T. C.
S. Ü.
FEN - BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# EQUİDİSTANT CÜMLESİNİN BALANSLIĞI ÜZERİNE

( DOKTORA TEZİ )

HAZIRLAYAN
**HASAN ŞENAY**

TEZ DANIŞMANI
**Doç. Dr. Ali SİNAN**

KONYA, 1988

# İ Ç İ N D E K İ L E R

Bu çalışma için danışmanlığımı kabul etmek nezaketini gösteren değerli Öğretim Üyesi Doç.Dr. Sayın Ali SİNAN'a en kalbi teşekkürlerimi Sunarım.

Hasan ŞENAY

# ÖZET

İki bölümden oluşan bu çalışmanın II.bölümünde esas olarak, n boyutlu $\mathbf{R}^n$ öklid uzayının o orijin noktasını bir iç nokta olarak kapsayan H konveks cismine ait uzaklık fonksiyonu/2/

$$f(p)= \inf\{\lambda: \lambda>0,\ p \in \lambda H\} \quad (p \in \mathbf{R}^n)$$

olmak üzere, a,b, $\in \mathbf{R}^n$ $a\neq b$ için

$$E(a,b)= \{ p : p \in \mathbf{R}^n,\ f(p-a)= f(p-b)\}$$

şeklinde tanımlanan Equidistant cümlesinin/5/ hangi şartlar altında balanslı bir cümle olduğunu inceledik ve bununla ilgili olarak bir teorem vererek diğer özelliklerini elde ettik.

Gerçektende $S= \{\alpha : |\alpha|<1,\ \alpha \in \mathbf{R}\}$ ise $SB\subset B$ şartını gerçekleyen B cümlesinin balanslı bir cümle ve balanslı bir cümlenin de o-simetrik olduğu bilinmektedir. Ayrıca "konveks bir cümlenin balanslı olması için gerek ve yeter şart simetrik olmasıdır." Sonucu göz önüne alındığında, öncelikle o orijin noktasının hangi şartlar altında E(a,b) cümlesinin bir iç noktası olacağını tesbit ettik. Daha sonra E(a,b)'nin tanım ifadesindeki f(p) uzaklık fonksiyonuna göre o-simetrik (sonuçta balanslı) olmasını sağlayacak sonucumuzu elde ettik.

Bu amacımıza ulaşmak için I.bölümde konveks cümleler ile bir H cismine ait f(p) uzaklık fonksiyonu ve f(p) fonksiyonu ile tanımlanan Minkowski metriğinin özelliklerini ele aldık. Ayrıca I.bölümde, bütün kapalı, sınırlı, konveks cümlelerin ailesi üzerinde $H_1,H_2 \in \mathfrak{K}$ olmak üzere tanımlanan (K, $|x| \leq 1$ birim küresini göstermektedir.)

$$\rho (H_1,H_2)= \inf\{\varepsilon: \varepsilon>0, H_1 \subset H_2+\varepsilon K, H_2 \subset H_1+\varepsilon K \}$$

metriği ile $\mathfrak{K}$'nın bir alt ailesi olan ve kapalı, sınırlı konveks cisimlerin $\mathfrak{K}_1$ ailesinde tanımlanan

$$\delta (H_1,H_2)= V(H_1\setminus H_2) + V(H_2\setminus H_1)$$

metriği üzerinde aynı topolojiyi ürettiklerini gösterdik. Balanslı cümleleri ise II.bölümün I.kesiminde ele aldık.

# I.BÖLÜM

## I-I. GENEL KAVRAMLAR

Bu kesimde nokta ve cümlelere ait bazı kavramlarla, kullanılacak notasyonlar üzerinde duracağız.

$R^n$ ile gösterilen n boyutlu öklid uzayının noktaları vektör olarak değerlendirilip $n \geq 2$ kabul edilecek ve $R^n$ nin noktaları için genellikle küçük harfler kullanılacaktır. Herhangi $x,y \in R^n$ vektörlerinin toplam ve farkları $x \pm y$, bir x vektörünün herhangi bir skaler katı $(\alpha x)$ ile gösterilecektir. Bir x vektörünün

$$\{x_1^2+\ldots+xn^2\}^{1/2}$$

uzunluğu her zamanki gibi $|x|$ ile belirtilecek, gözönüne alınan bütün cümlelerin $R^n$ nin alt cümlesi olduğu kabul edilecektir. Bundan başka $M, M_1, M_2$ herhangi cümleler $x_o$ sabit bir vektör ve $\alpha$ herhangi bir gerçek sayı olmak üzere

$$M_1+M_2=\{x_1+x_2 : x_1 \in M_1,\ x_2 \in M_2\}$$

$$M_1+x_o=\{x+x_o : x \in M\}$$

$$\alpha M=\{\alpha x : x \in M\}$$

notasyonlarıda kullanılacaktır. Burada hemen M+M ve 2M cümlelerinin genel olarak birbirlerinin aynı olmadığı belirtmeliyiz. Ayrıca Lebesque anlamında ölçülebilir bir M cümlesinin V (M) ile gösterilen hacmi onun Lebesque ölçümü olacaktır.

Cümlelere ait $\cap, \cup, \subset$ sembolleri sırasıyla arakesit, birleşim ve kapsama bağıntılarını belirtmede kullanılacaktır, bir M cümlesinin fark cümlesi ise

(1) $\mathfrak{D}M=M-M$

şeklinde belirtilecektir. Orijini küçük o harfi ile gösterip, $\rightarrow$ sembolünü gerektirmeleri ifade ederken kullanacağız.

Şimdi f (p) uzaklık fonksiyonunun özeliklerini kurarken yararlanacağımız bir kaç topolojik kavramı ele alalım.

**TANIM** : Bir M cümlesine ait bir p noktasının tamamen M de kapsanan uygun bir komşuluğu varsa p noktasına M cümlesinin <u>iç</u> noktası, bütün noktaları iç noktalar olan bir cümleye de <u>açık</u> cümle denir. H' tümleyeni açık olan H cümlesi de <u>kapalı</u> cümledir.

**TANIM** : Bir M cümlesinin <u>kapanışı</u>, M cümlesini kapsayan bütün kapalı cümlelerin kesişimidir.

Bir M cümlesinin $\bar{M}$ kapanışının kapalı bir cümle ve $M \subset \bar{M}$ olduğu açıktır. Bundan başka $M=\bar{M}$ olması için gerek ve yeter şartın M cümlesinin kapalı olması gerektiği kolayca gösterilebilir.

**TANIM** : Bir M cümlesinin bütün açık alt cümlelerinin birleşimine M cümlesinin <u>içi</u> denir ve İnt(M) ile gösterilir.

İnt(M) cümlesinin açık bir cümle ve $\text{İnt}(M) \subset M$ olduğu açıktır.

Şimdi Sayılar Geometrisinin temel kavramlarından biri olan cisim tanımında kullanacağımız tanımı aşağıya alıyoruz.

**TANIM** : M gibi bir cümlenin herhangi iki noktası bütünüyle M cümlesi içinde bulunan bir kırık çizgi ile birleştirilebiliyorsa, yani bu iki noktayı birleştiren ve tamamen M tarafından kapsanan en az bir kırık çizgi varsa M cümlesine **R** de <u>bağlantılıdır</u> denir.

Bağlantılı bir M cülesi aynı zamanda açık ise <u>bölgedir.</u>

**TANIM** : $\text{İnt}(M) \neq \phi$ olan bir M cümlesi için $M \subset \overline{\text{İnt}(M)}$ bağıntısı da gerçekleşiyorsa M ye <u>cisim</u> denir.

## I-2. KONVEKS CÜMLELER

Bu kesimde çalışmamızda büyük önemi bulunan konveks cümle tanımı ile konvekslikle ilgili bazı gerçekleri hatırlatacağız.

**TANIM** : H gibi bir cümlenin herhangi iki x,y noktalarını birleştiren doğru parçası bütünüyle H da kapsanırsa H cümlesine <u>konveks</u> bir cümle denir.

Bu tanım $x,y \in H$ ve $0 \leq \alpha < 1$ için $\alpha x + (1-\alpha)y \in H$ şeklinde ifade edilen diğer konvekslik tanımına denktir. Burada $\alpha x + (1-\alpha)y$ ifadesinin $x,y \in H$ noktalarını birleştiren doğru parçası olduğuna ilgi çekilmelidir.

H konveks ve $x,y \in H$ ise özel olarak $\alpha = \frac{1}{2}$ alınarak $\frac{1}{2}(x+y) \in H$ olur. Karşıt olarak her $X \in H$ noktası $\frac{1}{2}(x+y)$ olarak yazılabileceğinden $H+H=2H$ bağıntısı elde edilir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teorem genel bir formül verir.

**TEOREM 1 :** $H$, $R^n$ de konveks ve $\alpha,\beta > 0$ ise

$$\alpha H + \beta H = (\alpha+\beta)H \tag{2}$$

dır.

**İSPAT :** Konveksliği göz önüne almaksızın

$$(\alpha+\beta)H \subset \alpha H + \beta H \tag{3}$$

olduğu açıktır. H nın konveksliğinden $x,y \in H$ ve $\alpha+\beta=1$ olmak üzere

$$\alpha x + \beta y \in H$$

ve

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1$$

olduğundan

$$(\alpha+\beta)^{-1}y = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}x + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}y \in H$$

elde edilir. Buna göre

$$y \in (\alpha+\beta)H$$

ve

$$\alpha H + \beta H \subset (\alpha+\beta)H \tag{4}$$

olup, (3) ve (4) ifadelerinden teoremin iddiası elde edilir.

Konveksliğin tanımından H konveks bir cümle olmak üzere int(H) ve $\bar{H}$ cümlelerinin de konveks olduğu, ayrıca konveksliğin öteleme ve orijin etrafında büyütme ile değişmeyeceği açıktır. /1/

Çalışmamızda ihtiyaç duyacağımız simetrik konveks cümle tanımını verelim.

**TANIM :** Orijine göre simetrik K konveks cismine o-simetrik denir.

Bu tanıma göre K nın o-simetrik olması $X \in K$ için $-X \in K$ olmasını gerektirecektir. Şu halde K nın o-simetrik olması için gerek ve yeter şart $K=-K$ olmasıdır, diyebiliriz.

K o-simetrik ve x, K nın bir iç noktası ise x ve -x noktalarını birleştiren doğru parçasının her noktası da K nın bir iç noktası olacaktır. Sonuç olarak o noktası her o-simetrik konveks cismin bir iç noktasıdır.

**SONUÇ I** : H herhangi bir konveks olmak üzere $\mathcal{D}H$ cümlesi de konveks ve o-simetriktir.

**İSPAT** : Gerçekten $p_1,p_2,q_1,q_2 \in H$ olmak üzere $p=p_1-p_2$ ve $q=q_1-q_2$ noktaları $\mathcal{D}H$ nın herhangi iki noktası ise

$$-p=p_2-p_1 \in \mathcal{D}H$$

ve $0<\alpha<1$ için

$$\alpha p+(1-\alpha)q=\{\alpha p_1+(1-\alpha)p_2\}-\{\alpha q_1+(1-\alpha)q_2\}\in \mathcal{D}H$$

olur.

o-simetrik konveks bir K cismine ait K fark cümlesi (I) ve $K=-K$ bağıntısı nedeniyle

$$\mathcal{D}K=K-K=2K$$

ile karakterize edilebilir.

I-3. UZAKLIK FONKSİYONU

Bu kesimde E(a,b) Equidistant cümlesinin tanımında kullanılacak olan ve bu çalışmada merkezi bir rol oynayan uzaklık fonksiyonunun özelliklerini ele alacağız.

**TANIM** : H sınırlı ve $o \in \mathrm{int}(H)$ olan konveks bir cisim olmak üzere her $x \in \mathbf{R}^n$ için

$$f(x)=\inf\{\lambda : \lambda>0,\ x \in \lambda H\}$$

ile tanımlanan $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ fonksiyonuna H nın <u>uzaklık fonksiyonu</u> denilir. /2/

Bu tanımdan $0 \leq f(x) < \infty$ olduğu derhal görülür. Ayrıca $\lambda > f(x)$ ise x, $\lambda H$ ya ait olduğu halde $0<\lambda< f(x)$ olduğunda x, H da değildir. Uzaklık fonksiyonunun diğer özelliklerini aşağıda teoremle veriyoruz.

**TEOREM 2** : H sınırlı, konveks ve o noktasını kapsayan bir cisim olmak üzere

(5) $x \neq 0$ için $f(x) > 0$, $f(o)=0$

(6) $\alpha>0$ için $f(\alpha x)=\alpha f(x)$

(7) $f(x+y) \leq f(x)+f(Y)$

dir.

Karşıt olarak f fonksiyonu (5), (6), (7) yi gerçeklemek üzere $f(x) \leq 1$ şartını sağlayan x noktalarının H cümlesi o'yu bir iç nokta olarak kapsayan sınırlı konveks bir cisimdir, f fonksiyonu da bu cismin uzaklık fonksiyonudur. Ayrıca f fonksiyonu sürekli olup, H nın o-simetrik olması için gerek ve yeter şart (6) nın yerine daha kuvvetli olan

(6') her $\alpha \in \mathbf{R}$ için $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$

şartının sağlanmasıdır.

**İSPAT** : H sınırlı, konveks ve o noktasını iç nokta olarak kapsayan bir konveks cisim ve f fonksiyonu da H nın uzaklık fonksiyonu olsun. Bu takdirde f uzaklık fonksiyonunun tanım ifadesinden (5) hemen elde edilir. Şimdi $\alpha > 0$ ve $x \in \mathbf{R}^n$ varsayalım. O zaman

$$f(\alpha x) = \inf\{\lambda : \lambda > 0,\ x \in \alpha^{-1} \lambda H\}$$
$$= \inf\{\alpha\lambda : x \in \lambda H\}$$
$$= \alpha f(x)$$

olur ki bu sonuç (6) yı verir. Şimdi $x, y \neq o$ ve $f(x) = \alpha$, $f(y) = \beta$ olsun. Bu durumda açık olarak $\alpha^{-1} x \in H$ ve $\beta^{-1} y \in H$ olup H nın konveksliginden

$$\frac{1}{\alpha+\beta}(x+y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\ \frac{1}{\alpha}\ x + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\ \frac{1}{\beta}\ y \in H$$

yazılır. Böylece

$$f(x+y) \leq \alpha + \beta = f(x) + f(y)$$

bulunur. Bu sonuç keza x=o veya y=o durumunda da geçerlidir.

Karşıt olarak, f nun (5), (6) ve (7) yi gerçekleyen herhangi bir fonksiyon ve H nın da $f(x) \leq 1$ şartını gerçekleyen x noktalarının cümlesi olduğunu varsayalım. Ayrıca W ile $|x_i| \leq 1$ $(i=1,\ldots,n)$ kübünü gösterelim. Bu durumda $x \in W$ için uygun işaret seçimi ile (7) ve (6) yı kullanarak

$$f(x) = f(x_1 e_n + \ldots + x_1 e_n)$$
$$= f(\pm |x_1|\, e_n \pm \ldots \pm |x_n|\, e_n)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, f(\pm e_i)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} f(\pm e_i)$$

yazılabilir. Şimdi

$$\beta_i = f(e_i), \quad \gamma_i = f(-e_i) \quad (i = 1,\dots,n)$$

koyarak

$$\gamma = n.\max(\beta_1, \gamma_1, \dots, \beta_n, \gamma_n)$$

yazalım. Böylece $f(x)$ in yukarıdaki ifadesinden

$$(8) \qquad x \in W \text{ için } f(x) \leq \gamma$$

elde edilir. Şimdi $x_0$, $R^n$ nin keyfi bir noktası ve $\varepsilon$ keyfi pozitif bir sayı olmak üzere $x \in R^n$ için (7) eşitsizliğinden

$$f[(x-x_0)+x_0] \leq f(x-x_0)+f(x_0),$$

$$f[(x_0-x)+x] \leq f(x_0-x)+f(x)$$

olup, bunlardan da sırasıyla

$$f(x) \leq f(x-x_0)+f(x_0),$$

$$f(x_0) \leq f(x_0-x)+f(x)$$

elde edilir. Buna göre

$$|f(x)-f(x_0)| \leq \max\{f(x-x_0), f(x_0-x)\}$$

olur. Böylece (8) e göre

$$x-x_0 \in \varepsilon\gamma^{-1} W \text{ ise } |f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon$$

bulunur ki bu sonuç $f(x)$ fonksiyonun sürekliliğini ispatlar

Bundan başka, H nın $f(x) \leq 1$ şartının gerçekleyen noktalar cümlesi olduğunu da göz önüne alarak (8) eşitliğinden H nın W kübünü kapsadığını söyleyebiliriz. Öte yandan $\delta$,W nın sınırında f nun minimum değeri olmak üzere H nın $\delta^{-1}W$ içinde kapsadığını söyleyebiliriz. Buna göre H nın o-simetrik olduğu açıktır.

H nın sınırlı ve konveks olduğuna gelince, x,y $\in$ H $0<\theta<1$ ise

$$\begin{aligned} f[\theta x+(1-\theta)y] &= f(\theta x)+f((1-\theta)y) \\ &= \theta f(x)+(1-\theta)f(y) \\ &= \theta+(1-\theta) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup buradan $\theta x+(1-\theta)y \in H$ olduğu sonucuna varılır. Bütün bunlar H nın sınırlı, konveks bir cümle olması gerektiğini ifade eder.

Son olarak H o-simetrik ve konveks ise (6') nün gerçeklendiğini görelim. Bunun için $\alpha \neq 0$ ve $x \in \mathbf{R}^n$ olmak üzere

$$(\dagger) \qquad \lambda \in \{\lambda > 0 : x \in \lambda H\}$$

varsayalım. Bunu göre $(\alpha/|\alpha|\ \lambda)\ x \in H$ olup bu da

$$\alpha x \in |\alpha|\lambda H \quad \Rightarrow$$

$$f(\alpha x) \leq |\alpha|\lambda \quad \Rightarrow$$

$$(9) \qquad f(\alpha x) \leq |\alpha|\, f(x)$$

demektir. öte yandan $(\dagger)$ varsayımından,

$$(\alpha\lambda) \in \{|\alpha|\lambda > 0 : x \in |\alpha|\lambda H\}$$

elde edilir. Bu son ifadeden

$$f(\alpha x) \geq |\alpha|\lambda \quad \Rightarrow$$

$$(10) \qquad f(\alpha x) \geq |\alpha|\, f(x)$$

sonucu (9) ve (10) eşitsizliklerinden

$$f(\alpha x) = |\alpha|\, f(x)$$

elde edilir.

Karşıt olarak, $f(\alpha x) = |\alpha|\ f(x)$ olduğunu varsayalım. Bu eşitlikten $\alpha = -1$ için $f(-x) = f(x)$ bulunur ki o-simetrik cümle tanımından H nın o-simetrik olması gerektiği anlaşılır.

**SONUÇ 2 :** Buna göre H nın o-simetrik olması için gerek ve yeter şart $f(x)=f(-x)$ olmasıdır.

Şimdi biraz sonra ele alacağımız problemin çözümünde kullanılacak olan bir metrik uzay ile ilgili bazı kavramları hatırlamak yararlı olacaktır.

Bilindiği gibi, boş olmayan bir X cümlesi ile metrik aksiyonları denilen önermeleri gerçekleyen ve bu cümle üzerinde tanımlı bir $d: X \times X \to X$ fonksiyonu bir metrik uzay belirtir ve bu uzay $(X, d)$ şeklinde gösterilir.

Örnek olarak Minkowski tarafından verilen, $f(x)$ uzaklık fonksiyonu ile kurulan metriği /3/ göz önüne alalım.

Minkowski $\mathbf{R}^n$ üzerindeki söz konusu bu metriğini

$$\rho\,(x,y) = f(x-y)$$

koymakla vermiştir.

$\rho$ nun metrik aksiyonlarını gerçeklediğini gösterelim. Öncelikle $\rho(x,y) = 0$ olması ancak ve ancak x=y olması durumunda söz konusu olup, bunun dışında $\rho(x,y) > 0$ dır. $\rho$ metriğinin, (5) ve (7) nedeniyle

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

üçgen eşitsizliğini gerçeklediğini hemen ifade edebiliriz. $\rho(x,y)$ nin simetrik özelliği için aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

**LEMMA I** : $\rho(x,y)$ nin simetrik olması için gerek ve yeter şart H nın o-simetrik olmasıdır.

**İSPAT** : $\rho(x,y)$ nu simetrik ise $\rho(x,y) = \rho(y,x) \Rightarrow f(x-y) = f(y-x) =$ $[-(x-y)]$ olur. yani $\rho$ nun simetrik olması durumunda $f(p)=f(-p)$ olur ki 2. teoreme göre H,o-simetrik olur.

H,o-simetrik ise $f(-p)=f(-p)$ olup bu $f(x-y)=f(y-x)$ olmasını, bu da $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ olmasını gerektirir.

**TANIM** : $(X,d_1)$ ve $(Y,d_2)$ iki metrik uzay olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$d_1(x,a) < \delta$$

oldukça

$$d_2(f(x),f(a)) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonuna $a \in X$ noktasında <u>süreklidir</u> denir.

**TANIM** : Açık cümleleri açık cümlelere dönüştüren bir fonksiyona <u>açık dönüşüm</u> denir.

B,X in boş olmayan bir alt cümlesi ve $x \in X$ ise $d(x,B)$ ile gösterilen x ve B arasındaki uzaklık

$$d(x,B) = \inf\{d(x,y) : y \in B\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir (X,d) metrik uzayındaki herhangi bir x noktası ve pozitif r gerçek sayısı için

$$B(x;r) = \{ y : d(x,y) < r \}$$

cümlesi x merkezli r yarıçaplı bir açık küreyi belirtir.

Bu tanıma göre sürekliliğin yukarıdaki tanımı; eğer her $\varepsilon>0$ için $f(B(a;\delta))\subset B(f(a);\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa $f:X\to Y$ fonksiyonu $a\in X$ noktasında süreklidir, şeklinde verilen tanıma denktir.

**TEOREM 2 :** $f:X\to Y$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Ancak ve ancak G,Y metrik uzayında açık olduğunda $f^{-1}(G)$,X metrik uzayında açık oluyorsa f süreklidir.

**İSPAT :** İlk olarak f fonksiyonunun sürekli olduğunu varsayalım. G,Y metrik uzayında açık olsun. İki durum söz konusudur. Ya $f^{-1}(G)=\Phi$ veya $f^{-1}(G)\neq\Phi$ dur. $f^{-1}(G)=\Phi$ ise iddianın doğruluğu boş cümlenin açık bir cümle olmasından hemen görülür. $f^{-1}(G)\neq\Phi$ olduğuna gelince; bir $x\in f^{-1}(G)$ alalım. f sürekli olduğundan $f(x)\in G$ dir. G açık olduğundan $B(f(x);\varepsilon)\subset G$ olacak şekilde bir $B(f(x);\varepsilon)$ açık komşuluğu vardır. x noktasında f in sürekliliği

$$f(B(x;\delta))\subset B(f(x);\varepsilon)$$

olmasını gerektirir. Yani

$$B(x;\delta)\subset f^{-1}(B(f(x);\varepsilon))\subset f^{-1}(G)$$

olacak şekilde $B(x;\delta)$ açık komşuluğu bulunur. O halde $B(x;\delta)$ açık komşuluğunu bulduğumuzdan $f^{-1}(G)$ açıktır.

Şimdi G, Y de açık olduğunda $f^{-1}(G)$ nin de x de açık olduğunu varsayalım. Herhangi $x\in X$ noktasını alalım. $B(f(x);\varepsilon)$ küresi Y de bir açık sonuçta $f^{-1}(B(f(x);\varepsilon))$, X de bir açık olacaktır. Buna göre

$$B(x,\delta)\subset f^{-1}(B(f(x);\varepsilon))$$

olacak şekilde bir $B(x;\delta)$ açık küresi vardır. Bu sonuç da f fonksiyonunun sürekliliğini gösterir.

**TANIM :** X,Y metrik uzaylar olmak üzere $f:X\to Y$ fonksiyonu bire bir, sürekli ve açıksa <u>homeomorfizmdir</u> Bu durumda X ve Y uzaylarına homeomorfik uzaylar denir.

Bu tanıma göre, bir f homeomorfizmi bire bir olduğundan tersi vardır. Bu şartlar altında f fonksiyonunun açık olduğu durum $f^{-1}$ in sürekli olduğu duruma denktir.

Metrik uzaylarda izometrinin bir homeomorfizm olmasına karşılık bir homeomorfizmin bir izometri olması gerekmediğini biliyoruz.

$f$ ve $f^{-1}$ in her ikisinin sürekli olduğu $f: X \to Y$ fonksiyonu bicontinuous fonksiyondur. $f^{-1}$ in sürekli olması $f$ in açık olmasını da gerektirir. Buna göre açık ve sürekli olan bir $f$ fonksiyonu bicontinuous olur. Buradan da bir $f$ homeomorfizminin bire bir bicontinuous bir fonksiyon olduğunu söyleyebiliriz.

TANIM : $f:(X,d_1) \to (X,d_2)$ özdeşlik dönüşümü bir homeomorfizm ise $d_1$, $d_2$ metriklerine $X$ de topolojik olarak denktirler denir. Böyle bir durumda bu iki metrik $X$ de aynı topolojiyi üretirler.

Bu tanıma göre iki metriğin denk olduğu; seçilen her $\varepsilon_1$ sayısına karşılık

$$d_1 (x,a) < \delta_1$$

oldukça

$$d_2 (x,a) < \varepsilon_1$$

olacak şekilde bir $\delta_1$ ve de verilen her $\varepsilon_2$ için

$$d_2 (x,a) < \delta_2$$

oldukça

$$d_1 (x,a) < \varepsilon_2$$

olacak şekilde bir $\delta_2$ bulunarak gösterilmiş olur.

Şimdi bu kavramları kapalı, sınırlı konveks cümlelerin ailesinde tanımlayacağımız metriklerde kullanalım.

$\Omega$ bütün kapalı, sınırlı konveks cümlelerin bir ailesi, $\Omega_1$ de kapalı, sınırlı konveks cisimlerden oluşan $\Omega$ nın bir alt ailesi olsun. $K$ ile $|x| \leq 1$ birim küresini gösteriyoruz. $H_1$ , $H_2 \in \Omega$ ve I-I kesiminde verilen notasyonlara göre $H_i + \varepsilon K$ (i=i,2) $H_i$ ye olan uzaklığı $\varepsilon$ nu geçmeyen noktalardan oluşan koveks cisim olmak üzere

$$\rho(H_1,H_2) = \inf \{\varepsilon : \varepsilon > 0,\ H_1 \subset H_2 + \varepsilon K,\ H_2 \subset H_1 + \varepsilon K \} \tag{11}$$

$$\delta(H_1, H_2) = V (H_1 \setminus H_2) + (H_2 \setminus H_1) \tag{12}$$

koyalım ve bunların sırasıyla $\Omega$ , $\Omega_1$ üzerinde metrik olduklarını görelim.

Öncelikle her $H_1$, $H_2 \in \Omega$ için $\rho(H_1, H_2) \geq 0$ olduğu (11) tanım ifadesinden açıktır. $\rho(H_1, H_2)=0$ ise $H_2$ kapalı olduğundan $H_1 \subset H_2$ ve benzer biçimde $H_2 \subset H_1$ olacaktır. Böylece

$$\rho\,(H_1,\ H_2)=0 \Leftrightarrow H_1=H_2.$$

Ayrıca $\rho(H_1,\ H_2)$ nin simetri özelliğini gerçeklediği (11) tanım ifadesinden hemen görülür. Üçgen eşitsizliğine gelince:

$$\rho\,(H_1,\ H_2)=\varepsilon_1 \text{ ve } \rho\,(H_2,\ H_3)=\varepsilon_3$$

koyarak

$$H_3\subset H_2+\varepsilon_2 K\subset H_1+\varepsilon_1 K+\varepsilon_2 K=H_1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)K$$

ve benzer biçimde de

$$H_1\subset H_3+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)K$$

elde edilir ki bu son iki kapsama bağıntısından

$$\rho\,(H_1,\ H_3)\leqq\rho\,(H_1,\ H_2)+\rho(H_2,\ H_3)$$

olur ki bütün bunlar $\rho$ nun $\Omega$ üzerinde metrik olduğunu gösterir.

$\delta(H_1,\ H_2)$ ifadesinin de $\Omega_1$ üzerinde metrik aksiyomlarını gerçeklediği yukarıdaki tanım ifadesinden derhal görülür. öncelikle ölçümün pozitif olduğu göz önüne alınırsa $H_1,\ H_2\in\Omega_1$ için $\delta\,(H_1,\ H_2)>0$ ve ayrıca (12) den $\delta(H_1,\ H_2)=0 \Leftrightarrow H_1=H_2$ olacağı açıktır. Yine $\delta$ ifadesinin tanımından sırasıyla

$$\delta\,(H_1,\ H_2)=\delta\,(H_2,\ H_1)$$

ve $H_3\in\Omega_1$ olmak üzere

$$\delta\,(H_1,\ H_2)\leqq\delta\,(H_1,\ H_3)+\delta\,(H_3,\ H_2)$$

olduğu ve böylece $\delta$ nın simetri özelliği ile üçgen eşitsizliğini gerçeklediğini söyleyebiliriz.

Artık $\rho$ ve $\delta$ metriklerinin $\Omega_1$ üzerinde aynı topolojiyi ürettiklerini gösterebiliriz.

$\Omega_1$ ailesinde sırasıyla sabit ve değişken olarak kabul edilecek $H_1$, $H$ konveks cisimlerini göz önüne alalım. Konvekslikten $H_1$ in iç noktaları bulunacaktır, ayrıca $\rho$ ile $\delta$ öteleme ile invariant kaldıklarından $o\in\operatorname{int}(H_1)$ olup $H_1$ içinde bir $|x|\leqq\gamma$ $(\gamma>0)$ küresi vardır. $H_1$ sınırlı olduğundan keza $|x|\leqq\sigma$ $(\sigma>0)$ gibi bir kürenin içindedir.

Şimdi $\varepsilon<\frac{1}{2}\gamma$ eşitsizliğini gerçeklyen $\varepsilon$ pozitif sayısı için $\rho\,(H_1,\ H)\leqq\varepsilon$ olduğunu varsayalım. Bu seçime göre $\rho k_1=\ \varepsilon<\frac{1}{2}\gamma$ olacak biçimde bir $k_1 \geq 1$ sayısı bulunabilir. Burada $k_1$ sabit alınırsa $\varepsilon \to 0$ için $\rho \to 0$ veya tersine olarak $\rho \to 0$ için $\varepsilon \to 0$ olacaktır. Bu durumda (11) göz önüne alınarak

$$\varepsilon > \rho = \inf\{\varepsilon : \varepsilon > 0,\ H \subset H_1 + \varepsilon K,\ H_1 \subset H + \varepsilon K\}$$

olduğundan

$$(13) \qquad H \subset H_1 + \varepsilon K$$

ve

$$(14) \qquad H_1 \subset H + \varepsilon K$$

elde edilir. Ayrıca $\gamma > 0$ yarıçaplı küre $H_1$e dahil olduğundan yarıçapı $\gamma$ olan $\gamma K$ birim küresi de $H_1$ in içinde bulunacaktır. Buna göre

$$\gamma K \subset H_1 \Rightarrow \varepsilon\gamma K \subset \varepsilon H_1 \Rightarrow \varepsilon K \subset \frac{\varepsilon}{\gamma} H_1$$

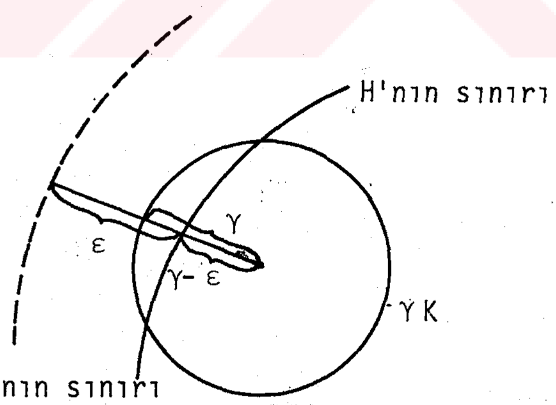
olup, (13) den $H \subset H_1 + \frac{\varepsilon}{\gamma} H_1$ ve teorem 1 e göre

$$(15) \qquad H \subset \left(1 + \frac{\varepsilon}{\gamma}\right) H_1$$

elde edilir. Bunun gibi (14) den

$$H_1 \subset H + \varepsilon K \Rightarrow \gamma K \subset H_1 + \varepsilon K$$

bulunur ki bu ise aşağıdaki şekilden de görüleceği gibi ancak $(\gamma - \varepsilon)K$ küresinin H nın içinde olması ile mümkündür. Buradan,




$$(\gamma - \varepsilon) K \subset H \Rightarrow \varepsilon K \subset \frac{\varepsilon H}{\gamma - \varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\gamma - \varepsilon} H$$

ve bu sonucu teorem 1 göz önünde alınarak (14) de kullanırsak

$$H_1 \subset H + \varepsilon K \Rightarrow H_1 \subset H + \frac{\varepsilon}{\gamma - \varepsilon} H = H\left(1 + \frac{\varepsilon}{\gamma - \varepsilon}\right) = \frac{\gamma}{\gamma - \varepsilon} H$$

veya buradan da

$$(16) \qquad \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma} H_1 \subset H \Rightarrow \left(1 - \frac{\varepsilon}{\gamma}\right) H_1 \subset H$$

bulunur. Böylece (15) ve (16) dan

$$(17) \qquad \left(1-\frac{\varepsilon}{\gamma}\right) H_1 \subset H \subset \left(1+\frac{\varepsilon}{\gamma}\right) H_1$$

elde edilir.

Öte yandan $\left(1+\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)H_1$ cisminin $\left(1+\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^n V(H_1)$ olan hacmi $H_1 \setminus H$ ve $H \setminus H_1$ ayrık cisimlerinin hacimleri toplamından büyüktür. Gerçekten teorem 1 e göre

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)H_1 = H_1 + \frac{\varepsilon}{\gamma} H_1$$

eşitliğinden

$$H_1 \subset H_1 + \frac{\varepsilon}{\gamma} H_1,$$

ayrıca (17) bağıntısından

$$H \subset \left(1+\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)H_1$$

olup

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^n V(H_1) > V(H_1 \setminus H) + V(H \setminus H_1)$$

yazılabilir.

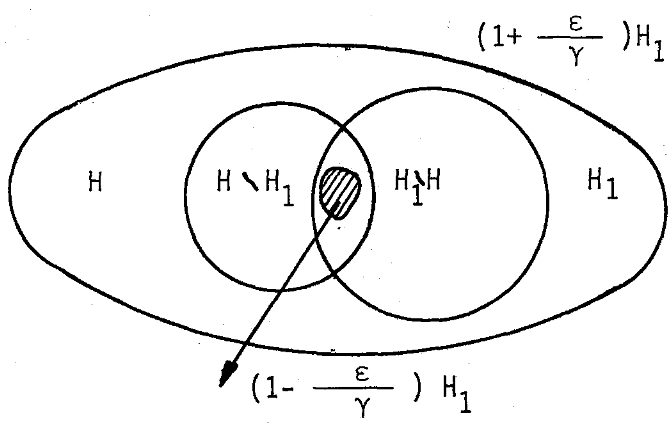
Bunun gibi

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)H_1 \subset H_1$$

ve (17) bağıntısından

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)H_1 \subset H$$

dır. Başka bir deyişle $\left(1-\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)H_1$ cismi $H$ ve $H_1$ cisimlerinin arakesitinde kapsanmaktadır. Böylece aşağıdaki şekilden de görüleceği gibi $V(H_1 \setminus H) + V(H \setminus H_1)$ in değeri $\left(1+\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)H_1$ ve $\left(1-\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)H_1$ cisimlerinin hacimleri arasındaki fark dan küçüktür.



Buna göre

$$\delta(H_1, H) = V(H_1 \setminus H) + V(H \setminus H_1)$$
$$\leq V[(1+\frac{\varepsilon}{\gamma})H_1] - V[(1-\frac{\varepsilon}{\gamma})H_1]$$
$$= (1+\frac{\varepsilon}{\gamma})^n V(H_1) - (1-\frac{\varepsilon}{\gamma})^n V(H_1)$$
$$= [(1+\frac{\varepsilon}{\gamma})^n - (1-\frac{\varepsilon}{\gamma})^n] V(H_1)$$

olacaktır. Buradan da $M_1, M_2, \ldots, M_j$ ler pozitif tam sabitler ve h; n çift olduğundan n-2, n tek olduğunda n-1 e eşit olan bir sayıyı göstermek üzere

$$\delta(H_1, H) \leq [1+\binom{n}{1}\frac{\varepsilon}{\gamma}+\binom{n}{2}\frac{\varepsilon^2}{\gamma^2}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{\varepsilon^n}{\gamma^n} - 1+\binom{n}{1}\frac{\varepsilon}{\gamma} - \binom{n}{2}\frac{\varepsilon^2}{\gamma^2} - \ldots + (-1)^n$$
$$\binom{n}{n}\frac{\varepsilon^n}{\gamma^n}] V(H_1) = \frac{\varepsilon}{\gamma}[2n+M_1\varepsilon^2+M_2\varepsilon^4+\ldots+M_j\varepsilon^h] V(H_1)$$

veya $\varepsilon = k_1\rho$ olduğu göz önüne alınarak

$$\delta(H_1, H) \leq \frac{k_1\rho}{\gamma}[2n+M_1k_1^2\rho_1^2+\ldots+M_jk_1^h\rho^h] V(H_1) \Rightarrow$$

$$\frac{\delta}{\rho} \leq \frac{k_1}{\gamma}[2n+M_1k_1^2\rho^2+\ldots+M_jk_1^h\rho^h] V(H_1)$$

olur. Burada

$$M_1k_1^2\rho^2+\ldots+M_jk_1^h\rho^h = f(\rho)$$

konulursa $\rho \to 0$ için

$$\frac{\frac{k_1}{\rho}f(\ )V(H_1)}{\rho} \to 0$$

olduğundan $\frac{k_1}{\rho}f(\rho)V(H_1) = o(\rho)$ dır. O halde $\rho \to 0$ için

$$\frac{\delta}{\rho} \leq 2n\frac{k_1}{\gamma}V(H_1) + o(\rho)$$

olur. Buna göre $\rho \to 0$ için $o(\rho) \to 0$ olduğundan $\rho$ yu küçük seçerek, t verilen sabit bir sayı olmak üzre $o(\rho) < t$ yapabileceğimizden

$$2n\frac{k_1}{\gamma}V(H_1) + t = T$$

denilirse $\rho \to o$ için $\frac{\delta}{\rho} < T$ = sabit olur. Buna göre $\rho(H_1, H) \to o$ için

$$(18) \qquad \delta(H_1, H) = O(\rho(H_1, H))$$

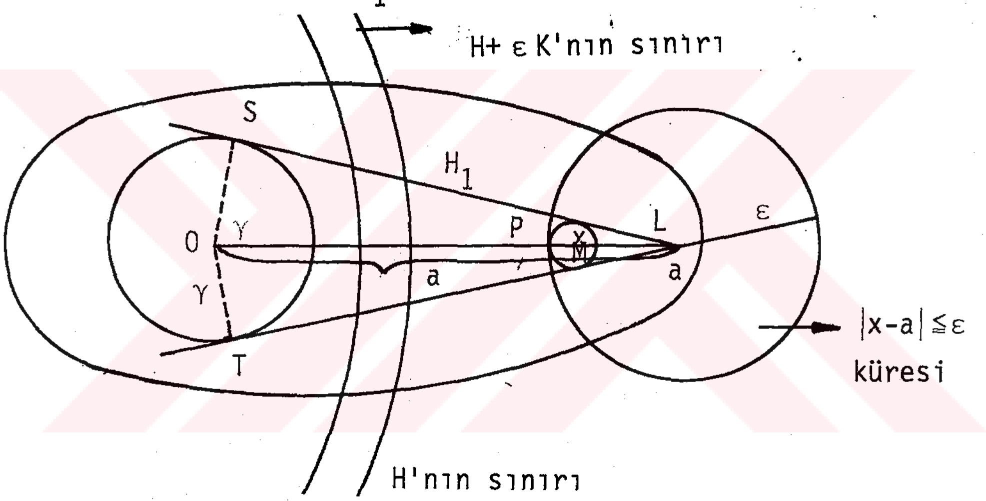
elde edilir.

Şimdi de $\rho(H_1, H) > \varepsilon$ varsayalım. Yani alınan bir $\rho(H_1, H)$'dan ve aynı zamanda $\frac{\gamma}{2}$ den küçük bir $\varepsilon$ seçelim. Bu seçişe göre $k_2<1$ herhangi bir sabit olmak üzere $\rho k_2 = \varepsilon < \frac{1}{2}\gamma$ olur $(k_2<1)$. Burada şimdilik $\rho$ da sabittir, ancak $\rho$ değiştiğinde $\varepsilon$ da $\rho$ ya bağlı olarak değişecektir. Buna göre $\rho$ nun tanımından $H_1$ in $H+\varepsilon K$ içinde veya $H$ nın $H_1+\varepsilon K$ içinde bulunmaması şeklinde iki durum ayırdedebiliriz.

Birinci durumda $H_1$ cisminin tamamı $H+\varepsilon K$ cisminin içine düşmediğinden $|x-a|\leqq\varepsilon$ küresi $H$ cismini kesmeyecek biçimde bir $a \in H_1$ var demektir. Bu küre ile $H_1$ cisminin arakesiti ise

$$\frac{\varepsilon}{(\gamma+|a|)}\gamma \geqq \frac{\varepsilon\gamma}{\gamma+\sigma}$$

yarıcaplı bir küre kapsayacaktır. Gerçekten aşağıdaki şekilden de görüleceği gibi; (şekilde $a \in H_1$ noktası L ile belirtilmiştir.)




$H_1$ cismi konveks olduğundan ancak LS ve LT doğruları ile OS ve OP nin oluşturduğu şeklin $H_1$ içinde kalmasını garanti edebiliriz. Böylece merkezi M ve yarıcapı x olan küre yukarıda sözü edilen küredir. Şekilden bu kürenin x yarıçapı için

$$\frac{x}{\gamma} = \frac{\varepsilon - x}{|a|}$$

bağıntısından

$$x = \frac{\gamma\varepsilon}{|a|+\gamma}$$

değeri elde edilir. $H_1$ cisminin $\sigma$ yarıçaplı küre içinde bulunduğu göz önüne alınırsa $|a|<\sigma$ olacağından

$$\frac{\varepsilon\gamma}{|a|+\gamma} \geqq \frac{\varepsilon\gamma}{\gamma+\sigma}$$

elde edilir. Böylece $|x-a|\leq\varepsilon$ küresi ile $H_1$ in ortak kısmında (yani $H_1\setminus H$ cisminde) $\frac{\gamma\varepsilon}{\gamma+\sigma}$ yarıçaplı küre bulunmaktadır.

İkinci durumda $\rho>\varepsilon$ olmakla birlikte birinci durumda incelenenin aksine, $H_1$ cisminin tamamının $H+\varepsilon K$ içine düştüğünü fakat $H$ cisminin tamamının $H_1+\varepsilon K$ içinde kapsanmadığı kabul edilerek, benzer biçimde yarıçapı sadece $H_1$ ve $\varepsilon$ na bağlı bir kürenin $H\setminus H_1$ cismi içinde bulunacağı gösterilebilir.

Böylece söz gelimi birinci durumda; n boyutlu birim kürenin hacmi

$$\frac{\sqrt{\pi}^{\,n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

olmak üzere

$$\delta(H_1, H)= V(H_1\setminus H)+V(H\setminus H_1)> \frac{\varepsilon^n\,\gamma^n}{(\gamma+\sigma)^n}\cdot\frac{\sqrt{\pi}^{\,n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

yazılabileceği açıktır. Buradan gerek birinci ve gerekse ikinci durumda sadece $H_1$ cismine bağlı olan $\beta>0$ sabiti için

$$\delta(H_1, H)\geq\beta\varepsilon^n \Rightarrow \sqrt[n]{\delta(H_1, H)} > \sqrt[n]{\beta}\,\varepsilon$$

bulunur. $\rho=k_2\varepsilon$ dan bulunan $\varepsilon$ yukarıda kullanılırsa

$$\frac{\rho}{\sqrt[n]{\delta}} < \frac{k_2}{\sqrt[n]{\beta}}$$

veya aynı şey demek olan $\delta(H_1, H)\to 0$ için

(19) $\qquad \rho(H_1, H)= O(\,\delta(H_1, H)\,)$

elde edilir. (18) ve (19) dan

$$f:\ (\mathcal{K}_1, \rho)\to(\mathcal{K}_1^{-1}, \delta)$$

dönüşümünün bir homeomorfizm olduğu buradan da $\rho$ ve $\delta$ nın $\mathcal{K}_1$ üzerinde aynı topolojiyi ürettikleri sonucuna varılır.

## II. BÖLÜM

### II-1. BALANSLI CÜMLELER

Balanslı cümleleri bu kesimde kısaca ele aldıktan sonra, birinci bölümde bütün özellikleri ile verilen $f(x)$ uzaklık fonksiyonu ile tanımlanan $E(a,b)$ equidistant cümlesinin hangi şartlar altında balanslı bir cümle olduğunu gelecek kesimde göstereceğiz.

**TANIM:** $S = \{ \alpha : |\alpha| \leq 1, \alpha \in \mathbf{R}\}$ olmak üzere bir B cümlesi için SB B bağıntısı gerçekleşiyorsa B cümlesine balanslıdır * denir. /4/

Bu tanımdan balanslı bir cümlenin özelliklerini şöylece sıralayabiriz.

Balanslı bir cümle simetrik olup o yu bir iç nokta olarak kapsar. Bundan başka balanslı cümlelerin kesişimi balanslıdır

Şimdi daha sonraki kesimde kullanacağımız önemli bir lemmayı ispatlayalım.

**LEMMA 2:** $\mathbf{R}^n$ de konveks bir cümlenin balanslı olması için gerek ve yeter şart simetrik olmasıdır.

**İSPAT:** Her balanslı cümle simetrik olduğundan konveks ve simetrik olan bir B cümlesinin balanslı olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir $x \in B$ alalım, simetri nedeniyle $-x \in B$ olur. Böylece, B konveks olduğundan, $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$(1-\alpha)(-x) + \alpha x = (2\alpha-1)x \in B$$

elde edilir. Şu halde $-1 \leq \beta \leq 1$ ise $\beta x \in B$, sonuçta B balanslı olur.

---

* Bourbaki'nin kitaplarında equilibre olarak geçen bu kelime İngilizce kitaplarda balanced, şeklinde kullanılmaktadır.

## II-2. EQUİDİSTANT CÜMLESİNİN BALANSLIĞI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu kesimde biraz sonra tanımını vereceğimiz E(a,b) equidistant cümlesinin bazı özelliklerini elde ettikten sonra, Lemma 2 den yararlanarak onun balanslı oluşu ile ilgili olarak bir gerek ve yeter şart oluşturacağız.

**TANIM:** $a,b \in R^n$ $(a\neq b)$ olmak üzere Minkowski metriği yardımıyle

(20) $$E(a,b)=\{p : p \in R^n \; f(p-a)= f(p-b)\}$$

şeklinde tanımlanan cümleye a,b noktalarının Equidistant cümlesi denir. /5/

E(a,b) cümlesinin a ve b noktalarına uzaklıkları aynı olan $R^n$ nin noktalarının cümlesi olduğuna ilgi çekilebilecektir.

Aşağıda E(a,b) cümlesinin özelliklerini ele alacağız.

1- E(a,b) cümlesinin (20) tanım ifadesinde konveks bir cümle olduğunu söyleyebiliriz. Gerçekten Teorem 2 nedeniyle f konveks bir fonksiyon olup, bu fonksiyonla elde edilen noktaların cümlesi açık olarak konveks olacaktır.

2- E(a,b) cümlesi, sürekli f(x) fonksiyonunun sıfırlarının cümlesi olduğundan kapalı bir cümledir.

Şimdi E(a,b) cümlesinin o noktasını hangi şartlar altında bir iç nokta olarak kapsayacağı sonucumuzu verelim.

**LEMMA 2:** a,b noktaları o noktasına göre simetrik iseler $o \in E(a,b)$.

**İSPAT:** a ve b noktaları o ya göre simetrik iki nokta ise bunların o noktasına olan uzaklıkları eşit yani

$$f(o-a)= f(o-b)$$

olur ki E(a,b) cümlesinin tanımından $o \in E(a,b)$ dir.

Aşağıdaki teorem ile E(a,b) cümlesinin o-simetrik olması (Lemma 2 nedeniyle balanslı) için bir gerek ve yeter şart oluşturacağız.

**TEOREM 3:** a ve b o ya göre simetrik iki nokta olmak üzere E(a,b) cümlesinin balanslı olması için gerek ve yeter şart

(21) $$f(p+a)= f(p+b)$$

olmasıdır.

**İSPAT:** $E(a,b)$ cümlesi o-simetrik ise $p \in E(a,b)$ için $-p \in E(a,b)$ olacaktır. Yani

$$f(p-a)= f(p-b)$$

ile beraber

$$f(-p-a)= f(-p-b)$$

$$f\left[-(p+a)\right]= f\left[-(p+b)\right]$$

gerçeklenecektir. Buradan sonuç 2 ye göre

$$f(p+a)= f(p+b)$$

elde edilir.

Karşıt olarak

$$f(p+a)= f(p+b)$$

ise (20) tanım ifadesinden $-p \in E(a,b)$ dir. Öte yandan hipotez gereği a,b noktaları o noktasına göre simetrik olduklarından

$$a= -b \text{ ve } b= -a$$

olup bunları (21) de kullanmakla

$$f(p-b)= f(p-a)$$

elde edilir ki bu $p \in E(a,b)$ olmasını gerektirir. Böylece $E(a,b)$ cümlesi (21) şartı altında o-simetrik, lemma 2 nedeniylede balanslıdır.

SUMMARY

Let H be a convex body in euclidean n-dimensional space $R^n$ having the origin o as an interior point. Then the distance function $f:R^n \to R$ of H is defined by / 2/

$$f(p)=\inf\{\lambda:\ \lambda>0, p\in \lambda H\}\ (p\in R^n).$$

The equidistant set of a,b (with respect to distance function) is defined by

$$E(a,b)=\{p : p\in R^n, f(p-a)=f(p-b)\}$$

where $a,b\in R^n$ and $a\neq b$./5/

In the second chapter of this thesis we have discussed that under which conditions, the equidistant set E(a,b) is a balanced set and we have produced a theorem concerning this set E(a,b) and obtained other properties of E(a,b).

Actually, it is a well known fact that a set B satisfying the relation $SB\subset B$ is a balanced set, where S is of the form $S=\{\alpha:|\alpha|\leq 1, \alpha\in R\}$ and that a balanced set is a o-symmetric set. Further, assuming the fact that "a convex set is a balanced set if and only if it is symmetric.", firstly we have determined that under which conditions the origin point o is a interior point of E(a,b). Then we have obtained our result which will satisfy that E(a,b) is o-symmetric (and consequently balanced) according to the distancefunction f(p) defined above.

With this aim in chapter I, we have considered the propeties of the Minkowski metric defined by the function f(p) and the distance function f(p) belong to a convex body H and convex sets. Now let $\mathfrak{N}$ be the collection of all closed bounded convex sets and let $\mathfrak{N}_1$ be the subcollection consisting of the closed bounded convex bodies. The unit sphere $|x|\leq 1$ is denoted by K. If we put

$$\rho(H_1,H_2)=\inf\{\varepsilon:\ \varepsilon>0, H_1\subset H_2+\varepsilon K, H_2\subset H_1+\varepsilon K\}$$
$$\delta(H_1,H_2)=V(H_1\setminus H_2)+V(H_2\setminus H_1)$$

where $H_1,H_2\in\mathfrak{N}$ and $H_i+\varepsilon K$ is the (convex) body consisting of the points x whose distance to $H_i$ does not exceed $\varepsilon$ (i=1,2), we will show that $\rho$ is a metric on $\mathfrak{N}$ and $\delta$ is a metric on the subcollection $\mathfrak{N}_1$ and then will show that $\rho$, $\delta$ are equivalent metric on $\mathfrak{N}_1$.

# K A Y N A K L A R

/ 1 / : SCHAEFER, H.H., Topological Vector Spaces, third printing Springer-Verlag Berlin 1971

/ 2 / : CASSELS, J.W.S., An Introduction to the Geometry of Numbers Second Printing, Springer-Verlag 1971

/ 3 / : LEKKERKERKER, C.G., Geometry of Numbers. Nort-Holland publishing Company Amsterdam 1966

/ 4 / : TAYLOR, A.E., Introduction to functional Anelysis. Jonh Wiley 1958

/ 5 / : G.D. CHAKERIAN and H. GROEMER, On Convex Bodies Containing a Given Number of Lattice Points. Journal of Number Theory 9,240-246 (1977)