17310

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİSLERİN İNVERSLERİNİN BANT OLMA ŞARTLARI

Durmuş BOZKURT

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Konya, 1991

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİSLERİN İNVERSLERİNİN BANT OLMA ŞARTLARI

Durmuş BOZKURT

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İmza	İmza	İmza
Prof.Dr. ALİ SİNAN	Prof.Dr. Mehmet Çağlıyan	Prof.Dr. Metin ARIK
(Danışman)	(Üye)	(Üye)

ÖZET

Doktora Tezi

MATRİSLERİN İNVERSLERİNİN

BANT MATRİS OLMA ŞARTLARI

Durmuş BOZKURT

Selçuk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr.Ali A. SİNAN

1991, Sayfa: 43

Jüri:

Bu çalışmada, singüler olmayan A n-kare matrisinin $a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{n-1,n-1}$ elemanlarının hepsi sıfırdan farklı olmak üzere inversinin [2(n-p)-1]-bant olması için hangi şartları sağlaması gerektiği araştırılmıştır. Burada p, $1 \leq p \leq n-2$ şartını sağlayan tam sayılardır. Çalışma sonucunda A matrisinin, $i=1,\ldots,p$ $(1 \leq p \leq n-2)$; $k=i+1$ ve $j=i+2, \ldots, n$ olmak üzere $A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix}$ ve $A\begin{pmatrix} k & j \\ i & k \end{pmatrix}$ şeklindeki 2-minörlerinin sıfır olması için gerek ve yeter şartın $r_{ij}=r_{ji}=0$ olacak şekilde $R=A^{-1}$'in [2(n-p)-1]-bant olması gerektiği gösterilmiştir. Ayrıca Wayne W. Barrett, Philip J. Feinsilver [1] ve Wayne W. Barrett [2]'in çalışmalarındaki "$i<k<j$ ve $i>k>j$ olmak üzere A matrisinin üçgen özelliğini sağlaması için gerek ve yeter şart $R=A^{-1}$ 'in üçlü bant matris olmasıdır." şeklindeki teoremlerinde, sıfır olması gereken 2-minör sayısı $2\binom{n}{3}$ adettir. Halbuki bizim çalışmamızda $n \geq 4$ için sıfır olması gereken 2-minör sayısı $2\binom{n}{3}$'den daha küçük olan $f(m,n)=2\sum_{s=m}^{n-2} s$'dir.

ANAHTAR KELİMELER: matris, bant matris, 2-minör, invers, sıfırlayan minör, bant inversli matris.

ABSTRACT

The Doctorate Thesis

THE CONDITIONS OF BEING BAND MATRIX OF THE INVERSES OF MATRICES

Durmuş BOZKURT
Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Ali A. SİNAN
1991, Page: 43

Jury:

In this study, we search for conditions under which the inverse of a matrix A is $[2(n-p)-1]$-band. The elements a_{22}, a_{33}, ..., $a_{n-1,n-1}$ of the nonsingular, nxn square matrix A are taken to be nonzero. Here p is an integer such that $1 \leq p \leq n-2$. As a result of this study, it has been proven that 2-minors of A matrix, $A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix}$ and $A\begin{pmatrix} k & j \\ i & k \end{pmatrix}$ are zero if and only if $R=A^{-1}$ is $[2(n-p)-1]$-band and $r_{ij}=r_{ji}=0$ where $i=1,2,\ldots,p$ $(1 \leq p \leq n-2)$; $k=i+1$; $j=i+2,\ldots,n$.

Moreover, the number of 2-minors which must be zero in the theorems of Wayne W. Barrett and Wayne W. Barrett and Philip J. Feinsilver's paper are $2\binom{n}{3}$. However in our study, the number of 2-minors which must be zero is less than $2\binom{n}{3}$ if $n \geq 4$.

KEY WORDS: matrix, band, band matrix, 2-minor, invers, vanishing minor, banded invers matrix.

ÖNSÖZ

Doktora tezi olarak yapılan bu çalışmada bant matrisler ve inversleri üzerinde durulmuştur. Çalışma üç bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölümde çalışmaya temel teşkil eden genel bilgiler verildi. ikinci bölümde bant matris tanımı, bant matrislerin minörleri, determinantlarının bazı özellikleri, inversleri ve inverslerinin çeşitli özellikleri üzerinde duruldu. Çalışmamızın esas kısmını üçüncü bölüm oluşturmaktadır. Bu bölümde matrislerin inverslerinin bant olma şartları araştırılarak bazı şartlar ortaya kondu. Bu şartlar sayesinde matrislerin inverslerinin yapısı hakkında, invers matrisi hesaplamadan bazı yorumlarda bulunmak mümkün olacaktır. Ayrıca bu şartlara bağlı çeşitli sonuçlar da elde edilmiştir.

Çalışmalarım esnasında kıymetli yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof.Dr. Ali A. SiNAN'a teşekkür eder, en derin hürmetlerimi sunarım.

Durmuş BOZKURT

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

A^T	:	A matrisinin transpozu
v^T	:	v vektörünün transpozu
detA	:	A matrisinin determinantı
Σ	:	Toplam operatörü
E	:	nxn tipinde birim matris
A^{-1}	:	A matrisinin inversi
$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix}$	:	A matrisinin 2-minörleri
$\binom{n}{k}$	:	n'in k-lı kombinasyonu

1. GİRİŞ

Günümüzde matrisler fen bilimlerinin ve mühendisliğin her dalında çok kullanıldığı gibi artık sosyal bilimlerde de kullanılmaktadır. Çağımız bilgisayar çağı olduğundan, bilgisayarın bulunduğu her yerde matris ve matris işlemleri de kullanılmaktadır. Bundan dolayı matris ve matris işlemleri daha da önem kazanmaktadır.

Biz bu çalışmamızda bant matrisler üzerinde durduk. Bant matrislerde sıfırdan farklı eleman sayısının az olması matrislerle yapılan işlemlerde çok büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Bilhassa bilgisayarsız yapılan işlemlerde işlem sayısı oldukça azalmaktadır. Bilgisayarla yapılan çalışmalarda da yine sıfır eleman sayısı fazla olduğundan işlemler çabuklaşmaktadır.

Wayne W. Barrett ve J. Philip Feinsilver [1], Wayne W. Barrett [2] çalışmalarında matrislerin inverslerinin üçlü bant matris olması için bir gerek ve yeter şart; Wayne W. Barrett [3] bant inversli Toeplitz matrislerinin özelliklerini; Barrett, Johnson, Olesky ve Driessche [4] invers matrislerin prensibal alt matrislerinin bulunmasını; Barrett ve Johnson [5] spars inversli matrisler için bir determinant formülü; Demko, Moss ve Smith [6] bant matrislerin inversleri için zayıf oranları; Dym ve Gohberg [7] bant inversli bant matrislerin genişlemelerini; Françesco Romani [10] bant matrislerin inverslerinin toplamsal yapılarını; Tetsuro Yamamoto ile Yasuhiko Ikebe [31] bant matrislerin inverslerini bulma metodlarını; Greville ve Trench [13] Toeplitz inversli bant matrislerin bazı özelliklerini; Hoskins ve McMaster [18] bant matrislerin bir cümlesinin bazı özelliklerini; Huang ve Cline [19] Toeplitz inversli persimetrik matrislerin inverslerinin hesaplanmasını; Ikebe [20] Hessenberg matrislerinin inversleri için bir formül ve Rozsa [27] bant matrislerin inverslerini bulma formüllerini vermişlerdir. Biz de bu çalışmamızda matrislerin inverslerinin her hangi bant olması için gerek ve yeter şartlar ile bunlara bağlı sonuçları verdik.

Ayrıca bu sonuçlarda, bizim çalışmamızda verdiğimiz teoremde sıfır olması gereken 2-minör sayısı, Barrett ve Feinsilver [1] ile Barrett [2] çalışmalarında verdikleri teoremlerindeki sıfır olması gereken 2-minör sayısından az olacağı gösterilmiştir.

1.1. Matrislerin Minörleri ve özellikleri

Tanım 1.1.1. $m,n \in Z^{+}$ ve $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ olmak üzere bütün (i,j) ikililerinin cümlesi M olsun. F herhangi bir cisim,

$$f:\ M \to F$$
$$(i,j) \to f(i,j) = a_{ij}$$

olmak üzere $a_{ij} \in F$ değerleri ile

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

şeklinde düzenlenen tabloya matris denir.

Tanım 1.1.2. $A=(a_{ij})$ n-kare matris olsun. A'nın i-inci satır, j-inci sütun elemanlarının atılmasıyla elde edilen matrisin determinant değerine A matrisinin a_{ij} elemanının minörü denir ve A_{ij} ile gösterilir. $i+j$ çift sayı olduğunda A_{ij} pozitif, tek sayı olduğunda A_{ij} negatif alınırsa A_{ij}'ye A matrisinin a_{ij} elemanına ait işaretli minörü denir.

Tanım 1.1.3. $A=(a_{ij})$ n-kare matris olsun. $1 \leq i,j \leq n$ ve $1 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_k \\ j_1, j_2, \ldots, j_k \end{pmatrix}$$

A'nın herhangi bir minörü olsun.

$$\alpha = \begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_k \\ j_1, j_2, \ldots, j_k \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

dersek

$$\alpha' = \begin{pmatrix} i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n \\ j_{k+1}, j_{k+2}, \ldots, j_n \end{pmatrix}$$

olup $A(\alpha')$ minörüne $A(\alpha)$ minörünün cebirsel tamamlayıcısı denir.

Tanım 1.1.4. $A=(a_{ij})$ n-kare matris olsun. $1 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_k \\ i_1, i_2, \ldots, i_k \end{pmatrix}$$

minörüne A matrisinin esas (Prensibal) minörü denir.

Tanım 1.1.5. $A=(a_{ij})$ n-kare matris $m=1,2,\ldots,n-1$ ve $j_1 > i_m - m+1$ (veya $i_1 > j_m - m+1$) olacak şekildeki bütün $i(m)$, $j(m)$ indisleri için

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_m \\ j_1, j_2, \ldots, j_m \end{pmatrix} = 0 \qquad (1.3)$$

olsun. Bu takdirde A matrisine sıfırlayan üst (veya alt)-minörlere sahiptir denir.

Tanım 1.1.6. $A=(a_{ij})$ n-kare matris olsun. $1 \leq m \leq n$ olmak üzere A'nın büyüklüklerine göre düzenlenmiş $i_1, i_2, \ldots, i_m$ gibi m satırını seçelim. Bu m satırla n sütun arasında mümkün olan bütün seçimleri yaparak

$$\rho = \frac{n!}{m!\ (n-m)!} \qquad (1.4)$$

tane $A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_m \\ j_1, j_2, \ldots, j_m \end{pmatrix}$ minörlerini elde edelim. Bu minörleri ve bunların cebirsel tamamlayıcılarını kullanarak

$$\det A = \sum_{\rho} (-1)^s A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_m \\ j_1, j_2, \ldots, j_m \end{pmatrix} . A\begin{pmatrix} i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n \\ j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n \end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

elde edilen ifadeye Laplace açılımı denir. Burada

$$s = i_1 + i_2 + \ldots + i_m + j_1 + j_2 + \ldots + j_m$$

dir.

Teorem 1.1.1. Bir kare matrisin herhangi bir satırındaki (veya sütunundaki) elemanların, bunlara karşılık gelen işaretli minörleriyle çarpımlarının toplamı matrisin determinantını verir.

Tanım 1.1.7. $A=(a_{ij})$ n-kare matris olsun. A matrisinin determinantı matrisin minörlerine bağlı olarak

$$\det A=A\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n\\1,2,\ldots,n\end{pmatrix}=\left[A\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n-1\\1,2,\ldots,n-1\end{pmatrix}\cdot A\begin{pmatrix}2,3,\ldots,n\\2,3,\ldots,n\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.-A\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n-1\\2,3,\ldots,n\end{pmatrix}\cdot A\begin{pmatrix}2,3,\ldots,n\\1,2,\ldots,n-1\end{pmatrix}\right]\Big/A\begin{pmatrix}2,3,\ldots,n-1\\2,3,\ldots,n-1\end{pmatrix} \quad (1.6)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.1.8. $A=(a_{ij})$ n-kare matris olsun. $1\leq i\leq n-k-1$ için A'nın

$A\begin{pmatrix}i+1,i+2,\ldots,i+k\\i+1,i+2,\ldots,i+k\end{pmatrix}$ şeklindeki prensibal minörleri sıfırdan farklı ise A'ya k-regüler matris denir.

Teorem 1.1.2. $A=(a_{ij})$ n-kare matrisi sıfırlayan üst (veya alt)-m-minörlere sahip ise

$$\det A=\frac{D_1\ D_2\ \cdots\ D_{n-m+1}}{d_1\ d_2\ \cdots\ d_{n-m}} \quad (1.7)$$

dir. Burada

$$D_k=A\begin{pmatrix}k,k+1,\ \ldots\ ,k+m-1\\k,k+1,\ \ldots\ ,k+m-1\end{pmatrix}\quad \text{ve}\quad d_k=A\begin{pmatrix}k+1,k+2,\ \ldots\ ,k+m-1\\k+1,k+2,\ \ldots\ ,k+m-1\end{pmatrix}$$

dir [1].

İspat: Kabul edelim ki $k=1,2,\ \ldots\ ,n-m$ için $d_k=0$ olsun. $A\begin{pmatrix}k,k+1,\ \ldots\ ,k+m\\k,k+1,\ \ldots\ ,k+m\end{pmatrix}$ minörlerine (1.6) özdeşliğini uygulayalım. Bu durumda

$$A\begin{pmatrix}k+1,\ldots,k+m-1\\k+1,\ldots,k+m-1\end{pmatrix}\cdot A\begin{pmatrix}k,\ldots,k+m\\k,\ldots,k+m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}k,\ldots,k+m-1\\k,\ldots,k+m-1\end{pmatrix}\cdot A\begin{pmatrix}k+1,\ldots,k+m\\k+1,\ldots,k+m\end{pmatrix}$$

$$-A\begin{pmatrix}k,\ \ldots,k+m-1\\k+1,\ldots,k+m\end{pmatrix}\cdot A\begin{pmatrix}k+1,\ldots,k+m\\k,\ \ldots,k+m-1\end{pmatrix} \quad (1.8)$$

olur. Ancak $A\begin{pmatrix}k,\ \ldots,k+m-1\\k+1,\ldots,k+m\end{pmatrix}=0$ dır. O halde

$$d_k\cdot A\begin{pmatrix}k,\ldots,k+m\\k,\ldots,k+m\end{pmatrix}=D_k\cdot D_{k+1} \quad (1.9)$$

elde ederiz. Böylece $d_k=0$ ise (1.7) özdeşliği sağlanır.

Şimdi de kabul edelim ki $k=1,\ldots,n-m$ için $d_k\neq0$, yani A matrisi (m-1)-regüler olsun. İspatı n üzerinden indüksiyonla yapalım. $n=m+1$ alalım. Hipotezden

$$A\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n-1\\2,3,\ldots,n\end{pmatrix}=0$$

olduğundan (1.8) özdeşliği

$$A\begin{pmatrix}2,\dots,n-1\\2,\dots,n-1\end{pmatrix}\cdot A\begin{pmatrix}1,\dots,n\\1,\dots,n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1,\dots,n-1\\1,\dots,n-1\end{pmatrix}\cdot A\begin{pmatrix}2,\dots,n\\2,\dots,n\end{pmatrix} \qquad (1.10)$$

olur. Bundan dolayı

$$(\det A).d_1=D_1\cdot D_2 \qquad (1.11)$$

olacaktır. Şimdi $n>m+1$ kabul edelim. A'nın sıfırlayan üst-m-minörlerinden $A\begin{pmatrix}2,3,\dots,n\\2,3,\dots,n\end{pmatrix}$ minörü için (indüksiyon hipotezinden)

$$A\begin{pmatrix}2,3,\dots,n\\2,3,\dots,n\end{pmatrix}=\frac{D_2\ D_3\ \dots\ D_{n-m+1}}{d_2\ d_3\ \dots\ d_{n-m}} \qquad (1.12)$$

yazarız. R, $A\begin{pmatrix}1,2,\dots,m\\2,3,\dots,n\end{pmatrix}$ minörüne karşılık gelen matris olsun. Aşikâr olarak $\operatorname{rank}R<m$ dir. O halde R'nin satırları lineer bağımlıdır. $d_1\neq0$ olduğundan R'nin ilk satırı $2,3,\dots,m$ satırların bir lineer kombinasyonudur. Böylece A matrisinde ilk satırdan $2,3,\dots,m$ satırların bir lineer kombinasyonunu çıkabiliriz. Bu takdirde birinci satırda bir eleman hariç diğerlerinin hepsi sıfırdır. Sıfır olmayan bu elemana a diyelim. Determinant değeri satır operasyonları altında invaryant kaldığından $\det A=a.A\begin{pmatrix}2,3,\dots,n\\2,3,\dots,n\end{pmatrix}$ ve $D_1=ad_1$ dir. Buradan a çekilip önceki denklemde yerine yazılırsa (1.12) denkleminden

$$\det A=\frac{D_1\ D_2\ \dots\ D_{n-m+1}}{d_1\ d_2\ \dots\ d_{n-m}} \qquad (1.13)$$

olur.

A, sıfırlayan üst-m- minörlere sahipse A'nın transpozu da sıfırlayan üst-m-minörlere sahip olup $\det A=\det A^T$ olduğundan (1.7) ifadesi kesinlikle vardır.

Tanım 1.1.8. A, $a_{22},a_{33},\dots,a_{n-1,n-1}$ köşegen elemanları sıfır olmayan n-kare matris olsun. Eğer her $i<k<j$ ve her $i>k>j$ için ($i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,n$)

$$a_{ij}=\frac{a_{ik}\ a_{kj}}{a_{kk}} \qquad (1.14)$$

eşitliğini sağlıyorsa A matrisi üçgen özelliğine sahiptir denir.

(1.14) ifadesini düzenlersek

$$a_{ij}a_{kk}=a_{ik}a_{kj}$$

veya

$$A\begin{pmatrix}i & k\\k & j\end{pmatrix}=a_{ik}\ a_{kj}-a_{ij}\ a_{kk} \qquad (1.15)$$

olduğu kolayca görülür.

Lemma 1.1.1. A, üçgen özelliğine sahip ve $1\leq k\leq n-1$ için $d_{k,k+1}=0$ ise A matrisi singülerdir. Burada

$$d_{ij}=a_{ii}\,a_{jj}-a_{ij}\,a_{ji} \qquad (1\leq i,j\leq n) \tag{1.16}$$

dır [2].

İspat: Kabul edelim ki

$$d_{k,k+1}=a_{kk}a_{k+1,k+1}-a_{k,k+1}\,a_{k+1,k}=0$$

olsun. Bu takdirde iki durum ortaya çıkar:

1. Durum:

$a_{kk}\,a_{k+1,k+1}=0$ ise $k=1$ veya $k=n-1$ dir. $k=1$ olsun. O halde $a_{11}\,a_{22}=0$ olup $a_{22}\neq 0$ olduğundan $a_{11}=0$ dır. $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$ olduğundan $a_{12}=0$ veya $a_{21}=0$ dır. $a_{12}=0$ ise $k>2$ için

$$a_{1k}=\frac{a_{12}\,a_{2k}}{a_{22}}=0$$

olur. Böylece $k=1,2,\ldots,n$ için $a_{1k}=0$ olması A matrisinin singüler olmasını gerektirir. $a_{21}=0$ ise $k>2$ için

$$a_{k1}=\frac{a_{21}\,a_{k2}}{a_{22}}=0$$

olacaktır. Yine $k=1,2,\ldots,n$ için $a_{k1}=0$ olup A matrisi singülerdir. $k=n-1$ olması hali de benzer şekilde ispatlanır.

2. Durum:

$a_{kk}\,a_{k+1,k+1}\neq 0$ olsun. Bu takdirde $a_{k,k+1}\,a_{k+1,k}\neq 0$

$$\alpha=\frac{a_{kk}}{a_{k+1,k}}=\frac{a_{k,k+1}}{a_{k+1,k+1}} \tag{1.17}$$

olsun. Bu durumda $j\geq k+1$ ve $j\leq k$ için

$$a_{kj}=\frac{a_{k,k+1}\,a_{k+1,j}}{a_{k+1,k+1}}=\alpha a_{k+1,j} \tag{1.18}$$

$$a_{k+1,j}=\frac{a_{k+1,k}\,a_{kj}}{a_{kk}}=\frac{a_{kj}}{\alpha} \tag{1.19}$$

olur. $j=1,2,\ldots,n$ için $a_{kj}=\alpha a_{k+1,j}$ olacaktır. k-ıncı satır (k+1)-inci satırın bir katı olduğundan A matrisi singülerdir.

Teorem 1.1.3. A, inversi R olan singüler olmayan bir matris, p ve k, $0\leq p\leq n-2$, $2\leq 2k\leq n-p$ şartlarını sağlayan tam sayılar olsun. $|r|=p$ ve $r\geq 0$ için $m=k$, $r<0$ için $m=k+p$ olmak üzere bütün $i(m), j(m)$ ve $j_1>i_m+r$ indisleri için

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_m \\ j_1, j_2, \dots, j_m \end{pmatrix}=0 \tag{1.20}$$

ise bütün $i(m+r)$, $j(m+r)$ ve $j_1 > i_{m+r}-r$ indisleri için

$$R\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_{k+p} \\ j_1, j_2, \dots, j_{k+p} \end{pmatrix}=0 \tag{1.21}$$

dır [1].

İspat: $|r|=p$ ve $r \geq 0$ için $m=k$, $r<0$ için $m=k+p$ olsun. İnvers matrislerin minörlerini esas matrisin minörlerine bağlı bulmak için verilen formülden [29,s.616]

$$v=A\begin{pmatrix} 1,\dots,j_1-1,j_1+1,\dots,j_2-1,j_2+1,\dots,j_{m+r}-1,j_{m+r}+1,\dots,n \\ 1,\dots,i_1-1,i_1+1,\dots,i_2-1,i_2+1,\dots,i_{m+r}-1,i_{m+r}+1,\dots,n \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$R\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_{m+r} \\ j_1, \dots, j_{m+r} \end{pmatrix} = (\det A)^{-1}\cdot(-1)^s \cdot v \tag{1.22}$$

olur. Burada

$$s=\sum_{t=1}^{m+r} (i_t+j_t) \tag{1.23}$$

dür. Böylece (1.22) ifadesinin sağ yanındaki minörün $j_1 > i_{m+r}-r$ için sıfır olduğunu göstermemiz gerekir. S, bu minöre karşılık gelen matrisin ilk $i_{m+r}-r$ satırından meydana gelen alt matris olsun. Biliyoruz ki, S alt matrisi de $i_{m+r}-r \leq j_1-1$ olduğundan A matrisinin ilk $i_{m+r}-r$ satırından meydana gelen bir alt matristir. T, S matrisinin $(i_{m+r}-r)x(i_{m+r}-r)$ şeklinde bir alt matrisi olsun. S matrisinde A'nın $i_1,\dots,i_{m+r}$ indisli sütunları bulunmadığından T sadece $i_{m+r}+1$ den daha küçük indisli $i_{m+r}-m-r$ tane sütuna sahiptir. Böylece T'nin son m sütununun herbirinin sütun indisi $i_{m+r}+1$'e eşit veya bundan büyüktür. Bundan dolayı T'nin son m sütunundan elde edilen her mxm minör hipotezden dolayı sıfırdır. Dolayısıyla detT=0 olup

$$\operatorname{rank}S < i_{m+r}-r$$

dir. O halde (1.22) 'nin sağ yanındaki minör sıfırdır.

Üst-minörler için geçerli olan bu teorem transpoz almakla alt-minörler için de geçerlidir.

Sonuç 1.1.1. $p=0$ için A matrisinde esas köşegen üstündeki (veya altındaki) her $(k\times k)$ minörün sıfır olması için gerek ve yeter şart A^{-1} de de esas köşegen üstündeki (veya altındaki) her $(k\times k)$ minörün sıfır olmasıdır [1].

Teorem 1.1.4. A, $i=1,\dots,n-p$ ve $m=p,p+1,\dots,n-i$ için

$$A\begin{pmatrix} i, & i+1, & \dots, & i+p-2, & i+p-1 \\ i+1, & i+2, & \dots, & i+p-1, & i+m \end{pmatrix}=0$$

olacak şekilde $(p-1)$-regüler n-kare matris olsun. Bu takdirde A matrisi sıfırlayan üst-p-minörlere sahiptir [1].

İspat: önce $i=1,2,\dots,n-p$ ve $i+1\leq j_1<j_2<\dots<j_p\leq n$ için

$$A\begin{pmatrix} i, & i+1, & \dots, & i+p-2, & i+p-1 \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_{p-1}, & j_p \end{pmatrix}=0 \qquad (1.24)$$

olduğunu gösterelim. Şimdi $k=1,2,\dots,p$ için

$$A\begin{pmatrix} i, & i+1, & \dots, & i+p-2, & i+p-1 \\ i+1, & i+2, & \dots, & i+p-1, & j_k \end{pmatrix}=0 \qquad (1.25)$$

dir. Çünkü $j_k\leq i+p-1$ için iki sütun eşittir ve $j_k\geq i+p$ için hipotezden dolayı sıfırdır. $(a_{iv},a_{i+1,v},\dots,a_{i+p-2,v},a_{i+p-1,v})^T$ sütun vektörüne a_v diyelim. Burada $v=i+1,\dots,n$ dir. A, $(p-1)$-regüler olduğundan (1.25) denklemi $a_{i+1},a_{i+2},\dots,a_{i+p-1},a_{j_k}$ vektörlerini lineer bağımlı kılarken $a_{i+1},a_{i+2},\dots,a_{i+p-1}$ vektörleri lineer bağımsızdır. Böylece a_{j_k}, $k=1,2,\dots,p$ için $a_{i+1},a_{i+2},\dots,a_{i+p-1}$ vektörlerinin lineer kombinasyonudur. Bu, determinantın çok lineerliği ve determinantta iki sütunun eşit olması, determinant değerini sıfır yapmakla birlikte (1.24) denkleminin varlığını gerektirir.

Şimdi de her üst-p-minörün sıfır olduğunu gösterelim. Yani

$$A\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_p \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_p \end{pmatrix}=0 \qquad (1.26)$$

olduğunu göstermeliyiz. Burada $j_1>i_p-p+1$ dir. j_p-i_1 üzerinden indüksiyon kullanalım. Hipotezden $j_p-i_1=p$ için (1.26) denklemi var iken $i=1,2,\dots,n-p$ için

$$A\begin{pmatrix} i, & i+1, & \dots, & i+p-2, & i+p-1 \\ i+1, & i+2, & \dots, & i+p-1, & i+p \end{pmatrix}=0$$

dır.

Kabul edelim ki $p\leq j_p-i_1\leq m-1$ olmak üzere her $i(p)$, $j(p)$ indisi için (1.26) denklemi sağlansın ve $j_1>i_p-p+1$ ve $j_p-i_1=m$

olmak üzere $i(p)$, $j(p)$ herhangi indisler olsun.

$$M=\begin{vmatrix} a_{i_1,i_1+1} & \cdots & a_{i_1,i_1+p-1} & a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_p} \\ a_{i_1+1,i_1+1} & \cdots & a_{i_1+1,i_1+p-1} & a_{i_1+1,j_1} & a_{i_1+1,j_2} & \cdots & a_{i_1+1,j_p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_1+p-1,i_1+1} & \cdots & a_{i_1+p-1,i_1+p-1} & a_{i_1+p-1,j_1} & a_{i_1+p-1,j_2} & \cdots & a_{i_1+p-1,j_p} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i_p,j_1} & a_{i_p,j_2} & \cdots & a_{i_p,j_p} \end{vmatrix}$$

determinantını göz önüne alalım. (1.24) denkleminden her pxp minörde ilk p satır sıfırdır (veya ilk iki sütun eşittir). Bundan dolayı M=0 dır. Laplace açılımıyla M'yi ilk p satırdan (p-1)x(p-1) ve son p sütundan pxp bloklar halinde açalım. Buradan her terimden birisi sıfırdır (çünkü iki satır eşittir). Böylece

$$M=A\begin{pmatrix} i_1+1, & \ldots & ,i_1+p-1 \\ i_1+1, & \ldots & ,i_1+p-1 \end{pmatrix}\cdot A\begin{pmatrix} i_1, i_2, & \ldots & ,i_p \\ j_1, j_2, & \ldots & ,j_p \end{pmatrix}=0$$

olur. A matrisi (p-1)-regüler olduğundan

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_p \\ j_1, j_2, \ldots, j_p \end{pmatrix}=0$$

olup bu da ispatı tamamlar.

2. BANT MATRİSLER

Matrislerin bant matris haline getirilmesi matris işlemlerinde büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Bilhassa büyük boyutlu matrislerin bant matris haline getirilmesi önem kazanmaktadır. Günümüz bilgisayar çağı olduğundan artık hemen hemen bütün matematiksel işlemler bilgisayar yardımıyla yapılabilmektedir. Dolayısıyle bant matrislerde, sıfırdan farklı eleman az olduğundan işlemlerde çabukluk sağlamaktadır. Meselâ matrisin; determinantının, öz değerlerinin, rankının, çeşitli minörlerinin vb. hesaplanması bant olması halinde çok daha kolay olmaktadır. Ayrıca bant matrisin temsil ettiği herhangi bir yüzey denkleminin sadeleştirilmesi daha kolay olacaktır. Benzer şekilde temsil ettiği herhangi bir diferensiyel denklem varsa denklemin çözümünde de büyük kolaylıklar sağlanacaktır.

Özel olarak simetrik bant matrisler üzerinde de duralım. Simetrik matrisler Jacobi ve Givens[24,s.323] ve Housholder [24,s.328] metodlarından birisinin yardımıyla üçlü bant matris formuna indirgenebilir. Kuadratik formların matrisleri simetrik olduğundan bu metodlar yardımıyla formların daha sade hale getirilmesi mümkündür. Bütün bunların ışığı altında bant matrisleri ana hatlarıyla inceleyelim.

2.1. Bant Matrislerin özellikleri

Tanım 2.1.1. $A=(a_{ij})$ n-kare matris olsun. $m\in Z^+$ olmak üzere her $|i-j|>m$ için $a_{ij}=0$ ise A matrisine $(2m+1)$-bant matris denir.

Özel olarak $m=0$ ise A köşegen matris, $m=1$ ise A, 3-bant matris olup buna da üçlü bant (tridiagonal) matris denir.

Tanım 2.1.2. $A=(a_{ij})$ n-kare matris ve her $j-i\geq m$

$(i-j \geq m)$ için $a_{ij}=0$ ise A matrisine üst (alt)-m-bant matris denir. Burada $1 \leq m \leq n-1$ ve $m \in Z^+$ dır.

Tanım 2.1.3. $A=(a_{ij})$ n-kare matris ve her $i-j \geq 1$ $(j-i \geq 1)$ için $a_{ij}=0$ ise A matrisine üst (alt) üçgen matris denir.

Teorem 2.1.1. $A=(a_{ij})$ reel n-kare bir matris olsun. Ayrıca L alt üçgen matris ve U da üst üçgen matris olmak üzere A=LU şeklinde yazılsın. Eğer A, üst-q-bant ve alt-p-bant bir matris ise U, üst-q-bant ve L de alt-p-banttır. Burada p ve q, p+q-1, A matrisinin bant sayısını verecek şekilde tam sayılardır [12].

İspat: İspatı n üzerinden indüksiyonla yapalım.

$$A=\begin{bmatrix} \alpha & w^T \\ v & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v/\alpha & E_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B-vw^T/\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & w^T \\ 0 & E_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

yazalım. Aşikâr olarak $B-vw^T/\alpha$ üst-q-bant ve alt-p-bant bir matristir. O halde yalnızca w'nın ilk q bileşeni ve v'nin ilk p bileşeni sıfırdan farklıdır. L_1U_1 bu matrisin üçgen matrislerin çarpımı olarak yazılmış şekli olsun. İndüksiyon hipotezinde w ve v'nin sparslığını da kullanırsak

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v/\alpha & L_1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad U=\begin{bmatrix} \alpha & w^T \\ 0 & U_1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

olur. L ve U istenen bant özelliklerini sağlar ki, A=LU dur.

Tanım 2.1.4. $P=(p_{ij})$ n-kare matris olsun. $p_{n1}=1$, $p_{i,i+1}=1$ ve diğer durumlarda her $p_{ij}=0$ ise P matrisine permütasyon matrisi denir. Burada $i=1,\dots,n$ ve $j=1,\dots,n$ dir.

Teorem 2.1.2. $A=(a_{ij})$ n-kare, reel, singüler olmayan ve üst-q-bant ve alt-p-bant matris olsun. Eğer A matrisine dönüşümleri $j=1,2,\dots,n-1$ için

$$M_j=E-\alpha^{(j)}e_j^T \quad (2.3)$$

ve

$$M_{n-1}P_{n-1}\dots M_1P_1A=U \quad (2.4)$$

olan Gauss eleminasyonu uygulanırsa U, üst-(p+q)-bant matristir ve her $i \leq j$ veya $i>j+p$ için $\alpha_i^{(j)}=0$ dır. Burada (2.3) ifadesiyle verilen matris üst üçgen, E birim matris ve $P_1,\dots,P_{n-1}$ permütasyon matrisleridir [12].

İspat: Gauss eleminasyonuyla PA=LU yazılsın,

$P=P_{n-1}\cdots P_2 P_1$

ve $P^T=[e_{s_1},e_{s_2},\ldots,e_{s_n}]$ olsun. Burada $\{s_1,\ldots,s_n\}$, $\{1,2,\ldots,n\}$ in bir permütasyonudur. $s_i>i+p$ ise $j=1,\ldots,s_i-p-1$ ve $s_i-p-1\geq i$ için

$$(PA)_{ij}=a_{s_{ij}}=0$$

olduğundan PA matrisinin (ixi) esas alt matrisi singülerdir. Bu ise U ve A'nın singüler olmasını gerektirir. Halbuki bu çelişkidir. Böylece $i=1,2,\ldots,n$ için $s_i<i+P$ olup PA matrisi üst-(p+q)-banttır. Teorem 2.1.1'den U, üst-(p+q)-bant idi. $\alpha^{(j)}$ hakkındaki iddia, kısmen indirgenmiş olan $M_{j-1}P_{j-1}\cdots M_1P_1A$ matrisinin sadece $(j+1,j),\ldots,(j+p,j)$ elemanlarının M_j ile sıfırlanmasından sağlanabilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

2.2. Bant Matrislerin İnversleri

Teorem 2.2.1. A, sıfırlayan üst(alt)-p-minörlü (p-1)-regüler matris olsun. Bu takdirde

$$D_k=A\begin{pmatrix}k,\ldots,k+p-1\\k,\ldots,k+p-1\end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad d_k=A\begin{pmatrix}k+1,\ldots,k+p-1\\k+1,\ldots,k+p-1\end{pmatrix} \tag{2.5}$$

olmak üzere

$$\det A=\frac{D_1\ D_2\ \cdots\ D_{n-p+1}}{d_1\ d_2\ \cdots\ d_{n-p}} \tag{2.6}$$

dir[2].

İspat: Teoremin ispatı Teorem 1.1.2' den aşikârdır.

Teorem 2.2.2. $A=(a_{ij})$, $a_{22},a_{33},\ldots,a_{n-1,n-1}$ köşegen elemanları sıfırdan farklı olan n-kare matris olsun. A'nın, her $i<k<j$ ve her $i>k>j$ şartı altında

$$a_{ij}=\frac{a_{ik}\ a_{kj}}{a_{kk}} \tag{2.7}$$

özelliğini sağlaması için gerek ve yeter şart $A^{-1}=R$ olmak üzere R'nin üçlü bant matris olmasıdır [2].

İspata geçmeden önce her $1\leq i,j\leq n$ için d_{ij}'yi

$$d_{ij}=a_{ii}\ a_{jj}-a_{ij}\ a_{ji} \tag{2.8}$$

olarak tanımlayalım.

İspat:

Gerek Şart: $A=(a_{ij})$, $a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{n-1,n-1}$ köşegen elemanları sıfırdan farklı n-kare matrisi, her $i<k<j$ ve her $i>k>j$ için (2.7) eşitliğini sağlasın. Bu takdirde R üçlü bant matris olması gerekir.

A, (2.7) eşitliğini sağladığından ve Lemma 1.1.1'den R'nin elemanları

$$r_{ij}=\begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{d_{ij}}, & |i-j|=1 \\ a_{ii}\dfrac{d_{i-1,i+1}}{d_{i-1,i}\,d_{i,i+1}}, & i=j\neq 1,n \\ \dfrac{a_{22}}{d_{12}}, & i=j=1 \\ \dfrac{a_{n-1,n-1}}{d_{n-1,n}}, & i=j=n \\ 0, & |i-j|>1 \end{cases} \tag{2.9}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ise R matrisinin üçlü bant matris olması demektir ki gerek şartın ispatıdır.

Yeter şart: Kabul edelim ki R üçlü bant ve regüler matris olsun. $a_{22}, \ldots, a_{n-1,n-1}$ farklı sıfır olmak üzere $A=R^{-1}$ in (2.7) özelliğini sağladığını göstermek istiyoruz. A'nın $i_1, i_2, \ldots, i_k$ satır ve $j_1, j_2, \ldots, j_k$ sütunundan oluşan minörünü $A\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_k \\ j_1, \ldots, j_k \end{pmatrix}$ ile gösterelim. R matrisi için de benzer formülü kullanabiliriz. $a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{n-1,n-1}$ farklı sıfır olduklarından (2.7) eşitliğini her $i<k<j$ için

$$A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix}=0$$

ve her $i>k>j$ için

$$A\begin{pmatrix} k & i \\ j & k \end{pmatrix}=0$$

şeklinde yazabiliriz. $A^{-1}=R$ olduğundan iyi bilinen invers için determinant formülüyle [22]

$$A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix}=(-1)^{i+j}\,\frac{R\begin{pmatrix} 1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n \\ 1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n \end{pmatrix}}{\det R} \tag{2.10}$$

yazarız. O halde $i<k<j$ için

$$R\begin{pmatrix}1,\dots,k-1,k+1,\dots,j-1,j+1,\dots,n\\1,\dots,i-1,i+1,\dots,k-1,k+1,\dots,n\end{pmatrix}=0 \tag{2.11}$$

olduğunu göstermeliyiz.

Biz, A üçlü bant matris olduğundan (2.11) determinantının sıfır olduğunu iddia ediyoruz. Matrisin ilk (k-1) satırını göz önüne alalım. Bu satır vektörlerin her birinin son (n-k) elemanı sıfırdır. Yani en çok (k-2) yerde sıfırdan farklı bileşenlere sahip (k-1) vektör vardır. Böylece bu (k-1) vektör lineer bağımlıdır. O halde bu da (2.11) determinantının sıfır olması demektir. Dolayısıyla yeter şartın ispatı tamamlanmış olur.

Tanım 2.2.1. $R=(r_{ij})$, n-kare matris olsun.

$$r_{ij}=a_{\min(i,j)}\ b_{\mathrm{mak}(i,j)}=\begin{cases}a_i\ b_j\ , & i\leq j\\ a_j\ b_i\ , & i\geq j\end{cases} \tag{2.12}$$

olacak şekilde $a_1,a_2,\dots,a_n,b_1,b_2,\dots,b_n$ sayıları varsa R matrisine Green matrisi denir.

Teorem 2.2.3. $A=(a_{ij})$ matrisinin singüler olmayan bir Green matrisi olması için gerek ve yeter şart $R=A^{-1}$'in üst köşegen üzerindeki elemanları sıfırdan farklı bir simetrik üçlü bant matris olmasıdır [2].

İspat:

Gerek Şart: $A=(a_{ij})$ Green matrisi olsun. Bu takdirde $R=A^{-1}$'in üçlü bant matris olduğunu göstermeliyiz. Bunun için de önce A'nın üçgen özelliğini sağladığını gösterelim.

A Green matrisi olduğundan simetrik bir matristir. Bundan dolayı üçgen özelliğini sadece her $i<k<j$ için sağladığını göstermek yeterlidir. O halde üçgen özelliğini

$$a_{ij}=\frac{a_{ik}\ a_{kj}}{a_{kk}}=\frac{a_i\ b_k\ a_k\ b_j}{a_k\ b_k} \tag{2.13}$$

şeklinde yazabiliriz. $i<j$ olduğundan

$$a_{ij}=a_i\ b_j \tag{2.14}$$

olup (2.13) de yerine yazılırsa

$$a_i\ b_j=\frac{a_i\ b_k\ a_k\ b_j}{a_k\ b_k} \tag{2.15}$$

olur. Buradan devam edersek

$$a_i\ b_j\ a_k\ b_k = a_i\ b_k\ a_k\ b_j$$

olur ki üçgen özelliği sağlanır ve dolayısıyla $R=A^{-1}$ üçlü bant matris olur.

Yeter şart: $R=A^{-1}$ üçlü bant matris olsun. O halde A üçgen özelliğini sağlayacaktır. R simetrik olduğundan A da simetriktir. O halde her $i<k<j$ için A'nın Green matrisi olduğunu göstermek yetecektir. A üçgen özelliğini sağladığından

$$a_{ij} = \frac{a_{ik}\ a_{kj}}{a_{kk}}$$

olacaktır. Buradan

$$a_{ij}\ a_{kk} = a_{ik}\ a_{kj}$$

olur. O halde $a_i = -\dfrac{r_{11}\ r_{22} \cdots r_{ii}}{r_{12}\ r_{23} \cdots r_{i-1,i}}$ ve $b_j = \dfrac{r_{12}\ r_{23} \cdots r_{j-1,j}}{r_{11}\ r_{22} \cdots r_{j-1,j-1}}$

seçersek

$$a_i\ b_j\ a_k\ b_k = a_i\ b_k\ a_k\ b_j$$

olur ki A Green matrisidir.

Yardımcı Teorem 2.2.4. $A=(a_{ij})$ n-kare matris ve $j<i+p$ için A'nın a_{ij} elemanını keyfi olarak seçelim. $d_1, d_2, \ldots, d_{n-p}$, $D_1, D_2, \ldots, D_{n-p+1}$ hepsi sıfırdan farklı ise A'nın geriye kalan elemanları tek yolla tayin edilir. öyleki A^{-1} vardır ve üst-p-banttır. Buradaki d_i ve D_j , $i=1,2,\ldots,n-p$ ve $j=1,2,\ldots,n-p+1$ için (2.5) formülüyle verilmiştir [1].

Teorem 2.2.5. $A=(a_{ij})$ n-kare matris olsun ve $i-s<j+r$ için A'nın a_{ij} elemanlarını keyfi seçelim. $d_1, d_2, \ldots, d_{n-p}, D_1, D_2, \ldots, D_{n-p+1}$ (2.5) denkleminde verildiği gibi, hepsi sıfırdan farklı ve $p=\min(r,s)$ ise A'nın geriye kalan elemanları tek yolla seçilir. A^{-1} vardır ve üst-r-bant ve alt-s-banttır [1].

İspat: Kabul edelim ki $r\leq s$ ($r>s$ için de aynıdır.) olsun. Y.Teorem 2.2.4'den, A'nın geriye kalan üst üçgen elemanlarını tayin etmenin tek yolu vardır. öyleki A, sıfırlayan üst-r-minörlere sahiptir. Şimdi $r<q\leq s$ olmak üzere (q herhangi bir tam sayı $1\leq k\leq n-q+1$ için $A\begin{pmatrix} k,\ldots,k+q-1 \\ k,\ldots,k+q-1 \end{pmatrix}$ minörünü göz önüne ala-

lım. Bu minöre karşılık gelen matris, A'nın sıfırlayan üst-r-minörlerinin özelliğini taşır. O halde Teorem 2.2.1 ve hipotezden sıfır olmayan

$$A\begin{pmatrix} k,\ldots,k+q-1 \\ k,\ldots,k+q-1 \end{pmatrix} = \frac{D_k\ D_{k+1}\ \cdots\ D_{k+q-p}}{d_k\ d_{k+1}\ \cdots\ d_{k+q-p-1}} \qquad (2.16)$$

dır. özellikle $d_1^{(s-1)}, d_2^{(s-1)}, \ldots, d_{n-s}^{(s-1)}, D_1^{(s)}, D_2^{(s)}, \ldots, D_{n-s+1}^{(s)}$ minörlerinin hepsi sıfırdan farklıdır. Buradaki üst indisler minörlerin mertebesini göstermektedir. Tekrar Y.Teorem 2.2.4 uygulanırsa A'nın geriye kalan alt üçgen elemanlarının tayini tek yolladır. öyleyse A sıfırlayan alt-s-minörlere sahiptir. $D_1, D_2, \ldots, D_{n-p+1}$'in hepsi birden sıfırdan farklı olup Teorem 2.1.1 'den A regülerdir. O halde A^{-1} vardır ve [1,s.115] deki Teorem 3.1 'den üst-r-bant ve alt-s-bant matristir.

Sonuç 2.2.1. $A=(a_{ij})$ n-kare matrisinin (2p-1)-köşegen olması için ($|i-j|\geq p$ için her $a_{ij}=0$) gerek ve yeter şart A^{-1}in sıfırlayan üst- ve alt-p-minörlere sahip olmasıdır [1].

Sonuç 2.2.2. $A=(a_{ij})$ n-kare matrisinin üçlü bant matris olması için gerek ve yeter şart A^{-1} in sıfırlayan üst- ve alt-2-minörlere sahip olmasıdır [1].

Tanım 2.2.2. $T=(t_{ij})$ n-kare matris olsun. Her i, j için $t_{ij}=t_{j-i}$ olacak şekilde $t_{-n+1}, \ldots, t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ sayıları varsa T'ye bir Toeplitz matrisi denir. Yani

$$T=[t_{1-n}, \ldots, t_{-1}, t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}]$$

dir.

Teorem 2.2.6. Kabul edelim ki

$$T=[t_{1-n}, \ldots, t_{-1}, t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}]$$

sıfırlayan üst-3-minörlere sahip bir Toeplitz matrisi ve

$$t_0^2 - t_{-1}t_1 \neq 0$$

olsun (Yani T, 2-regüler). Bu takdirde $(t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \ldots)$ dizisi

$$[a, (ma+b)r, (m^2a+mb+b)r^2, (m^3a+m^2b+mb+b)r^3, \ldots] \qquad (2.17)$$

olacak şekilde a, b, m ve r kompleks sayıları vardır [1].

ispat: öncelikle a, b, m ve r için

$$a=t_{-1}$$

$$(ma+b)r=t_0$$

$$(m^2a+mb+b)r^2=t_1 \qquad (2.18)$$

$$(m^3a+m^2b+mb+b)r^3=t_2$$

denklem sisteminin çözümünün varlığını gösterelim. Her bir denklemi mr ile çarpıp bir sonraki denklemden çıkarırsak

$$br=t_0-mrt_{-1}$$

$$br^2=t_1-mrt_0$$

$$br^3=t_2-mrt_1$$

elde ederiz. b'yi birinci denklemden çekip ikinci denklemde yerine yazarsak

$$t_0r-mr^2t_{-1}=t_1-mrt_0$$

elde ederiz. b'yi şimdi de ikinci denklemden çekip üçüncüde yerine yazarsak

$$t_1r-mr^2t_0=t_2-mrt_1$$

buluruz. Elde edilen bu iki denklemden de m'yi yok edersek

$$(t_0^2-t_{-1}t_1)r^2+(t_{-1}t_2-t_0t_1)r+t_1^2-t_0t_2=0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemi r' ye göre çözerek kökleri r_+ ve r_- şeklinde tanımlayalım. O halde

$$r_+.r_- = \frac{\begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ t_0 & t_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_0 & t_1 \\ t_{-1} & t_0 \end{vmatrix}} \qquad (2.19)$$

olur. (2.18)'deki değerler (2.19)' da yazılıp sadeleştirilirse

$$r_+.r_- =mr^2$$

elde edilir. r_+'ya karşılık gelen m değerine m_+, r_- 'ye karşılık gelen m değerine de m_- diyelim. Bu takdirde

$$r_+^2\, m_+ =r_+\, r_- =r_-^2\, m_- \quad .$$

$$m_+ = \frac{r_-}{r_+} \quad , \quad m_- = \frac{r_+}{r_-} \qquad (2.20)$$

olur.

$$b= \frac{t_0}{r} - ma$$

olduğundan

$$b_+ = \frac{t_0}{r_+} - m_+ a\ , \quad b_- = \frac{t_0}{r_-} - m_- a \tag{2.21}$$

olacaktır. Burada yine $a=t_{-1}$dir. Şimdi bulunan (a,r_+,m_+,b_+) ve (a,r_-,m_-,b_-) çözümlerinin (2.18) denklemlerini sağladığını gösterelim.

$$\begin{vmatrix} t_1 & t_1 & t_2 \\ t_0 & t_0 & t_1 \\ t_{-1} & t_{-1} & t_0 \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned}(m_\pm^2 a+m_\pm b_\pm +b_\pm)r_\pm^2 &= [m_\pm (m_\pm a+b_\pm)r_\pm +b_\pm r_\pm]r_\pm \\ &=(m_\pm t_0 +t_0 -m_\pm r_\pm a)r_\pm \\ &=t_0 (r_+ +r_-)-t_{-1} r_+ r_- \\ &=t_0 \frac{\begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ t_{-1} & t_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_0 & t_1 \\ t_{-1} & t_0 \end{vmatrix}} - t_{-1} \frac{\begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ t_0 & t_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_0 & t_1 \\ t_{-1} & t_0 \end{vmatrix}} \\ &=t_1\end{aligned}$$

olur. Diğer denklem için de benzer şekilde sağlama yapılabilir Buradan $(a,r,m,b)=(a,r_+,m_+,b_+)$ alınırsa hipotezden

$$\begin{vmatrix} (m_+ a+b_+)r_+ & (m_+^2 a+m_+ b_+ +b_+)r_+^2 \\ a & (m_+ a+b_+)r_+ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 \\ t_{-1} & t_0 \end{vmatrix} \neq 0$$

bulunur. Teorem 1.1.4'den elemanları (2.17) ile $-1,0,1,2,\ldots$ olarak verilen bir Toeplitz matrisi sıfırlayan üst-3-minörlere sahiptir. $(t_{-1},t_0,t_1,t_2,\ldots)$ dizisi (2.17) ile ilk dört yerde uyuşur. Teorem 1.1.5'in teklik kısmı dizinin her yerde uyuşmasını gerektirir. Bu da ispatı tamamlar.

3. MATRİSLERİN İNVERSLERİNİN BANT OLMA ŞARTLARI

Teorem 3.1. A, herhangi bir singüler olmayan n-kare matris, $a_{22}, a_{33}, \dots, a_{n-1,n-1}$ hepsi sıfırdan farklı ve $R=A^{-1}$ olsun. $i=1,2,\dots,p$; $k=i+1$; $j=i+2,i+3,\dots,n$ iken

$$A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} k & j \\ i & k \end{pmatrix} = 0$$

olması için gerek ve yeter şart R'nin r_{ij} ve r_{ji} ($i=1,\dots,p$ ve $j=i+2,\dots,n$) elemanları sıfır olacak şekilde $[2(n-p)-1]$-bant olmasıdır. Burada p, $1 \leq p \leq n-2$ şartını sağlayan tam sayılardır.

İspat:

Gerek şart: $i=1,2,\dots,p$; $k=i+1$ ve $j=i+2,\dots,n$ için $A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} k & j \\ i & k \end{pmatrix} = 0$ olsun. Bu takdirde R, r_{ij} ve r_{ji} elemanları sıfır olacak şekilde $[2(n-p)-1]$-banttır. İspatı indüksiyonla yapalım.

$p=1$ ise $i=1$, $k=2$ ve $j=3,\dots,n$ olsun. Bu takdirde

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & j \end{pmatrix} = 0$$

olacaktır. Bu ise A matrisinde a_{11} ve a_{21} elemanları hariç ikinci satırın birinci satırın lineer kombinasyonu olması demektir. Yani $v_1 \in R$ olmak üzere

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & v_1a_{12} & v_1a_{13} & \cdots & v_1a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & & B_1 & \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

olur. Burada B_1 matrisi $(n-2)\times(n-1)$ tipinde bir matristir. A_{n1} minörünü alırsak, bu minörde, ilk iki satırdan biri diğerinin lineer kombinasyonu olacağından, aşikâr olarak $A_{n1}=0$ olur. Benzer şekilde A matrisinin ilk iki satırını ihtiva eden

$$A_{j1}=0 \quad (j=3,4,\dots,n) \tag{3.2}$$

olacaktır. Aynı şekilde $A\begin{pmatrix} 2 & j \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=0$ ise bu, A matrisinde a_{11} ve a_{12} elemanları hariç son n-2 satırın ilk iki elemanı, 2. satırın ilk iki elemanının bir lineer kombinasyonu olması demektir Yani $v_1' \in R$ olmak üzere

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ v_1' a_{21} & v_1' a_{22} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1' a_{21} & v_1' a_{22} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

olur. Bundan dolayı A'nın bu ilk iki sütununu ihtiva eden A_{1j} minörlerinin hepsi sıfır olacaktır. Yani

$$A_{1j}=0 \quad (j=3,4,\ldots,n) \tag{3.3}$$

olacaktır.

$$R=A^{-1}=\frac{\operatorname{adj} A}{\det A} \tag{3.4}$$

olduğu göz önüne alınırsa (3.2) ve (3.3) ifadelerinden

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & r_{32} & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & r_{n2} & r_{n3} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

olur ki R, (2n-3)-bant matristir. O halde p=1 için $r_{ij}= r_{ji}=0$ şartı sağlanmış olur. Burada i=1 ve j=3,...,n dir.

p=2 ise i=1,2; k=i+1 ve j=i+2,...,n için $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & j \end{pmatrix}$ ve $A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & j \end{pmatrix}$ minörleri sıfırdır. $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & j \end{pmatrix}$ ve $A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & j \end{pmatrix}$ minörlerinin sıfır olması demek, A matrisinin ilk üç satırının, baştaki ikişer elemanı hariç ikinci ve üçüncü satırın birinci satırın lineer kombinasyonu olması demektir. Yani $v_1, v_2 \in R$ olmak üzere

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & v_1 a_{12} & v_1 a_{13} & \cdots & v_1 a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & v_1 v_2 a_{13} & \cdots & v_1 v_2 a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & B_2 & \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

olmasıdır. Burada B_2, (n-3)x(n-2) tipinde bir matristir. Şimdi

A'nın ilk üç satırını ihtiva eden $j=3,\dots,n$ ve $j=4,\dots,n$ için A_{j1} ve A_{j2} minörleri sıfır olacaktır. Yani

$$A_{j1}=0 \quad (j=3,\dots,n) \text{ ve } A_{j2}=0 \quad (j=4,\dots n) \tag{3.7}$$

dır. Benzer şekilde $A\begin{pmatrix} 2 & j \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ve $A\begin{pmatrix} 3 & j \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ minörleri sıfır ise yine A'nın son (n-3) satırının ilk üç elemanı 3. satırın ilk üç elemanının bir lineer kombinasyonudur. Yani $v_1', v_2' \epsilon R$ olmak üzere

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \cdots a_{2n} \\ v_1'a_{21} & v_1'a_{22} & a_{33} & a_{34} \cdots a_{3n} \\ v_1'v_2'a_{21} & v_1'v_2'a_{22} & v_2'a_{33} & a_{44} \cdots a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & B_3 \\ v_1'v_2'a_{21} & v_1'v_2'a_{22} & v_2'a_{33} & \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

olur. Burada B_3 matrisi $(n-4)x(n-3)$ şeklinde bir matristir. A'nın son (n-2) satırını ihtiva eden $j=3,\dots,n$ ve $j=4,\dots,n$ için A_{1j} ve A_{2j} minörleri sıfırdır. Yani

$$A_{1j}=0, \quad (j=3,\dots n) \text{ ve } A_{2j}=0, \quad (j=4,\dots n) \tag{3.9}$$

dir. O halde (3.7) ve (3.9) ifadelerinden

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_{32} & r_{33} & r_{34} & \cdots & r_{3n} \\ 0 & 0 & r_{43} & r_{44} & \cdots & r_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & r_{n3} & r_{n4} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

olur ki R, (2n-5)-bant matristir. Burada p=2 dir. Dolayısıyla $r_{ij}=r_{ji}=0$ şartı sağlanmış olur. p=n-3 için iddia doğru olsun. Yani $i=1,\dots,n-3$; $k=i+1$ ve $j=i+2,\dots,n$ için $A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix}$ ve $A\begin{pmatrix} k & j \\ i & k \end{pmatrix}$ sıfır ise R, 5-bant matris olsun. O halde p=n-2 için R'nin 3-bant olduğunu gösterelim. p=n-2 olduğundan $i=1,\dots,n-2$; $k=i+1$ ve $j=i+2,\dots,n$ olur. Şimdi A_{ij} ve A_{ji} minörlerini yazalım. A_{ij} ve A_{ji} minörlerindeki $v_i, v_i' \epsilon R$ ve $i=1,2,\dots,n-2$ 'dir.

$$
A_{ji}=\left|\begin{array}{cccccccccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & v_1a_{12} & \cdots & v_1a_{1,i-1} & v_1a_{1,i+1} & \cdots & v_1a_{1,j-1} & v_1a_{1j} & \cdots & v_1a_{1n} \\
a_{31} & a_{32} & \cdots & v_1v_2a_{1,i-1} & v_1v_2a_{1,i+1} & \cdots & v_1v_2a_{1,j-1} & v_1v_2a_{1,j} & \cdots & v_1v_2a_{1,n} \\
a_{41} & a_{42} & \cdots & \prod_{s=1}^{3}v_sa_{1,i-1} & \prod_{s=1}^{3}v_sa_{1,i+1} & \cdots & \prod_{s=1}^{3}v_sa_{1,j-1} & \prod_{s=1}^{3}v_sa_{1j} & \cdots & \prod_{s=1}^{3}v_sa_{1n} \\
\multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,i-1} & \prod_{s=1}^{i-1}v_sa_{1,i+1} & \cdots & \prod_{s=1}^{i-1}v_sa_{1,j-1} & \prod_{s=1}^{i-1}v_sa_{1j} & \cdots & \prod_{s=1}^{i-1}v_sa_{1n} \\
\multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\
a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \cdots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \cdots & \prod_{s=1}^{j-2}v_sa_{1,j-1} & \prod_{s=1}^{j-2}v_sa_{1j} & \cdots & \prod_{s=1}^{j-2}v_sa_{1n} \\
a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \cdots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & \cdots & a_{j+1,j-1} & a_{j+1,j} & \cdots & \prod_{s=1}^{j}v_sa_{1n} \\
\multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\
a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \cdots & a_{n-2,i-1} & a_{n-2,i+1} & \cdots & a_{n-2,j-1} & a_{n-2,j} & \cdots & \prod_{s=1}^{n-3}v_sa_{1n} \\
a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,i-1} & a_{n-1,i+1} & \cdots & a_{n-1,j-1} & a_{n-1,j} & \cdots & \prod_{s=1}^{n-2}v_sa_{1,n} \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right| \tag{3.11}
$$

$i=1,\ldots,n-2;k=i+1,\ j=i+2,\ldots,n$ için $A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j\end{pmatrix}=0$ olduğundan, A'nın 1. satırdan sonraki ilk i satırının son $(n-i-1)$ elemanı 1. satırın son (n-i-1) elemanının lineer kombinasyonu olarak yazılabilecektir. Buradan her $j-i\geq 2$ için A_{ji} minörü (3.11) ifadesiyle verilir. (3.11) determinantında 1.satırın v_1 katını 2.satırdan, v_1v_2 katını 3. satırdan ve böylece devam ederek $\prod_{s=1}^{n-2} v_s$ katını (n-1). satırdan çıkarırsak

$$A_{ji}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots a_{1,j-1} & a_{1j} & \cdots a_{1,n-1} & a_{1n} \\ b_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i-1,1} & b_{i-1,2} & b_{i-1,3} & \cdots & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & \cdots & b_{i,i-1} & 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ b_{i+1,1} & b_{i+1,2} & b_{i+1,3} & \cdots & b_{i+1,i-1} & 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \cdots & b_{n-1,i-1} & b_{n-1,i+1} & \cdots b_{n-1,j-1} & b_{n-1,j} & \cdots 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots a_{n,j-1} & a_{nj} & \cdots a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

elde ederiz. A_{ji} determinantında ilk (i+1) satırı göz önüne alalım. $b_{i,i-1}$ sıfır olacak şekilde (i+1). satırın herhangi bir katını i. satırda, sonra $b_{i-1,i-2}$ sıfır olacak şekilde i.satırın herhangi bir katını (i-1). satırda toplamak suretiyle bu işleme böylece devam ederek sonuçta b_{32} elemanı sıfır olacak şekilde 4. satırın herhangi bir katını 3. satırda toplarsak

$$A_{ji}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ c_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{31} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{41} & c_{42} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

elde ederiz ki $A_{ji}=0$ dır. Yani $i=1,2,\ldots,n-3,n-2$; $k=i+1$ ve $j=i+2,\ldots,n$ için her

$$A_{ji}=0 \tag{3.12}$$

olur. Benzer şekilde $i=1,2,\ldots,n-2$; $k=i+1$ ve $j=i+2,\ldots,n$ için $A\begin{pmatrix} k & j \\ i & k \end{pmatrix}=0$ ise A matrisinin ilk (j-1) satırı hariç, son (n-j+1) satırının ilk j elemanı, (j-1). satırın ilk j elemanının bir lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir. Buradan her $i-j \geq 2$ için A_{ij} minörünü yazarsak

$$
A_{ij}=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\
v'_1 a_{21} & v'_1 a_{22} & \cdots & a_{3,i-1} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\
v'_1 v'_2 a_{21} & v'_1 v'_2 a_{22} & \cdots & a_{4,i-1} & \cdots & a_{4,j-1} & a_{4,j+1} & \cdots & a_{4,n-1} & a_{4n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\prod_{s=1}^{i-3} v'_s a_{21} & \prod_{s=1}^{i-3} v'_s a_{22} & \cdots & a_{i-1,i-1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n-1} & a_{i-1,n} \\
\prod_{s=1}^{i-1} v'_s a_{21} & \prod_{s=1}^{i-1} v'_s a_{22} & \cdots & \prod_{s=i-2}^{i-1} v'_s a_{i-1,i-1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n-1} & a_{i+1,n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\prod_{s=1}^{j-1} v'_s a_{21} & \prod_{s=1}^{j-1} v'_s a_{22} & \cdots & \prod_{s=i-2}^{j-1} v'_s a_{i-1,i-1} & \cdots & \prod_{s=j-2}^{j-1} v'_s a_{i+1,j-1} & a_{j+1,j+1} & \cdots & a_{j+1,n-1} & a_{j+1,n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\prod_{s=1}^{n-3} v'_s a_{21} & \prod_{s=1}^{n-3} v'_s a_{22} & \cdots & \prod_{s=i-2}^{n-3} v'_s a_{i-1,i-1} & \cdots & \prod_{s=j-2}^{n-3} v'_s a_{i+1,j-1} & \prod_{s=j}^{n-3} v'_s a_{j+1,j+1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
\prod_{s=1}^{n-2} v'_s a_{21} & \prod_{s=1}^{n-2} v'_s a_{22} & \cdots & \prod_{s=i-2}^{n-2} v'_s a_{i-1,i-1} & \cdots & \prod_{s=j-2}^{n-2} v'_s a_{i+1,j-1} & \prod_{s=j}^{n-2} v'_s a_{j+1,j+1} & \cdots & \prod_{s=n-2}^{n-2} v'_s a_{n-1,n-1} & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

olur. Bu determinantta son satırın $-1/v'_{n-2}$ katını (n-1). satırda, $-1/v'_{n-2}\, v'_{n-3}$ katını (n-2). satırda ve böylece devam e-derek $-1/v'_{n-2}\, v'_{n-3} \dots v'_2\, v'_1$ katını 2. satırda toplarsak

$$A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & 0 & b_{23} & \dots & b_{2,j-1} & b_{2,j+1} & \dots & b_{2,n-2} & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{j-1,j+1} & \dots & b_{j-1,n-2} & b_{j-1,n-1} & b_{j-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{j,j+1} & \dots & b_{j,n-2} & b_{j,n-1} & b_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-2,n-1} & b_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n-1,n} \\ * & * & * & \dots & * & * & \dots & * & * & * \end{vmatrix}$$

elde ederiz. Burada "*" işaretli yerler bundan önceki A_{ij} determinantının son satır elemanlarıdır. A_{ij} determinantında son (n-j+1) satırı göz önüne alalım. $b_{j,j+1}$ elemanı sıfır olacak şekilde (j-1). satırın herhangi bir katını j. satıra, $b_{j+1,j+2}$ elemanı sıfır olacak şekilde j. satırın herhangi bir katını (j+1). satıra eklemek suretiyle bu işleme böylece devam ederek sonuçta $b_{n-2,n-1}$ elemanı sıfır olacak şekilde (n-3). satırın herhangi bir katını (n-2). satıra eklersek

$$A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{j-1,j+1} & \dots & b_{j-1,n-1} & b_{j-1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1,n} \\ * & * & * & \dots & * & * & \dots & * & * \end{vmatrix}$$

olur ki $A_{ij}=0$ dır. O halde $i=1,\dots,n-2$; $k=i+1$ ve $j=i+2,\dots,n$ için her

$$A_{ij}=0 \tag{3.13}$$

olur. (3.12) ve (3.13) ifadelerinden R matrisi 3-banttır ki $p=n-2$ için $r_{ij}=r_{ji}=0$ dır.

Yeter şart: Eğer $R=A^{-1}$, $i=1,\dots,p$ ve $j=i+2,i+3,\dots,n$ için $r_{ij}=r_{ji}=0$ olacak şekilde $[2(n-p)-1]$-bant matris ise $i=1,\dots,p$; $k=i+1$ ve $j=i+2,\dots,n$ için $A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} k & j \\ i & k \end{pmatrix}$ 2-minörleri sıfırdır. Burada p, $1\leq p\leq n-2$ şartını sağlayan tam sayılardır.

İspatı indüksiyonla yapalım. p=1 olsun. Bu takdirde

R, (2n-3)-bant ve $r_{1j}=r_{j1}=0$ olacaktır. Burada $j=3,\ldots,n$' dir. Yani

$$A\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & j\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2 & j\\ 1 & 2\end{pmatrix}=0$$

olduğunu göstermeliyiz. invers determinantlar için iyi bilinen formülden [2,s.216]

$$A\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & j\end{pmatrix}=(-1)^{1+j}\frac{R\begin{matrix}1,3,4,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\\ 3,4,5,\ldots,j-1,\ j\ ,\ldots,n\end{matrix}}{\det R} \qquad (3.14)$$

olur. (3.14) ifadesinin payındaki determinantın sıfır olduğunu göstermeliyiz. Bu determinantı açık olarak yazarsak

$$R\begin{pmatrix}1,3,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\\ 3,4,\ldots,j-1,j,\ \ldots\ ,n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & \ldots & 0\\ r_{33} & r_{34} & \ldots & r_{3n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ r_{n3} & r_{n4} & \ldots & r_{nn}\end{vmatrix}=0$$

olur ki, istenendir. $p=n-3$ için iddia doğru olsun. Yani invers matris 5-bant matris olsun. R, 5-bant ise $i=1,\ldots,n-3$; $k=i+1$ ve $j=i+2,\ldots n$ için

$$A\begin{pmatrix}i & k\\ k & j\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}k & j\\ i & k\end{pmatrix}=0 \qquad (3.15)$$

olsun. $p=n-2$ ise R, $r_{ij}=r_{ji}=0$ olacak şekilde üçlü bant matristir. O halde $A\begin{pmatrix}i & k\\ k & j\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}k & j\\ i & k\end{pmatrix}=0$ olduğunu gösterelim. Yine invers determinantlar için formülden

$$A\begin{pmatrix}i & k\\ k & j\end{pmatrix}=(-1)^{i+j}\frac{R\begin{pmatrix}1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\\ 1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n\end{pmatrix}}{\det R}$$

olacaktır.

$$\alpha=\begin{pmatrix}1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\\ 1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n\end{pmatrix} \qquad (3.16)$$

dersek

$$A\begin{pmatrix}i & k\\ k & j\end{pmatrix}=\frac{R(\alpha)}{\det R} \qquad (3.17)$$

olur. $R(\alpha)$ determinantında son $(n-k-1)$ satır lineer bağımlı olduğundan

$$R(\alpha)=0 \qquad (3.18)$$

olur. Benzer şekilde

$$\beta=\begin{pmatrix}1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n\\ 1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\end{pmatrix} \qquad (3.19)$$

olarak alırsak

$$A\begin{pmatrix} k & j \\ i & k \end{pmatrix} = \frac{R(\beta)}{\det R} \tag{3.20}$$

elde ederiz. Yine $R(\beta)$ determinantında ilk $(k-1)$ satır lineer bağımlı olduğundan

$$R(\beta)=0 \tag{3.21}$$

olur. (3.18) ve (3.21) denklemlerinden

$$A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} k & j \\ i & k \end{pmatrix}=0 \tag{3.22}$$

olur ki, istenendir.

Sonuç 3.1. $i=1,\ldots,p$; $k=i+1$, $j=i+2,\ldots,n$ için $A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix}$ ve $A\begin{pmatrix} k & j \\ i & k \end{pmatrix}$ şeklinde sıfır olan minörlerin sayısı

$$f(m,n)=2\sum_{s=m}^{n-2} s \tag{3.23}$$

formülüyle belirlidir. Burada $1\leq p\leq n-2$ ve $m=n-p-1$ şartını sağlayan tam sayılardır.

İspat: İspatı p'nin değerlerine göre yapalım.

$p=1$ ise $m=n-2$ dir. Bu takdirde matrisin bant sayısı $(2n-3)$ olup sadece $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & j \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 2 & j \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ minörleri sıfırdır. Bunların sayısı ise j'nin alacağı değerlerin sayısı kadar olup $2(n-2)$ dir. (3.23) formülü göz önüne alınacak olursa

$$f(m,n)=f(n-2,n)=2\sum_{s=n-2}^{n-2} s= 2(n-2)$$

olur ki doğrudur. Benzer şekilde $p=2$ ise $m=n-3$ olup bu durumda R matrisi $(2n-5)$-bant olacağından sadece $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & j \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 2 & j \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & j \end{pmatrix}$ ve $A\begin{pmatrix} 3 & j \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ minörleri sıfırdır. Bir önceki hesaplamadan $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & j \end{pmatrix}$ ve $A\begin{pmatrix} 2 & j \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ minörlerinin sayısı $2(n-2)$ idi. Benzer şekilde $A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & j \end{pmatrix}$ ve $A\begin{pmatrix} 3 & j \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ minörlerinin sayısı da j'nin alacağı değerlerin toplamı kadardır. O halde j'nin alacağı değerlerin toplamı $2(n-3)$ olacağından sıfır olan minör sayısı

$$2(n-2+n-3)=2(2n-5)$$

olacaktır. (3.23) formülüne göre ise

$$f(m,n)=f(n-3,n)=2\sum_{s=n-3}^{n-2} s= 2(n-2+n-3)$$
$$=2(2n-5)$$

olur ki doğrudur. Böylece devam edersek

$p=n-2$ için $m=1$ olacağından R, üçlü bant matris olur. Bu takdirde sıfır olan $A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix}$ ve $A\begin{pmatrix} k & j \\ i & k \end{pmatrix}$ minörlerinin sayısı

$i=1$	$k=2$	$j=3,4,\ldots,n$	için	$2(n-2)$
$i=2$	$k=3$	$j=4,5,\ldots,n$	için	$2(n-3)$
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
$i=n-2$	$k=n-1$	$j=n$	için	2.1

olup $i=1,\ldots,n-2$; $k=i+1$ ve $j=i+2,\ldots,n$ için

$$2.1+2.2+\ldots+2(n-3)+2(n-2)=2(1+2+\ldots+n-3+n-2)$$

$$=2\sum_{s=1}^{n-2} s \qquad (3.24)$$

olur. Formülden ise $m=1$ için

$$f(1,n)=2\sum_{s=1}^{n-2} s \qquad (3.25)$$

olur ki (3.24) ile (3.25) ifadeleri eşittir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2. $i=1,2,\ldots,p$ $(1\leq p\leq n-2)$; $k=i+1$ ve $j=i+2,\ldots,n$ iken

$$A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix}=0 \text{ ve } A\begin{pmatrix} k & j \\ i & k \end{pmatrix}=0$$

olması için gerek ve yeter şart $A_{ij}=A_{ji}=0$ olmasıdır.

İspat:

Gerek şart: $i=1,\ldots,p$ $(1\leq p\leq n-2)$; $k=i+1$ ve $j=i+2,\ldots,n$ için

$$A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix}=0 \text{ ve } A\begin{pmatrix} k & j \\ i & k \end{pmatrix}=0$$

ise Teorem 3.1' den $R=A^{-1}$ $[2(n-p)-1]$-bant matristir. Dolayısıyla her $|j-i|>1$ için $r_{ij}=r_{ji}=0$ 'dır.

$$R=A^{-1}=\frac{\mathrm{adj}A}{\det A}$$

olduğu hatırlanırsa $A_{ij}=A_{ji}=0$ dır.

Yeter şart: $i=1,\ldots,p$ $(1\leq p\leq n-2)$; $k=i+1$ ve $j=i+2,\ldots,n$ iken her $|i-j|>1$ için $A_{ij}=A_{ji}=0$ olsun. Bu takdirde $R=A^{-1}$ $[2(n-p)-1]$-bant matris olacaktır. R $[2(n-p)-1]$-bant matris ise yine Teorem 3.1'den $i=1,\ldots,p$; $k=i+1$ ve $j=i+2,\ldots,n$ için

$$A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} k & j \\ i & k \end{pmatrix}=0$$

dır. Burada $1\leq p\leq n-2$ olacak şekildeki tam sayılardır.

Sonuç 3.3. Eğer A simetrik, singüler olmayan, $a_{22},\ldots,$ $a_{n-1,n-1}$ n-kare matris ise $R=A^{-1}$'in $[2(n-p)-1]$-bant olması için gerek ve yeter şart $1 \leq p \leq n-2$ olmak üzere $i=1,\ldots,p$; $k=i+1$ ve $j=i+2,\ldots,n$ için

$$A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix}=0$$

olmasıdır.

ispat:

ispat için $A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix}=0$ iken $A\begin{pmatrix} k & j \\ i & k \end{pmatrix}=0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Yani

$$A\begin{pmatrix} k & j \\ i & k \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{ki} & a_{kk} \\ a_{ij} & a_{jk} \end{vmatrix}=0 \qquad (3.26)$$

olduğunu göstermemiz gerekir.

$$A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{ik} & a_{ij} \\ a_{kk} & a_{kj} \end{vmatrix} \qquad (3.27)$$

ye karşılık gelen matrise B deyip transpozunu alırsak

$$B^{T}=\begin{bmatrix} a_{ik} & a_{kk} \\ a_{ij} & a_{kj} \end{bmatrix} \qquad (3.28)$$

olur. A'nın simetrik olduğu göz önüne alınırsa (3.26) ile (3.28)'deki matrisin determinantının eşit olduğu görülür. O halde Teorem 3.1' den ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.4. A, singüler olmayan bir n-kare matris olsun. $R=A^{-1}$ olmak üzere R'nin, $i=1,\ldots,p$ $(1 \leq p \leq n-2)$, $k=i+1$ ve $j=i+2,i+3,\ldots,n$ için $r_{ij}=0$ $(r_{ji}=0)$ olacak şekilde üst (alt)-(n-k+1)-bant olması için gerek ve yeter şart A'nın $A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix}$ şeklinde sıfırlayan üst (alt) -2-minörlere sahip olmasıdır.

ispat:

Gerek şart: R, $r_{ij}=0$ $(r_{ji}=0)$ olan üst (alt)-(n-k+1)-bant olsun.

$i=1$ için $k=2$ ve $j=3,\ldots,n$ olup R, üst-(n-1)-banttır. Aynı zamanda $r_{ij}=0$' dır. O halde invers determinant formülünden

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & j \end{pmatrix}=(-1)^{1+j}\,\frac{R\begin{pmatrix} 1,3,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n \\ 3,4,\ldots,j-1,\ j\ ,\ldots,n \end{pmatrix}}{\det R} \qquad (3.29)$$

olacağından (3.29) formülünde

$$R\begin{pmatrix} 1,3,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n \\ 3,4,\ldots,j-1,\ j\ ,\ldots,n \end{pmatrix}=0 \qquad (3.30)$$

dır. Çünkü (3.30) determinantında ilk satır elemanlarının hepsi sıfırdır.

$i=1,\ldots,n-2$; $k=i+1$ ve $j=i+2,\ldots,n$ genel durumunda ise

$$A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix} = (-1)^{i+j} \frac{R\begin{pmatrix} 1,\dots,k-1,k+1,\dots,j-1,j+1,\dots,n \\ 1,\dots,i-1,i+1,\dots,k-1,k+1,\dots,n \end{pmatrix}}{\det R}$$

olur. Teorem 3.1'in gerek şartının ispatından $A\begin{pmatrix} i & k \\ k & j \end{pmatrix}=0$ dır.

Yeter şart: Teorem 3.1'in gerek şartından açıktır.

Sonuç 3.5. $A=\text{köş}(A_{11},A_{22},\dots,A_{nn})$ blok köşegen matris, A'nın elemanları olan blok matrislerin hepsi kare matris, en büyük boyutlusu pxp, her i $(i=1,\dots,n)$ için $\det A_{ii}\neq 0$ ve A_{pp} matrisinin $(A_{pp})_{1p}$ ve $(A_{pp})_{p1}$ minörleri sıfırdan farklı olsun. Bu takdirde A^{-1} vardır ve (2p-1)-banttır.

İspat: A matrisi blok köşegen matris olduğundan determinantı blok matrislerin determinantları (Laplace açılımından) çarpımına eşittir. Her i $(i=1,\dots,n)$ için $\det A_{ii}\neq 0$ olduğundan $\det A\neq 0$ olup A^{-1} mevcuttur. A'nın köşegeni üzerinde bulunan blok matrislerden en büyük boyutlusu p-kare olduğundan A, (2p-1)-banttır. Blok köşegen matrislerin inversleri de

$$A^{-1} = \text{köş}(A_{11}^{-1},A_{22}^{-1},\dots,A_{nn}^{-1}) \qquad (3.31)$$

şeklinde blok köşegen olduğundan A^{-1} de (2p-1)-banttır.

Sonuç 3.6. Özel olarak, A blok köşegen matrisinde bütün blokların boyutları eşit ve p ise A ve A^{-1} yine (2p-1)-banttır. p=2 durumunda A ve A^{-1} üçlü bant matristir.

Sonuç 3.7. A, blok köşegen (2p-1)-bant matris olsun. Bu takdirde A'nın öz değerleri blok matrislerin öz değerlerinin cümlesinin bileşkesine eşittir.

İspat:

$$\det(A-\lambda E)=\det(A_{11}-\lambda E_{11}).\det(A_{22}-\lambda E_{22})\dots\det(A_{nn}-\lambda E_{nn})$$

olduğundan blokların öz değerlerinin cümlelerinin bileşkesi A'nın öz değerlerini verir. Burada $i=1,\dots,n$ için E_{ii}, A_{ii} boyutunda birim matrislerdir.

Teorem 3.2. A, $i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,n$; $i\neq j$, $j\neq n-i+1$ için her $a_{ij}=0$ ve $a_{1n}=a_{n1}=0$ olacak şekilde n-kare matris olsun. Bu takdirde $n\geq 4$ için

i) n çift ise

$$\det A=a_{11}a_{nn}\prod_{i=2}^{n/2}(a_{ii}a_{n-i+1,n-i+1}-a_{i,n-i+1}\,a_{n-i+1,i}) \qquad (3.32)$$

ii) n tek ise

$$\det A=a_{11}a_{(n+1)/2,(n+1)/2}\,a_{nn}\prod_{i=2}^{(n-1)/2}(a_{ii}\,a_{n-i+1,n-i+1}-a_{i,n-i+1}\,a_{n-i+1,i}) \tag{3.33}$$

şeklindedir.

iii) Eğer a_{1n} veya a_{n1} elemanlarından sadece birisi sıfırdan farklı ise A'nın determinant değeri değişmez.

İspat:

i) $n \geq 4$ çift sayı olsun. Bu takdirde detA 'nın (ilk satır ve sütunu hariç) her satırında (veya sütununda) iki tane sıfırdan farklı eleman vardır. O halde

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{nn}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 \\ a_{n-1,2} & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \tag{3.34}$$

(3.34) determinantını 1. satır 1. sütuna göre, elde ettiğimiz determinantları da son satır ve son sütuna göre açıp

$$a=a_{11}a_{nn}\,(a_{22}\,a_{n-1,n-1}-a_{2,n-1}\,a_{n-1,2})$$

dersek

$$\det A=a\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots 0 & a_{3,n-2} \\ 0 & a_{44} & \cdots 0 & 0 & \cdots a_{4,n-3} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots a_{n/2,n/2} & a_{n/2,(n+2)/2} & \cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots a_{(n+2)/2,n/2} & a_{(n+2)/2,(n+2)/2} & \cdots 0 & 0 \\ & & & & & \\ a_{n-2,3} & 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots 0 & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix}$$

olur. Bu determinantı da (3.34) de olduğu gibi açmaya devam edersek sonuçta

$$\det A=a_{11}a_{nn}(a_{22}a_{n-1,n-1}-a_{2,n-1}\,a_{n-1,2})(a_{33}a_{n-2,n-2}$$

$$-a_{3,n-2}\, a_{n-2,3})\dots(a_{(n-2)/2,(n-2)/2}\, a_{(n+4)/2,(n+4)/2}$$
$$-a_{(n-2)/2,(n+4)/2}\, a_{(n+4)/2,(n-2)/2})B$$

olacaktır. Burada

$$B=\begin{vmatrix} a_{n/2,n/2} & a_{n/2,(n+2)/2} \\ & \\ a_{(n+2)/2,n/2} & a_{(n+2)/2,(n+2)/2} \end{vmatrix}$$

dir. O halde B determinantı açılırsa

$$\det A=a_{11}a_{nn}(a_{22}a_{n-1,n-1}-a_{2,n-1}\,a_{n-1,2})(a_{33}a_{n-2,n-2}-a_{3,n-2}\,a_{n-2,3})\dots$$
$$(a_{n/2,n/2}\;a_{(n+2)/2,(n+2)/2}-a_{n/2,(n+2)/2}\;a_{(n+2)/2,n/2})$$

şekline gelir. Bu da

$$\det A=a_{11}a_{nn}\prod_{i=2}^{n/2}(a_{ii}\;a_{n-i+1,n-i+1}-a_{i,n-i+1}\;a_{n-i+1,i})$$

demektir.

ii) n≥5 tek sayı olsun. Bu takdirde

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n+1)/2,(n+1)/2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

olur. Buradan $a=a_{11}a_{(n+1)/2,(n+1)/2}\,a_{nn}$ dersek

$$\det A=a\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3,n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-2,3} & \dots & a_{n-2,n-2} & 0 \\ a_{n-1,2} & 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \qquad (3.35)$$

olur. Yine (3.35)' deki determinantta her satırda (veya sütunda) iki tane eleman sıfırdan farklı ve (n-3)x(n-3) tipinde (3.35)'deki determinant ile (3.34)' deki determinant aynıdır. O halde

$$\det A = a\,(a_{22}\,a_{n-1,n-1} - a_{2,n-1}\,a_{n-1,2})(a_{33}\,a_{n-2,n-2} - a_{3,n-2}\,a_{n-2,3})\ldots$$

$$(a_{(n-1)/2,(n-1)/2}\,a_{(n+3)/2,(n+3)/2} - a_{(n-1)/2,(n+3)/2}\,a_{(n+3)/2,(n-1)/2})$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$\det A = a \prod_{i=2}^{(n-1)/2} (a_{ii}\,a_{n-i+1,n-i+1} - a_{i,n-i+1}\,a_{n-i+1,i})$$

bulunur. Bu da iddiayı doğrular.

iii) A matrisinde sadece a_{1n} veya a_{n1} farklı sıfır ise determinant, n'in tek veya çift olmasına göre (3.32) veya (3.33) ifadelerinden birisi olacaktır. Meselâ $a_{1n} \neq 0$ ve $n \geq 4$ çift sayı olsun. Bu takdirde

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

olacağından determinant 1.satır 1.sütuna göre açılırsa

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & 0 \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,2} & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (3.36)$$

olup (3.36) determinantı son satır ve son sütuna göre açılıp (3.34) ifadesiyle karşılaştırılırsa iki ifadenin aynı olduğu görülür ki bu da iddiayı doğrular. $a_{n1} \neq 0$ olması hali de benzer şekilde gösterilir.

Şimdi $n \geq 5$ tek sayı ve $a_{1n} \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n+1)/2,(n+1)/2} & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

olacağından determinant önce 1.satır 1.sütuna göre açılıp elde edilen determinant da (n+1)/2. satır ve (n+1)/2. sütuna göre açılırsa

$$\det A=a_{11}a_{(n+1)/2,(n+1)/2}\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & 0 \dots & 0 \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

elde edilir. Bu son ifadedeki determinant tekrar son satır ve son sütuna göre açılırsa

$$\det A=a_{11}\, a_{(n+1)/2,(n+1)/2}\, a_{nn}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3,n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-2,3} & & a_{n-2,n-2} & 0 \\ a_{n-1,2} & 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

olur. Bu ifade ile (3.35) ifadesi karşılaştırıldığında ikisinin eşit olduğu görülür ki istenendir. $a_{n1}\neq 0$ olması durumu da benzer şekilde gösterilir.

örnek 3.1. A matrisi

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 52 & -13 & -2 & 21 \\ 6 & 3 & -16 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -12 & -1 & 24 & 8 \\ 4 & 2 & -14 & -32 & 5 & 9 \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

şeklinde 6x6 matris olsun. A matrisinde, j=3,4,5,6 için

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & j \end{pmatrix}=0 \text{ ve } A\begin{pmatrix} 2 & j \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=0 \tag{3.38}$$

dır. O halde A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3.141468 & -0.056172 & -0.045076 & 0.104022 & -0.083218 \\ 0 & 0.182385 & -0.006241 & -0.060564 & 0.011558 & -0.009246 \\ 0 & -0.104022 & 0.014615 & 0.060196 & 0.004486 & -0.033219 \\ 0 & 0.187240 & -0.022602 & -0.084896 & 0.048715 & -0.001935 \\ 0 & -0.443828 & 0.067293 & 0.177000 & -0.016250 & -0.001815 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup 9-banttır. A matrisi

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -6 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & -4 & 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

şeklinde ise A matrisinde (3.38) minörleri yine sıfırdır ve ayrıca j=4,5,6 için

$$A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & j \end{pmatrix}=0 \text{ ve } A\begin{pmatrix} 3 & j \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=0 \tag{3.40}$$

olup A^{-1}

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2.500000 & -0.500000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.250000 & 1.143617 & 0.648936 & 0.585106 & -0.819149 \\ 0 & 0 & -0.659574 & -0.276596 & 0.127660 & 0.021277 \\ 0 & 0 & 1.744681 & 0.957447 & 0.404255 & -0.765957 \\ 0 & 0 & -0.276596 & -0.212766 & 0.021277 & 0.170213 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. O halde A^{-1} 7-banttır. A matrisi

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -6 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & -4 & -2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

şeklinde ise A matrisinin, (3.38) ve (3.40) minörleri sıfırdır. Bunların yanı sıra $j=5,6$ için

$$A\begin{pmatrix}3 & 4\\4 & j\end{pmatrix}=0,\quad A\begin{pmatrix}4 & j\\3 & 4\end{pmatrix}=0 \tag{3.42}$$

olup A^{-1}

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 2.500000 & -0.500000 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.250000 & -0.125000 & -0.125000 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -0.250000 & -0.112069 & 0.793104 & -0.689655\\ 0 & 0 & 0 & -0.241379 & -0.862069 & 0.793104\\ 0 & 0 & 0 & 0.103448 & 0.655173 & -0.482759\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Aşikâr olarak A^{-1} 5-banttır. Son olarak da A,

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 2 & -3 & -2 & 1\\ 6 & 3 & -6 & -3 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2 & -1 & 3 & 1.5\\ 4 & 2 & -4 & -2 & 6 & 9\end{bmatrix} \tag{3.43}$$

şeklinde ise A, (3.38), (3.40) ve (3.42) ifadelerini sağladığı gibi

$$A\begin{pmatrix}4 & 5\\5 & 6\end{pmatrix}=0,\quad A\begin{pmatrix}5 & 6\\4 & 5\end{pmatrix}=0 \tag{3.44}$$

ifadesini de sağlar. O halde A^{-1}

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 2.500000 & -0.500000 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.250000 & -0.125000 & -0.125000 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -0.250000 & -0.022727 & -0.181818 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -0.090909 & 0.189394 & 0.041667\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.166667 & 0.833333\end{bmatrix}$$

olup A^{-1} üçlü bant matristir.

Şimdi de inversi $[2(n-p)-1]$-bant olarak verilen matriste

$$A\begin{pmatrix}i & k\\k & j\end{pmatrix}=0 \text{ ve } A\begin{pmatrix}k & j\\i & k\end{pmatrix}=0 \tag{3.45}$$

olduğunu gösterelim. Burada $i=1,\dots,p$; $k=i+1$, $j=i+2,i+3,\dots,n$ ve $1\leq p\leq n-2$' dir.

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

verilirse

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0.188991 & 0.018349 & 0.007339 & 0.018349 & -0.077064 \\ 0.027523 & -0.045872 & -0.018349 & -0.045872 & 0.192661 \\ -0.041073 & 0.068454 & 0.095695 & -0.008469 & -0.004799 \\ -0.106704 & 0.177841 & 0.101905 & -0.052929 & -0.070007 \\ 0.084263 & 0.140438 & -0.040790 & 0.244178 & -0.071701 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan $i=1, k=2$ ve $j=3,4,5$ için A^{-1}'in (3.45) denklemlerini sağladığı kolayca görülür.

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

verilmişse

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0.263822 & -0.106370 & -0.051082 & 0.033053 & 0.003005 \\ -0.159555 & 0.265926 & 0.127704 & -0.082632 & -0.007512 \\ -0.030649 & 0.051082 & -0.071514 & 0.046274 & 0.004207 \\ 0.024339 & -0.040565 & 0.056791 & 0.139724 & -0.032752 \\ 0.007212 & -0.012019 & 0.016827 & -0.069712 & 0.175481 \end{bmatrix}$$

olur ki A^{-1}'in $i=1,2$; $k=i+1$ ve $j=i+2,\ldots,5$ için (3.45) denklemini sağladığı, basit bir hesaplama ile gösterilir.

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

olarak verilmişse

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0.246383 & -0.077305 & -0.036709 & 0.025912 & -0.004319 \\ -0.115958 & 0.193263 & 0.091773 & -0.064781 & 0.010797 \\ -0.055064 & 0.091773 & -0.051393 & 0.036277 & -0.006046 \\ 0.048586 & -0.080976 & 0.045347 & 0.144461 & -0.024077 \\ -0.016195 & 0.026992 & -0.015116 & -0.048154 & 0.174692 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Yine burada A^{-1}'in $i=1,2,3;\ k=i+1$ ve $j=i+2,\ldots,5$ için (3.45) denklemini sağladığı kolayca gösterilir.

örnek 3.2. A matrisi

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

şeklinde 6x6 matris olsun. n=6 çift sayı olduğundan

$$\det A=a_{11}a_{66}\prod_{i=2}^{3}(a_{ii}a_{n-i+1,n-i+1}-a_{i,n-i+1}\,a_{n-i+1,i})$$

$$=a_{11}a_{66}(a_{22}\,a_{55}-a_{25}\,a_{52})(a_{33}\,a_{44}-a_{34}\,a_{43})$$

$$=3.9[5.1-(-2).(-2)](3.1-4.7)$$

$$=27(5-4)(3-28)$$

$$=27.1.(-25)$$

$$=-675$$

olur.

örnek 3.3. A matrisi,

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

şeklinde olsun. n=5 tek sayı olduğundan

$$\det A=a_{11}a_{55}\prod_{i=2}^{2}(a_{ii}a_{n-i+1,n-i+1}-a_{i,n-i+1}\,a_{n-i+1,i})$$

$$=a_{11}a_{33}a_{55}(a_{22}\,a_{44}-a_{24}\,a_{42})$$

$=3.4.9(1.1-1.3)$

$=108.(-1)$

$=-216$

olur.

KAYNAKLAR

[1] BARRETT, W., W. ve FEINSILVER, P. J., 1981. Inverses of Banded Matrices. Linear Algebra and Its Applications 41:111-130

[2] BARRETT, W.W., 1979. A Theorem On Inverses of Tridiagonal Matrices. Linear Algebra and Its Applications 27: 211-217.

[3] BARRETT, W. W., 1984. Toeplitz Matrices with Banded Inverses. Linear Algebra and Its Applications 57: 131-145.

[4] BARRETT, W. W., JOHNSON, C. R., OLESKY, D. D. ve VAN DEN DRiESSCHE, P., 1987. Inherited Matrix Entries: Principal Submatrices of The Inverse. Siam J. Alg. Disc. Meth. Vol. 8, No:3, Sayfa:313-322.

[5] BARRETT, W. W. ve JOHNSON, C. R., 1988. Determinantal Formulae for Matrices with Sparse Inverses. Linear Algebra and Its Applications 56:73-88.

[6] DEMKO, S., MOSS, W. F. ve SMITH, P. W., 1984. Decay Rates for Inverses of Band Matrices. Mathematics Computations Vol. 43, Num. 168.

[7] DYM, H. ve GOHBERG, I., 1981. Extensions of Band Matrices with Band Inverses. Linear Algebra and Its Applications 36:1-24.

[8] ELLIS, R. L. ve LAY, D. C., 1990. Rank-Preserving Extentions of Banded Matrices. Linear and Multilinear Algebra 26:147-179.

[9] ELLIS, R. C., LAY, D. C. ve GOHBERG, I., 1988. On Negative Eigenvalues of Selfadjoint Extentions of Band Matrices. Linear and Multilinear Algebra 24:15-25.

[10] FRANÇESCO, R., 1986. On the Additive Structure of The Inverses of Banded Matrices. Linear Algebra and Its Applications 80:131-140.

[11] GANTMACHER, F. R., 1959. Matrix Theory. Chelsea New York.

[12] GOLUB, G.H. ve VAN LOAN, C.F., 1983. Matrix Computations. North Oxford Academic Publishing Co. Ltd. England

[13] GREVILLE, T. N. E. ve TRENCH, W. F., 1979. Band Matrices with Toeplitz Inverses. Linear Algebra and Its Applications 27:199-209.

[14] GRÜNBAUM, F. A., 1981. Toeplitz Matrices Commuting with Tridiagonal Matrices. Linear Algebra and Its Applications 40:25-36.

[15] HEGLAND, M. ve MARTI, J. T., 1989. Algoritms for The Reconstruction of Special Jacobi Matrices from Their Eigenvalues. Siam J. Matrix Analysis Applications Vol. 10, No:2, Sayfa:219-228.

[16] HEINING, G. ve ROST, K., 1988. On The Inverses of Toeplitz-plus-Hankel Matrices. Linear Algebra and Its Applications 106:39-52.

[17] HEINING, G. ve ROST, K., 1989. Matrix Representations of Toeplitz -plus-Hankel Matrix Inverses. Linear Algebra and Its Applications 113:65-78.

[18] HOSKINS, W. D. ve McMASTER, G. E., 1977. Properties of The Inverses of a Set of Band Matrices. Linear Al-

gebra and Its Applications 5:183-196.

[19] HUANG, N. M. ve CLINE, R. E., 1972. Inversion of Persymmetric Matrices Having Toeplitz Inverses. J. Assoc. Comput. Math. 19:437-444.

[20] IKEBE, Y., 1979. On Inverses of Hessenberg Matrices. Linear Algebra and Its Applications 24:93-97.

[21] IMAM, I. N., 1983. Tridiagonal and Upper Triangular Inverse M-Matrices. Linear Algebra and Its Applications 55:93-104.

[22] KARLIN, S., 1968. Total Positivity. Stanford U. P. California.

[23] LONGSTAFF, W. E., 1988. On Tridiagonalizations of Matrices Linear Algebra and Its Applications 109: 153-163.

[24] NOBLE, B., 1969. Applied Linear Algebra. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

[25] PIFF, M. J., 1987. Inverses of Banded and k-Hessenberg Matrices. Linear Algebra and Its Applications 85:

[26] RIZVI, S. A. H., 1984. Inverses of Quasi-Tridiagonal Matrices. Linear Algebra and Its Applications 56: 177-184.

[27] ROZSA, P., 1987. On The Inverse of Band Matrices. Integral Equations and Operator Theory 10:82-95.

[28] SCHWARZ, H. R., RUTISHAUSER, H. ve STIEFEL, E., 1973. Numerical Analysis of Symmetric Matrices. Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

[29] SHAFROTH, C., 1981. A Generalization of The Formula for Computing The Inverse of A Matrix. The American Mathematical Montly 88:614-616.

[30] TISMENENTSKY, M., 1987. Determinant of Block-Toeplitz Band Matrices. Linear Algebra and Its Applications 85:165-184.

[31] YAMAMOTO, T. ve IKEBE, Y., 1979. Inversion of Band Matrices. Linear Algebra And Its Applications 24: 105-111.

[32] ZHANG, X., 1988. On Inverses and Generalized Inverses of Hessenberg Matrices. Linear Algebra and Its Applications 101:167-180.