12335

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STURM - LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN ÖZDEĞERLERİNİN VE SIFIRLARININ SAYISININ ASİMTOTLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan
Ahmet CİHANGİR

Danışman
Doçent. Ahmet Hilmi BERKSOY

KONYA — 1990

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Bu çalışmada Sturm-Liouville problemlerinin çözümlerinin sıfırlarının sayısı ve özdeğerlerinin asimptotik durumları için bir yaklaşım verilmiştir.Çalışma üç bölümden oluşmaktadır.Birinci bölümde konuyla ilgili temel kavramlar verilmiştir.İkinci bölümde Sturm-Liouville denklemi ve sınır şartlarından oluşan Sturm-Liouville probleminin çözümleriyle,bu çözümlerin fiziksel anlamları,Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerinin durumlarıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar incelenmiştir.Yine bu bölümde Prüfer dönüşümleri kullanılarak ikinci mertebeden Sturm-Liouville denklemine denk birinci mertebeden iki diferensiyel denklemden oluşan bir sistem bulundu ve bu dönüşümlerden faydalanarak özfonksiyonların sıfırları karşılaştırıldı.

Çalışmanın esası ise üçüncü bölümde verilmiştir.Bu bölümde Sturm-Liouville probleminin çözümlerinin sıfırlarının sayısı ile özdeğerlerin bulunması için bir yaklaşım verilmiş ve bu özdeğerlerin bir polinom biçiminde olması durumunda da benzer yaklaşımların geçerli olduğu gösterildi.

Bu çalışmamda danışmanlığımı üstlenen değerli hocam Sayın Doç.Dr.Ahmet Hilmi BERKSOY'a;çalışmalarım esnasında yardımlarını esirgemeyen kıymetli hocam sayın Prof.Dr.Ali SİNAN'a,sayın Yrd.Doç.Dr.Ahmet Zemci ÖZÇELİK'e teşekkür eder saygılar sunarım.

Ahmet CİHANGİR

NOTASYONLAR

sup	: Supremum,en küçük üst sınır
inf	: İnfumum,en büyük alt sınır
$\|x\|$	: x -in normu
$|x|$	: x -in mutlak değeri
$\sim$	: denk,eş
D	: $\frac{d}{dx}$ operatörü
Σ	: Toplam operatörü
C^n	: n -inci türeve haiz sürekli fonksiyonlar uzayı

I.BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

1.1. Temel Kavramlar

Bu bölüm ikinci ve üçüncü bölümde kullanılacak olan temel tanım ve teoremlerden oluşmaktadır.Yani bu bölümde diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı,tekliği ve Lipschitz şartı ile,süreklilik,karşılaştırma ve ayırma teoremleri verilmiştir.

<u>Tanım 1.1.</u>Bir D bölgesinde $F(x,y)$ fonksiyonu verilsin. Bu bölgede apsisleri aynı olan (x,y) ve (x,z) nokta çiftleri için,

$$|F(x,y) - F(x,z)| \leq L|y-z| \qquad (1.1)$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir L sabiti bulunabiliyorsa,$F(x,y)$ fonksiyonuna D bölgesinde Lipschitz şartını sağlıyor denir ve L ye de Lipschitz sabiti denir.

<u>Teorem 1.1.</u>$F(x,y)$ fonksiyonu konveks-kapalı bir D bölgesinde sürekli ve türevlenebilir olsun.O zaman,

$$L = \sup_D \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right|$$

ile $F(x,y)$ fonksiyonu Lipschitz şartını sağlar.

<u>İspat:</u>Verilen D bölgesi konveks olduğundan (x,y) ile (x,z)-in sınırladığı dikdörtgen bölgeyi kapsar.Bu bölgede y ile z arasındaki bazı η-ler için η-nün bir fonksiyonu olarak düşünülen $F(x,\eta)$ fonksiyonuna ortalama değer teoremi uygulanırsa,

$$|F(x,y) - F(x,z)| = |y-z| \left| \frac{\partial F(x,\eta)}{\partial y} \right|$$

elde edilir.(1.1) eşitsizliğinden dolayı, $\sup_D \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| = L$ dersek o zaman,

$$|F(x,y) - F(x,z)| \leqslant |y-z|L$$

olur ki bu ise Lipschitz şartının y-ye göre sağlanması demektir.

<u>Teorem 1.2.</u>K bir sabit ve σ türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere,

$$\sigma'(x) \leqslant K\sigma(x) \quad , \quad a \leqslant x \leqslant b \qquad (1.2)$$

eşitsizliği sağlansın.O zaman $a \leqslant x \leqslant b$ için $\sigma(x)$ fonksiyonu,

$$\sigma(x) \leqslant \sigma(a)e^{K(x-a)} \qquad (1.3)$$

eşitsizliğini sağlar.

<u>İspat:</u>(1.2) ifadesinin her iki yanını e^{-Kx} ile çarpar ve gerekli düzenlemeyi yaparsak,

$$0 \geqslant e^{-Kx}\left[\sigma'(x) - K\sigma(x)\right] = \frac{d}{dx}\left\{\sigma(x)e^{-Kx}\right\}$$

olur ki pozitif olmayan bu ifade $\sigma(x)e^{-Kx}$ fonksiyonunun türevidir ve $a \leqslant x \leqslant b$ aralığında artmaz.Bundan dolayı,

$$\sigma(x)e^{-Kx} \leqslant \sigma(a)e^{-Ka} \Rightarrow \sigma(x) \leqslant \sigma(a)e^{K(x-a)}$$

olur ve ispat biter.

<u>Sonuç 1.2.1.</u>Eğer yukarıdaki teoremde $\sigma(a)=0$ ve $\sigma(x) \geqslant 0$ ise o zaman $\sigma(x) \equiv 0$ olur.

<u>İspat:</u>Teorem 1.2. nin ispatından dolayı açıktır.

<u>Teorem 1.3</u> (Teklik teoremi-1):Birinci mertebe $y'=F(x,y)$ diferensiyel denkleminin düzlemsel bir bölgenin bir noktasından geçen ve (1.1) Lipschitz şartını sağlayan bir ve yalnız bir çözümü vardır.

<u>İspat:</u>$y=f(x)$ ve $y=g(x)$ fonksiyonları $f(a)=g(a)$ başlangıç şartını sağlayan, $y'=F(x,y)$ diferensiyel denkleminin iki çözümü olsun.O zaman aynı Lipschitz sabiti için

$f(x)$ ve $g(x)$-in temsil ettiği eğrilerin aynı olduğunu göstermeliyiz. Bunun için,

$$\sigma(x)=\left[f(x) - g(x)\right]^2 \geqslant 0$$

biçiminde negatif olmayan bir $\sigma(x)$ fonksiyonu seçelim. Bu fonksiyonun türevini alırsak,

$$\begin{aligned}\sigma'(x) &= 2\left[f(x) - g(x)\right]\left[f'(x) - g'(x)\right] \\ &= 2\left[f(x) - g(x)\right]\left[F(x,f(x)) - F(x,g(x))\right]\end{aligned}$$

olur. Burada (1.1) Lipschitz şartı kullanılırsa,

$$\sigma'(x) \leqslant 2\left|f(x) - g(x)\right|\left|f'(x) - g'(x)\right| \leqslant 2L\,\sigma(x)$$

eşitsizliği elde edilir. Hipotezden dolayı $\sigma(a)=0$ olur ve (1.3) eşitsizliğinden $\sigma(x)$ negatif olamaz. Buradan $x>a$ için $\sigma(x)\equiv 0$ bulunur. Benzer düşünceyle $x<a$ için x yerine $t=2a-x$ yazar ve t-ye göre türev alırsak,

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{d\sigma}{dx} \leqslant 2L\,\sigma(x)$$

buluruz. Buradan da $\sigma(x)\equiv 0$ bulunur ki bu ise $f(x)\equiv g(x)$ olması demektir. Aranan sonuç da budur.

<u>Teorem 1.4</u> (Süreklilik Teoremi): Verilen bir a noktası ve c değişkeni için, $y'=F(x,y)$ diferensiyel denkleminin $f(a)=c$ başlangıç şartını sağlayan çözümü $f(x,y)$ olsun. Sabit bir x noktasında $f(x,c)$ belirli bir değer almak üzere $f(x,c)$, teorem 1.3.den dolayı c-ye bağlı olarak süreklidir.

<u>İspat:</u> Teorem 1.3. ün ispatından $\sigma'(x)\leqslant 2L\,\sigma(x)$ ve teorem 1.2.den dolayı $\sigma(x)\leqslant \sigma(a)e^{2L|x-a|}$ dır. $\sigma(x)$-in tanımından dolayı ifadenin her iki yanının karekökü alınırsa,

$$\left|f(x) - g(x)\right| \leqslant e^{L|x-a|}\left|f(a) - g(a)\right| \qquad (1.4)$$

bulunur ki bu $f(x,c)$-nin sürekli olması demektir. Ayrıca

(1.4) ifadesi,

$$\left|f(x,c) - f(x,c_1)\right| \leq \exp(L|x-a|)\,|c-c_1|$$

biçiminde de yazılabilir.

Teorem 1.5. F, fonksiyonu $x \geq a$ için Lipschitz şartını sağlasın. Eğer f fonksiyonu $x \geq a$ için $f'(x) \leq F(x,f(x))$ eşitsizliğini sağlıyor ve g fonksiyonu da $f(a) = g(a)$ başlangıç şartını sağlayacak biçimde $y' = F(x,y)$ diferensiyel denkleminin bir çözümü oluyorsa, o zaman $x \geq a$ için $f(x) \leq g(x)$ olur.

İspat: Farzedelim ki verilen aralıkdaki bir x_1 için $f(x_1) > g(x_1)$ olsun ve $f(x) \leq g(x)$ olacak biçimde $a \leq x \leq x_1$ aralığındaki en büyük x , x_o olarak tanımlansın. Buradan $f(x_o) = g(x_o)$ olur. $\sigma(x)$ fonksiyonu $\sigma(x) = f(x) - g(x)$ olarak tanımlanırsa $x_o \leq x \leq x_1$ için $\sigma(x) \geq 0$ olur ve yine $x_o \leq x \leq x_1$ için,

$$\sigma'(x) = f'(x) - g'(x) \leq F(x,f(x)) - F(x,g(x))$$
$$L(f(x) - g(x)) = L\sigma(x)$$

bulunur. Burada L, f fonksiyonu için Lipschitz sabitidir. Yani $x_o \leq x \leq x_1$ aralığında $K = L$ için σ fonksiyonu teorem 2-nin hipotezini sağlar. Buradan $\sigma(x) \leq \sigma(x_o)e^{L(x-x_o)} = 0$ olur. σ negatif olamayacağından özdeş olarak sıfırdır. Fakat bu $f(x_1) \geq g(x_1)$ kabulümüzle çelişir. O halde verilen aralıkdaki her x için $f(x) \leq g(x)$ olur.

Teorem 1.6 (Karşılaştırma Teoremi): Sırasıyla f ve g fonksiyonları $f(a) = g(a)$ başlangıç şartını sağlayacak biçimde,

$$y' = F(x,y) \quad , \quad z' = G(x,z) \tag{1.6}$$

diferensiyel denklemlerinin çözümleri olarak verilsin.

Ayrıca F yada G Lipschitz şartını sağlasın ve verilen bölgedeki her x,y için $F(x,y) \leq G(x,y)$ olsun. O zaman $x > a$ için $f(x) \leq g(x)$ olur.

İspat: G Lipschitz şartını sağlasın. $y' = F(x,y) \leq G(x,y)$ olduğundan F yerine G alındığında da f ve g fonksiyonları teorem 1.3.deki şartları sağlar. O zaman $x \geqslant a$ için $f(x) \leq g(x)$ eşitsizliği gerçeklenir.

Eğer F Lipschitz şartını sağlıyorsa, o zaman $u = -f(x)$ ve $v = -g(x)$ fonksiyonları $u' = -F(x,-u)$ ve $v' = -G(x,-v) \leq -F(x,-u)$ diferensiyel denklemlerini sağlar. Şimdi u,v ve $H(u,v) = -F(x,-v)$ fonksiyonlarına $x \geqslant a$ için $v(x) \leq u(x)$ veya $g(x) \geqslant f(x)$ eşitsizlikleri geçerli olmak üzere teorem 1.3.ü uygularsak ispat biter.

Sonuç 1.2. Teorem 1.3.de ya $x_1 > a$ için $f(x_1) < g(x_1)$ olur, yada $a \leq x \leq x_1$ için $f(x) \equiv g(x)$ dır.

İspat: Karşılaştırma teoremindeki $f(x) \leq g(x)$ eşitsizliği çoğu kez tam bir eşitsizlikle değiştirilebilir.

f ve g $a \leq x \leq x_1$ için ya özdeş olarak eşittir, yada (a, x_1) aralığındaki diğer bir x_0 değeri için $f(x_0) \leq g(x_0)$ olur. Karşılaştırma teoreminden dolayı $\sigma_1(x) = g(x) - f(x)$ ifadesi $a \leq x \leq x_1$ için negatif olamaz ve $\sigma_1(x_0) > 0$ dır. Teorem 1.6. nın ispatında,

$$\sigma_1'(x) = G(x,g(x)) - F(x,f(x))$$
$$\geqslant G(x,g(x)) - G(x,f(x)) \geqslant -L\,\sigma_1(x)$$

olduğunu gösterdik. Burada verilen $e^{Lx}\sigma(x)$ fonksiyonu $a \leq x \leq x_1$ aralığında azalmayan olduğundan

$$[e^{Lx}\,\sigma_1(x)]' = e^{Lx}\,[\sigma_1' + L\,\sigma_1] \geqslant 0$$

olur. Sonuç olarak,

$$\sigma_1(x) \geqslant \sigma_1(x_o)e^{-L(x-x_o)} > 0$$

eşitsizliği elde edilir.

Tanım 1.2. Verilen bir I aralığında $P_i(x)$ fonksiyonları $(i=0,1,2,3)$ reel değerli ve sürekli olmak üzere,

$$P_o(x)\frac{d^2u}{dx^2} + P_1(x)\frac{du}{dx} + P_2(x)u = P_3(x) \qquad (1.7)$$

diferensiyel denklemine, ikinci mertebe lineer diferensiyel denklem denir. Yukarıdaki (1.7) diferensiyel denkleminde,

$$p=\frac{P_1}{P_o} \quad , \quad q=\frac{P_2}{P_o} \ , \ r=\frac{P_3}{P_o}$$

yazarsak,

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = r(x) \qquad (1.8)$$

biçimine dönüşür.

Tanım 1.3. (1.8) diferensiyel denkleminin p,q,r katsayı fonksiyonları x-ekseni üzerindeki bir I aralığında sürekli ise, o zaman (1.8) diferensiyel denklemine I aralığında REGÜLER'dir denir. Ayrıca (1.8) diferensiyel denkleminin $u=f(x)$ gibi her hangi bir çözümü, iki kere türevlenebilir bir fonksiyondur. Yani $u=f(x)$ fonksiyonu, (1.8) diferensiyel denklemini I aralığının her noktasında sağlar.

Teorem 1.7 (teklik Teoremi-2): Eğer (1.8) diferensiyel denkleminin $p(x)$ ve $q(x)$ katsayı-fonksiyonları sürekli ise o zaman $f(a)=c_o$ ve $f'(a)=c_1$ başlangıç şartlarını sağlayacak biçimde (1.8) diferensiyel denkleminin bir tek çözümü vardır.

İspat: (1.8) diferensiyel denkleminin her hangi iki çözümü v ve w olsun. $v-w=u$ farkı da $r(x)=0$ olduğunda (1.8) diferensiyel denkleminin $x=a$ için $u=u'=0$ başlangıç şartını sağlayan bir çözümü olsun.Şimdide negatif olmayan $\sigma(x)=u^2+u'^2$ fonksiyonunu düşünelim. $\sigma(0)=0$ olarak tanımlansın. $r(x)\equiv 0$ olduğundan türevini alırsak,

$$\sigma'(x)=2u'(u+u'')=2u'(u-p(x)u'-q(x)u)$$
$$=-2p(x)u'^2+2(1-q(x))uu'$$

buluruz.Mademki $(u\mp u')^2\geqslant 0$, $|2uu'|\leqslant u^2+u'^2$ dir.O zaman burada, $2(1-q(x))uu'\leqslant(1+|q(x)|)(u^2+u'^2)$ olacağından, $\sigma'(x)\leqslant[1+|q(x)|]u^2+[1+|q(x)|+|2p(x)|]u'^2$ olur. Burada $[a,b]$ sonlu kapalı aralığında,

$K=1+\max(|q(x)|+|2p(x)|)$ değeri maksimum değer olarak alınır ve $\sigma'(x)\leqslant K\,\sigma(x)$, $K<+\infty$ olur.Teorem 1.2.den dolayı a-yı kapsayan herhangi bir aralık üzerindeki bütün x-ler için $\sigma(x)\equiv 0$ olur.Böylece $u=v-w$ ifadesi (1.8) diferensiyel denkleminin $u\equiv 0$ biçiminde bir çözümdür.Buradan da $v\equiv w$ bulunur.

<u>Teorem 1.8.</u> f ve g fonksiyonları,

$$u''+p(x)u'+q(x)u=0\ ,\ p,q\in C \tag{1.9}$$

ikinci-mertebe homojen lineer diferensiyel denkleminin iki çözümü olsun.Ayrıca bazı $x=x_o$ lar için $(f(x_o),f'(x_o))$ ve $(g(x_o),g'(x_o))$ lineer bağımsız vektörleri verilsin.O zaman (1.9) diferensiyel denkleminin her çözümü,$h(x)=cf(x)+dg(x)$ biçiminde $f(x)$ ve $g(x)$-in Lineer bir kombinasyonudur.Burada verilen c ve d katsayıları keyfi sabitlerdir.

<u>İspat:</u>$h(x)$ fonksiyonu (1.9) diferensiyel denkleminin bir çözümü olsun.O zaman verilen x_o noktasında,

$$cf(x_o)+dg(x_o)=h(x_o)\ ,\ cf'(x_o)+dg'(x_o)=h'(x_o)$$

eşitsizlikleri sağlanacak biçimde c,d sabitleri bulunabilir. Cramer Kuralından dolayı c ve d sabitleri,

$$c=(h_og_o'-g_oh_o')/(f_og_o'-g_of_o')\ ,\ d=(f_oh_o'-h_of_o')/(f_og_o'-g_of_o')$$

biçiminde verilir. Yukarıdaki ifadelerde $f_o=f(x_o), f_o'=f'(x_o)$ biçiminde kısaltmalar kullanıldı. Bundan dolayı c ve d sabitlerine bağlı olarak tanımlanan $u(x)=h(x)-cf(x)-dg(x)$ fonksiyonu $u(x_o)=u'(x_o)=0$ başlangıç şartları altında (1.9) homojen lineer diferensiyel denklemini sağlar. Teklik teoreminden dolayı, u(x) fonksiyonu, homojen lineer (1.9) diferensiyel denklemini ancak $u(x)\equiv 0$ olması durumunda sağlar ki bu ise $h(x)=cf(x)+dg(x)$ olması demektir. Böylece homojen lineer (1.9) diferensiyel denkleminin herbir çözümünün f ve g gibi iki fonksiyonun lineer kombinasyonu biçiminde verildiği gösterilmiş olur.

<u>Teorem 1.9</u> (Sturm Ayırma Teoremi): Eğer f(x) ve g(x) fonksiyonları (1.9) diferensiyel denkleminin lineer bağımsız iki çözümü ise, o zaman f(x)-in bir sıfırı, g(x)-in ardışık iki sıfırı arasındadır, aynı şekilde g(x)-in bir sıfırıda f(x)-in ardışık iki sıfırı arasındadır. Yani f(x) ve g(x) in sıfırları ardışıktır.

<u>İspat:</u> Eğer $x=x_i$ noktasında g(x) sıfır oluyorsa o zaman

$$W(f,g;x_i)=f(x_i)g'(x_i)\neq 0$$

olur. Çünkü f ve g lineer bağımsızdır. Buradan $g(x_i)=0$ için $f(x_i)\neq 0$ ve $g'(x_i)\neq 0$ olur. Eğer x_1 ve x_2 g(x)-in ardışık sıfırları ise, o zaman $g'(x_1), g'(x_2), f(x_1)$ ve $f(x_2)$ sıfırdan farklı olur. Ayrıca sıfırdan farklı olan $g'(x_1)$ ve $g'(x_2)$

aynı işaretli olamaz.Eğer $g(x)$ fonksiyonu $x=x_1$ noktasında artıyorsa,$x=x_2$ noktasında azalmalıdır ve terside doğrudur. Yine $W(f,g;x)$ ifadesi daima bir tek işaret aldığından $f(x_1)$ ve $f(x_2)$-de zıt işaretli olmalıdır.Böylece x_1 ile x_2 noktaları arasındaki bir noktada $f(x)$ sıfıra eşit olmalıdır.

Örneğin,$u''+k^2u=0$ trigonometrik diferensiyel denklemine yukarıdaki teorem uygulanırsa,bu denklemin çözümleri olan sinkx ve coskx'in sıfırlarının sıralı olduğu görülür.Çünkü yalnızca bu fonksiyonlar aynı homojen lineer diferensiyel denklemin lineer bağımsız iki çözümüdür.

<u>Teorem 1.10</u> (Sturm Karşılaştırma Teoremi):Sırasıyla $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $u''+p(x)u=0$, $v''+q(x)v=0$ diferensiyel denklemlerinin trivial olmayan çözümleri ve $p(x)\geqslant q(x)$ olsun.O zaman $p(x)\equiv q(x)$ ve $f(x)$,$g(x)$-in bir katı olmadıkça $f(x)$-in en az bir sıfırı $g(x)$-in ardışık iki sıfırı arasındadır.

<u>İspat</u>:$g(x)$-in ardışık iki sıfırı x_1 ve x_2 olarak verilsin.Öyle ki $g(x_1)=g(x_2)=0$ olsun.$f(x)$ $x_1<x<x_2$ aralığında sıfır olmasın.Eğer f ve g yerine,onların negatifi alınması gerekiyorsa,o zaman $x_1<x<x_2$ aralığındaki f ve g çözümleri pozitif olarak bulunur.Böylece,

$$W(f,g;x_1)=f(x_1)g'(x_1)\geqslant 0$$

ve

$$W(f,g;x_2)=f(x_2)g'(x_2)\leqslant 0$$

olarak bulunacaktır.Öteyandan eğer $f>0,g>0$ ve $x_1<x<x_2$ aralığında $p>q$ ise,o zaman $x_1<x<x_2$ aralığı üzerinde,

$$\frac{d}{dx}\left[W(f,g;x)\right]=fg''-gf''=(p-q)fg\geqslant 0$$

olur.Burada W azalmadığından,

$$p - q \equiv W(f,g;x) \equiv 0$$

durumu hariç olmak üzere,bu bir çelişkidir.Bu durumda bir k sabiti için $f \equiv kg$ olur ki ispat biter.

Sonuç 1.3.Eğer $q(x) \leq 0$ ise, o zaman $u'' + q(x)u = 0$ diferensiyel denkleminin nontrivial olmayan çözümünün birden fazla sıfırı bulunabilir.

İspat:Aksine ispat yöntemini kullanacağız.Sturm karşılaştırma teoreminden dolayı $v'' = 0$ diferensiyel denkleminin $v \equiv 1$ çözümünün en az bir sıfırı $u'' + q(x)u = 0$ diferensiyel denkleminin trivial olmayan herhangi bir çözümünün iki sıfırı arasında bulunmalıdır.Bundan evvelki sonuçlarda $u'' + q(x)u = 0$ diferensiyel denkleminin çözümlerinin salınımlarını $q(x)$-in büyüklüğü ve işaretine bağlı olarak belirledik. $q(x) \leq 0$ iken salınım imkansızdır.Çünkü çözüm olmadığından $q(x)$ değişik işaretler alabilir.Diğer taraftan $q(x) \geq k^2 > 0$ ise,o zaman $\pi/2$ uzunluğundaki bir aralıkta $u'' + q(x)u = 0$ diferensiyel denkleminin bir çözümü, $u'' + k^2 u = 0$ trigonometrik diferensiyel denkleminin bir $A\cos k(x-x_1)$ çözümünün iki ardışık sıfırı arasında sıfır olmalıdır.

Bu sonuç,

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)u = 0 \qquad (1.10)$$

biçiminde verilen Bessel diferensiyel denkleminin çözümlerine uygulanabilir.(1.10) denkleminde $u = \frac{v}{\sqrt{x}}$ dönüşümü yapılırsa,

$$v'' + \left[1 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}\right]v = 0 \qquad (1.11)$$

denk diferensiyel denklemi elde edilir ki onun çözümleri u-nun verilişinden dolayı sıfırdır ($x\neq 0$ için). $u''+u=0$ ve (1.11) diferensiyel denklemlerine karşılaştırma teoreminin uygulanmasıyla aşağıdaki sonuç ispatlanmış olur.

Sonuç 1.4. Pozitif x-ekseninin π uzunluğundaki herhangi bir aralığı sıfırıncı mertebeden Bessel diferensiyel denkleminin bir çözümünün enaz bir sıfırını içerir. Ayrıca eğer $n>1/2$ ise, aynı aralık n-inci mertebeden Bessel diferensiyel denkleminin trivial olmayan her bir çözümünün en fazla bir ~~çözümünü~~ sıfırını kapsar.

Teorem 1.11. Katsayı fonksiyonları p_o, p_1 ve p_2 sürekli olmak üzere, u(x) ve v(x) fonksiyonları sırasıyla,

$$p_o u''+p_1 u'+p_2 u=r(x) \quad , \quad p_o u''+p_1 u'+p_2 u=s(x)$$

diferensiyel denklemlerinin çözümleri ise, o zaman

$$p_o u''+p_1 u'+p_2 u=cr(x)+ds(x)$$

diferensiyel denkleminin çözümüde $w=cu(x)+dv(x)$ olur.

İspat: Teorem 1.8.den dolayı açıktır. Bu ise lineer operatörlerin temel özelliğidir.

Tanım 1.4. İkinci-mertebe homojen lineer

$$L[u]=p_o(x)u''+p_1(x)u'+p_2 u=0 \qquad (1.12)$$

diferensiyel denklemi ancak ve ancak,

$$p_o(x)u''+p_1(x)u'+p_2(x)u=\frac{d}{dx}\left[A(x)u'+B(x)u\right] \qquad (1.13)$$

biçiminde yazılabilirse TAM'dır denir. Burada $u\in C^2$ ve $A(x), B(x)\in C^1$ olarak verilir. (1.12) diferensiyel denkleminin integral çarpanı v(x) gibi bir fonksiyondur. Öyleki $vL[u]=0$ ise, o zaman (1.12) diferensiyel denklemine TAM'dır denir.

Tanım 1.5.(1.12) diferensiyel denkleminin bir integral çarpanı olan $v \in C^2$ fonksiyonu aynı zamanda ikinci-mertebe homojen lineer,

$$M[v]=[p_o(x)v]''-[p_1(x)v]'+p_2(x)v=0 \qquad (1.14)$$

diferensiyel denkleminin bir çözümüdür.

Tanım 1.6.(1.14) diferensiyel denklemindeki M operatörüne L operatörünün ADJOİNT'i denir.(1.14) diferensiyel denklemi yeniden düzenlenirse,

$$p_o v''+(2p_o'-p_1)v'+(p_o''-p_1'+p_2)v=0 \qquad (1.15)$$

diferensiyel denklemine varılır.(1.15) diferensiyel denklemine,(1.12) diferensiyel denkleminin ADJOİNT DENKLEMİ denir.

Tanım 1.7.Yukarıdaki (1.12) ve (1.13) diferensiyel denklemlerinden,

$$vL[u]-uM[v]=(vp_o)u''-u(p_ov)''+(vp_1)u'+u(p_1v)'$$

özdeşliği elde edilir.Yeniden düzenlersek,

$$vL[u]-uM[v]=\frac{d}{dx}\left[p_ovu'-(p_ov)'u+p_1uv\right] \qquad (1.16)$$

olur.İntegralini alırsak,

$$\int_a^b \{vL[u]-uM[v]\}dx=\left[p_ovu'-(p_ov)'u+p_1uv\right]_{x=a}^{x=b} \qquad (1.15)$$

özdeşliği elde edilir.Bu özdeşliğe LAGRANGE ÖZDEŞLİĞİ denir.

Tanım 1.8.Adjointleri ile birlikte homojen lineer diferensiyel denklemlere SELF-ADJOİNT denklemler denir.

II.BÖLÜM

STURM-LİOUVİLLE SİSTEMLERİ

2.1.Sturm-Liouville Sistemleri

İkinci-mertebeden homojen lineer,

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+\left[\lambda r(x)-q(x)\right]u=0 \qquad (2.1)$$

diferensiyel denklemine STURM-LİOUVİLLE DENKLEMİ denir. Burada λ bir parametre,p,q ve r-ler x-in reel değerli fonksiyonları ve p,r-ler pozitiftirler.$L=D[p(x)D]-q(x)$ operatörü kullanılarak (2.1) diferensiyel denklemi yeniden yazılırsa,

$$L[u]+\lambda r(x)u=0 \qquad (2.1')$$

olur.Böylece reel λ için (2.1) diferensiyel denklemine SELF-ADJOİNT'tir denir.(2.1) denkleminin çözümlerinin bulunması q,r katsayı-fonksiyonlarının sürekli ve p-nin de sürekli diferensiyellenebilir olmasına bağlıdır (C^1 de). Verilen λ değeri için (2.1) denklemi,$u\in C^2$ fonksiyonunu $L[u]+\lambda ru$ ya dönüştüren bir lineer operatördür.Sonlu $a\leqslant x\leqslant b$ aralığında p(x) ve r(x) fonksiyonları sıfırdan farklı değerler almak üzere,(2.1) Sturm-Liouville denklemine REGÜLER'dir denir,p,q,r sürekli fonksiyonları bu aralık üzerinde sınırlıdır.

Varlık teoreminden dolayı,her λ için $a\leqslant x\leqslant b$ aralığında regüler Sturm-Liouville denkleminin C^2 sınıfında iki lineer bağımsız çözümü vardır.

Bir Sturm-Liouville denklemi ile sınır (uç nokta) şartlarından oluşan sisteme STURM-LİOUVİLLE SİSTEMİ (veya

S-L sistemi) denir ve sınır şartlarıda şöyle tanımlanır.

<u>Tanım 2.1.</u> Sonlu $a \leqslant x \leqslant b$ aralığı üzerinde regüler Sturm Liouville denklemi ile,

$$\alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0 \quad , \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0 \qquad (2.2)$$

biçimindeki iki ayrık sınır şartından oluşan sisteme REGÜLER S-L SİSTEMİ denir. Burada $\alpha = \alpha' = 0$, $\beta = \beta' = 0$ durumu hariç olmak üzere $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ verilen reel sayılardır.

S-L sisteminin bir λ özdeğerine karşılık gelen trivial olmayan her çözümü bir ÖZFONKSİYON'dur. Yani her özfonksiyon bir özdeğere bağlıdır.

Regüler S-L sisteminin bütün özdeğerlerinin kümesine sistemin SPECTRUM'u denir.

<u>Örnek 2.1.</u> $0 \leqslant x \leqslant \pi$ aralığında $u'' + \lambda u = 0$ diferensiyel denklemi ile $u(0) = u(\pi) = 0$ sınır şartlarından oluşan sistem, $\lambda_n = n^2$ özdeğerlerine ve $u_n(x) = \sin nx$ özfonksiyonlarına sahiptir $(n = 1, 2, \ldots)$.

<u>Örnek 2.2.</u> Sabit n için,

$$\frac{d}{dx}\left[x \frac{du}{dx}\right] + \left[k^2 x - \frac{n^2}{x}\right] u = 0 \quad , \ a \leqslant x \leqslant b \qquad (2.3)$$

formunda verilen Bessel denklemi, $p = r = x, \lambda = k^2$ ve $q = \frac{n^2}{x}$ olmak üzere bir S-L denklemidir. $0 < a < b$ için bu S-L denklemine $u(a) = u(b) = 0$ sınır şartlarının veya (2.2) formundaki ayrık sınır şartlarının eklenmesiyle bir regüler S-L sistemi elde edilir.

Ancak $a = 0$ için (2.3) diferensiyel denklemi bir regüler S-L sistemi olamaz. Çünkü $p(x)$ katsayısı $x = 0$ için sıfırdır. O zaman bir singular S-L sistemi elde edilir ki bu dördüncü konuda incelenmiştir.

Ayrıca sabit k ve değişken n için,(2.3) Bessel diferensiyel denklemi farklı bir S-L denklemini ifade eder. Çünkü parametreler farklıdır.

Tanım 2.2. S-L denkleminin katsayı-fonksiyonları x-in b-a periyodlu periyodik fonksiyonları olan S-L denklemine

$$u(a)=u(b)\ ,\ u'(a)=u'(b) \qquad (2.4)$$

periyodik sınır şartlarıda eklenirse S-L sisteminin diğer bir modeli elde edilir ki buna PERİODİK S-L SİSTEMİ denir.

Örnek 2.3. $-\pi<x<\pi$ aralığı için $u''+\lambda u=0$ diferensiyel denklemi ile $u(-\pi)=u(\pi)$ ve $u'(-\pi)=u'(\pi)$ periyodik sınır şartlarından oluşan sistem, n pozitif bir tamsayı olmak üzere 1, cosnx, sinnx özfonksiyonlarına sahiptir. $n>0$ olmak üzere, tamsayıların karesi olan n^2 özdeğerine iki lineer bağımsız özfonksiyon karşılık gelir.

Örnek 2.4. Regüler S-L sisteminin diğer bir modeli,

$$u''+(\lambda+16d\cos 2x)u=0\ ,\ a\leq x\leq b \qquad (2.5)$$

Mathieu denklemine ayrık sınır şartlarının eklenmesiyle elde edilir. Burada $p=r\equiv 1$ ve $q(x)=-16d\cos 2x$'dir. $u(0)=-u(\pi)$ $u'(0)=-u'(\pi)$ ile, veya $u(0)=u(\pi)$, $u'(0)=u'(\pi)$ periyodik sınır şartları ile, periyodik olan fakat regüler olmayan S-L sistemi elde edilir.

2.2. Sturm-Liouville Serileri

Örnek 2.1 ve örnek 2.3.deki $u''+\lambda u=0$ S-L denklemine farklı sınır şartlarının eklenmesiyle iki farklı S-L sistemi tanımlandı. Örnek 2.3.ün çözümleri olan özfonksiyonlar Fourier serileri teorisinde kullanılan fonksiyonlardır. İleri analizde de gösterildiği gibi bu fonksiyonlar

$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ aralığında ortogonaldır.Bu ise $m \neq n$ için,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0$$

bağıntısının sağlanması demektir.O zaman $m,n \in Z$ için,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

dır.

Örnek 2.1.deki sin nx özfonksiyonları da $0 \leqslant x \leqslant \pi$ aralığında ortogonaldir.S-L sisteminde ortogonallik bağıntısı,eğer $m \neq n$ ise,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0$$

olacak biçimde tanımlanır.

Şimdi aynı ortogonallik bağıntısının genellikle regüler S-L sisteminin ve periyodik S-L sisteminin özfonksiyonları içinde geçerli olduğunu göstereceğiz.

Tanım 2.3. I aralığı üzerinde reel değerli ve integrallenebilir f ve g fonksiyonlarının r ağırlık fonksiyonu ile ortogonal olması için gerek ve yeter şart,

$$\int_I r(x)f(x)g(x)dx = 0 \tag{2.6}$$

olmasıdır.Burada I aralığı sonlu veya sonsuz,açık veya kapalı olabilir.

Teorem 2.1. Farklı özdeğerlere sahip (2.1)-(2.2) regüler S-L sisteminin özfonksiyonları,r ağırlık fonksiyonu ile ortogonaldir.Eğer farklı λ ve μ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar u ve v ise,o zaman,

$$\int_a^b r(x)u(x)v(x)dx = 0 \tag{2.7}$$

olur.

İspat: $L[u]=[p(x)u']'-q(x)u$ operatörünü kullanalım. Burada sırasıyla (2.1)-in λ ve μ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonların u ve v olması için gerek ve yeter şart,

$$L[u]+\lambda r(x)u=L[v]+\mu r(x)v=0$$

olmasıdır.Bunun için birinci bölümde verilen Lagrange özdeşliği kullanılarak,

$$uL[v]-vL[u]=\frac{d}{dx}\left\{p(x)\left[u(x)v'(x)-v(x)u'(x)\right]\right\}$$

ifadesi elde edilir.Bu eşitlikte $L[v]$ yerine $-\mu r(x)v$, $L[u]$ yerine $-\lambda r(x)u$ ifadeleri kullanılarak bu özdeşliğin $x=a$ ile $x=b$ sınırları arasında integrali alınır ve düzenlenirse,

$$(\lambda-\mu)\int_a^b r(x)u(x)v(x)dx=p(x)\left[u(x)v'(x)-v(x)u'(x)\right]\Big|_{x=a}^{x=b} \quad (2.8)$$

olur.

(2.8) özdeşliği verilirken sınır şartları hakkında herhangi bir şey söylenmedi.Buradan şu sonuca varılır.

<u>Sonuç 2.1.1.</u> Eğer λ ve μ parametreleri için u ve v $a\leq x\leq b$ kapalı aralığında (2.1) S-L denklemini sağlarsa, (2.8) özdeşliği gerçeklenir.

(2.8) özdeşliğinin sağ tarafına,özdeşliğin SINIR TERİMİ denir.

Gerçekten teorem 2.1.in ispatı için ayrık sınır şartları altında,sınır teriminin sıfıra eşit olduğunu göstermek yeterlidir.Eğer $\alpha'\neq 0$ ise,(2.2) deki sınır şartlarından ilki gereği,

$$p(a)\left[u(a)v'(a)-v(a)u'(a)\right]=\left[\alpha p(a)/\alpha'\right]\left[u(a)v(a)-v(a)u(a)\right]=0$$

olur.Eğer $\alpha \neq 0$ ise,(2.8) özdeşliğinin sağ tarafı $x=a$ için düzenlenirse,

$$[\alpha' p(a)/\alpha][u'(a)v'(a) - v'(a)u'(a)] = 0$$

bulunur.Burada $\alpha = \alpha' = 0$ durumu hariç olmak üzere,

$$p(a)[u(a)v'(a) - v(a)u'(a)] = 0$$

eşitliği sağlanır.

Aynı şekilde $x=b$ sınır terimi içinde bu denklemler geçerlidir.Böylece $\alpha=\alpha'=0$ ve $\beta=\beta'=0$ durumları hariç olmak üzere(2.8) özdeşliğinin sağ tarafının sıfıra eşit olduğu gösterilmiş olur.Şimdi de (2.8)-in her iki tarafını sıfırdan farklı $(\lambda-\mu)$ ifadesi ile bölersek,(2.7) formulü elde edilir.

<u>Sonuç 2.1.2.</u> Teorem 2.1. ile verilen ortogonallik bağıntısı,periyodik S-L sistemleri içinde geçerlidir.

Böylece (2.8) özdeşliğinin sağ tarafına $x=a$ ve $x=b$ sınırları uygulanırsa,sıfır bulunur.

Ortogonallik bağıntısı,regüler S-L sisteminin özfonksiyonlarının sonsuz lineer bileşimine ve periyodik S-L sisteminin özfonksiyonlarının sonsuz lineer bileşimine uygulanarak genişleme teoremi ispatlanır.Bunun sonucunda elde edilen sonsuz serilere STURM-LİOUVİLLE SERİLERİ denir.Herhangi bir fonksiyonun,regüler S-L sisteminin özfonksiyonlarının sonsuz lineer birleşimine genişletilebilmesi Sturm-Liouville serilerinin en önemli özelliğidir.Fourier serileri böyle bir genişlemenin en bilinen modelidir.Böylece de bir regüler S-L sisteminin özfonksiyonları ile aynı sınır şartları için $u''+\lambda u=0$-ın özfonksiyonlarının benzer olduğu gösterildi.

2.3. Fiziksel Anlamları

S-L sistemleri genel olarak klasik mekanikdeki titreşim problemlerinden ortaya çıkmıştır.Fiziksel anlamda S-L sistemi,basit harmonik dalgalara karşılık gelen sınır-değer problemleri olarak ortaya çıkar.Fizikte genellikle bir dalga hareketi,kendilerine özgü bir frekansla titreşen-duran dalgalarla çözülebilir.

Fizikçilerin deneysel ve sezgisel olarak elde ettikleri bu sonuçlar,aşağıda da görüleceği üzere,dalga hareketinin matematiksel teorisi olan diferensiyel denklemlerle ve sınır-değer problemleriyle tam olarak anlaşılabilir.

S-L sistemlerinin özfonksiyonlarının fiziksel anlamları genellikle üç klasik örnek verilerek açıklanır.

2.3.1. Bir Telin Titreşimi

Titreşen bir telin kısmî diferensiyel denklemi,

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} \ , \quad c^2 = T/r \qquad (2.9)$$

ile verilir.Bu denklemde y yatay olarak dengeden uzaklaşan tarafı,T telin gerilimini ve r-de telin yoğunluğunu gösterir (r ve T sabittir).Basit harmonik duran dalgalar ayrılabilir değişkenlere bağlı olarak,

$$y(x,t) = u(x).\cos k(t-t_0) \qquad (2.10)$$

biçiminde tanımlanır.Titreşen tel denklemi olan (2.9)-u $y(x,t)$-nin sağlaması için, $\lambda = k^2/c^2$ olmak üzere $u'' + \lambda u = 0$ denklemi biçimine getirilebilmesi gerek ve yeterdir.Fizikte doğal olarak titreşen bir telin uç noktaları sabittir. Yani $y(a,t) = y(b,t) = 0$ olur.Buradan da $u'' + \lambda u = 0$

denklemine $u(a)=0, u(b)=0$ sınır şartlarının eklenmesiyle örnek 2.1.deki S-L simtemine varılır.Herbir özfonksiyona ait olan özdeğer $k^2/4\pi^2$ frekans karesi ile orantılıdır.Bu bağıntı mekanik ve elektromagnetik dalgalar arasındaki benzerlikten bulunur.Matematikçiler özdeğerlerin kümesini bir S-L sisteminin spektrumu olarak isimlendirirler.

2.3.2. Elastik Bir Çubuğun Boyuna Titreşimi

S-L sisteminin başka bir fiziksel yorumu,yerel sertliği $p(x)$,yoğunluğu $r(x)$ olan elastik bir çubuğun boyuna titreşimi ile kendini gösterir.Böyle bir çubuğun herhangi bir parçasının denge durumundan,boyuna ortalama yer değiştirmesi $v(x,t)$ ile ifade edilir.x denge pozisyonunda iken $v(x,t)$ ifadesi,

$$r(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right] \tag{2.11}$$

dalga denklemini sağlar.Basit harmonik titreşim denkleminin çözümü ayrılabilir değişkenler ile,

$$v(x,t) = u(x)\cos k(t-t_o) \tag{2.12}$$

biçiminde verildiğinden bu ifade,

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + k^2 r(x)u = 0 \tag{2.13}$$

biçimindeki S-L denklemlerinin çözümleridir.Bu son denklem (2.1) S-L denkleminin $\lambda = k^2$ ve $q=0$ için özel durumudur.

Sonlu bir tel için ($a \leq x \leq b$ aralığında)verilen farklı sınır şartlarından farklı fiziksel problemler elde edilir. Bu sınır şartlarının başlıcaları,

$u(a) = u(b) = 0$ (değişmeyen sabit uçlar)

$u'(a) = u'(b) = 0$ (serbest uçlar)

$u'(a) + \alpha u(a) = u'(b) + \beta u(b)$ (esnek tutulan uçlar)

$u(a) = u(b)$, $u'(a) = u'(b)$ (periyodik sınırlar)

$u(x)$ üzerinde verilen bu sınır şartları $v(x,t)$ fonksiyonu içinde geçerlidir.Burada u için verilen adî türevler v için kısmî türevler olarak alınmalıdır.Bir telin boyuna titreşiminin doğal frekansları uygun şartlar altında (2.1) ile verilen S-L sistemlerinin çözümleridir.

2.3.3. Bir Zarın Titreşimi

Son olarak bir zarın titreşiminin (r,θ)-kutupsal koordinatlarındaki kısmî diferensiyel denklemi,

$$w_{tt} = c^2(w_{xx} + w_{yy}) = c^2(w_{rr} + r^{-1}w_r + r^{-2}w_{\theta\theta}) \qquad (2.14)$$

biçiminde verilir.Duran dalgaların çözümlerinin bulunması $w(r,\theta,t)$ ifadesinin

$$w(r,\theta,t) = u(r)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} n\theta \cos k(t-t_o) \qquad (2.15)$$

biçiminde değişkenlerine ayırmakla mümkün olur.w-nin zar denklemini sağlaması için,u-nun (2.3) Bessel denkleminin bir çözümü olması gerek ve yeterdir.

Bessel denkleminin $r=0$-daki singularlığı ile kutupsal koordinatların orjindeki singularlığı benzerdir.Eğer zar a yarıçaplı bir disk ise(davul derisinin titreşimi),o zaman fiziksel olarak $u(a)=0$ ve singular olmayan $u(0)$ doğal sınır şartlarıdır.İkinci şart sabit bir normalizasyon faktörüne bağlı olarak karakteristik Bessel denkleminin çözümleri olan Bessel fonksiyonlarıdır.

2.4. Özel Sistemler

(2.1) S-L denklemi sonlu,yarı-sonlu veya sonsuz bir I aralığı üzerinde verilebilir.Sonsuzluk durumunda I,sınırlardan ya birini,yada ikisini de kapsamaz.Burada eğer $\lim_{x\to a} p(x)=0$, $\lim_{x\to a} r(x)=0$ veya p,q ve r fonksiyonlarından herhangi biri a-da singular ise,o zaman a noktası hariç tutulur.

Sadece I aralığı kapalı iken $a\leqslant x\leqslant b$ sonlu aralığında verilen S-L denklemi,bir regüler S-L denklemine benzerdir. I aralığı sonsuz,yarı-sonsuz veya I sonlu ve p veya r birinci yada ikinci sınırda sıfıra eşit yada I aralığında q süreksiz ise,(2.1) S-L denkleminden bir regüler S-L sistemi elde edilemez.Bu durumların herhangi birinde verilen S-L denklemine SİNGULAR'dır denir.

Singular S-L denklemleri ile uygun homojen sınır şartlarından SİNGULAR S-L SİSTEMLERİ elde edilir.Bu sınır şartları her zaman (2.2) biçiminde verilmeyebilir.Örneğin singular nokta yakınında u sınırlı ise,aynı sınır şartları ile singular S-L sistemleri tanımlanır.

<u>Örnek 2.5.</u>Legendre diferensiyel denklemi,

$$((1-x^2)u')'+\lambda u=0 \ , \ -1<x<1 \qquad (2.16)$$

biçiminde tanımlanır.(2.16) diferensiyel denkleminin u çözümünün verilen aralıkta sınırlı olması şartı,Singular S-L sistemine bir örnektir.Bu singular S-L sisteminin çözümleri olan $P_n(x)$ Legendre polinomları, $\lambda_n=n(n+1)$ özdeğerine karşılık gelen reel özfonksiyonlardır.

<u>Örnek 2.6.</u> Sabit n için örnek 2.2.deki Bessel denklemi

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{du}{dx}\right]+\left[k^2x-\frac{n^2}{x}\right]u=0\ ,\ 0<r\leqslant a$$

biçimindedir. $p=r=x$, $\lambda=k^2$ ve $q=n^2/x$ olmak üzere bir singular S-L denklemidir. Buradan bir singular S-L sistemi ancak $a>0$ olmak üzere, sınır şartları $u(a)=0$ ve $r\to 0$ için $u(r)$-nin sınırlı olması durumunda elde edilir.

Yukarıda verilen singular S-L sisteminin özfonksiyonları $J_n(k_jr)$ Bessel fonksiyonlarıdır. Burada k_ja, n-inci dereceden Bessel fonksiyonunun j-inci sıfırıdır. Bölüm 1.deki sonuç 4.den $J_n(x)$-in birçok sıfıra sahip olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla singular S-L sisteminin sayılabilir sonsuzlukta özdeğerleri vardır.

Singular S-L sistemlerinin özfonksiyonları ortogonaldir. Dolayısıyla karelerinin integrallenebilir olduğunu aşağıdaki gibi tanımlarız.

<u>Tanım 2.4.</u> I aralığı üzerinde verilen reel değerli bir f fonksiyonu, $r(x)$ ağırlık fonksiyonuna bağlı olarak ($r(x)>0$ olmak üzere) karesi-integrallenebilirdir denir ve

$$\int_I f^2(x)r(x)dx<+\infty \qquad (2.17)$$

biçiminde gösterilir. Eğer $r(x)$ ağırlık fonksiyonu özdeş olarak 1 ise, f fonksiyonu I aralığında karesi-integrallenebilirdir denir.

Karesi-integrallenebilir fonksiyonlar için Schwarz eşitsizliği,

$$\left[\int_I f(x)g(x).r(x)dx\right]^2\leqslant\int_I f^2(x)r(x)dx\int_I g^2(x)r(x)dx, (2.18)$$

biçiminde verilir. Bundan dolayı iki karesi-integrallenebilir fonksiyonun çarpımıda r(x) ağırlık fonksiyonuna bağlı olarak integrallenebilen bir fonksiyondur. Yani (2.18)-in solundaki integral sonludur. (2.8)-in sağındaki sınır terimi alt ve üst limitlerde sıfıra eşittir. Sınır şartları için,

$$\lim_{\alpha \downarrow a,\, \beta \uparrow b} p(x)\left[u(x)v'(x) - v(x)u'(x)\right]\Big|_{x=\alpha}^{\beta} = 0 \qquad (2.19)$$

olur. p(a)=0, p(b)=0 ve u'(x)-in sonlu bir aralıkta sınırlı olmasından (2.19) sıfır olur. Böylece (2.19) sağlanacağından, (2.8)-den dolayı λ ve μ özdeğerlerine karşılık gelen karesi-integrallenebilir u ve v özfonksiyonları için

$$(\lambda-\mu)\int_a^b r(x)u(x)v(x)dx = 0$$

eşitliği sağlanır. Bu son integral genelleştirilmiş (improper) integral olabilir. Eğer $\lambda \neq \mu$ ise, sonuç 2.1. den u ve v ortogonaldir. Böylece de aşağıdaki teorem ispat edilmiş olur.

Teorem 2.2. Bir singular S-L sisteminin farklı özdeğerlerine karşılık gelen karesi-integrallenebilir u ve v özfonksiyonları, r ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir ve (2.19) -dan dolayı sınır teriminde sıfırdır.

Bu teorem örnek 2.5.e uygulanırsa Legendre polinomları için ortogonallik bağıntısı,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \ , \ m \neq n \qquad (2.20)$$

biçiminde sınır teriminde sıfır olarak bulunur. Ayrıca yine yukarıdaki teoremin Bessel denklemine uygulanmasıyla Bessel fonksiyonları için ortogonallik bağıntısı,

$$\int_0^a x\, J_n(k_i x) J_n(k_j x)\, dx = 0 \quad , \quad k_i \neq k_j \qquad (2.21)$$

biçiminde verilir.Burada $J_n(k_i a) = J_n(k_j a) = 0$ dır.

Örnek 2.7. Hermit diferensiyel denklemi,

$$u'' - 2xu' + \lambda u = 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \qquad (2.22)$$

biçiminde verilir.Bu denklemin serilerle çözümü sonucunda bulunan,

$$a_{k+2} = (2k-\lambda) a_k / (k+1)(k+2) \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots \qquad (2.23)$$

rekürans bağıntısı kullanılırsa,$\lambda = 2n$ için n-inci dereceden bir polinom bulunur.Bu polinomlar $a_n = 2^n$ ve $a_{n-1} = 0$ olması şartı ile normalleştirilirler.Böylece Hermit polinomları $H_n(x)$ ile ifade edilerek yukarıdaki gibi verilmiş olur.Örneğin $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2$,... biçimindedir.Burada $H_n(x)$,n çift ise çift fonksiyon ve n tek ise tek fonksiyon olduğu açıktır.Hermit diferensiyel denklemi Bir S-L denklemi değildir.Çünkü bu denklem self-adjoint değildir.(2.22) diferensiyel denkleminde u yerine $y = e^{-x^2/2} u(x)$ ifadesi yazılırsa,y(x) Hermit fonksiyonu için self-adjoint S-L denklemi,

$$y'' + (\lambda - (x^2 - 1)) y = 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \qquad (2.24)$$

olur. $\lambda = 2n$ için,denklemin çözümleri $e^{-x^2/2} H_n(x)$ fonksiyonlarıdır ki bu çözüm fonksiyonları karesi-integrallenebilir ve $x \to \mp\infty$ için sıfıra eşit olurlar.Yani, $\phi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$ fonksiyonları (2.24) denklemi ve sınır şartlarından oluşan singular S-L sisteminin bir özfonksiyondur ve $x \to \mp\infty$ oldukça y(x) çözümü sıfıra gider.Böylece Hermit polinomları için ortogonallik bağıntısı,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = 0 \quad , \; m \neq n \qquad (2.25)$$

olarak yazılır.(2.25)-e (2.8) özdeşliğinin uygulanmasıyla

$$2(m-n) \int_{-a}^{a} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \left[\phi_m(x)\phi_n'(x) - \phi_n(x)\phi_m'(x)\right]\Big|_{x=-a}^{x=a}$$

ifadesi bulunur.Sınır terimleri e^{-x^2}-yi içerir ki bunu x^n ile çarpıp limitini alırsak,

$$\lim_{x \to +\infty} x^n e^{-x^2} = 0 \qquad (2.26)$$

olur.(2.19)-dan dolayı sınır teriminin limiti sıfır olur.

2.5. Prüfer Dönüşümü

İkinci-mertebeden,self-adjoint bir lineer diferensiyel denklem,

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{du}{dx}\right] + Q(x)u = 0 \quad , \; a < x < b \qquad (2.27)$$

biçiminde verilsin.(2.27) diferensiyel denkleminin çözümlerinin bulunabilmesi için kullanılan yöntemlerden birisi de şimdi vereceğimiz Prüfer dönüşümüdür.Bu denklemde verilen katsayı fonksiyonlarından $Q(x)$ sürekli,$P(x) > 0$ ve $P(x)$,C^1 sınıfındandır.$a < x < b$ aralığında verilen (2.27) denkleminin çözümlerinin salınımlarını bulmak yerine,aynı aralıktaki sıfırlarının sayısını bulmak yeterlidir.(2.27) ifadesinde $P(x) \equiv 1$ alınarak,teorem 1.9 ile verilen Sturm-Karşılaştırma teoremi uygulanacaktır.Yani teorem 1.9,(2.27) biçimindeki daha genel denklemlere genişletilecektir.

Prüfer'in amacı,u ve Pu' bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere,(Pu',u) düzlemini kutupsal koordinatlara dönüştürecek olan,birinci-mertebeden iki tane diferensiyel denklemden oluşan bu sistemi,(2.27) denklemine özdeş tutmaktır.Prüfer bu düşünceyle Pu' ve u bilinmeyenlerini,

$$P(x)u'(x)=r(x).\cos\theta(x)\ ,\ u(x)=r(x).\sin\theta(x) \qquad (2.28)$$

biçiminde tanımlandı.Bu ifadelerden yeni r ve θ bağlı değişkenleri çekilerek düzenlenirse,

$$r^2=u^2+P^2u'^2\ ,\quad \theta=\arctan\ (u/Pu') \qquad (2.28')$$

olur.Burada r UZUNLUK ve θ-da FAZ DEĞİŞKENİ olarak isimlendirilir.$r\neq 0$ iken,(2.28) ile tanımlanan $(Pu',u)\rightleftarrows(r,\theta)$ dönüşümü Jacobian'ın sıfırdan farklı olması ile analitiktir.

Trivial olmayan çözümler için r daima pozitiftir.Çünkü verilen bir x değeri için,eğer $u(x)=u'(x)=0$ ise,o zaman birinci bölümde verilen teklik teoremlerinden dolayı $u(x)\equiv 0$ trivial çözüm olacaktır.(2.27)-ye denk olan diferensiyel denklem sistemi,r(x) ve θ(x) için aşağıdaki gibi verilir.

Bunun için $\cot\theta=Pu'/u$ nun diferensiyeli alınırsa (eğer $\theta=0(\mathrm{mod}\pi)$ ise o zaman $\tan\theta=u/Pu'$ ifadesinin diferensiyeli alınarak işlem yapılır),

$$-\mathrm{cosec}^2\theta\,\frac{d\theta}{dx}=\frac{(Pu')'}{u}-\frac{Pu'^2}{u^2}=-Q(x)-\frac{1}{P}\cot^2\theta$$

olur.Bu eşitliğin her iki tarafını $-\sin^2\theta$ ile çarparsak,

$$\frac{d\theta}{dx}=Q(x)\ \sin^2\theta+\frac{1}{P(x)}\cos^2\theta=F(x,\theta) \qquad (2.29)$$

diferensiyel denklemini elde ederiz.Şimdide (2.28') ile verilen ifadelerden ilkinin diferensiyelini alır ve gerekli sadeleştirme ve düzenlemeleri yaparsak,

$$\frac{dr}{dx}=\left[\frac{1}{P(x)}-Q(x)\right]r.\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{P(x)}-Q(x)\right]r.\sin 2\theta, \quad (2.30)$$

diferensiyel denklemi elde edilir.

(2.29)-(2.30) sistemi,(2.27) diferensiyel denklemine denktir.Bu yeni sistemin trivial olmayan her çözümü,(2.28) ile verilen Prüfer dönüşümünden,(2.27) diferensiyel denkleminin bir tek çözümünü tanımlar ve terside doğrudur.Prüfer sistemi olarak isimlendirilen (2.29)-(2.30) diferensiyel denklem sistemi,(2.27) self-adjoint diferensiyel denklemi ile ilgili Prüfer sistemidir.

Prüfer sisteminin (2.29) ile verilen diferensiyel denklemi yalnızca θ-ya ve x-e bağlı birinci mertebeden bir diferensiyel denklemdir.Diğer r bağlı değişkenini içermez ve bu denklem,

$$L=\sup_{a<x<b}\left|\frac{\partial F}{\partial\theta}\right|\leq\sup_{a<x<b}|Q(x)|+\sup_{a<x<b}\frac{1}{|P(x)|}$$

biçimindeki Lipschitz sabiti ile Lipschitz şartını sağlar. L sabiti,kapalı bir aralıkta P ve Q fonksiyonları sürekli iken sonludur.Adı geçen P ve Q fonksiyonları (2.27) diferensiyel denklemlerinin katsayı-fonksiyonları olduğundan a-da süreklidir.Ayrıca $\theta(a)=\gamma$ başlangıç değeri için,(2.29) diferensiyel denkleminin bir tek çözümü $\theta(x)$ olur.

r(x)-in θ(x)-e bağlı olarak bulunabilmesi için,(2.30) diferensiyel denkleminin integrali alınırsa,

$$r(x)=K\left\{\exp\frac{1}{2}\int_a^x\left[\frac{1}{P(x)}-Q(x)\right]\sin 2\theta\, dt\right\} \quad (2.30')$$

olarak bulunur.Burada K=r(a) dır.

(2.29)-(2.30) Prüfer sisteminin her bir çözümü iki sabite bağlıdır.

Bu sabitler $K = r(a)$ ilk uzunluk, ve $\gamma = \theta(a)$ ilk fazdır. K sabiti, u çözümünün bir sabitle çarpımıyla değişir. Böylece (2.27) denkleminin bir u(x) çözümünün sıfırları yalnızca (2.29) diferensiyel denklemi üzerinde çalışılarak bulunabilir.

2.6. Sturm Karşılaştırma Teoremi

(2.27) diferensiyel denkleminin her hangi bir u(x) çözümünün sıfırları, (2.28) ile verilen Prüfer dönüşümündeki $\theta(x)$ faz fonksiyonunun $0, \mp\pi, \mp2\pi, \mp3\pi, \ldots$ değerleri için bulunur ve bütün bu x noktalarında $\sin\theta(x) = 0$-dır. Bu noktaların her birinde $\cos^2\theta = 1$ olduğundan, (2.29) diferensiyel denkleminde $\frac{d\theta}{dx}$ pozitif olur ($P(x) > 0$ olduğundan). Geometrik olarak bunun anlamı, (Pu', u) düzleminde diferensiyel denklemin bir u çözümüne karşılık gelen $(P(x)u'(x), u(x))$-eğrisi Pu' eksenini yalnızca $\theta = n\pi$ noktalarında keser demektir (θ pozitif yönde alınmak üzere).

Şimdi $Q_1(x) \geq Q(x)$ ve $P_1(x) \leq P(x)$ olmak üzere,

$$\frac{d\theta}{dx} = Q_1(x)\ \sin^2\theta + \frac{1}{P_1(x)}\cos^2\theta = F_1(x,\theta)$$

biçimindeki diferensiyel denklem ile (2.29) diferensiyel denklemini karşılaştıralım. Eğer verilen bir I aralığında $Q_1(x) \geq Q(x)$ ve $P_1(x) \leq P(x)$ ise, o zaman $F_1(x,\theta) \geq F(x,\theta)$ olur. Birinci bölümde teorem 1.6 ile verilen karşılaştırma teoreminden hareketle, eğer $\theta(a) \geq \theta_1(a)$ başlangıç şartını sağlayacak şekilde yukarıdaki diferensiyel denklemin çözümü $\theta_1(x)$ ise, o zaman $a \leq x \leq b$ için $\theta_1(x) \geq \theta(x)$ olur. Yine birinci bölümdeki sonuç 1.2.den dolayı yalnızca $P(x) \equiv P_1(x)$ ve $Q(x) \equiv Q_1(x)$ olması durumunda $\theta(x) = \theta_1(x)$ olur.

Burada $\sin\theta(a)=0$ alınırsa $a<x<b$ için $\sin\theta_1(x)$-in sıfırlarının sayısı, $\sin\theta(x)$-in sıfırlarının sayısından daha çok olur ($P\equiv P_1$ ve $Q\equiv Q_1$ durumu hariç olmak üzere). Böylece aşağıda ifade edeceğimiz teoremi ispat etmiş oluruz.

Teorem 2.3 (Sturm Karşılaştırma Teoremi):

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{du}{dx}\right]+Q(x)u=0,\quad \frac{d}{dx}\left[P_1(x)\frac{du_1}{dx}\right]+Q_1(x)u_1=0, \quad (2.31)$$

diferensiyel denklemlerinde $P(x)\geqslant P_1(x)\geqslant 0$ ve $Q_1(x)\geqslant Q(x)$ olarak verilsin. O zaman $u(x)\equiv cu_1(x)$, $P(x)\equiv P_1(x)$ ve $Q(x)\equiv Q_1(x)$ olması durumu hariç olmak üzere, (2.31)-deki ilk diferensiyel denklemin trivial olmayan bir $u(x)$ çözümünün iki sıfırı arasında, ikinci diferensiyel denklemin trival olmayan her bir çözümünün en az bir sıfırı bulunur.

Birinci bölümde teorem 1.9 ile verilen Sturm-ayırma teoremi de (2.27) diferensiyel denklemine benzer olan diferensiyel denklemin iki lineer bağımsız çözümünün karşılaştırılması sonucunda elde edilmiştir.

Kesin olmamakla beraber, burada eğer P azalırken Q artıyorsa, diferensiyel denklemin herbir çözümündeki sıfırlarının sayısının arttığı söylenebilir.

Tanım 2.4. (maksimum ve minimum): Self-adjoint (2.27) diferensiyel denkleminde $Q(x)>0$ olması, $\theta=(n+\frac{1}{2})\pi$ için $\frac{d\theta}{dx}>0$ olması demektir. Eğer (2.29) diferensiyel denkleminde $\theta=(n+\frac{1}{2})\pi$ ise, o zaman $\cos\theta=0$ ve $\sin\theta=1$ olur. Burada $\cos\theta=0$ olduğundan, (2.29)-un $\theta(x)$ çözümü pozitif olmak üzere ancak (2.27)-de $u'=0$ ise, trivial olmayan herhangi bir çözümünün ardışık sıfırları arasında mutlaka bir maksimumu veya bir minimumu vardır.

2.7. Salınım Teoremi

Şimdi (2.1)-(2.2) regüler S-L sisteminin özfonksiyonlarının sıfırlarının sayısının λ-ya bağlı değişimini ele alalım.(2.1) S-L denkleminde $P(x)=p(x)$ ve $Q(x)=\lambda r(x)-q(x)$ yazarsak (2.27) denklemini elde ederiz. Mademki (2.28)-de $u=0$ olması için gerek ve yeter şart $\sin\theta=0$ olmasıdır.O halde (2.1)-in bir çözümünün sıfırları $\theta=0,\mp\pi,\mp 2\pi,\mp 3\pi,\ldots$ noktaları olmak üzere $\theta(x)$,

$$\frac{d\theta}{dx}=\left[\lambda r(x)-q(x)\right]\sin^2\theta+\frac{1}{p(x)}\cos^2\theta \ , \quad a\leq x\leq b \qquad (2.32)$$

yardımcı Prüfer denkleminin bir çözümü olur.Burada $a\leq x\leq b$ aralığında $p(x)>0$ ve $r(x)>0$-dır.

Şimdi de γ-yı, $\alpha\neq 0$ ve $0\leq\gamma<\pi$ için,

$$\tan\gamma=u(a)/p(a)u'(a)=-\alpha'/p(a)\alpha \qquad (2.32')$$

şartını gerçekleyecek biçimde seçelim.(2.32) diferensiyel denkleminin bir $\theta(x,\lambda)$ çözümü,her λ için $\theta(a,\lambda)=\gamma$ başlangıç şartını sağlasın ($\gamma=\pi/2$ için $\alpha=0$ olur). α, α' sabitleri $\alpha u(a)+\alpha' u'(a)=0$ ilk sınır şartından bulunur.$\theta(x,\lambda)$ fonksiyonu γ sabiti için $a\leq x\leq b$ ile $-\infty<\lambda<\infty$ bölgesinde tanımlıdır.Birinci bölümde teorem 1.6 ile verilen karşılaştırma teoreminin (2.32) diferensiyel denklemine uygulanmasıyla aşağıdaki lemma elde edilir.

<u>Lemma 2.7.1.</u> $x>a$ sabiti için $\theta(x,\lambda)$ fonksiyonu λ değişkeninin tam artan bir fonksiyonudur.

<u>Lemma 2.7.2.</u> Kabul edelim ki $n\geq 0$ bir tamsayı olmak üzere $x_n>a$ için $\theta(x_n,\lambda)=n\pi$ olsun.O zaman $\forall x>x_n$ için $\theta(x,\lambda)>n\pi$ olur.

İspat: Eğer x_n herhangi bir nokta ve $\theta(x_n,\lambda)=n\pi$ ise o zaman (2.32) denkleminde,

$$\frac{d\theta(x_n,\lambda)}{dx_n}=\frac{1}{p(x_n)}>0$$

olur.Böylece $\theta=\theta(x_n,\lambda)$, x_n-in bir fonksiyonu olur.Yine $\theta(x_n,\lambda)$ fonksiyonu, $\theta=n\pi$ doğrusunu kestiği noktalarda artandır.Burada $\theta(x,\lambda)$, $x>x_n$ için aynı doğru üzerinde olmalıdır ki ispat biter.

Lemma 2.7.2.ye $0\leqslant\gamma=\theta(a,\lambda)<\pi$ şartı eklenirse $a<x<b$ açık aralığında $u(x)$-in ilk sıfırı $\theta=\pi$ olarak bulunur ve n-inci sıfırı da $\theta=n\pi$ olur.Bizim asıl göstermek istediğimiz şey sabit x için $\lambda\to\infty$ olduğunda $\theta(x,\lambda)\to\infty$ olduğudur.

Lemma 2.7.2.yi tekrar ele alırsak,her $n>0$ tamsayısı ve yeteri derecede büyük λ-lar için $\theta(x_n,\lambda)=n\pi$ olacak şekilde bir $x_n<x$ sayısının bulunabileceğini gösterirsek her x için $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\theta(x,\lambda)=\infty$ olduğu gösterilmiş olur.

Farklı terimler ele alındığında $\theta(x,\lambda)=n\pi$ olacak şekildeki en küçük x,$x_n(\lambda)$ olsun.O zaman büyük λ-lar için $x_n(\lambda)$-nın varlığının gösterilmesine ihtiyaç vardır ve $\lim\limits_{\lambda\to\infty}x_n(\lambda)=a$ -dır.Bu durum şu lemma ile ifade edilir.

Lemma 2.7.3. n pozitif bir tamsayı olmak üzere $x_n(\lambda)$ fonksiyonu,yeteri derecede büyük λ-lar için tanımlı ve süreklidir.Ayrıca $x_n(\lambda)$, λ-nın azalan bir fonksiyonu ve $\lim\limits_{\lambda\to\infty}x_n(\lambda)=a$ dır.

İspat:Birinci bölümde teorem 1.1 ile verilen Lipschitz şartını $a\leqslant x\leqslant b$ ve $-\infty<\lambda<\infty$ için $\theta(x,\lambda)$ fonksiyonu sağlar. Böyecede $\theta(x,\lambda)$, x ve λ-nın sürekli bir fonksiyonudur.

Burada ilk ispatlayacağımız şey, eğer $x_n(\lambda)$ fonksiyonu iyi tanımlı ise (yani bazı x-ler için $\theta(x,\lambda)=n\pi$ ise), o zaman $x_n(\lambda)$, λ-nın monoton azalan bir fonksiyonu olduğudur. Bunu ispatlamak için $\theta(x,\lambda)$-nın, λ-nın artan bir fonksiyonu olduğunu göstermek yeterlidir. Bu ise lemma 2.7.1. ile verilmiştir.

Şimdi n sabit olmak üzere, yeteri derecede büyük λ-lar için $x_n(\lambda)$-nın iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Burada yeteri derecede büyük λ-lar için $\theta(x,\lambda)=n\pi$ olacak şekilde $a\leq x\leq b$ aralığında bir x vardır. (2.28) -deki dönüşümler kullanılarak bu ifade, (2.1) diferensiyel denkleminin çözümü için eşit bir ifadeye dönüştürülür.

Eğer $\theta(x,\lambda)$, x-in sürekli bir fonksiyonu ve $\theta(a,\lambda)=\gamma<\pi$ ile $n\pi$ arasındaki bütün değerleri alıyorsa, (2.1) S-L denkleminin trivialolmayan herbir çözümü $a<x<b$ aralığında enaz n tane sıfıra sahiptir.

$a\leq x\leq b$ aralığı üzerinde verilen p(x), q(x) ve r(x) katsayı-fonksiyonlarından p(x)-in maksimumu p_M, q(x)-in maksimumu q_M ve r(x)-in minimumu da r_m olsun. O zaman

$$p_M u'' + (\lambda r_m - q_M)u = 0 \ , \ \lambda > q_M / r_m \qquad (2.33)$$

diferensiyel denkleminin çözüm fonksiyonu $u_1(x)=\sin kx$ dir ki burada $k^2=(\lambda r_m - q_M)/p_M$ olur. Bu $u_1(x)$ çözüm fonksiyonunun ardışık sıfırları arasındaki uzaklık $\pi\sqrt{p_M/(\lambda r_m-q_M)}$ dır.

Yukarıda teorem 2.3 ile verilen Sturm-karşılaştırma teoreminden dolayı, (2.1) S-L denkleminin trivial olmayan bir u(x) çözümünün enaz bir sıfırı, (2.33) denkleminin bir

$u_1(x)$ çözümünün herhangi iki sıfırı arasında olmalıdır. Çünkü λ yeteri derecede büyük iken $u_1(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında n tane sıfıra sahiptir ve $\theta(x,\lambda)$ fonksiyonu, yeteri derecede büyük her λ için $n\pi$ değerini alır ki ispatlanması istenen de budur.

$x_n(\lambda)$ sayısı, $u_1(x)$-in $(n-1)$ ve n-inci sıfırları arasında alınacak olursa $\lambda\to\infty$ için bu sıfırların her ikisi de a -ya gider. Bundan dolayı $\lambda\to\infty$ olduğunda $x_n(\lambda)\to a$ olur ki böylece aşağıdaki teoreme varılır.

Teorem 2.4 (Salınım Teoremi): Her λ için $\theta(a,\lambda)=\gamma<\pi$ başlangıç şartını sağlayan (2.32) diferensiyel denkleminin $\theta(x,\lambda)$ çözümü, $a<x\leq b$ aralığında sabit x için λ-nın tam artan bir fonksiyonudur ve süreklidir. Ayrıca $a<x\leq b$ aralığında,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\theta(x,\lambda)=\infty \quad , \quad \lim_{\lambda\to-\infty}\theta(x,\lambda)=0 \qquad (2.34)$$

olur.

İspat: Bu teoremin ilk iddiası lemma 2.7.1 ve lemma 2.7.3. ile ispatlandı. (2.34) ifadelerinden ilki yukarıda ispatlandı. Şimdi de (2.34) ifadelerinden ikincisini ispatlayalım. Bunun için $\gamma<\gamma_1<\pi$ ve $\varepsilon>0$ olsun. (x,θ) düzlemindeki (a,γ_1) ve (x_1,ε) noktalarının birleştirilmesiyle elde edilen doğrunun eğimi $(\varepsilon-\gamma_1)/(x_1-a)$ ya eşit olur ($a<x\leq b$ için). Doğru üzerindeki bir (x,θ) noktası için (2.32) ile verilen $\theta(x,\lambda)$-nın eğimi, λ negatif yönde arttıkça doğrunun eğiminden daha az olacaktır. Bundan dolayı yeteri derecede büyük negatif λ-lar için $a\leq x\leq b$ aralığındaki doğru parçası $\theta(x,\lambda)$ fonksiyonunun aşağısında kalır.

Buradan yeteri derecede büyük negatif λ-lar için $\theta(x_1,\lambda)<\varepsilon$ olarak bulunur.Çünkü Lemma 2.7.2.den dolayı $\theta(x_1,\lambda)>0$ olduğundan $|\theta(x_1,\lambda)|<\varepsilon$ olur.Burada ε ve x_1 keyfî olarak seçildiğinden ispat biter.

Şimdi $a\leq x\leq b$ aralığında p_m ve q_m sırasıyla $p(x)$ ve $q(x)$-in minimumu ve r_M-de $r(x)$-in maksimumu olarak verilsin. O zaman

$$p_m u'' + (\lambda r_M - q_m)u = 0 \qquad (2.35)$$

diferensiyel denklemi ile (2.32) diferensiyel denkleminin karşılaştırılmasından (2.1) regüler S-L denkleminin çözümlerinin sıfırlarının durumları hakkında bir yaklaşım verilir.

Şimdi de $\tan\gamma = u(a)/p(a)u'(a)$ için (2.33) ve (2.35) diferensiyel denklemlerinin çözümlerini düşünelim.Bu çözümlerin sıfırları sırasıyla ,

$$\frac{(n\pi-\gamma)}{\sqrt{(\lambda r_m - q_M)/p_M}} \quad \text{ve} \quad \frac{(n\pi-\gamma)}{\sqrt{(\lambda r_M - q_m)/p_m}}$$

olur.Sturum karşılaştırma teoreminin bu ifadelere uygulanmasıyla şu sonuç elde edilir.

<u>Sonuç 2.4.1.</u> (2.1) S-L denkleminin trivial olmayan herhangi bir çözümünün n-inci sıfırı x_n olsun.O zaman,

$$\sqrt{\frac{p_m}{\lambda r_M - q_m}} \leq \frac{x_n - a}{n\pi - \gamma} \leq \sqrt{\frac{p_M}{\lambda r_m - q_M}} \qquad (2.36)$$

olur.

Bundan evvelki ispatlar (2.2) ile verilen sınır şartlarında $\alpha \neq 0$ kabul edilerek yapıldı.

Eğer $\alpha=0, \beta\neq 0$ ise,bu durum içinde benzer bir ispat $t=a+b-x$ bağımsız değişken dönüşümü altında yapılır. Yine eğer $\alpha=\beta=0$ ise,o zaman $\gamma=\pi/2$ olacağından yukarıdaki ispatlara benzer olarak ispat yapılır.

2.8. Özfonksiyonların Dizisi

Şimdi (2.1) S-L denklemi ile (2.2) ayrık sınır şartlarından yada

$$A[u]=\alpha u(a)+\alpha' u'(a)=0 \quad , \quad B[u]=\beta u(b)+\beta' u'(b)=0, \quad (2.37)$$

ayrık sınır şartlarından oluşan regüler S-L sisteminin özfonksiyonlarının sonsuz bir dizisinin varlığını ispatlayacağız.

Öncelikle (2.37) sınır şartlarını,(2.1) S-L denklemine karşılık gelen (2.29)-(2.30) Prüfer sistemindeki $\theta(x,\lambda)$ faz fonksiyonunun sınır şartlarına özdeşleyeceğiz.Eğer $\alpha\neq 0$ ise o zaman $\theta(x,\lambda)$ fonksiyonu, $\theta(a,\lambda)=\gamma$ başlangıç şartını sağlamalıdır.Burada γ , $0\leq \gamma\leq \pi$ aralığında,$p(a)\tan\gamma=-\alpha'/\alpha$ olacak şekildeki en küçük pozitif sayıdır.Böylecede $\alpha=0$ iken $\gamma=\pi/2$ olur.Benzer şekilde δ -yı $0<\delta\leq\pi$ olarak seçersek $\tan\delta=-\beta'/\beta p(b)$ olur.$a\leq x\leq b$ aralığında (2.1) diferensiyel denklemi ile (2.37) sınır şartlarından oluşan regüler S-L sisteminin bir $u(x)$ çözümünün özfonksiyon olması için gerek ve yeter şart,(2.28') ile verilen $\theta(x,\lambda)$ faz fonksiyonunun,

$$\theta(a,\lambda)=\gamma \quad , \quad \theta(b,\lambda)=\delta+n\pi \ , n=0,1,2,\ldots, 0\leq\gamma<\pi, 0<\delta\leq\pi, \quad (2.38)$$

şartlarını sağlamasıdır.Burada (2.38) şartını sağlayan λ değerinin,verilen regüler S-L sisteminin bir özdeğeri olduğu açıktır ve terside doğrudur.

$\theta(x,\lambda)$,(2.32)diferensiyel denkleminin $\theta(a,\lambda)=\gamma$ başlangıç şartını sağlayan bir çözümü olsun.Farklı λ parametrik değerleri için,farklı özfonksiyonlar elde edilir.

Yukarıda verilen lemma 2.7.2.den dolayı $\theta(b,\lambda)>0$ olur. $\theta(b,\lambda)$, λ-nın artan bir fonksiyonu ve λ-nın $-\infty$ dan artmasıyla (2.38)-deki ikinci şartı sağlayan bir λ_0 ilk değeri vardır.Bu λ_0 özdeğeri için $\theta(b,\lambda_0)=\delta$ olur. λ arttıkça,ikinci sınır şartını sağlayacak biçimde λ_n in sonsuz bir dizisi vardır.Yani negatif olmayan bazı n tamsayıları için,$\theta(b,\lambda_n)=\delta+n\pi$ olur.Bu değerlerin her biri S-L sisteminin,

$$u_n(x)=r(x)\sin\theta(x,\lambda_n) \qquad (2.39)$$

biçimindeki bir özfonksiyonunu verir.Ayrıca teorem 2.4.den λ_n -e karşılık gelen özfonksiyon $a\leq x\leq b$ aralığında tam n-tane sıfıra sahiptir.Bu ise aşağıdaki teoremin ispatlanması demektir.

<u>Teorem 2.5.</u> Herhangi bir regüler S-L sistemi $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$ olacak şekilde reel $\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$ özdeğerlerinin sonsuz bir dizisine sahiptir.Bir $a<x<b$ aralığında λ_n özdeğerine karşılık gelen $u_n(x)$ özfonksiyonunun tam n-tane sıfırı bir çarpana bağlı olarak tek şekilde verilir.

<u>İspat:</u> Burada sadece çözümün bir çarpana bağlı olarak tek şekilde verildiğini göstermek yeterlidir.Bunun için $\alpha u(a)+\alpha' u'(a)=0$ ilk şartını sağlayan (2.1) diferensiyel denkleminin herhangi iki çözümü,birinci bölümde verilen teklik teoremlerinden dolayı lineer bağımlıdır.

2.9. Liouville Normal Form

(2.1) S-L denklemi,

$$u = y(x)w \ , \ t = \int h(x)dx \ , \ y > 0 \ , \ h > 0 \qquad (2.40)$$

biçiminde verilen bağımlı ve bağımsız değişken dönüşümleri yapılarak oldukça kolay hale indirgenebilir. Eğer y ve h fonksiyonları verilen aralıkta pozitif ve sürekli iseler birinci dönüşüm, sıfırlarının yerini değiştirmez. İkinci dönüşüm ise sıralanışı koruyarak, bağımsız değişkenin aralığını değiştirir ve karşılık gelen aralıklarda, çözümün sıfırlarının sayısını sabit bırakır. (2.1) S-L denklemine denk olan w ve t-ye bağlı diferensiyel denklemi, (2.40) -ın ikinci denklemini veya $\frac{d}{dx} = h(x)\frac{d}{dt}$ eşitliğini kullanarak buluruz.

Yukarıda (2.40)-da verilen dönüşümler altında (2.1) S-L denklemi,

$$0 = h(hp(yw)_t)_t + (\lambda r - q)yw$$

$$= h\{pyh \ w_{tt} + [(hp)_t y + 2hpy_t] w_t + (hpy_t)_t w\} + (\lambda r - q)yw$$

biçimine dönüşür.

Bu son denklemin her iki tarafını w_{tt} -nin pyh^2 katsayısı ile bölersek, yukarıdaki diferensiyel denklem ($h, y \in C^2$ için)

$$w_{tt} + (pyh)^{-1}[(hp)_t y + 2hpy_t] w_t + [(pyh)^{-1}(hpy_t)_t + h^{-2}p^{-1}(\lambda r - q)] w = 0$$

olur. $\lambda(r/ph^2)w$ -nin λw - ye indirgenebilmesi için gerek ve yeter şart $h^2 = r/p$ olmasıdır ve w_t-nin katsayısının sıfır olabilmesi için gerek ve yeter şart,
$(hp)_t / hp = -2y_t / y$ olmasıdır. Buda ancak $y^2 = (hp)^{-1}$

olarak seçilmesiyle mümkün olur. Böylece w ve t -nin denk diferensiyel denklemi,

$$u=\frac{w}{\sqrt[4]{p(x)r(x)}}\quad,\quad t=\int\sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}\,dx \tag{2.41}$$

olarak bulunur ki bu dönüşümlere İNDİRGENMİŞ LİOUVİLLE NORMAL FORM denir. Burada p ve r tanım aralığının her yerinde pozitif olduğundan bu değişken dönüşümü sonucunda bulunan h(x) ve y(x) pozitif ve C^2 sınıfındadır. Böylece de p ve r-de C^2 sınıfında olur.

<u>Teorem 2.6.</u> (2.1) S-L denkleminin $p,r\in C^2$ ve $q\in C$ katsayı fonksiyonlarına (2.41) Liouville dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{d^2w}{dt^2}+\left[\lambda-\hat{q}(t)\right]w=0 \tag{2.42}$$

normal formu elde edilir. Burada $\hat{q}(t)$,

$$\hat{q}=\frac{q}{r}+(pr)^{-1/4}\frac{d^2}{dt^2}\left[(pr)^{1/4}\right] \tag{2.43}$$

biçimindedir.

(2.43) eşitliğinin ikinci türevi alınır ve $\frac{d}{dt}=(\frac{p}{r})^{1/2}\frac{d}{dx}$ özdeşliği kullanılırsa, $\hat{q}$ ifadesinin,

$$\hat{q}=\frac{q}{r}+\frac{p}{4r}\left[(\frac{p'}{p})'+(\frac{r'}{r})'+\frac{3}{4}(\frac{p'}{p})^2+\frac{1}{2}(\frac{p'}{p})(\frac{r'}{r})-\frac{1}{4}(\frac{r'}{r})^2\right] \tag{2.43'}$$

rasyonel formu bulunur.

(2.1) diferensiyel denklemi $a\leq x<b$ aralığında tanımlı ve t değişkeni, $t=\int_a^x\sqrt{r(s)/p(s)}\,ds$ biçiminde belirli bir integral ise, o zaman (2.42) denk diferensiyel denklemi $[0,c)$ aralığında tanımlıdır. Burada $c=\int_a^b\sqrt{r(x)/p(x)}\,dx$ olur. (2.43) ifadesinin paydası sıfırla sınırlı olduğundan $p,r\in C^2$ ve $q\in C$ katsayı fonksiyonlu bir S-L denklemi, Liouville dönüşümüyle $\hat{q}\in C$ olur ve (2.42) diferensiyel denklemi bir S-L denklemine dönüşür.

Sonuç 2.9.1. (2.41) Liouville dönüşümü, regüler S-L sistemlerini regüler S-L sistemlerine, farklı ve periyodik sınır şartlarını farklı ve periyodik sınır şartlarına dönüştürür. Dönüştürülen sistem ile orjinal sistemin özdeğerleri aynıdır.

Şimdi de (2.41) Liouville dönüşümü $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarına dönüştürsün. O zaman,

$$\int_0^c f(t)g(t)dt = \int_a^b u(x)v(x)\sqrt{p(x)r(x)}\sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}\,dx$$

$$= \int_a^b u(x)v(x)r(x)dx \qquad (2.44)$$

olur.

Sonuç 2.9.2. (2.41) Liouville dönüşümü, r ağırlıklı ortogonal fonksiyonları birim ağırlıklı ortogonal fonksiyonlara dönüştürür.

Yukarıda örnek 2.2.de

$$(xu')' + (k^2x - \frac{n^2}{x})u = 0$$

biçiminde verilen Bessel denklemi, (2.1) S-L denkleminin $p=r=x$ ve $q=n^2/x$ özel durumudur. Burada (2.41) Liouville dönüşümünde $u=w/\sqrt{x}$ ve $t=x$ alınırsa, Bessel diferensiyel denklemi,

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \left[k^2 - \frac{n^2 - 1/4}{x^2}\right]w = 0 \;,\; w = x^{1/2}u \qquad (2.45)$$

biçimine dönüşür.

Eğer $n=1/2$ ise, (2.45) Bessel denklemi $w'' + k^2w = 0$ trigonometrik diferensiyel denklemine dönüşür ve $\cos kx$ ve $\sin kx$ $(k=1,2,3,\ldots)$ i içeren çözümlerin bir bazına sahiptir. $J_{1/2}(0)=0$ olduğundan $J_{1/2}(x)$ ifadesi, $(\sin x)/\sqrt{x}$ in bir sabitle çarpımına eşittir.

2.10. Modified Prüfer Dönüşümü

Bir S-L denkleminin Liouville normal formuna Prüfer dönüşümünün geliştirilmişi uygulanırsa,büyük n-ler için geçerli n-inci özfonksiyon $u_n(x)$-in asimptotik formülü bulunabilir.Bundan öncekikonuda verilen Liouville dönüşümleri kullanılarak bir regüler S-L sistemi,

$$u'' + (\lambda - q(x))u = u'' + Q(x)u = 0 \ , \ Q(x) = \lambda - q(x) \quad (2.46)$$

diferensiyel denklemi ile

$$\alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0 \ , \ \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0 \quad (2.47)$$

ayrık sınır şartlarından oluşan bir regüler S-L sistemine dönüştürüldü.Burada $\alpha^2 + \alpha'^2 \neq 0$ ve $\beta^2 + \beta'^2 \neq 0$ dır.Yukarıda verilen sonuç 2.9.1.den bu yeni sistemin özdeğerleriyle orjinal sistemin özdeğerleri aynıdır ve özfonksiyonları da Liouville dönüşümüyle elde edilen Liouville normal formundan bulunur.Özdeğerlerin dağılımının incelenmesi ve özfonksiyonların öneminin anlaşılması için (2.46)-(2,47) sisteminin inincelenmesi yeterli olur.

Burada $a \leq x \leq b$ için $Q(x) > 0$ olarak kabul edeceğiz.Böylece de $\lambda > q(x)$ ve $Q \in C^1$ olur.Şimdi (2.46) diferensiyel denkleminin bir $u(x,\lambda)$ çözümünü,$R(x,\lambda)$ ve $\emptyset(x,\lambda)$ fonksiyonlarına bağlı olarak,

$$u = \frac{R}{\sqrt[4]{Q}} \cos\emptyset \quad , \quad u' = R\sqrt[4]{Q} \sin\emptyset \quad (2.48)$$

biçimindeki ifadeler ile tanımlayalım.Burada sırasıyla $R(x,\lambda)$ ve $\emptyset(x,\lambda)$ ifadelerine MODİFİED UZUNLUK VE MODİFİED FAZ dersek,(2.46) diferensiyel denklemi için MODİFİED PRÜFER SİSTEMİ elde edilir.

Buradan hareketle (2.46) diferensiyel denklemine denk olan R ve $\emptyset$ -nın diferensiyel denklem çiftini oluşturacağız.Bunun için (2.48)-deki denklemlerden,

$$\tan \emptyset = \frac{1}{\sqrt{Q}} \frac{u'}{u} \quad , \quad R^2 = \sqrt{Q}\, u^2 + \frac{1}{\sqrt{Q}} u'^2 \qquad (2.49)$$

ifadelerini yazarız.(2.49) daki ifadeler $u \neq 0$ için geçerlidir.Eğer $u=0$ ise, $\cot \emptyset = \sqrt{Q} \frac{u}{u'}$ alınarak benzer işlemler yapılır.(2.49)-deki ilk ifadenin diferensiyelini alırsak,

$$(\sec^2\emptyset)\emptyset' = -\frac{Qu^2 + u'^2}{Q^{1/2}u^2} - \frac{1}{2}\frac{Q'}{Q^{3/2}}\frac{u'}{u}$$

olur ($u'' = -Qu$ seçilirse).Son ifadede (2.49)-daki ikinci ifadeyi kullanır ve gerekli düzenlemeyi yaparsak,

$$(\sec^2\emptyset)\emptyset' = -\frac{R^2}{u^2} - \frac{1}{2}\frac{Q'}{Q}\tan\emptyset$$

olur.Eşitliğin her iki yanını $\cos^2\emptyset$ ile çarpar ve gerekli sadeleştirmeyi yaparsak,

$$\emptyset' = -Q^{1/2} - \frac{1}{4}\frac{Q'}{Q}\sin 2\emptyset \qquad (2.50)$$

diferensiyel denklemi elde edilir.

R-nin sağladığı diferensiyel denklemi bulmak için de (2.49)-daki ikinci ifadenin diferensiyeli alınırsa,

$$2RR' = 2Q^{-1/2}(Quu' + u'u'') + \left(\frac{Q'}{2Q}\right)(Q^{1/2}u^2 - Q^{-1/2}u'^2)$$

eşitliği elde edilir.$u'' = -Qu$ olduğundan eşitliğin sağındaki ilk terim sıfıra eşit olur.Buradan

$$\frac{R'}{R} = \frac{Q'}{4Q}(\cos^2\emptyset - \sin^2\emptyset) = \frac{Q'}{4Q}\cos 2\emptyset \qquad (2.51)$$

biçiminde bir diferensiyel denklem elde edilir. λ ve q terimlerine bağlı MODİFİED PRÜFER SİSTEMİ,

$$\emptyset' = -\sqrt{\lambda - q} + \frac{q'}{4(\lambda - q)} \sin 2\emptyset \qquad (2.52a)$$

$$\frac{R'}{R} = -\frac{q'}{4(\lambda - q)} \cos 2\emptyset \qquad (2.52b)$$

biçiminde oluşturulur.

(2.46)-nın trivial olmayan her bir çözümüne modified Prüfer sisteminin bir çözümünün karşılık geleceği açıktır ve terside doğrudur. Ayrıca R sıfırdan farklı olduğunda $R > 0$ dır. (2.52a) ve (2.52b) diferensiyel denklemleri, $\lambda \to \infty$ olduğunda (2.46) diferensiyel denkleminin asimptotik durumu olarak bulunur. $\emptyset(x,\lambda)$ ve $R(x,\lambda)$ ifadeleri aşağıdaki teoremler ile verilir.

Teorem 2.7. $\emptyset(x,\lambda)$ ve $R(x,\lambda)$ ifadeleri (2.52a) ve (2.52b) modified Prüfer sisteminin çözümleri olarak verilsin. Burada $q(x) \in C^1$ ve sınırlıdır. O zaman yeteri derecede büyük her λ için,

$$\emptyset(x,\lambda) = \emptyset(a,\lambda) - \sqrt{\lambda}(x - a) + O(1)/\sqrt{\lambda} \qquad (2.53)$$

ve

$$R(x,\lambda) = R(a,\lambda) + O(1)/\lambda \qquad (2.54)$$

olur.

Burada yeteri derecede büyük λ-lar için (2.53)-(2,54) ifadelerinden $\emptyset$ ile gösterilen modified faz, yaklaşık olarak $\sqrt{\lambda}$-nın lineer bir fonksiyonu ve R ile ifade edilen modified uzunluk da yaklaşık olarak sabit bir fonksiyondur.

Tanım 2.10.1. ($O(1)$ sembolü): Yeteri derecede büyük her λ için, x ve λ-nın fonksiyonu olan $f(x,\lambda)$ $a \leq x \leq b$ aralığında daima sınırlıdır ve $\lambda \to \infty$ olduğunda $O(1)$ sembolü ile gösterilir.

$O(1)/\lambda^{8}$ ifadesi, $\lambda^{8}f(x,\lambda)$ ile daima sınırlı bir $f(x,\lambda)$ fonksiyonudur.Çoğu kez $O(1)/\lambda^{8}$ sembolü,$O(\lambda^{-8})$ olarak ifade edilir.

Burada $f(x,\lambda)$ bir fonksiyon olarak verildiğinden $f(x,\lambda)=O(1)$ formülü basit bir denklem değildir.Böylece $O(1)$ bir fonksiyon olmadığından $O(1)=f(x,\lambda)$ yazılması anlamlıdır.Bu formülün anlamı,$\lambda\to\infty$ iken, bütün x-ler için $f(x,\lambda)$ daima sınırlı kalacaktır vehiçbir özelliği olmayan $f(x,\lambda)$ fonksiyonu amacımıza uygun olduğu için gereklidir. Bu tanımın kullanılmasıyla $O(1)$ sembolü aşağıdaki önemli özellikleri sağlar.

$$O(1)+O(1)=O(1) \quad , \quad O(1).O(1)=O(1)$$

ve sonlu a,b için, $\int_a^b O(1)dx=O(1)$ dir.Ayrıca α ve β reel sayıları için $\alpha\leqslant\beta$ olmak üzere $\dfrac{O(1)}{\lambda^{\alpha}}+\dfrac{O(1)}{\lambda^{\beta}}=\dfrac{O(1)}{\lambda^{\alpha}}$ olur.

Sonuç olarak $q(x)$,x-in sınırlı bir fonksiyonu ise o zaman Taylor formülünden $\lambda\to\infty$ iken

$$(\lambda-q)^{\alpha}=\lambda^{\alpha}\left(1-\frac{q(x)}{\lambda}\right)^{\alpha}=\lambda^{\alpha}-\alpha q(x)\lambda^{\alpha-1}+O(1)\lambda^{\alpha-2}$$

olur.Bundan sonraki ispatlarımızda yukarıdaki formüller kullanılacaktır.

<u>İspat:</u> Her λ için $[0,b]$ aralığında $|q(x)|>0$ olacağından

$$\frac{q'}{\lambda-q}=\frac{q'}{\lambda}\left[1+\frac{O(1)}{\lambda}\right]=\frac{q'}{\lambda}+\frac{O(1)}{\lambda^{2}}$$

olur.Bu ifadede q'-ler sadeleşir ve yeniden düzenlersek,

$$\sqrt{\lambda-q}=\lambda\left[1+\frac{q}{\lambda}\right]^{1/2}=\sqrt{\lambda}-\frac{q}{2\sqrt{\lambda}}+\frac{O(1)}{\lambda^{3/2}}$$

ifadesine varılır.

Birinci bölümde verilen Lipschitz şartı ve karşılaştırma teoremleri kullanılarak,(2.52a) ve (2.52b) diferensiyel denklemlerinin çözümleriyle,

$\phi_1(x,\lambda) \equiv \phi(a,\lambda) - \sqrt{\lambda}(x-a)$ ve $R_1(x,\lambda) \equiv R_1(a)$ çözümleri karkarşılaştırılırsa, $\phi = -\sqrt{\lambda}$ ve $(\log R)' = 0$ bulunur.Bu karşılaştırmada sırasıyla x ve y yerine $\phi(x,\lambda)$ ve $\phi_1(x,\lambda)$ fonksiyonları konulursa $\varepsilon = O(1)/\sqrt{\lambda}$ bulunur.Eğer $\phi_1(a,\lambda) = \phi(a,\lambda)$ ise,o zaman (2.53) ifadesinden elde edilen, $\phi_1(x,\lambda) = \phi(a,\lambda) - \sqrt{\lambda}(x-a)$ eşitliği kullanılarak,

$$\left|\phi(x,\lambda) - \phi_1(x,\lambda)\right| \leq O(1)/\sqrt{\lambda}$$

eşitsizliği elde edilir.

Aynı şekilde Taylor Formülü kullanılarak elde edilen $e^{O(1)/\lambda} = 1 + O(1)/\lambda$ özdeşliğinden hareketle $R(x,\lambda)$ ile $R_1(x,\lambda)$-nın karşılaştırılmasından (2.54) ifadesi elde edilir.

2.11.Özdeğerlerin Dağılımı

Bir regüler S-L sisteminin özdeğerlerinin asimptotik dağılımı sınır şartlarıyla belirlenir.Burada $u'' + \lambda u = 0$ trigonometrik diferensiyel denkleminin durumu ilginçtir. $u(a) = u(b) = 0$ sınır şartları altında trigonometrik diferensiyel denklemin n-inci özdeğeri, $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}$ ve karşılık gelen özfonksiyon $u_n(x) = \sin\frac{n\pi(x-a)}{(b-a)}$ dır $(n = 1,2,3,\ldots)$.Benzer şekilde $u(a) = u'(b) = 0$ sınır şartları için diferensiyel denklemin n-inci özdeğeri $\lambda_n = \frac{(n - 1/2)^2\pi^2}{(b-a)^2}$ ve karşılık gelen özfonksiyon ise $u_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}(x-a)$ olur.Ayrıca $u'(a) = u'(b) = 0$ sınır şartları için n-inci özdeğer ise

$\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}$ olur.Karşılık gelen n-inci özfonksiyon ise $u_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}(x-a)$ dır $(n=0,1,2,\ldots)$

(2.2) ayrık sınır şartlarının durumu $\alpha' \neq 0$, $\beta' \neq 0$ iken ayrıntılı olarak incelenecektir.Bu durumda, $\sqrt{\lambda_n} = \dfrac{n\pi}{(b-a)} + \dfrac{O(1)}{n}$ olduğunu göstereceğiz $(n=0,1,2,\ldots)$.

Burada (2.2) ayrık sınır şartlarında $\alpha'=0$, $\beta'=0$ durumları hariç olmak üzere,regüler S-L denkleminin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik gösterimi ile, $u'' + \lambda u = 0$ S-L denklemi ve $\alpha=\beta=0$ sınır şartlarının oluşturduğu S-L probleminin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik gösterimi benzerdir.

<u>Teorem 2.8.</u> (2.46)-(2.47) regüler S-L sistemi için $\alpha' \neq 0$ ve $\beta' \neq 0$ olsun.O zaman λ_n özdeğerleri $n \to \infty$ olduğunda,

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{(b-a)} + \frac{O(1)}{n}, \quad n=0,1,2,\ldots \tag{2.55}$$

formülü ile verilir.

Burada x ve n -in bir fonksiyonu olarak tanımlanan O(1),her $n \geq 0$ tamsayısı ve $a \leq x \leq b$ aralığı için daima sınırlıdır.

<u>İspat:</u> $A = -\dfrac{\alpha}{\alpha'}$ ve $B = -\dfrac{\beta}{\beta'}$ olsun.A ve B seçilişinden dolayı sonludur.Seçilen bir $\emptyset(x,\lambda)$ çözümü yeteri derecede büyük λ-lar için,

$$\tan\emptyset(a,\lambda) = -\frac{A}{\sqrt{\lambda - q(a)}}, \quad -\pi/2 \leq \emptyset(a,\lambda) \leq \pi/2 \tag{2.56}$$

başlangıç şartını sağlar.İkinci sınır şartı (2.48)-e göre düzenlenirse,$\emptyset(x,\lambda)$-ya karşılık gelen $u(x,\lambda)$ çözümünün bir özfonksiyon olması için gerek ve yeter şart,

$$\tan\emptyset(b,\lambda) = -\frac{B}{\sqrt{\lambda - q(b)}} \tag{2.57}$$

olur.(2.56) ifadesi $\arctan\left[-\frac{A}{\sqrt{\lambda - q(a)}}\right]$ ifadesine dönüştürülerek, birinci dereceden $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ ifadesine yaklaştırılabilir. Buradan da $\lambda \to \infty$ olduğunda ilk sınır şartı için,

$$\emptyset(a,\lambda) = -\frac{A}{\sqrt{\lambda}} + \frac{O(1)}{\lambda^{3/2}} = \frac{O(1)}{\sqrt{\lambda}} \tag{2.58}$$

ifadesi elde edilir.

(2.57) ifadesinden $n\pi$ ile değişen modified faz fonksiyonunun (n+1)-inci özdeğeri için benzer bir yaklaşım elde edilir. Buradan,

$$\emptyset(b,\lambda_n) = -n\pi + \frac{O(1)}{\sqrt{\lambda_n}}$$

olur.

Elde edilen bu son iki ifadeyi birbirinden çıkarır ve (2.53) özdeşliği ile karşılaştırırsak,

$$\emptyset(b,\lambda_n) - \emptyset(a,\lambda_n) = -n\pi + \frac{O(1)}{\sqrt{\lambda_n}} = -\sqrt{\lambda_n}(b-a) + \frac{O(1)}{\sqrt{\lambda_n}} \tag{2.59}$$

olur. Burada $\lambda_n \to \infty$ olduğunda $\lim_{n\to\infty} \frac{n\pi}{\lambda_n^{1/2}} = (b-a)$ veya $\sqrt{\lambda_n} = K_n n$ olur. ki K_n, $\frac{\pi}{(b-a)}$ biçimindeki sayıların bir dizisidir. (2.59) ifadesinden,

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{(b-a)} + \frac{O(1)}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{n\pi}{(b-a)} + \frac{O(1)}{n}$$

ifadesi bulunur ki ispat biter.

Sonuç 2.11.1. Bir regüler S-L sisteminin sıfırdan farklı özdeğerlerinin bir dizisi λ_n olsun. O zaman

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2} < +\infty$$

olur.

2.12. Özfonksiyonların Normalleştirilmesi

$a<x<b$ aralığında verilen karesi-integrallenebilir bir $u(x)$ fonksiyonu, $r(x)$ ağırlık fonksiyonuna bağlı olarak,

$$\int_a^b u^2(x)r(x)dx = 1$$

biçiminde normalleştirilir.

(2.46) S-L denkleminin çözümleri olan özfonksiyonlar için $r(x)\equiv 1$ dir. Burada (2.46)-(2.47) regüler S-L sisteminin çözümleri olan özfonksiyonların normalleştirilmesini kosinüs fonksiyonlarının normalleştirilmesine benzer şekilde göstereceğiz.

<u>Teorem 2.9.</u> $\alpha' \neq 0$ ve $\beta' \neq 0$ olmak üzere (2.46)-(2.47) regüler S-L sisteminin normalleştirilmiş özfonksiyonlarının bir dizisi $u_n(x)$ olsun $(n=0,1,2,\ldots)$. O zaman,

$$u_n(x)= \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos\left[\frac{n\pi(x-a)}{(b-a)}\right]+ \frac{O(1)}{n} \qquad (2.60)$$

olur.

<u>İspat:</u> Bu teoremin ispatını üç aşamada yapacağız. Regüler S-L denkleminin λ_n özdeğerine karşılık gelen $u_n(x)$ özfonksiyonu, (2.48) dönüşümlerinden,

$$u_n(x) = \frac{R(x,\lambda_n)}{\sqrt[4]{\lambda_n - q(x)}} \cos\emptyset(x,\lambda_n) \ , \ a\leq x\leq b \qquad (2.61)$$

biçiminde olur.

(2.60) formülündeki sıraya göre, (2.61) ile verilen ifadedeki üç çarpanın her biri için n-inci terimlerinde farklı asimptotik formüller elde ederiz.

Yine bu teoremin ispatını aşağıda sıra ile vereceğimiz üç lemma vasıtasıyla yapacağız.

Lemma 2.12.1. $\phi(x,\lambda)$ teorem 2.8.in ispatındaki gibi verilsin. O zaman $\lambda\to\infty$ olduğunda,

$$\int_a^b \cos^2\phi(x,\lambda)dx = \frac{b-a}{2} + \frac{O(1)}{\lambda^{1/2}} \qquad (2.62)$$

olur.

İspat: (2.62)-de integral değişkeni olarak $\phi(x,\lambda)$ kullanılır ve (2.53)-den dolayı,

$$\frac{dx}{d\phi} = \left[\frac{d\phi}{dx}\right]^{-1} = -\lambda^{-1/2} + O(1)\lambda^{-3/2}$$

olduğu hatırlanırsa,

$$\int_a^b \cos^2\phi(x,\lambda)dx = \int_{\phi(a,\lambda)}^{\phi(b,\lambda)} \cos^2\phi \,\frac{dx}{d\phi}\, d\phi$$

$$= \left[-\lambda^{-1/2} + O(1)\lambda^{-3/2}\right] \int_{\phi(a,\lambda)}^{\phi(b,\lambda)} \cos^2\phi \, d\phi$$

olur. Son integralin değeri kolayca hesaplanabilir. Bunun için teorem 2.7.deki (2.53) ifadesi kullanılırsa,

$$\int_{\phi(a,\lambda)}^{\phi(b,\lambda)} \cos^2\phi\, d\phi = \left[\frac{\phi}{2} + \frac{\sin 2\phi}{4}\right]_{\phi(a,\lambda)}^{\phi(b,\lambda)} = -\frac{\lambda^{1/2}(b-a)}{2} + O(1)$$

bulunur. Bu son ifade bir öncekinde yerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, (2.62) ifadesi elde edilir ki ispat biter.

İkinci olarak aradığımız sonuç ise, şu lemma ile verilir.

Lemma 2.12.2. Regüler (2.46) S-L denklemini sağlayan bir çözümü $u(x,\lambda)$ olsun. O zaman $\lambda\to\infty$ için,

$$\left[\int_a^b u^2(x)\, dx\right]^{1/2} = R(a,\lambda)\lambda^{-1/4}\sqrt{\frac{b-a}{2}}\left[1 + \frac{O(1)}{\lambda^{1/2}}\right] + \frac{O(1)}{\lambda^{5/4}} \qquad (2.63)$$

olur.

İspat: teorem2.7 ve (2.48)-deki ifadelerden dolayı u, R-nin terimleri cinsinden yazılırsa,

$$\int_a^b u^2(x)dx = \left[R(a,\lambda) + \frac{O(1)}{\lambda}\right]^2 \int_a^b [\lambda - q(x)]^{-1/2}\cos^2\emptyset\ dx$$

olur.

$(\lambda - q)^{-1/2} = \lambda^{-1/2} + O(1)\lambda^{-3/2}$ olarak yazılabileceğinden, bunu yukarıdaki integralde yerine yazar ve (2.62) ifadesini de kullanarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\int_a^b u^2(x)dx = \left[R(a,\lambda) + \frac{O(1)}{\lambda}\right]^2 \left[\lambda^{-1/2} + O(1)\lambda^{-3/2}\right]\left[\frac{b-a}{2} + O(1)\lambda^{-1/2}\right]$$
$$= \left[R(a,\lambda) + \frac{O(1)}{\lambda}\right]^2 \left[\frac{b-a}{2\lambda^{1/2}} + \frac{O(1)}{\lambda}\right]$$

olur. Bulunan bu son ifadenin her iki tarafının karekökü alınırsa,

$$\left[\int_a^b u^2(x)dx\right]^{1/2} = \left[R(a,\lambda) + \frac{O(1)}{\lambda}\right]\left[\frac{b-a}{2\lambda^{1/2}} + \frac{O(1)}{\lambda}\right]^{1/2}$$
$$= \frac{R(a,\lambda)}{\lambda^{1/4}}\sqrt{\frac{b-a}{2}}\left[1 + \frac{O(1)}{\lambda^{1/2}}\right] + \frac{O(1)}{\lambda^{5/4}}$$

ifadesi elde edilir ki ispat biter.

Sonuç 2.12.2.1. Eğer lemma 2.12.2.de $\int_a^b u^2(x,\lambda)dx = 1$ ise o zaman,

$$R(a,\lambda) = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\ \lambda^{1/4}\left[1 + O(1)\lambda^{-1/2}\right] \qquad (2.64)$$

olur.

İspat: (2.62)formülü, nomalleştirilmiş bir çözümün uzunluk fonksiyonu ile,

$$1 - \frac{O(1)}{\lambda^{5/4}} = \frac{R(a,\lambda)}{\lambda^{1/4}}\sqrt{\frac{b-a}{2}}\left[1 + \frac{O(1)}{\lambda^{1/2}}\right]$$

eşitliğini sağlayacak biçimde verilir.

Burada R için çözüm yapılır ve kesrin asimptotik durumu dikkate alınırsa,(2.64) ifadesi elde edilir.

Lemma 2.12.3. (2.46)-(2.47) regüler S-L sisteminin n-inci özdeğeri λ_n olsun $(\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots)$.O zaman $\alpha' = 0$ ve $\beta' = 0$ durumu hariç olmak üzere $n \to \infty$ için,

$$\cos\emptyset(x,\lambda_n) = \cos\frac{n\pi(x-a)}{(b-a)} + O(1)\lambda_n^{-1/2} \qquad (2.65)$$

olur.

İspat: Teorem 2.7 ve $|\cos a - \cos b| \leq |a-b|$ eşitsizliğinden,

$$\cos\left[-\sqrt{\lambda_n}(x-a)\right] - \cos\emptyset(x,\lambda_n) = O(1)\left[\sqrt{\lambda_n}(x-a) + \emptyset(x,\lambda_n)\right]$$
$$= O(1)\emptyset(a,\lambda_n) + O(1)\lambda_n^{-1/2}$$

bulunur.(2.58)-de $\emptyset(a,\lambda_n) = O(1)\lambda_n^{-1/2}$ olarak bulunmuştu. Buradan hareketle,

$$\cos\emptyset(x,\lambda_n) = \cos\left[\sqrt{\lambda_n}(x-a)\right] + O(1)\lambda_n^{-1/2} \qquad (2.66)$$

elde edilir.Bu son ifadeye teorem 2.8.i uyguluyalım.(2.55) formülü ve ortalama değer teoreminden,

$$\cos\left[\sqrt{\lambda_n}(x-a)\right] - \cos\left[\frac{n\pi(x-a)}{(b-a)}\right] = O(1)n^{-1} = O(1)\lambda_n^{-1/2}$$

olur.(2.66)-nın sağ tarafında bu son ifade yerine yazılırsa,(2.65) formülü elde edilir ki ispat biter.

Şimdi bu ispatlardan sonra teorem 2.9.un ispatına devam edelim.(2.61)-deki üç çarpandan ilkini,birinci dereceden $(\lambda-q)^{-1/4} = \lambda^{-1/4} + O(1)\lambda^{-5/4}$ yaklaşımı ile sadeleştirebiliriz.$R(x,\lambda)$ çarpanı sonuç 2.12.2.1.den ve $\cos\emptyset(x,\lambda_n)$ ise lemma 2.12.3.den hesaplandı.Bütün bu çarpanlar (2.61)-de yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$u_n(x)=\sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\left[\frac{n\pi(x-a)}{(b-a)}\right]+0(1)\lambda_n^{-1/2}$$

olur.Son ifadede $\lambda_n^{-1/2}=0(1)n^{-1}$ olduğundan yerine yazılırsa teorem 2.9.un ispatı tamam olur.

III.BÖLÜM

GENEL AĞIRLIKLI STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİNİN ÖZDEĞERLERİNİN VE SIFIRLARININ SAYISININ ASİMPTOTLARI

3.1. Giriş

$[0,b]$ aralığı üzerinde,

$$(p(x)y')' + (\lambda r(x) - q(x))y = 0 \qquad (3.1)$$

biçiminde verilen genel ağırlıklı Sturm-Liouville denkleminin trivial olmayan bir çözümünün sıfırlarının sayısını $N(\lambda)$ ile gösterelim. $0<b<\infty$ olmak üzere,(3.1) diferensiyel denklemindeki p,q,r katsayı-fonksiyonları $[0,b]\to R$ ye tanımlı ve $\frac{1}{p}$, $q,r\in L(0,b)$ dir.

Gohberg ve Krein $(0,b)$ aralığı üzerinde hemen hemen heryerde (h.h.h.) $p(x)>0, r(x)>0$ olmak üzere $\lambda\to\infty$ için

$$N(\lambda) \sim \pi^{-1}\sqrt{\lambda}\int_0^b \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}\,dx \qquad (3.2)$$

biçimindeki $N(\lambda)$ ifadesini (3.1) denkleminin asimptotik hesabı olarak belirttiler [4].Ancak bu durum daha önce diğer matematikçiler tarafından da tespit edilmiştir. Gohberg ve Krein sözkonusu bu çalışmalarında (3.1) denkleminin katsayı-fonksiyonlarını yine $L(0,b)$ üzerinde almışlar ve bu fonksiyonların sağlaması gereken şartları en aza indirerek (3.2)-nin geçerli olduğunu göstermişlerdir.

Burada $r(x)$ her iki işareti de almak üzere,modified prüfer dönüşümü kullanılarak (3.2)-nin direkt bir ispatı verilecektir.

f_+ ile f-in pozitif kısmı belirtilmek üzere,Jörgens (3.1) diferensiyel denklemi için $N(\lambda)$ ifadesini, $\lambda\to+\infty$ için,

$$N(\lambda) \sim \pi^{-1}\sqrt{\lambda}\int_0^b \sqrt{\left(\frac{r(x)}{p(x)}\right)_+}\,dx \qquad (3.3)$$

ve $\lambda \to -\infty$ için

$$N(\lambda) \sim \pi^{-1}\sqrt{-\lambda}\int_0^b \sqrt{\left(\frac{r(x)}{p(x)}\right)_-}\,dx \qquad (3.4)$$

olarak belirtmiştir [3].

Eğer (0,b) aralığında h.h.h.de p(x) bir tek işaret alıyor ise (bu işaret pozitif olarak alınır),(3.3) ve (3.4) integralleri sıfırdan farklıdır.Genel olarak p(x)-in işaret değişiminin sınırlı olmadığı (veya sınırlı olduğu) durumlarda da (3.3) ve (3.4) integralleri geçerlidir.

Sonlu λ için $N(\lambda)=+\infty$ olabileceğinden,eğer p(x)-in sonsuz sayıda işareti değiştirilirse (3.3) veya (3.4) geçerli olmayabilir.Bunu görmek için p(x)-i, $p(x)=\int_a^x \frac{ds}{p(s)}$ olarak seçersek (0,b) aralığında p(x)-in işareti sonsuz defa değişir.

(3.1) diferensiyel denkleminde $q(x)\equiv 0, \lambda=0$ ise,O zaman $y(x)\equiv p(x)$ çözümdür.

Burada r(x)-in işaret değişimine herhangi bir sınırlama getirilmemek üzere,p(x)-in işaret değişimi sonlu da olsa, Drichlet problemine benzer şekilde oluşturulan (3.1)-in spektrumu tüm kompleks düzlemi doldurur.

Örneğin,$q(x)\equiv 0$ olmak üzere $0<x<1$ aralığında $p(x)=1$ ve $r(x)=1$, $-1<x<0$ aralığında da $p(x)=-1$ ve $r(x)=-1$ olarak verilsin.O zaman py' -nün her durumu için,(3.1) diferensiyel denkleminin çözümü olan özfonksiyonlar (0,b) aralığında mutlak süreklidir.Bundan dolayı $\forall\lambda\in C$ ve $-1<x<1$ için $y(-1,\lambda)=0=y(1,\lambda)$ olmak üzere $y(x,\lambda)=\sin\left[(1-|x|)\sqrt{\lambda}\right]$ fonksiyonu (3.1) diferensiyel denklemini sağlar.

Burada $\lambda \neq 0$ için $y(x,\lambda)$ bir özfonksiyondur.

Öteyandan, eğer $(0,b)$ aralığında h.h.h. $p(x)>0$ ve $r(x)$ her iki işareti de alıyorsa (3.1) diferensiyel denklemi tanımsızdır. Homojen ayrık $x=a$ ve $x=b$ sınır şartları için (3.1) diferensiyel denkleminin λ_n^+ özdeğerlerinin asimptotik gösterimi $n \to +\infty$ olduğunda,

$$\lambda_n^+ \sim \frac{n^2\pi^2}{\left\{\int_0^b \sqrt{\left(\frac{r(x)}{p(x)}\right)_+}\, dx\right\}^2} \tag{3.5}$$

olur ve λ_n^- negatif özdeğerlerinin asimptotik gösterimi ise $n \to -\infty$ olduğunda,

$$\lambda_n^- \sim \frac{n^2\pi^2}{\left\{\int_0^b \sqrt{\left(\frac{r(x)}{p(x)}\right)_-}\, dx\right\}^2} \tag{3.6}$$

olur [6] .

Sonuç olarak $y(x,\lambda)$, (3.1) diferensiyel denkleminin bir çözümü olmak üzere, (3.5) ve (3.6) ifadelerinden dolayı sabit x için λ-nın tam ~~bir~~ fonksiyonudur ve derecesi de 1/2 dir.

3.2. (3.1) için $N(\lambda)$ -nın Asimptotları

Aşağıdaki lemma ve teoremlerde $\frac{1}{p}, q, r \in L(0,b)$ ve $\frac{r}{p}$, $(0,b)$ aralığında her iki işareti de almak üzere,

$$\int_0^b \sqrt{\left(\frac{r(x)}{p(x)}\right)_\mp}\, dx > 0 \tag{3.7}$$

olduğu kabul edilecektir.

<u>Lemma 3.2.1.a)</u> $(0,b)$ aralığında h.h.h. $p(x)>0$ ve $r(x)\geq 0$ olsun. O zaman (3.1) diferensiyel denklemi için $\lambda \to +\infty$ olduğunda

$$N(\lambda) \sim \pi^{-1}\sqrt{\lambda}\int_0^b \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}\,dx \qquad (3.8)$$

olur.

b) (0.b) aralığında h.h.h. $p(x)>0$ ve $r(x)\geqslant 0$ olsun. $0\leqslant\alpha$ ve $\beta<\pi$ için, sınır şartları

$$y(0)\cos\alpha-(py')(0)\sin\alpha=0 \qquad (3.9)$$

$$y(b)\cos\beta+(py')(b)\sin\beta=0 \qquad (3.10)$$

biçiminde verilmek üzere, (3.1)-(3.9)-(3.10) sınır-değer problemini gözönüne alalım. Ayrıca (3.1) diferensiyel denkleminde $\lambda=\lambda_n$ konularak (0,b) aralığındaki her bir n sıfırına bir özfonksiyon karşılık gelecek biçimdeki λ_n özdeğerlerinin dizisi $\{\lambda_n\}$ ile gösterilsin. O zaman $n\to\infty$ için,

$$\lambda_n \sim \frac{n^2\pi^2}{\left\{\int_a^b \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}\,dx\right\}^2} \qquad (3.11)$$

olur.

<u>İspat:</u> a) Burada $p(x)\equiv 1$ durumunda ispat yapılması yeterlidir. (3.1) diferensiyel denkleminde x serbest değişkeni için $x\to \tau(x)=\int_0^x \frac{ds}{p(s)}$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$y''+(\lambda rp-pq)y=0 \;,\quad \left(\,'=\frac{d}{d\tau}\right)$$

olur. Bu son ifade için $p\equiv 1$ kabulü altında (3.8)-in ispatı yapılacaktır. Buradan hareketle (3.1) denkleminde de $p(x)\equiv 1$ olarak kabul edilebilir.

Şimdi $h\in C^1([0,b],R^+)$ olarak verilsin (yani $x\in[0,b]$ için $h(x)>0$ olsun). Ayrıca $y(0,\lambda)=1$, $y'(0,\lambda)=0$ olsun.

Prüfer açısı $\theta=\theta(x,\lambda)$ ise,

$$\tan\theta = -\frac{y'}{yh\sqrt{\lambda}} \quad , \quad \lambda > 0 \tag{3.12}$$

biçiminde tanımlansın.O zaman $\theta = \theta(0,\lambda) = 0$ ve

$$\theta' = h\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\left(\frac{r}{h} - h\right)\cos^2\theta - \frac{1}{2}\frac{h'}{h}\sin 2\theta - \frac{q}{h\lambda^{1/2}}\cos^2\theta \tag{3.13}$$

olur. y-nin sıfırlarının θ artması aldığına dikkat edelim. Böylece

$$N(\lambda) = \pi^{-1}\theta(b,\lambda) + O(1) \quad , \quad \lambda > 0 \tag{3.14}$$

olur.(3.8) ve (3.14) gözönüne alınırsa,(3.14) ifadesinin h-den bağımsız olduğu görülür ($h \in C^1$ ve $h(x) > 0$ olduğundan). Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\int_0^b |h - \sqrt{r}|\,ds < \varepsilon \quad , \quad \int_0^b \left|\frac{r}{h} - h\right| ds < \varepsilon \tag{3.15}$$

eşitsizliğini gerçekleyecek biçimde bir h -nin seçilebileceğini göstermek yeterlidir.h -yi bir $\delta > 0$ sayısına bağlı olarak tekrar belirleyelim.Önce

$$\int_0^b |\sqrt{r} - w|^2 ds < b\delta^2 \quad , \quad w \geqslant 0 \tag{3.16}$$

olacak şekilde bir w fonksiyonu seçelim.Bu w fonksiyonunu (C,1)-de $\sqrt{r}$ -nin Fourier açılımının kısmî toplamları olarak kabul edebiliriz.Bu kabulde w, $\sqrt{r}$ -ye bağlı olduğundan negatif olamaz.

$w \in C^1$ ve $w > 0$ olmak üzere,

$$h = w + \delta \tag{3.17}$$

eşitliğini sabit bir w -ye bağlı olarak seçelim.O zaman

$$\int_0^b |h - \sqrt{r}|\,ds \leq 2b\delta \tag{3.18}$$

olur.Ayrıca

$$\left|\frac{r}{h} - h\right| \leqslant \frac{\sqrt{r}}{h}|\sqrt{r} - h| + |\sqrt{r} - h| \tag{3.19}$$

olarak yazabiliriz.Bu ifadenin sağındaki ikinci terimin integrali (3.18) ile hesaplandı.Şimdi de (3.19) eşitsizliğinin sağındaki ilk terimin integralini hesaplayalım. Bunun için I_1 ve I_2 kümelerini

$$I_1 = \left\{ x \in [0,b] : w(x) \geq \sqrt{\delta} \right\}$$

$$I_2 = \left\{ x \in [0,b] : w(x) < \sqrt{\delta} \right\}$$

biçiminde tanımlayalım. I_1 de $h(x) > \sqrt{\delta}$ dır.Schwarz eşitsizliğinin uygulanmasıyla,

$$\int_{I_1} \frac{\sqrt{r}}{h} |\sqrt{r} - h| ds \leq \frac{\|r\|_1^{1/2}}{\delta^{1/2}} \left\{ \int_0^b |\sqrt{r} - w - \delta|^2 ds \right\}^{1/2}$$

elde edilir ki burada $\|r\|_1$, $(0,b)$ aralığında r -nin L^1 normudur.Yukarıdaki ifadeye şimdi de Minkowski eşitsizliğini uygularsak,

$$\int_{I_1} \frac{\sqrt{r}}{h} |\sqrt{r} - h| ds \leq 2(\delta \|r\|_1 b)^{1/2} \qquad (3.20)$$

bulunur. I_2 üzerinde $h(x) \geq \delta$ dır.Bu kezde (3.19)-un sağındaki ilk terimin integrali I_2 üzerinde alınırsa (Minkowski eşitsizliğinden faydalanarak),

$$\int_{I_2} \frac{\sqrt{r}}{h} |\sqrt{r} - h| ds \leq \frac{1}{\delta} \left\{ \int_{I_2} r ds \right\}^{1/2} (\delta \sqrt{b}) \qquad (3.21)$$

olur. (3.21) eşitsizliğinin sağındaki integrali

$$\int_{I_2} r\, ds \leq 2 \int_{I_2} (\sqrt{r} - w)^2 ds + 2 \int_{I_2} w^2 ds$$

biçiminde yazılabileceğinden,

$$\int_{I_2} r\, ds \leq 2b\delta^2 + 2b\delta \qquad (3.22)$$

elde edilir.

En son elde ettiğimiz (3.22)-yi (3.21)-de yerine yazarak (3.20) ve (3.18) ifadeleriyle toplarsak,(3.19) -un integrali,

$$\int_0^b \left|\frac{r}{h} - h\right| ds \leq 2b\delta + 2(\delta\|r\|_1 b)^{1/2} + \sqrt{b}(2b\delta^2+b\delta)^{1/2} \quad (3.23)$$

olur.Böylece $\varepsilon > 0$ için,

$$\max\{2b\delta \, , \, 2b\delta + 2(\delta\|r\|_1 b)^{1/2} + \sqrt{b}(2b\delta^2 + 2b\delta)^{1/2} = 2b\delta < \frac{\varepsilon}{4}$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $\delta > 0$ seçeriz.Böylece h -yi $\delta > 0$ için yukarıdaki gibi tanımlarız.

(3.13) ve (3.15) ifadelerinden,

$$\left|\int_0^b \sqrt{r}\, ds - \frac{\theta(b,\lambda)}{\lambda^{1/2}}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\lambda^{1/2}} \int_0^b \left|\frac{h'}{2h}\right| ds + \frac{1}{\lambda}\int_0^b \frac{|q|}{h}\, ds \quad (3.24)$$

olarak bulunur.Burada yeteri derecede büyük her λ için, (3.24) eşitsizliğinin sağındaki son iki terimin toplamı $\frac{\varepsilon}{2}$ den küçüktür. Bu ise (3.14) ifadesinin hesaplanması demektir.

<u>İspat:</u> b) Yukarıda ispatını yaptığımız lemma 3.2.1.a) da $N(\lambda_n) = n$ yazarak (3.8) -den λ_n çekilirse (3.11) elde edilir ki ispat biter.

<u>Teorem 3.2.2</u> (Jörgens Teoremi):Her hangi bir (a_i, a_{i+1}) aralığında $i = 0,1,2,\ldots,n$ için, $a_0 = 0$ ve $a_{n+1} = b$ ve p(x) hemen hemen heryerde tek işaret almak üzere,

$(0,b) = \bigsqcup_{i=0}^{n} (a_i, a_{i+1})$ olsun.O zaman (3.1) diferensiyel denkleminin asimptotik hesabı (3.3) ve (3.4) ile verilir.

<u>İspat:</u> Sturm-Liouville problemlerinde ilk dikkate alacağımız husus,sonlu λ-lar için $N(\lambda)$ -nın sonlu olduğudur. Burada (0,b) aralığı üzerinde h.h.h. $p(x) > 0$ olması durumunda

(3.3) ve (3.4) ifadelerinin geçerli olduğunu ispatlayacağız (İkinci durum olan (0,b) aralığında h.h.h. $p(x)<0$ olması halinde de birinci durumda yapılan ispat geçerlidir).

Öteyandan $(-\lambda)(-r(x))=\lambda r(x)$ biçiminde yazılabileceğinden (3.3) ve (3.4) ifadelerinden bir tanesinin ispatının yapılması yeterlidir.

Şimdi (0,b) aralığında h.h.h. $p(x)>0$ olması halinde (3.3) -ün geçerli olduğunu göstereceğimizden $p(x)\equiv 1$ olarak alabiliriz. Bu kabuller altında (3.1) denklemi yerine,

$$y''+(\lambda r(x)-q(x))y=0 \qquad (3.25)$$

denkleminin ispatının yapılması yeterlidir. Lemma 3.2.1.a nın ispatından $\lambda\to\infty$ için $N(\lambda)$ ifadesi,

$$N(\lambda)\sim\pi^{-1}\sqrt{\lambda}\int_0^b\sqrt{r_+(x)}\,dx \qquad (3.26)$$

olarak elde edilir ($p(x)\equiv 1$ olarak alındığından). Yine lemma 3.2.1.a) nın ispatında h -yi tanımladık ve θ -yı (3.12) ve (3.13) ifadelerinden elde ettik. Bu ifadeler (3.14) ifadesinde yerine yazılırsa, $\lambda\to+\infty$ için

$$\theta(b,\lambda)\sim\sqrt{\lambda}\int_0^b\sqrt{r_+(x)}\,dx$$

olduğunu göstermemiz gerekir. Ancak lemma 3.2.1.a) ve Sturm-Karşılaştırma teoreminden,

$$\limsup_{\lambda\to+\infty}\lambda^{-1/2}\theta(b,\lambda)\leqslant\int_0^b\sqrt{r_+(x)}\,dx \qquad (3.27)$$

olur. Böylece $\varepsilon>0$ için,

$$\liminf_{\lambda\to+\infty}\lambda^{-1/2}\theta(b,\lambda)\geqslant\int_0^b\sqrt{r_+(x)}\,dx-\varepsilon \qquad (3.28)$$

ifadesini sağlayacak şekilde bir h -nin seçilebileceğini göstermeliyiz.

$\delta > 0$ olmak üzere r_+ , r_- ve w_+ , w_- fonksiyonlarını seçelim.Öyle ki,

$$w_+(x) \geqslant 0 \ , \ w_-(x) \geqslant 0 \qquad (3.29)$$

olarak verilsin.O zaman

$$\int_0^b \left|\sqrt{r_+} - w_+\right|^2 ds \leqslant b\delta^2 \qquad (3.30)$$

ve

$$\int_0^b \left|\sqrt{r_-} - w_-\right|^2 ds < b\delta^2 \qquad (3.31)$$

olur.Burada $h = w_+ + \delta$ olmak üzere $J_1, \ldots, J_4$ kümelerini şöyle tanımlayalım.

$$J_1 = \left\{x \in [0,b] : w_+(x) \leqslant \sqrt{\delta}\right\}$$

$$J_2 = \left\{x \in [0,b] : w_+(x) > \sqrt{\delta},\ w_-(x) > \sqrt{\delta},\ r(x) \geqslant 0\right\}$$

$$J_3 = \left\{x \in [0,b] : w_+(x) > \sqrt{\delta},\ w_-(x) > \sqrt{\delta},\ r(x) < 0\right\}$$

$$J_4 = \left\{x \in [0,b] : w_+(x) > \sqrt{\delta},\ w_-(x) \leqslant \sqrt{\delta}\right\}$$

$w_{\mp}(x)$ polinomlar olarak seçilebileceğinden J_1 ve J_4 aralıkların sonlu toplamından oluşur. J_4 üzerine (3.13)-ü uygularsak (J_4-ü oluşturan aralıkların herbiri diğerinin tümleyeni olması şartıyla),$\cos\theta = 0$ iken $\theta(x,\lambda)$ arttığından $\theta(x,\lambda)$ en fazla 2π kadar azalır.Böylece

$$\frac{\theta(x,\lambda)}{\lambda^{1/2}} \geqslant \int_{J_4} h\, ds - \int_{J_4} \left|\frac{r}{h} - h\right| ds - O(\lambda^{-1/2}) \qquad (3.32)$$

olur.Burada uygun h ve verilen $\varepsilon > 0$ için,

$$\left| \int_{J_4} h\, ds - \int_0^b \sqrt{r_+}\, ds \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3.33)$$

ve

$$\int_{J_4} \left|\frac{r}{h} - h\right| ds < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.34}$$

olduğunu göstermeliyiz.(3.18) ifadesindeki düşünce tarzı (3.30) -a uygulanırsa,

$$\int_0^b \left|\sqrt{r_+} - h\right| ds < 2b\delta \tag{3.35}$$

eşitsizliği elde edilir.Burada (3.33) -ün sol tarafı,

$$2b\delta + \sum_{i=1}^{3} \int_{J_i} h \, ds \tag{3.36}$$

ifadesi ile sınırlı olduğundan bu ifade

$$5b\delta + \sum_{i=1}^{3} \int_{J_i} w_+ \, ds \tag{3.37}$$

ile büyütülürse buradan

$$\int_{J_1} w_+ \, ds < b\sqrt{\delta} \tag{3.38}$$

olur.

J_2 üzerinde $\left|\sqrt{r_-} - w_-\right| > \sqrt{\delta}$ olduğundan, $\mu(.)$ Lebesque ölçümünü göstermek üzere,(3.31) -in değeri,

$$\mu(J_2) \leq b\delta \tag{3.39}$$

olur.Benzer şekilde

$$\mu(J_3) \leq b\delta \tag{3.40}$$

olur.Böylece

$$\int_{J_4} w_+ \, ds \leq \sqrt{b\delta}\left(\int_{J_2} w_+^2 \, ds\right)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{b\delta}\left(\int_{J_2} \left|w_+ - \sqrt{r_+} + \sqrt{r_+}\right|^2 ds\right)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{b\delta}\left(2b\delta^2 + 2\|r\|_1\right)^{1/2} \tag{3.41}$$

olur. Aynı şekilde bu işlemler J_3 aralığı içinde yapılırsa

$$\int_{J_3} w_+ \, ds \leqslant \sqrt{b\delta}\left(2b\delta^2 + 2\|r\|_1\right)^{1/2} \tag{3.42}$$

olarak bulunur.

(3.35) ve (3.37) ifadeleri dikkate alınarak, (3.38), (3.41) ve (3.42) ifadeleri birleştirilirse,

$$\left|\int_{J_4} h \, ds - \int_0^b \sqrt{r_+} \, ds\right| \leqslant 5b\delta + \sqrt{b\delta} + 4\sqrt{b\delta}\left(b\delta^2 + \|r\|_1\right)^{1/2} \tag{3.43}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi (3.34) ifadesinin sol tarafını hesaplayalım. Bunun için,

$$|rh^{-1} - h| \leqslant |r_+h^{-1} - h| + |r_-h^{-1}|$$

eşitsizliği yazılır ve integral alınırsa,

$$\int_{J_4} |rh^{-1} - h| \, ds \leqslant \delta^{-1/2} \int_{J_4} r_- ds + \int_{J_4} |r_+h^{-1} - h| \, ds \tag{3.44}$$

olur. Bu eşitsizliğin sağındaki ilk integralde r_- yerine $r_- = |\sqrt{r_-} - w_- + w_-|^2$ yazarak bu ifadeye Minkowsky eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_{J_4} r_- \, ds \leqslant 2b\delta^2 + 2\delta\mu(J_4) \tag{3.45}$$

olarak bulunur. Bu ise (3.44) eşitsizliğinin sağındaki ilk terimin,

$$2\delta^{3/2} + 2b\delta^{1/2}$$

ile sınırlı olması demektir.

(3.19) ifadesinde r yerine r_+ koyup, J_4 üzerinde $h > \sqrt{\delta}$ olduğu dikkate alınırsa, (3.44) ifadesinin sağındaki ikinci integral,

$$\int_{J_4} |r_+ h^{-1} - h| ds \leq 2(b\delta \|r_+\|_1)^{1/2} + \int_{J_4} |\sqrt{r_+} - h| ds \quad (3.46)$$

olarak bulunur.(3.18) eşitsizliğinden dolayı,(3.46) -nın sağındaki integral,

$$\int_0^b |\sqrt{r_+} - h| ds < 2b\delta \quad (3.47)$$

olarak hesaplanır.

Burada (3.44) eşitsizliğinin sağındaki integrallerin değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\int_{J_4} \left|\frac{r}{h} - h\right| ds \leq 2b\sqrt{\delta}(\delta + 1) + 4b\delta + 2(b\delta\|r_+\|_1)^{1/2} \quad (3.48)$$

ifadesi elde edilir.

Böylece verilen bir $\delta > 0$ için uygun bir $\varepsilon > 0$ buluruz. Öyleki (3.43) ve (3.48) eşitsizliklerinin sağındaki sayıların en büyüğü $\frac{\varepsilon}{2}$ den küçük olur.O halde (3.33) ve (3.34) eşitsizlikleri sağlanır. Buradan (3.28) ifadesine varılır ki ispat tamam olur.

<u>Teorem 3.2.3.</u> Verilen bir (0,b) aralığında h.h.h. $p(x) > 0$ olsun.O zaman (3.1) denklemi ile (3.9)-(3.10) sınır şartlarından oluşan sınır-değer probleminin lemma 3.2.1.b) ile verilen $\{\lambda_n^{\mp}\}$ reel özdeğerlerinin dizisi iki yönlü sonsuzluğa sahiptir.Öyleki bu özdeğerlerin asimptotik gösterimi $n \to \infty$ için,

$$\lambda_n^{\mp} \sim \mp \frac{n^2\pi^2}{\left\{\int_0^b \sqrt{\left(\frac{r(x)}{p(x)}\right)_{\mp}} dx\right\}^2} \quad (3.49)$$

biçimindedir.

İspat: (3.1) diferensiyel denkleminin (3.9) sınır şartını sağlayan bir çözümü y olmak üzere, $p = 1$ için Prüfer açısı $\tan\theta = \frac{y}{y'}$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda θ açısı,

$$\theta' = \cos^2\theta + (\lambda r - q)\sin^2\theta$$

denklemini sağlasın ve y -nın bir sıfırında artsın. Böylece

$$N(\lambda) = \pi^{-1}\theta(b,\lambda) + O(1)$$

olur. Fakat $\lambda \to +\infty$ için $N(\lambda) \to +\infty$ olduğunu biliyoruz. Bu sebeple $n \in N$ ve $\theta(b,\lambda) = \beta + n\pi$ olmak üzere, yeteri derecede büyük her n ve $\lambda > 0$ için enaz bir çözüme sahiptir. O halde (3.1) denkleminin λ bir özdeğeri olmak üzere, bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon enaz n -tane sıfıra sahip olmalıdır.

(0,b) aralığında $n_H \geqslant 0$ olmak üzere, $n \geqslant n_H$ için bir özfonksiyon n -tane sıfıra sahip ise tamdır denir.

Benzer bir yorumda $\lambda \to -\infty$ için getirilir. Bundan dolayı λ_n özdeğerleri yönlü bir şekilde sıralanabilir ki o zaman $y(x,\lambda_n^+)$ özfonksiyonu (0,b) aralığında tam n tane sıfıra sahip olur. Böylece $p(x) \equiv 1$ için teoremin birinci iddiası ispatlanmış olur. İkinci iddia ise lemma 3.2.1.b) den dolayı açıktır.

Uyarı 3.2.4.a) (3.1) diferensiyel denkleminin bir çözümü olan $y(x,\lambda)$, (3.8) ve (3.48) ifadelerinden de anlaşılacağı üzere, sabit x için λ-nın bir fonksiyonudur ve derecesi de 1/2 olur.

b) n bir tam sayı ve $n \geqslant 1$ olmak üzere, teorem 3.2.2. nin ispatında kullanılan yöntemler,

$$(p(x)y')' + \left[a_n(x)\lambda^n + a_{n-1}(x)\lambda^{n-1} + \ldots + a_1(x)\lambda + a_0(x)\right]y = 0, \quad (3.50)$$

biçiminde verilen diferensiyel denklem ile sınır şartlarından oluşan sınır-değer problemleri için de uygulanabilir.

3.3. (3.50) İçin $N(\lambda)$ -nın Asimptotları

Özel bir şart verilmedikçe bu konuda $\frac{1}{p}, a_i \in L(0,b)$, $i=0,1,2,\ldots,n$ olmak üzere, $\frac{a_n}{p}$ -nin her iki işareti de alması durumunda

$$\int_0^b \sqrt{\left(\frac{a_n(x)}{p(x)}\right)_{\mp}}\, dx > 0 \tag{3.51}$$

olduğu kabul edilecektir.

Lemma 3.3.1.a) Verilen bir $(0,b)$ aralığı üzerinde $p(x) > 0$ ve $a_n(x) \geqslant 0$ olsun.O zaman (3.50) diferensiyel denklemi için $N(\lambda)$ -nın asimptotik gösterimi, olduğunda,

$$N(\lambda) \sim \frac{\lambda^{n/2}}{\pi} \int_0^b \sqrt{\left(\frac{a_n(x)}{p(x)}\right)}\, dx \tag{3.52}$$

elde edilir.

b) $p, a_i \in C[0,b]$ ve $[0,b]$ aralığında $a_n(x) > 0$ olduğunda $p(x) > 0$ olarak verilsin.O zaman (3.50) diferensiyel denklemi ve (3.9)-(3.10) sınır şartlarından oluşan sınır-değer problemi sadece $+\infty$ da sonsuz sayıda pozitif özdeğerlere sahiptir.Bu özdeğerler $\lambda = \lambda_m$ diye sınıflandırılabileceğinden $(0,b)$ aralığındaki her m sıfırına tam olarak bir tane özfonksiyon karşılık gelir. [illegible]yet m yeteri derecede büyütülürse,yani $m \to +\infty$ için

$$\lambda_m \sim \frac{m^{2/n}\, \pi^{2/n}}{\left\{\int_0^b \sqrt{\left(\frac{a_n(x)}{p(x)}\right)}\, dx\right\}^{2/n}} \tag{3.53}$$

olur.

İspat a) Bundan önceki teoremlerin ispatlarında olduğu gibi,burada da genelliği bozmaksızın $p(x)\equiv 1$ olarak kabul edeceğiz.Bu ispat lemma 3.2.1.a) nın ispatının bir genellemesidir.Bu durumda (3.50) diferensiyel denkleminin bir $y(x,\lambda)$ çözümü,sabit x için λ-nın tam bir fonksiyonudur ve derecesi de 1/2 olur.

Lemma 3.2.1.a) nın ispatını yaparken $h\in C^1(0,b)$ için $h>0$ olduğunu gösterdik ve Prüfer açısını,

$$\tan\theta = \frac{y}{y'} = -\frac{\lambda'}{yh\lambda^{n/2}} \quad , \lambda > 0 \tag{3.54}$$

biçiminde tanımladık.

(3.50) diferensiyel denklemi için y -nin katsayısı olan $q(x,\lambda)$ -yı yazalım.O zaman

$$\theta' = h\lambda^{n/2} + \left[\frac{q}{h\lambda^{n/2}} + h\lambda^{n/2}\right]\cos^2\theta - \frac{h'\sin 2\theta}{2h} \tag{3.55}$$

olur.(3.55) ifadesi düzenlenerek yeniden yazılırsa,

$$\frac{\theta'}{\lambda^{n/2}} = h + \left[\frac{a_n}{h} - h\right]\cos^2\theta - \frac{h'\sin 2\theta}{2h}$$
$$+ \cos^2\theta\left[a_{n-1}h^{-1}\lambda^{-1} + a_{n-2}h^{-1}\lambda^{-2} + \dots + a_0h^{-1}\lambda^{-n}\right]$$

bulunur. Burada y -nin bir sıfırında θ artar.Böylece (3.14) ifadesini tekrar yazabiliriz.Buradan da lemma 3.2.1.a) nın ispatında olduğu gibi her $\varepsilon > 0$ için,

$$\int_0^b \left|h - \sqrt{a_n}\right| ds < \frac{\varepsilon}{4} \ , \quad \int_0^b \left|a_n h^{-1} - h\right| ds < \frac{\varepsilon}{4} \tag{3.56}$$

eşitsizliklerini gerçekleyen enaz bir $h\in C^1(0,b)$ vardır ve $h>0$ dır.Bunu göstermek için,yine lemma 3.2.1.a) nın ispatında olduğu gibi $\delta > 0$ için h -yi $h = w + \delta$ biçiminde tanımlayalım.Burada $w(x) \geqslant 0$ ve

$$\int_0^b \left|\sqrt{a}_n - w\right|^2 ds < b\delta^2$$

eşitsizliğini gerçekleyen bir polinomdur.Buradan itibaren yapılacak işlemler lemma 3.2.1.a) nın ispatında yapılanların bir tekrarı olacağından ispat tamam olur.

b) Yukarıda lemma 3.2.1.b) nin ispatında yaptığımız gibi,lemma 3.3.1.a) ile verilen (3.52) ifadesinde $N(\lambda_m) = m$ koyar ve buradan λ_m -i çekersek (3.53) ifadesini elde ederiz ki ispatlanması istenen de budur.

<u>Teorem 3.3.2.</u> (3.50) diferensiyel denklemindeki p(x) katsayı fonksiyonu Jörgens teoremindeki şartları sağlasın. O zaman $\lambda \to +\infty$ için

$$N(\lambda) \sim \frac{\lambda^{n/2}}{\pi} \int_0^b \sqrt{\left(\frac{a_n(x)}{p(x)}\right)_+}\, dx \qquad (3.57)$$

ve $\lambda \to -\infty$ için,

$$N(\lambda) \sim \frac{(-\lambda)^{n/2}}{\pi} \int_0^b \sqrt{\left(\frac{a_n(x)}{p(x)}\right)_-}\, dx \qquad (3.58)$$

olur.

Şimdi de $[0,b]$ aralığı üzerinde verilen

$$-y'' + q(x)y = \lambda\{i(g(x)y)' + ig(x)y' + w(x)y\} \qquad (3,59)$$

biçimindeki âdi simetrik diferensiyel denklemini göz önüne alalım.Burada (3.59) denklemi ile verilen q,g,w reel değerli katsayı fonksiyonları $g \in AC[0,b]$ ve $q,g,w \in L(0,b)$ olarak verilir.(3.59) diferensiyel denklemi üzerinde umumiyetle Everitt çalışmıştır [9] .Yine bu denklem üzerine ilk değişken dönüşümünü Mingarelli uygulamıştır [7] .

<u>İspat:</u> $[0,b]$ aralığı üzerinde h.h.h. $p(x) > 0$ olduğunu kabul edelim.

Gerçekten $p(x) \equiv 1$ olmak üzere,θ lemma 3.3.1.a) nın ispatındaki gibi tanımlanır ve gerekli düzenleme ve değişiklikler yapılırsa,teorem 3.2.2.nin ispatına benzer biçimde yapılır.

(3.50) diferensiyel denkleminin $y(x,\lambda)$ çözümü

$$y(x,\lambda) = z(x,\lambda)\exp\left(-i\lambda\int_0^x g(s)ds\right) \qquad (3.60)$$

biçiminde seçilirse,o zaman (3.59) diferensiyel denklemi

$$z'' + \left[g^2(x)\lambda^2 + w(x)\lambda - q(x)\right]z = 0 \qquad (3.61)$$

diferensiyel denklemine dönüşür.

Eğer (3.61) diferensiyel denkleminin $z(x,\lambda)$ çözümünün sıfırlarının sayısı $N(\lambda)$ ile gösterilirse,lemma 3.3.1.a) dan dolayı $\lambda \to +\infty$ için $N(\lambda)$ ifadesi

$$N(\lambda) \sim \frac{\lambda}{\pi}\int_0^b |g(s)|ds$$

olur.Burada (3.61) diferensiyel denkleminin $z(x,\lambda)$ çözümünün sıfırları için geçerli olan $N(\lambda)$ ifadesi,(3.60) ile verilen değişken dönüşümü altında (3.59) diferensiyel denkleminin $y(x,\lambda)$ çözümünün sıfırlarının sayısı içinde geçerlidir.

Teorem 3.3.3. (3.59) diferensiyel denkleminin q,g,w katsayı fonksiyonları teorem 3.3.2. ile verilen şartları sağlasın.Ayrıca

$$\int_0^b |g(s)|ds > 0 \qquad (3.62)$$

olduğunu kabul edelim.O zaman (3.61) diferensiyel denklemi için $\lambda \to +\infty$ olduğunda $N(\lambda)$ ifadesi,

$$N(\lambda) \sim \frac{\lambda}{\pi} \int_0^b |g(s)|\,ds \qquad (3.63)$$

biçiminde olur.

<u>İspat:</u> Yukarıda verilen lemma 3.2.1.a ve teorem 3.4.2. için yapılan ispatlar altında,(3.59) diferensiyel denkleminin çözümlerinin sıfırlarının sayısınında (3.63) ile gösterileceği açıktır.

<u>Uyarı 3.3.3.1.</u> Reel bir λ özdeğerine karşılık gelen $y(x,\lambda)$ özfonksiyonu kompleks değerlidir.Bundan dolayı $y(x,\lambda)$ özfonksiyonu

$$y(x,\lambda) = z(x,\lambda)\exp\left\{-i\lambda \int_0^b g(s)ds\right\}$$

biçimindedir ki burada verilen $z(x,\lambda)$ fonksiyonu reel-değerlidir.Böylece $z(x,\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısıda $N(\lambda)$ ile verilir.Ayrıca $y(x,\lambda)$ fonksiyonu $z(x,\lambda)$ -ya bağlı olduğundan,$y(x,\lambda)$ -nın sıfırlarının sayısı da $N(\lambda)$ ile sayılır.

<u>Teorem 3.3.4.</u> (3.50) diferensiyel denkleminin $[0,b]$ aralığı üzerinde verilen katsayı fonksiyonları $q,g,w \in C[0,b]$ ve $g(x) > 0$ olarak verilsin.Bu taktirde,

$$y^{[0]}(0)\cos\alpha - y^{[1]}(0)\sin\alpha = 0 \qquad (3.64)$$

$$y^{[0]}(b)\cos\beta + y^{[1]}(b)\sin\beta = 0 \qquad (3.65)$$

sınır şartları $\alpha,\beta \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $y^{[0]}(x) = y(x)$ ve $y^{[1]}(x) = y'(x) + i\lambda g(x)y(x)$ olmak üzere verilsin.(3.59) diferensiyel denklemi ile (3.64)-(3.65) sınır şartlarından oluşan sınır-değer problemleminin λ_n özdeğeri $n \to +\infty$ için

$$\lambda_n \sim \frac{n\pi}{\int_0^b g(s)ds} \qquad (3.66)$$

biçiminde verilir ki bu λ_n özdeğerinin asimptotik gösterimidir.

Gerçekten bu λ_n özdeğerlerine karşılık gelen $y(x,\lambda_n)$ özfonksiyonları $(0,b)$ aralığında tam n -tane sıfıra sahip olur.

<u>İspat:</u> Yukarıda teorem 3.3.3.ün ispatı yapılırken kullanılan değişken dönüşümü göz önüne alınırsa, $\alpha,\beta \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ olmak üzere,(3.64)-(3.65) sınır şartları,

$$z(0)\cos\alpha - z'(0)\sin\alpha = 0$$
$$z(b)\cos\beta + z'(b)\sin\beta = 0$$

biçiminde bir çift ayrık homojen sınır şartlarına dönüşür. Bu kabuller altında (3.61) diferensiyel denklemindeki λ^2 nin katsayısı pozitif olur.Böylece $z(x,\lambda)$ özfonksiyonları için (3.53) ile ifade edilen özdeğerlerin asimptotik hesabına salınım teoremi uygulanırsa (3.66) ifadesi elde edilir ki ispat biter.

ÖZET

Bu çalışmada,modified Prüfer dönüşümleri kullanılarak Sturm - Liouville problemlerinin özdeğerlerinin ve sıfırlarının sayısının asimptotik yaklaşımı verilmiştir.

SUMMARY

In this study,using the modified Prüfer transformation the asymptotic estimate is given for the number of zeros and the eigenvalues of Sturm - Liouville problems.

KAYNAKLAR

[1] Mehmet AYDIN : Diferensiyel Denklemler ve Uygulamaları,Ege Ü.Müh.Fak.Yay.,İzmir-1987

[2] G.BİRKHOFF And G.C.ROTA : Ordinary Differential Equations,Ginn And Company,Boston-1962

[3] K.JÖRGENS : Spectral Theory of Second Order Ordinary Differential Equations,Aarhus-1964

[4] I.Ts.GOHBERG And M.G.KREİN : Theory And Applications of Volterra Operators in Hilbert Space,Transl. Math.Mon.24,Providence 1970

[5] F.V.ATKİNSON And A.B.MİNGARELLİ : Asymptotics of The Number of Zeros And of The Eigenvalues of General Weighted Sturm-Liouville Problems, Journal Für Mathematik,Band 375/376, 380-393

[6] A.B.MİNGARELLİ : Asymptotic Distribution of The Eigenvalues of Non-Definite Sturm-Liouville Problems,Lecture Notes in Math. 1032,Berlin-New York 1983,375-383

[7] A.B.MİNGARELLİ : Some Remarks On The Order of An Entire Function Associated With a Second Order Differential Equation,Lecture Notes İn Math. 1032 Berlin-New York 1983 384-389

[8] A.B.MİNGARELLİ : İndefinite Sturm-Liouville Problems, Lecture Notes İn Math.964 Berlin-New York 1978,519-528

[9] W.N.EVERİTT : On Certain Regular Ordinary Differential Expressions And Related Differential Operators,Spectral Theory Of Differential Operators,I.W.Knowles And R.T.Levis eds.,New York 1981,115-167

[10] W.N.EVERİTT,M.K.KWONG And A.ZETTL : Oscillation of Eigenfunctions of Weighted reguler Sturm-Liouville Problems,J.London Math. 27 (1983),106-120

[11] P.HARTMAN : Uniqueness of Principal Values,Complete Monotonicity of Logaritmic Derivatives of Prencipal Solution And Oscillation Theorems, Math.Ann.241 (1979),257-281