10387

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇUBUKLARDAN VE PLAKLARDAN OLUŞAN SİSTEMLERDE YER DEĞİŞTİRMELERİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİYLE HESAPLANMASI

DOKTORA TEZİ

Osman YİĞİT
Makina Yüksek Mühendisi

Jüri Üyeleri

Prof.Dr.Akbay Tuğan GÖKÇE
Doç.Dr.İbrahim UZMAY
Yrd.Doç.Dr.Ahmet AVCI

KONYA-1989

ÖZ

Bu çalışmada çubuk ve plakların kombinasyonundan oluşan, statik yüklere maruz katı bağlı sistemlerin yer değiştirmelerinin hesaplanması, sonlu elemanlar yöntemi ile incelenmiştir.

Bu işlem için önce çubuk elemanların; eksenel zorlanma, burulma zorlanması ve eğilme zorlanması durumları için katılık matrisleri türetilmiş ve daha sonra süperpozisyon prensibi ile genel halde zorlanmaya maruz çubuk elemana ait eleman eşitlikleri eleman koordinat sisteminde elde edilmiştir.

Bir sonraki adımda plak elemanların düzleminde ve düzlemine dik yüklerle yüklenme durumları için ayrı olarak eleman eşitlikleri, eleman koordinat sisteminde türetilmiş ve bu eşitlikler süperpoze edilerek plak eleman için eleman eşitlikleri elde edilmiştir.

Daha sonra çubuk ve plak elemanlar için eleman koordinat sistemlerinde elde edilen eleman eşitliklerinin referans koordinat sisteminde nasıl ifade edilebileceği gösterilmiştir.

Yer değiştirme analizi istenen yapılarda sistem katılık matrisinin nasıl teşkil edilebileceği gösterilmiş, dış kuvvetler ve yer değiştirmeler arasındaki bağıntılar elde edilmiştir. Bu bağıntılar sistemin toplam serbestlik derecesi kadar bilinmeyeni ihtiva eden lineer bir denklem takımıdır. Bu denklem takımının bilinmeyenlerinin tamamı denklem sisteminin aynı tarafında değildir. Zira bilinmeyenlerin büyük bir kısmı yer değiştirme bileşenleri olup, geri kalan kısmı mesnet reaksiyonlarıdır. Denklem takımının bilinmeyen olarak sadece yer değiştirmeleri ihtiva edecek şekilde, sınır şartları yardımıyla mertebesinin nasıl düşürülebileceği açıklanmıştır.

Bir düğüm noktasının altı adet serbestlik derecesine sahip olduğu düşünülürse, yukarıda bahsedilen işlemlerin hemen birkaç elemanda elle yapılamayacak derecede çoğaldığı görülür. Bu işlemlerin bilgisayarda yapılabilmesi için Basic programlama dilinde bilgisayar programı yazılmıştır.

Bahsedilen bu işlemler bazı tipik örnek problemlere uygulanmış ve literatürde bulunabilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

ABSTRACT

In this study the displacement components caused by static loads in three dimensional systems composed of beam and plate elements and their combinations joined by rigid joints are analysed by finite element method.

First of all, the stiffniss matrices of prismatic uniform beam elements subjected to axial, torsional and bending forces are derived seperately. Then, these matrices are superposed to obtain the element equations of the beam element in the local coordinate system.

Next, the element equations of plates which resist inplane and transverse loads are seperately derived in local coordinate systems. These equations are superposed in order to obtain element equations for a plate element.

Later, the element equations obtained are described in global coordinate system.

The assembling of the system stiffness matrix of the system subject to displacement analysis is discussed. The relation between the displacement vector and the external forces is obtained as a set of linear equations with number of unknowns equal to the total number of degrees of freedom. All of the unknowns are not of the same side of the equations, that is because many of the unknowns are displacement components on the left hand side and remaining are unknowns reactions on the other side.

The reduction of the order of the set of equations so as to have only the displacement components as unknowns is also discussed.

Considering that a node of an element has a total of six degrees of freedom even for a system with a few elements the application of the abowe mantioned solution becomes very tedious for hand calculation. This difficulty necessitated the use of computer program. A computer program has been prepared in Basic programming language.

Some typical problems has been solved by using the computer program developed. The numerical results are compared with some results available.

Çalışmalarım ve tüm doktora öğrenimim süresince, büyük desteğini gördüğüm hocam, Prof.Dr.Akbay Tuğan GÖKÇE'ye, sonlu elemanlar yöntemi hakkında temel bilgileri aldığım hocam, Prof.Dr.Teoman KURTAY'a ve bilgisayarlarda ortaya çıkan problemlerin çözümünde yardımını esirgemeyen Arş.Grv.Selçuk HALKACI'ya burada minnet ve şükranlarımı arzederim.

Osman YİĞİT

İ Ç İ N D E K İ L E R

SEMBOLLER

A	:	Çubuk elemanın kesit alanı; Üçgen plak elemanın alanı
$[D]$	:	Gerilmelerle birim şekil değiştirmeleri birbirine bağlayan elastiklik matrisi
D_X, D_Y, D_Z	:	Referans koordinat sisteminde dönme açıları
d_x, d_y, d_z	:	Eleman koordinat sisteminde dönme açıları
E	:	Elastiklik modülü
$[F]$	:	Elemanın düğüm noktalarındaki iç kuvvet vektörü
F_x, F_y, F_z	:	Elemanın düğüm noktasındaki iç kuvvetler
G	:	Kayma modülü
h	:	Plak elemanın kalınlığı
I_y, I_z	:	y ve z eksenlerine göre alan atalet momentleri
J_x	:	Çubuk eksenine göre polar atalet momenti
$[K]$	:	Referans koordinat sisteminde katılık matrisi
$[K_{çr}]$	:	Referans koordinat sisteminde çubuk elemanın katılık matrisi
$[K_{pr}]$	:	Referans koordinat sisteminde plak elemanın katılık matrisi
$[K_s]$	:	Referans koordinat sisteminde sistemin katılık matrisi
$[K_s]_i$	:	Sınır şartları dikkate alınarak indirgenmiş sistem katılık matrisi
$[k]$	:	Eleman koordinat sisteminde katılık matrisi
$[k_{çe}]$	:	Çubuk elemanın eleman koordinat sisteminde katılık matrisi
$[k_{pd}]$	:	Düzlemsel yüklere maruz üçgen plak elemanın eleman koordinat sisteminde katılık matrisi
$[k_{pu}]$	:	Düzlemine dik yüklere maruz plak elemanın eleman koordinat sisteminde katılık matrisi
L	:	Uzunluk; Çubuk boyu
ΔL	:	Boydaki değişme
M_A, M_B	:	Çubuğun ucundaki iç momentler
M^d	:	Dış moment
M_x, M_y, M_z	:	Elemanın düğüm noktasındaki iç momentler

Nd : Sistemdeki düğüm sayısı

N_{tsd} : Sistemin toplam serbestlik derecesi

$[P]$: Dış yük vektörü

$[T], [t]$: Transformasyon matrisi

$[U]$: Referans koordinat sisteminde elemanın düğüm noktalarının yer değiştirme vektörü

U_X, U_Y, U_Z : Referans koordinat sisteminde ötelemeler

$[u]$: Eleman koordinat sisteminde yer değiştirme vektörü

u_x, u_y, u_z : Eleman koordinat sisteminde ötelemeler

X, Y, Z : Referans koordinat sistemi eksenleri

x, y, z : Eleman koordinat sistemi eksenleri

α : Çubuk elemanın X, Z düzlemine dik olması durumunda z, Z eksenleri arasındaki açı. Aksi takdirde şekil 19. da tanımlanan açı

γ : Kayma açısı

$[\varepsilon]$: Birim şekil değiştirme vektörü

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$: x ve y doğrultularındaki birim uzamalar

μ : Poisson oranı

$[\sigma]$: Gerilme vektörü

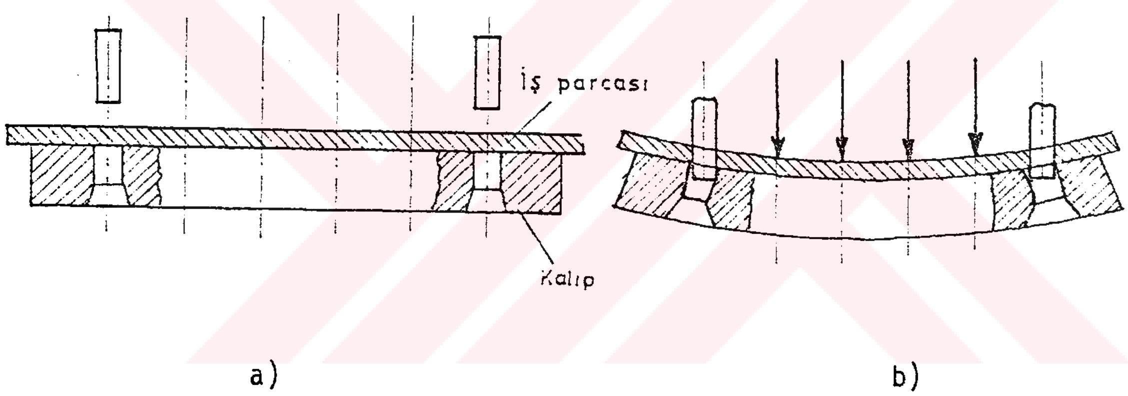
σ_x, σ_y : x ve y doğrultularındaki normal gerilmeler

τ : Kayma gerilmesi

1- GİRİŞ

1.1 PROBLEMİN TAKDİMİ

Makinaların kusursuz bir şekilde fonksiyonlarını yerine getirebilmeleri için ortaya çıkan şekil ve yer değiştirmelerin (deplasmanların) belirli bir sınır değeri aşmaması gerekir. Örnek olarak hidrolik bir pres ele alınacak olursa, preste kullanılacak kesme kalıplarında kesme boşluğunun optimum bir değeri vardır. Kesme boşluğu optimum değerin dışına taştığında iş parçası düzgün olarak kesilemeyecektir. Boyu uzun olan kalıplarda kesme kuvvetlerinden dolayı ortaya çıkacak esneme neticesinde kesme boşlukları değişecektir. Şekil 1.a) da motorlarda kullanılan yağ filtre saclarını basan bir kalıp dizaynı görülmektedir. Kesme esnasında alt kalıbın alacağı şekil abartılmış olarak Şekil 1.b) de gösterilmiştir.

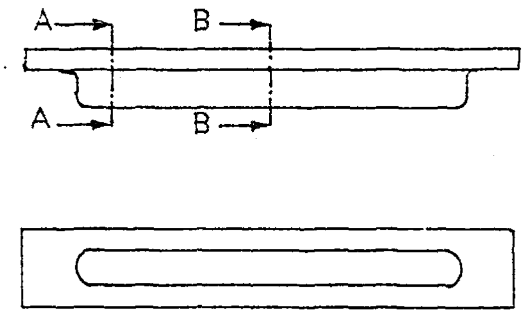


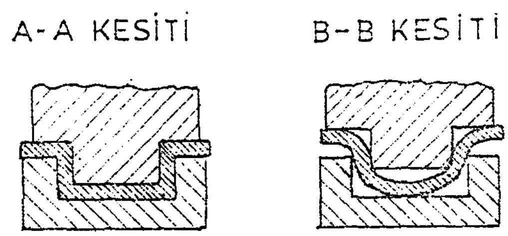
Şekil 1. Yağ filtre saclarını basan kalıp dizaynı
a) yüklemeden önce
b) yüklemeden sonra

Yine aynı preste, Şekil 2.a) da verilen iş parçasının sıvama yoluyla sactan imal edildiği düşünülecek olursa, kalıbın B de A dan daha fazla esnemesi durumunda A-A kesitinde istenen şekil elde edilebilmesine rağmen B-B kesitinde istenen şekil elde edilemeyecektir, Şekil 2.b).

Pres ve kalıp yeteri kadar rijit boyutlandırılmış olsaydı yukarıda bahsedilen problemler ortaya çıkmayacaktı.

Bu sebeple konstrüktör daha başlangıçta, yük altındaki makinanın kritik noktalarının ne kadar yer değiştireceğini ve bu yer değiştirmelere müsaade edilip edilmeyeceğini bilmek ister. Ancak elemanter mukavemet disiplininde verilen hesap metodları, genel olarak kuvvetle şekil değiştir-

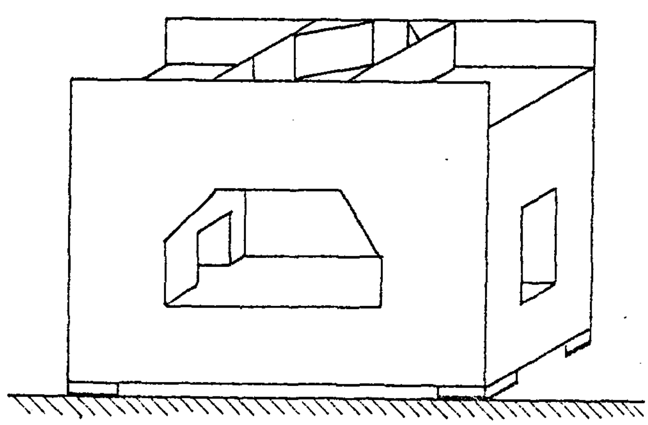




Şekil 2. Form kalıp dizaynı
a) iş parçası
b) kalıp üzerinde iki farklı kesit

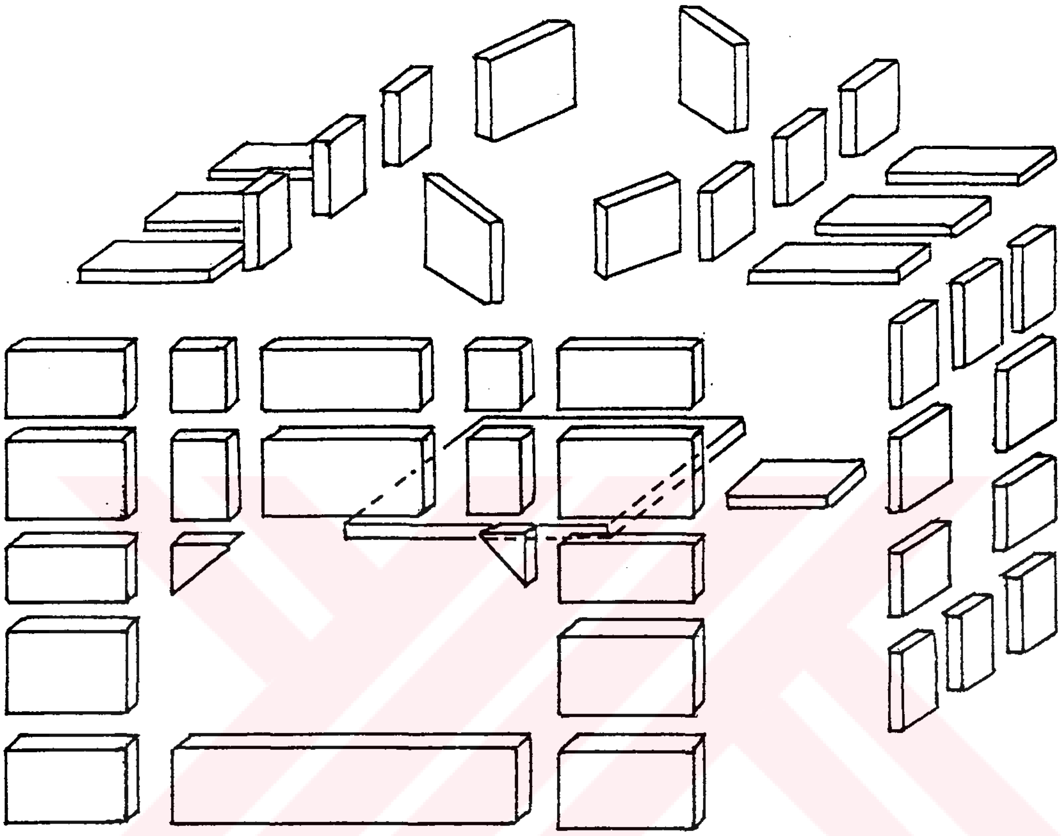
meler arasındaki temel ilişkileri anlamaya yardım ettiğinden, pratikte ortaya çıkan problemlerin çözümünde çoğu zaman yetersiz kalır.

Bu durumlarda problemi kısmi küçük problemlere parçalayıp çözüm yollarının aranması gerekir. Şekil 3.a) da şematik olarak çizilen hidrolik



Şekil 3.a) Bir hidrolik pres gövdesi

presin kesme kuvvetlerine karşı davranışının ne olacağını klasik hesap metodlarıyla kestirmek çok zor olduğundan, makina şekil 3.b) de gösterildiği gibi belirli sayıda parçalardan teşekkül etmiş olarak düşünülebilir.



Şekil 3.b) Pres gövdesinin sonlu elemanlara ayrılması

Bu çalışmada en çok kullanılan konstrüksiyon elemanları olan, çubuk ve plaklardan oluşan, statik yüklere maruz sistemlerde yer değiştirmelerin hesabı için sonlu elemanlar prensibinin nasıl uygulanabileceği araştırılacaktır.

1.2. ÇUBUK VE PLAK KAVRAMI

Uzunluğu kesit boyutlarına oranla büyük olan yapı elemanlarına çubuk adı verilir. Genel olarak çubuğun uzunluğu kesitinin enaz on katıdır /1/. Çubuklar eksenel yüklere, burulma ve eğilme momentlerine direnç gösterebilen elemanlar olup, eksenleri vasıtasıyla tanımlanırlar. Eksenler doğru veya herhangibir uzay eğrisi olabilir. Bu çalışmada doğru eksenli çubuklarla ilgilenilecektir.

Bir konstrüksiyon elemanının deforme olmamış durumunda, ortasından geçen yüzey düzlem ise ve bu elemanın boyutu diğer iki boyutu yanında küçükse eleman plak adını alır / 2 /. Plağın orta düzlemine dik yöndeki boyutuna plağın kalınlığı adı verilir. Bu çalışmada kalınlığı sabit olan plaklarla sınırlı kalınacaktır.

Bu çalışmada yapılan temel kabuller şunlardır /2,3/:

1. Yüklemeden önceki düzlemsel kesitler yüklemeden sonra da düzlem kalırlar. Üniform kesitli düz çubuklar için bu kabulun doğruluğu ispatlanabilir. Diğer elemanlar için bu kabul yaklaşık doğrudur.

2. Plaklarda orta düzlemde deformasyon ortaya çıkmaz, başka bir deyişle orta düzlem nötr tabaka olarak görülebilir.

3. Yer değiştirmeler küçük olup, gerilmelerle şekil değiştirmeler arasındaki bağıntı lineerdir. Başka bir deyişle Hooke kanunu geçerlidir.

4. Kesme kuvvetlerinin oluşturacağı deformasyonlar ihmal edilebilecek kadar küçüktür.

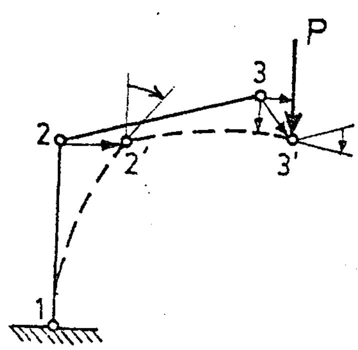
5. Eleman malzemeleri homojen ve izotroptur.

1.3. SONLU ELEMAN KAVRAMI

Gerçek bir mühendislik yapısının yüklere karşı davranışını analiz edebilmek için önce yapının modeli tasarlanır. Bu modelin çubuk, üçgen ve dikdörtgen plak gibi alt yapı taşlarından teşekkül ettiği düşünülür. Bu modele bundan sonra sistem, modeli oluşturan yapı taşlarına da eleman adı verilecektir. Bu elemanlarda klasik çubuk ve plak teorisinin kabulleri geçerlidir.

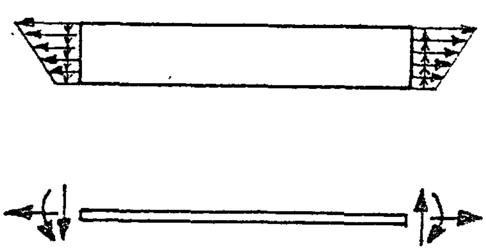
Elemanların birbirleriyle bağlantılarının uc noktalarında olduğu düşünülür. Bu noktalara düğüm noktaları adı verilir. Bu düğüm noktaları moment de taşıyabildiğinden, buradaki düğüm noktası kavramının kafes sistemlerindeki düğüm noktası kavramıyla karıştırılmaması gerekir.

Şekil 4 de tekil bir yüke maruz basit bir sistem gösterilmiştir. Burada $\overline{123}$ sistemi, $\overline{12}$ ve $\overline{23}$ elemanları, 1, 2 ve 3 düğüm noktalarını göstermektedir.

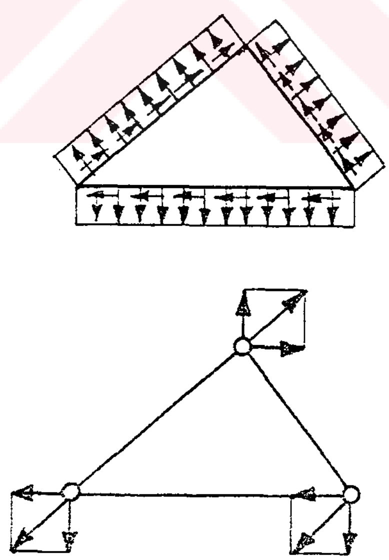


Şekil 4. Basit bir sistem

Elemanların düğüm noktalarındaki kesitlerine etkiyen yayılı iç gerilmelerin yerine bunların statik eşdeğeri olan tekil kuvvetler ve tekil momentler alınır. Bu durum düzlemsel yüklere maruz bir çubuk eleman için Şekil 5 te , üçgen bir plak eleman için Şekil 6 da gösterilmiştir / 4 /.



Şekil 5. Bir çubuk elemanda
a) iç kuvvetler
b) statik eşdeğer düğüm kuvvetleri



Şekil 6. Bir plak elemanda
a) iç kuvvetler
b) statik eşdeğer düğüm kuvvetleri

Sistemdeki düğüm noktalarının hareketlerini ve düğüm noktası kuvvetlerini ifade etmek için yere bağlı bir koordinat sistemi seçilir. Buna referans koordinat sistemi adı verilecektir (X, Y, Z koordinat sistemi). Buna karşılık elemanlardaki deformasyonları ifade etmek için elemana bağlı lokal bir koordinat sisteminde çalışmak daha uygundur. Bu da eleman koordinat sistemi (x, y, z koordinat sistemi) olarak adlandırılacaktır. Eleman koordinat sistemlerinin eksenleri, çubuklarda çubuk asal eksenleri ile çakışır. Plaklarda nasıl alınacağı ilerideki bölümlerde açıklanacaktır.

Düğüm noktalarının hareketlerinin koordinat sistemlerindeki ifadesi sırasında genel olarak altı farklı durumla karşılaşılır. Bunların üçü öteleme (x, y, z veya X, Y, Z eksenleri doğrultularında) üçü de dönmedir (x, y, z veya X, Y, Z eksenleri etrafında). Bu altı farklı yer değiştirme bileşenine serbestlik derecesi adı verilir. Buradan bir düğüm noktasının serbestlik derecesinin altı olduğu anlamı ortaya çıkar.

2. bölümde türetilecek düğüm noktası kuvvetleri ile düğüm noktası yer değiştirmeleri arasındaki lineer eşitliklerden (eleman eşitlikleri) faydalanarak sistem denklemleri ortaya çıkarılır. Sonlu eleman yöntemi, bu denklem sisteminde matematik formunu kazanmıştır.

Pratikteki problemlerde bazı düğüm noktalarının bazı yönlerdeki hareketleri engellenmiştir. Engellenen hareketlere sınır şartları adı verilir. Sınır şartlarının yardımıyla bilinmeyen yönlerdeki yer değiştirmeler hesap edilir.

Denklem sisteminin teşkili ve çözümü genel halde elle yapılamaz. Nümerik hesaplamaların bir bilgisayar tarafından üstlenilmesi gerekir. Mühendisin esas fonksiyonu, sistem elemanlarının tasarlanması ve sonuçların değerlendirilmesindedir.

1.4 LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Deyim olarak sonlu elemanlar son yıllarda ortaya atılmış gibi görünüyorsa da, fikir birkaç yüzyıl gerilere dayanır. Eski matematikçiler bir dairenin çevresini hesaplamak için dairenin içine ve dışına çizilen çokgenlerin kenarlarının toplamlarından faydalanmışlardır. Çokgenlerin kenar sayılarını arttırdıkça dairenin içindeki ve dışındaki çokgen çevreleri arasındaki farkın gittikçe azaldığını ve dairenin gerçek çevresine yaklaşıldığını görmüşlerdir.

Bu düşünce şeklini kullanarak üçgenle sınırlı bir bölgede sürekli fonksiyonların kullanılması fikri ilk defa Courant tarafından 1943 yılında ortaya atılmıştır / 5 /.

Bugün sonlu elemanlar metodu olarak bilinen metod, 1956 yılında Turner, Clough, Martin ve Top tarafından takdim edilmiştir / 6 /. Bu yayın, mafsal bağlantılı çubuklar ve düzlemsel yüklere maruz üçgen plak elemanlarla uçak konstrüksiyonlarının analizinin nasıl yapılacağı hakkındadır.

Doktora çalışmalarında, 1962 yılında Tocher üçgen elemanları kullanarak plakların eğilmesini,1966 yılında Felippa iki boyutlu sonlu elemanların lineer ve lineer olmayan davranışlarını incelemişlerdir / 7 /.

Desai-Abel / 8 / ve Zienkiewicz / 9 / eserlerinde metodun gerilme analizi problemlerine uygulanmasını takdim etmişlerdir.

Konstrüksiyon mühendisliğinde metodun uygulanması katı cisimler mekaniği, matris cebri ve bilgisayar programlaması konularında temel bilgileri gerektirir. Katı cisimler mekaniğindeki temel kavramları inceleyen yayın sayısı oldukça fazladır /10...13/. Matris cebri konusunda da yayın sayısı az değildir. Sonlu elemanlar metodunun ihtiyacına cevap verecek temel matris bilgileri /14/ ve /15/ numaralı kaynaklarda mevcuttur.

2- BASİT ELEMANLAR İÇİN ELEMAN EŞİTLİKLERİ

2.1 PRİZMATİK ÇUBUK ELEMANI

Prizmatik çubuk elemanı iki ucu arasında hiçbir kuvvet taşımaz. Eğer taşıyorsa bu kuvvet düğüm noktalarına dağıtılır. Eleman koordinat sistemi sağ el kaidesine uygun dik bir koordinat sistemidir. Eleman koordinat sisteminin x ekseni çubuk ekseni ile, y ve z eksenleri ise çubuk kesitinin asal eksenleri ile çakışıktır. Başlangıç ve bitiş noktalarındaki kesitlerdeki x, y ve z yönlerindeki yer değiştirmeler pozitiftir. Kesitlerde x, y ve z etrafındaki dönmeler ise sağ adımlı bir vidanın ilerleme yönünde pozitiftir. Bu işaret kabulu düğüm noktalarındaki dış kuvvetler için de geçerlidir.

Yukarıdaki yön kabulu bitiş noktasındaki kesitte bulunan iç kuvvetler için aynen geçerli olmasına karşılık, başlangıç noktasındaki kesitte ters işaretlidir. Bu kabul, pozitif yöndeki şekil değiştirmelerin, pozitif yöndeki iç kuvvetlere karşılık gelmesi düşüncesinden yapılmıştır.

Prizmatik çubuk elemanı için eleman eşitlikleri üç farklı zorlanma durumu için çıkarılacaktır. Bunlar eksenel zorlanma, burulma ve eğilmedir. Kesme zorlanmasından dolayı ortaya çıkan deformasyonlar küçük olduğundan, kesme zorlanması hesaba dahil edilmeyecektir.

2.1.1 EKSENEL ZORLANMAYA MARUZ ÇUBUK

Eksenel zorlanmaya maruz bir çubukta bütün kesitlerdeki eksenel gerilmeler aynı olup F_x, eksenel kuvveti; E, elastiklik modülü ve A, kesit alanı arasında

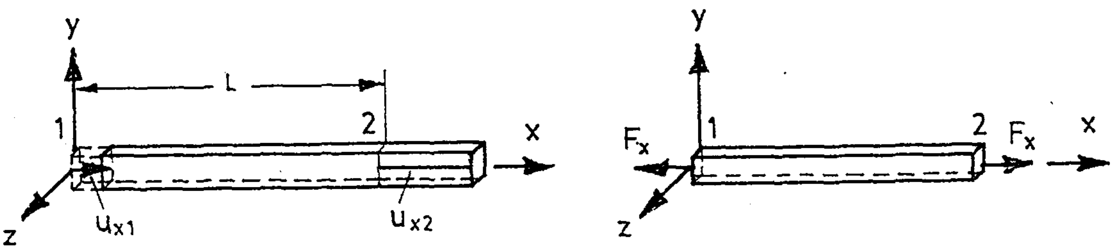
$$F_x = \frac{EA\Delta L}{L} = C\Delta L \qquad (1)$$

bağıntısı vardır. Burada C=EA/L dir.

Şekil 7 de görüldüğü gibi çubuk uzunluğundaki ΔL değişmesi 1 ve 2 numaralı düğüm noktalarındaki u_{x2} ve u_{x1} yer değiştirmelerinin farkına eşittir. Buna göre

$$\Delta L = u_{x2} - u_{x1} \qquad (2)$$

dir.



Şekil 7. Eksenel zorlanmaya maruz çubuk

Çubuk uçlarındaki düğüm kuvvetleri ise;

$$F_{x1}=-F_x \quad \text{ve} \quad F_{x2}=F_x \tag{3}$$

şeklindedir. (1) ve (2) eşitlikleri vasıtasıyla

$$F_{x1}=Cu_{x1}-Cu_{x2} \tag{4}$$

$$F_{x2}=-Cu_{x1}+Cu_{x2} \tag{5}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu son iki eşitlik matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -C \\ -C & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{bmatrix} \tag{6}$$

eşitliği elde edilir. (6) eşitliği kısa olarak,

$$[F]= [k][u] \tag{7}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$[k]= \begin{bmatrix} C & -C \\ -C & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & \frac{-EA}{L} \\ \frac{-EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \tag{8}$$

matrisine eksenel zorlanmaya maruz çubuk elemanının katılık matrisi adı verilir /16/.

2.1.2. BURULMAYA MARUZ ÇUBUK

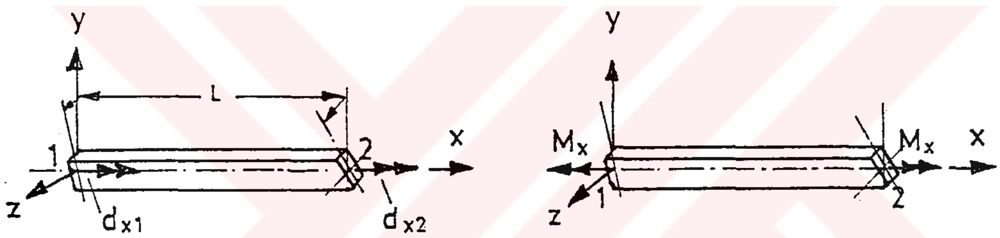
Burulmaya maruz bir çubukta burulma momenti M_x, kayma modülü G, polar atalet momenti J_x, çubuk boyu L ve dönme açısı ϕ arasındaki bağıntı klasik mukavemet kitaplarında /11/.

$$M_x=\frac{GJ_x\phi}{L}=C\phi \tag{9}$$

şeklinde verilir. Burada $C=GJ_x/L$ dir.

Şekil 8 den görüleceği gibi ϕ dönme açısı, 1 ve 2 numaralı düğüm noktalarının x ekseni etrafındaki d_{x2} ve d_{x1} dönme açılarının farkı olarak ortaya çıkar;

$$\phi=d_{x2}-d_{x1} \tag{10}$$



Şekil 8. Burulmaya zorlanan çubukta dönmeler ve burulma momentleri

Burada çubuk uç momentleri

$$M_{x1}=-M_x \quad \text{ve} \quad M_{x2}=M_x \tag{11}$$

şeklindedir.

(9) ve (10) eşitlikleri yardımıyla uç burulma momentleri

$$M_{x1}= Cd_{x1}-Cd_{x2} \tag{12}$$

$$M_{x2}=-Cd_{x1}+Cd_{x2} \tag{13}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu son iki eşitlik matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ \\ M_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -C \\ \\ -C & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x1} \\ \\ d_{x2} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

eşitliği elde edilir. (14) eşitliği kısa olarak yazılırsa

$$[M] = [k]\,[d] \qquad (15)$$

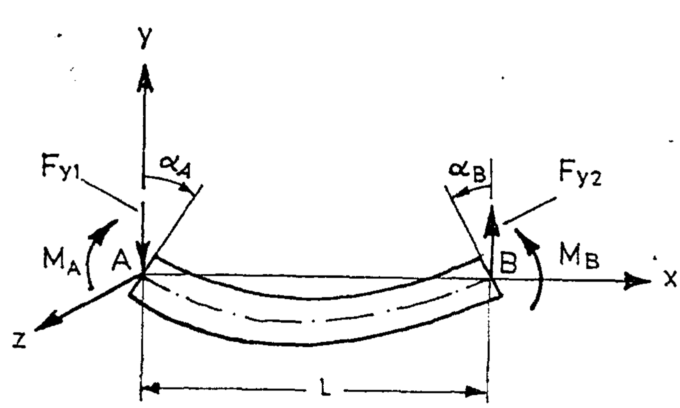
eşitliği elde edilir. Burada $[k]$ sadece burulmaya maruz bir çubuk elemanın katılık matrisi olup,

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{GJ_x}{L} & \frac{-GJ_x}{L} \\ \\ \frac{-GJ_x}{L} & \frac{GJ_x}{L} \end{bmatrix} \qquad (16)$$

şeklindedir /17/.

2.1.3 EĞİLMEYE ZORLANAN ÇUBUK

Eğilmeye zorlanan çubukta uçlara etki eden kuvvetler çubuk boyunca lineer değişen bir moment doğururlar. Şekil 9 da eğilmeye zorlanan bir çubuğun şekil değiştirmesi gösterilmiştir. Burada eğilme momentinin sadece z ekseni doğrultusunda, uç kuvvetlerinin de y ekseni doğrultusunda etkimesi durumunda eleman eşitlikleri çıkarılacaktır. Yani eğilme x, y düzleminde olmaktadır.



Şekil 9. Eğilmeye zorlanan çubuk

Çubuğun eğilmesi esnasında, lineer değişen eğilme momentinden dolayı başlangıç kesiti A da α_A ve bitiş kesiti B de α_B dönmeleri meydana gelecektir. Burada M_A momenti A ucunda $M_A L/(3EI_z)$ ve B ucunda $M_A L/(6EI_z)$ büyüklüğünde dönmeye, M_B momenti de A ucunda $M_B L/(6EI_z)$ ve B ucunda $M_B L/(3EI_z)$ büyüklüğünde dönmeye sebep olacaktır /11/.

Bu durumda

$$\alpha_A = \frac{L}{3EI_z}\left(M_A + \frac{1}{2}M_B\right) \tag{17}$$

$$\alpha_B = \frac{L}{3EI_z}\left(\frac{1}{2}M_A + M_B\right) \tag{18}$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitlikler M_A ve M_B ye göre çözülürse

$$M_A = \frac{4EI_z}{L}\alpha_A - \frac{2EI_z}{L}\alpha_B \tag{19}$$

$$M_B = -\frac{2EI_z}{L}\alpha_A + \frac{4EI_z}{L}\alpha_B \tag{20}$$

eşitlikleri elde edilir.

Burada dikkat edilmesi gereken bir husus vardır. Buradaki düğüm noktalarının yer değiştirmeleri α_A ve α_B dönmelerinden başka u_{y1} ve u_{y2} ötelemeleriyle

$$\psi \cong tg\psi = \frac{u_{y2} - u_{y1}}{L} \tag{21}$$

dönmesine de haizdirler, Şekil 10.

Bu durumda uç noktalarının dönmeleri

$$d_{z1} = -\alpha_A + \psi \tag{22}$$

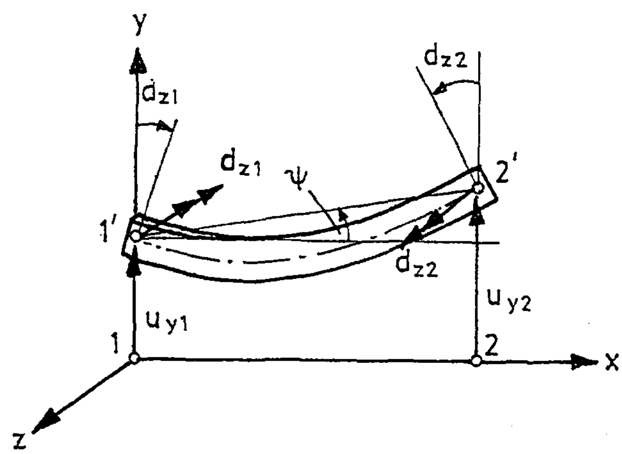
$$d_{z2} = \alpha_B + \psi \tag{23}$$

olacaktır. (22) ve (23) eşitliklerinden

$$\alpha_A = -d_{z1} + \psi \tag{24}$$

$$\alpha_B = d_{z2} - \psi \tag{25}$$

eşitlikleri elde edilir.



Şekil 10. y yönünde öteleme ve z etrafında dönmeler

(24) ve (25) eşitliklerine ψ nin (21) eşitliğindeki değeri konursa,

$$\alpha_A = -d_{z1} + \frac{u_{y2}-u_{y1}}{L} = -\frac{1}{L}u_{y1} - 1.d_{z1} + \frac{1}{L}u_{y2} + 0.d_{z2} \tag{26}$$

$$\alpha_B = d_{z2} - \frac{u_{y2}-u_{y1}}{L} = \frac{1}{L}u_{y1} + 0.d_{z1} - \frac{1}{L}u_{y2} + 1.d_{z2} \tag{27}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu son iki eşitlik matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \alpha_A \\ \alpha_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -1 & \frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{y1} \\ d_{z1} \\ u_{y2} \\ d_{z2} \end{bmatrix} \tag{28}$$

şeklini alır. Diğer taraftan,

$$F_{y1} = -\frac{1}{L}(M_A - M_B) \tag{29}$$

$$F_{y2} = \frac{1}{L}(M_A - M_B) \tag{30}$$

$$M_{z1} = -M_A \tag{31}$$

$$M_{z2} = M_B \tag{32}$$

olduğu dikkate alınarak son dört eşitlik, matris formunda

$$\begin{bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ -1 & 0 \\ \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} \tag{33}$$

olarak yazılabilir.

(19) ve (20) eşitlikleri matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_z}{L} & -\frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{2EI_z}{L} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_A \\ \alpha_B \end{bmatrix} \tag{34}$$

eşitliği elde edilir.

(28) eşitliği (34) eşitliğinde, daha sonra da (34) eşitliği (33) eşitliğinde yerine konursa düğüm noktasındaki kuvvetlerle düğüm noktası yer değiştirmeleri arasındaki bağıntı,

$$\begin{bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ -1 & 0 \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4EI_z}{L} & -\frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{2EI_z}{L} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -1 & \frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{y1} \\ d_{z1} \\ u_{y2} \\ d_{z2} \end{bmatrix} \tag{35}$$

olarak elde edilir. (35) eşitliğinde matris işlemleri yapılırsa

$$\begin{bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \frac{4EI_z}{L} \begin{bmatrix} \frac{3}{L^2} & \frac{3}{2L} & -\frac{3}{L^2} & \frac{3}{2L} \\ \frac{3}{2L} & 1 & -\frac{3}{2L} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{3}{2L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{3}{2L} \\ \frac{3}{2L} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2L} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{y1} \\ d_{z1} \\ u_{y2} \\ d_{z2} \end{bmatrix} \tag{36}$$

eşitliği elde edilir. Burada yer değiştirme vektörünün önündeki matris, eğilmenin x, y düzleminde olması haline ait katılık matrisidir.

Eğilmenin x, z düzleminde olması durumunda ise eleman eşitliği aynı şekilde,

$$\begin{bmatrix} F_{z1} \\ M_{y1} \\ F_{z2} \\ M_{y2} \end{bmatrix} = \frac{4EI_y}{L} \begin{bmatrix} \frac{3}{L^2} & \frac{3}{2L} & -\frac{3}{L^2} & \frac{3}{2L} \\ \frac{3}{2L} & 1 & -\frac{3}{2L} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{3}{2L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{3}{2L} \\ \frac{3}{2L} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2L} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{z1} \\ d_{y1} \\ u_{z2} \\ d_{y2} \end{bmatrix} \tag{37}$$

olarak elde edilir. Burada da katılık matrisinin elemanları açıkça görülmektedir.

2.1.4. GENEL HALDE ZORLANMAYA MARUZ ÇUBUK ELEMAN

Yukarıda bahsedilen zorlanma tipleri birbirinden bağımsız olarak incelendi. Çubuğun genel olarak zorlanması durumunda daha önce ayrı ayrı bulunan katılık matrisleri süperpozisyon prensibi ile birleştirilebilir. Bu işlem şöyle yapılır; önce (6), (14), (36) ve (37) eşitlikleri, genel yer değiştirme vektörü,

$$[u] = [u_{x1}\ u_{y1}\ u_{z1}\ d_{x1}\ d_{y1}\ d_{z1}\ u_{x2}\ u_{y2}\ u_{z2}\ d_{x2}\ d_{y2}\ d_{z2}]^T \tag{38}$$

olmak üzere, genel kuvvet vektörü de

$$[F] = [F_{x1}\ F_{y1}\ F_{z1}\ M_{x1}\ M_{y1}\ M_{z1}\ F_{x2}\ F_{y2}\ F_{z2}\ M_{x2}\ M_{y2}\ M_{z2}]^T \tag{39}$$

olmak üzere,

$$[F] = [k][u] \tag{40}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde ayrı ayrı genişletilir. Bu genişletme esnasında $[k]$ katılık matrisinde ortaya çıkmayan yer değiştirmelerle ilgili satır ve sütunlar sıfır değerine eşit olacaktır /18/.

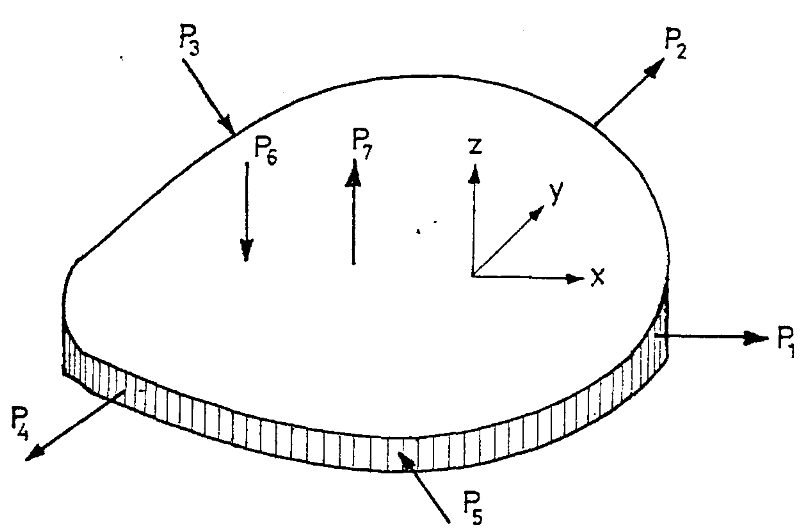
Daha sonra ayrı ayrı genişletilmiş bu matris eşitlikleri taraf tarafa toplanarak

$$[F] = [k_{çe}][u] \tag{41}$$

genel halde zorlanmaya maruz çubuk eleman için eleman eşitliği bulunur. Burada $[k_{çe}]$ genel zorlanmaya maruz çubuk elemanına ait katılık matrisi olup EK 1.de verilmiştir.

2.2. PLAK ELEMANLAR İÇİN ELEMAN EŞİTLİKLERİ

Düz bir plak hem düzlemi içinde kalan, hem de düzlemine dik yüklere maruz kalırsa, plak içindeki bir nokta x, y ve z yönlerinde yer değiştirmeler gösterecektir, şekil 11.



Şekil 11. Düzlemsel ve düzlemine dik yüklerle yüklenmiş plak

İnce plakların lineer teorisinde plak üzerindeki noktaların z doğrultusundaki yer değiştirmesi x ve y doğrultularındaki yer değiştirmelerinden bağımsızdır. Bu durumda katılık matrisleri düzlemsel ve düzleme dik yükleme durumları için ayrı ayrı hesap edilip birleştirilebilir.

Gelişigüzel plak konstrüksiyonlarının analizinde en uygun eleman üçgen eleman olduğundan eleman eşitlikleri üçgen elemanlar için elde edilecektir

2.2.1. DÜZLEMSEL YÜKLERE MARUZ ÜÇGEN PLAK ELEMAN İÇİN ELEMAN EŞİTLİKLERİ

Bu tip elemanların sistem eşitliklerinin elde edilmesinde, üçgenin sınırları içinde kalan bölgede ε_x ve ε_y birim şekil değiştirmeleri ile γ kayma açısının sabit olduğu kabulu yapılacaktır. Burada x, y düzlemi üçgen düzlemidir.

Düzlemsel şekil değiştirme halinde normal gerilmelerle şekil değiştirmeler arasında şu bağıntılar vardır / 4 , 8 /;

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\,(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y) \tag{42}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\,(\mu\varepsilon_x+\varepsilon_y) \tag{43}$$

$$\tau = \frac{E}{2(1+\mu)}\,\gamma \tag{44}$$

Bu bağıntılar matris gösterim tarzıyla yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{bmatrix} \tag{45}$$

eşitliği elde edilir.

Düğüm kuvvetleri ile düğüm noktalarının yer değiştirmeleri arasında bir bağıntı arandığından, yukarıdaki eşitliklerdeki ε_x, ε_y, γ büyüklüklerinin u_x ve u_y cinsinden ve σ_x, σ_y, τ büyüklüklerinin de düğüm noktası kuvvetleri cinsinden ifadesi gerekir.

Önce ε_x, ε_y ve γ değerlerini yer değiştirmeler cinsinden tanımlayan eşitlikler bulunacaktır.

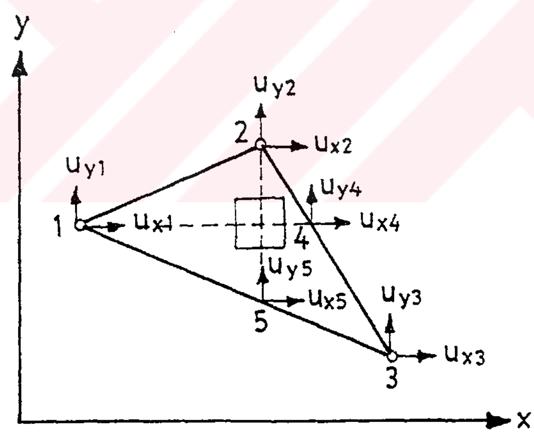
Şekil 12 de u_{x1}, 1 ; u_{x4} de 4 noktasının x yönündeki yer değiştirmesi olmak üzere,

$$\varepsilon_x = \frac{u_{x4}-u_{x1}}{x_4-x_1} = \frac{\Delta u_x}{\Delta x} , \qquad (46)$$

u_{y5} ve u_{y2} de sırasıyla 5 ve 2 noktalarının y ekseni doğrultusundaki yer değiştirmeleri olmak üzere,

$$\varepsilon_y = \frac{u_{y2}-u_{y5}}{y_2-y_5} = \frac{\Delta u_y}{\Delta y} \qquad (47)$$

bağıntıları yazılabilir.



Şekil 12. Üçgen plak elemanın lineer yer değiştirme durumu

Şekil 13 den ise kayma açısı için

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \qquad (48)$$

eşitliği yazılabilir /4/.

Burada γ_1, $\overline{14}$ doğrusunun, γ_2 ise $\overline{25}$ doğrusunun dönmesidir.

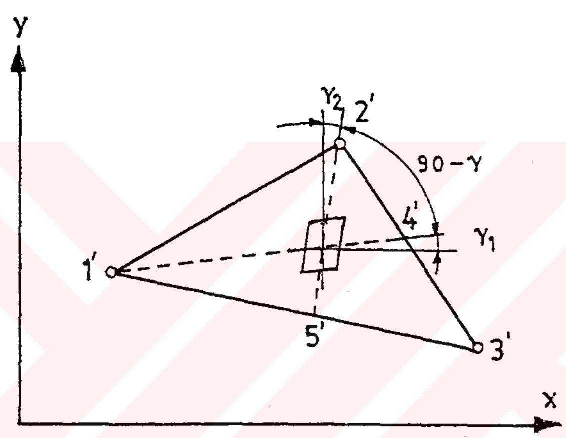
$$\gamma_1 = \frac{u_{y4}-u_{y1}}{x_4-x_1} = \frac{\Delta u_y}{\Delta x} \quad , \tag{49}$$

$$\gamma_2 = \frac{u_{x2}-u_{x5}}{y_2-y_5} = \frac{\Delta u_x}{\Delta y} \tag{50}$$

olmak üzere (48) eşitliği

$$\gamma = \frac{\Delta u_y}{\Delta x} + \frac{\Delta u_x}{\Delta y} \tag{51}$$

şeklini alır.



Şekil 13. Üçgen plak elemanın deforme olmuş hali

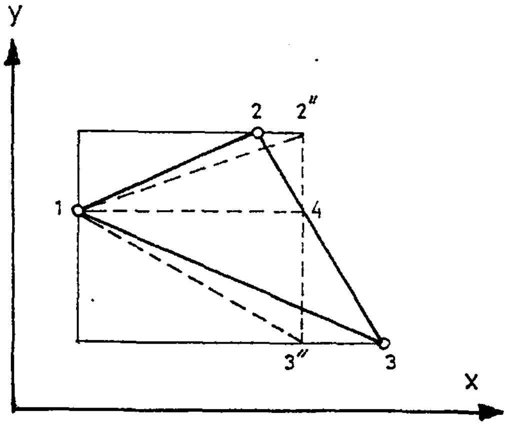
(49) ve (51) eşitliklerindeki Δx büyüklüğü Şekil 14 yardımıyla bulunabilir. Bu şekilde 123, üçgen elemanı temsil etmekte olup, 2" ve 3" yardımcı noktalardır. $\overline{2''3''}$, $\overline{23}$ doğrusunun y yönündeki projeksiyonudur. 13"4 dik üçgeni ile 134 üçgenleri alanca eşittir.

Aynı düşünce tarzı Δy nin hesabı için kullanılabilir. Şekil 15 te $\overline{1'''3'''}$, $\overline{13}$ ün x yönündeki projeksiyonu olup,

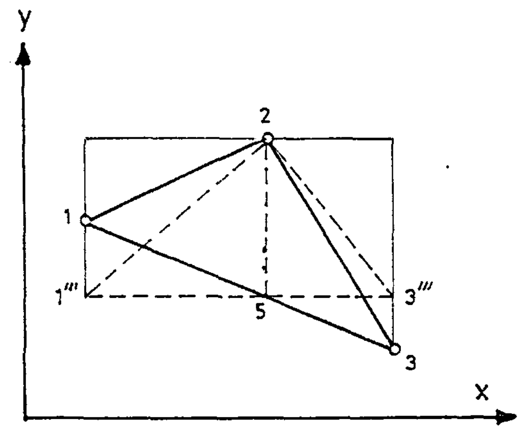
$$\text{Alan}(1'''25) = \text{Alan}(125) \quad , \tag{52}$$

$$\text{Alan}(23'''5) = \text{Alan}(235) \tag{53}$$

bağıntıları yazılabilir.



Şekil 14. Δx in bulunması



Şekil 15. Δy nin bulunması

Bu mülahazalardan sonra ve üçgen alanının üçgenin köşelerinin koordinatları cinsinden ifadesinin

$$A = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad (54)$$

olduğu hatırda tutularak,

$$\Delta x(y_2-y_3) = \Delta y(x_3-x_1) = 2A = -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad (55)$$

eşitliği yazılabilir.

Sabit $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ve γ değerlerinde u_x ve u_y yer değiştirmeleri x ve y ye lineer bağımlı olduğundan 4 ve 5 ara noktalarındaki u_x ve u_y yer değiştirmeleri için de yukarıdaki yaklaşım geçerli olup / 4 /,

$$\Delta u_x(y_2-y_3) = -\begin{vmatrix} 1 & u_{x1} & y_1 \\ 1 & u_{x2} & y_2 \\ 1 & u_{x3} & y_3 \end{vmatrix} \qquad (56)$$

$$\Delta u_y(x_3-x_1) = -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & u_{y1} \\ 1 & x_2 & u_{y2} \\ 1 & x_3 & u_{y3} \end{vmatrix} \tag{57}$$

eşitlikleri yazılabilir.

Artık (46) eşitliği,(55) ve (56) eşitlikleri, (47) eşitliği de (55) ve (57) eşitlikleri yardımıyla ifade edilebilir. Bu durumda,

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta u_x}{\Delta x} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & u_{x1} & y_1 \\ 1 & u_{x2} & y_2 \\ 1 & u_{x3} & y_3 \end{vmatrix}}{\Delta x(y_2-y_3)}$$

$$= \frac{1}{2A} \left|(y_3-y_2)u_{x1}-(y_3-y_1)u_{x2}+(y_2-y_1)u_{x3}\right| \tag{58}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta u_y}{\Delta y} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & x_1 & u_{y1} \\ 1 & x_2 & u_{y2} \\ 1 & x_3 & u_{y3} \end{vmatrix}}{\Delta y(x_3-x_1)}$$

$$= \frac{1}{2A} \left[-(x_3-x_2)u_{y1}+(x_3-x_1)u_{y2}-(x_2-x_1)u_{y3}\right] \tag{59}$$

bağıntıları bulunur.

Diğer taraftan aynı düşünce şekli kullanılarak (49) eşitliği

$$\gamma_1 = \frac{\Delta u_y}{\Delta x} = \frac{1}{2A} \left[(y_3-y_2)u_{y1}-(y_3-y_1)u_{y2}+(y_2-y_1)u_{y3}\right] \tag{60}$$

ve (50) eşitliği

$$\gamma_2 = \frac{\Delta u_x}{\Delta y} = \frac{1}{2A} \left[-(x_3-x_2)u_{x1}+(x_3-x_1)u_{x2}-(x_2-x_1)u_{x3}\right] \tag{61}$$

olarak yazılabilir.

(51) eşitliğinde verilen γ değeri (60) ve (61) eşitliklerinde verilen γ_1 ve γ_2 değerlerinin toplamına eşit olduğu için

$$\gamma=\frac{1}{2A}\left[-(x_3-x_2)u_{x1}+(y_3-y_2)u_{y1}+(x_3-x_1)u_{x2}-(y_3-y_1)u_{y2}-(x_2-x_1)u_{x3}+(y_2-y_1)u_{y3}\right] \tag{62}$$

eşitliği ortaya çıkar.

(58), (59) ve (62) eşitlikleri matris formunda bir eşitlik olarak toplanırsa, yer değiştirmelerle şekil değiştirmeler arasındaki ilişkiyi veren

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma\end{bmatrix}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0\\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3\\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{x1}\\ u_{y1}\\ u_{x2}\\ u_{y2}\\ u_{x3}\\ u_{y3}\end{bmatrix} \tag{63}$$

eşitliği elde edilir.

Bu son eşitlikte a_i ve b_i değerleri

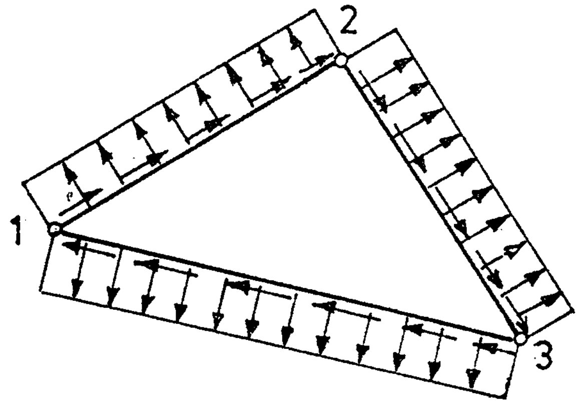
$$a_1=y_3-y_2=y_{32} \qquad a_2=-(y_3-y_1)= -y_{31} \qquad a_3=y_2-y_1=y_{21} \tag{64}$$

$$b_1=-(x_3-x_2)= -x_{32} \qquad b_2=x_3-x_1=x_{31} \qquad b_3=-(x_2-x_1)= -x_{21} \tag{65}$$

şeklinde tanımlıdırlar.

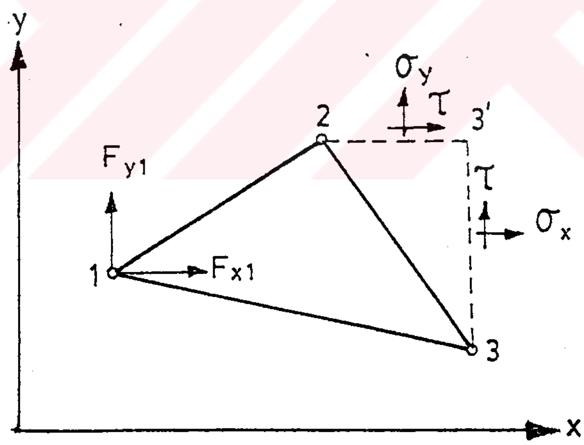
Bu bölümdeki temel hedef düğüm noktalarının yer değiştirmeleri ile düğüm kuvvetleri arasındaki bağıntıyı ifade etmek olduğundan, şimdi de bu hedefe varmada yardımcı olacak düğüm noktası kuvvetleri ile plak kenarına etkiyen gerilmeler arasındaki bağıntı bulunacaktır.

Sabit şekil değiştirme durumunda gerilmelerin de sabit olacağını gözönünde tutarak üçgen plak elemanın kenarlarına etkiyen normal gerilmelerle kayma gerilmelerinin düzgün dağıldığı sonucuna varılabilir /4 ,8 / , Şekil 16.



Şekil 16. Üçgen plak elemanda normal ve kayma gerilmeleri

Üçgenin kenarlarına etkiyen bu gerilmeler elemanın sadece 1, 2 ve 3 numaralı düğüm noktalarında etkiyen statik eşdeğer kuvvetlere indirgenebilir. Bu indirgeme 1 numaralı düğüm noktası için Şekil 17 yardımıyla yapılabilir.



Şekil 17. Üçgen plak elemanda eşdeğer düğüm kuvvetleri

Şekil 17 de 1 numaralı düğüm noktasındaki F_{x1} ve F_{y1} kuvvetlerini bulmak için şu hususun hatırlanmasında fayda vardır;

1 numaralı düğüm noktasına bağlı $\overline{12}$ ve $\overline{31}$ kenarlarına etkiyen kuvvetler $\overline{23}$ kenarına etkiyen kuvvetlerle dengededir. Diğer taraftan $\overline{23}$ kenarına etkiyen kuvvetler ise 23'3 üçgeninin $\overline{23'}$ ve $\overline{3'3}$ kenarlarına etkiyen

kuvvetlerle dengededir. 23'3 üçgeninde 23'//x ve 3'3//y dir.

1 numaralı düğüm noktasına, $\overline{12}$ ve $\overline{31}$ kenarlarına etkiyen kuvvetlerin statik eşdeğeri olarak yarısının geleceği düşünülerek,

$$F_{x1}=\frac{1}{2}\left[(y_3-y_2)h\sigma_x-(x_3-x_2)h\tau\right] \tag{66}$$

$$F_{y1}=\frac{1}{2}\left[-(x_3-x_2)h\sigma_y+(y_3-y_2)h\tau\right] \tag{67}$$

eşitlikleri bulunur.

Aynı düşünce tarzı 2 ve 3 numaralı düğüm noktaları için uygulanırsa,

$$F_{x2}=\frac{1}{2}\left[-(y_3-y_1)h\sigma_x+(x_3-x_1)h\tau\right] \tag{68}$$

$$F_{y2}=\frac{1}{2}\left[(x_3-x_1)h\sigma_y-(y_3-y_1)h\tau\right] \tag{69}$$

$$F_{x3}=\frac{1}{2}\left[(y_2-y_1)h\sigma_x-(x_2-x_1)h\tau\right] \tag{70}$$

$$F_{y3}=\frac{1}{2}\left[-(x_2-x_1)h\sigma_x-(y_2-y_1)h\tau\right] \tag{71}$$

eşitlikleri elde edilir.

V üçgen elemanın hacmını göstermek üzere h/2=V/(2A) olduğu hatırda tutularak yukarıdaki son altı eşitlik matris formunda

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{bmatrix} = \frac{V}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & b_1 & a_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & b_2 & a_2 \\ a_3 & 0 & b_3 \\ 0 & b_3 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix} \tag{72}$$

şeklini alır. Burada a_i ve b_i değerlerinin ifadesi (64) ve (65) eşitliklerinde tanımlandığı şekildedir. (63) eşitliği (45) eşitliğinde yerine konur ve böylece elde edilen gerilme değerleri de (72) eşitliğine yerleştirilirse düzlemsel yüklere maruz üçgen plak elemanına ait

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{bmatrix} = \frac{h}{4A} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & b_1 & a_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & b_2 & a_2 \\ a_3 & 0 & b_3 \\ 0 & b_3 & a_3 \end{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} \qquad (73)$$

eleman eşitliği bulunmuş olur. Bu elemanda katılık matrisi, eşitliğin sağ tarafındaki yer değiştirme vektörünün önündeki matrislerin çarpımıyla elde edilir.

(73) eşitliğindeki kuvvet vektörü $[F]$, eleman katılık matrisi $|k|$, ve yer değiştirme vektörü $[u]$ ile gösterilirse, (73) eşitliği kısa olarak

$$[F] = [k][u] \qquad (74)$$

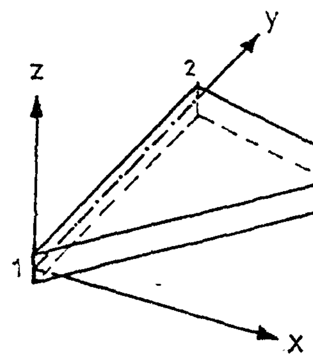
şeklinde ifade edilebilir. Buradaki $[k]$ matrisinin elemanları Ek.2 de açık olarak verilmiştir. Düzlemsel yüklere maruz plak için bulunan bu matris ekte ve bilgisayar programında diğer katılık matrisleri ile karışmaması için $[k_{pd}]$ olarak adlandırılmıştır.

2.2.2 PLAK DÜZLEMİNE DİK YÜKLERE MARUZ ÜÇGEN PLAK ELEMANLARI İÇİN ELEMAN EŞİTLİKLERİ

Bu elemanın sistem eşitliklerinin türetilmesinde plak düzlemine dik yöndeki deplasmanları

$$u_z(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 (x^2 y + xy^2) + \alpha_9 y^3 \qquad (75)$$

şeklinde bir polinomla ifade edilsin /16/. Polinomun 3.mertebeden seçilmesinin sebebi $u_z(x,y)$ nin ikinci mertebeden türevlerinin x ve y nin lineer fonksiyonları olarak ortaya çıkmasının arzu edilmesindendir. Burada x, y plak düzleminde bulunan bir koordinat sistemidir, şekil 18.



Şekil 18. Üçgen plak elemanında koordinat sistemi

(75) eşitliğindeki α_i sabitleri, sınır şartları yardımıyla belirlenebilir. Eğilmeye zorlanan plak elemanındaki serbestlik derecelerinin z doğrultusunda öteleme ile x ve y eksenleri etrafında dönme olacağı hatırda tutularak bu sınır şartları,

1 numaralı düğüm noktası için

$$u_z(x_1,y_1)=u_{z1}\ ,\quad \frac{\partial u_z(x_1,y_1)}{\partial y}=d_{x1}\ ,\quad \frac{-\partial u_z(x_1,y_1)}{\partial x}=d_{y1}\ , \tag{76}$$

2 numaralı düğüm noktası için

$$u_z(x_2,y_2)=u_{z2}\ ,\quad \frac{\partial u_z(x_2,y_2)}{\partial y}=d_{x2}\ ,\quad \frac{-\partial u_z(x_2,y_2)}{\partial x}=d_{y2}\ , \tag{77}$$

3 numaralı düğüm noktası için

$$u_z(x_3,y_3)=u_{z3}\ ,\quad \frac{\partial u_z(x_3,y_3)}{\partial y}=d_{x3}\ ,\quad \frac{-\partial u_z(x_3,y_3)}{\partial x}=d_{y3} \tag{78}$$

olarak yazılabilir /7/.

(76), (77) ve (78) eşitliklerinin sınır şartları için gerekli türevleri alındıktan sonra düğüm noktalarının deplasman vektörü,

$$[u]=\begin{bmatrix} u_{z1} \\ d_{x1} \\ d_{y1} \\ u_{z2} \\ d_{x2} \\ d_{y2} \\ u_{z3} \\ d_{x3} \\ d_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y_2 & 0 & 0 & y_2^2 & 0 & 0 & y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2y_2 & 0 & 0 & 3y_2^2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -y_2 & 0 & 0 & -y_2^2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3^2 & x_3^2y_3+x_3y_3^2 & y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & 2x_3y_3+x_3^2 & 3y_3^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3 & -y_3 & 0 & -3x_3^2 & -(y_3^2+2x_3y_3) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{bmatrix} \quad (79)$$

olarak ortaya çıkar. (79) eşitliği kısa olarak,

$$[u]=[n]\,[\alpha] \quad (80)$$

şeklinde yazılabilir.

Diğer taraftan klasik plak teorisi, şekil değiştirmelerle yer değiştirmeler arasında şu bağıntıları vermektedir /16/:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \,, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \,, \\ \gamma &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \,. \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

(75) eşitliğinde (81) eşitliği ile belirtilen türevler alınırsa,

$$[B]=-z\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4(x+y) & 0 \end{bmatrix} \tag{82}$$

olmak üzere (81) eşitliği

$$[\varepsilon]=[B]\,[\alpha] \tag{83}$$

olarak bulunur.

(83) eşitliğinde $[\varepsilon]$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{bmatrix} \tag{84}$$

vektörünü ifade etmektedir.

Klasik elastisite teorisinde

$$[\sigma]=[D]\,[\varepsilon] \tag{85}$$

bağıntısının olduğu bilinmektedir. Bu son eşitlikteki

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix} \tag{86}$$

ve

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{87}$$

olarak verilir.

Bu elemanda yer değiştirmelerle kuvvetler arasında denge denklemleri vasıtasıyla kurulacak bağıntı, çok kompleks bir şekil alacağından bu bağıntı, virtüel iş metoduyla kurulacaktır.

Küçük yer değiştirmeler esnasında düğüm noktalarındaki kuvvetlerin yaptığı virtüel işlerin toplamı, plak eleman içindeki virtüel şekil değiştirme enerjisine eşittir. Bu durumda,

$$\text{Düğüm kuvvetlerinin virtüel işi} = \delta[u]^T[F] \tag{88}$$

$$\text{Virtüel şekil değiştirme enerjisi} = \int_V \delta[\varepsilon]^T[\sigma]\,dV \tag{89}$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan (80) ve (83) bağıntılarının yardımıyla, düğüm noktalarının virtüel yer değiştirme vektörü ile virtüel şekil değiştirme vektörü arasındaki bağıntının

$$\delta[\varepsilon]=[B][\eta]^{-1}\delta[u] \tag{90}$$

şeklinde olacağı ve gerilme vektörünün de

$$[\sigma]=[D][\varepsilon]=[D][B][\eta]^{-1}[u] \tag{91}$$

olarak yazılabileceği gözönünde bulundurularak virtüel iş eşitliği, (88) ve (89) ifadelerinin birbirlerine eşit kılınmasıyla kurulur.

(89) eşitliğindeki virtüel şekil değiştirme ve gerilme vektörleri yerine sırasıyla (90) ve (91) eşitliklerindeki değerleri konursa virtüel iş eşitliği

$$\delta[u]^T[F]=\int_V([B][\eta]^{-1}\delta[u])^T[D][B][\eta]^{-1}[u]\,dV \tag{92}$$

olarak ortaya çıkar.

Matris cebri

$$([A][B][C])^T=[C]^T[B]^T[A]^T \tag{93}$$

olduğunu vermektedir /19/. (93) bağıntısı (92) eşitliğinde parentez içindeki işleme uygulanır ve virtüel yer değiştirme vektörünün transpozesi her iki tarafta sadeleştirilirse $|F|$ kuvvet vektörü ile yer değiştirmeler arasında

$$[F]=([\eta]^{-1})^T\left(\int_V [B]^T[D][B]\,dV\right)[\eta]^{-1}[u] \tag{94}$$

bağıntısı bulunmuş olur.

(94) eşitliğindeki kuvvet vektörü

$$[F]=[F_{z1}\ M_{x1}\ M_{y1}\ F_{z2}\ M_{x2}\ M_{y2}\ F_{z3}\ M_{x3}\ M_{y3}]^T \qquad (95)$$

şeklindedir.

(94) eşitliğinin sağ tarafında yer değiştirme vektörü $[u]$ nun önünde bulunan çarpım, eğilmeye zorlanan üçgen plak elemanın katılık matrisidir. Bu matris

$$[k]=([\eta]^{-1})^T\{\iint_A dA(\int_{-h/2}^{h/2}[B]^T[D][B]\,dz)\}[\eta]^{-1} \qquad (96)$$

olarak ayrı bir şekilde ifade edilebilir. Katılık matrisinde büyük parantez içindeki integral değeri

$$[I]=\iint_A dA\int_{-h/2}^{h/2}[B]^T[D][B]dz \qquad (97)$$

olarak gösterilip (97) eşitliğindeki matris işlemleri yapılıp önce tek katlı integral alınırsa $[I]$ matrisi

$$C=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \qquad (98)$$

olmak üzere,

$$[I]=C\iint_A dxdy\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \text{simetrik} & & \\ 0 & 0 & 0 & 4 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\mu) & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 4\mu & 0 & 4 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 12x & 0 & 12\mu x & 36x^2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 4(\mu x+y) & 4(1-\mu)(x+y) & 4(x+\mu y) & 12x(\mu x+y) & ((12-8\mu)(x+y)^2 \\ & & & & & & & -8(1-\mu)xy) & \\ 0 & 0 & 0 & 12\mu y & 0 & 12y & 36\mu xy & 12(x+\mu y)y & 36y^2 \end{bmatrix} \qquad (99)$$

olarak bulunur. Çift katlı integral de alındıktan sonra $[I]$ matrisinin I_{ij} elemanları,

$$\left.\begin{aligned}
&I_{44}=2Cx_3y_2 ,\\
&I_{55}=C(1-\mu)x_3y_2 ,\\
&I_{66}=2Cx_3y_2 ,\\
&I_{77}=3Cx_3^3y_2 ,\\
&I_{88}=\frac{C}{3}\left[(3-2\mu)x_3^3y_2+(3-2\mu)x_3y_2(y_2^2+y_2y_3+y_3^2)+(2-\mu)x_3^2y_2(y_2+2y_3)\right] ,\\
&I_{99}=3Cx_3y_2(y_2^2+y_2y_3+y_3^2) ,\\
&I_{46}=I_{64}=2C\mu x_3y_2 ,\\
&I_{47}=I_{74}=2Cx_3^2y_2 ,\\
&I_{67}=I_{76}=2C\mu x_3^2y_2 ,\\
&I_{48}=I_{84}=\frac{2C}{3}\left[\mu x_3^2y_2+x_3y_2(y_2+y_3)\right] ,\\
&I_{58}=I_{85}=\frac{2C}{3}(1-\mu)\left[x_3^2y_2+x_3y_2(y_2+y_3)\right] ,\\
&I_{68}=I_{86}=\frac{2C}{3}\left[x_3^2y_2+\mu x_3y_2(y_2+y_3)\right] ,\\
&I_{78}=I_{87}=C\left[\mu x_3^3y_2+\frac{1}{2}x_3^2y_2(y_2+2y_3)\right] ,\\
&I_{49}=I_{94}=2C\mu x_3y_2(y_2+y_3) ,\\
&I_{69}=I_{96}=2Cx_3y_2(y_2+y_3) ,\\
&I_{79}=I_{97}=\frac{3C\mu}{2}x_3^2y_2(y_2+2y_3) ,\\
&I_{89}=I_{98}=C\left[\frac{1}{2}x_3^2y_2(y_2+2y_3)+\mu x_3y_2(y_2^2+y_2y_3+y_3^2)\right]
\end{aligned}\right\}\quad(100)$$

olarak ortaya çıkar. $[I]$ matrisinin diğer elemanları sıfırdır.

Bu elemana ait katılık matrisinin,

$$[k]=([n]^{-1})^T[I]\,[n]^{-1} \qquad (101)$$

olarak matris çarpımlarıyla elde edileceği açıktır /7/.

Diğer elemanlarda olduğu gibi bu elemanda da düğüm noktası kuvvetleri ile düğüm noktası yer değiştirmeleri arasındaki bağıntı

$$[F]=[k][u] \tag{102}$$

olarak ifade edilmiş olur. Bilgisayar programında bu son $[k]$ matrisi de hesaplanacağından diğer matrislerle karışmaması için bundan sonra bu matris uzaysal yüklere maruz plak elemanı ifade etmek için $[k_{pu}]$ olarak anılacaktır.

2.2.3 GENEL HALDE ZORLANMAYA MARUZ PLAK

Plağın düzlemsel ve düzleme dik yüklerin her ikisine birden maruz kalması durumunda eleman eşitliği şöyle tesis ettirilebilir.

Daha önce, sadece düzlemsel yüklere maruz plak elemanı için elde edilen (74) eşitliği açık olarak

$$[F_{x1}\ F_{y1}\ F_{x2}\ F_{y2}\ F_{x3}\ F_{y3}]^T=[k_{pd}][u_{x1}\ u_{y1}\ u_{x2}\ u_{y2}\ u_{x3}\ u_{y3}]^T \tag{103}$$

şeklinde, düzleme dik yükleme durumunda ise (102) eşitliği açık olarak

$$[F_{z1}\ M_{x1}\ M_{y1}\ F_{z2}\ M_{x2}\ M_{y2}\ F_{z3}\ M_{x3}\ M_{y3}]^T = [k_{pu}][u_{z1}\ d_{x1}\ d_{y1}\ u_{z2}\ d_{x2}\ d_{y2}\ u_{z3}\ d_{x3}\ d_{y3}]^T \tag{104}$$

şeklindedir. Bu iki eşitlik bir tek eşitlikte toplanırsa ve yeni kuvvet vektörüne (103) ve (104) teki kuvvet vektörlerinde görünmeyen M_{zi} momentleri de eklenirse genel halde eleman eşitliği

$$[F_{x1}\ F_{y1}\ F_{z1}\ M_{x1}\ M_{y1}\ M_{z1}\ F_{x2}\ F_{y2}\ F_{z2}\ M_{x2}\ M_{y2}\ M_{z2}\ F_{x3}\ F_{y3}\ F_{z3}\ M_{x3}\ M_{y3}\ M_{z3}]^T= [k_{pe}][u_{x1}\ u_{y1}\ u_{z1}\ d_{x1}\ d_{y1}\ d_{z1}\ u_{x2}\ u_{y2}\ u_{z2}\ d_{x2}\ d_{y2}\ d_{z2}\ u_{x3}\ u_{y3}\ u_{z3}\ d_{x3}\ d_{y3}\ d_{z3}]^T \tag{105}$$

şeklini alır.

(105) eşitliğindeki $[k_{pe}]$ katılık matrisinin elemanlarının (103) eşitliğindeki $[k_{pd}]$ ve (104) eşitliğindeki $[k_{pu}]$ matrislerinin elemanlarından teşekkül edeceği ve (105) eşitliğinde (103) ve (104) eşitliklerinin mevcut olduğu açıktır.

3- KOORDİNAT DÖNÜŞÜMLERİ

2. bölümdeki (41), (74) ve (102) eleman eşitlikleri, düğüm kuvvetleri ile düğüm yer değiştirmeleri arasındaki bağıntıyı, eleman koordinat sisteminde vermektedir. Oysa problemin çözülebilmesi için eşitliklerin X, Y, Z referans koordinat sisteminde ifade edilmiş olması gerekir.

[u]: elemanın düğüm noktalarının eleman koordinat sistemindeki yer değiştirme vektörü,

[U]:elemanın düğüm noktalarının referans koordinat sistemindeki yer değiştirme vektörü

olmak üzere, bu iki vektör arasında

$$[u]=[T][U] \qquad (106)$$

bağıntısı yazılabilir / 7 , 8 ,16,17/. Burada [T], transformasyon matrisi olup, bu matrisin elemanları, eleman koordinat sistemi eksenlerinin referans koordinat sistemindeki doğrultman kosinüslerinden oluşmaktadır. İleride [T] matrisi verilecektir.

(106) eşitliğine benzer bir bağıntı, düğüm kuvvetlerinin eleman koordinat sistemindeki ve referans koordinat sistemindeki ifadeleri arasında da yazılabilir / 7 /:

$$[F]_{eks}=[T][F]_{RKS} \qquad (107)$$

2. bölümde

$$[F]_{eks}=[k][u] \qquad (108)$$

bağıntısı, her iki eleman için türetilmişti. Bu bölümde referans koordinat sisteminde

$$[F]=[K][U] \qquad (109)$$

bağıntısını verecek eleman katılık matrisi [K] aranmaktadır. Burada [K] matrisinin de [F] ve [U] gibi referans koordinat sisteminde ifade edilmiş bir matris olduğuna dikkat etmek gerekir. Bundan sonraki kısımlarda [F], referans koordinat sisteminde ifade edilmiş bir vektör olarak anlaşılmalıdır.

(108) eşitliği (107) de yerine konursa

$$[T][F]=[k][u] \tag{110}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $[u]$ yerine (106) eşitliğindeki değeri yazılırsa

$$[T][F]=[k][T][U] \tag{111}$$

eşitliği ve buradan da

$$[F]=[T]^{-1}[k][T][U] \tag{112}$$

eşitliği bulunur.

Transformasyon matrisi ortogonal bir matris olup /9 /

$$[T]^{-1}=[T]^{T} \tag{113}$$

özelliğini taşıdığı dikkate alınırsa, (112) eşitliğinden eleman katılık matrisinin referans koordinat sistemindeki ifadesinin

$$[K]=[T]^{T}[k][T] \tag{114}$$

olduğu ortaya çıkar /17/.

(114) eşitliğindeki $[K]$ matrisi, bilgisayar programlarında çubuklar için $[K_{çr}]$, plaklar için $[K_{pr}]$ olarak adlandırılmıştır.

3.1 ÇUBUK ELEMANLAR İÇİN TRANSFORMASYON MATRİSİ

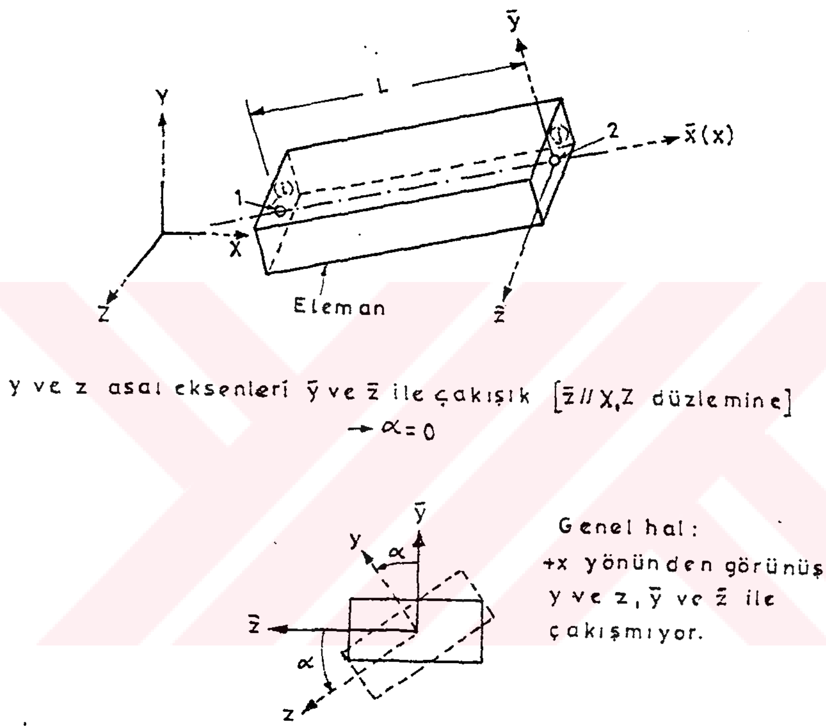
Eleman ve referans koordinat sistemleri arasındaki transformasyon matrisi iki kademede çıkarılacaktır. Birinci kademede eleman, x ekseni etrafında elemanın z ekseni X, Z-düzlemine paralel olacak şekilde dönmüş olduğu düşünülerek Şekil 19 da görüldüğü gibi yeni bir $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$- eleman koordinat sistemi elde edilecek ve bu durumda $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$-koordinat sistemi ile X, Y, Z-koordinat sistemi arasındaki dönüşüm

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = [t_1] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{115}$$

olacak şekilde $[t_1]$ doğrultman kosinüsleri matrisi çıkarılacaktır. İkinci kademede de x, y, z koordinat sistemi ile $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ koordinat sistemi arasındaki dönüşüm

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [t_2] \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \tag{116}$$

olacak şekilde $[t_2]$ doğrultman kosinüsleri matrisi elde edilecektir / 7 /.



Şekil 19. Çubuk elemanda eleman ve referans koordinat sistemleri

(115) eşitliği, (116) da yerine konursa, eleman ve referans koordinat sistemleri arasındaki transformasyon matrisi

$$[t] = [t_2]\,[t_1] \tag{117}$$

şeklinde ortaya çıkar.

3.1.1 $[t_1]$ MATRİSİNİN İFADESİ

Şekil 19 dan çubuk elemanın x(veya $\bar{x}$) ekseni için doğrultman kosinüsleri,

$$\lambda_{o\bar{x}}=\lambda_{ox}=\frac{X_j-X_i}{L_{ij}} \tag{118}$$

$$\mu_{o\bar{x}}=\mu_{ox}=\frac{Y_j-Y_i}{L_{ij}} \tag{119}$$

$$\nu_{o\bar{x}}=\nu_{ox}=\frac{Z_j-Z_i}{L_{ij}} \tag{120}$$

şeklindedir.

Bu son üç ifadede i ve j indisleri çubuğun 1 ve 2 numaralı düğüm noktalarını, referans koordinat sisteminde ifade etmektedir. L_{ij} ise eleman uzunluğunu ifade etmekte olup, şu bağıntı ile hesaplanır:

$$L_{ij}=[(X_j-X_i)^2+(Y_j-Y_i)^2+(Z_j-Z_i)^2]^{1/2} \; . \tag{121}$$

Diğer taraftan vektör hesabı yardımıyla y eksenine ait doğrultman kosinüsleri,

$$a=(\lambda_{ox}^2+\nu_{ox}^2)^{1/2} \tag{122}$$

olmak üzere

$$\lambda_{o\bar{y}}=-\frac{\lambda_{ox}\mu_{ox}}{a} \quad , \tag{123}$$

$$\mu_{o\bar{y}}=\frac{\nu_{ox}^2+\lambda_{ox}^2}{a} \quad , \tag{124}$$

$$\nu_{o\bar{y}}=-\frac{\mu_{ox}\nu_{ox}}{a} \tag{125}$$

olarak ve $\bar{z}$ eksenine ait doğrultman kosinüsleri de

$$\lambda_{o\bar{z}}=-\frac{\nu_{ox}}{a} \quad , \tag{126}$$

$$\mu_{o\bar{z}}=0 \quad , \tag{127}$$

$$\nu_{o\bar{z}}=\frac{ox}{a} \tag{128}$$

olarak bulunur. Bu durumda,

$$[t_1] = \begin{bmatrix} \lambda_{o\bar{x}} & \mu_{o\bar{x}} & \nu_{o\bar{x}} \\ \lambda_{o\bar{y}} & \mu_{o\bar{y}} & \nu_{o\bar{y}} \\ \lambda_{o\bar{z}} & \mu_{o\bar{z}} & \nu_{o\bar{z}} \end{bmatrix} \tag{129}$$

transformasyon matrisinin bütün elemanları belirlidir.

3.1.2 $[t_2]$ MATRİSİNİN İFADESİ

x, y, z ve $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ koordinat sistemlerinin x ve $\bar{x}$ eksenleri aynı olup, y ekseninin $\bar{y}$ ekseni ile α açısı yapması durumunda iki eksen takımı arasındaki dönüşüm

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = |t_2| \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \tag{130}$$

şeklindedir.

3.1.3 ÇUBUK ELEMAN İÇİN TRANSFORMASYON MATRİSİ

Çubuk eleman için transformasyon matrisi

$[t] = [t_2]\,[t_1]$ olmak üzere,

$$[T] = \begin{bmatrix} [t] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [t] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [t] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [t] \end{bmatrix} \tag{131}$$

olarak elde edilir.

Yalnız burada bir hususu hatırlamakta fayda vardır. Eğer eleman X, Z-düzlemine dikse (122) eşitliği ile verilen a ifadesinin değeri sıfır olacak ve $[t_1]$ matrisinin bazı elemanları belirsiz olacaktır. Bu durumda $[T]$ matrisinin elemanları olan $[t]$ matrisleri doğrudan

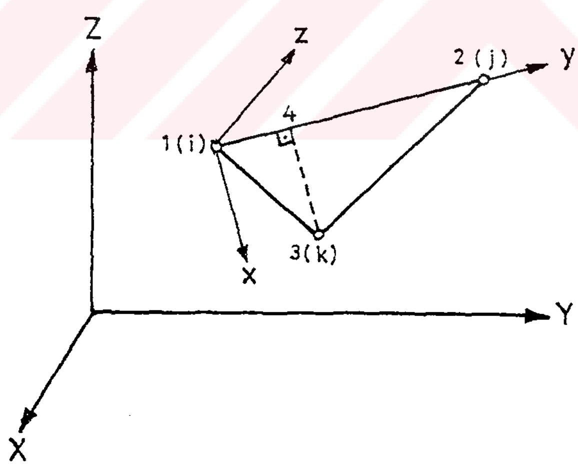
$$[t] = \begin{bmatrix} 0 & \mu_{ox} & 0 \\ -\mu_{ox}\cos\alpha & 0 & \mu_{ox}\sin\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad (132)$$

şeklinde verilir / 7 /.

3.2 PLAK ELEMAN İÇİN TRANSFORMASYON MATRİSİNİN İFADESİ

Plak eleman için eleman koordinat sisteminin seçilmesinde bir sınırlama olmamakla birlikte, transformasyon matrisi [T] nin teşkilinde kolaylık sağlaması açısından eleman koordinat sistemi şöyle seçilecektir;

1, 2 ve 3 sayıları sırasıyla sistemdeki i, j ve k numaralı düğüm noktalarına karşılık gelen sayılar olmak üzere, x, y, z eleman koordinat sisteminin orijini 1 numaralı düğümdür. Bu düğüm noktasının referans sistemindeki numarasının i olduğu hatırda tutulmalıdır. Eleman koordinat sisteminin y ekseni plak elemanın $\overline{12}$ kenarı, x ekseni ise y ye dik olup, 3 numaralı düğüme doğru yönlenmiştir. z ekseni ise x, y düzlemine dik olup, koordinat sisteminde sağ el kaidesini sağlayacak şekilde yönlenmiştir, Şekil 20.



Şekil 20. Üçgen plak elemanda referans ve eleman koordinat sistemleri

(133) ifadesinde görülen t matrisinin elemanları x, y, z-eksen takımının X, Y, Z-referans sistemindeki doğrultman kosinüslerinden meydana gelir. Bu matrisin elemanlarının ifade edilmesi gerekir.

$$[t]=\begin{bmatrix} \lambda_{ox} & \mu_{ox} & \nu_{ox} \\ \lambda_{oy} & \mu_{oy} & \nu_{oy} \\ \lambda_{oz} & \mu_{oz} & \nu_{oz} \end{bmatrix} \tag{133}$$

y ekseninin doğrultman kosinüsleri $\overline{ij}$ ($\overline{12}$) kenarının doğrultman kosinüsleri ile aynı olduğundan,

$$\lambda_{oy}=\lambda_{12}=\frac{X_j-X_i}{L_{ij}} \quad , \tag{134}$$

$$\mu_{oy}=\mu_{12}=\frac{Y_j-Y_i}{L_{ij}} \quad , \tag{135}$$

$$\nu_{oy}=\nu_{12}=\frac{Z_j-Z_i}{L_{ij}} \tag{136}$$

olarak kolayca yazılabilir. Bu son üç eşitlikte L_{ij}, 1 ve 2 numaralı düğümler arasındaki uzaklık olup

$$L_{ij}=\left[(X_j-X_i)^2+(Y_j-Y_i)^2+(Z_j-Z_i)^2\right]^{1/2} \tag{137}$$

ifadesiyle belirlidir.

x ekseninin doğrultman kosinüsleri, $\overline{43}$ doğru parçasının doğrultman kosinüsleri ile aynıdır ($ox/\!/\overline{43}$). Bunlar da doğrultman kosinüsü tanımından

$$\lambda_{ox}=\lambda_{43}=\frac{X_k-X_4}{L_{43}} \quad , \tag{138}$$

$$\mu_{ox}=\mu_{43}=\frac{Y_k-Y_4}{L_{43}} \quad , \tag{139}$$

$$\nu_{ox}=\nu_{43}=\frac{Z_k-Z_4}{L_{43}} \tag{140}$$

şeklinde yazılabilir. Bu son üç eşitlikteki L_{43} mesafesi üçgen bağıntılarından

$$L_{43}=\{(X_k-X_i)^2+(Y_k-Y_i)^2+(Z_k-Z_i)^2-[\lambda_{oy}(X_k-X_i)+\mu_{oy}(Y_k-Y_i)+$$
$$\nu_{oy}(Z_k-Z_i)]^2\}^{1/2} \qquad (141)$$

şeklinde ifade edilebilir. Diğer taraftan 4 noktasının referans sistemindeki koordinatları vektör hesabı yardımıyla

$$X_4=X_i+\lambda_{oy}L_{14} \quad , \qquad (142)$$

$$Y_4=Y_i+\mu_{oy}L_{14} \quad , \qquad (143)$$

$$Z_4=Z_i+\nu_{oy}L_{14} \qquad (144)$$

olarak belirlidir.

oz ekseninin doğrultman kosinüsleri de yine vektör hesabı yardımıyla

$$s_1=\mu_{ox}\nu_{oy}-\mu_{oy}\nu_{ox} \quad , \qquad (145)$$

$$s_2=\lambda_{oy}\nu_{ox}-\lambda_{ox}\nu_{oy} \quad , \qquad (146)$$

$$s_3=\lambda_{ox}\mu_{oy}-\mu_{ox}\lambda_{oy} \quad , \qquad (147)$$

$$s_4=(s_1^2+s_2^2+s_3^2)^{1/2} \qquad (148)$$

olmak üzere

$$\lambda_{oz}=\frac{s_1}{s_4} \quad , \qquad (149)$$

$$\mu_{oz}=\frac{s_2}{s_4} \quad , \qquad (150)$$

$$\nu_{oz}=\frac{s_3}{s_4} \qquad (151)$$

olarak bulunur.

[t] doğrultman kosinüsleri matrisinin elemanlarının belirlenmesinden sonra x, y, z eleman koordinat sistemiyle X, Y, Z referans koordinat

sistemi arasındaki transformasyon (dönüşüm) matrisi

$$[T]=\begin{bmatrix} [t] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [t] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [t] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [t] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [t] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [t] \end{bmatrix} \qquad (152)$$

şeklinde ortaya çıkar /7/. (152) eşitliğinde [0] matrisi 3x3 boyutunda bir matris olup, bütün elemanları sıfıra eşittir.

4- SİSTEM DENKLEMLERİNİN TEŞKİLİ VE ÇÖZÜMÜ

4.1 SİSTEM DENKLEMLERİNİN TEŞKİLİ

Referans koordinat sisteminde herbir elemana ait eleman eşitlikleri (109 eşitliği) bulunduktan sonraki adım, sistem denklemlerinin teşkilidir. Eleman eşitliklerinden sistem eşitliklerine geçişte düğüm noktalarındaki yer değiştirmelerin uyumluluğu esas alınır. Bunun anlamı şudur;

Bir düğüm noktasında birleşen elemanların o düğüm noktasındaki uçlarının yer değiştirme miktarları birbirlerine eşittir /8,9 /.

Bir düğüm noktasındaki serbestlik derecesinin altı olduğu daha önce belirtilmişti. Bir sistemde bulunan düğüm sayısı N_d ile gösterilirse, bu durumda sistemin toplam serbestlik derecesi

$$N_{tsd}=6N_d \tag{153}$$

olur. Bu durumda sistem katılık matrisi $[K_s]$, $N_{tsd}xN_{tsd}$ boyutunda bir matris, sistem yerdeğiştirme vektörü $[U_s]$ ve sistem yük vektörü $[P]$ de N_{tsd} boyutunda birer vektör olacaktır.

(109) eşitliğindeki $[F]$ ve $[U]$ vektörleri çubuk elemanlar için

$$[F]=[F_{1X}\ F_{1Y}\ F_{1Z}\ M_{1X}\ M_{1Y}\ M_{1Z}\ F_{2X}\ F_{2Y}\ F_{2Z}\ M_{2X}\ M_{2Y}\ M_{2Z}]^T$$

$$=[F_{iX}\ F_{iY}\ F_{iZ}\ M_{iX}\ M_{iY}\ M_{iZ}\ F_{jX}\ F_{jY}\ F_{jZ}\ M_{jX}\ M_{jY}\ M_{jZ}]^T, \tag{154}$$

$$[U]=[U_{1X}\ U_{1Y}\ U_{1Z}\ D_{1X}\ D_{1Y}\ D_{1Z}\ U_{2X}\ U_{2Y}\ U_{2Z}\ D_{2X}\ D_{2Y}\ D_{2Z}]^T$$

$$=[U_{iX}\ U_{iY}\ U_{iZ}\ D_{iX}\ D_{iY}\ D_{iZ}\ U_{jX}\ U_{jY}\ U_{jZ}\ D_{jX}\ D_{jY}\ D_{jZ}]^T \tag{155}$$

şeklinde, plak elemanlar için ise

$$[F]=[F_{1X}\ F_{1Y}\ F_{1Z}\ M_{1X}\ M_{1Y}\ M_{1Z}\ F_{2X}\ F_{2Y}\ F_{2Z}\ M_{2X}\ M_{2Y}\ M_{2Z}$$

$$F_{3X}\ F_{3Y}\ F_{3Z}\ M_{3X}\ M_{3Y}\ M_{3Z}]^T$$

$$=[F_{iX}\ F_{iY}\ F_{iZ}\ M_{iX}\ M_{iY}\ M_{iZ}\ F_{jX}\ F_{jY}\ F_{jZ}\ M_{jX}\ M_{jY}\ M_{jZ}$$

$$F_{kX}\ F_{kY}\ F_{kZ}\ M_{kX}\ M_{kY}\ M_{kZ}]^T \quad , \tag{156}$$

$$[U]=[U_{1X}\ U_{1Y}\ U_{1Z}\ D_{1X}\ D_{1Y}\ D_{1Z}\ U_{2X}\ U_{2Y}\ U_{2Z}\ D_{2X}\ D_{2Y}\ D_{2Z}$$

$$U_{3X}\ U_{3Y}\ U_{3Z}\ D_{3X}\ D_{3Y}\ D_{3Z}]^T$$

$$=[U_{iX}\ U_{iY}\ U_{iZ}\ D_{iX}\ D_{iY}\ D_{iZ}\ U_{jX}\ U_{jY}\ U_{jZ}\ D_{jX}\ D_{jY}\ D_{jZ}$$

$$U_{kX}\ U_{kY}\ U_{kZ}\ D_{kX}\ D_{kY}\ D_{kZ}]^T \tag{157}$$

şeklinde birer vektördürler. Burada 1, 2, 3 indisleri eleman koordinat sistemindeki; i, j, k indisleri ise referans koordinat sistemindeki düğüm numaralarını göstermektedir.

Sistem denklemlerini elde etmek için eleman eşitliklerinin sistem boyutlarında genişletilmesi gerekir. Eleman eşitliğindeki kuvvet ve yerdeğiştirme vektörleri N_{tsd} boyutunda genişletilirken, (109) eşitliğinin geçerli kalabilmesi ve aynı zamanda o elemanın düğüm noktaları olmayan diğer düğüm noktalarına ait kuvvet bileşenlerinin sıfır olabilmesi için, sistem boyutlarında genişletilen eleman katılık matrisi $[K_s]_e$ nin birçok elemanının sıfır değerine sahip olması gerekir. Burada e indisi ilgili elemanın eleman numarasıdır.

Bu genişletme işleminden sonra bir elemana ait eleman eşitliği

$$[F]_e=[K_s]_e[U_s] \tag{158}$$

şeklini alacaktır. (158) eşitliğinde $[U_s]$ sistem yer değiştirme vektörü olup bileşenleri (159) eşitliğinde verilmiştir.

$$[U_s]=[U_{1X}\ U_{1Y}\ U_{1Z}\ D_{1X}\ D_{1Y}\ D_{1Z}\ \cdots\cdots\ U_{NdX}\ U_{NdY}\ U_{NdZ}$$
$$D_{NdX}\ D_{NdY}\ D_{NdZ}]^T \tag{159}$$

Diğer taraftan $[F]_e$ vektörü de N_{tsd} boyutunda bir vektör olup,

$$[F]_e=[F_{1X}\ F_{1Y}\ F_{1Z}\ M_{1X}\ M_{1Y}\ M_{1Z}\cdots\cdots F_{iX}\ F_{iY}\ F_{iZ}\ M_{iX}\ M_{iY}\ M_{iZ}\cdots\cdots$$

$$F_{jX}\ F_{jY}\ F_{jZ}\ M_{jX}\ M_{jY}\ M_{jZ}\cdots\cdots F_{kX}\ F_{kY}\ F_{kZ}\ M_{kX}\ M_{kY}\ M_{kZ}\cdots\cdots$$

$$\ldots . F_{NdX} \; F_{NdY} \; F_{NdZ} \; M_{NdX} \; M_{NdY} \; M_{NdZ}]_e^T \tag{160}$$

şeklindedir. $[F]_e$ vektöründe çubuklar için i ve j indisli, plaklar için i-se i, j ve k indisli bileşenlerin dışındaki bileşen değerleri sıfıra eşit olacaktır.

(158) eşitliği bütün elemanlar için elde edildikten sonra taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{e=1}^{Ne} [F]_e = \left(\sum_{e=1}^{Ne} [K_s]_e\right) [U_s] \tag{161}$$

sistem eşitliği bulunur. Bu son eşitlikte parantez içindeki ifadeye sistemin katılık matrisi $[K_s]$

$$[K_s] = \sum_{e=1}^{Ne} [K_s]_e \tag{162}$$

adı verilir. Bu matrisin teşkilinde elemanların çubuk veya plak olmasının bir önemi yoktur.

Sistemin dengede olabilmesi için (161) eşitliğinin solundaki ifadenin dış yük vektörüne eşit olması gerekir.

$$[P] = \sum_{e=1}^{Ne} [F]_e \tag{163}$$

Bu durumda sistem eşitliği kısa olarak

$$[P] = [K_s][U_s] \tag{164}$$

şeklinde yazılabilir.

(164) eşitliğindeki sistem yük vektörü, sisteme dışarıdan tatbik edilen yükleri temsil eden bir vektör olup bileşenleri

$$[P] = [P_{1X} \; P_{1Y} \; P_{1Z} \; M_{1X}^d \; M_{1Y}^d \; M_{1Z}^d \; \ldots\ldots \; P_{NdX} \; P_{NdY} \; P_{NdZ} \; M_{NdX}^d \; M_{NdY}^d \; M_{NdZ}^d]^T \tag{165}$$

şeklindedir.

4.2 SINIR ŞARTLARINI DİKKATE ALARAK SİSTEM DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

(164) eşitliğindeki bilinmeyenler, genel olarak düğüm noktalarının yer değiştirmeleri ile bazı mesnetlerdeki mesnet tepkileridir. Sistem denklem takımının çözümünden, bilinmeyen yer değiştirmeler bulunabilir.

Sistem denklem takımı, lineer bir denklem sistemidir. Bu sistemde bilinmeyen sayısı, serbestlik derecesi sayısına eşittir. Bilinmeyen sayısı, düğüm noktası sayısı ile orantılı olarak artar. Birkaç elemanda denklem sistemi, elle çözülemeyecek hale gelir. Çözme işlemi, bir bilgisayar istihdamını gerekli kılar.

Katı cisimler mekaniğinde sınır şartları dikkate alınmadan problemin açık olduğu söylenemez. Zira $[K_s]$ matrisi tekil bir matris olup inversi yoktur /8/. Bu sebeple (164) eşitliğinin çözülebilmesi için sınır şartlarının bilinmesi gerekir. Bu çalışmanın konusu olan problemde genel olarak sınır şartları, engellenmiş serbestlik dereceleridir. Başka bir ifadeyle engellenmiş yer değiştirmeler ve dönmelerdir.

Engellenmiş serbestlik derecelerine karşılık gelen mesnet reaksiyonları, $[P]$ yük vektöründe bilinmeyen değerler olarak ortaya çıkar. Problem mesnet tepkilerinin bulunmasını kapsamadığına göre, (164) eşitliğinin mertebesi, $[P]$ yük vektöründeki bilinmeyen yük bileşenlerinin sayısı kadar düşürülür. $[P]$ yük vektörünün mertebesi de sadece bilinen dış yükleri kapsayacak şekilde düşürülerek elde edilir. Bu işlem şöyle yapılabilir;

$[U_s]$ vektöründe i numaralı yer değiştirme bileşeninin değerinin sıfır olarak bilindiği farzedilsin. Bu durumda $[K_s]$ matrisinin i'yinci sütunu dikkate alınmayabilir. Zira bu sütundaki elemanlar hep sıfırla çarpılıyor demektir.

Aynı şekilde $[K_s]$ matrisinin i'yinci satırı da dikkate alınmayabilir. Zira bu satırdaki elemanların yer değiştirme vektörü ile çarpımları bilinmeyen mesnet tepkisine eşit olacağından, yer değiştirmelerle ilgili denklem takımının çözülmesine yardım etmeyecektir.

Sonuçta (164) numaralı denklem takımı

$$[K_s]_i\,[U_s]_i = [P]_i \qquad (166)$$

şekline dönüşecektir. Burada i indisi indirgenmiş anlamında kullanılmıştır. Bu durumda (166) eşitliğinde denklemin sağ tarafı tamamen bilindiğinden, sol taraftaki $[U_s]_i$ vektörünün bileşenleri hesaplanabilir.

5- BİLGİSAYAR PROGRAMLARI

3. ve 4. bölümlerde açıklanan teorinin pratikte ortaya çıkan problemlerde elle uygulanması çok zordur. Bunun için bilgisayar programlarının yazılması gerekir. Bu bölümde Basic dilinde yazılan programların akışından bahsedilecektir.

Bilgisayarın hafızasını sadece o andaki işlemler için gerekli olan değişkenlere tahsis etmek amacıyla işlemler dört ayrı programla yapılmıştır:

1. Program: Çubuk elemanların katılık matrislerini referans koordinat sisteminde hesaplayıp, diskette açılan kütüğe bu matrisleri kaydeder.

2. Program: Plak elemanların katılık matrislerini referans koordinat sisteminde hesaplayıp, diskette açılan kütüğe bu matrisleri kaydeder.

3. Program: Diskette kayıtlı eleman katılık matrisleri yardımıyla sistem katılık matrisini teşkil eder ve bunu diskete kaydeder.

4. Program: Sistem eşitliklerini çözerek bilinmeyen yer değiştirme bileşenlerini hesaplar.

5.1. ELEMAN KATILIK MATRİSLERİNİN REFERANS KOORDİNAT SİSTEMİNDE HESABI

Eleman katılık matrislerinin hesabına geçilmeden önce sistemdeki toplam düğüm sayısının, çubuk eleman sayısının, plak eleman sayısının, elemanların elastiklik modüllerinin, kayma modüllerinin ve Poisson sayılarının girdi olarak verilmesi gerekir. Sistemdeki toplam düğüm sayısı ile, düğüm noktalarının X, Y, Z-koordinatlarının saklanacağı

$$X_i,\ Y_i,\ Z_i\ , \qquad i=1.....N_d$$

dizileri için hafızada gerekli yerler ayrılacaktır.

5.1.1 ÇUBUK ELEMANLARIN KATILIK MATRİSLERİNİN HESABI

Ek 1 de verilen çubuk elemana ait eleman koordinat sistemindeki katılık matrisinin elemanlarının hesabı için her bir çubuğa ait kesit alanının (A), y ve z eksenleri etrafındaki alan atalet momentlerinin (I_y ve

I_z), x ekseni etrafındaki polar atalet momentinin (J_x) ve çubuk uçlarının referans sistemindeki düğüm numaralarının verilmesi gerekir. Eleman koordinat sistemindeki katılık matrisi bu datalarla hesaplanabilir.

Çubuk elemanın X, Z-düzlemine dik olması durumunda, elemanları (132) eşitliğiyle verilen, çubuk elemanın X, Z-düzlemine dik olmaması durumunda ise, elemanları (117) eşitliğiyle hesaplanabilen [t] matrisi yardımıyla transformasyon matrisi [T] teşkil ettirilebilir.

(114) eşitliğindeki matris işlemlerinin yaptırılması ile referans koordinat sisteminde eleman katılık matrisi bulunur. Daha sonra bu $[K_{çr}]$ matrisi diskete, çubuk uçlarının referans sistemdeki düğüm numaraları ile birlikte kaydedilir. Bütün çubuklar için aynı işlem yapılır.

Bu işlemler için hazırlanan program Ek 3. te verilmiştir (Program 1)

5.1.2 PLAK ELEMANLARIN KATILIK MATRİSLERİNİN HESABI

Plak elemanların katılık matrislerinin hesaplanabilmesi için her bir elemana ait plak kalınlığının ve her bir elemanın köşelerinin referans koordinat sistemindeki düğüm numaralarının programa girdi olarak verilmesi gerekir.

Önce (131)...(151) eşitlikleri yardımıyla doğrultman kosinüsleri bulunur. Doğrultman kosinüsleri matrisi [t] ,(133) eşitliği yardımıyla; transformasyon matrisi [T], (152) eşitliği ile tesis edilir.

Ek 2. de verilen $[k_{pd}]$ matrisinin elemanları hesaplanarak bu matris teşkil edilir. (79) eşitliğinde verilen $[\eta]$ matrisi ve elemanları (100) eşitlikleriyle verilen [I] matrisinin hesabından sonra (101) eşitliği ile verilen $[k_{pu}]$ matrisi hesaplanabilir.

Daha sonra düzlemsel ve düzleme dik yüklere maruz plak elemanın (18x18) boyutundaki $[k_{pe}]$ matrisi, bölüm 2.2.3. de bahsedildiği şekilde tesis edilir.

Bundan sonraki işlem (114) eşitliğindeki matris çarpımlarının yapılarak referans koordinat sisteminde plak elemanın $[K_{pr}]$ katılık matrisinin hesap edilip, diskete plak elemanın köşelerinin referans koordinat sistemindeki düğüm numaraları ile birlikte kaydedilmesidir. Aynı işlemler bütün plak elemanlar için yapılacaktır.

Bu işlemler için hazırlanan program Ek 4. te verilmiştir (Program 2)

5.2. SİSTEM KATILIK MATRİSİNİN TEŞKİLİ

Bu programda sistemin toplam serbestlik derecesinin, çubuk ve plak elemanların toplam sayılarının girdi olarak verilmesi gerekir. Toplam serbestlik derecesi ile diskette sistem katılık matrisi için $(N_{tsd} x N_{tsd})$ boyutunda yer ayrılacaktır.

Önceki programlarda diskete kaydedilen eleman katılık matrisleri çağrılarak, çubuk uç numaralarının yardımı ile bu matrislerin elemanları (162) eşitliğindeki $[K_s]$ matrisinde ilgili yerlere yerleştirilir /20/. Bütün çubuk elemanlar için bu işlemler yapıldıktan sonra aynı işlem plak elemanlar için de yapılır.

Bu işlemler için hazırlanan program Ek 5. te verilmiştir (Program 3)

5.3. SİSTEM EŞİTLİKLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Sistem eşitliklerinin çözülebilmesi için, dış yük vektörünün programa girdi olarak verilmesi gerekir. Sistem eşitliklerinin çözülmesinde kullanılacak dış yük vektörünün boyutu, sistemin toplam serbestlik derecesinden engellenmiş serbestlik derecesi kadar küçüktür. Zira 4.2. bölümünde engellenmiş serbestlik derecelerindeki mesnet tepkilerinin dikkate alınmayacağı belirtilmişti.

4.2. bölümünde anlatıldığı şekilde, 3. programla diskete kaydedilmiş olan $[K_s]$ sistem katılık matrisi indirgenerek diskete kaydedilir. Bu durumda denklem takımı klasik matematikten bilinen

$$[A]\,[X]=[b]$$

formunu almıştır.

Burada $[A]$ indirgenmiş katılık matrisi $[K_s]_i$ yi, $[X]$ indirgenmiş yer değiştirme vektörü $[U_s]_i$ yi, $[b]$ de indirgenmiş dış yük vektörü $[P]_i$ yi temsil etmektedir.

Bu denklem takımının çözümü için Gauss eliminasyon metodu kullanılmıştır.

6- ÖRNEK UYGULAMALAR

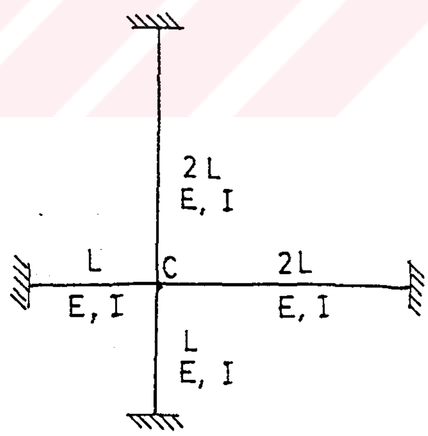
Bu bölümde daha önceki bölümlerde açıklanan metodun uygulaması ile ilgili örnekler verilecek ve bulunan sonuçlar kaynaklarda bulunan sonuçlarla karşılaştırılacaktır. İki örnek, çubuklardan oluşan sistemler için; bir örnek de plaktan oluşan sistemler için seçilmiştir. Seçilen bu örneklerin sonuçları kaynaklarda mevcuttur.

Ancak çubuklardan ve plaklardan oluşan sistemlere dair bir sonuca, kaynaklarda rastlanamadığından bu konuda bir model üzerinde hesaplar yapılmıştır. Hesap neticeleri bilgisayar çıktılarına dayanılarak sistemin deformasyon durumu kalitatif olarak değerlendirilmek üzere ilgili bölümde şekil üzerinde gösterilmiştir

6.1. ÇUBUKLARDAN OLUŞAN SİSTEMLERDE YER DEĞİŞTİRMELERİN HESABINA AİT ÖRNEKLER

ÖRNEK 1:

Şekil 21. de verilen sistemde C noktasında, kağıt düzlemine dik etkiyen P kuvvetinin bu noktada, kağıt düzlemine dik yönde sebep olacağı yer değiştirmeyi bulunuz. Bütün elemanların kesitleri aynıdır /18/.



Şekil 21. Örnek 1 e ait sistem

Bu problemin neticesi belirtilen kaynakta P, L, E ve I nın fonksiyonu olarak

$$U_z=-0.0486\ \frac{PL^3}{EI}$$

şeklinde verilmiştir.

Bilgisayarda sayısal bir sonuç alabilmek için sistem boyutları şöyle seçilmiştir:

$A=20x40\ mm^2$,
$L=500\ mm$,
$E=2.1x10^5\ N/mm^2$,
$P=5000\ N$.

Çözüm :

i) Sistemin sonlu elemanlara ayrılması ve referans koordinat sisteminin seçimi

Şekil 22 de görüldüğü gibi sistem dört adet sonlu elemana ayrılmış olup eleman numaraları daire içine alınmıştır. Sistemde beş adet düğüm noktası vardır. Düğüm numaraları üçgenlerin içinde gösterilmiştir.

Seçilen referans koordinat sistemine göre düğüm noktalarının koordinatları

X(1)=0 , Y(1)=500 , Z(1)=0 ,
X(2)=500 , Y(2)=0 , Z(2)=0 ,
X(3)=500 , Y(3)=500 , Z(3)=0 ,
X(4)=1500 , Y(4)=500 , Z(4)=0 ,
X(5)=500 , Y(5)=1500 , Z(5)=0

olarak görülmektedir.

ii) Eleman kesit büyüklüklerinin tayini

-Elemanların kesit alanları

$A(1)=A(2)=A(3)=A(4)=20x40= 800\ mm^2$

-Elemanların y eksenleri etrafındaki alan atalet momentleri

$$I_y(1)=I_y(2)=I_y(3)=I_y(4)=\frac{20x40^3}{12}=106666.7\ mm^4$$

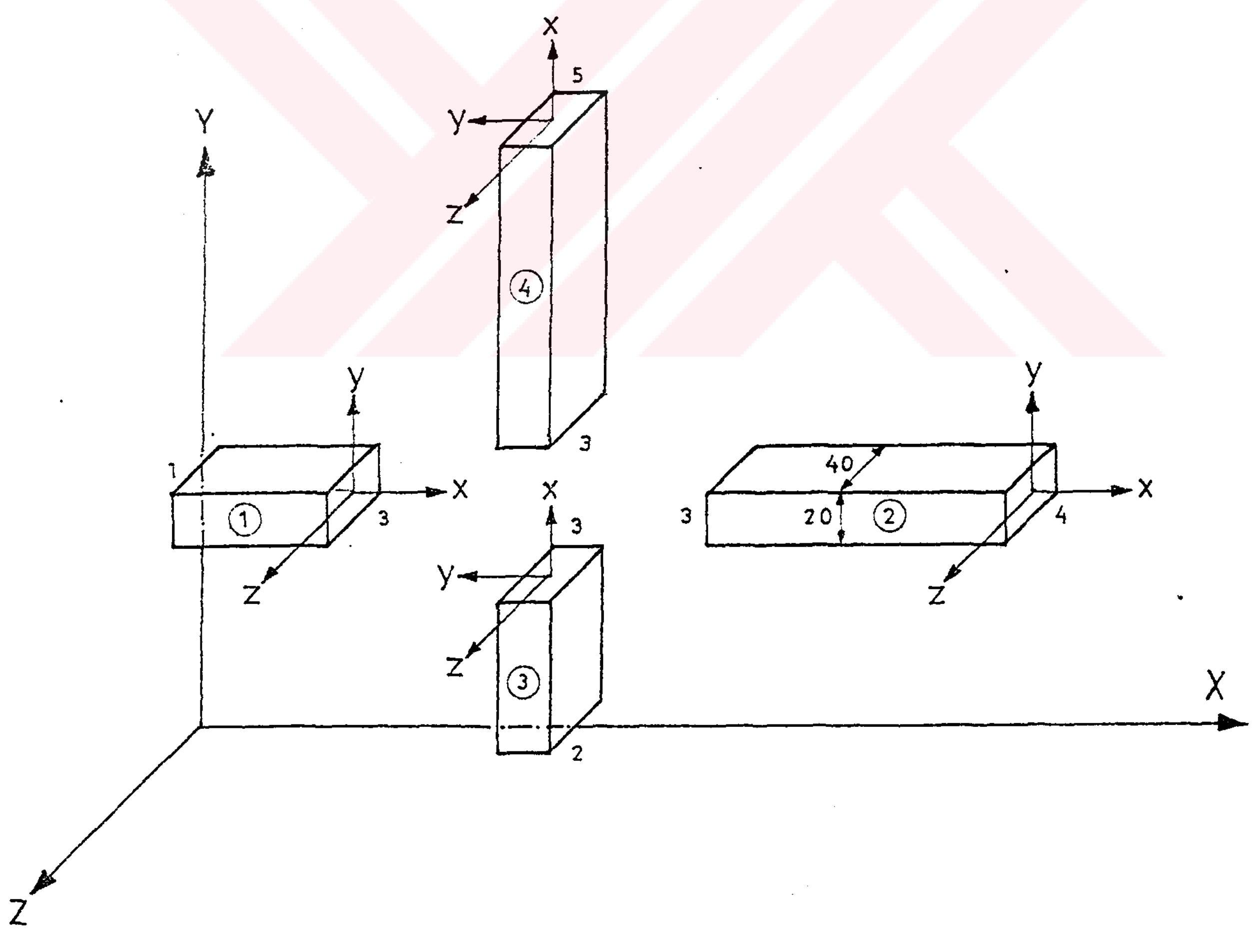
-Elemanların z eksenleri etrafındaki alan atalet momentleri

$$I_z(1)=I_z(2)=I_z(3)=I_z(4)=\frac{40x20^3}{12}=26666.67\ mm^4$$

-Elemanların x eksenleri etrafındaki polar atalet momentleri,

b; dikdörtgen kesitin uzun, a; kısa kenarı ve c sabiti de b/a=2 için tablolardan /11/ c=0.229 olmak üzere

$$J_x(1)=J_x(2)=J_x(3)=J_x(4)=cba^3=73280\ mm^4 \qquad \text{dir.}$$



Şekil 22. örnek 1 deki sistemin sonlu elemanlara ayrılması

iii) Elemanların uçlarının düğüm numaraları

ELUCC(1,1)=1 , ELUCC(1,2)=3 ,
ELUCC(2,1)=3 , ELUCC(2,2)=4 ,
ELUCC(3,1)=2 , ELUCC(3,2)=3 ,
ELUCC(4,1)=3 , ELUCC(4,2)=5 .

Burada ELUC(4,1)=3 ifadesi, 4 numaralı elemanın 1 numaralı ucundaki düğüm numarası 3 tür şeklinde anlaşılmalıdır.

iv) X,Z-düzlemine dik elemanlar

3 ve 4 numaralı elemanlar X,Z-düzlemine diktir.

v) Elemanların α açıları

Alfa(1)=0, Alfa(2)=0, Alfa(3)=0, Alfa(4)=0,

vi) Engellenmiş serbestlik dereceleri (sınır şartları)

Örnekte 1, 2, 4 ve 5 numaralı düğüm noktalarının bütün hareketleri önlenmiştir. Toplam olarak 4x6=24 serbestlik derecesi engellenmiştir. Serbestlik derecelerine 1. düğümdeki X yönündeki yer değiştirmeden itibaren sırayla numara verilirse,engellenmiş serbestlik derecelerinin numaralarının

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25
26, 27, 28, 29, 30

olduğu görülür.

vii) Dış yük

Dış kuvvetin uygulandığı serbestlik derecesi numarası 15 olup, dış yük

P(15)=-5000 N

olarak verilir.

Bu datalarla hesaplanan yer değiştirme değerleri

DÜĞÜM NUMARASI	X-YÖNÜNDE ÖTELEME (mm)	Y-YÖNÜNDE ÖTELEME (mm)	Z-YÖNÜNDE ÖTELEME (mm)	X-ETRAFINDA DÖNME (radyan)	Y-ETRAFINDA DÖNME (radyan)	Z-ETRAFINDA DÖNME (radyan)
1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
2	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
3	0.000E+00	0.000E+00	-.135E+01	-.190E-02	0.190E-02	0.000E+00
4	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
5	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00

dir. Burada sorulan yer değiştirmenin

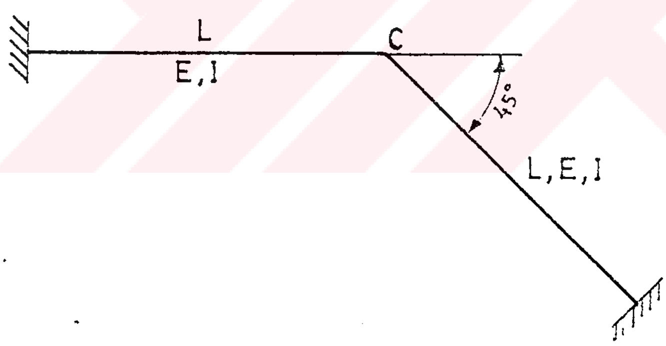
$U_z=-1,35$ mm olduğu görülmektedir.

Aynı datalar sorunun alındığı kaynaktaki neticede

$U_z=-1,3560$ mm sonucunu vermektedir.

ÖRNEK 2 :

Şekil 23. deki sistemde C noktasında kağıt düzlemine dik etkiyen P kuvvetinin doğuracağı yer değiştirmeyi bulunuz /18/.



Şekil 23. Örnek 2 ye ait sistem

Bu problemin neticesi sorunun alındığı kaynakta $\beta=\frac{GJ}{EI}$ olmak üzere

$$U_z=-\frac{PL^3}{24EI}\cdot\frac{16+24\beta+\beta^2}{4+(15+6\sqrt{2})\beta+\beta^2}$$

dir.

Çözüm :

Seçilen sistem büyüklükleri:

$A(1)=A(2)=20x40=800 \ mm^2$,

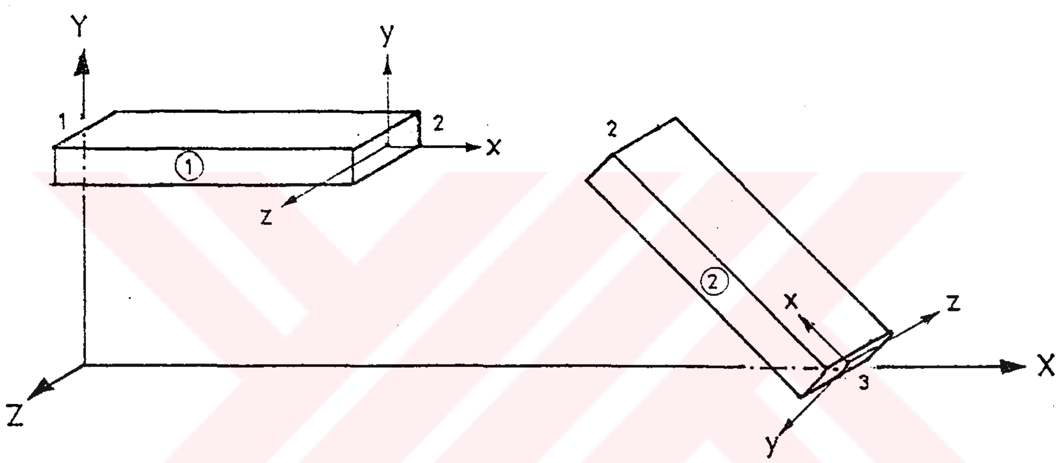
$L=500 \ mm$,

$E=2.1x10^5 \ N/mm^2$,

$G=80000 \ N/mm^2$,

$P=5000 \ N$.

Sistemin sonlu elemanlara ayrılması Şekil 24 te gösterilmiştir.



Şekil 24. Örnek 2 deki sistemin sonlu elemanlara ayrılması

-Program giriş dataları:

Düğüm sayısı=3, Eleman sayısı=2.

X(1)=0	, Y(1)=500.cos45=354 ,	Z(1)=0 ,
X(2)=500	, Y(2)=354 ,	Z(2)=0 ,
X(3)=500+500.cos45=854	, Y(3)=0 ,	Z(3)=0 mm.

$I_y(1)=I_y(2)=106666.7 \ mm^4$,

$I_z(1)=I_z(2)=26666.67 \ mm^4$,

$J_x(1)=J_x(2)=73280 \ mm^4$,

ELUCC(1,1)=1 , ELUCC(1,2)=2 ,
ELUCC(2,1)=3 , ELUCC(2,2)=2 .

X, Z-düzlemine dik eleman yok.

ALFA(1)=ALFA(2)=0 .

Engellenmiş serbestlik derecesi sayısı=12 .

Engellenmiş serbestlik derecesi numaraları: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 13, 14, 15, 16, 17, 18 .

Dış yük P(9)=-5000 N .

Bu datalarla hesaplanan netice:

DÜĞÜM NUMARASI	X-YÖNÜNDE ÖTELEME (mm)	Y-YÖNÜNDE ÖTELEME (mm)	Z-YÖNÜNDE ÖTELEME (mm)	X-ETRAFINDA DÖNME (radyan)	Y-ETRAFINDA DÖNME (radyan)	Z-ETRAFINDA DÖNME (radyan)
1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
2	0.000E+00	0.000E+00	-.254E+01	-.133E-01	0.552E-02	0.000E+00
3	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00

dir. Burada sorulan yer değiştirmenin

U_z=-2,54 mm

olduğu görülmektedir.

Kaynağın verdiği netice

U_z=-2,503 mm dir.

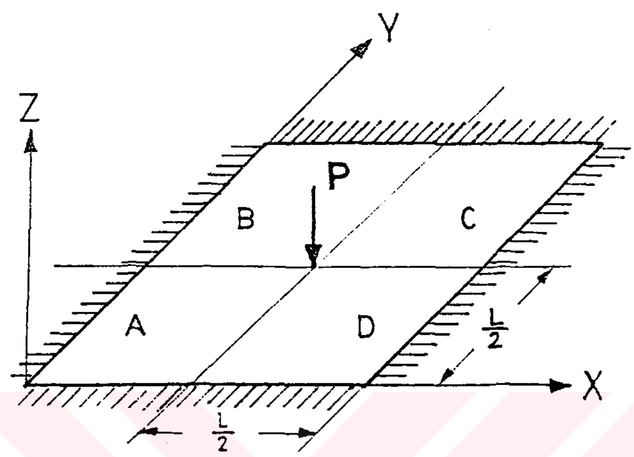
6.2 PLAKLARDAN OLUŞAN SİSTEMLERDE YER DEĞİŞTİRMELERİN HESABINA AİT BİR ÖRNEK

Şekil 25 de verilen kare şeklindeki plak, bütün kenarlarından ankastre olarak bağlıdır. Plağın ortasından plak düzlemine dik P kuvveti etkimektedir. Yükün uygulandığı noktadaki çökmeyi bulunuz /17/. Plak kalınlığı h ve elastiklik modülü E olup μ=0.25 dir.

Bu sorunun sonucu sorunun alındığı kaynakta

$$U_z=-0.063\frac{PL^2}{Eh^3}$$

olarak verilmektedir.



Şekil 25. Dört kenarından ankastre bağlı plak

Çözüm:

Seçilen sistem büyüklükleri;

E=200000 N/mm^2 , P=-5000 N , L=600 mm , h=5 mm .

Şeklin simetrik olmasından dolayı kare plak parçasının 1/4 lük kısmı (A bölgesi) ile işlem yapılacaktır.

A bölgesinin sonlu elemanlara ayrılması şekil 26 da gösterilmiştir.

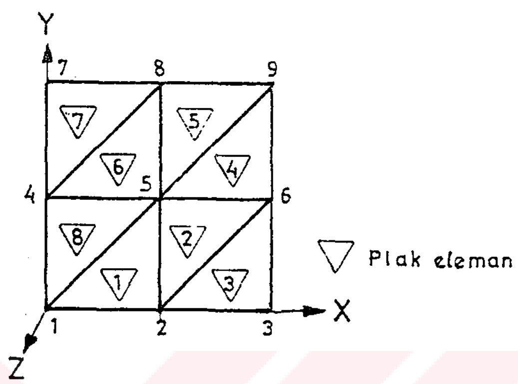
-Pogram giriş dataları

Eleman sayısı=8 , Düğüm sayısı=9 .

Düğüm noktalarının koordinatları;

X(1)=0 , Y(1)=0 , Z(1)=0 ,

X(2)=150 ,	Y(2)=0 ,	Z(2)=0 ,
X(3)=300 ,	Y(3)=0 ,	Z(3)=0 ,
X(4)=0 ,	Y(4)=150 ,	Z(4)=0 ,
X(5)=150 ,	Y(5)=150 ,	Z(5)=0 ,
X(6)=300 ,	Y(6)=150 ,	Z(6)=0 ,
X(7)=0 ,	Y(7)=300 ,	Z(7)=0 ,
X(8)=150 ,	Y(8)=300 ,	Z(8)=0 ,
X(9)=300 ,	Y(9)=300 ,	Z(9)=0 mm.



Şekil 26. 1/4 lük plak parçasının sonlu elemanlara ayrılması

Elemanların uçlarının düğüm numaraları;

ELUCP(1,1)=1 ,	ELUCP(3,3)=3 ,	ELUCP(6,2)=8 ,
ELUCP(1,2)=5 ,	ELUCP(4,1)=5 ,	ELUCP(6,3)=5 ,
ELUCP(1,3)=2 ,	ELUCP(4,2)=9 ,	ELUCP(7,1)=4 ,
ELUCP(2,1)=2 ,	ELUCP(4,3)=6 ,	ELUCP(7,2)=7 ,
ELUCP(2,2)=5 ,	ELUCP(5,1)=5 ,	ELUCP(7,3)=8 ,
ELUCP(2,3)=6 ,	ELUCP(5,2)=8 ,	ELUCP(8,1)=1 ,
ELUCP(3,1)=2 ,	ELUCP(5,3)=9 ,	ELUCP(8,2)=4 ,
ELUCP(3,2)=6 ,	ELUCP(6,1)=4 ,	ELUCP(8,3)=5 .

Engellenmiş serbestlik derecesi sayısı= 34 .

Engellenmiş serbestlik dereceleri (sınır şartları) ;

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 46, 52, 53.

Dış yük $P(51)=-\frac{1}{4}P=-1250$ N .

Bu datalarla hesaplanan netice

DÜĞÜM NUMARASI	X-YÖNÜNDE ÖTELEME (mm)	Y-YÖNÜNDE ÖTELEME (mm)	Z-YÖNÜNDE ÖTELEME (mm)	X-ETRAFINDA DÖNME (radyan)	Y-ETRAFINDA DÖNME (radyan)	Z-ETRAFINDA DÖNME (radyan)
1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
2	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
3	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
4	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
5	0.000E+00	0.000E+00	-.118E+01	-.138E-01	0.132E-01	0.000E+00
6	0.000E+00	0.000E+00	-.273E+01	-.326E-01	0.000E+00	0.000E+00
7	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
8	0.000E+00	0.000E+00	-.204E+01	0.000E+00	0.243E-01	0.000E+00
9	0.000E+00	0.000E+00	-.507E+01	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00

dir. Burada sorulan yer değiştirmenin

U_z=-5,07 mm

olduğu görülmektedir.

Kaynağın verdiği sonuç

U_z=- 4,536 mm dir.

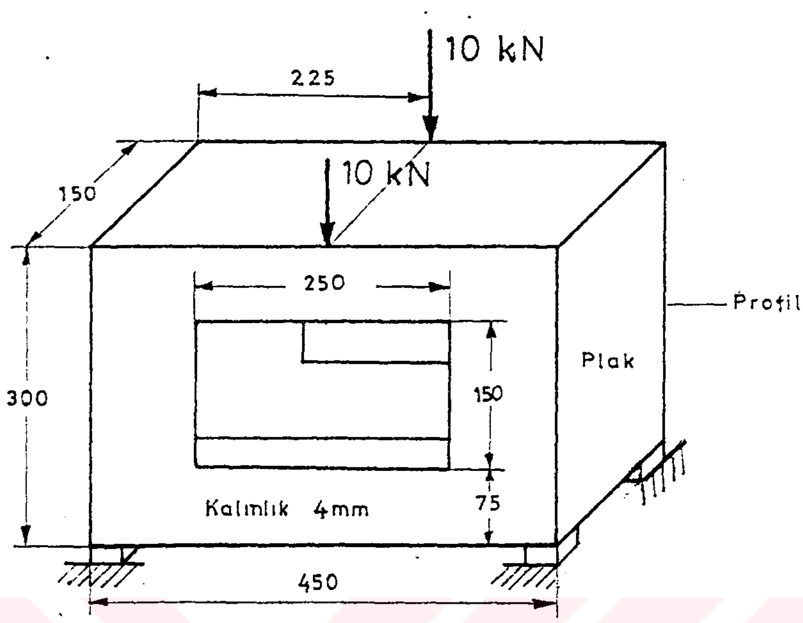
6.3. PLAKLARDAN VE ÇUBUKLARDAN OLUŞAN SİSTEMLERDE YER DEĞİŞTİRMELERİN HESABINA AİT BİR ÖRNEK

Şekil 27 deki model konstrüksiyon bütün kenarlarında 12x12 mm^2 kesitinde profille desteklenmiştir. Konstrüksiyonun köşe noktalarının ve *yüklerin uygulandığı noktaların yer değiştirmelerini bulunuz.*

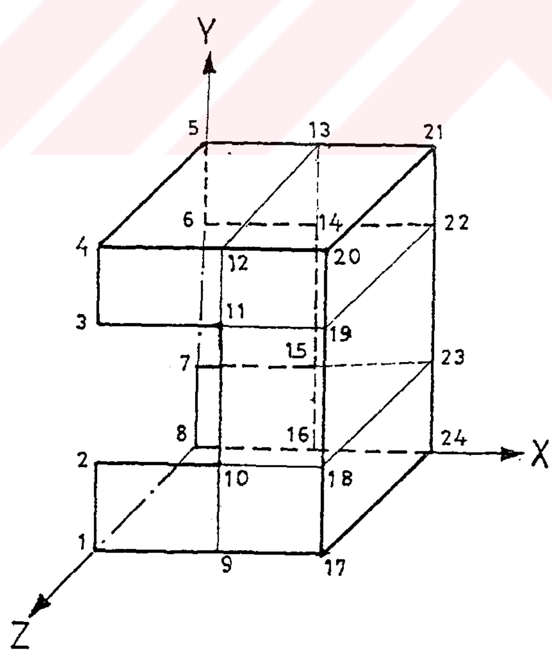
Çözüm:

Simetriklik sebebiyle sistemin yarısı incelenecektir. Seçilen referans koordinat sistemi ve düğüm noktalarının numaralandırılması şekil 28 de ve sistemin sonlu elemanlara ayrılması şekil 29 da gösterilmiştir.

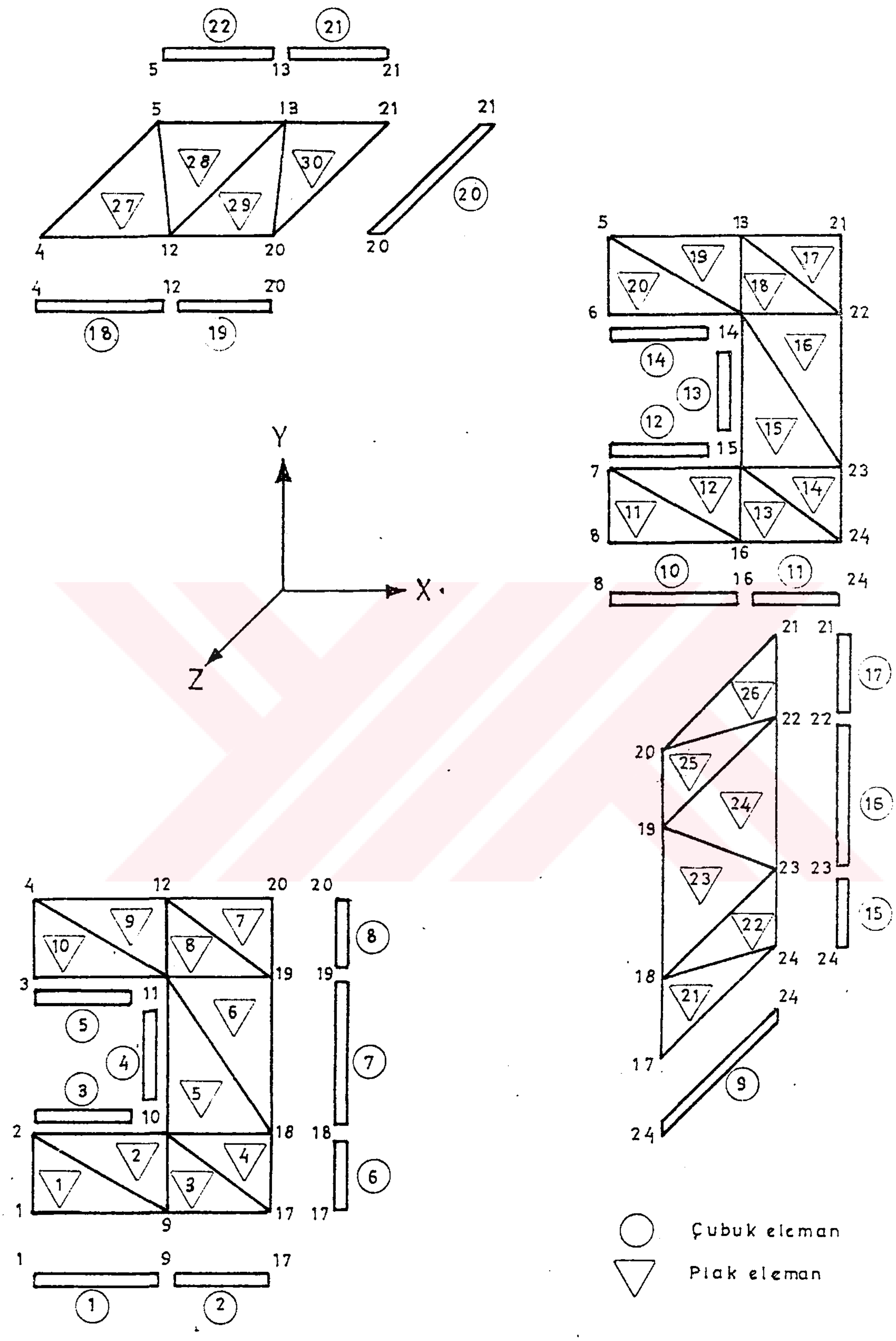
Sistemde bulunan 22 adet çubuğa ait katılık matrislerinin Ek 3 deki programla hesaplanabilmesi için gerekli giriş dataları bu programın ilgili data satırlarında; yine sistemde bulunan 30 adet plak elemana ait katılık matrislerinin Ek 4 deki programla hesaplanabilmesi için gerekli giriş dataları, bu programın ilgili data satırlarında verilmiştir.



Şekil 27. Model konstrüksiyon



Şekil 28. Model konstrüksiyonda referans koordinat sistemi ve düğüm noktalarının numaralandırılması



Şekil 29. Model konstrüksiyonun sonlu elemanlara ayrılması

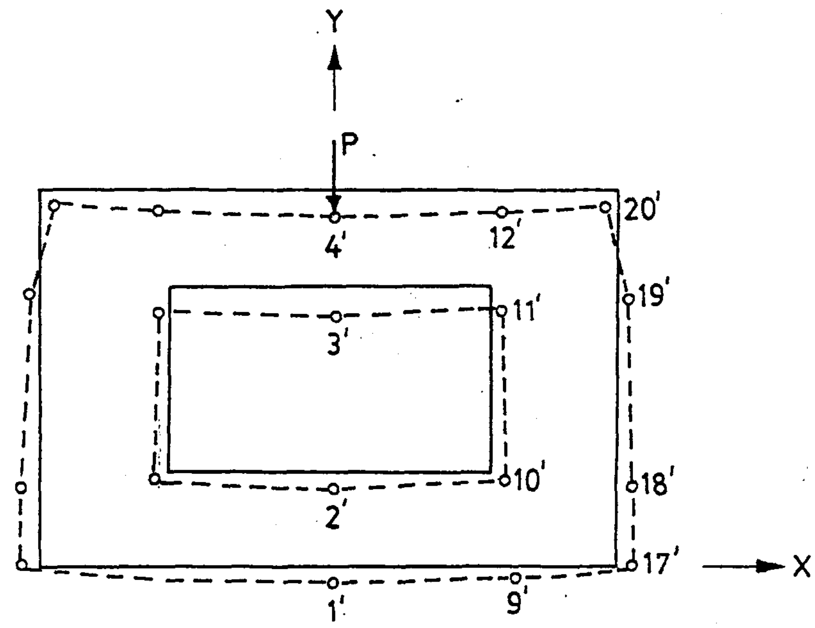
Ek 5 deki sistem katılık matrisini oluşturan programdaki giriş dataları da bu model konstrüksiyonla ilgilidir.

Sistem denklemlerinin çözümü için gerekli olan sınır şartları, yani engellenmiş serbestlik dereceleri Ek 6 daki programda görülebilir.

Bu sisteme ait yer değiştirme bileşenleri bilgisayar çıktısı olarak aşağıda verilmiştir.

DÜĞÜM NUMARASI	X-YÖNÜNDE ÖTELEME (mm)	Y-YÖNÜNDE ÖTELEME (mm)	Z-YÖNÜNDE ÖTELEME (mm)	X-ETRAFINDA DÖNME (radyan)	Y-ETRAFINDA DÖNME (radyan)	Z-ETRAFINDA DÖNME (radyan)
1	0.000E+00	-.794E-02	-.110E-03	0.257E-05	-.151E-05	0.000E+00
2	0.000E+00	-.860E-02	0.530E-04	0.160E-05	-.167E-05	0.000E+00
3	0.000E+00	-.431E-01	0.176E-03	-.270E-05	-.404E-05	0.000E+00
4	0.000E+00	-.474E-01	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
5	0.000E+00	-.474E-01	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
6	0.000E+00	-.431E-01	0.156E-04	0.109E-05	-.101E-04	0.000E+00
7	0.000E+00	-.860E-02	-.102E-03	0.456E-05	0.769E-06	0.000E+00
8	0.000E+00	-.794E-02	-.313E-03	0.207E-05	0.814E-06	0.000E+00
9	0.306E-02	-.702E-02	0.718E-04	0.319E-05	-.128E-05	0.521E-04
10	0.200E-02	-.779E-02	0.312E-03	0.253E-05	-.196E-05	-.461E-04
11	0.355E-02	-.138E-01	0.565E-03	0.149E-05	-.890E-06	0.195E-03
12	-.325E-02	-.148E-01	0.246E-03	-.137E-04	0.189E-05	0.232E-03
13	-.338E-02	-.148E-01	-.342E-03	-.498E-04	0.126E-04	0.258E-03
14	0.351E-02	-.137E-01	0.109E-02	0.121E-04	-.414E-05	0.195E-03
15	0.201E-02	-.780E-02	-.185E-03	0.565E-05	0.404E-06	-.460E-04
16	0.306E-02	-.703E-02	-.437E-03	0.162E-05	0.121E-05	0.512E-04
17	0.437E-02	0.000E+00	0.197E-03	0.905E-06	-.200E-05	0.409E-04
18	0.373E-02	-.239E-02	0.238E-03	-.609E-06	0.367E-05	-.146E-04
19	0.289E-02	-.472E-02	0.545E-04	-.141E-05	0.817E-05	0.709E-04
20	-.348E-02	-.482E-02	-.323E-04	-.713E-06	0.254E-05	0.634E-04
21	-.354E-02	-.469E-02	-.196E-03	-.658E-06	-.129E-04	0.505E-04
22	0.283E-02	-.463E-02	-.386E-03	0.261E-05	0.174E-04	0.737E-04
23	0.374E-02	-.241E-02	-.650E-03	-.457E-06	0.897E-05	-.172E-04
24	0.436E-02	0.000E+00	-.601E-03	-.570E-06	0.210E-05	0.440E-04

Bu kompleks sistemin yük uygulandıktan sonra alacağı şeklin X, Y düzlemindeki görüntüsü bilgisayar çıktısındaki datalar yardımıyla abartılmış olarak çizilirse, sistemin deforme olmuş hali hakkında bir fikir edinilebilir, şekil 30.



Şekil 30. Model konstrüksiyonun yük altında alacağı şekil

7- SONUÇ

Bu çalışmada eleman eşitliklerinin, dolayısıyla katılık matrislerinin çubuklarda ve düzlemi içinde kalan yüklerle yüklenmiş plak elemanlarda elemanter mukavemete dayanılarak; eğilmeye zorlanan plak elemanlarda ise yer değiştirme fonksiyonu kullanılarak nasıl türetilebileceği gösterilmiş ve bunların kolayca hesaplanabileceği programlar yazılmıştır, Program 1 ve Program 2.

Sistemin birden fazla farklı karakterde elemanı, bu çalışmada çubuk ve plak ihtiva etmesi durumunda da sistem katılık matrisinin ilave bir zorluk oluşturmadan nasıl teşekkül ettirilebileceği gösterilmiştir, Program 3. Aynı mantık, sistemin çubuk ve üçgen plak elemanların haricinde başka karakterde elemanlar, mesela dörtgen plak eleman veya kabuk eleman gibi ihtiva etmesi durumunda da bu elemanlara ait temel bilgilere sahip olmak kaydıyla rahatlıkla kullanılabilir.

Sınır şartlarını dikkate alarak sistem denklemlerinin nasıl çözülebileceği araştırılmış ve bu işlem için bilgisayar programı yazılmıştır, program 4.

Programların çalışmasında bilgisayar hafızasıyla sınırlı kalınmaması için disk hafıza olarak kullanılmıştır. Başka bir ifadeyle programların hazırlanmasında bilgisayar diskinin kapasitesinin müsaade ettiği ölçüde çok sayıda sonlu elemanla çalışılabilme imkanı sağlanmasına özen gösterilmiştir.

Elastik ortamın sonlu sayıda elemanlara nasıl ayrılabileceği, bilgisayara dataların nasıl verileceği örnekler üzerinde gösterilmiş ve bilgisayardan elde edilen yer değiştirme bileşenleri ile kaynaklarda bulunabilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Çubuklarla ilgili örnek uygulamalarda görüldüğü gibi, kritik noktalarda sorulan yer değiştirmeler /18/ numaralı kaynakla uyuşmaktadır. Buradan 1, 3 ve 4 numaralı programların herhangi bir şekilde dizayn edilmiş çerçevelerin yer değiştirme analizinde güvenilerek kullanılabileceği sonucu çıkar.

Plak elemanlardan oluşan sistem örneğinde, dört kenarından ankastre bağlı plak, elde edilen sonuç çubuklar için elde edilen netice kadar kesin sonuca yakın değildir. Zira plak teorisinin verdiği neticeden %12 (=(5,07-4,536)/4,536) lik bir sapma göstermektedir. Bu örnekte eleman sayısı arttırılarak sonucun nasıl değiştiği araştırılmış, ancak sorulan yer değiştirmenin 5 mm civarında kaldığı görülmüştür. Başka bir ifadeyle sonuç 4,536 mm ye doğru yakınsamamıştır. Aslında yakınsaması da beklenemezdi. Zira seçilen plak eleman bütün yakınsaklık şartlarını /20/ taşıyan bir eleman değildir. Bu elemanın seçilmesinin sebebi basitliği ve pratikte kullanılabilir neticeler verdiğinin literatürde /16/ belirtilmiş olmasıdır. Yakınsamanın incelenmesi ayrı bir araştırma konusudur.

Çubuk ve plak elemanların güvenilirlik dereceleri hakkında bir kanaat sahibi olduktan sonra çubukları ve plakları ihtiva eden bir sistem çözülmüştür. Bu örnekte boyutlar ve sistem üzerine etkiyen yük başlangıçta eldeki imkanlarla yer değiştirme ölçmesi de yapılabilecek şekilde seçilmişti. Ancak bilgisayardan elde edilen sonuçların mertebesinin çok küçük olması sebebiyle hassas bir ölçme yapılabileceğine inanılmadığından, bundan feragat edilmiştir. Buna rağmen sistemin deforme olmuş şekli, Şekil 30 , sistematik bir hata yapılmadığının bir işareti sayılır.

İleride çalışmanın kompleks sistemlerde gerilme analizini de kapsayacak şekilde genişletilmesinde fayda vardır. Böylelikle hesaplanan ve strain-gage'lerle kolayca ölçülebilen birim şekil değiştirmelerin karşılaştırılması net bir biçimde yapılabilecektir.

REFERANSLAR

/1/ SCHUMPICH., 1979, Technische Mechanik, Teil 1, Statik, B. G. Teubner, Stuttgart, 182 s.

/2/ SEELY, F. B. and SMITH, J. O., 1978, Advanced Mechanics of Materials, John Wiley and Sons, New York, 680 s.

/3/ NADAI, A., 1968, Die elastischen Platten, Springer Verlag, Berlin, 326 s.

/4/ HOLZMAN, MEYER, SCHUMPICH., 1979, Technische Mechanik,Teil 2, Festigkeitslehre, B. G. Teubner, Stuttgart, 336 s.

/5/ HEUBNER, H. K., 1982, The Finite Element Method For Engineers, John Willey and Sons, New York, 623 s.

/6/ TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C. and TOPP, L.J., 1956, Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, Journal of Aeronautical Sciences, 23, 805-823.

/7/ RAO, S.S., 1982, The Finite Element Method in Engineering, Pergamon Press, Oxford, 621 s.

/8/ DESAI, C. S., ABEL J. F., 1972, Introduction to the Finite Element Method, Von Nostrand Rheinhold Company, New York, 477 s.

/9/ ZIENKIEWICZ, O. C., 1971, The Finite Element Method, McGraw-Hill, Londra, 521 s.

/10/ İNAN, M., 1984, Cisimlerin Mukavemeti, Birsen Yayınevi, İstanbul, 560 s.

/11/ POPOV, E. P., 1976, Mechanics of Materials, Prentice / Hall International, inc., Londra, 590 s.

/12/ TIMOSHENKO, S., GOODIER, J. N., 1970, Theory of Elasticity, Mc Graw-Hill, 567 s.

/13/ TIMOSHENKO, S., KRIEGER, S., 1959, Theory of Plates and Shells, Mc Graw-Hill, 580 s.

/14/ GERE, J. M., WEAWER, W., 1965, Matrix Algebra for Engineers, Von Nostrand Company, inc., Princeton, 168 s.

/15/ FOX, L., 1965, An Introduction to Numerical Linear Algebra with Exercises, Oxford University Press, New York, 327 s.

/16/ HAHN, G. H., 1982, Methode der finiten Elemente i. d. Festigkeitslehre, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 460 s.

/17/ NATH, B., 1974, Fundemantals of Finite Elements for Engineers, The Athlone Press, Londra, 255 s.

/18/ MARTIN, H. C., 1966 Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis, Mc Graw-Hill Book Company, 331 s.

/19/ WYLIE, C. R., BARRETT, L. C., 1982, Advanced Engineering Mathematics, International Student Edition (Mc Graw-Hill), Tokyo, 1103 s.

/20/ KURTAY, T., 1980, Sonlu Elemanlar Yöntemine Giriş, İ.T.Ü. Makina Fakültesi ders notu, İstanbul, 100 s.

ÖZGEÇMİŞ

Osman YİĞİT 1951 yılında Güdül'de doğdu. 1969 yılında Ankara Yüksek Öğretmen Okulu Hazırlık Lisesini bitirdikten sonra, 1973 yılında İ.T.Ü. Makina Fakültesinden makina mühendisi olarak mezun oldu. Daha sonra sırasıyla, bir yıl D.S.İ. Antalya Bölge Müdürlüğünde, iki yıl İskenderun Demir Çelik Fabrikalarında ve bir yıl da M.K.E. Genel Müdürlüğünde makina mühendisi olarak çalıştı. 1978 yılında lisansüstü öğrenim için Federal Almanya ya gitti. 1982 yılında Karlsruhe Teknik Üniversitesinden makina yüksek mühendisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Selçuk Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü Mekanik Anabilim dalında araştırma görevlisi olarak çalışmaya, 1983 yılında da doktora öğrenimine başladı. 1988 yılından bu yana Selçuk Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesinde uzman olarak çalışmakta olan Osman YİĞİT evli ve iki çocuk babasıdır.

EK.1 Çubuk Elemanın Eleman Koordinat Sisteminde Katılık Matrisi

$$
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{12EI_z}{L^3} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ_x}{L} & & & & & \text{simetrik} & & & \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & & & & & & & \\
0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & & & & & & \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & & & & & \\
0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & & & & \\
0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & & & \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_x}{L} & & \\
0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & \\
0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L}
\end{bmatrix}
$$

Çubuk elemanın eleman koordinat sisteminde katılık matrisi $[k_{çe}]$,/7,17,18/

EK.2 Düzlemsel Yüklere Maruz Üçgen Plak Elemanın Eleman Koordinat Sisteminde Katılık Matrisi

$$
\begin{bmatrix}
cy_{32}^2+dx_{32}^2 & & & & & \text{simetrik} \\
-c\mu y_{32}x_{32}-dx_{32}y_{32} & cx_{32}^2+dy_{32}^2 & & & & \\
-cy_{32}y_{31}-dx_{32}x_{31} & c\mu x_{32}y_{31}+dy_{32}x_{31} & cy_{31}^2+dx_{31}^2 & & & \\
c\mu y_{32}x_{31}+dx_{32}y_{31} & -cx_{32}x_{31}-dy_{32}y_{31} & -c\mu x_{31}y_{31}-dy_{31}x_{31} & cx_{31}^2+dy_{31}^2 & & \\
cy_{32}y_{21}+dx_{32}x_{21} & -c\mu x_{32}y_{21}-dy_{32}x_{21} & -cy_{31}y_{21}-dx_{31}x_{21} & c\mu x_{31}y_{21}+dy_{31}x_{21} & cy_{21}^2+dx_{21}^2 & \\
-c\mu y_{32}x_{21}-dx_{32}y_{21} & cx_{32}x_{21}+dy_{32}y_{21} & c\mu y_{31}x_{21}+dx_{31}y_{21} & -cx_{31}x_{21}-dy_{31}y_{21} & -c\mu y_{21}x_{21}-dx_{21}y_{21} & cx_{21}^2+dy_{21}^2
\end{bmatrix}
$$

Burada $c=\dfrac{Eh}{4A(1-\mu^2)}$ ve $d=\dfrac{Eh}{8A(1+\mu)}$ dır.

Düzlemsel yüklere maruz üçgen plak elemanın eleman koordinat sistemindeki $[k_{pd}]$ katılık matrisi/7/

EK.3 Çubuk Elemanların Katılık Matrislerini Hesaplayan Bilgisayar Programı (Program 1)

```
100 CLS
110 REM ND : Toplam düğüm sayısı
120 REM TCES : Toplam çubuk eleman sayısı
130 READ ND,TCES
140 DATA 24,22
150 REM AC(I) : I numaralı çubuğun kesit alanı
160 REM IYY(I) : I numaralı çubuğun y eksenine göre alan ata
    let momenti
170 REM JXX(I) : I numaralı çubuğun x eksenine göre polar a
    talet momenti
180 REM ALFA(I) SEMBOLLER sayfasında açıklanan α açısı
190 REM ELUCC(I,J) : I numaralı çubuk elemanın J nci ucundaki
    düğüm numarası
200 DIM X(ND),Y(ND),Z(ND),AC(TCES),IYY(TCES),IZZ(TCES),
    JXX(TCES),DIK(TCES),ALFA(TCES),ELUCC(TCES,2)
210 REM TRC(12,12) : Çubuk elemanın transformasyon matrisi
220 DIM KCE(12,12),TRC(12,12),TRCT(12,12),KCR(12,12),
    KCETR(12,12),T(3,3),T1(3,3),T2(3,3)
230 FOR I=1 TO ND:READ X(I):NEXT I
240 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0,125,125,125,125,125,125,125,125,225
    ,225,225,225,225,225,225,225
250 FOR I=1 TO ND:READ Y(I):NEXT I
260 DATA 0,75,225,300,300,225,75,0,0,75,225,300,300,225,75,0
    ,0,75,225,300,300,225,75,0
270 FOR I=1 TO ND:READ Z(I):NEXT I
280 DATA 150,150,150,150,0,0,0,0,150,150,150,150,0,0,0,0,150
    ,150,150,150,0,0,0,0
290 FOR I=1 TO TCES:AC(I)=144:IYY(I)=1728:IZZ(I)=1728:
    JXX(I)=2923.8:NEXT I
300 FOR I=1 TO TCES:READ DIK(I):NEXT I: REM Eleman XZ düzle
    mine dikse DIK(I)=1
310 DATA 0,0,0,1,0,1,1,1,0,0,0,0,1,0,1,1,1,0,0,0,0,0
320 FOR I=1 TO TCES:READ ALFA(I):NEXT I
330 DATA 0,0,0,4.7124,0,4.7124,4.7124,4.7124,0,0,0,0,4.7124
    ,0,4.7124,4.7124,4.7124,0,0,0,0,0
340 FOR I=1 TO TCES :FOR J=1 TO 2:READ ELUCC(I,J):NEXT J:
    NEXT I
350 DATA 1,9,9,17,2,10,10,11,3,11,17,18,18,19,19,20,24,17,8,
    16,16,24,7,15,15,14,6,14,24,23,23,22,22,21,4,12,12,20,21
    ,20,13,21,5,13
360 E=210000!:G=80000!
370 FOR M=1 TO TCES
380 PRINT "EL.=";M
390 FOR I=1 TO 12:FOR J=1 TO 12:KCE(I,J)=0:NEXT J:NEXT I
400 UC1=ELUCC(M,1):UC2=ELUCC(M,2)
410 LC=SQR((X(UC2)-X(UC1))^2+(Y(UC2)-Y(UC1))^2+(Z(UC2)-
    Z(UC1))^2)
420 KCE(1,1)=E*AC(M)/LC:         KCE(2,2)=12*E*IZZ(M)/LC^3
430 KCE(3,3)=12*E*IYY(M)/LC^3:  KCE(4,4)=G*JXX(M)/LC
440 KCE(5,3)=-6*E*IYY(M)/LC^2:  KCE(5,5)=4*E*IYY(M)/LC
450 KCE(6,2)=6*E*IZZ(M)/LC^2 :  KCE(6,6)=4*E*IZZ(M)/LC
460 KCE(7,1)=-E*AC(M)/LC :       KCE(7,7)=E*AC(M)/LC
470 KCE(8,2)=-12*E*IZZ(M)/LC^3: KCE(8,6)=-6*E*IZZ(M)/LC^2
480 KCE(8,8)=12*E*IZZ(M)/LC^3:  KCE(9,3)=-12*E*IYY(M)/LC^3
```

```
490 KCE(9,5)=6*E*IYY(M)/LC^2:    KCE(9,9)=12*E*IYY(M)/LC^3
500 KCE(10,4)=-G*JXX(M)/LC:      KCE(10,10)=G*JXX(M)/LC
510 KCE(11,3)=-6*E*IYY(M)/LC^2: KCE(11,5)=2*E*IYY(M)/LC
520 KCE(11,9)=6*E*IYY(M)/LC^2:  KCE(11,11)=4*E*IYY(M)/LC
530 KCE(12,2)=6*E*IZZ(M)/LC^2:  KCE(12,6)=2*E*IZZ(M)/LC
540 KCE(12,8)=-6*E*IZZ(M)/LC^2: KCE(12,12)=4*E*IZZ(M)/LC
550 FOR I=1 TO 12 :FOR J=1 TO 12: KCE(I,J)=KCE(J,I):NEXT J:
    NEXT I
560 FOR I=1 TO 12:FOR J=1 TO 12:TRC(I,J)=0:NEXT J:NEXT I
570 LAMOX=(X(UC2)-X(UC1))/LC:MUOX=(Y(UC2)-Y(UC1))/LC:NUOX=
    (Z(UC2)-Z(UC1))/LC
580 IF DIK(M)=1 THEN 700
590 T1(1,1)=LAMOX:T1(1,2)=MUOX:T1(1,3)=NUOX
600 A=SQR(LAMOX^2+NUOX^2)
610 T1(2,1)=-LAMOX*MUOX/A:T1(2,2)=(NUOX^2+LAMOX^2)/A:T1(2,3)
    =-LAMOX*NUOX/A
620 T1(3,1)=-NUOX/A:T1(3,2)=0:T1(3,3)=LAMOX/A
630 T2(1,1)=1:T2(1,2)=0:T2(1,3)=0
640 T2(2,1)=0:T2(2,2)=COS(ALFA(M)):T2(2,3)=SIN(ALFA(M))
650 T2(3,1)=0:T2(3,2)=-SIN(ALFA(M)):T2(3,3)=COS(ALFA(M))
660 FOR I=1 TO 3:FOR J=1 TO 3:T(I,J)=0
670 FOR K=1 TO 3:T(I,J)=T(I,J)+T2(I,K)*T1(K,J):NEXT K
680 NEXT J:NEXT I
690 GOTO 730
700 T(1,1)=0:T(1,2)=MUOX:(,3)=0
710 T(2,1)=-MUOX*COS(ALFA(M)):T(2,2)=0:T(2,3)=MUOX*SIN(ALFA(M))
720 T(3,1)=SIN(ALFA(M)):T(3,2)=0:T(3,3)=COS(ALFA(M))
730 FOR I=1 TO 3:FOR J=1 TO 3:I3=I+3:J3=J+3:I6=I+6:J6=J+6:I9
    =I+9:J9=J+9
740 TRC(I,J)=T(I,J):TRC(I3,J3)=T(I,J):TRC(I6,J6)=T(I,J):
    TRC(I9,J9)=T(I,J)
750 NEXT J:NEXT I
760 FOR I=1 TO 12:FOR J=1 TO 12
770 TRCT(I,J)=TRC(J,I):NEXT J:NEXT I
780 FOR I=1 TO 12:FOR J=1 TO 12:KCETR(I,J)=0
790 FOR K=1 TO 12 :KCETR(I,J)=KCETR(I,J)+KCE(I,K)*TRC(K,J):
    NEXT K
800 NEXT J:NEXT I
810 FOR I=1 TO 12:FOR J=1 TO 12:KCR(I,J)=0
820 FOR K=1 TO 12:KCR(I,J)=KCR(I,J)+TRCT(I,K)*KCETR(K,J):NEXT K
830 NEXT J:NEXT I
840 M$=STR$():IF LEN(M$)=2 THEN M$=RIGHT$(M$,1) ELSE M$=
    RIGHT$(M$,2)
850 OPEN "CB"+M$+".DAT" FOR OUTPUT AS #1
860 WRITE #1,UC1,UC2
870 FOR I=1 TO 12:FOR J=1 TO 12:WRITE #1,KCR(I,J):NEXT J:NEXT I
880 CLOSE #1
890 NEXT M
```

EK.4 Plak Elemanların Katılık Matrislerini Hesaplayan Bilgisayar programı (Program 2)

```
1000 CLS
1010 REM ND : Toplam düğüm sayısı
1020 REM TPES : Toplam plak eleman sayısı
1030 READ ND,TPES
1040 DATA 24,30
1050 REM ELUCP(I,J) : I nolu plak elemanın J nci köşesindeki
     düğüm numarası
1060 DIM X(ND),Y(ND),Z(ND),ELUCP(TPES,3),KPD(6,6),H(TPES),
     TRP(18,18)
1070 REM ETA : 79 eştliğindeki matris
1080 REM PI : Elemanları 100 eşitlikleri ile verilen I matrisi
1090 DIM ETA(9,9),PI(9,9),IET(9,9),KPU(9,9),KPE(18,18),
     KPETR(18,18),KPR(18,18)
1100 FOR I=1 TO ND:READ X(I):NEXT I
1110 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0,125,125,125,125,125,125,125,125
     ,225,225,225,225,225,225,225,225
1120 FOR I=1 TO ND:READ Y(I):NEXT I
1130 DATA 0,75,225,300,300,225,75,0,0,75,225,300,300,225,75,
     0,0,75,225,300,300,225,75,0
1140 FOR I=1 TO ND:READ Z(I):NEXT I
1150 DATA 150,150,150,150,0,0,0,0,150,150,150,150,0,0,0,0,
150,150,150,150,0,0,0,0
1160 FOR I=1 TO TPES:H(I)=4 :NEXT I
1170 FOR I=1 TO TPES:FOR J=1 TO 3:READ ELUCP(I,J):NEXT J
     :NEXT I
1180 DATA 9,1,2,9,2,10,17,9,10,17,10,18,18,10,11,18,11,19,19,
     12,20,19,11,12,11,4,12,11,3,4,16,8,7,16,7,15,24,16,15,
     24,15,23,23,15,14
1190 DATA 23,14,22,22,13,21,22,14,13,14,5,13,14,6,5,24,17,18
     ,24,18,23,23,18,19,23,19,22,22,19,20,22,20,21,12,4,5,12
     ,5,13,20,12,13,20,13,21
1200 REM NU : Poisson oranı
1210 E=210000! :NU=.3
1220  FOR MP=1 TO TPES
1230 PRINT "MP=";MP
1240 REM Plak elemanların transformasyon matrisi hesaplanacak
1250 IUC=ELUCP(MP,1):  JUC=ELUCP(MP,2): KUC=ELUCP(MP,3)
1260 LIJ=SQR((X(JUC)-X(IUC))^2+(Y(JUC)-Y(IUC))^2+(Z(JUC)-
     Z(IUC))^2)
1270 LAMOY=(X(JUC)-X(IUC))/LIJ: MUOY=(Y(JUC)-Y(IUC))/LIJ:NUOY
     =(Z(JUC)-Z(IUC))/LIJ
1280 L14=LAMOY*(X(KUC)-X(IUC))+MUOY*(Y(KUC)-Y(IUC))+NUOY*
     (Z(KUC)-Z(IUC))
1290 L43=SQR((X(KUC)-X(IUC))^2+(Y(KUC)-Y(IUC))^2+(Z(KUC)-
     Z(IUC))^2-L14^2)
1300 X4R=X(IUC)+LAMOY*L14: Y4R=Y(IUC)+MUOY*L14: Z4R=Z(IUC)+
     NUOY*L14
1310 LAMOX=(X(KUC)-X4R)/L43: MUOX=(Y(KUC)-Y4R)/L43:
     NUOX=(Z(KUC)-Z4R)/L43
1320 S1=MUOX*NUOY-MUOY*NUOX: S2=LAMOY*NUOX-LAMOX*NUOY:
     S3=LAMOX*MUOY-MUOX*LAMOY
1330 S4=SQ(S1^2+S2^2+S3^2): LAMOZ=S1/S4: MUOZ=S2/S4: NUOZ
     =S3/S4
1340 FOR II=1 TO 18:FOR JJ=1 TO 18:TRP(II,JJ)=0:NEXT JJ
     :NEXT II
```

```
1350 TRP(1,1)=LAMOX:TRP(1,2)=MUOX:TRP(1,3)=NUOX:TRP(2,1)=
     LAMOY:TRP(2,2)=MUOY:TRP(2,3)=NUOY:TRP(3,1)=LAMOZ:TRP(3,2)
     =MUOZ:TRP(3,3)=NUOZ
1360 JR=1
1370 FOR II=1 TO 5:JR=JR+3: TRP(JR,JR)=LAMOX:TRP(JR,JR+1)=
     MUOX:TRP(JRJR+2)=NUOX:NEXT II
1380 JS=2
1390 FOR II=1 TO 5: JS=JS+3:TRP(JS,JS-1)=LAMOY:TRP(JS,JS)=
     MUOY:TRP(JS,JS+1)=NUOY:NEXT II
1400 JT=3
1410 FOR II=1 TO 5:JT=JT+3:TRP(JT,JT-2)=LAMOZ:TRP(JT,JT-1)=
     MUOZ:TRP(JT,JT)=NUOZ:NEXT II
1420 X1=0 :Y1=0: X2=0: Y2=LIJ: X3=L43: Y3=L14
1430 X21=X2-X1: Y21=Y2-Y1: X31=X3-X1: Y31=Y3-Y1: X32=X3-X1:
     Y32=Y3-Y2
1440 ALAN=ABS((X2*Y3-Y2*X3-X1*Y3+X1*Y2+X3*Y1-X2*Y1)/2)
1450 CC=E*H(MP)/(4*ALAN*(1-NU^2)) :DD=E*H(MP)/(8*ALAN*(1+NU))
1460 FOR I=1 TO 6:FOR J=1 TO 6:KPD(I,J)=0:NEXT J:NEXT I
1470 KPD(1,1)=CC*Y32^2+DD*X32^2
1480 KPD(1,2)=-CC*NU*Y32*X32-DD*X32*Y32
1490 KPD(1,3)=-CC*Y32*Y31-DD*X32*X31
1500 KPD(1,4)=CC*NU*Y32*X31+DD*X32*Y31
1510 KPD(1,5)=CC*Y32*Y21+DD*X32*X21
1520 KPD(1,6)=-CC*NU*Y32*X21-DD*X32*Y21
1530 KPD(2,2)=CC*X32^2+DD*Y32^2
1540 KPD(2,3)=CC*NU*X32*Y31+DD*Y32*X31
1550 KPD(2,4)=-CC*X32*X31-DD*Y32*Y31
1560 KPD(2,5)=-CC*NU*X32*Y21-DD*Y32*X21
1570 KPD(2,6)=CC*X32*X21+DD*Y32*Y21
1580 KPD(3,3)=CC*Y31^2+DD*X31^2
1590 KPD(3,4)=-CC*NU*X31*Y31-DD*Y31*X31
1600 KPD(3,5)=-CC*Y31*Y21-DD*X31*X21
1610 KPD(3,6)=CC*NU*Y31*X21+DD*X31*Y21
1620 KPD(4,4)=CC*X31^2+DD*Y31^2
1630 KPD(4,5)=CC*NU*X31*Y21+DD*Y31*X21
1640 KPD(4,6)=-CC*X31*X21-DD*Y31*Y21
1650 KPD(5,5)=CC*Y21^2+DD*X21^2
1660 KPD(5,6)=-CC*NU*Y21*X21-DD*X21*Y21
1670 KPD(6,6)=CC*X21^2+DD*Y21^2
1680 FOR I=1 TO 6:FOR J=1 TO 6:KPD(J,I)=KPD(I,J):NEXT J
     :NEXT I
1690 REM ETA MATRISI HESAPLANACAK
1700 FOR I=1 TO 9:FOR J=1 TO 9:ETA(I,J)=0:NEXT J:NEXT I
1710 ETA(1,1)=1: ETA(2,3)=1: ETA(3,2)=-1: ETA(4,1)=1:ETA(4,3)
     =Y2:ETA(4,6)=Y2^2: ETA(4,9)=Y2^3: ETA(5,3)=1: ETA(5,6)=
     2*Y2:ETA(5,9)=3*Y2^2
1720 ETA(6,2)=-1: ETA(6,5)=-Y2: ETA(6,8)=-Y2^2: ETA(7,1)=1:
     ETA(7,2)=X3:  ETA(7,3)=Y3: ETA(7,4)=X3^2: ETA(7,5)=X3*Y3
     :ETA(7,6)=Y3^2: ETA(7,7)=X3^3
1730 ETA(7,8)=Y3*X3^2+Y3^2*X3: ETA(7,9)=Y3^3: ETA(8,3)=1:
     ETA(8,5)=X3: ETA(8,6)=2*Y3:ETA(8,8)=2*X3*Y3+X3^2:
     ETA(8,9)=3*Y3^2
1740 ETA(9,2)=-1: ETA(9,4)=-2*X3: ETA(9,5)=-Y3:ETA(9,7)=
     -3*X3^2: ETA(9,8)=-(Y3^2+2*X3*Y3)
```

```
1750 REM ETA'NIN INVERSI ALINACAK
1760 N=9
1770 FOR I=1 TO N: LP(I)=0: NEXT I
1780 FOR K=1 TO N
1790 CON=0
1800 FOR I=1 TO N
1810 IF LP(I)=1 THEN 1880
1820 FOR J=1 TO N
1830 QWE=SGN(LP(J)-1)+2
1840 ON QWE GOTO 1850,1870,2040
1850 IF ABS(CON)>=ABS(ETA(I,J)) THEN 1870
1860 IR=I: IC=J: CON=ETA(I,J)
1870 NEXT J
1880 NEXT I
1890 LP(IC)=LP(IC)+1
1900 IF IR=IC THEN 1920
1910 FOR I=1 TO N: CON=ETA(IR,I): ETA(IR,I)=ETA(IC,I):
     ETA(IC,I)=CON: NEXT I
1920 LQ(K,1)=IR: LQ(K,2)=IC: R(K)=ETA(IC,IC): ETA(IC,IC)=1
1930 FOR I=1 TO N: ETA(IC,I)=ETA(IC,I)/R(K): NEXT I
1940 FOR I=1 TO N: IF I=IC THEN 1960 ELSE CON=ETA(I,IC):
     ETA(I,IC)=0
1950 FOR J=1 TO N: ETA(I,J)=ETA(I,J)-ETA(IC,J)*CON: NEXT J
1960 NEXT I
1970 NEXT K
1980 FOR I=1 TO N
1990 J=N-I+1
2000 IF LQ(J,1)=LQ(J,2) THEN 2030
2010 IR=LQ(J,1): IC=LQ(J,2)
2020 FOR K=1 TO N: CON=ETA(K,IR):ETA(K,IR)=ETA(K,IC):ETA(K,IC)
     =CON:NEXT K
2030 NEXT I
2040 FOR I=1 TO 9:FOR J=1 TO 9:PI(I,J)=0:NEXT J:NEXT I
2050 C=E*H(MP)^3/(12*(1-NU^2))
2060 PI(4,4)=2*C*X3*Y2: PI(5,5)=C*(1-NU)*X3*Y2: PI(6,6)=
     2*C*X3*Y2: PI(7,7)=3*C*Y2*X3^3
2070 PI(8,8)=C*((3-2*NU)/3*Y2*X3^3+(3-2*NU)/3*X3*Y2*(Y2^2+Y2
     *Y3+Y3^2)+(2-NU)/3*X3^2*Y2*(Y2+2*Y3))
2080 PI(9,9)=3*C*X3*Y2*(Y2^2+Y2*Y3+Y3^2): PI(6,4)=2*C*NU*X3*Y
2090 PI(7,4)=2*C*Y2*X3^2: PI(7,6)=2*C*NU*Y2*X3^2
2100 PI(8,4)=4*C*(NU/6*Y2*X3^2+1/6*X3*Y2*(Y2+Y3)): PI(8,5)=
     2/3*C*(1-NU)*(Y2*X3^2+Y2*X3*(Y2+Y3))
2110 PI(8,6)=2/3*C*(Y2*X3^2+NU*X3*Y2*(Y2+Y3)): PI(8,7)=C*(NU
     *Y2*X3^3+1/2*X3^2*Y2*(Y2+2*Y3))
2120 PI(9,4)=2*C*NU*X3*Y2*(Y2+Y3)
2130 PI(9,6)=2*C*X3*Y2*(Y2+Y3): PI(9,7)=3/2*C*NU*Y2*X3^2*
     (Y2+2*Y3)
2140 PI(9,8)=C*(1/2*X3^2*Y2*(Y2+2*Y3)+NU*X3*Y2*(Y2^2+Y2*Y3+
     Y3^2))
2150 FOR I=1 TO 9:FOR J=1 TO 9: PI(I,J)=PI(J,I):NEXT J:NEXT I
2160 REM PI ILE ETA'NIN INVERSININ CARPIMI=<IET>
2170 FOR I=1 TO 9:FOR J=1 TO 9:IET(I,J)=0
2180 FOR K=1 TO 9:IET(I,J)=IET(I,J)+PI(I,K)*ETA(K,J):NEXT K:
     NEXT J:NEXT I
```

```
2190 REM ETA'NIN INVERSININ TRANSPOZESI ILE IET'NIN CARPIMI=
     <KPU>
2200 FOR J=1 TO 9: FOR L=1 TO 9:KPU(J,L)=0:FOR K=1 TO 9:
     KPU(J,L)=KPU(J,L)+ETA(K,J)*IET(K,L):NEXT K:NEXT L:NEXT J
2210 REM ELEMAN KOORD.SISTEMINDE KATILIK MATRISI KPE'NIN ELDE
     EDILMESI
2220 FOR I=1 TO 18:FOR J=1 TO 18:KPE(I,J)=0:NEXT J:NEXT I
2230 FOR I=1 TO 2:FOR J=1 TO 2:KPE(I,J)=KPD(I,J):NEXT J:NEXT I
2240 FOR I=3 TO 4:I4=I+4:FOR J=1 TO 2:KPE(I4,J)=KPD(I,J):
     NEXT J:NEXT I
2250 FOR I=3 TO 4:I4=I+4:FOR J=3 TO 4:J4=J+4:KPE(I4,J4)=
     KPD(I,J):NEXT J:NEXT I
2260 FOR I=5 TO 6:I8=I+8:FOR J=1 TO 2 :KPE(I8,J)=KPD(I,J):
     NEXT J:NEXT I
2270 KPE(13,7)=KPD(5,3):KPE(13,8)=KPD(5,4):KPE(14,7)=KPD(6,3)
     :KPE(14,8)=KPD(6,4)
2280 KPE(13,13)=KPD(5,5):KPE(13,14)=KPD(5,6):KPE(14,13)=KPD
     (6,5):KPE(14,14)=KPD(6,6)
2290 FOR I=1 TO 3:    I2=I+2:FOR J=1 TO 3:J2=J+2:KPE(I2,J2)=
     KPU(I,J):NEXT J:NEXT I
2300 FOR I=4 TO 6:I5=I+5:FOR J=4 TO 6:J5=J+5:KPE(I5,J5)=KPU
     (I,J):NEXT J:NEXT I
2310 FOR I=7 TO 9:I8=I+8:FOR J=7 TO 9:J8=J+8:KPE(I8,J8)=KPU
     (I,J):NEXT J:NEXT I
2320 FOR I=4 TO 6:I5=I+5:FOR J=1 TO 3:J2=J+2:KPE(I5,J2)=KPU
     (I,J):NEXT J:NEXT I
2330 FOR I=7 TO 9:I8=I+8:FOR J=1 TO 3:J2=J+2:KPE(I8,J2)=KPU
     (I,J):NEXT J:NEXT I
2340 FOR I=7 TO 9:I8=I+8:FOR J=4 TO 6:J5=J+5:KPE(I8,J5)=KPU
     (I,J):NEXT J:NEXT I
2350 FOR I=1 TO 18:FOR J=1 TO 18:KPE(I.J)=KPE(J,I):NEXT J:
     NEXT I
2360 REM REFERANS SISTEMDE KATILIK MATRISI KPR'NIN ELDE
     EDILMESI
2370 FOR I=1 TO 18:FOR J=1 TO 18:KPETR(I,J)=0:FOR K=1 TO 18:
     KPETR(I,J)=KPETR(I,J)+KPE(I,K)*TRP(K,J):NEXT K:NEXT J:NEXT I
2380 FOR I=1 TO 18:FOR J=1 TO 18:KPR(I,J)=0:FOR K=1 TO 18:
     KPR(I,J)=KPR(I,J)+TRP(K,I)*KPETR(K,J):NEXT K:NEXT J:NEXT I
2390 MP$=STR$(MP):IF LEN(MP$)=2 THEN MP$=RIGHT$(MP$,1) ELSE
     MP$=RIGHT$(MP$,2)
2400 OPEN "PL"+MP$+".DAT" FOR OUTPUT AS #1
2410 WRITE #1,IUC,JUC,KUC
2420 FOR I=1 TO 18: FOR J=1 TO 18:WRITE #1,KPR(I,J):NEXT J:
     NEXT I
2430 CLOSE #1
2440 NEXT MP
```

EK.5 Sistem Katılık Matrisini Teşkil Eden Bilgisayar Programı (Program 3)

```
100 CLS
110 REM ND : Toplam düğüm sayısı
120 REM TPES : Toplam plak eleman sayısı
130 REM TCES : Toplam çubuk eleman sayısı
140 ND=24  :TPES=30:TCES=22
150 DIM KPR(18,18),YARD(18),KCR(12,12),YAR(12)
160 NTSD=6*ND
170 REM KGENEL.DAT : Sistem katılık matrisi
180 OPEN "KGENEL.DAT" AS #2 LEN=4
190 FIELD #2,4 AS KSIKJK$
200 FOR I=1 TO NTSD*NTSD
210 LSET KSIKJK$=MKS$(0)
220 PUT #2,I
230 NEXT I
240 FOR M=1 TO TCES
250 PRINT"M=";M
260 M$=STR$(M)
270 IF LEN(M$)=2 THEN M$=RIGHT$(M$,1) ELSE M$=RIGHT$(M$,2)
280 OPEN "CB"+M$+".DA" FOR INPUT AS #1
290 INPUT #1,UC1,UC2
300 FOR I=1 TO 12:FOR J=1 TO 12:INPUT #1,KCR(I,J):NEXT J:NEXT I
310 CLOSE #1
320 FOR I=1 TO 6:YAR(I)=6*UC1-6+I:YAR(I+6)=6*UC2-6+I:NEXT I
330 FOR I=1 TO 12:FOR J=1 TO 12:IK=YAR(I):JK=YAR(J)
340 GET #2,NTSD*(IK-1)+JK
350 KSIKJK=CVS(KSIKJK$)
360 KSIKJK=KSIKJK+KCR(I,J)
370 LSET KSIKJK$=MKS$(KSIKJK)
380 PUT #2,NTSD*(IK-1)+JK
390 NEXT J:NEXT I
400 NEXT M
410 FOR MP=1 TO TPES
420 PRINT"MP=";MP
430 MP$=STR$(MP)
440 IF LEN(MP$)=2 THEN MP$=RIGHT$(MP$,1) ELSE MP$=RIGHT$(MP$,2)
450 OPEN "PL"+MP$+".DAT" FOR INPUT AS #1
460 INPUT #1,IUC,JUC,KUC
470 FOR I=1 TO 18:FOR J=1 TO 18:INPUT #1,KPR(I,J):NEXT J:NEXT I
480 CLOSE #1
490 FOR IKK=1 TO 6:YARD(IKK)=6*IUC-6+IKK: YARD(IKK+6)=6*JUC-6
    +IKK: YARD(IKK+12)=6*KUC-6+IKK: NEXT IKK
500 FOR II=1 TO 18: FOR JJ=1 TO 18: IK=YARD(II):JK=YARD(JJ)
510 GET #2,NTSD*(IK-1)+JK
520 KSIKJK=CVS(KSIKJK$)
530 KSIKJK=KSIKJK+KPR(II,JJ)
540 LSET KSIKJK$=MKS$(KSIKJK)
550 PUT #2,NTSD*(IK-1)+JK
560 NEXT JJ:NEXT II
570 NEXT MP
580 CLOSE #2
```

EK.6 Sistem Eşitliğini Çözen Bilgisayar Programı

```
1000 CLS
1010 REM NTSD : Toplam serbestlik derecesi sayısı
1020 REM ENSAYI : Engellenmiş serbestlik derecesi sayısı
1030 REM NYUK : Yük sayısı
1040 NTSD=144:ENSAYI=24:NYUK=2
1050 YENIN=NTSD-ENSAYI
1060 REM P(I) : Dış yük vektörü
1070 REM U(I) : Yer değiştirme vektörü
1080 REM YU(I) : Engellenmiş serbestlik derecelerini kapsa
     mayan yer değiştirme vektörü
1090 REM YENIP(I) : Dış yük vektörü (mesnet reaksiyonları
     hariç)
1100 REM ESD(I) : E
1110 DIM P(NTSD),U(NTSD),INDEX(YENIN),YENIP(YENIN),
     ESD(NTSD),YU(YENIN)
1120 FOR I=1 TO NTSD :P(I)=0:NEXT I
1130 FOR I=1 TO NYUK :READ K,P(K):NEXT I
1140 DATA 20,-5000,26,-5000
1150 FOR I=1 TO NTSD :ESD(I)=1:NEXT I
1160 FOR I=1 TO ENSAYI:READ AK:ESD(AK)=0:NEXT I : REM Engel
     lenmiş serbestlik derecelerinde ESD(I)=0
1170DATA 1,6,7,12,13,18,19,21,22,23,24,25,27,28,29,30,31,36
     ,37,42,43,48,98,140
1180 K=0
1190 REM KGENEL.DAT : Sistem katılık matrisi
1200 REM YKGENEL.DAT : İndirgenmiş sistem katılık matrisi
1210 OPEN "KGENEL.DAT" AS #2 LEN=4
1220 FIELD #2,4 AS KSIJ$
1230 OPEN "YKGENEL.DAT" AS #1 LEN=4
1240 FIELD #1,4 AS YKSKL$
1250 FOR I=1 TO NTSD :IF ESD(I)=0 THEN 1340
1260 K=K+1:L=0
1270 FOR J=1 TO NTSD:IF ESD(J)=0 THEN 1330
1280 GET #2,NTSD*(I-1)+J
1290 KSIJ=CVS(KSIJ$)
1300 L=L+1:YKSKL=KSIJ
1310 LSET YKSKL$=MKS$(YKSKL)
1320 PUT #1,YENIN*(K-1)+L
1330 NEXT J
1340 NEXT I
1350 FOR I=1 TO YENIN:GET #1,YENIN*(I-1)+I:IF CVS(YKSKL$)=0
     THEN LSET YKSKL$=MKS$(1):PUT #1,YENIN*(I-1)+I
1360 NEXT
1380 K=0:FOR I=1 TO NTSD:IF ESD(I)=0 THEN 1400
1390 K=K+1:YENIP(K)=P(I):INDEX(K)=I
1400 NEXT I
1410 IMAX=YENIN-1
1420 FOR I=1 TO IMAX
1430 J1=I+1
1440 FOR J=J1 TO YENIN
1450 GET #1,YENIN*(J-1)+I
1460 YKSJI=CVS(YKSKL$)
1470 IF YKSJI=0 THEN 1610
1480 FOR K=J1 TO YENIN
```

```
1490 GET #1,YENIN*(J-1)+K
1500 YKSJK=CVS(YKSKL$)
1510 GET #1,YENIN*(I-1)+K
1520 YKSIK=CVS(YKSKL$)
1530 GET #1,YENIN*(J-1)+I
1540 YKSJI=CVS(YKSKL$)
1550 GET #1,YENIN*(I-1)+I
1560 YKSII=CVS(YKSKL$)
1570 YKSJK=YKSJK-YKSIK*YKSJI/YKSII
1580 LSET YKSKL$=MKS$(YKSJK)
1590 PUT #1,YENIN*(J-1)+K
1600 NEXT K
1610 GET #1,YENIN*(J-1)+I
1620 YKSJI=CVS(YKSKL$)
1630 GET #1,YENIN*(I-1)+I
1640 YKSII=CVS(YKSKL$)
1650 YENIP(J)=YENIP(J)-YENIP(I)*YKSJI/YKSII
1660 NEXT J
1670 PRINT "I=";I
1680 NEXT I
1690 GET #1,YENIN*(YENIN-1)+YENIN
1700 YKSYENYEN=CVS(YKSKL$)
710 YU(YENIN)=YENIP(YENIN)/YKSYENYEN
1720 FOR I=1 TO IMAX
1730 J1=YENIN-I+1
1740 FOR K=J1 TO YENIN
1750 GET #1,YENIN*(YENIN-I-1)+K
1760 YKSYENIK=CVS(YKSKL$)
1770 YENIP(YENIN-I)=YENIP(YENIN-I)-YU(K)*YKSYENIK
1780 NEXT K
1790 GET #1,YENIN*(YENIN-I-1)+YENIN-I
1800 YKSYENINI=CVS(YKSKL$)
1810 YU(YENIN-I)=YENIP(YENIN-I)/YKSYENINI
1820 NEXT I
1830 CLS
1840 FOR I=1 TO YENIN
1850 PRINT "YENIU("I")=";YU(I)
1860 NEXT I
1870 FOR I=1 TO NTSD   :U(I)=0:NEXT I
1880 FOR I=1 TO YENIN  :U(INDEX(I))=YU(I):NEXT I
1890 CLOSE
1900 OPEN "A:YERDEGIS.DAT" FOR OUTPUT AS #1
1910 FOR I=1 TO NTSD   :PRINT"ESDEP("I")=";U(I);:PRINT #1,
     U(I):NEXT I
1920 CLOSE
1930 LPRINT CHR$(27);"!";CHR$( 1);
1940 LPRINT CHR$(27);"3";CHR$(35)
1950 OPEN "YERDEGIS.DAT" FOR INPUT AS #1
1960 DIM A(144)
1970 FOR I=1 TO 144
1980 INPUT #1,A
1990 A(I)=A
2000 NEXT I
2010 CLOSE
```

```
2020 LPRINT "DÜĞÜM   X-YÖNÜNDE  Y-YÖNÜNDE  Z-YÖNÜNDE  X-ETRAF
     IN- Y-ETRAFIN- Z-ETRAFIN-"
2030 LPRINT "NUMA-    ÖTELEME    ÖTELEME    ÖTELEME    DA DÖN
     ME   DA DÖNME   DA DÖNME  "
2040 LPRINT "RASI      (mm)       (mm)       (mm)      (radya
     n)   (radyan)   (radyan) "
2050 LPRINT "————— —————————— —————————— —————————— ————————
     —— —————————— ——————————"
2060 FOR J=0 TO 23
2070 LPRINT USING " ##   ";J+1;
2080 FOR I=1 TO 6
2090 LPRINT USING " #.###^^^^ " ;A(6*J+I);
2100 NEXT I:LPRINT
2110 NEXT
```