin L^2(c, \infty)$ yani $X \to \infty$ için $H(X) \to +\infty$ ise (4.27) eşitsizliğinden $X \to \infty$ için

$$\frac{\Re\left(f'(X)\,\overline{f}(X)\right)}{M(X)} \to +\infty$$

gerçeklenir. Ancak $\Re\left(f'\overline{f}\right) = \frac{1}{2}\left(|f|^2\right)'$ eşitliğinden $|f|^2$ pozitif fonksiyonu tüm büyük x ler için pozitif limite sahiptir. Bu nedenle $|f|^2$ artan olup bu da $f \in L^2$ olması ile çelişir. O halde $H(X)$ sonlu olmalıdır yani

$$M^{-\frac{1}{2}} f' \in L^2(c,\infty) \tag{4.28}$$

olmalıdır.

Teorem 4.1.2 M kesinlikle pozitif diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $x \geq c > 0$ için

$$M'(x) = O\left(M^{3/2}(x)\right)$$

olsun. Ayrıca bir k pozitif sabiti ve $x \geq c$ için $q_1(x) \geq -kM(x)$ olsun. Eğer

$$\int_c^\infty M^{-\frac{1}{2}} dx = \infty$$

ise L operatörü Durum I (limit noktası durumu) tipindedir (Evans 1970).

İspat Eğer L operatörü Durum I tipinde değilse $\Im\lambda > 0$ için $Lf = \ell f$ denkleminin L^2 sınıfından olan iki lineer bağımsız ϕ ve ψ çözümleri mevcuttur. Çözümlerin Wronskiyenlerinin

$$[\phi\overline{\psi}] = \phi\psi' - \phi'\psi = 1 \tag{4.29}$$

olduğu kabul edilebilir. (4.29) ifadesinin her iki yanı $M^{\frac{1}{2}}$ ile bölünürse

$$\phi\left(M^{-\frac{1}{2}}\psi'\right) - \left(M^{-\frac{1}{2}}\phi'\right)\psi = M^{-\frac{1}{2}} \tag{4.30}$$

bulunur. (4.30) ifadesinde (4.28) ve Schwarz eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|\int_c^\infty \phi\left(M^{-\frac{1}{2}}\psi'\right) - \left(M^{-\frac{1}{2}}\phi'\right)\psi\right| dx < \infty \tag{4.31}$$

elde edilir. (4.30) ifadesinin sağ tarafındaki ifade teoremin hipotezinden dolayı $(c.\infty)$ aralığında integrallenebilir değildir. Bu ise (4.31) ifadesiyle çelişir. O halde L operatörü Durum I tipindedir.

Teorem 4.1.3 M kesinlikle pozitif diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve kabul edelim ki $x \geq c$ ve en az bir $\delta > 0$ için aşağıdaki koşullar gerçeklensin:

$$M'(x)=O\left(M^{\frac{3}{2}}(x)\right)\quad M'(x)=O\left((-q_2)^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}(1+\delta)}\right)$$

$$\int_c^\infty M^{\delta-\frac{1}{2}}dx=\infty \qquad \int_c^\infty \frac{(-q_2)^{\frac{1}{2}}}{M^{\frac{1}{2}(1+\delta)}}dx=\infty \tag{4.32}$$

Bu durumda eğer $x\geq c$ için $q_1(x)\geq -kM(x)$ ise L operatörü Durum I tipindedir (Evans 1970).

İspat (4.22) eşitliğinin elde edilmesindeki yöntemde M yerine M^δ alınıp bulunan ifadenin imajiner kısımları eşitlendiğinde her $f\in D^*$ için

$$\int_c^X\left(-\frac{\Im\left(\overline{f}lf\right)}{M^\delta}+\frac{q_2|f|^2}{M^\delta}\right)dx=\left[\frac{\Im\left(f'\overline{f}\right)}{M^\delta}\right]_c^X+\delta\int_c^X\frac{\Im\left(f'\overline{f}\right)M'}{M^{\delta+1}}dx \tag{4.33}$$

gerçeklenir.

$$F(X)=\int_c^X\frac{(-q_2)|f|^2}{M^\delta}dx$$

olsun. Lemma 4.1.1 den $M^{-\frac{1}{2}}f'\in L^2(c,\infty)$ olup (4.32) ve Schwarz eşitsizliğinden k_1,k_2 sabitleri mevcuttur öyle ki

$$\left|\int_c^X\frac{\Im\left(\overline{f}lf\right)}{M^\delta}dx\right|\leq k_1 \tag{4.34}$$

$$\left|\int_c^X\frac{\Im\left(f'\overline{f}\right)M'}{M^{\delta+1}}dx\right|\leq\int_c^X\left(\left|\frac{M'}{(-q_2)^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}(1+\delta)}}\right|\frac{|f'|}{M^{\frac{1}{2}}}\frac{(-q_2)^{\frac{1}{2}}|f|}{M^{\frac{\delta}{2}}}\right)dx\leq k_2F^{\frac{1}{2}}(X) \tag{4.35}$$

eşitsizlikleri sağlanır. (4.33) ifadesinde (4.34) ve (4.35) eşitsizlikleri dikkate alındığında

$$F(X)-k_2F^{\frac{1}{2}}(X)+\left[\frac{\Im\left(f'\overline{f}\right)}{M^\delta}\right]_c^X\leq k_1 \tag{4.36}$$

bulunur. Kabul edelim ki $(-q_2)^{\frac{1}{2}}M^{-\delta/2}f\notin L^2(c,\infty)$ yani $X\to\infty$ için $F(X)\to+\infty$ olsun. Bu durumda (4.36) eşitsizliğinden

$$\lim_{x\to\infty}\left\{-\frac{\Im\left(f'(X)\overline{f}(X)\right)}{M^\delta(X)}\right\}=+\infty$$

olmalıdır. Yani yeterince büyük X_0 ve $x \geq X_0$ için

$$-\Im\left(f^{'}(x)\,\overline{f}(x)\right) > M^{\delta}(x)$$

olur. Böylece $X \to \infty$ için (4.32) den

$$\int_{X_0}^{X} -\frac{\Im\left(f'\overline{f}\right)}{M^{\frac{1}{2}}}dx > \int_{X_0}^{X} M^{\delta-\frac{1}{2}}dx \to \infty \tag{4.37}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\int_{X_0}^{X} -\frac{\Im\left(f'\overline{f}\right)}{M^{\frac{1}{2}}}dt \leq \int_{X_0}^{X} \frac{|f|\,|f'|}{M^{\frac{1}{2}}} \leq \|f\| \left(\int_{X_0}^{\infty} \frac{|f'|^2}{M}dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.38}$$

gerçeklenir. Lemma 4.1.1 den (4.38) ifadesinin sağ tarafı sonlu bir değer olup bu ise (4.37) eşitsizliği ile çelişir. Bu nedenle $F(X)$ sonlu olmalıdır. Yani

$$(-q_2)^{\frac{1}{2}}\, M^{-\delta/2} f \in L^2(c,\infty) \tag{4.39}$$

sağlanmalıdır. Eğer L operatörü Durum I tipinde değilse $\Im\lambda > 0$ için $Lf = \ell f$ denkleminin L^2 sınıfından olan iki lineer bağımsız ϕ ve ψ çözümleri mevcuttur.

$$\phi\psi^{'} - \phi^{'}\psi = 1 \tag{4.40}$$

olduğu kabul edilebilir. (4.40) eşitliğinin her iki tarafı $\dfrac{(-q_2)^{\frac{1}{2}}}{M^{\frac{1}{2}(1+\delta)}}$ ile çarpılırsa

$$\left\{\frac{(-q_2)^{\frac{1}{2}}\phi}{M^{\frac{\delta}{2}}}\right\}\left\{\frac{\psi^{'}}{M^{\frac{1}{2}}}\right\} - \left\{\frac{\phi^{'}}{M^{\frac{1}{2}}}\right\}\left\{\frac{(-q_2)^{\frac{1}{2}}\psi}{M^{\frac{\delta}{2}}}\right\} = \frac{(-q_2)^{\frac{1}{2}}}{M^{\frac{1}{2}(1+\delta)}} \tag{4.41}$$

elde edilir. (4.39) ve Schwarz eşitsizliğinden (4.41) ifadesinin sol tarafı (c,∞) da integrallenebilirdir. Ancak sağ taraf (4.32) gereği (c,∞) da integrallenemez. Bu nedenle L operatörü Durum I tipindedir.

Sonuç 4.1.4 Eğer bazı pozitif k sabitleri için

$$q_1(x) \geq kx^{\beta}$$

ve

$$q_2(x) = -a^2 x^\alpha$$

ise L operatörü Durum I tipindedir. Burada $\beta = \max\left(2, \frac{2}{3}\alpha + 2\right)$ dir (Evans 1970).

İspat Eğer $\beta = 2$ ise Teorem 4.1.2 den açıkça görülür ki L operatörü Durum I tipindedir.

$\beta > 2$ ve dolayısıyla $\alpha > 0$ durumunda ise $M(x) = x^\beta$ ve $\delta = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\beta}$ seçimiyle Teorem 4.1.3 ün hipotezlerinin sağlandığı kolaylıkla görülebilir.

Teorem 4.1.5 M kesinlikle pozitif diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve kabul edelim ki $x \geq c$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$M'(x) = O\left((-q_2(x))^{\frac{1}{2}} M^{\frac{3}{2}}(x)\right),$$

$$\int_c^\infty M^{-\frac{1}{2}} (-q_2)^{\frac{1}{2}} dx = \infty.$$

Eğer $x \geq c$ için

$$q_1(x) \geq kM(x) q_2(x)$$

ise L operatörü Durum III tipinde değildir (Evans 1970).

Teorem 4.1.6

$$q_1(x) = -b^2 x^\beta$$

ve

$$q_2(x) = -a^2 x^\alpha \quad (\alpha > 0)$$

olsun. Eğer $\beta < 2\alpha + 2$ ise L operatörü Durum I tipindedir.

$\beta = 2\alpha + 2$ olduğunda $a^2/b \geq \alpha$ ise L operatörü Durum I tipindedir, $a^2/b < \alpha$ ise L operatörü Durum II tipindedir (Evans 1970).

5. $M(\lambda)$ FONKSİYONLARININ ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde 4. Bölümde bahsedilen $M(\lambda)$ fonksiyonlarının özellikleri anlatılacaktır.

z_0, $\Im z_0 \leq 0$ olacak şekilde herhangi bir kompleks sayı ve $r < b_0 < b$ olmak üzere b_0 keyfi bir nokta olsun. $b_0 < b' < b$ için (4.3) dönüşümü ile verilen $l\left(b', \lambda, z_0\right)$ fonksiyonları göz önüne alınsın. $\Im z_0 \leq 0$ olduğundan $\Im\lambda > 0$ için $l\left(b', \lambda, z_0\right)$ analitiktir. $\Im\lambda > 0$ için (4.14) ve (4.16) ifadeleri ile verilen $p_{b_0}(\lambda)$ ve $r_{b_0}(\lambda)$, λ nın sürekli fonksiyonlarıdır. Bu nedenle $p_{b_0}(\lambda)$ ve $r_{b_0}(\lambda)$ üst yarı λ düzleminin her kompakt alt kümesinde düzgün sınırlıdır. $b_0 < b' < b$ için

$$\left|l\left(b', \lambda, z_0\right)\right| < r_{b_0}(\lambda) + \left|p_{b_0}(\lambda)\right|$$

olduğundan $l\left(b', \lambda, z_0\right)$ fonksiyonlarının kümesi üst yarı λ düzleminin her kompakt alt kümesinde b' ye göre düzgün sınırlıdır. Sonuç olarak üst yarı λ düzleminin herhangi bir kompakt G kümesi için $b_i \to b$ olacak şekilde bir dizi mevcuttur öyle ki $l(b_i, \lambda, z_0)$, $M(\lambda)$ limitine yakınsar. Vitali Teoremi'nden $M(\lambda)$, G de analitiktir ve G kümesinin keyfi olmasından dolayı $M(\lambda)$ tüm üst yarı λ düzlemi boyunca analitiktir.

Eğer $\Im z_0 = 0$ ise $l\left(b', \lambda, z_0\right)$ noktası her bir λ için $C_{b'}(\lambda)$ çemberinin üzerindedir. Bu yüzden $M(\lambda)$ noktası da $C_b(\lambda)$ çemberinin üzerindedir. Ek olarak $\Im\lambda > 0$ için her bir $f\left(b', \lambda\right)$ analitik ve her b' için $\Im\left[f\left(b', \lambda\right)\right] \leq 0$ olması şartıyla z_0, $f\left(b', \lambda\right)$ fonksiyonu ile yerdeğiştirebilir.

Durum III te $M(\lambda)$ tek şekilde tanımlı değildir. Aksine $f\left(b', \lambda\right)$ fonksiyonlarının farklı seçimlerine uygun olan analitik M fonksyonlarının bir sınıfı mevcuttur. Örneğin; eğer M_0, $C_b(\lambda_0)$ limit çemberi içinde veya üzerinde bir nokta ise

$$f\left(b', \lambda\right) = z\left(b', \lambda_0, M_0\right)$$

seçimi $M(\lambda_0) = M_0$ özelliğine sahip bir analitik M fonksiyonu üretir. Böylece en az $M(\lambda)$ analitik fonksiyonlarının farklı seçimleri kadar keyfi bir limit çemberi üzerinde nokta vardır.

$\Im\lambda_0 > 0$ olacak şekildeki keyfi λ_0 için $C_b(\lambda_0)$ limit çemberi üzerinde bir M_0 noktası seçilsin. Her bir $C_{b'}(\lambda_0)$ çemberi üzerinde $b' \to b$ için $M' \to M_0$ ve

$$M' \neq -\theta\left(b', \lambda_0\right) / \phi\left(b', \lambda_0\right)$$

olacak şekilde bir M' noktası alınsın. Şimdi $f\left(b',\lambda\right) = z\left(b',\lambda_0, M'\right)$ olsun. M' üzerindeki kısıtlama f fonksiyonunun analitikliğini garanti eder. Ayrıca M' noktası $C_{b'}(\lambda_0)$ çemberi üzerinde olduğundan $\Im\left[f\left(b',\lambda\right)\right] = 0$ dır. Bunun sonucunda $l\left(b',\lambda, f\left(b',\lambda\right)\right)$ fonksiyonları değerlerini $C_{b'}(\lambda)$ çemberi üzerinde alır ve $\Im\lambda > 0$ için analitiktirler. Daha öncede söylendiği gibi $l\left(b',\lambda, f\left(b',\lambda\right)\right)$ fonksiyonları kümesinin bir analitik M fonksiyonuna yakınsayan bir alt dizisi mevcuttur ve limit dizisinin elemanlarının özelliğinden $M(\lambda)$ limit fonksiyonu değerlerini $C_b(\lambda)$ limit çemberi üzerinde alır. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.1 Her durumda $\Im\lambda > 0$ için analitik olan bir M fonksiyonu mevcuttur. Durum III te M_0, keyfi bir $C_b(\lambda_0)$ limit çemberinin keyfi bir noktası olmak üzere $M(\lambda) = M_0$ olacak şekilde bir analitik M fonksiyonu bulunabilir. Ek olarak $\Im\lambda > 0$ için $M(\lambda)$ daima $C_b(\lambda)$ limit çemberinin üzerinde olacak şekilde bir M fonksiyonu bulunabilir (Sims 1957).

Teorem 5.2 Durum II de $M(\lambda)$ meromorftur. Durum III te herhangi bir analitik M fonksiyonu meromorftur. Her iki durumda da λ_1 noktasının $M(\lambda)$ nın kutup noktası olması için gerek ve yeter şart $\Im\lambda > 0$ olacak şekildeki her λ için

$$1 + (\lambda_1 - \lambda)\int_r^b \psi(x,\lambda)\,\phi(x,\lambda_1)\,dx = 0$$

olmasıdır. Eğer λ_1 ve λ_2 noktalarının ikisi de $M(\lambda)$ nın kutup noktası ise

$$\int_r^b \phi(x,\lambda_1)\,\phi(x,\lambda_2)\,dx = 0$$

gerçeklenir (Sims 1957).

Teorem 5.2 nin ispatı için öncelikle aşağıdaki lemmalar verilmelidir.

Lemma 5.3 Tüm durumlarda $\Im\lambda > 0$ ve $\Im\lambda' > 0$ olması şartıyla her analitik M fonksiyonu için

$$W_b\left[\psi(x,\lambda), \psi\left(x,\lambda'\right)\right] = 0 \tag{5.1}$$

sağlanır (Sims 1957).

İspat $\theta(x,\lambda)+l(\lambda)\phi(x,\lambda)$, $x=b^{'}$ noktasında λ dan bağımsız bir sınır koşul sağladığından

$$W_{b'}\left[\theta(x,\lambda)+l(\lambda)\phi(x,\lambda),\theta\left(x,\lambda^{'}\right)+l\left(\lambda^{'}\right)\phi\left(x,\lambda^{'}\right)\right]=0$$

gerçeklenir. Bu durumda

$$W_{b'}\left[\psi(x,\lambda)+\{l(\lambda)-M(\lambda)\}\phi(x,\lambda),\psi\left(x,\lambda^{'}\right)+\left\{l\left(\lambda^{'}\right)-M\left(\lambda^{'}\right)\right\}\phi\left(x,\lambda^{'}\right)\right]=0$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}&W_{b'}\left[\psi(x,\lambda),\psi\left(x,\lambda^{'}\right)\right]+\{l(\lambda)-M(\lambda)\}W_{b'}\left[\phi(x,\lambda),\psi\left(x,\lambda^{'}\right)\right]\\&+\left\{l\left(\lambda^{'}\right)-M\left(\lambda^{'}\right)\right\}W_{b'}\left[\psi(x,\lambda),\phi\left(x,\lambda^{'}\right)\right]\\&+\{l(\lambda)-M(\lambda)\}\left\{l\left(\lambda^{'}\right)-M\left(\lambda^{'}\right)\right\}W_{b'}\left[\phi(x,\lambda),\phi\left(x,\lambda^{'}\right)\right]=0\end{aligned}\tag{5.2}$$

elde edilir. (5.2) ifadesinin ikinci terimi, (4.6) eşitliğinden

$$\begin{aligned}W_{b'}\left[\phi(x,\lambda),\psi\left(x,\lambda^{'}\right)\right]=\;&\left(\lambda-\lambda^{'}\right)\int_r^{b'}\phi(x,\lambda)\psi\left(x,\lambda^{'}\right)dx\\&+W_r\left[\phi(x,\lambda),\psi\left(x,\lambda^{'}\right)\right]\end{aligned}\tag{5.3}$$

şeklinde bulunur. Schwarz eşitsizliği yardımıyla

$$\left|\left(\lambda-\lambda^{'}\right)\int_r^{b'}\phi(x,\lambda)\psi\left(x,\lambda^{'}\right)dx\right|\leq\left|\lambda-\lambda^{'}\right|\left(\int_r^{b'}|\phi(x,\lambda)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_r^{b'}\left|\psi\left(x,\lambda^{'}\right)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

olup

$$\frac{\left|\left(\lambda-\lambda^{'}\right)\int_r^{b'}\phi(x,\lambda)\psi\left(x,\lambda^{'}\right)dx\right|}{\left(\int_r^{b'}|\phi(x,\lambda)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}}<\infty$$

elde edilir. Son eşitsizlik ve

$$W_r\left[\phi(x,\lambda),\psi\left(x,\lambda^{'}\right)\right]=1$$

olduğu (5.3) ifadesinde dikkate alınırsa λ ve $\lambda^{'}$ sabitlenip $b^{'}\to b$ için

$$W_{b^{'}}\left[\phi(x,\lambda),\psi\left(x,\lambda^{'}\right)\right]=O\left\{\int_r^b|\phi(x,\lambda)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}+O(1)$$

bulunur. Limit noktası durumunda

$$|l(\lambda)-M(\lambda)|\leq 2r_{b^{'}}=2\left[-\sinh 2\alpha_2+2\int_r^{b^{'}}(v-q_2)|\phi|^2\,dx\right]^{-1}$$

olup $b^{'}\to b$ için

$$\{l(\lambda)-M(\lambda)\}\,W_b\left[\phi(x,\lambda),\psi\left(x,\lambda^{'}\right)\right]=0$$

gerçeklenir. Bu eşitlik limit çemberi durumunda $l(\lambda)\to M(\lambda)$ ise $\int_r^b|\phi(x,\lambda)|^2\,dx$ sınırlı olduğundan sağlanır.

Benzer iddialar (5.2) nin üç ve dördüncü terimlerine de uygulanarak (5.1) elde edilir.

Lemma 5.4 Her durumda $\Im\lambda>0$ ve $\Im\lambda^{'}>0$ için

$$M(\lambda)=M\left(\lambda^{'}\right)+\left(\lambda^{'}-\lambda\right)\int_r^b\psi(x,\lambda)\,\psi\left(x,\lambda^{'}\right)dx \tag{5.4}$$

gerçeklenir (Sims 1957).

İspat $\psi(x,\lambda)$ ve $\psi\left(x,\lambda^{'}\right)$ sırasıyla

$$-y^{''}+[q(x)-\lambda y]=0\ \text{ ve }\ -y^{''}+\left[q(x)-\lambda^{'}y\right]=0$$

diferensiyel denklemlerinin çözümü olmak üzere (4.6) ifadesinden

$$\begin{aligned}\left(\lambda^{'}-\lambda\right)\int_{r}^{b^{'}}\psi\left(x,\lambda\right)\psi\left(x,\lambda^{'}\right)dx &= W_{r}\left[\psi\left(x,\lambda\right),\psi\left(x,\lambda^{'}\right)\right]\\ &\quad -W_{b'}\left[\psi\left(x,\lambda\right),\psi\left(x,\lambda^{'}\right)\right] \qquad (5.5)\end{aligned}$$

elde edilir. (5.5) eşitliğinde

$$W_{r}\left[\psi\left(x,\lambda\right),\psi\left(x,\lambda^{'}\right)\right]=M\left(\lambda\right)-M\left(\lambda^{'}\right)$$

olduğu ve Lemma 5.3 ten $b^{'}\to b$ için

$$W_{b}\left[\psi\left(x,\lambda\right),\psi\left(x,\lambda^{'}\right)\right]=0$$

gerçeklendiği dikkate alındığında (5.4) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 5.5 Durum II ve Durum III te $\int_{r}^{b}\left|\phi\left(x,\lambda\right)\right|^{2}dx$ ve $\int_{r}^{b}\left|\theta\left(x,\lambda\right)\right|^{2}dx$ fonksiyonları λ düzleminin her kompakt alt kümesinde λ ya göre sınırlıdır (Sims 1957).

İspat G, λ düzleminde keyfi kompakt bir küme olsun. Durum II ve Durum III ün her ikisinde de (4.19) eşitsizliğinde $b^{'}$ ile b değiştirilebilir. Elde edilen yeni ifadenin her iki tarafının keyfi λ ve $\lambda^{'}$ için r den b ye integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\int_{r}^{b}\left|\phi\left(x,\lambda\right)\right|^{2}dx &\leq 3\int_{r}^{b}\left|\phi\left(x,\lambda^{'}\right)\right|^{2}dx\\ &\quad +3\left|\lambda-\lambda^{'}\right|^{2}\int_{r}^{b}\left|\theta\left(x,\lambda^{'}\right)\right|^{2}dx\int_{r}^{b}\left|\phi\left(x,\lambda^{'}\right)\right|^{2}dx\int_{r}^{b}\left|\phi\left(x,\lambda\right)\right|^{2}dx\\ &\quad +3\left|\lambda-\lambda^{'}\right|^{2}\int_{r}^{b}\left|\phi\left(x,\lambda^{'}\right)\right|^{2}dx\int_{r}^{b}\left|\theta\left(x,\lambda^{'}\right)\right|^{2}dx\int_{r}^{b}\left|\phi\left(x,\lambda\right)\right|^{2}dx\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$K\left(\lambda^{'}\right)=6\left(\int_{r}^{b}\left|\phi\left(x,\lambda^{'}\right)\right|^{2}dx\right)\left(\int_{r}^{b}\left|\theta\left(x,\lambda^{'}\right)\right|^{2}dx\right)$$

olmak üzere

$$\int_r^b |\phi(x,\lambda)|^2 dx \leq 3\int_r^b \left|\phi\left(x,\lambda'\right)\right|^2 dx + K\left(\lambda'\right)\left|\lambda-\lambda'\right|^2 \int_r^b |\phi(x,\lambda)|^2 dx \tag{5.6}$$

elde edilir. G kümesindeki her bir λ' bir $N\left(\lambda'\right)$ komşuluğu oluşturur öyle ki $\lambda \in N\left(\lambda'\right)$ için $K\left(\lambda'\right)\left|\lambda-\lambda'\right| < \frac{1}{2}$ sağlanır. G kompakt olduğundan bir $N(\lambda_!)$, $N(\lambda_2), ..., N(\lambda_n)$ sonlu altörtüsü G kümesini kapsar. Böylece

$$\int_r^b |\phi(x,\lambda)|^2 dx \leq 6\int_r^b \left|\phi\left(x,\lambda'\right)\right|^2 dx \tag{5.7}$$

bulunur. K_0, $6\int_r^b |\phi(x,\lambda_j)|^2 dx,\ j = 1,2,...,n$ sayılarının maksimumu olsun. Bu durumda (5.7) eşitsizliğinden $\int_r^b |\phi(x,\lambda)|^2 dx < K_0$ elde edilir.

Benzer şekilde $\int_r^b |\theta(x,\lambda)|^2 dx$ fonksiyonunun sınırlılığı da gösterilebilir.

Lemma 5.6 Durum II ve Durum III te $\int_r^b \phi^2(x,\lambda)\,dx$, $\int_r^b \phi(x,\lambda)\,\theta(x,\lambda)\,dx$ ve $\int_r^b \theta^2(x,\lambda)\,dx$ fonksiyonları λ nın tam fonksiyonlarıdır. Ayrıca $\phi(x,\lambda)$ ve $\theta(x,\lambda)$; λ düzleminden $L^2[r.b]$ sınıfına (kuvvetli anlamda) tam fonksiyonlardır (Sims 1957).

İspat Lemma 5.6 nın ispatı Lemma 5.5 ten elde edilir.

Lemma 5.5 , (4.19) eşitsizliğinin sağ tarafına uygulanırsa keyfi kompakt G kümesindeki λ ve (r,b) aralığındaki her x için $|\phi(x,\lambda)|$ düzgün sınırlı olur. Böylece integralin tanımı gereği G kümesinde $\int_r^{b'} \phi^2(x,\lambda)\,dx$ fonksiyonuna noktasal yakınsayan $F_n(\lambda)$ tam fonksiyonlarının bir düzgün sınırlı dizisi mevcuttur.bu durumda Vitali

Teoremi' nden $\int\limits_r^{b'} \phi^2(x,\lambda)\,dx$, G kümesinde analitiktir. Ek olarak

$\int\limits_r^{b'} \phi^2(x,\lambda)\,dx \to \int\limits_r^{b} \phi^2(x,\lambda)\,dx$ sağlanır. $\int\limits_r^{b'} \phi^2(x,\lambda)\,dx$ analitik fonksiyonlarının kümesi Lemma 5.5 ten G kümesinde düzgün sınırlı olduğundan $\int\limits_r^{b} \phi^2(x,\lambda)\,dx$, G de analitiktir. Benzer işlemler $\int\limits_r^{b} \phi(x,\lambda)\,\theta(x,\lambda)\,dx$ ve $\int\limits_r^{b} \theta^2(x,\lambda)\,dx$ fonksiyonlarına da uygulanabilir.

Şimdi Teorem 5.2 nin ispatına geçilebilir.

(5.4) denklemi $M(\lambda)$ için çözülürse

$$\begin{aligned}
M(\lambda) &= M\left(\lambda'\right) + \left(\lambda' - \lambda\right) \int\limits_r^{b} \psi(x,\lambda)\,\psi\left(x,\lambda'\right) dx \\
&= M\left(\lambda'\right) + \left(\lambda' - \lambda\right) \int\limits_r^{b} \left[\theta(x,\lambda) + M(\lambda)\,\phi(x,\lambda)\right] \psi\left(x,\lambda'\right) dx \\
&= M\left(\lambda'\right) + \left(\lambda' - \lambda\right) \int\limits_r^{b} \theta(x,\lambda)\,\psi\left(x,\lambda'\right) dx + \\
&\quad + \left(\lambda' - \lambda\right) M(\lambda) \int\limits_r^{b} \phi(x,\lambda)\,\psi\left(x,\lambda'\right) dx
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$M(\lambda) = \frac{M\left(\lambda'\right) + \left(\lambda' - \lambda\right) \int\limits_r^{b} \theta(x,\lambda)\,\psi\left(x,\lambda'\right) dx}{1 + \left(\lambda - \lambda'\right) \int\limits_r^{b} \phi(x,\lambda)\,\psi\left(x,\lambda'\right) dx} \tag{5.8}$$

elde edilir. (5.8) eşitliği $\Im\lambda > 0$ ve $\Im\lambda' > 0$ olacak şekildeki tüm λ, λ' çiftleri için geçerlidir. Lemma 5.6 dan (5.8) ifadesinin sağ tarafı $\Im\lambda' > 0$ ve λ , paydanın sıfırı olmadığı sürece her λ için tanımlıdır ve analitiktir. (5.8) ifadesi $\Im\lambda' > 0$ olacak biçimdeki keyfi sabitlenmiş $\lambda^{'}$ için $M(\lambda)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş tanımı olarak alınabilir. $M(\lambda)$, $1+\left(\lambda-\lambda^{'}\right)\int\limits_{r}^{b}\phi(x,\lambda)\psi\left(x,\lambda^{'}\right)dx=0$ tam fonksiyonunun sıfırlarında oluşan kutup noktaları haricinde analitiktir. Böylece $\Im\lambda>0$ için $M(\lambda)$ meromorftur.

(5.8) eşitliğinde $\lambda^{'}$, üst yarı λ düzleminden keyfi kompleks bir sayıydı. O halde eğer λ_1, $M(\lambda)$ nın kutup noktası ise $\Im\lambda^{'}>0$ olacak şekildeki her $\lambda^{'}$ için (5.8) ifadesinin paydası sıfır olmalıdır. Yani eğer λ_1, $M(\lambda)$ nın kutup noktası ise $\Im\lambda^{'}>0$ olacak şekildeki her $\lambda^{'}$ için

$$1+\left(\lambda_1-\lambda^{'}\right)\int\limits_{r}^{b}\phi(x,\lambda_1)\psi\left(x,\lambda^{'}\right)dx=0$$

olur. Diğer yandan bazı λ_1 ve $\Im\lambda^{'}>0$ olacak şekildeki her $\lambda^{'}$ için

$$1+\left(\lambda_1-\lambda^{'}\right)\int\limits_{r}^{b}\phi(x,\lambda_1)\psi\left(x,\lambda^{'}\right)dx=0$$

ise $1+\left(\lambda_1-\lambda^{'}\right)\int\limits_{r}^{b}\phi(x,\lambda_1)\left[\theta\left(x,\lambda^{'}\right)+M\left(\lambda^{'}\right)\phi\left(x,\lambda^{'}\right)\right]dx=0$ bulunur. Bu eşitlikten $M\left(\lambda^{'}\right)$ çekilirse

$$M\left(\lambda^{'}\right)=-\frac{1+\left(\lambda_1-\lambda^{'}\right)\int\limits_{r}^{b}\phi(x,\lambda_1)\theta\left(x,\lambda^{'}\right)dx}{\left(\lambda_1-\lambda^{'}\right)\int\limits_{r}^{b}\phi(x,\lambda_1)\phi\left(x,\lambda^{'}\right)dx} \tag{5.9}$$

elde edilir. Böylece $M\left(\lambda^{'}\right)$ fonksiyonu da λ_1 de kutup noktasına sahiptir. Buradan görülür ki λ_1 noktasının $M(\lambda)$ nın kutup noktası olması için gerek ve yeter şart $\Im\lambda>0$ olacak şekildeki her λ için

$$1+(\lambda_1-\lambda)\int\limits_{r}^{b}\psi(x,\lambda)\phi(x,\lambda_1)dx=0$$

olmasıdır.

$\lambda \to \lambda_1$ için $M(\lambda)$ nın kutup noktasının mertebesi birden büyükse (5.9) ifadesinden

$$\int_r^b \phi^2(x,\lambda_1)\,dx = 0$$

elde edilir.

Eğer λ_1 ve λ_2 noktalarının ikisi de $M(\lambda)$ nın kutup noktaları ise (5.9) eşitliğinden

$$\int_r^b \phi(x,\lambda_1)\,\phi(x,\lambda_2)\,dx = 0$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

KAYNAKLAR

Bairamov, E. and Krall, A. M. 2001. Dissipative operators generated by the Sturm-Liouville expression in the Weyl limit-circle case. J. Math Anal. Appl., vol. 254, pp. 178-190

Baimarov, E., Uğurlu E. 2011. The determinant of dissipative Sturm-Liouville operators with transmission conditions. Mathemetical and Computer Modelling, vol. 53, pp. 805-813.

Behrndt, J., Malamud, M., Neidhardt, H. 2008. Scattering matrices and Weyl functions. London Math. Soc. (3), vol. 97, pp. 568-598.

Coddington, E. A., Levinson N.1955. Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill, New York.

Derkavh, V., Hassi S., Malamud, M., De Snoo, H. 2006. Boundary relations and their Weyl families. Trans. of the American Math. Soc., vol. 358, no. 12, pp. 5351-5400.

Evans, W. D.1971. On the limit point, limit circle classification of a second order differential equation with a complex coefficient. J. London Math. Soc. (2), vol.4, pp. 245-256.

Gorbachuk, V. I., Gorbachuk M. L., 1991. Boundary Value Problems for Operator Differential Eguations. Kluwer Academic Publishers, London.

Hoffman, K. 1962. Banach Spaces of Analytic Functions. Prentice-Hall, Inc., USA.

Kuzhel, A. 1996. Charecteristic Functions and Models of Nonself-adjoint Operators. Kluwer Academic Publishers, London.

Naimark, M. A. 1968. Linear Differental Operators (second ed.). Nauka, Moscow English transl. of first ed., Parts 1, 2, Ungar, New York.

Sims, A.R. 1957. Secondary conditions for linear differential operators of the second order. Journal of Mathematics and Mechanics, vol. 6, no.2.

Sultanaev, Y. T. 1984. On the deficiency indices and the spectrum of a nonsemi bounded Sturm-Liouville operator. Soviet Math. Dokl. vol. 29, No.3,652-653.

Titchmarsh, E. C. 1939. The Theory of Functions(second ed.). Oxford University Press, London.

Titchmarsh, E. C. 1962. Eigenfunction Expansion Associated with Second Order Differential Equations. Part 1 (second ed.), Oxford Univ. Press,Oxford.

Zettl, A. 2005. Sturm-Liouville Theory. American Mathematical Society, USA.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	İbrahim ERDAL
Doğum Yeri	:	Ankara
Doğum Tarihi	:	21.08.1987
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Halide Edip Lisesi (2005)
Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2010)