T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇLÜ BANT FORMUNDAKİ BİR SİMETRİK MATRİSİN ORTOGONAL DÖNÜŞÜMLERLE KÖŞEGENLEŞTİRİLMESİ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

HAZIRLAYAN
Durmuş BOZKURT

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Ferhat YILDIRIM

KONYA - 1988

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Bu çalışmada simetrik matrislerin köşegenleştirilmesi üzerinde duruldu. Çalışma dört bölümden meydana gelmiştir. Birinci bölümde çalışmayla ilgili temel bilgiler verildi. İkinci bölümde ortogonal matrisler ve ortogonal dönüşümler; üçüncü bölümde ise simetrik matrislerin ve kuadratik formların bazı özellikleri verildi.

Çalışmamızın esası dördüncü bölümde toplanmıştır. Bu bölümde Givens Metodu'yla üçlü bant matris formuna getirilmiş bir simetrik matrisin ortogonal dönüşümlerle köşegenleştirilmesi üzerinde durularak bir çözüm getirildi.

Bu çalışmamda danışmanlığımı üstlenen değerli hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Ferhat YILDIRIM'a; çalışmalarım esnasında yardımlarını esirgemeyen muhterem hocam Doç. Dr. Ali SİNAN'a teşekkür eder en derin hürmetlerimi sunarım.

Durmuş BOZKURT

NOTASYONLAR

$A = \| a_{ij} \|_1^n$: n×n tipinde kare matris

A^t : A matrisinin transpozesi

E : n×n tipinde birim matris

A^{-1} : A matrisinin tersi

$|A|$: A matrisinin determinantı

δ_{ij} : Kronecker deltası

$\| x \|$: x vektörünün normu

Σ : Toplam operatörü

I. BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

1.1. Karakteristik Matris ve Karakteristik Polinom

Tarif 1.1.1 (Karakteristik Matris) : Bir F cismi üzerinde V n-boyutlu vektör uzayı, $a_{ij} \in F$ için A, n-kare matris, $\alpha \in V$ ve $\lambda \in F$ olmak üzere

$$f : \alpha \rightarrow A\,\alpha$$

lineer dönüşümü α'yı $A\,\alpha$ olan kendi doğrultusuna dönüştürsün. Yani

$$A\,\alpha = \lambda\,\alpha \qquad (1.1)$$

olsun. E birim matris olmak üzere (1.1) denklemini

$$A\,\alpha = \lambda\,E\,\alpha$$

$$(A - \lambda E)\,\alpha = 0 \qquad (1.2)$$

şeklinde yazalım. (1.2) denklemindeki $(A - \lambda E)$ matrisine dönüşümün karakteristik matrisi denir.

Tarif 1.1.2 (Karakteristik Determinant) : (1.2) denklemindeki $(A - \lambda E)$ matrisinin determinantına A matrisinin karakteristik determinantı denir ve $\Delta(\lambda)$ ile gösterilir.

Tarif 1.1.3 (Karakteristik Polinom) : a_i, A n-kare matrisinin i-inci mertebeden esas alt matrislerinin determinant değerlerinin toplamı olmak üzere,

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{n} + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n \qquad (1.3)$$

polinomuna A matrisinin karakteristik polinomu denir.

Tarif 1.1.4 (Karakteristik Denklem): $\Delta(\lambda) = \lambda^{n} + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ denklemine A matrisinin karakteristik denklemi denir.

Tarif 1.1.5 (Özdeğer): $\Delta(\lambda) = 0$ denkleminin köklerine A matrisinin özdeğerleri denir.

Tarif 1.1.6 (Özvektör) : $A = \|a_{ij}\|_1^n$ n-kare matrisinin bir özdeğeri λ ise, buna karşılık gelen $\alpha \neq 0$ vektörüne A matrisinin bir özvektörü denir.

1.2. Karakteristik Polinom ve Karakteristik Denklemin Özellikleri

Karakteristik polinomda derecesi en yüksek olan terimin katsayısı 1 dir. Çünkü karakteristik determinantı göz önüne aldığımızda esas köşegen üzerindeki elemanların çarpımı

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\ldots(a_{nn} - \lambda)$$

şeklinde olup bu çarpım λ^n 'i ihtiva eder. $\Delta(\lambda) = 0$ denkleminden λ^{n-k} 'nın katsayısı olan a_k ise A matrisinden elde edilen $|A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{i_1 i_2 \ldots i_k}|$ minörlerinin bir toplamıdır. Yani,

$$a_k = (-1)^k \sum_{\sigma} |A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{i_1 i_2 \ldots i_k}| \qquad (1.4)$$

dir. Burada $1,2,\ldots,n$ indislerinden her defasında k tane alınarak elde edilen

$$\sigma = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \qquad (1.5)$$

farklı kombinasyonlar için $i_1, i_2, \ldots, i_k$ lar elde edilir.

1.3. Özdeğer ve Özvektörlerle İlgili Özellikler

Teorem 1.3.1. $A = \|a_{ij}\|_1^n$ n-kare matrisinin özdeğerleri

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ve $k \neq 0$ bir skaler olmak üzere kA matrisinin özdeğerleri $k\lambda_1, k\lambda_2, \ldots, k\lambda_n$ dir. [1]

İspat : (1.1) denkleminden $A\,\alpha_i = \lambda_i\,\alpha_i$ idi. Her iki tarafı $k \neq 0$ ile çarparsak

$$k\,A\,\alpha_i = k\,\lambda_i\,\alpha_i \qquad (1.6)$$

elde ederiz. Bu da $k\,A$ matrisinin özdeğerlerinin $k\lambda_i$ olması demektir.

Teorem 1.3.2. $A = \| a_{ij} \|_1^n$ n-kare matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ise A^k matrisinin özdeğerleri de $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$ dır. [1]

İspat : $A = \| a_{ij} \|_1^n$ n-kare matrisi için

$$A\,x_i = \lambda_i\,x_i \quad , \; (i=1,2,\ldots,n) \qquad (1.7)$$

olsun. (1.7) ' nin her iki yanının karesini alırsak

$$(A\,x_i)^2 = (\lambda_i\,x_i)^2$$

$$A^2\,x_i^2 = \lambda_i^2\,x_i$$

olur. Burada

$$y_i = x_i^2 \quad , \; (i=1,2,\ldots,n)$$

alırsak

$$A^2\,y_i = \lambda_i^2\,y_i \qquad (1.8)$$

elde ederiz. Böylece devam edersek

$$A^{k-1} m_i = \lambda_i^{k-1} m_i$$

$$A^{k} m_i^{2} = \lambda_i^{k} m_i^{2} \qquad (1.9)$$

olur. $m_i^2 = z_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ alırsak

$$A^{k} z_i = \lambda_i^{k} z_i \qquad (1.10)$$

elde ederiz ki A^k 'nın özdeğerleri $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$ dır.

Teorem 1.3.3. $A = \| a_{ij} \|_1^n$ n-kare matrisinin özdeğerleri λ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ ve E n-inci mertebeden birim matris ise $A + E$ matrisinin özdeğerleri de $\lambda_i + 1$ $(i=1,2,\ldots,n)$ dir. [1]

İspat :

$$A \alpha_i = \lambda_i \alpha_i \qquad (1.11)$$

$$E \alpha_i = 1.\alpha_i \qquad (1.12)$$

olsun. (1.11) ve (1.12) denklemlerini taraf tarafa toplarsak

$$(A + E) \alpha_i = (\lambda_i + 1) \alpha_i$$

elde ederiz ki $A + E$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_i + 1$ dir.

Teorem 1.3.4. $A = \| a_{ij} \|_1^n$ n-kare matris olsun. A 'nın özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ve bunlara karşılık gelen özvektörler

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ olsun. $i \neq j$ için $\lambda_i \neq \lambda_j$ ise $x_1, x_2, \ldots, x_n$ özvektörleri lineer bağımsızdır. [1]

İspat : $s_1, s_2, \ldots, s_n$ skalerler olmak üzere

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_n x_n = 0 \qquad (1.13)$$

olsun. (1.13) denklemini sırayla $A^0, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}
& s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_n x_n = 0 \\
& s_1 A x_1 + s_2 A x_2 + \ldots + s_n A x_n = 0 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1.14) \\
& s_1 A^{n-1} x_1 + s_2 A^{n-1} x_2 + \ldots + s_n A^{n-1} x_n = 0
\end{aligned}$$

homogen denklem sistemini elde ederiz.

$$A x_i = \lambda_i x_i$$

eşitliğini gözönüne alırsak (1.14) denklem sistemi

$$\begin{aligned}
& s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_n x_n = 0 \\
& s_1 \lambda_1 x_1 + s_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + s_n \lambda_n x_n = 0 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1.15) \\
& s_1 \lambda_1^{n-1} x_1 + s_2 \lambda_2^{n-1} x_2 + \ldots + s_n \lambda_n^{n-1} x_n = 0
\end{aligned}$$

homogen denklem sistemine dönüşür. (1.15) denklem sistemini matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 x_1 \\ s_2 x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_n x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1.16)$$

olur. Buradan

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (1.17)$$

dersek

$$|B| = \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j) \qquad (1.18)$$

dir. $i \neq j$ için $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ olduğundan $|B| \neq 0$ olur. Dolayısıyla B^{-1} mevcuttur. (1.16) denkleminin her iki yanını B^{-1} ile çarparsak

$$\left[s_1 x_1, s_2 x_2, \dots, s_n x_n \right]^t = 0 \qquad (1.19)$$

denklemini elde ederiz. x_i 'ler sıfırdan farklı olduklarından

$$s_1 = s_2 = \dots = s_n = 0$$

olurlar. O halde $x_1, x_2, \dots, x_n$ özvektörleri lineer bağımsızdır.

1.4. Vektörlerin Ortogonalleştirilmesi

Teorem 1.4.1. (Gram - Schmidt Ortogonalleştirme Metodu) : Üzerinde iç çarpım tarif edilmiş bir E vektör uzayı verilsin. Bu uzayın s tane lineer bağımsız vektörü $(x_1, x_2, \dots, x_s)$ olsun. Bu vektörler yardımıyla E 'nin bir alt vektör uzayını doğuran $\{e_1, e_2, \ldots, e_s\}$ formunda ortonormal bir sistem elde edilebilir. Burada her e_i $(i=1,2,\ldots,s)$ vektörü $x_1, x_2, \ldots, x_s$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonudur. [2]

İspat : E iç çarpım uzayının s sayıda vektöründen meydana gelen $\{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ sistemini alalım. Buna da V alt uzayı karşılık gelsin. y_i vektörler dizisini

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 \\
y_2 &= \lambda_2^1 y_1 + x_2 \\
y_3 &= \lambda_3^1 y_1 + \lambda_3^2 y_2 + x_3 \qquad\qquad (1.20) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_s &= \lambda_s^1 y_1 + \lambda_s^2 y_2 + \ldots + \lambda_s^{s-1} \cdot y_{s-1} + x_s
\end{aligned}$$

şeklinde tarif edelim. Bu dizideki λ_i^j $(i>j)$ skalerlerini, y_i vektörünün kendisinden önce gelen y_j vektörlerine ortogonal olacak şekilde belirleyeceğiz. O halde,

$$\langle y_2, y_1 \rangle = 0$$

ise

$$\langle \lambda_2^1 y_1 + x_2, x_1 \rangle = 0$$

olup iç çarpımın özelliğinden

$$\lambda_2^1 \langle y_1, x_2 \rangle + \langle x_2, x_1 \rangle = 0$$

olur. Buradan

$$\lambda_2^1 = -\frac{\langle x_2, x_1 \rangle}{\| y_1 \|^2} \qquad (1.21)$$

olur. Burada $\| y_1 \|^2 \neq 0$ dır. Çünkü $y_1 = x_1$ ve $\{ x_1, x_2, \ldots, x_s \}$ sistemi lineer bağımsız olup x_i 'lerden herbiri sıfırdan farklıdır. O halde

$$y_2 = -\frac{\langle y_1, x_2 \rangle}{\| y_1 \|^2} y_1 + x_2$$

elde ederiz. Burada $\langle y_1, y_2 \rangle = 0$ dır. Ayrıca $y_2 \neq 0$ dır. çünkü x_1 ile x_2 lineer bağımsızdır.

λ_3^1 ve λ_3^2 'ü de (1.20) sisteminde y_3 'ün sırayla y_1 ve y_2 ile iç çarpımından elde ederiz. O halde,

$$\langle y_3, y_1 \rangle = \langle \lambda_3^1 y_1 + \lambda_3^2 y_2 + x_3 , y_1 \rangle = 0$$

$$\lambda_3^1 \langle y_1, y_1 \rangle + \langle x_3 , y_1 \rangle = 0$$

$$\lambda_3^1 = -\frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\| y_1 \|^2} \qquad (1.22)$$

olur. $\langle y_3, y_2 \rangle = 0$ denkleminden

$$\langle \lambda_3^1 y_1 + \lambda_3^2 y_2 + x_3, y_2 \rangle = 0$$

$$\lambda_3^1 \langle y_2, y_2 \rangle + \langle x_3, y_2 \rangle = 0$$

$$\lambda_3^2 = - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\| y_2 \|^2} \qquad (1.23)$$

olarak buluruz. Buradan

$$y_3 = - \frac{\langle y_1, x_3 \rangle}{\| y_1 \|^2} y_1 - \frac{\langle y_2, x_3 \rangle}{\| y_2 \|^2} y_2 + x_3$$

olur. Burada $y_3 \neq 0$ dır. Aksi halde y_1, y_2, x_3 ve dolayısıyla x_1, x_2, x_3 lineer bağımlı olur. Böylece devam edersek

$$\langle y_s, y_{s-1} \rangle = 0$$

denkleminden

$$\lambda_s^{s-1} = - \frac{\langle x_s, y_{s-1} \rangle}{\| y_{s-1} \|^2} \qquad (1.24)$$

olarak elde ederiz. O halde,

$$y_s = \sum_{i=1}^{s-1} \lambda_s^i y_i + x_s \qquad (1.25)$$

olup

$$\lambda_s^i = - \frac{\langle x_s, y_i \rangle}{\| y_i \|^2} \qquad (1.26)$$

dir. (1.26) değerini (1.25) de yerine yazarsak

$$y_s = \sum_{i=1}^{s-1} \left[- \frac{\langle x_s , y_i \rangle}{\| y_i \|^2} y_i \right] + x_s \qquad (1.27)$$

buluruz. Böylece $\{ x_1 , x_2 , \ldots , x_s \}$ sisteminden $\{ y_1 , y_2 , \ldots , y_s \}$ ortonormal sistemini elde ettik. Bu y_i vektörlerinden herbirini kendi boyuna bölmek suretiyle

$$e_i = \frac{y_i}{\| y_i \|} , \qquad (i=1,2,3,\ldots,s) \qquad (1.28)$$

vektörlerinden meydana gelen ortonormal bir sistem elde ederiz ki, bu da istenendir. Çünkü $\{ e_1 , e_2 , \ldots , e_s \}$ sisteminde

$$\langle e_i , e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 , & i = j \\ 0 , & i \neq j \end{cases}$$

dir.

Tarif 1.4.1(Ortonormal Vektör Sistemi): Herhangibir E vektör uzayının $\{ x_1 , x_2 , \ldots , x_n \}$ vektör sistemi verilsin.

$$\| x_i \| = 1 \text{ ve } i \neq j \text{ için } \langle x_i , x_j \rangle = 0$$

ise, yani

$$\langle x_i , x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 , & i = j \\ 0 , & i \neq j \end{cases}$$

ise $\{ x_1 , x_2 , \ldots , x_n \}$ vektör sistemine ortonormal vektör sistemi denir.

II.BÖLÜM

ORTOGONAL MATRİSLER VE ORTOGONAL DÖNÜŞÜMLER

2.1. Ortogonal Matrisler

Tarif 2.1.1.(Ortogonal Matris) : $A = \| a_{ij} \|_1^n$ n-kare matris ve A^t ' de A 'nın transpozesi olmak üzere

$$A^t = A^{-1} \qquad (1.2)$$

şartını sağlayan matrise ortogonal matris denir.

Bu tariften aşağıdaki sonuçları verebiliriz:

Sonuç 1. Bir ortogonal matrisin determinantı +1 veya -1 dir.

Sonuç 2. Bir ortogonal matrisin transpozesi de ortogonaldir.

Tarif 2.1.2 (Pozitif ve Negatif Ortogonal Matris): Determinantı +1 olan ortogonal matrise pozitif ortogonal, determinantı -1 olan ortogonal matrise negatif ortogonal matris denir.

Teorem 2.1.1. Öklid vektör uzayında tarif edilmiş ortogonal bir matrisin satır ve sütun vektörleri birer ortonormal sistem teşkil ederler. [3]

İspat : $A = \| a_{ij} \|_1^n$ ortogonal matrisi verilsin. Bu matrisin satır (veya sütun) vektörlerinin ortonormal bir sistem teşkil ettiğini göstermek için

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} a_{js} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

veya

$$\sum_{s=1}^{n} a_{si} a_{sj} = \delta_{is} = \begin{cases} 1, & i = s \\ 0, & i \neq s \end{cases}$$

olduğunu göstermemiz gerekir. Şimdi

$$A^t = \| a^t_{ij} \|^n_1$$

olsun. A^t 'nın tarifinden

$$a^t_{ij} = a_{ji}$$

dir. Hipotezden $E = \| \delta_{ij} \|^n_1$ olmak üzere

$$A A^t = E \qquad (2.2)$$

idi. Önce

$$A A^t = B = \| b_{ij} \|^n_1$$

diyelim. Matris çarpım tarifinden

$$b_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} a^t_{sj}$$

dir. Burada $a^t_{sj} = a_{js}$ olduğundan

$$b_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} a_{js} \qquad (2.3.)$$

olur. (2.2) denkleminden

$$b_{ij} = \delta_{is} \qquad (2.4)$$

dir. (2.3) ve (2.4) gereğince de

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} a_{js} = \delta_{is}$$

olur ki, bu da satır vektörlerinin ortonormal bir sistem teşkil ettiğini gösterir.

Teorem 2.1.2. Pozitif ortogonal bir matrisin determinantında her eleman kendi kofaktörüne (işaretli minörüne) eşittir. Negatif ortogonal matriste ise her eleman kendi kofaktörünün ters işaretlisine eşittir. [3]

İspat : A, ortogonal matris ve bunun adjoint matrisi A^* olsun. A^* 'ın özelliğinden

$$A A^* = A^* A = |A| E \qquad (2.5)$$

olup

$$A^* = |A| A^{-1} \qquad (2.6)$$

olur. $|A| = \mp 1$ ve $A^{-1} = A^t$ olduğundan

$$A^* = \mp A^t \qquad (2.7)$$

dir. Buradan

$$a^*_{ji} = \mp a^t_{ji} \qquad (2.8)$$

olur. A^* ve A^t 'nin tarifinden $a^*_{ji} = A_{ij}$ ve $a^t_{ji} = a_{ij}$ olup

$$a_{ij} = \mp A_{ij} \qquad (2.9)$$

olur ki, istenendir.

Teorem 2.1.3. n-inci mertebeden pozitif ortogonal bir matrisin adjointinin determinantı + 1 'e, negatif ortogonal matrisin adjointinin determinantı ise $(-1)^{n-1}$ 'e eşittir. [3]

İspat : $A A^* = |A| E$ idi. Bu ifadenin her iki yanının determinantı alınırsa

$$|A|\,|A^*| = |A|^n$$

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

olur. Eğer $|A| = 1$ ise

$$|A^*| = 1 ,$$

$|A| = -1$ ise

$$|A^*| = (-1)^{n-1}$$

olur.

2.2. Ortogonal Dönüşümler

Tarif 2.2.1 (Ortogonal Dönüşüm) : V, n-boyutlu bir iç çarpım uzayı olmak üzere

$$A : V \to V$$

reel lineer dönüşümü $\forall X \in V$ için

$$\langle A(X), A(X) \rangle = \|X\| \qquad (2.10)$$

oluyorsa böyle bir dönüşüme ortogonal dönüşüm denir.

Teorem 2.2.1. Bir dönüşümün skaler çarpımları değiştirmemesi için gerek ve yeter şart ortogonal olmasıdır. [4]

İspat :

Gerek şart : V n-boyutlu iç çarpım uzayı ve

$$A : V \to V$$

bir lineer dönüşüm olsun. $X, Y \in V$ olmak üzere

$$\langle A(X), A(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$$

denkleminde $Y = X$ alırsak

$$\langle A(X), A(X) \rangle = \langle X, X \rangle \qquad (2.11)$$

olur. Halbuki

$$\langle X, X \rangle = \|X\|^2$$

olduğundan (2.11) eşitliği gereğince

$$\| A(X) \|^2 = \| X \|^2$$

$$\| A(X) \| = \| X \|$$

olur. O halde A , ortogonaldir.

Yeter şart : Bilindiği gibi

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2 \langle x, y \rangle \qquad (2.12)$$

idi. Buna göre,

$$2 \langle A(X), A(Y) \rangle = \| A(X) + A(Y) \|^2 - \| A(X) \|^2 - \| A(Y) \|^2$$

olur. Her lineer dönüşümde $A(X + Y) = A(X) + A(Y)$ olduğundan

$$2 \langle A(X), A(Y) \rangle = \| A(X+Y) \|^2 - \| A(X) \|^2 - \| A(Y) \|^2 \qquad (2.13)$$

olur. Diğer taraftan hipoteze göre

$\| A(X) \| = X$, $\| A(Y) \| = Y$ ve $\| A(X+Y) \| = X + Y$

olacağından bu değerleri (2.13) denkleminde yazarsak

$$2 \langle A(X), A(Y) \rangle = \| X + Y \|^2 - \| X \|^2 - \| Y \|^2 = 2 \langle X, Y \rangle$$

olup

$$\langle A(X), A(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$$

olur ki, ortogonal dönüşüm skaler çarpımı korur.

Teorem 2.2.2. Bir Öklid vektör uzayında ortonormal bir baz yerine başka bir ortonormal baz alındığında S geçiş matrisi ortogonaldir. Karşıt olarakta, ortonormal bir baz yerine başka bir baz alındığında geçiş matrisi ortogonal ise sonra alınan baz ortonormaldir. [3]

İspat : Verilen baz

$$\{ e \} = \{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$$

olsun. Bunun yerine de

$$\{g\} = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$$

bazını alalım. O halde,

$$g_1 = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \ldots + a_{n1} e_n$$

$$g_2 = a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + \ldots + a_{n2} e_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g_n = a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \ldots + a_{nn} e_n$$

olup geçiş matrisi

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

olur. Eğer $\{e\}$ bazı ortogonal ise

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

olacağından

$$g_k g_s = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i \sum_{j=1}^{n} a_{js} e_j$$

$$g_k g_s = a_{1k} a_{1s} + a_{2k} a_{2s} + \ldots + a_{nk} a_{ns} \qquad (2.14)$$

olur. $\{g\}$ bazı ortogonal ise

$$g_k \cdot g_s = \delta_{ks} = \begin{cases} 1, & k = s \\ 0, & k \neq s \end{cases} \qquad (2.15)$$

olur. (2.14) ve (2.15) denklemlerinden

$$a_{1k} a_{1s} + a_{2k} a_{2s} + \ldots + a_{nk} a_{ns} = \delta_{ks} \qquad (2.16)$$

dir. Bu da teorem 2.1.1 gereğince S matrisinin ortogonal olduğunu gösterir. Karşıt olarak { e } ortonormalken S geçiş matrisi de ortogonal ise (2.14) ve (2.16) ifadeleri mevcuttur. (2.14) ve (2.16) ifadeleri (2.15) ifadesini gerektirir. (2.15) ifadesi ise { g } bazının ortonormal olduğunu gösterir.

Teorem 2.2.3. P ortogonal bir dönüşüm ve $A = \| a_{ij} \|_1^n$ n-kare matris olsun.

$$B = P^t A P$$

ise A ile B aynı özdeğerlere sahiptir. [4]

İspat : P ortogonal olduğundan $P^t P = E$ ve $|P^t||P| = 1$ dir.

$$P^t A P = B$$

olduğundan

$$|B - \lambda E| = |P^t A P - \lambda E|$$

$$= |P^t (A - \lambda E) P|$$

$$= |P^t| \, |A - \lambda E| \, |P|$$

den

$$|B - \lambda E| = |A - \lambda E| \qquad (2.17)$$

olur ki, istenendir.

Teorem 2.2.4.

i) P ortogonal bir matris olmak üzere P 'nin sütunları (veya satırları) ortonormal bir cümle teşkil ederler.

ii) P ve Q ortogonal iki matris ise PQ da ortogonaldir. [2]

İspat :

i) P ortogonal bir matris ve x_i 'ler de P 'nin sütunları olmak üzere $P = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ olsun.

$$P^t P = \begin{bmatrix} x_1^t \\ x_2^t \\ \vdots \\ x_n^t \end{bmatrix} [x_1, x_2, \ldots, x_n] = \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \ldots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \ldots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \ldots & \langle x_n, x_n \rangle \end{bmatrix}$$

olur. P ortogonal olduğundan $P^t P = E$ olacaktır. Dolayısıyla

$$\langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

olur. O halde P 'nin sütunları ortonormal bir cümle teşkil ederler.

ii) P , Q ortogonal iki matris olsun. Bu durumda

$$P^t P = E \text{ ve } Q^t Q = E \qquad (2.18)$$

olacaktır.

$$(PQ)^t (PQ) = (Q^t P^t)(PQ)$$

$$(PQ)^t (PQ) = Q^t (P^t P) Q$$

olur. (2.18) 'in ilk denkleminden $P^t P = E$ olduğundan,

$$(PQ)^t (PQ) = Q^t Q$$

olur. Aynı şekilde (2.18) 'in ikinci denkleminden $Q^t Q = E$ olduğundan,

$$(PQ)^t (PQ) = E$$

olup PQ ortogonaldir.

2.3. Ortogonal Matrisler ve R^2 'deki Döndürmeler

Bu bölümde, ortogonal matrislerle R^2 'deki döndürmeler arasında bağıntılar elde edeceğiz. R^2 'deki bütün döndürmelerin matrisleri 2×2 tipinde matrisler olacaktır.

R^2 düzleminde bir O noktası seçelim. Bu noktayı dik koordinat sisteminin orijini kabul edelim. Verilen koordinat sisteminde $X = (x, y)^t$ vektörü $P(x, y)$ noktası şeklinde ifade edilecektir.

A matrisi pozitif ortogonal bir matris olsun. P herhangibir nokta ve P 'nin yapılan döndürme ile görüntüsü P′ ise $X' = A X$ dir. Burada X ve X′ sırayla P ve P′ 'yü ifade etmektedirler.

Koordinat eksenlerini sabit tutarak düzlemi saat yönünün tersine α açısı kadar döndürelim. Bu durumda (x, y) noktası (x', y') noktasına dönüşecektir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\alpha + y \cos[(\pi/2) - \alpha] \\ y' &= x \cos[(\pi/2) + \alpha] + y \cos\alpha \end{aligned} \qquad (2.19)$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned} \qquad (2.20)$$

olur. (2.20) ifadesini matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad (2.21)$$

olur.

Teorem 2.3.1. Q pozitif ortogonal bir matris olsun. Bu durumda $0 \leq \alpha < 2\pi$ olacak şekilde bir tane α açısı vardır ve

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad (2.22)$$

şeklindedir. [6]

İspat : $Q = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

alalım. $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ olduğundan,

$$a = \cos\alpha \,, \quad b = -\sin\alpha \quad ; \qquad 0 \leq \alpha < 2\pi$$

$$c = \sin\beta \,, \quad d = \cos\beta \quad ; \qquad 0 \leq \beta < 2\pi$$

olacak şekilde α , β açıları vardır. $|Q| = 1$ olduğundan,

$$|Q| = a\,d - b\,c = \cos(\alpha - \beta)$$

olur ve $\alpha - \beta$, 2π 'nin bir tam katıdır. Bu mümkün değildir. O halde, $\alpha = \beta$ ve $0 \leq \alpha < 2\pi$ olup Q matrisi (2.22) formundadır.

Teorem 2.3.2. Pozitif ortogonal bir Q matrisi verilsin. Q 'nun özdeğerleri $e^{i\alpha}$, $e^{-i\alpha}$ olacak şekilde $0 \leq \alpha \leq \pi$ olmak üzere bir tane α açısı vardır. $x' = Q\,x$ denklemi de α veya $2\pi - \alpha$ derecelik bir dönmeyi ifade eder. [8]

İspat :

$$Q\,x = \lambda\,x \qquad (2.23)$$

olsun. Ayrıca $Q\,\bar{x} = \bar{\lambda}\,\bar{x}$ olup

$$(Q\,\bar{x})^t = (\bar{\lambda}\,\bar{x})^t \qquad (2.24)$$

$$\bar{x}^t\,Q^t = \bar{\lambda}\,\bar{x}^t \qquad (2.25)$$

olur. (2.23) ve (2.24) denklemlerinden

$$\bar{\lambda}\,\lambda\,\bar{x}^t\,x = \bar{x}^t\,Q^t\,Q\,x = \bar{x}^t\,x$$

elde edilir. $\bar{x}^t\,x \neq 0$ olduğundan $\bar{\lambda}\,\lambda = |\lambda|^2 = 1$ dir. Dolayısıyla

$|\lambda| = 1$ dir. Q 'nun özdeğerlerinin modülleri 1 olduğundan bunlar ya reeldir, ya da eşlenik komplekstir. Ayrıca bunların çarpımı da $|Q| = 1$ dir. O halde 1 ve -1 olamazlar. Bundan dolayı $e^{i\alpha}$, $e^{-i\alpha}$ şeklinde ifade edilebilirler. Burada $0 \leq \alpha < 2\pi$ dir. $e^{i(2\pi-\alpha)} = e^{-i\alpha}$ ve $e^{-i(2\pi-\alpha)} = e^{i\alpha}$ olduğundan $0 \leq \alpha \leq \pi$ seçilebilir. O halde Q'nun özdeğerleri $e^{i\alpha}$ ve $e^{-i\alpha}$ şeklindedir. Burada $0 \leq \alpha \leq \pi$ dir. Teorem 2.3.1 'den

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$$

idi. Burada $0 \leq \psi < 2\pi$ dir. Q'nun özdeğerleri $e^{i\psi}$ ve $e^{-i\psi}$ dir. O halde $e^{i\psi} = e^{i\alpha}$ ve $e^{-i\psi} = e^{-i\alpha}$ olup $\psi = \alpha$ veya $\psi = 2\pi - \alpha$ dir. O halde

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

şeklinde ifade edilen

$$x' = Q\,x$$

ifadesi α veya $2\pi - \alpha$ derecelik bir dönmeyi ifade eder.

2.4. Ortogonal Matrisler ve R^3 'deki Döndürmeler

R^3 'deki döndürmelerin matrisleri 3×3 tipindedir. Bu döndürmeler

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad (2.26)$$

şeklinde olup R ortogonaldir.

Teorem 2.4.1. Her pozitif ortogonal Q matrisinin özdeğerleri $1, e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}$ olacak şekilde yalnız bir tane α açısı vardır. Burada $0 \leq \alpha \leq \pi$ dir. (Q matrisi 3×3 tipindedir.) [6]

İspat : Q pozitif ortogonal matris olduğundan $|Q| = 1$ dir. O halde

$$Q^t (E + Q) = Q^t + E = (Q + E)^t$$

dir. Ayrıca

$$|Q|\ |E + Q| = 1.\ |E + Q|$$

$$|Q|\ |E + Q| - |Q + E| = 0$$

$$|Q + E|\ (|Q| - 1) = 0$$

olur. O halde Q 'nun özdeğerlerinden en az birisi 1 dir. $|Q| = 1$ olduğundan özdeğerler 1,1,-1 olamazlar. O halde özdeğerler $1, e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}$ olur. Buradan α açısı $0 \leq \alpha \leq \pi$ ile sınırlandırılabilir.

Tarif 2.4.1 (Matrislerin Dönme Açısı) : Teorem 2.4.1 'de bahsedilen α açısına Q matrisinin dönme açısı denir.

Döndürme deyince, R^3 'deki üç boyutlu dik koordinat sisteminin, orijinden geçen bir doğru etrafında dönmesini anlayacağız. Bu doğruya dönme ekseni diyeceğiz. Pozitif x-ekseni boyunca α açısı kadarlık bir dönmeyi, $X = (x,y,z)^t$, $X' = (x',y',z')^t$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \cos\alpha - z' \sin\alpha \\ z &= y' \sin\alpha + z' \cos\alpha \end{aligned} \qquad (2.27)$$

şeklinde ifade edeceğiz. Bunu matris formunda

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \qquad (2.28)$$

olarak yazabiliriz. Burada,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

alırsak

$$X = R\, X' \qquad (2.29)$$

elde ederiz.

Teorem 2.4.2. $P = (a,b,c)^t$ verilen koordinat ekseninin orijininden birim uzaklıkta bir nokta olsun. $\overrightarrow{OP}$ vektörü etrafında α açısı kadarlık bir dönme

$$x' = T\, R\, T^t\, x \qquad (2.30)$$

ile ifade edilir. Burada T ilk sütunu $(a,b,c)^t$ olan pozitif ortogonal bir matristir. [6]

İspat : T ilk sütunu $(a,b,c)^t$ olan pozitif ortogonal bir matris ve S de matrisi T olan bir koordinat sistemi olsun. Bu takdirde $\overrightarrow{OP}$ pozitif x-eksenidir. X herhangibir nokta ve S, $\tilde{S}$ 'ye karşılık gelen vektörler x, $\tilde{x}$ vektörleri ise

$$\tilde{x} = T^t\, x \qquad (2.31)$$

dır. $\overrightarrow{OP}$ etrafında α açılık bir dönme, X noktasını X' noktasına, $\tilde{x}$ vektörünü $\tilde{x}'$ vektörüne dönüştürür. O halde

$$\tilde{x}' = R\, \tilde{x} \qquad (2.32)$$

olur. Eğer x' , S 'de $\tilde{x}'$ ile temsil ediliyorsa

$$\tilde{x}' = T^{t} x' \qquad (2.33)$$

yazarız. (2.33) denkleminden x' 'yü çekersek

$$x' = T \tilde{x}' \qquad (2.34)$$

olur. (2.34) denkleminde (2.32) ifadesini yazarsak

$$x' = T R \tilde{x} \qquad (2.35)$$

elde ederiz. (2.35) denkleminde (2.31) ifadesini yazarsak

$$x' = T R T^{t} x \qquad (2.36)$$

buluruz ki, istenendir.

III. BÖLÜM

SİMETRİK MATRİSLER VE KUADRATİK FORMLAR

3.1. Simetrik Matrisler

Tarif 3.1.1 (Simetrik Matris) : $A = \| a_{ij} \|_1^n$ n-kare matris olmak üzere $A^t = A$ ise A matrisine simetrik matris denir.

Teorem 3.1.1. $A = \| a_{ij} \|_1^n$ reel simetrik matrisinin özdeğerleri reeldir. (Hermitiyen matris için de aynıdır.)

İspat : $A = \| a_{ij} \|_1^n$ reel simetrik matris, λ da A matrisinin bir özdeğeri ve x, A 'nın λ 'ya karşılık gelen bir özvektörü olsun. O halde,

$$A x = \lambda x \tag{3.1}$$

olur. (3.1) denkleminin her iki yanını x ile iç çarparsak

$$\langle A x, x \rangle = \langle \lambda x , x \rangle$$

$$\langle x , A x \rangle = \lambda \langle x , x \rangle$$

elde ederiz. Son denklemde $A x$ yerine λx değerini yazarsak

$$\langle x , \lambda x \rangle = \lambda \langle x , x \rangle$$

$$\bar{\lambda} \langle x , x \rangle = \lambda \langle x , x \rangle$$

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \langle x , x \rangle = 0 \tag{3.2}$$

olur. x özvektör olduğundan $x \neq 0$ olup

$$\langle x , x \rangle \neq 0$$

dir. O halde

$$\lambda - \bar{\lambda} = 0$$

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

olur ki, λ reeldir.

Teorem 3.1.2. Reel bir simetrik matrisin farklı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler ortogonaldir. [7]

İspat : $A = \| a_{ij} \|_1^n$ reel simetrik matris, x ve y de A nın farklı λ_i , λ_j özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler olsun. O halde,

$$A\,x = \lambda_i\,x \quad , \quad A\,y = \lambda_j\,y \tag{3.3}$$

olur. (3.3) ifadesindeki ilk denklemi y ile ikinci denklemi x ile iç çarparsak

$$\langle y , A\,x \rangle = \lambda_i \langle y , x \rangle \tag{3.4}$$

$$\langle x , A\,y \rangle = \lambda_j \langle x , y \rangle \tag{3.5}$$

olur.

$$\langle A\,y , x \rangle = \langle y , A\,x \rangle$$

olduğunu gözönüne alırsak

$$\langle y , A\,x \rangle = \lambda_j \langle x , y \rangle \tag{3.6}$$

elde ederiz. (3.4) ifadesinden (3.6) ifadesini çıkarırsak

$$(\lambda_i - \lambda_j) \langle x , y \rangle = 0$$

olur ki,

$$\lambda_i \neq \lambda_j$$

olduğundan

$$\langle x , y \rangle = 0$$

dir.

3.2. Kuadratik Formlar

Tarif 3.2.1 (Kuadratik Form) : K değişmeli bir cisim , V'de bu cisim üzerinde bir vektör uzayı olsun. K cismi üzerinde $A = \| a_{ij} \|_1^n$ n-kare simetrik matrisini ve $X \in V$ (n×1) sütun vektörünü alalım.

$$F : X \to X^t A X$$

dönüşümünü tarif edelim.

$$F(X,X) = X^t A X = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \, , \quad (a_{ij} = a_{ji}) \qquad (3.7)$$

ifadesine kuadratik form denir.

$$F(X,X) = c \qquad (3.8)$$

alınırsa bu ifade bu n-boyutlu uzayda bir yüzeyi gösterir.

Tarif 3.2.2 (Kuadrik) : (3.8) formülüyle verilen denkleme merkezi bir kuadrik denir. n = 2 olması durumunda (3.8) ifadesi düzlemde bir eğriyi gösterir.

Tarif 3.2.3 (Pozitif ve Negatif Definit Form) : Her $X \neq 0$ vektörü için $F(X,X) > 0$ oluyorsa $F(X,X)$ kuadratik formuna pozitif definit, $F(X,X) < 0$ oluyorsa $F(X,X)$ kuadratik formuna negatif definit form denir.

Tarif 3.2.4 (Semi Definit Form) : Her $X \neq 0$ vektörü için $F(X,X) \geq 0$ (veya $F(X,X) \leq 0$) oluyorsa $F(X,X)$ kuadratik formuna pozitif semi definit (veya negatif semi definit) form denir.

Tarif 3.2.5 (Definit Olmayan Form) : $X_1 \neq 0$, $X_2 \neq 0$ vektörleri için $F(X_1,X_1) > 0$ ve $F(X_2,X_2) < 0$ oluyorsa $F(X,X)$ formuna definit olmayan form denir.

Tarif 3.2.6 (Kuadratik Formun Rankı) : $F(X,X) = X^t A X$ formunun A n-kare simetrik matrisinin rankına kuadratik formun rankı denir.

Tarif 3.2.7 (Kuadratik Formun Diskriminantı): $F(X,X) = X^t A X$ formunun $A = \| a_{ij} \|_1^n$ n-kare matrisinin determinantına kuadratik formun diskiriminantı denir.

Tarif 3.2.8 (Kuadratik Formun Sinyatürü) :

$$F(X,X) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2$$

şeklinde kareler toplamına indirgenmiş F(X,X) kuadratik formunda pozitif işaretli terimlerin sayısı p , negatif işaretli terimlerin sayısı k ise

$$s = p - k \tag{3.9}$$

ifadesine kuadratik formun sinyatürü (işareti) denir.

Eğer kuadratik formun rankı r ise

$$r = p + k \tag{3.10}$$

dir.

3.3. İki Değişkenli Kuadriklerin Köşegenleştirilmesi

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 = b \tag{3.11}$$

iki değişkenli kuadriğini alalım. Burada her a_{ij} ve b keyfi reel sayılardır. Şimdi x y 'li terimi yok etmeye çalışalım. Bunun için

$$\begin{aligned} x &= X \cos\theta - Y \sin\theta \\ y &= X \sin\theta + Y \cos\theta \end{aligned} \tag{3.12}$$

dönüşümünü yapalım. Bu durumda

$$a'_{11} X^2 + 2 a'_{12} X Y + a'_{22} Y^2 = b \tag{3.13}$$

olur. Burada

$$a'_{11} = a_{11} \cos^2\theta + a_{12} \sin 2\theta + a_{22} \sin^2\theta \qquad (3.14)$$

$$a'_{12} = 1/2\,(a_{22} - a_{11}) \sin 2\theta + a_{12} \cos 2\theta \qquad (3.15)$$

$$a'_{22} = a_{11} \sin^2\theta - a_{12} \sin 2\theta + a_{22} \cos^2\theta \qquad (3.16)$$

olur. x y 'li terimi yoketmek için (3.15) denkleminden

$$a'_{12} = 0$$

seçersek

$$\tan 2\theta = \frac{2\,a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \qquad (3.17)$$

elde ederiz. θ açısını (3.17) denklemindeki gibi seçmekle (3.11) denklemiyle verilen kuadriği

$$a'_{11} X^2 + a'_{22} Y^2 = b \qquad (3.18)$$

formuna indirgemiş oluruz. (3.11) denkleminden

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} , \; (a_{12} = a_{21}) \qquad (3.19)$$

matrisini teşkil edersek (3.18) denklemindeki a'_{11} ve a'_{22} katsayılarının A matrisinin özdeğerleri olduğunu görürüz. (3.12) formülünü matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \qquad (3.20)$$

olur.

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (3.21)$$

alalım. (3.21) denklemindeki P matrisi ortogonaldir. Ayrıca P matrisinin sütunları (3.19) denklemindeki A matrisinin ortogonalleştirilmiş özvektörlerinin cümlesidir.

IV. BÖLÜM

ÜÇLÜ BANT FORMUNDAKİ BİR SİMETRİK MATRİSİN ORTOGONAL DÖNÜŞÜMLERLE KÖŞEGENLEŞTİRİLMESİ

4.1. (n×n) Tipindeki Bir Simetrik Matrisin Üçlü Bant Matris Formuna İndirgenmesi

Tarif 4.1.1 (Üçlü Bant Matris): $A = \| a_{ij} \|_1^n$ n-kare matris olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir matrise üçlü bant matris denir.

Teorem 4.1.1. Λ, köşegen matris olmak üzere

$$A = P \Lambda P^{-1}$$

olacak şekilde bir P matrisi varsa, herhangibir pozitif k tamsayısı için

$$A^k = P \Lambda^k P^{-1}$$

dir. [5]

Teorem 4.1.2 (Givens Metodu) : $A = \| a_{ij} \|_1^n$ n-kare simetrik matrisi verilsin.

$$A_{k+1} = S_k^t A_k S_k \ , \ k = 0,1,2,\ldots \ ; \ A_o = A \qquad (4.1)$$

ile $A_1, A_2, \ldots$ dizisi tarif edilsin. Burada $S_o, S_1, \ldots$ θ açısını

$$\tan \theta = \frac{a_{jr}}{a_{ir}} \qquad (4.2)$$

denkleminden bularak A matrisini üçlü bant matris formuna indirgeyen döndürmelerdir. [2]

İspat : E , n-inci mertebeden birim matris olsun. Birim matrisin i, j -inci satır ve sütunları yerine

$$\begin{bmatrix} e_{ii} & e_{ij} \\ e_{ji} & e_{jj} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (4.3)$$

koymakla

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cos\theta & \cdots & -\sin\theta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \sin\theta & \cdots & \cos\theta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

matrisini elde ederiz. S_{ij} matrisi ortogonaldir. $A = \|a_{ij}\|_1^n$ reel simetrik bir matris olmak üzere

$$B = S^t A S \qquad (4.5)$$

alırsak A ve B matrislerinin elemanları

$$b_{ik} = b_{ki} = a_{ik} \cos\theta + a_{jk} \sin\theta \ , \ k \neq i,j \qquad (4.6)$$

$$b_{jk} = b_{kj} = -a_{ik} \sin\theta + a_{jk} \cos\theta \ , \ k \neq i,j \qquad (4.7)$$

$$b_{ii} = a_{ii} \cos^2 \theta + a_{ij} \sin 2\theta + a_{jj} \sin^2 \theta \qquad (4.8)$$

$$b_{jj} = a_{ii} \sin^2 \theta - a_{ij} \sin 2\theta + a_{jj} \cos^2 \theta \qquad (4.9)$$

$$b_{ij} = b_{ji} = a_{ij} \cos 2\theta + 1/2 (a_{jj} - a_{ii}) \sin 2\theta \qquad (4.10)$$

(i-inci satır ve j-inci sütun elemanları) elemanlar hariç aynıdır. (3.15) denkleminde θ açısını (3.17) denklemindeki gibi seçerek b_{ij} elemanını sıfır yaparız. $r \neq i$ alarak bir döndürmeyle b_{rj} elemanını sıfır yapabiliriz. (4.7) denkleminden $b_{rj} = 0$ alırsak

$$- a_{ir} \sin \theta + a_{jr} \cos \theta = 0$$

$$\tan \theta = \frac{a_{jr}}{a_{ir}} \qquad (4.11)$$

elde ederiz. Kolaylık olması için daima $r = i - 1$, $i \neq j$ seçeriz. Kabul edelim ki,

$$A_1 = S_1^t \, A \, S_1$$

olsun. Burada S_1 ,(4.11) denkleminde $r = 1$, $i = 2$ ve $j = 3$ seçmekle A matrisinin a_{13} elemanını sıfır yapan bir dönüşümdür. İkinci olarak

$$A_2 = S_2^t \, A_1 \, S_2$$

olsun. Burada S_2 , (4.11) denkleminde $r = 1$, $i = 2$ ve $j = 4$ seçmekle A_1 matrisinin a'_{14} elemanını sıfır yapan bir dönüşümdür.

Böylece devam edersek sıfır yaptığımız (1,3),(1,4),...,(1,n) indisli elmanlar diğer dönüşümler için de sıfır kalırlar. (4.11) denkleminde r = 1 , i = 2 ve j = 3,4,5,6,... seçerek n-2 tane dönüşümle A matrisini, (1,3),(1,4),...,(1,n) indisli elemanları sıfır olan bir matrise indirgeriz. A matrisi simetrik olduğundan (3,1),(4,1),...,(n,1) indisli elemanları da sıfır olacaktır. Aynı şekilde (4.11) denkleminde r =2 , i = 3 , j = 4,5,6,...,n seçerek A matrisinin (2,4),(2,5),...,(2,n) indisli elemanlarını da sıfır yaparız. Yine A matrisi simetrik olduğundan (4,2),(5,2),(6,2),...,(n,2) indisli elemanları da sıfır olacaktır. Bu işleme A matrisi

$$S^t A S = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{bmatrix} \qquad (4.12)$$

(4.12) formunda üçlü bant matris formuna gelinceye kadar devam ederiz. Buradan

$$k = 1/2\ (n-1)\ (n-2)$$

olmak üzere

$$S = \prod_{i=1}^{k} S_i \qquad (4.13)$$

yazabiliriz. Ayrıca S_i (i = 1,2,3,...,k) matrisleri ortogonal olduğundan bunların çarpımı olan S matrisi de ortogonaldir. S_i matrislerini (4.4) denkleminde θ yerine θ 'nın (4.11) denkleminden bulduğumuz değerlerini koyarak elde ettik.

4.2. Üçlü Bant Matris Formundaki (n×n) Simetrik Matrisin Ortogonal Dönüşümlerle Köşegenleştirilmesi

Teorem 4.2.1. $A = \| a_{ij} \|_1^n$ simetrik matris olsun. A matrisi Givens metoduyla

$$S = \prod_{i=1}^{k} S_i \qquad (4.14)$$

ve S ortogonal olmak üzere

$$B = S^t A S \qquad (4.15)$$

şeklinde üçlü bant matris formuna indirgenmiş olsun. Burada her S_i (4.4) formunda ortogonal matrislerdir. (4.14) denklemindeki k tamsayısı

$$k = 1/2\ (n-1)\ (n-2)$$

şeklindedir.

$$T^t B T = \Lambda$$

olacak şekilde bir T matrisi vardır ve

$$T = S^t P$$

şeklindedir. Burada P matrisi, sütunları A matrisinin özvektörlerinin ortogonalleştirilmiş bir cümlesi olan ortogonal bir matristir.

İspat : Λ, esas köşegen elemanları A matrisinin özdeğerleri olan köşegen bir matris olmak üzere

$$P^t A P = \Lambda \qquad (4.16)$$

olduğunu biliyoruz.

Şimdi sütunları, B matrisinin ortogonalleştirilmiş özvektörlerinden meydana gelen bir T matrisini gözönüne alalım. T ortogonal bir matris olup

$$T^t B T = \Lambda \qquad (4.17)$$

olacaktır. Λ, esas köşegen elemanları B matrisinin (aynı zamanda A matrisinin) özdeğerleri olan köşegen bir matristir. (4.17) denkleminde (4.15) değerini yazarsak

$$T^t (S^t A S) T = \Lambda$$

$$(T^t S^t) A (S T) = \Lambda$$

$$(S T)^t A (S T) = \Lambda \qquad (4.18)$$

elde ederiz. (4.16) ile (4.18) denklemlerini karşılaştırdığımızda

$$(S T)^t = P^t \ , \quad S T = P \qquad (4.19)$$

olduğunu görürüz. P, S ve T matrisleri ortogonal olduğundan

$$T = S^t P \qquad (4.20)$$

olarak elde ederiz. Yani B matrisini köşegenleştiren T matrisini, Givens metoduyla A matrisini, B üçlü bant matrise indirgeyen S dönüşümünün tersiyle P matrisinin çarpımından elde ettik. Dolayısıyla (4.20) denklemindeki bu T matrisini (4.17) denkleminde yerine yazarsak

$$(S^t P)^t B (S^t P) = \Lambda$$

$$(P^t S) B (S^t P) = \Lambda \qquad (4.21)$$

olarak elde ederiz.

Örnek :

$$F(X,X) = x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 + 2\,x_1 x_2 + 2\,x_1 x_3 + 2\,x_2 x_3 = 1$$

kuadriğini gözönüne alalım. Bunun matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.22)$$

olacaktır. Givens metodundan

$$\tan\theta = \frac{a_{jr}}{a_{ir}} \qquad , \; i = r + 1 \; , \; i \neq j$$

idi. O halde A matrisinin a_{13} elemanını sıfır yapalım. Bunun için $r = 1$, $i = 2$ ve $j = 3$ seçelim.

$$\tan\theta = \frac{a_{31}}{a_{21}}$$

ise

$$\tan\theta = \frac{1}{1}$$

olup $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ olur. O halde dönüşüm matrisi

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

olacağından

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

olur. Buradan

$$S^t A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^t A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S^t A S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$S^t A S = \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{2} & 0 \\ 2/\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Şimdi de F matrisini teşkil edelim.

$$|A - \lambda E| = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$|A - \lambda E| = (1-\lambda)^3 + 1 + 1 - 3(1-\lambda)$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 (\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 , \quad \lambda_3 = 3$$

olarak elde ederiz.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ için özvektörler

$$A X = \lambda_1 X \quad \text{ve} \quad A Y = \lambda_2 Y$$

denklemlerinden

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

denkleminde

$$x_2 = x_3 = 1$$

alırsak

$$x_1 = -2$$

olur. Buradan

$$X = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

ikinci olarak

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

denkleminde

$$x_2 = 1 \quad \text{ve} \quad x_3 = 0$$

alırsak

$$x_1 = -1$$

olur. Buradan

$$Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

$\lambda_3 = 3$ için özvektör

$$A Z = \lambda_3 Z$$

denkleminden

$$-2 x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 - 2 x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

denklem sistemini elde ederiz. Buradan

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

buluruz. Özel olarak

$$x_2 = x_3 = 1$$

seçersek

$$x_1 = 1$$

elde ederiz. O halde

$$Z = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak buluruz. X , Y ve Z özvektörlerini ortogonalleştirirsek

$$e_1 = (-2/\sqrt{6} , 1/\sqrt{6} , 1/\sqrt{6})$$

$$e_2 = (0 , 1/\sqrt{2} , -1/\sqrt{2})$$

$$e_3 = (1/\sqrt{3} , 1/\sqrt{3} , 1/\sqrt{3})$$

elde ederiz. Buradan

$$P = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

olur. (4.18) denkleminden $T = S^t P$ olduğundan

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde ederiz. Buradan

$$T^t B = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{2} & 0 \\ 2/\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^t B\, T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3/\sqrt{3} & 6/\sqrt{6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

denkleminden

$$T^t B\, T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \Lambda$$

elde ederiz ki, B matrisi köşegenleştirilmiş olur. Dolayısıyla F kuadriği

$$F(X', X') = 3\, {X'_3}^2 = 1$$

formuna indirgenmiş olur.

ÖZET

Bu çalışmada Givens Metodu'yla üçlü bant matris formuna indirgenmiş bir simetrik matris alınarak bu matrisin ortogonal dönüşümlerle köşegenleştirilmesi üzerinde çalışılmış ve bir çözüm getirilmiştir.

SUMMARY

In this study , a symetric matrix which is reduced to tridiagonal matrix form by Givens Method is taking, on the diagonalization with orthogonal transformations of this matrix is studied and a solve is brought.

KAYNAKLAR

[1] Frank AYRES : Matrices Theory , Mc. Graw - Hill International Book Company, New York

[2] Ben NOBLE : Applied Linear Algebra , Printice - Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey , 1969

[3] Fahrettin AKBULUT : Lineer Cebir II , Ege Ü. Fen Fak., Yayınları, İzmir

[4] H.H. HACISALİHOGLU : Lineer Cebir, Diyarbakır Ü.Fen Fak. Yayınları , İstanbul , 1977

[5] Richard BRONSON : Matrix Methods An Introduction , Fairleigh Dickinson U. Academic Press , New York

[6] L. MIRSKY : An Introduction To Linear Algebra, Oxford At The Clarendon Press , 1955

[7] Charles R. JONSON : Real And Complex Quadratic Forms, Linear Algebra And Its Application 9 , 89-94, 1974

[8] Bela MARTOS : Subdefinit Matrices And Quadratic Forms Siam J. Appl. Math. Vol. 17 , No:6 , 1969

[9] F.R. GANTMACHER : Matrix Theory , Chelsea Publishing Company New York , 1959

[10] J.L. BRITTON : Integer Solution Of Systems Of Quadratic Equation , Queen Elizabeth College London , 1979