T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



# TOPOLOJİK UZAYDA SÜREKLİLİĞİN KUVVETLİ VE ZAYIF ÇEŞİTLERİ ÜZERİNE

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

MATEMATİK ANABİLİM DALI



YUSUF BECEREN

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. ŞAZİYE YÜKSEL

KONYA, 1990

T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# TOPOLOJİK UZAYDA SÜREKLİLİĞİN KUVVETLİ VE ZAYIF ÇEŞİTLERİ ÜZERİNE

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YUSUF BECEREN

JÜRİ ÜYELERİ

......................

......................

......................

KONYA, 1990

# ÖZ

Bu çalışma iki bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde, çalışmamız için gerekli süreklilik çeşitlerinin kısa bir özeti ile bilinmesi gereken bazı tanım ve gösterimler verilmiştir. Ayrıca, T.Noiri'nin[1] ve C.W.Baker'ın[2] yaptığı çalışmalar bir bütünlük içerisinde ele alınıp, yalnızca ifadeleri verilen bazı teoremler ispatlanmıştır.

İkinci bölümde, hemen hemen kuvvetli θ-süreklilik incelendi. Bu süreklilik çeşitinin sağladığı bazı özellikler ispatlandı. Hemen hemen kuvvetli θ-sürekliliğin, hem süper süreklilikten hem de süreklilikten bağımsız olduğu gösterildi. Ayrıca, hemen hemen kuvvetli θ-süreklilik ile birlikte sürekliliğin diğer çeşitleri arasında karşılaştırılmalar yapıldı. Bir topolojik uzaya göre, θ-bağlantılı alt kümelerin hemen hemen kuvvetli θ-sürekli görüntülerinin, görüntü uzayına göre, δ-bağlantılı olduğu gösterildi.

**ABSTRACT**

This study consists of two sections. In the first section, a short summary of varieties of continuity which is necessary for our study are given together with some definations and notations. Also, articles and studies by T. Noiri[1] and C. W. Baker[2] are examined and some theorems are proved.

In the second section, almost strongly $\theta$-continuity is examined. Some special features which are provided by this variety of continuity are proved. it is shown that almost strongly $\theta$-continuity is independent both continuity and super continuity. Again, the almost strongly $\theta$-continuity compared with the other varieties of continuity. And finally, it is also proved that almost strongly $\theta$-continuous images of subsets $\theta$-connected relative to a topological space are $\delta$-connected relative to the range.

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı Konya Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü ile Araştırma fonuna bağlı olarak yaptım. Yurt içi literatür temininde, Ankara Orta Doğu Teknik Üniversitesi ve Yüksek öğretim Kurumu Dökümantasyon Merkezi ile İzmir Ege Üniversitesi Matematik Bölümü kütüphanesinde süreli yayınlar taradım. Yurt dışı literatür temininde ise, çok yardımları olan japon "Yatsushiro Teknoloji Koleji" profesörü Takashi NOİRİ'ye ve italyan "Le Matematiche" dergisi yetkilisine teşekkür ederim.

Ayrıca, bu çalışmamda yardımlarını esirgemeyen ve beni yönlendiren değerli hocam, Yrd. Doç. Dr. Şaziye YÜKSEL'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

## GİRİŞ

1982 yılında; B.M.Munshi ve D.S.Bassan[6], süper sürekliliği tanımlayıp inceledi. 1985 yılında; C.W.Baker[2], süper sürekliliğin diğer bütün özelliklerini ortaya koydu. Aynı zamanda C.W.Baker[2], süper süreklilik ile diğer kuvvetli süreklilik çeşitleri arasındaki karşılaştırılmaları ve süper süreklilik için bazı yeterli şartları inceledi. T.Noiri[1], $\delta$-süreklilik ve kuvvetli $\theta$-süreklilik kavramlarını tanımlayıp inceledi. C.W.Baker[2], süper sürekliliğin, kuvvetli $\theta$-süreklilik ve $\delta$-süreklilik kavramlarıyla ilgisi olduğunu gösterdi.

Bu çalışmada, T.Noiri'nin[1] tanımladığı kuvvetli $\theta$-süreklilik ile $\delta$-süreklilik arasında bulunan, hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekliliğin bir karekteristiğini elde ederek bazı özellikleri sağladığı gösterildi. Hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklilik ile sürekliliğin diğer kuvvetli ve zayıf çeşitleri arasındaki karşılaştırılmalar ve hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklilik için yeterli şartlar incelendi. Bir topolojik uzaya göre, $\theta$-bağlantılı alt kümenin hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekli fonksiyonla görüntüsünün, görüntü uzayına göre, $\delta$-bağlantılı olduğu gösterilerek, $\theta$-bağlantılılığın hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekli fonksiyonlarla korunduğu sonuç olarak verildi.

Bu çalışmada; $(X,\tau)$ topolojik uzayı yerine genellikle, X uzayı alınmıştır. Bir X uzayının A alt kümesi için,

$A^-$ : A kümesinin kapanışı,

$A^\circ$ : A kümesinin içi,

$A^{-\circ}$ : A kümesinin kapanışinin içi,

$A^{\circ -}$ : A kümesinin içinin kapanışı

gösterimleri kullanılmıştır.

Aşağıdaki tanımlar, literatürde verilmiştir:

**TANIM** Bir X uzayının A alt kümesi verilsin. $A^{-\circ} = A$ ise, A kümesine düzenli açık ve $A^{\circ -} = A$ ise, A kümesine düzenli kapalı denir[5].

**TANIM** $(X,\tau)$ topolojik uzay ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $x \in X$ noktasını kapsayan her U düzenli açık kümesi için, $A \cap U \neq \emptyset$ ise, x noktasına A kümesinin $\delta$-kapanış ($\delta$-cluster) noktası denir[14].

Benzer şekilde, $x \in X$ noktasını kapsayan her U açık kümesi için, $A \cap U^- \neq \emptyset$ ise, x noktasına A kümesinin $\theta$-kapanış noktası denir[14].

A kümesinin bütün $\delta$-kapanış ( $\theta$-kapanış ) noktalarının kümesine, A kümesinin $\delta$-kapanışı ( $\theta$-kapanışı, $\theta$-closure ) denir ve kısaca $[A]_\delta$ ( $[A]_\theta$ ) ile gösterilir[14].

Eğer $[A]_\delta = A$ ise, A kümesine $\delta$-kapalı ($\delta$-closed) denir. Benzer şekilde, $[A]_\theta = A$ ise, A kümesine $\theta$-kapalı denir[14].

**TANIM** A, bir X uzayının alt kümesi ve $x \in A$ noktası olsun. $x \in U \subset A$ olacak şekilde bir U düzenli açık kümesi varsa, A kümesine $\delta$-açık denir[14]. Eşdeğer olarak, bir $\delta$-kapalı kümenin tümleyenine, $\delta$-açık küme denir[1].

**TANIM** Bir X uzayının A alt kümesi ve $x \in X$ noktası verilsin. $x \in \overline{U} \subset A$ olacak şekilde x noktasını kapsayan bir U açık kümesi varsa, A kümesine θ-açık denir[14]. Eşdeğer olarak, bir θ-kapalı kümenin tümleyenine, θ-açık küme denir.

Bu çalışmada, adı geçen süreklilik çeşitleri genellikle aşağıdaki gösterimlerle kullanılmıştır:

str.θ-c. : kuvvetli θ-süreklilik

süper c. : süper süreklilik

c. : süreklilik

δ-c. : δ-süreklilik

θ-c. : θ-süreklilik

w.c. : zayıf süreklilik

w.δ-c. : zayıf δ-süreklilik

a.c.S. : M.K.Singal ve A.R.Singal anlamında hemen hemen süreklilik

a.str.θ-c. : hemen hemen kuvvetli θ-süreklilik

# 1. BAZI SÜREKLİLİK ÇEŞİTLERİ

## 1.1. $\delta$-SÜREKLİLİK

Bu kısımda, 1980 yılında T.Noiri'nin[1] tanımlayıp incelediği $\delta$-süreklilik kavramı ele alındı. T.Noiri'nin[1], $\delta$-sürekli fonksiyon tanımı aşağıdadır.

**1.1.1.TANIM** X, Y topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ ve $f(x)$'in her $V \subset Y$ açık komşuluğu için, $f(U^{-o}) \subset V^{-o}$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu varsa, f fonksiyonuna $\delta$-sürekli ($\delta$-continuous) denir[1].

Aşağıdaki teorem, T.Noiri[1] tarafından elde edilmiştir.

**1.1.1.TEOREM[1]** Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu için, aşağıdakiler eşdeğerdir:

a) f fonksiyonu $\delta$-süreklidir.

b) Her $x \in X$ ve $f(x)$'i kapsayan her $V \subset Y$ düzenli açık kümesi için, $f(U) \subset V$ olacak şekilde, x'i kapsayan bir $U \subset X$ düzenli açık kümesi vardır.

c) Her $A \subset X$ kümesi için, $f([A]_\delta) \subset [f(A)]_\delta$.

d) Her $B \subset Y$ kümesi için, $[f^{-1}(B)]_\delta \subset f^{-1}([B]_\delta)$.

e) Her $F \subset Y$ düzenli kapalı kümesi için, $f^{-1}(F) \subset X$ $\delta$-kapalı kümedir.

f) Her $F \subset Y$ $\delta$-kapalı kümesi için, $f^{-1}(F) \subset X$ $\delta$-kapalı kümedir.

g) Her $V \subset Y$ $\delta$-açık kümesi için, $f^{-1}(V) \subset X$ $\delta$-açık kümedir.

h) Her $V \subset Y$ düzenli açık kümesi için, $f^{-1}(V) \subset X$ $\delta$-açık kümedir.

Şimdi, [1] de yalnızca ifadeleri verilen aşağıdaki teoremleri ispatlayalım.

**1.1.2. TEOREM[1]** Eğer $f : X \to Y$ bir $\delta$-sürekli fonksiyon ve $A \subset X$ bir açık küme ise, $f_{/A}: A \to Y$ fonksiyonu $\delta$-süreklidir.

**İspat:** Her $x \in A$ ve $f(x)$'i kapsayan bir açık küme $V \subset Y$ olsun. $f$ $\delta$-sürekli olduğundan, $f(((U)^{-}_{X})^{\circ}_{X}) \subset ((V)^{-}_{Y})^{\circ}_{Y}$ olacak şekilde, $x$'i kapsayan bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Alt uzay topolojisi gereğince, $A \cap U \in \tau_A$ dır. Ayrıca, $A \cap U \subset U$ ve $(A \cap U)^{-}_{A} = A \cap (A \cap U)^{-}_{X}$ dır. Bu takdirde, $A \subset X$ açık kümesi için,

$$\begin{aligned} f(((A \cap U)^{-}_{A})^{\circ}_{A}) &= f(A \cap (A \cap (A \cap U)^{-}_{X})^{\circ}_{X}) \\ &= f(A \cap (A)^{\circ}_{X} \cap ((A \cap U)^{-}_{X})^{\circ}_{X}) \\ &= f(A \cap ((A \cap U)^{-}_{X})^{\circ}_{X}) \subset f(((U)^{-}_{X})^{\circ}_{X}) \subset ((V)^{-}_{Y})^{\circ}_{Y}. \end{aligned}$$

Böylece, $f_{/A}: A \to Y$ fonksiyonu $\delta$-süreklidir.

**1.1.3. TEOREM[1]** $X$ ve $Y$ topolojik uzaylar olmak üzere, $g : X \to X\mathrm{x}Y$, $g(x)=(x,f(x))$ ile tanımlı olacak şekilde, $f: X \to Y$ fonksiyonunun grafik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, $g$ fonksiyonunun $\delta$-sürekli olması için, gerek ve yeter şart, $f$ fonksiyonunun $\delta$-sürekli olmasıdır.

**İspat:** Gerek şart. $g$ fonksiyonu $\delta$-sürekli olsun. Her $x \in X$ ve $f(x)$'in bir $V \subset Y$ açık komşuluğunu alalım. Bu takdirde, $g(x)=(x,f(x)) \in X\mathrm{x}V \subset X\mathrm{x}Y$ bir açık kümedir. $g$ $\delta$-sürekli olduğundan, $g(U^{-\circ}) \subset (X\mathrm{x}V)^{-\circ} = X\mathrm{x}(V)^{-\circ}$ olacak şekilde, $x$'in bir

$U \subset X$ açık komşuluğu vardır. g, f fonksiyonunun grafik fonksiyonu olduğundan, $f(U^{-o}) \subset V^{-o}$ dir. Böylece, f fonksiyonu $\delta$-süreklidir.

Yeter şart. f fonksiyonu $\delta$-sürekli olsun. Her $x \in X$ ve $g(x)$'in bir $W \subset XxY$ açık komşuluğu verilsin. Bu takdirde, $g(x)=(x,f(x)) \in RxV \subset W$ olacak şekilde, x'in bir $R \subset X$ açık komşuluğu ve f(x)'in bir $V \subset Y$ açık komşuluğu vardır. f $\delta$-sürekli olduğundan, $f(U^{-o}) \subset V^{-o}$ olacak şekilde, x'i kapsayan bir $U \subset R$ açık kümesi vardır. Böylece, $g(U^{-o}) \subset (R)^{-o}x(V)^{-o} = (RxV)^{-o} \subset W^{-o}$ olur. Dolayısıyla, g grafik fonksiyonu $\delta$-süreklidir.

**1.1.4.TEOREMİ 1]** Eğer $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ $\delta$-sürekli fonksiyonlar ise, $gof : X \to Z$ fonksiyonu da $\delta$-süreklidir.

**İspat:** Her $x \in X$ ve gof(x)'in bir $W \subset Z$ açık komşuluğu olsun. g $\delta$-sürekli olduğundan, $g(V^{-o}) \subset W^{-o}$ olacak şekilde, f(x)'in bir $V \subset Y$ açık komşuluğu vardır. f $\delta$-sürekli olduğundan, $f(U^{-o}) \subset V^{-o}$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. Böylece, $g(f(U^{-o})) \subset W^{-o}$ olur. Dolayısıyla, gof bileşke fonksiyonu $\delta$-süreklidir.

**1.1.2.TANIM** X bir topolojik uzay olsun. Herhangi iki farklı $x,y \in X$ noktaları için, $x \in U$, $y \in V$ ve $U^{-} \cap V^{-} = \emptyset$ olacak şekilde, U ve V açık kümeleri varsa, X uzayına Uryshon uzayı denir[3].

1.1.2.Tanımdan yararlanarak, $\delta$-süreklilik için aşağıdaki özelliği verebiliriz.

**1.1.5. TEOREM** Eğer $f, g : X \to Y$ fonksiyonları $\delta$-sürekli ve $Y$ Uryshon uzayı ise, $\{x \in X : f(x) = g(x)\} \subset X$ kümesi, $\delta$-kapalıdır.

**İspat:** $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \subset X$ kümesinin $\delta$-kapalı olduğunu göstermek için, $A$ kümesinin tümleyeninin $\delta$-açık oduğunu göstermek yeterlidir. $x \in X \backslash A$, keyfi bir nokta olsun. Bu takdirde, $f(x) \neq g(x)$ dir. $Y$ Uryshon uzayı olduğundan, $V_1^- \cap V_2^- = \emptyset$ olacak şekilde, $f(x)$'i kapsayan bir $V_1$ açık kümesi ve $g(x)$'i kapsayan bir $V_2$ açık kümesi vardır. Buradan, $V_1^{-o} \cap V_2^{-o} = \emptyset$ dır. $f$ ve $g$ fonksiyonları $\delta$-sürekli olduğundan, $f(U^{-o}) \subset V_1^{-o}$ ve $g(U^{-o}) \subset V_2^{-o}$ olacak şekilde, $x$'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. Dolayısıyla, $U^{-o} \subset f^{-1}(V_1^{-o})$ ve $U^{-o} \subset g^{-1}(V_2^{-o})$ dir. Buradan, $U^{-o} \subset f^{-1}(V_1^{-o}) \cap g^{-1}(V_2^{-o})$ dir. Ayrıca, $f^{-1}(V_1^{-o}) \cap g^{-1}(V_2^{-o}) \cap A = \emptyset$ dır. $f^{-1}(V_1^{-o}) \cap g^{-1}(V_2^{-o}) \cap A \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Buradan, bir $z \in f^{-1}(V_1^{-o}) \cap g^{-1}(V_2^{-o}) \cap A$ elemanı vardır. Böylece, $f(z) \in V_1^{-o}$, $g(z) \in V_2^{-o}$ ve $z \in A$ olur. $z \in A$ olduğundan, $f(z) = g(z)$ dir. O halde, $f(z) \in V_1^{-o} \cap V_2^{-o}$ ve $V_1^{-o} \cap V_2^{-o} \neq \emptyset$ olur ki $V_1^{-o} \cap V_2^{-o} = \emptyset$ olmasıyla çelişir. Böylece, $f^{-1}(V_1^{-o}) \cap g^{-1}(V_2^{-o}) \cap A = \emptyset$ ve $f^{-1}(V_1^{-o}) \cap g^{-1}(V_2^{-o}) \subset X \backslash A$ olur. $U^{-o} \subset f^{-1}(V_1^{-o}) \cap g^{-1}(V_2^{-o})$ sonucundan, $U^{-o} \subset X \backslash A$ elde edilir ki $X \backslash A$ kümesi $\delta$-açıktır. Dolayısıyla, $A$ kümesi $\delta$-kapalıdır.

Şimdi, T. Noiri'nin[1] tanımladığı kuvvetli $\theta$-süreklilik, S. Fomin'in[4] tanımladığı $\theta$-süreklilik ile M.K. Singal ve A.R. Singal'in[5] tanımladığı hemen hemen süreklilik kavramlarını verelim.

**1.1.3. TANIM** $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ ve $f(x)$'in her $V \subset Y$ açık komşuluğu için, $f(U^-) \subset V$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu varsa, f fonksiyonuna kuvvetli θ-sürekli (strongly θ-continuous) denir[1].

**1.1.4.TANIM** $f : X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere, her $x \in X$ ve $f(x)$'in her $V \subset Y$ açık komşuluğu için, $f(U^-) \subset V^-$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu varsa, f fonksiyonuna θ-sürekli (θ-continuous) denir[4].

**1.1.5.TANIM** $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ ve $f(x)$'in her $V \subset Y$ açık komşuluğu için, $f(U) \subset V^{-o}$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu varsa, f fonksiyonuna Singal ve Singal anlamında hemen hemen sürekli (almost continuous) denir[5].

Ayrıca, M.K.Singal ve A.R.Singal'in[5] tanımladığı hemen hemen açık fonksiyon kavramı aşağıdadır.

**1.1.6.TANIM** $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. X uzayının her düzenli açık alt kümesinin görüntüsü, Y uzayının açık alt kümesi ise, f fonksiyonuna hemen hemen açık (almost open) denir[5].

[1] de; T.Noiri, δ-sürekliliğin kuvvetli θ-süreklilik ile Singal ve Singal anlamında hemen hemen süreklilik arasındaki ilgisini aşağıdaki teoremle vermiştir.

**1.1.6.TEOREM[1]**

a) $f : X \to Y$ fonksiyonu kuvvetli θ-sürekli ve $g : Y \to Z$ fonksiyonu Singal ve Singal anlamında hemen hemen sürekli ise, $g \circ f : X \to Y$ fonksiyonu δ-süreklidir.

b) Aşağıdaki gerektirmeler elde edilir:

Kuvvetli θ-süreklilik ⇒ δ-süreklilik ⇒ Singal ve Singal anlamında hemen hemen süreklilik.

T.Noiri[1], 1.1.6.Teoremin b) şıkkındaki gerektirmelerin terslerinin olmadığını ve $\delta$-süreklilik ile sürekliliğin birbirinden bağımsız olduğunu iki örnekle gösterdi. Bu örnekler aşağıdadır.

**1.1.1.ÖRNEK[1]** X alışılmış topolojiyle reel sayılar kümesi ve Y sayılabilir tümleyen topolojisi ile reel sayılar kümesi olmak üzere, $f : X \to Y$ birim fonksiyonu olsun. Bu takdirde, f fonksiyonu $\delta$-sürekli fakat, sürekli değildir.

**1.1.2.ÖRNEK[1]** $X=Y=\{a,b,c\}$, $\tau_X=\{X,\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\}\}$ ve $\tau_Y = \{Y,\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ olmak üzere, $f : (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ birim fonksiyonu olsun. Bu takdirde, f fonksiyonu sürekli fakat, $\delta$-sürekli değildir.

[6] da verilen yarı düzenli uzay tanımı aşağıdadır.

**1.1.7.TANIM** X bir topolojik uzay olsun.Her $x \in X$ ve x'in her $V \subset X$ açık komşuluğu için, $x \in U \subset U^{-\circ} \subset V$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu varsa, X uzayına yarı düzenli (semi regular) uzay denir[6].

T.Noiri, [1] de aşağıdaki teorem ve sonucu elde etmiştir.

**1.1.7.TEOREM[1]** Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu için, aşağıdakiler doğrudur:

a) Eğer f fonksiyonu $\delta$-sürekli ve Y uzayı yarı düzenli ise, f fonksiyonu süreklidir.

b) Eğer f fonksiyonu Singal ve Singal anlamında hemen hemen sürekli ve X uzayı yarı düzenli ise, f fonksiyonu $\delta$-süreklidir.

**1.1.1.SONUÇ[1]** Eğer X ve Y yarı düzenli uzaylar ise, bir $f : X \to Y$ fonksiyonu üzerindeki $\delta$-süreklilik, süreklilik ve

Singal ve Singal anlamında hemen hemen süreklilik kavramları eşdeğerdir.

M.K.Singal ve S.P.Arya'nın[7] verdiği hemen hemen düzenli uzay tanımı aşağıdadır.

**1.1.8.TANIM** X bir topolojik uzay olsun. Her $F \subset X$ düzenli kapalı kümesi ve her $x \notin F$ noktası için, $x \in U$, $F \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde, U ve V açık kümeleri varsa, X uzayına hemen hemen düzenli (almost regular) uzay denir[7].

**1.1.9.TANIM** Bir X topolojik uzayı verilsin. Her $F \subset X$ kapalı kümesi ve her $x \notin F$ noktası için, $x \in U$, $F \subset V$ ve $U \cap V=\emptyset$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri varsa, X uzayına düzenli (regular) uzay denir[8].

M.K.Singal ve S.P.Arya, [7] de, düzenlilikten daha zayıf olan hemen hemen düzenliliğin, yarı düzenlilikten bağımsız olduğunu ve ayrıca, her hemen hemen düzenli, yarı düzenli uzayın düzenli olduğunu vermiştir.

T.Noiri[1], " her Singal ve Singal anlamında hemen hemen sürekli fonksiyonun θ-sürekli olduğunu[9] " belirterek aşağıdaki teorem ve sonucu elde etmiştir.

**1.1.8.TEOREM[1]** Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu için, aşağıdakiler doğrudur:

a) Eğer Y uzayı hemen hemen düzenli ve f fonksiyonu θ-sürekli ise, f fonksiyonu δ-süreklidir.

b) Eğer X uzayı hemen hemen düzenli, Y uzayı yarı düzenli ve f fonksiyonu δ-sürekli ise, f fonksiyonu kuvvetli θ-süreklidir.

**1.1.2.SONUÇ[1]** X ve Y uzayları düzenli ise, $f : X \to Y$ fonksiyonu üzerindeki $\theta$-süreklilik, Singal ve Singal anlamında hemen hemen süreklilik, $\delta$-süreklilik, süreklilik ve kuvvetli $\theta$-süreklilik kavramları eşdeğerdir.

Ayrıca aşağıdaki teorem, [1] de verilmiştir.

**1.1.9.TEOREM[1]** Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu $\theta$-sürekli ve hemen hemen açık ise, f fonksiyonu $\delta$-süreklidir.

**ispat:** $x \in X$ ve f(x)'in bir V açık komşuluğunu alalım. f $\theta$-sürekli olduğundan, $f(U^{-}) \subset V^{-}$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. Dolayısıyla, $f(U^{-\circ}) \subset V^{-}$ olur. f hemen hemen açık olduğundan, $f(U^{-\circ}) \subset V^{-\circ}$ elde edilir. Böylece, f fonksiyonu $\delta$-süreklidir.

## 1.2.SÜPER SÜREKLİLİK

Bu kısımda, B.M.Munshi ve D.S.Bassan'ın[6] tanımlayıp, C.V.Baker'ın[2] incelediği süper süreklilik kavramı ele alındı. [6] da verilen süper süreklilik tanımı aşağıdadır.

**1.2.1.TANIM** $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ ve f(x)'in her $V \subset Y$ açık komşuluğu için, $f(U^{-\circ}) \subset V$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu varsa, f fonksiyonuna süper sürekli denir[6].

Bir fonksiyon sürekli ise kısıtlanması da süreklidir. Fakat [2] de, süper sürekli bir fonksiyonun keyfi bir kümeye kısıtlanmasının süper sürekli olmadığını gösteren aşağıdaki örnek verilmiştir.

**1.2.1.ÖRNEK[2]** $X = \{a,b,c\}$ ve $\tau = \{X,\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ olmak üzere, $f : (X,\tau) \to (X,\tau)$ birim fonksiyonu olsun. Bu takdirde, f fonksiyonu süper sürekli fakat, $\{b,c\}$ kümesine kısıtlanışı süper sürekli değildir.

[2] de; C.V.Baker, süper sürekli fonksiyonun açık alt kümeye kıstlanmasının süper sürekli olduğunu ispatlamıştır. Bu teoremi kısaca ele alalım.

**1.2.1.TEOREM[2]** Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu süper sürekli ve $A \subset X$ bir açık küme ise, $f_{/A} : A \to Y$ fonksiyonu süper süreklidir.

**ispat:** Her $x \in A$ ve $f(x)$'in bir açık komşuluğu V olsun. f süper sürekli olduğundan, $f(((U)^{-}_{X})^{\circ}_{X}) \subset V$ olacak şekilde, x'i kapsayan bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Bu takdirde, $A \subset X$ açık kümesi için,

$$\begin{aligned} f(((A \cap U)^{-}_{A})^{\circ}_{A}) &= f(A \cap (A \cap (A \cap U)^{-}_{X})^{\circ}_{X}) \\ &= f(A \cap (A)^{\circ}_{X} \cap ((A \cap U)^{-}_{X})^{\circ}_{X}) \\ &= f(A \cap ((A \cap U)^{-}_{X})^{\circ}_{X}) \subset f(((U)^{-}_{X})^{\circ}_{X}) \subset V. \end{aligned}$$

O halde, $f_{/A}: A \to Y$ fonksiyonu süper süreklidir.

Şimdi de, [2] de yalnızca ifadeleri verilen aşağıdaki teoremleri ispatlayalım.

**1.2.2.TEOREM[2]** X ve Y keyfi topolojik uzaylar olmak üzere, $g : X \to X\times Y$ fonksiyonu, $g(x)=(x,f(x))$ ile tanımlanacak şekilde, $f : X \to Y$ fonksiyonunun grafik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, g fonksiyonunun süper sürekli olması için, gerek ve yeter şart, f fonksiyonunun süper sürekli ve X uzayının yarı düzenli olmasıdır.

**ispat:** Gerek şart. g fonksiyonu süper sürekli olsun. Her $x \in X$ ve $f(x)$'in bir açık komşuluğu $V \subset Y$ olsun. Böylece, $g(x) \in XxV \subset XxY$ bir açık kümedir. g süper sürekli olduğundan, $g(U^{-o}) \subset XxV$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. g, f fonksiyonunun grafik fonksiyonu olduğundan, $f(U^{-o}) \subset V$ dir. Dolayısıyla, f fonksiyonu süper süreklidir.

Benzer şekilde, g süper sürekli fonksiyon olsun. Her $x \in X$ noktasını alalım. Bu takdirde, x'i kapsayan U açığı için, UxY kümesi, XxY de açık ve $g(x)=(x,f(x))$ noktasını kapsar. g süper sürekli olduğundan, $g(U_o^{-o}) \subset UxY$ olacak şekilde, x'i kapsayan bir $U_o$ açık kümesi vardır. Buradan, $x \in U_o \subset U_o^{-o} \subset U$ olur ki bu ise, X uzayının yarı düzenli olmasıdır.

Yeter şart. f fonksiyonu süper sürekli olsun. Her $x \in X$ ve $g(x)$'in bir $W \subset XxY$ açık komşuluğu verilsin. Bu takdirde, $g(x)=(x,f(x)) \in RxV \subset W$ olacak şekilde, x'in bir $R \subset X$ açık komşuluğu ve $f(x)$'in bir $V \subset Y$ açık komşuluğu vardır. X yarı düzenli uzay olduğundan, $U^{-o} \subset R$ olacak şekilde, x'in bir U açık komşuluğu vardır. f süper sürekli olduğundan, $f(U^{-o}) \subset V$ dir. Böylece, $g(U^{-o}) \subset RxV \subset W$ olur. Dolayısıyla, g fonksiyonu süper süreklidir.

**1.2.3.TEOREM[2]** Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu $\delta$-sürekli ve $g : Y \to Z$ fonksiyonu süper sürekli ise, $gof : X \to Y$ fonksiyonu süper süreklidir.

**ispat:** Her $x \in X$ ve $gof(x) \in W$, bir açık komşuluk olsun. g süper sürekli olduğundan, $g(V^{-o}) \subset W$ olacak şekilde, $f(x)$'in bir $V \subset Y$ açık komşuluğu vardır. f $\delta$-sürekli olduğundan, $f(U^{-o}) \subset V^{-o}$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. Dolayısıyla, $g(f(U^{-o})) \subset W$ olur. Böylece, gof bileşke fonksiyonu süper süreklidir.

**1.2.1.SONUÇ[2]** Eğer $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$, süper sürekli fonksiyonlar ise, $gof : X \to Z$ fonksiyonu da süper süreklidir.

**1.2.4.TEOREM[2]** Eğer $f, g : X \to Y$ süper sürekli fonksiyonlar ve Y Hausdorff uzayı ise, $A = \{ x \in X : f(x)=g(x) \} \subset X$ kümesi $\delta$-kapalıdır.

**ispat:** $A = \{ x \in X : f(x)=g(x) \} \subset X$ kümesinin $\delta$-kapalı olduğunu gösterebilmek için, $X \backslash A$ kümesinin $\delta$-açık olduğunu göstermek yeterlidir. $x \in X \backslash A$, keyfi bir nokta olsun. Bu takdirde, $f(x) \neq g(x)$ dir. Y Hausdorff uzayı olduğundan, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ olacak şekilde, $f(x)$'in bir $V_1$ açık komşuluğu ve $g(x)$'in bir $V_2$ açık komşuluğu vardır. f ve g süper sürekli fonksiyonlar olduğundan, $f(U^{-o}) \subset V_1$ ve $g(U^{-o}) \subset V_2$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. Aynı zamanda, $U^{-o} \subset f^{-1}(V_1)$ ve $U^{-o} \subset g^{-1}(V_2)$ olur. Dolayısıyla, $U^{-o} \subset f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)$ elde edilir. Ayrıca, $f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2) \cap A = \emptyset$ dır. Varsayalım ki $f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2) \cap A \neq \emptyset$ olsun. Bu takdirde, bir $z \in f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2) \cap A$ elemanı vardır. Buradan, $f(z) \in V_1$, $g(z) \in V_2$ ve $z \in A$ dır. $z \in A$ olduğundan, $f(z) = g(z)$ olur. Böylece, $f(z) \in V_1 \cap V_2$ olur ki $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ olmasıyla çelişkidir. Dolayısıyla, $f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2) \cap A = \emptyset$ ve buradan, $f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2) \subset X \backslash A$ olur. $U^{-o} \subset f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)$ olduğundan, $U^{-o} \subset X \backslash A$ olur ki $X \backslash A$ kümesi $\delta$-açıktır. Böylece, $A \subset X$ kümesi $\delta$-kapalıdır.

[2] de verilen zayıf $\delta$-sürekliliği, $G_f$'nin, X'e göre,

$\delta$-kapalılığı ve sınır kompakt uzay tanımlarını ele alalım.

**1.2.2.TANIM** $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ ve $f(x)$'in her $V \subset Y$ açık komşuluğu için, $f(U^{-o}) \subset V^{-}$ olacak şekilde, $x$'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu varsa, $f$ fonksiyonuna zayıf $\delta$-sürekli (weakly $\delta$-continuous) denir[2].

**1.2.3.TANIM** $G_f = \{(x,f(x)) : x \in X\} \subset X\times Y$, $f : X \to Y$ fonksiyonunun grafiği olsun. Her $x \in X$ ve $f(x) \neq y \in Y$ noktaları için, $x \in U \subset X$, $y \in V \subset Y$ ve $f(U^{-o}) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde, $U$ ve $V$ açık kümeleri varsa, $G_f$ kümesine, $X$'e göre, $\delta$-kapalı denir[2].

**1.2.4.TANIM** Bir $Y$ uzayının her $y$ noktası ve $y$ noktasının her $V$ açık komşuluğu için, $W^{s}$ kompakt ve $y \in W \subset V$ olacak şekilde, bir $W$ açık kümesi varsa, $Y$ uzayına sınır kompakt (rim compact) denir[10].

Süper sürekli bir fonksiyonun zayıf $\delta$-sürekli olduğu açıktır. Fakat, tersi genellikle doğru değildir. [2] de, süper süreklilik için, yeterli şartlar eklenmiştir. Bu özellikler aşağıdadır.

**1.2.5.TEOREM[2]** Eğer $f : X \to Y$ zayıf $\delta$-sürekli fonksiyon, $Y$ sınır kompakt uzay ve $G_f$ kümesi, $X$'e göre, $\delta$-kapalı ise, $f$ fonksiyonu süper süreklidir.

**İspat:** $x \in X$ ve $V$, $f(x)$'in bir açık komşuluğu olsun. $Y$ sınır kompakt uzay olduğundan, $f(x) \in V_o \subset V$ ve $V_o^{s}$ kompakt olacak şekilde, bir $V_o$ açık kümesi vardır. $f$ zayıf $\delta$-sürekli olduğundan, $f(U^{-o}) \subset V_o^{-}$ olacak şekilde, $x$'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. $y \in V_o^{s}$ noktasını alalım. $f(x) \in V_o$, $V_o^{s}$ kümesinden ayrık olduğundan, $(x,y) \notin G_f$ dir. $G_f$ kümesi, $X$'e göre,

$\delta$-kapalı olduğundan, $x \in A_y$, $y \in B_y$ ve $f(A_y^{-o}) \cap B_y = \emptyset$ olacak şekilde, $A_y$ ve $B_y$ açık kümeleri vardır. $\{B_y : y \in V_o^s\}$ ailesi, kompakt olan, $V_0^s$ nın bir açık örtüdür. Böylece, $V_o^s \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{y_i}$ olacak şekilde, bir $\{B_{y_1}, B_{y_2}, \ldots, B_{y_n}\}$ sonlu ailesi vardır. $U_o = U \cap (\bigcap_{i=1}^{n} A_{y_i})$ olarak alalım. Bu takdirde,

$$f(U_o^{-o}) \subset f([\bigcap_{i=1}^{n} A_{y_i}]^{-o}) \subset f(\bigcap_{i=1}^{n} [A_{y_i}]^{-o}) \subset \bigcap_{i=1}^{n} f(A_{y_i}^{-o}),$$

$\bigcup_{i=1}^{n} B_{y_i}$ den ayrık olduğundan, $V_o^s$ dan da ayrıktır. Böylece, $f(U_o^{-o}) \cap V_o^s = \emptyset$ olur. Ayrıca, $f(U_o^{-o}) \subset f(U^{-o}) \subset V_o^-$ dır. Dolayısıyla, $f(U_o^{-o}) \subset V_o^- - V_o^s \subset V_o$ olur. O halde, $f$ fonksiyonu süper süreklidir.

**1.2.2.SONUÇ[2]** Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu $\delta$-sürekli, $Y$ sınır kompakt uzay ve $G_f$ kümesi, X'e göre, $\delta$-kapalı ise, $f$ fonksiyonu süper süreklidir.

**1.2.6.TEOREM[2]** Eğer $f : X \to Y$ zayıf $\delta$-sürekli fonksiyon ve $Y$ Hausdorff uzayı ise, $G_f$ kümesi, X'e göre, $\delta$-kapalıdır.

**İspat:** $(x,y) \in X \times Y \setminus G_f$ alalım. Bu takdirde, $f(x) \neq y$ dir. $Y$ Hausdorff olduğundan, $f(x) \in V$, $y \in W$ ve $V \cap W = \emptyset$ olacak şekilde, $V$ ve $W$ açık kümeleri vardır. $f$ zayıf $\delta$-sürekli olduğundan, $f(U^{-o}) \subset V^-$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. Buradan, $(x,y) \in (U)^{-o} \times W$ ve $f(U^{-o}) \subset V^-$, $W$ den ayrıktır. Dolayısıyla, $(U^{-o} \times W) \cap G_f = \emptyset$ dır. Böylece, $G_f$, X'e göre, $\delta$-kapalıdır.

Şimdi, N.Levine'nin[11] tanımlayıp incelediği, zayıf süreklilik kavramını ele alalım.

**1.2.5.TANIM** $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ ve

$f(x)$'i kapsayan her $V \subset Y$ açık kümesi için, $f(U) \subset \overline{V}$ olacak şekilde, x'i kapsayan bir $U \subset X$ açık kümesi varsa, f fonksiyonuna zayıf sürekli (weakly continuous) denir[11].

[2] de, süper süreklilik ile sürekliliğin diğer kuvvetli çeşitleri arasındaki karşılaştırılmalar verilmiştir. 1.1.Kesimden de yararlanarak, aşağıdaki çizelge elde edilebilir:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & & \text{c.} \arrow[dr] & & & & \\
\text{str.}\theta\text{-c.} \arrow[r] & \text{süper c.} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{a.c.S.} \arrow[r] & \theta\text{-c.} \arrow[r] & \text{w.}\delta\text{-c.} \arrow[r] & \text{w. c.} \\
 & & \delta\text{-c.} \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

C.W.Baker[2], 1.1.1.örnekle $\delta$-sürekli fonksiyonun süper sürekli olmadığını ve ayrıca, 1.1.2.örnekle de sürekli fonksiyonun süper sürekli olmadığını ifade etmiştir. Aynı zamanda C.W.Baker[2], 1.2.1.örnekle süper sürekli fonksiyonun x=a da kuvvetli $\theta$-sürekli olmadığını göstermiştir.

[2] de verilen aşağıdaki teoremleri ele alalım.

**1.2.7.TEOREM[2]** Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu $\delta$-sürekli ve Y yarı düzenli uzay ise, f fonksiyonu süper süreklidir.

**İspat:** $x \in X$ ve $f(x)$'in bir $V \subset Y$ açık komşuluğu olsun. Y yarı düzenli uzay olduğundan, $f(x) \in V_1 \subset \overline{V_1}^{\circ} \subset V$ olacak şekilde, $f(x)$'in bir $V_1$ açık komşuluğu vardır. f $\delta$-sürekli olduğundan, $f(\overline{U}^{\circ}) \subset \overline{V_1}^{\circ} \subset V$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. Böylece, f fonksiyonu süper süreklidir.

[6] da, $f : X \to Y$ sürekli fonksiyonu ve X yarı düzenli uzay ise, f fonksiyonunun süper sürekli olduğu verilmiştir. 1.1.7.Teoremden yararlanarak; C.W.Baker[2], X ve Y yarı düzenli uzaylar ise, $f : X \to Y$ fonksiyonu üzerindeki süreklilik,

süper süreklilik ve $\delta$-sürekliliğin eşdeğer olduğunu elde etmiştir. C.W.Baker[2], aşağıdaki teorem ve sonucu da vermiştir.

**1.2.8.TEOREM[2]** Eğer $f : X \to Y$ süper sürekli fonksiyon ve X hemen hemen düzenli uzay ise, f fonksiyonu kuvvetli $\theta$-süreklidir.

**ispat:** $x \in X$ ve f(x)'in bir $V \subset Y$ açık komşuluğunu alalım. f süper sürekli olduğundan, $f(U^{-o}) \subset V$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. $U^{-o}$ düzenli açık küme ve X hemen hemen düzenli uzay olduğundan, $x \in W \subset W^{-} \subset U^{-o}$ olacak şekilde, bir W düzenli açık kümesi vardır[7]. Bu takdirde, $f(W^{-}) \subset f(U^{-o}) \subset V$ olduğu açıktır. Böylece, f fonksiyonu kuvvetli $\theta$-süreklidir.

**1.2.3.SONUÇ[2]** X hemen hemen düzenli uzay ve Y yarı düzenli uzay olmak üzere, $f : X \to Y$ fonksiyonu için, kuvvetli $\theta$-süreklilik, süper süreklilik ve $\delta$-süreklilik eşdeğerdir.

(*) dan görüleceği gibi; $\theta$-süreklilik zayıf $\delta$-sürekliliği gerektirir. Zayıf $\delta$-süreklilik de zayıf sürekliliği gerektirir. Fakat bu gerektirmelerin ters yönlüleri genellikle doğru değildir. Bu süreklilik çeşitleriyle ilgili özellikleri elde ettik:

**1.2.9.TEOREM** Eğer $f : X \to Y$ zayıf $\delta$-sürekli fonksiyon ve X hemen hemen düzenli uzay ise, f fonksiyonu $\theta$-süreklidir.

**ispat:** $x \in X$ ve f(x)'in bir $V \subset Y$ açık komşuluğu olsun. f zayıf $\delta$-sürekli fonksiyon olduğundan, $f(U^{-o}) \subset V^{-}$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. $U^{-o}$ düzenli açık ve X hemen hemen düzenli uzay olduğundan, $x \in U_1 \subset U_1^{-} \subset U^{-o}$ olacak şekilde, bir $U_1$ düzenli açık kümesi vardır[7]. Buradan,

$f(U_1^-) \subset f(U^{-o}) \subset V^-$ olur. Böylece, f fonksiyonu θ-süreklidir.

**1.2.10.TEOREM** Eğer $f : X \to Y$ zayıf sürekli fonksiyon ve X yarı düzenli uzay ise, f fonksiyonu zayıf δ-süreklidir.

**İspat:** $x \in X$ ve f(x)'in bir $V \subset Y$ açık komşuluğu verilsin. f zayıf sürekli olduğundan, $f(U) \subset V^-$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. X yarı düzenli uzay olduğundan, $x \in U_1 \subset U_1^{-o} \subset U$ olacak şekilde, x'in bir $U_1$ açık komşuluğu vardır. Dolayısıyla, $f(U_1^{-o}) \subset f(U) \subset V^-$ olur. Böylece, f fonksiyonu zayıf δ-süreklidir.

**1.2.4.SONUÇ** X düzenli uzay olmak üzere, $f : X \to Y$ fonksiyonu üzerindeki θ-süreklilik, zayıf δ-süreklilik ve zayıf süreklilik eşdeğerdir.

Aşağıdaki tanımlar, [12] ve [13] de verilmiştir.

**1.2.6.TANIM** U ve V, bir X uzayının boş olmayan alt kümeleri olsun. Eğer $[U]_\delta \cap V = U \cap [V]_\delta = \emptyset$ ise, (U,V) ikilisine, X'e göre, δ-parçalanış (δ-separation) denir[12].

**1.2.7.TANIM** U ve V, bir X uzayının boş olmayan alt kümeleri olsun. Eğer $[U]_\theta \cap V = U \cap [V]_\theta = \emptyset$ ise, (U,V) ikilisine, X'e göre, θ-parçalanış denir[12].

**1.2.8.TANIM** Bir X uzayının A alt kümesi verilsin. $A = U \cup V$ olacak ancak, (U,V) ikilisi, X'e göre, δ-parçalanış (θ-parçalanış) olmayacak şekilde, X uzayının boş olmayan U ve V alt kümeleri varsa, A kümesine, X'e göre, δ-bağlantılı[12] (θ-bağlantılı[13]) denir.

[12] de verilen aşağıdaki teoremi ele alalım.

**1.2.11.TEOREM[12]** Eğer $f : X \rightarrow Y$ $\delta$-sürekli fonksiyon ve K kümesi, X'e göre, $\delta$-bağlantılı ise, f(K) kümesi de, Y'e göre, $\delta$-bağlantılıdır.

**ispat:** Varsayalım ki f(K) kümesi, Y'ye göre, $\delta$-bağlantılı olmasın. Bu takdirde, $f(K) = P \cup Q$, $P \neq \emptyset$, $Q \neq \emptyset$ ve (P,Q) ikilisi, Y'ye göre, $\delta$-parçalanıştır. $A = K \cap f^{-1}(P)$ ve $B = K \cap f^{-1}(Q)$ diyelim. Buradan, $K = A \cup B$ olur ve K kümesi, X'e göre, $\delta$-bağlantılı olmaz, çelişki. O halde, f(A) kümesi, Y'ye göre, $\delta$-bağlantılıdır.

Bağlantılılık çeşitleri arasındaki ilişki T.Noiri[12] tarafından aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

**1.2.12.TEOREM[12]** Bir X uzayının A alt kümesi için, A kümesi bağlantılı ise, X'e göre, $\delta$-bağlantılıdır. A kümesi, X'e göre, $\delta$-bağlantılı ise, X'e göre, $\theta$-bağlantılıdır. Eğer $A \subset X$ kümesi açık ise, bağlantılılık, $\delta$-bağlantılılık ve $\theta$-bağlantılılık eşdeğerdir.

# 2. HEMEN HEMEN KUVVETLİ θ-SÜREKLİLİK

## 2.1. HEMEN HEMEN KUVVETLİ θ-SÜREKLİLİĞİN TEMEL ÖZELLİKLERİ

T. Noiri[1] tarafından tanımlanan kuvvetli θ-süreklilik ve δ-süreklilik kavramlarıyla ilgisi olan hemen hemen kuvvetli θ-süreklilik kavramının bir karekteristiği ile sağladığı bazı özellikleri gösterelim. Hemen hemen kuvvetli θ-süreklilik tanımı aşağıdadır.

**2.1.1. TANIM** $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ ve $f(x)$'in her $V \subset Y$ açık komşuluğu için, $f(U^{-}) \subset V^{-\circ}$ olacak şekilde, $x$'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu varsa, $f$ fonksiyonuna hemen hemen kuvvetli θ-sürekli denir.

1.1.1. Teoremden yararlanarak, hemen hemen kuvvetli θ-sürekliliğin aşağıdaki karekteristiği elde edilir.

**2.1.1. TEOREM** Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu için, aşağıdakiler eşdeğerdir:

a) $f$ hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

b) Her $x \in X$ ve $f(x)$'i kapsayan her $V \subset Y$ düzenli açık kümesi için, $f(U^{-}) \subset V$ olacak şekilde, $x$'i kapsayan bir $U \subset X$ açık kümesi vardır.

c) Her $A \subset X$ kümesi için, $f([A]_{\theta}) \subset [f(A)]_{\delta}$.

d) Her $B \subset Y$ kümesi için, $[f^{-1}(B)]_{\theta} \subset f^{-1}([B]_{\delta})$.

e) Her $F \subset Y$ δ-kapalı kümesi için, $f^{-1}(F) \subset X$ θ-kapalı kümedir.

f) Her $V \subset Y$ $\delta$-açık kümesi için, $f^{-1}(V) \subset X$ $\theta$-açık kümedir.

g) Her $V \subset Y$ düzenli açık kümesi için, $f^{-1}(V) \subset X$ $\theta$-açık kümedir.

**ispat:** a) $\Rightarrow$ b). 2.1.1.Tanımın direk sonucudur.

b) $\Rightarrow$ c). Bir $X$ uzayının $A$ alt kümesini ve bir $x \in X$ noktasını alalım. $f(x) \in f([A]_\theta)$ iken $f(x) \in [f(A)]_\delta$ olduğunu göstermeliyiz. Olmayana ergi yöntemini kullanalım. Varsayalım ki $f(x) \notin [f(A)]_\delta$ olsun. Bu takdirde, $V \cap f(A) = \emptyset$ olacak şekilde, $f(x)$'i kapsayan bir $V \subset Y$ düzenli açık küme vardır. b) den, $f(U^-) \subset V$ olacak şekilde, $x$'i kapsayan bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Böylece, $f(U^-) \cap f(A) \subset V \cap f(A) = \emptyset$ olmasından, $f(U^-) \cap f(A) = \emptyset$ olur. Her iki tarafın f ye göre ters görüntüsünü alrsak,

$$U^- \cap A \subset f^{-1}(f(U^- \cap A)) \subset f^{-1}(f(U^-) \cap f(A)) = \emptyset.$$

O halde, $U^- \cap A = \emptyset$ dır. Böylece, $x \notin [A]_\theta$ dır. Her iki tarafın, f ye göre, görüntüsünü alırsak, $f(x) \notin f([A]_\theta)$ olur ki bir çelişkidir. Dolayısıyla, $f(x) \in [f(A)]_\delta$ olur. Böylece, $f([A]_\theta) \subset [f(A)]_\delta$ dır.

c) $\Rightarrow$ d). Her $B \subset Y$ kümesi için, c) den,

$$f([f^{-1}(B)]_\theta) \subset [f(f^{-1}(B))]_\delta \subset [B]_\delta$$

olur. Her iki tarafın, f ye göre, ters görüntüsünü alırsak, $f^{-1}(f([f^{-1}(B)]_\theta)) \subset f^{-1}([B]_\delta)$ olur. Dolayısıyla, $[f^{-1}(B)]_\theta \subset f^{-1}([B]_\delta)$ elde edilir.

d) $\Rightarrow$ e). Her $F \subset Y$ $\delta$-kapalı kümesi için, d) den, $[f^{-1}(F)]_\theta \subset f^{-1}([F]_\delta) = f^{-1}(F)$ dır. Ayrıca, $f^{-1}(F) \subset [f^{-1}(F)]_\theta$ olur. Buradan, $f^{-1}(F) \subset X$ kümesi $\theta$-kapalıdır.

e) $\Rightarrow$ f). Her $V \subset Y$ $\delta$-açık kümesi verilsin. Buradan, $Y \setminus V$ $\delta$-kapalı kümedir. e) den, $f^{-1}(Y \setminus V) \subset X$ kümesi $\theta$-kapalıdır. Buradan, $X \setminus f^{-1}(V)$ kümsi $\theta$-kapalıdır. Dolayısıyla, $f^{-1}(V) \subset X$ $\theta$-açık kümedir.

f) $\Rightarrow$ g). Herhangi bir $V \subset Y$ düzenli açık kümesi verilsin. $\delta$-açık küme tanımından, V düzenli açık kümesini $\delta$-açık küme olarak alabiliriz. f) den, $f^{-1}(V) \subset X$ $\theta$-açık kümedir.

g) $\Rightarrow$ a). Her $x \in X$ ve f(x)'in bir $V \subset Y$ açık komşuluğu verilsin. Buradan, $f(x) \in V \subset V^{-o}$ yazarız. $V^{-o}$ düzenli açık küme olduğundan, $f^{-1}(V^{-o}) \subset X$ bir $\theta$-açık kümedir. Dolayısıyla, $x \in U \subset U^{-} \subset f^{-1}(V^{-o})$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. Böylece, $f(U^{-}) \subset V^{-o}$ olur ki f fonksiyonu, hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklidir.

Birinci bölümden yararlanarak, hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklilik için, aşağıdaki özellikleri ispatlayalım.

**2.1.2. TEOREM** Eğer $f : X \to Y$ hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekli fonksiyon ve $A \subset X$ keyfi bir küme ise, $f_{/A} : A \to Y$ fonksiyonu, hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklidir.

**ispat:** Her $x \in A$ ve f(x)'in bir $V \subset Y$ açık komşuluğu verilsin. f hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekli olduğundan, $f((U)^{-}_{X}) \subset ((V)^{-}_{Y})^{o}_{Y}$ olacak şekilde, x'i kapsayan bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Alt uzay topolojisine göre, $U \cap A \in \tau_{A}$ dır. Ayrıca, $A \cap U \subset U$ ve $(A \cap U)^{-}_{A} = A \cap (A \cap U)^{-}_{X}$ dır. Bu takdirde, $A \subset X$ kümesi için,

$$f((A \cap U)^{-}_{A}) = f(A \cap (A \cap U)^{-}_{X}) \subset f((U)^{-}_{X}) \subset ((V)^{-}_{Y})^{o}_{Y}.$$

Böylece, $f_{/A} : A \to Y$ fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-

süreklidir.

**2.1.3.TEOREM** X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere, $g : X \to XxY$ fonksiyonu, $g(x)=(x,f(x))$ ile tanımlı olacak şekilde, $f : X \to Y$ fonksiyonun grafik fonksiyonu olsun. g fonksiyonunun hemen hemen kuvvetli θ-sürekli olması için, gerek ve yeter şart, f fonksiyonunun hemen hemen kuvvetli θ-sürekli ve X uzayının hemen hemen düzenli olmasıdır.

**ispat:** Gerek şart. g fonksiyonu hemen hemen kuvvetli θ-sürekli olsun. Her $x \in X$ ve f(x)'in bir $V \subset Y$ açık komşuluğu verilsin. Bu durumda, $g(x) \in XxV \subset XxY$ bir açık kümedir. g hemen hemen kuvvetli θ-sürekli olduğundan, $g(U^-) \subset (XxV)^{-o} = Xx(V)^{-o}$ olacak şekilde, x'in bir U açık komşuluğu vardır. g, f fonksiyonunun grafik fonksiyonu olduğundan, $f(U^-) \subset V^{-o}$ dir. Böylece, f fonksiyonu hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

Benzer şekilde, g hemen hemen kuvvetli θ-sürekli ve $x \in X$ noktası olsun. Bu takdirde, x'i kapsayan U düzenli açık kümesi için, UxY kümesi, XxY de düzenli açık ve $g(x)=(x,f(x))$ noktasını kapsar. g hemen hemen kuvvetli θ-sürekli olduğundan, $g(U_o^-) \subset UxY$ olacak şekilde, x'i kapsayan bir $U_o$ açık kümesi vardır. Sonuç olarak, $x \in U_o \subset U_o^- \subset U$ olur ki bu da, X uzayının hemen hemen düzenli olmasıdır.

Yeter şart. f fonksiyonu hemen hemen kuvvetli θ-sürekli olsun. Her $x \in X$ ve $g(x)=(x,f(x))$'in bir $RxV \subset XxY$ açık komşuluğu verilsin. Burada R, x'in bir açık komşuluğu ve V de, f(x)'in bir açık komşuluğudur. $R \subset R^{-o}$, $R^{-o}$ düzenli açık küme ve X hemen hemen düzenli uzay olduğundan, $U^- \subset R^{-o}$ olacak şekilde, x'i kapsayan bir U açık kümesi vardır. f hemen

hemen kuvvetli θ-sürekli olduğundan, $f(U^{-}) \subset V^{-\circ}$ dir. Böylece, $g(U^{-}) \subset (R)^{-\circ} x (V)^{-\circ} = (RxV)^{-\circ}$ olur. Dolayısıyla, g fonksiyonu hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

[14] de verilen aşağıdaki tanımı ele alalım.

**2.1.2.TANIM** $G_f = \{(x,f(x)) : x \in X\} \subset XxY$, $f : X \to Y$ fonksiyonunun grafiği olsun. Her $x \in X$ ve $f(x) \neq y \in Y$ için, $f(U^{-}) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu ve y'nin bir $V \subset Y$ açık komşuluğu varsa, $G_f$ kümesine, X'e göre, θ-kapalı denir[14].

2.1.2.Tanımdan yararlanarak, aşağıdaki özellikleri ispatlayalım.

**2.1.4.TEOREM** Eğer $f : X \to Y$ hemen hemen kuvvetli θ-sürekli fonksiyon ve Y Hausdorff uzayı ise, $G_f$ kümesi, X'e göre, θ-kapalıdır.

**ispat:** Her $x \in X$ ve $f(x) \neq y \in Y$ olsun. Y Hausdorff olduğundan, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ olacak şekilde, f(x)'in bir $V_1 \subset Y$ açık komşuluğu ve y'nin bir $V_2 \subset Y$ açık komşuluğu vardır. Buradan, $V_1^{-\circ} \cap V_2 = \emptyset$ dır. f hemen hemen kuvvetli θ-sürekli olduğundan, $f(U^{-}) \subset V_1^{-\circ}$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. Böylece, $f(U^{-}) \cap V_2 = \emptyset$ dır. Dolayısıyla, $G_f$ kümesi, X'e göre, θ-kapalıdır.

**2.1.5.TEOREM** Eğer $f,g : X \to Y$, hemen hemen kuvvetli θ-sürekli fonksiyonlar ve Y Uryshon uzayı ise, $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \subset X$ kümesi θ-kapalıdır.

**ispat:** $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \subset X$ kümesinin, θ-kapalı olduğunu göstermek için, $X \setminus A$ kümesinin, θ-açık olduğunu göstermek yeterlidir. $x \in X \setminus A$, keyfi bir nokta olsun. Buradan,

$f(x) \neq g(x)$ dir. Y Uryshon uzayı olduğundan, $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$ olacak şekilde, $f(x)$'i kapsayan bir $V_1 \subset Y$ açık kümesi ve $g(x)$'i kapsayan bir $V_2 \subset Y$ açık kümesi vardır. Buradan, $\overline{V_1}^{\circ} \cap \overline{V_2}^{\circ} = \emptyset$ dır. f ve g hemen hemen kuvvetli θ-sürekli fonksiyonlar olduklarından, $f(\overline{U}) \subset \overline{V_1}^{\circ}$ ve $g(\overline{U}) \subset \overline{V_2}^{\circ}$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. Aynı zamanda, $\overline{U} \subset f^{-1}(\overline{V_1}^{\circ})$ ve $\overline{U} \subset g^{-1}(\overline{V_2}^{\circ})$ dir. Buradan, $\overline{U} \subset f^{-1}(\overline{V_1}^{\circ}) \cap g^{-1}(\overline{V_2}^{\circ})$ dir. Ayrıca, $f^{-1}(\overline{V_1}^{\circ}) \cap g^{-1}(\overline{V_2}^{\circ}) \cap A = \emptyset$ dır. Kabul edelim ki $f^{-1}(\overline{V_1}^{\circ}) \cap g^{-1}(\overline{V_2}^{\circ}) \cap A \neq \emptyset$ olsun. Varsayımdan dolayı, bir $z \in f^{-1}(\overline{V_1}^{\circ}) \cap g^{-1}(\overline{V_2}^{\circ}) \cap A$ elemanı vardır. Böylece, $f(z) \in \overline{V_1}^{\circ}$, $g(z) \in \overline{V_2}^{\circ}$ ve $z \in A$ olduğundan, $f(z) = g(z) \in \overline{V_1}^{\circ} \cap \overline{V_2}^{\circ}$ ve $\overline{V_1}^{\circ} \cap \overline{V_2}^{\circ} \neq \emptyset$ bulunur. Bu ise, $\overline{V_1}^{\circ} \cap \overline{V_2}^{\circ} = \emptyset$ olmasıyla çelişir. O halde, $f^{-1}(\overline{V_1}^{\circ}) \cap g^{-1}(\overline{V_2}^{\circ}) \cap A = \emptyset$ bulunur. Buradan, $f^{-1}(\overline{V_1}^{\circ}) \cap g^{-1}(\overline{V_2}^{\circ}) \subset X \setminus A$ olur. Dolayısıyla, $\overline{U} \subset X \setminus A$ olur ki $X \setminus A$ kümesi, θ-açık bir kümedir. Böylece, A kümesi θ-kapalıdır.

**2.1.6. TEOREM** Eğer $f : X \to Y$ hemen hemen kuvvetli θ-sürekli ve $g : Y \to Z$ δ-sürekli fonksiyonlar ise, $gof : X \to Z$ fonksiyonu hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

**İspat:** Her $x \in X$ ve $g(f(x))$'in bir açık komşuluğu $W \subset Z$ olsun. g δ-sürekli olduğundan, $g(\overline{V}^{\circ}) \subset \overline{W}^{\circ}$ olacak şekilde, $f(x)$'in bir $V \subset Y$ açık komşuluğu vardır. f hemen hemen kuvvetli θ-sürekli olduğundan, $f(\overline{U}) \subset \overline{V}^{\circ}$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. Böylece, $g(f(\overline{U})) \subset \overline{W}^{\circ}$ dir. O halde, gof bileşke fonksiyonu hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

**2.1.1.SONUÇ** Eğer $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ fonksiyonları, hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekli ise, $gof : X \to Z$ fonksiyonu da hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklidir.

Aşağıdaki teoremlerin ispatları, 2.1.6.Teoremin ispatının benzeridir.

**2.1.7.TEOREM** Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekli ve $g : Y \to Z$ fonksiyonu süper sürekli ise, $gof : X \to Y$ fonksiyonu kuvvetli $\theta$-süreklidir.

**2.1.8.TEOREM** Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu kuvvetli $\theta$-sürekli ve $g : Y \to Z$ fonksiyonu Singal ve Singal anlamında hemen hemen sürekli ise, $gof : X \to Z$ fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklidir.

**2.1.2.SONUÇ** Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu kuvvetli $\theta$-sürekli ve $g : Y \to Z$ fonksiyonu $\delta$-sürekli ise, $gof : X \to Z$ fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklidir.

**2.1.9.TEOREM** Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu $\theta$-sürekli ve $g : Y \to Z$ fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekli ise, $gof : X \to Z$ fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklidir.

**2.1.10.TEOREM** Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekli ve $g : Y \to Z$ fonksiyonu zayıf $\delta$-sürekli ise, $gof : X \to Z$ fonksiyonu $\theta$-süreklidir.

**2.1.11.TEOREM** Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu zayıf sürekli ve $g : Y \to Z$ fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekli ise, $gof : X \to Z$ fonksiyonu Singal ve Singal anlamında hemen hemen süreklidir.

**2.1.12.TEOREM** Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu zayıf $\delta$-sürekli ve $g : Y \to Z$ fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekli ise, $gof : X \to Z$ fonksiyonu $\delta$-süreklidir.

**2.1.13.TEOREM** $f : X \to Y$ hemen hemen açık fonksiyon, $g : Y \to Z$ keyfi bir fonksiyon ve $gof : X \to Z$ $\delta$-sürekli fonksiyon olsun. $Y$ düzenli uzay ise, $g$ fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklidir.

**ispat:** $x \in X$ noktasının herhangi bir $U \subset X$ düzenli açık komşuluğunu alalım. $f$ hemen hemen açık olduğundan, $f(U) \subset Y$ kümesi açıktır. $Y$ düzenli uzay olduğundan, $f(x) \in V \subset V^{-} \subset f(U)$ olacak şekilde, bir $V \subset Y$ açık kümesi vardır. $gof$ $\delta$-sürekli fonksiyon olduğundan, $g(f(x))$ noktasının bir $W \subset Z$ açık komşuluğu için, $g(f(U)) \subset W^{-o}$ olur. Dolayısıyla, $g(V^{-}) \subset W^{-o}$ olur ki $g$ fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklidir.

**2.1.3.SONUÇ** $f : X \to Y$ hemen hemen açık bir fonksiyon, $g : Y \to Z$ bir fonksiyon ve $gof : X \to Z$ hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekli fonksiyon olsun. $Y$ düzenli uzay ise, $g$ fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklidir.

## 2.2.KARŞILAŞTIRMALAR

1.2.1.örnekteki fonksiyon süper süreklidir. Aynı zamanda, hem sürekli hem de $\delta$-süreklidir. Fakat, hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekli değildir. Birinci bölümdeki bilgilerden yararlanarak, aşağıdaki çizelgeyi elde ederiz:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{süper c.} \arrow[r] \arrow[ddr] & \text{c.} \arrow[dr] & & & & \\
\text{str.}\theta\text{-c.} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \text{a.c.S.} \arrow[r] & \theta\text{-c.} \arrow[r] & \text{w.}\delta\text{-c.} \arrow[r] & \text{w.c.} \\
 & \text{a.str.}\theta\text{-c.} \arrow[r] & \delta\text{-c.} \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

**2.2.1.ÖRNEK[5]** R reel sayılar kümesi üzerinde $\tau = \{ R, \emptyset, B \subset R : B = R \backslash A, A \text{ sayılabilir} \}$ topolojisi ve $Y = \{a,b\}$ kümesi üzerinde $\tau^* = \{ Y, \emptyset, \{a\} \}$ topolojisi olmak üzere, f fonksiyonu,

$$f : (R,\tau) \to (Y,\tau^*) \qquad x \to f(x) = \begin{cases} a, & x \in Q \\ b, & x \in R\backslash Q \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde, f fonksiyonu hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir. Fakat, $x \in Q$ da ne kuvvetli θ-sürekli ne süper sürekli ne de süreklidir.

**Çözüm:** $x \in Q$ ise, $f(x)=a$ noktasının her $\{a\}$ açık komşuluğu için, $x \in Q$ noktasının bir R açık komşuluğu vardır, öyle ki $f(R^-) \subset \{a\}^{-o} \Rightarrow f(R) \subset Y \Rightarrow \{a,b\} \subset Y$ olur.

$x \in R\backslash Q$ ise, $f(x)=b$ noktasının her Y açık komşuluğu için, $x \in R\backslash Q$ noktasının bir $R\backslash Q$ açık komşuluğu vardır, öyle ki $f((R\backslash Q)^-) \subset Y^{-o} \Rightarrow f(R) \subset Y \Rightarrow \{a,b\} \subset Y$ olur. Dolayısıyla, f fonksiyonu hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

Fakat, $x \in Q$ ise, $f(R^-) \subset \{a\} \Rightarrow \{a,b\} \not\subset \{a\}$ olduğundan, f fonksiyonu kuvvetli θ-sürekli değildir.

$x \in Q$ ise, $f(R^{-o}) \subset \{a\} \Rightarrow f(R) \subset \{a\} \Rightarrow \{a,b\} \not\subset \{a\}$ olduğundan, f fonksiyonu süper sürekli değildir.

$x \in Q$ ise, $f(R) \subset \{a\} \Rightarrow \{a,b\} \not\subset \{a\}$ olduğundan, f fonksiyonu sürekli değildir.

Sonuç olarak, hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekli fonksiyon kavramı, hem süper süreklilik ve hem de süreklilik kavramlarından bağımsızdır. Birinci bölümden yararlanarak, aşağıdaki teoremler elde edilir.

**2.2.1.TEOREM** Eğer $f : X \to Y$ hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekli fonksiyon ve $Y$ yarı düzenli uzay ise, $f$ fonksiyonu kuvvetli $\theta$-süreklidir.

**ispat:** $x \in X$ ve $f(x)$'in bir $V \subset Y$ açık komşuluğu verilsin. $Y$ yarı düzenli uzay olduğundan, $x \in V_1 \subset V_1^{-o} \subset V$ olacak şekilde, $x$'in bir $V_1 \subset Y$ açık komşuluğu vardır. $f$ hemen hemen kuvvvetli $\theta$-sürekli olduğundan, $f(U^-) \subset V_1^{-o} \subset V$ olacak biçimde, $x$'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. Dolayısıyla, $f$ fonksiyonu kuvvetli $\theta$-süreklidir.

**2.2.2.TEOREM** Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu $\delta$-sürekli ve $X$ hemen hemen düzenli uzay ise, $f$ fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklidir.

**ispat:** $x \in X$ ve $f(x)$'in bir $V \subset Y$ açık komşuluğu olsun. $f$ $\delta$-sürekli olduğundan, $f(U^{-o}) \subset V^{-o}$ olacak şekilde, $x$'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. $U^{-o}$ düzenli açık küme ve $X$ hemen hemen düzenli uzay olduğundan, $x \in W \subset W^- \subset U^{-o}$ olacak şekilde, bir $W \subset X$ açık komşuluğu vardır. Buradan, $f(W^-) \subset f(U^{-o}) \subset V^{-o}$ bulunur. Böylece, $f$ fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklidir.

**2.2.1.SONUÇ** $X$ hemen hemen düzenli ve $Y$ yarı düzenli uzaylar olmak üzere, $f : X \to Y$ fonksiyonu için, kuvvetli $\theta$-süreklilik, hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklilik ve $\delta$-süreklilik kavramları eşdeğerdir.

**2.2.3. TEOREM** Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu $\theta$-sürekli ve Y hemen hemen düzenli uzay ise, f fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklidir.

**İspat:** 2.1.1. Tanımdan ve Y uzayının hemen hemen düzenli olmasından çıkar.

**2.2.4. TEOREM** X ve Y hemen hemen düzenli uzaylar olmak üzere, $f : X \to Y$ fonksiyonu zayıf $\delta$-sürekli ise, f fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklidir.

**İspat:** $x \in X$ ve $f(x)$'i kapsayan bir $V \subset Y$ düzenli açık kümesi olsun. Y hemen hemen düzenli uzay olduğundan, $f(x) \in V_1 \subset V_1^- \subset V$ olacak şekilde, $f(x)$'in bir $V_1$ açık komşuluğu vardır. f zayıf $\delta$-sürekli olduğundan, $f(U^{-o}) \subset V_1^- \subset V$ olacak şekilde, x'in bir $U \subset X$ açık komşuluğu vardır. 2.2.2. Teorem gereğince, f fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklidir.

**2.2.2. SONUÇ** X ve Y hemen hemen düzenli uzaylar olmak üzere, $f : X \to Y$ fonksiyonu için, hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklilik, $\theta$-süreklilik ve zayıf $\delta$-süreklilik kavramları eşdeğerdir.

**2.2.5. TEOREM** Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu Singal ve Singal anlamında hemen hemen sürekli ve X düzenli uzay ise, f fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklidir.

**İspat:** $x \in X$ ve $f(x)$'in bir $V \subset Y$ açık komşuluğu olsun. f fonksiyonu Singal ve Singal anlamında hemen hemen sürekli olduğundan, $f(U) \subset V^{-o}$ olacak şekilde, x'i kapsayan bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. X düzenli uzay olduğundan, $U_1^- \subset U$ olacak şekilde, x'in bir $U_1$ açık komşuluğu vardır. Böylece, $f(U_1^-) \subset f(U) \subset V^{-o}$ dir. Dolayısıyla, $f(U_1^-) \subset V^{-o}$ olur ki f fonksiyonu hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

**2.2.3.SONUÇ** Eğer X düzenli uzay ve $f : X \to Y$ fonksiyonu sürekli ise, f fonksiyonu hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

**2.2.6.TEOREM** X düzenli uzay ve Y hemen hemen düzenli uzay olmak üzere, $f : X \to Y$ zayıf sürekli fonksiyon ise, f fonksiyonu hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

**ispat:** $x \in X$ ve f(x)'i kapsayan bir $V \subset Y$ düzenli açık kümesi olsun. Y hemen hemen düzenli uzay olduğundan, $f(x) \in V_1 \subset V_1^- \subset V$ olacak şekilde, f(x)'i kapsayan bir $V_1$ açık komşuluğu vardır. f zayıf sürekli olduğundan, $f(U) \subset V_1^- \subset V$ olacak şekilde, x'i kapsayan bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. 2.2.5.Teorem gereğince, f fonksiyonu hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

**2.2.4.SONUÇ** X ve Y düzenli uzaylar olmak üzere, $f: X \to Y$ fonksiyonu için, aşağıdakiler eşdeğerdir:

a) f kuvvetli θ-süreklidir.

b) f hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

c) f süper süreklidir.

d) f süreklidir.

e) f Singal ve Singal anlamında hemen hemen süreklidir.

f) f θ-süreklidir.

g) f zayıf δ-süreklidir.

h) f zayıf süreklidir.

ı) f δ-süreklidir.

Birinci bölümdeki, 1.2.6.Tanım, 1.2.7.Tanım, 1.2.8.Tanım ve 1.2.11.Teoremden yararlanarak, aşağıdaki teorem ve sonucu elde ederiz.

**2.2.7.TEOREM** Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekli ve $A$ kümesi, $X$'e göre, $\theta$-bağlantılı ise, $f(A)$ kümesi de, $Y$'ye göre, $\delta$-bağlantılıdır.

**ispat:** Varsayalım ki $f(A) \subset Y$ kümesi, $\delta$-bağlantılı olmasın. Bu takdirde, $f(A) = U \cup V$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ ve $(U,V)$ ikilisi, $Y$'ye göre, $\delta$-parçalanıştır. Dolayısıyla, $[U]_\delta \cap V = U \cap [V]_\delta = \emptyset$, $A = (f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)) \cap A$ ve $A = [f^{-1}(U) \cap A] \cup [f^{-1}(V) \cap A]$ elde edilir. $S = A \cap f^{-1}(U)$ ve $T = A \cap f^{-1}(V)$ diyelim. Buradan, $A = S \cup T$ olur. Ayrıca, $f$ hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekli olduğundan, 2.1.1.Teoremin d) şıkkı gereğince,

$[f^{-1}(U)]_\theta \cap f^{-1}(V) \subset f^{-1}([U]_\delta) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ ve

$f^{-1}(U) \cap [f^{-1}(V)]_\theta \subset f^{-1}(U) \cap f^{-1}([V]_\delta) = \emptyset$ bulunur. Buradan,

$[f^{-1}(U)]_\theta \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U) \cap [f^{-1}(V)]_\theta = \emptyset$ olur. Her iki tarafın $A$ kümesiyle kesişimini alırsak,

$[f^{-1}(U) \cap A]_\theta \cap f^{-1}(V) \cap A = f^{-1}(U) \cap A \cap [f^{-1}(V) \cap A]_\theta = \emptyset$

elde edilir. Buradan, $[S]_\theta \cap T = S \cap [T]_\theta = \emptyset$ olur ki $(S,T)$ ikilisi, $X$'e göre, $\theta$-parçalanıştır. Bu ise, $A$ kümesinin, $X$'e göre, $\theta$-bağlantılı olmasıyla çelişir. O halde, $f(A)$ kümesi, $Y$'ye göre, $\delta$-bağlantılıdır.

**2.2.5.SONUÇ** Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekli ve $A$ kümesi, $X$'e göre, $\theta$-bağlantılı ise, $f(A)$ kümesi de, $Y$'ye göre, $\theta$-bağlantılıdır.

**KAYNAKLAR**

[1] NOİRİ, T., 1980, On $\delta$-continous functions, Korean Math. Soc. J.,16, no:2, 161-166.

[2] BAKER, C.W., 1985, On super continuous functions, Bull. Korean Math. Soc.,22, no:1, 17-22.

[3] URYSHON, P., 1925, über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, Math. Ann., 94, 262-295.

[4] FOMİN, S., 1943, Extensions of topological spaces,Ann. of Math., 44, 471-480.

[5] SİNGAL, M.K., SİNGAL, A.R., 1968, Almost-continuous mappings, Yokohama Math. J., 16, 63-73.

[6] MUNSHİ, B.M., BASSAN, D.S., 1982, Super-continuous mappings, Indian J. Pure Appl. Math., 14, 229-236.

[7] SİNGAL, M.K., ARYA, S.P., 1969, On almost-regular spaces, Glasnik Mat., 4, 24, 89-99.

[8] MUNKRES, R. James, 1975, Topology, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New-Jersey.

[9] KİM, Hong Oh, 1970, Notes on C-compact spaces and functionally compact spaces, Kyuungpook Math. J., 10, 75-80.

[10] LONG, P.E., HERRİNGTON, L.L., 1974, Properties of almost continuous functions, Boll. U. M. I., 10, 336-342.

[11] LEViNE, N., 1961, A decomposition of continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly, 44-46.

[12] NOiRi, T., 1984, A weak form of connected sets.

[13] CLAY, J.P., JOSEPH, J.E., 1981, On a connectivity property induced by the θ-closure operator, Illinois J. Math., 25, 267-278.

[14] ViLiCKO, N.V., 1968, H-closed topological spaces, Amer. Math. Soc. Transl., 78, 2, 103-118.

ÖZGEÇMİŞİM

1966 yılında içel ili Silifke ilçesinde doğdum. ilk, Orta ve Lise tahsilimi Silifke'de yaptım. 1983 yılında Selçuk üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başlayıp, 1987 yılında mezun oldum. 1987 yılında Selçuk üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans'a başladım. Halen, 1988 yılından beri, Selçuk üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım.