ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

# DİNAMİK SİSTEMLERDE ÇOKLU-HAMİLTONSAL ENTEGRE EDİLEBİLİRLİK

Bilge Banu KÖK SAYAR

FİZİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ANKARA
2013

**TEZ ONAYI**

Bilge Banu KÖK SAYAR tarafından hazırlanan **"Dinamik Sistemlerde Çoklu-Hamiltonsal Entegre Edilebilirlik"** adlı tez çalışması 14/05/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman:** Yrd. Doç. Dr. Refik TURHAN

**Jüri Üyeleri:**

**Başkan** : Prof. Dr. Abdullah VERÇİN
Ankara Üniversitesi Fizik A.B.D.

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Deniz YILMAZ
Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği A.B.D.

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Refik TURHAN
Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği A.B.D.

**Yukarıdaki sonucu onaylarım.**

**Prof. Dr. İbrahim DEMİR**
**Enstitü Müdürü**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİNAMİK SİSTEMLERDE ÇOKLU-HAMİLTONSAL ENTEGRE EDİLEBİLİRLİK

Bilge Banu KÖK SAYAR

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Refik TURHAN

Bu çalışmada kanonik Hamiltonsal yapıdan başlanılarak Poisson yapıları ve bu yapılara sahip çoklu-Hamiltonsal dinamik sistemlerin tamamen entegre edilebilirliği gözden geçirilmiştir. Çoklu-Hamiltonsal entegre edilebilir olduğu bilinen bazı dinamik sistemler derlenmiştir.

**Mayıs 2013, 38 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Dinamik Sistem, çoklu-Hamiltonsal yapı, entegre edilebilirlik

# ABSTRACT

MS Thesis

MULTI-HAMILTONIAN INTEGRABILITY IN DYNAMICAL SYSTEMS

Bilge Banu KÖK SAYAR

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Engineering Physics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Refik TURHAN

In this study, starting from the canonical Hamiltonian structure, Poisson structures and complete integrability of the dynamical systems possessing multi-Hamiltonian structures are reviewed. Some dynamical systems which are known to be multi-Hamiltonian integrable are also compiled.

**May 2013, 38 pages**

**Key Words:** Dynamical System, multi-Hamiltonian structure, Integrability

## TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması süresince gösterdiği özveri, yardım ve bilimsel katkılarından dolayı tez danışmanım ve hocam Yrd. Doç. Dr. Refik TURHAN'a (Ankara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Fizik Mühendisliği Bölümü) içten teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Tez jürisinde yer alan Prof. Dr. Abdullah VERÇİN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü) ve Yrd. Doç. Dr. Deniz YILMAZ'a (Ankara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Fizik Mühendisliği Bölümü) tezime sağladıkları katkılarından ötürü teşekkürü borç bilirim.

Değerli dostum Fiz. Müh. Dr. Daryoush TALATİ'ye tüm desteği ve dostluğundan dolayı teşekkür ederim.

Bilge Banu KÖK SAYAR
Ankara, Mayıs 2013

## İÇİNDEKİLER

# 1. GİRİŞ

Dinamik sistemler sabit bir evrim kuralına göre evrilen sistemler olarak tanımlanmaktadır. Dinamik bir sistemin evrim kuralı fark denklemleri ya da diferansiyel denklemler olarak yazılmaktadır. Dinamik sistemler genel olarak modellenmek istenen sisteme dair ampirik gözlemler ve/ya temel prensiplere dayanılarak ortaya konulmaktadır.

Sistemle ilgili uygun ihmaller ve idealizasyonlar sonrası oluşturulan model denklemlerinin Hamiltonsal bir yapıya sahip olup olmadığı sistemin ve sisteme dair tanımlanabilecek niceliklerin evrimini belirleyebilmek açısından önemlidir. Bu nedenle kurulan birçok modelin model parametrelerinin hangi değerleri için Hamiltonsal bir yapısının olduğu ayrıca araştırılagelmiştir (Grammaticos vd. 1982, Kuś 1983). Hamiltonsal olarak yazılabilen dinamik sistem denklemleri, bu yapının üzerine kurulmuş olduğu genelleştirilmiş koordinatlar ve bu koordinatların dönüşümleri kullanılarak çözülebilirlik, ki bu sistemin evrimini belirleyebilmek anlamına gelmektedir, açısından incelenebilmektedir.

Birçok model doğrudan Hamilton ilkesine dayalı olarak kurulması nedeniyle Hamiltonsal dinamik sistemlerle ifade edilmektedir. Bu şekildeki bir dinamik sistemin yeterince hareket sabitlerinin olması durumunda tamamiyle integrasyonlar olarak çözümlerinin yazılabileceği gösterilmiştir. Ancak verilen bir dinamik sistemin çözülebilir olması için gerekli olan hareket sabitlerinin yeterli sayıda var olup olmadığını belirleyebilmek, bu sabitlerin varlığı durumunda ise bulunabilmeleri için sistematik bir yöntem bulunmamaktadır.

Yeterince hareket sabitinin varlığını gösterebilmek ve bu sabitleri sistematik olarak bulabilmek açısından önemli bir gelişme Magri (1978) tarafından Hamiltonsal alan denklemleriyle ilgili olarak ortaya konulmuş olan çoklu-Hamiltonsal entegre edilebilirlik teorisi olmuştur. Bu teori herhangi bir alan denkleminin birbiriyle uyumlu birden çok Hamiltonsal yapı ile yazılabilmesi durumunda alan denklemlerinin çözülebilmesi için gerekli sonsuz sayıdaki hareket sabitinin var olduğunu, ilgili Hamiltonsal yapılar kullanılarak bu sabitlerin (bazı teknik varsayımlarla) sistematik olarak bulunabileceğini ortaya koymuştur.

Magri'nin evrimsel alan denklemleri için ortaya koymuş olduğu entegre edilebilirlik teorisinin adi diferansiyel denklemlerle ifade edilen dinamik sistemlerdeki karşılığı ise birden çok uyumlu Hamiltonsal yapıya sahip dinamik sistemlerin Liouville-Arnold (Arnold 1989) teorisinin gerektirdiği sonlu sayıdaki hareket sabitlerine sahip olduğu ve bu yapıların kullanılmasıyla bu sabitlerin sistematik olarak bulunabileceği olmuştur (Blaszak 1998, Olver 1993).

Bu gelişme beraberinde çoklu-Hamiltonsal yapıyla kurulmaları dolayısıyla doğrudan entegre edilebilir olan dinamik sistemleri (belirli eşdeğerlilikler altında) belirleyebilmek üzere düşük boyutlardaki uyumlu Hamiltonsal yapıların sınıflandırılması çalışmalarını getirmiştir (Blaszak ve Rauch-Wojciechowski 1989, Nutku ve Gümral 1993).

Bu çalışmada temel prensiplerden başlanılarak Lagrange ve kanonik Hamiltonsal hareket denklemlerinin kurulması, Hamiltonsal yapının Poisson parantezleriyle ifadesi, Poisson parantezleri üzerinden kanonik olmayabilen Hamiltonsal dinamik sistemlerin kurulması, Hamiltonsal dinamik sistemlerin hareket sabitleri ve bu sabitler üzerinden entegre edilebilirliklerinin tanımlanması ve son olarak da çoklu-Hamiltonsal entegre edilebilirlik teorisinin dinamik sistemlere uygulanması gözden geçirilerek bazı derleme örneklerde bu teori somut olarak irdelenmiştir.

# 2. KURAMSAL TEMELLER

## 2.1 Dinamik Sistemler

Her biri sadece aynı ve tek bir bağımsız değişken $t$'ye bağlı $z = (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_m(t))$ gerçel değerlikli bağımlı değişkenleri için, $\mathbb{R}$'nin bir aralığında düzgün (sürekli ve türevli) $F_i(z)$ fonksiyonlarıyla verilen

$$\dot{z}_i = F_i(z, t), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, m$$

birinci dereceden adi diferansiyel denklemler sistemine dinamik sistem denir. Yukarıda ve bu çalışmanın heryerinde bağımlı değişken üzerine konulan nokta, geleneksel olduğu üzere, evrim parametresi zamana göre türevi göstermektedir ($\dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$).

**Örnek 1 :** İlk olarak zayıf atmosferik konveksiyonu modellemek üzere ortaya konulmuş olan Lorenz (1963) sistemini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \sigma(y - x), \\
\dot{y} &= x(\rho - z) - y, \\
\dot{z} &= xy - \beta z.
\end{aligned}$$

Bu dinamik sistemdeki $\sigma$, $\rho$ ve $\beta$ pozitif sabitler olup bu sabitler, modelin kullanıldığı lazer, dinamo, elektrik devresi ya da kimyasal reaksiyon durumlarında farklı niceliklere karşılık gelmektedirler.

## 2.2 Lagrange ve Hamilton Hareket Denklemleri

Klasik mekanikte kinetik $T$ ve potansiyel $U$ enerji ifadeleri herhangi bir genelleştirilmiş koordinatlar

$$q = (q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)),$$

kümesinde yazılmış bir sistemin yapacağı hareket, bu enerjilerin farkı olan Lagrange fonksiyonunun

$$L = T - U$$

zaman integrali olarak tanımlanan eylemi

$$J = \int L \, \mathrm{d}t$$

ekstremize eden hareket olmaktadır. Hamilton ya da ekstremum eylem ilkesi olarak adlandırılan bu ilke, Lagrange fonksiyonunun tanımında kullanılan genel koordinatlar $q$, ve herbiri sadece zaman $t$'nin gerçel değerlikli fonksiyonu olan bu koordinatların zamana göre türevi olan hızlar $\dot{q}$ olmak üzere, eylem integralinin varyasyonel türevinin $\delta J = 0$ olmasına karşılık gelmektedir (Goldstein 1980). Bu ilkenin sonucu olarak da eylemin kendisi üzerinden tanımlandığı Lagrange fonksiyonu için koordinat sayısı $n$ kadar Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots n,$$

ortaya çıkmaktadır. Her biri ele alınan sistemin koordinatları $q$'lar için ikinci dereceden adi diferansiyel denklemden oluşan bu denklem sisteminin, uygun başlangıç ya da sınır koşullarıyla çözülmesi ise sistemin hareketinin aranılan tasviri olmaktadır. Lagrange fonksiyonu yazılmış bir sistem için sistemin mekaniğinin Hamiltonsal yazımına geçiş yapmak mümkündür. Bu geçiş için öncelikle Lagrange fonksiyonu ve bu fonksiyonun üzerinde tanımlanmış olduğu $q$ genel koordinatlarının her birinin eşlenik momentumları

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad i = 1, 2, 3, \cdots n,$$

tanımlanarak Legendre dönüşümüyle Hamilton fonksiyonu

$$H(p,q;t)=\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - L,$$

bütün $\dot{q}$ hızlar, $p$ momentumları cinsinden elimine edilerek yazılır. Sadece genelleştirilmiş koordinatlar $q$ ve bu koordinatların eşlenikleri olan momentumlar $p$ (ve olasılıkla zaman $t$)'nin fonksiyonu olarak tanımlanan Hamilton fonksiyonunun bu tanım gereği toplam diferansiyeli

$$\mathrm{d}H=\frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i+\frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t$$

Legendre dönüşümü öncesi nicelikler cinsinden

$$\mathrm{d}H=\dot{q}_i\mathrm{d}p_i+p_i\mathrm{d}\dot{q}_i-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}\dot{q}_i-\frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i-\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t$$

ifadesine eşit olmalıdır. İkinci ifadede kanonik momentum tanımının Lagrange denklemi olan

$$\dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q_i},$$

ile birlikte kullanımı ve her iki ifadenin aynı $\mathrm{d}H$ toplam diferansiyeli olması koşulu bu ifadelerdeki $\mathrm{d}p_i$, $\mathrm{d}q_i$ ve $\mathrm{d}t$ diferansiyellerinin katsayılarının eşitliğinden

$$\begin{aligned}&\dot{q}_i=\tfrac{\partial H}{\partial p_i},\\&\dot{p}_i=-\tfrac{\partial H}{\partial q_i},\;\; i=1,2,3,\cdots n,\\&\tfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\tfrac{\partial H}{\partial t}\left(=-\tfrac{\partial L}{\partial t}\right)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Hamilton hareket denklemlerine ulaşılmasını sağlar. Bu hareket denklemleri birinci dereceden fakat $2n$ adet adi diferansiyel denklemden oluşan bir denklem sistemi, diğer bir deyişle dinamik bir sistemdir. Yine var ise uygun başlangıç ya da sınır koşulları ile bu diferansiyel denklemlerin çözümü, sistemin dinamiğinin, Lagrange denklemlerine eşdeğer başka bir tasviri olur. Bu tasvirin üzerine kurulmakta olduğu genel koordinatlar ve bunların eşlenikleri olan momentumların oluşturduğu uzaya $(p, q)$ faz uzayı denir.

**Örnek 2 :** İki boyutta yay sabiti $k$ ve kütlesi $m$ olan harmonik salınıcı için,
Kinetik enerji: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$,
Potansiyel enerji: $U = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$,
Lagrange fonksiyonu: $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$
Euler-Lagrange hareket denklemleri:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow m\ddot{x} + kx = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \rightarrow m\ddot{y} + ky = 0.$$

Eşlenik momentumlar: $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, $p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$
Hamilton fonksiyonu:

$$\begin{aligned} H(p_x, p_y, x, y) &= \left(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \tfrac{1}{2}k(x^2 + y^2)\right|_{(\dot{x}=\frac{p_x}{2m}, \dot{y}=\frac{p_y}{2m})} \\ &= \tfrac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \tfrac{1}{2}k(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Hamilton hareket denklemleri:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x/m, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y/m, \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx, \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial p_y} = -ky, \end{aligned}$$

olarak bulunur.

## 2.3 Kanonik Poisson Parantezleri

Kanonik koordinatlarda Hamilton fonksiyonu $H(p, q)$ ile tasvir edilmekte olan bir sistemin koordinatlarına ve eşlenik momentumlarına bağlı olarak verilecek herhangi bir düzgün $F = F(p, q; t)$ fonksiyonunun zamana göre toplam türevi

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} \right)$$

olur. Yukarıdaki ifadede hareket denklemleri (2.1) kullanıldığında

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \tag{2.2}$$

elde edilir. Hamilton fonksiyonu faz uzayında tanımlı skaler bir fonksiyondur. Benzer şekilde faz uzayında tanımlanabilecek başka skaler fonksiyonların da evrimi açısından aşağıdaki tanım kullanışlıdır.

**Tanım 1 :** Faz uzayında tanımlı herhangi iki düzgün fonksiyon $F(p, q)$ ve $G(p, q)$ için yazılan

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

$\{\,,\}$ parantezine kanonik Poisson parantezi denir.

Bu tanım kullanılarak (2.2)'deki toplam türev

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}$$

olarak ifade edilebilir. Bu son ifade faz uzayında tanımlanmış ve zamana sadece tanımlandığı faz uzayı koordinatları üzerinden bağlı, diğer bir deyişle açıkça zamana bağlı olmayan bir fonksiyonun zamana göre evriminin bu fonksiyonun sistemin Hamilton fonksiyonuyla kanonik Poisson parantezi olduğunu söylemektedir. Koordinatların kendileri de, Hamilton fonksiyonunun kendisi de faz uzayındaki skaler fonksiyonlar olarak bu duruma istisna oluşturmazlar. Bu niceliklerin Hamilton fonksiyonuyla Poisson parantezleri

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \tfrac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\}, \\ \dot{p}_i &= -\tfrac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots n, \\ \dot{H} &= \tfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \tfrac{\partial H}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Hamilton hareket denklemlerinden başkası değildir. Ayrıca faz uzayı koordinatları olan genelleştirilmiş koordinatlar ve eşlenik momentumların kendi aralarında

$$\{q_i, q_j\} = 0, \qquad \{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij},$$

ilişkilerini sağladığı kolayca görülebilir. Burada

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Kronecker-$\delta$ fonksiyonunu göstermektedir.

Hamilton hareket denklemleri (2.1)'de verilen dinamik sistem tanımına uyan birinci dereceden denklem sistemleridir. Hareket denklemlerindeki bağımlı değişkenler olan koordinatlar $q$ ve bunların eşlenikleri olan momentumların $p$ isimlendirilmelerindeki farklılık

$$z_i = \begin{cases} q_i, & i = 1, 2, 3, \dots, n, \\ p_i, & i = n+1, n+2, n+3, \dots, 2n, \end{cases}$$

düzenlemesi yapılarak kolayca aşılabilir. Bu yeni isimlendirme sonrasında kanonik Poisson parantezi

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial G}{\partial z_{i+n}} - \frac{\partial F}{\partial z_{i+n}} \frac{\partial G}{\partial z_i} \right)$$

ya da I, $n \times n$ birim matrisi göstermek üzere, simplektik yapı matrisi olarak adlandırılan

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

ile

$$\{F, G\} = \sum_{i,j=1}^{2n} \left( \frac{\partial F}{\partial z_i} J_{ij} \frac{\partial G}{\partial z_j} \right)$$

biçimini alır. Hareket denklemleri (2.1) ise

$$\dot{z}_i = \{z_i, H\}$$

olur. Düzenleme sonrasında faz uzayı koordinatlarından oluşan vektör $z$ ve bu koordinatlar üzerinden gradyant $\nabla$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix}, \qquad \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} \\ \frac{\partial}{\partial z_3} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix},$$

ile Poisson parantezi yukarıda verilen $J = [J_{ij}]$ simplektik matrisiyle

$$\{F, G\} = (\nabla F)^T \cdot J \nabla G$$

ve hareket denklemleri

$$\dot{z} = J\nabla H,$$

olarak özlü bir şekilde vektörel biçimde yazılabilir. Yukarıdaki $(\nabla F)^T$ ifadesi $(\nabla F)$ sütun vektörünün devriğini göstermektedir.

**Örnek 3 :** Örnek (2)'deki harmonik salınıcının Hamilton hareket denklemleri vektörel olarak

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial p_x} \\ \frac{\partial}{\partial p_y} \end{pmatrix} \left( \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) \right)$$

biçimini alır.

## 2.4 Poisson Parantezinin Özellikleri

Faz uzayında tanımlı herhangi üç fonksiyon $F, G, H$ ve keyfi sabitler $\alpha$, $\beta$ olmak üzere kanonik Poisson parantezleri aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) Antisimetri: $\{F, G\} = -\{G, F\}$ ve dolayısıyla $\{F, F\} = 0$,

2) Doğrusallık: $\{F, \alpha G + \beta H\} = \alpha\{F, G\} + \beta\{F, H\}$,
$\{\alpha F + \beta G, H\} = \alpha\{F, H\} + \beta\{G, H\}$

3) Leibniz kuralı: $\{FG, H\} = F\{G, H\} + \{F, H\}G$,
$\{F, GH\} = G\{F, H\} + \{F, G\}H$

4) Jacobi özdeşliği: $\{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} = 0$

Kanonik koordinatlarda doğal olarak ortaya çıkan yukarıdaki özellikler koordinatların kanonik olmadığı daha genel durumlar için de Poisson parantezini tanımlayan özelliklerdir.

Yukarıdaki özellikleri sağlayacak şekilde bir Poisson parantezi tanımlayan yegane matris kanonik koordinatlar durumunda (2.4) biçimini alan sabit elemanlı ve çift mertebeli simplektik $J$ matrisi değildir. Birçok ilginç örnek, ki dinamik sistemler tanım itibarıyla çift sayıda denklemden oluşmak zorunda değildir, yapı matrisinin kanonik koordinatlar durumundaki özel (simplektik) halinin, yukarıda listelenmiş olan Poisson parantezi olma özellikleri saklı kalmak üzere, terk edilmesini gerektirmektedir. Aşağıdaki örnek bu ihtiyacın bariz olduğu bir örnektir.

**Örnek 4 :** $I_1, I_2, I_3$ her biri farklı sabitlerinin pozitif sayılar olduğu Euler sistemi

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} w_2 w_3 \\ \dot{w}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} w_3 w_1 \\ \dot{w}_3 &= \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} w_1 w_2\end{aligned}$$

$H = \frac{w_1^2}{2I_1} + \frac{w_2^2}{2I_2} + \frac{w_3^2}{2I_3}$ Hamilton fonksiyonu ile

$$\begin{pmatrix} \frac{w_1}{I_1} \\ \frac{w_2}{I_2} \\ \frac{w_3}{I_3} \end{pmatrix} = \nabla H = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial w_1} \\ \frac{\partial}{\partial w_2} \\ \frac{\partial}{\partial w_3} \end{pmatrix} \left( \frac{w_1^2}{2I_1} + \frac{w_2^2}{2I_2} + \frac{w_3^2}{2I_3} \right),$$

ile

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{w_1}{I_1} \\ \frac{w_2}{I_2} \\ \frac{w_3}{I_3} \end{pmatrix}$$

Hamiltonsal (fakat kanonik olmayan) bir dinamik sistemdir.

Bu örnek iki açıdan yukarıda verilmiş olan kanonik Hamiltonsal sistem tanımına uymaz. Sistemin değişken sayısı çift değil ve daha önemlisi yapı matrisi konumundaki

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

matrisi simplektik (2.4) matrisi değildir. Bu durumun nedeni yukarıda verilen tanımların kanonik koordinatlar esas alınarak yapılmış olmasıdır.

Bir sonraki bölümde koordinatların kanonik olması koşulu gevşetilerek Poisson parantezi ve Hamiltonsal dinamik sistem tanımlarının daha genelleştirilmiş halleri verilmektedir (Olver 1993).

## 2.5 Poisson Parantezi ve Hamiltonsal Dinamik Sistem

Bir önceki bölümde kanonik koordinatlara dayalı olarak verilmiş olan tanımlar aşağıdaki tanımların özel bir durumuna karşılık gelmektedir.

**Tanım 2 :** $z = (z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m)$ koordinatlarına bağlı fonksiyonlardan oluşan $m \times m$ boyutlu $J = J_{ij}(z)$ matrisi

$$J_{ij}(z) = -J_{ji}(z), \qquad \text{(antisimetri)}$$

$$\sum_{l=1}^{m} \left( J_{il} \frac{\partial J_{jk}}{\partial z_l} + J_{jl} \frac{\partial J_{ki}}{\partial z_l} + J_{kl} \frac{\partial J_{ij}}{\partial z_l} \right) = 0, \qquad \text{(Jacobi özdeşliği)}$$

koşullarını sağlıyor ise bu matrise Poisson matrisi denir. Poisson matrisi $J$ kullanılarak $z$ koordinatlarına bağlı herhangi iki düzgün fonksiyon $F(z)$ ve $G(z)$ için tanımlanan

$$\{F, G\}_J = (\nabla F)^T \cdot J(z) \nabla G \tag{2.6}$$

parantezine Poisson parantezi denir.

Yukarıdaki Poisson parantezi tanımında konu edilmemiş olan doğrusallık ve Leibniz kuralı parantezin tanımındaki gradyant işlemcisinden dolayı açıktır.

**Tanım 3 :** Skaler bir fonksiyon $H(z)$ ve Poisson parantezi (2.6) ile yazılan

$$\dot{z} = \{z, H\}_J,$$

dinamik sistemine Hamiltonsal dinamik sistem denir.

Dolayısıyla verili bir dinamik sistemi Hamiltonsal olarak yazmak, yukarıdaki tanıma uygun bir $J$ Poisson matrisi ve skaler bir $H$ (Hamilton) fonksiyonu bulabilmeyi gerektirmektedir.

Bu tanımlar ışığında Örnek (4)'deki

$$\begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisinin bir Poisson matrisi olduğu görülür.

## 2.6 Koordinat Dönüşümleri

İlk olarak $z$ koordinatlarında $H(z)$ Hamilton fonksiyonu ve $J(z)$ Poisson matrisi ile verilmiş bir Hamiltonsal sistem için yeni düzgün (sürekli ve türevli) $f_j$ fonksiyonlarıyla tanımlanmış olan

$$w_j = f_j(z_i), \qquad i, j = 1, 2, 3, \cdots, m,$$

koordinatlarına geçildiğinde

$$S_{ji} = \left(\frac{\partial w_j}{\partial z_i}\right)$$

Jacobiyen matrisi ile yeni koordinatlarda hareket denklemleri

$$\dot{w}_j = S_{ji}\dot{z}_i = SJS^T\nabla_w H(z(w))$$

biçimini alır. Burada $\nabla_w$ faz uzayındaki gradyantın yeni $w$ koordinatlarına göre, $H(z(w))$ ise Hamilton fonksiyonu $H$' nın koordinat dönüşümleri sonrası $w$'lar cinsinden ifadesini göstermektedir. Jacobiyen matris $S$'in dejenere (determinantı sıfır) olmadığı dönüşümler sonrası elde edilen

$$\tilde{J}(w) = SJS^T$$

matrisi de Poisson parantezi tanımlayan bir matristir. Daha spesifik olarak, kanonik koordinatlarda simplektik $J$ matrisiyle verilen kanonik Poisson matrisini değişmez bırakan dönüşümlere $\tilde{J} = SJS^T = J$ kanonik dönüşümler denir.

**Örnek 5 :** Örnek (4)'deki Poisson matrisi ile

$$F = -\frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)$$

fonksiyonunun

$$H = \frac{w_1^2}{2I_1} + \frac{w_2^2}{2I_2} + \frac{w_3^2}{2I_3},$$

ile

$$\{F, H\}_J = 0$$

sağladığı dolayısıyla da Euler sisteminin (bir sonraki bölümde tanımı verilmekte olan) bir hareket sabiti olduğu bilinmektedir (Blaszak 1998). Euler sisteminin ilk verilmiş olduğu $(w_1, w_2, w_3)$ koordinatlarından

$$q = \arccos \frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}, \qquad p = w_3, \qquad c = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$$

ile tanımlanan $(q, p, c)$ koordinatlarına geçildiğinde

$$H(q, p, c) = (c - p^2)\left(\frac{1}{2I_1}\cos^2 q + \frac{1}{2I_2}\sin^2 q\right) + \frac{p^2}{2I_3}$$

ve Poisson matrisi (2.5)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Sonuç olarak yeni koordinatlarda Euler sistemi

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \\ \dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q} \\ \frac{\partial}{\partial p} \\ \frac{\partial}{\partial c} \end{pmatrix} \left((c - p^2)\left(\frac{1}{2I_1}\cos^2 q + \frac{1}{2I_2}\sin^2 q\right) + \frac{p^2}{2I_3}\right)$$

biçimine gelir.

## 2.7 Hareket Sabitleri

Hamiltonsal bir dinamik sistemin değişkenlerine bağlı olarak tanımlanabilecek fonksiyonlardan aşağıdaki tanıma uygun olanları özel bir öneme sahiptir.

**Tanım 4 :** Düzgün $F(z)$ fonksiyonu

$$\dot{z} = \{z, H\}_J$$

dinamik sisteminin Hamilton fonksiyonu $H(z)$ ile Poisson sıradeğişimli ise

$$\{F, H\}_J = 0$$

$F$ sistemin bir hareket sabitidir.

Yukarıdaki ifade tanım gereği $\dot{F}$'dir. Bunun sıfır olmasının $F$'in zamana göre değişmediği dolayısıyla hareket boyunca $F(z_i) = c$ gibi sabit bir değere sahip olduğu anlamına geldiği açıktır.

Zamandan bağımsız bir Hamilton fonksiyonu sistemin hareket sabitidir.

Herhangi bir sistem birden çok hareket sabitine sahip olabilir. Bu tür hareket sabitlerinden fonksiyonel olarak birbirinden bağımsız olanları $F_j$ olarak etiketlendirilerek aşağıdaki tanım yapılır.

**Tanım 5 :** Düzgün $F_i$ fonksiyonları $\{\,,\}_J$ Poisson parantezine göre sıradeğişimli

$$\{F_i, F_j\}_J = 0,$$

ise $F_i, F_j$ fonksiyonları involusyon içindedir denir.

Birer adi diferansiyel denklem sistemi olarak dinamik sistemler ve özel olarak da Hamiltonsal sistemler için çözümler önemlidir. Hamiltonsal bir sistem için hareket sabitlerinin sayısı çözümün var olup olmadığının doğrudan bir ölçüsüdür.

**Tanım 6 :** Denklem sayısı $2n$ olan

$$\dot{z} = \{z, H\}_J$$

Hamiltonsal bir sistemin $n$ adet involusyon içinde

$$\{F_i, F_j\}_J = 0,$$

hareket sabiti $F_1(z), F_2(z), \ldots, F_n(z)$ var ise sistem tamamiyle entegre edilebilirdir.

Tamamiyle entegre edilebilir bir Hamiltonsal sistemin çözümleri (prensip olarak) hareket sabitleri olarak bulunan sabit $c_i = F_i(z)$ ifadelerinin $z$ koordinatları için çözülmesi ile elde edilebilir.

**Örnek 6 :** Euler sistemi

$$H_1 = \frac{w_1^2}{2I_1} + \frac{w_2^2}{2I_2} + \frac{w_3^2}{2I_3}$$

Hamilton fonksiyonu yanısıra Örnek (5)'de $F$ ile gösterilmiş olan

$$H_2 = -\frac{1}{2}\left(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2\right),$$

fonksiyonunu da hareket sabiti olarak kabul etmektedir. Her iki fonksiyon da zamandan bağımsız oldukları için sistemin hareket sabitleridirler. Dolayısıyla $c_1$ ve $c_2$ sabitler olmak üzere $H_1 = c_1$ ve $H_2 = c_2$ ifadelerinin $w_1$ ve $w_2$ için çözümünden

$$w_1 = \sqrt{\bar{c}_1 + \frac{I_1(I_3 - I_2)}{I_3(I_2 - I_1)} w_3^2},$$

$$w_2 = \sqrt{\bar{c}_2 + \frac{I_2(I_3 - I_1)}{I_3(I_1 - I_2)} w_3^2}$$

geriye kalan $w_3$ ise

$$t - t_0 = \int \frac{dw_3}{\sqrt{\left(\bar{c}_1 + \frac{I_1(I_3-I_2)}{I_3(I_2-I_1)}w_3^2\right)\left(\bar{c}_2 + \frac{I_2(I_3-I_1)}{I_3(I_1-I_2)}w_3^2\right)}}$$

fonksiyonunun tersi olarak Euler sisteminin (integrasyon olarak ifade edilmiş) çözümü olur. Son ifadelerdeki $\bar{c}_1$ ve $\bar{c}_2$, $c_1$ ve $c_2$ sabitleri cinsinden yazılabilen yeni sabitlerdir.

### 2.8 Çift-Hamiltonsal Dinamik Sistem

Önceki bölümlerde verili bir dinamik sistem

$$\dot{z} = K(z)$$

bir Poisson matrisi $J$ ve Hamilton fonksiyonu $H$ ile

$$K(z) = \{z, H\}_J$$

olacak biçimde yazıldığında sistemin Hamiltonsal bir sistem olarak tanımlandığını belirtmiştik. Bazı sistemleri birden çok Poisson matrisi ve Hamilton fonksiyonu ikilileriyle $(J, H)$ Hamiltonsal olarak yazabilmek mümkün olmaktadır.

**Örnek 7 :** Euler sistemi Örnek (4)'te verilmiş olan Hamiltonsal yazımın yanısıra

$$H_2 = -\frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} - \frac{w_3^2}{2}$$

Hamilton fonksiyonu ve

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{w_3}{I_3} & \frac{w_2}{I_2} \\ \frac{w_3}{I_3} & 0 & -\frac{w_1}{I_1} \\ -\frac{w_2}{I_2} & \frac{w_1}{I_1} & 0 \end{pmatrix}$$

Poisson matrisi kullanılarak da

$$\begin{pmatrix} \frac{I_2-I_3}{I_2I_3}w_2w_3 \\ \frac{I_3-I_1}{I_3I_1}w_3w_1 \\ \frac{I_1-I_2}{I_1I_2}w_1w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{w_3}{I_3} & \frac{w_2}{I_2} \\ \frac{w_3}{I_3} & 0 & -\frac{w_1}{I_1} \\ -\frac{w_2}{I_2} & \frac{w_1}{I_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial w_1} \\ \frac{\partial}{\partial w_2} \\ \frac{\partial}{\partial w_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} - \frac{w_3^2}{2} \end{pmatrix}$$

Hamiltonsal yazılabilir.

Euler sistemi gibi iki (ya da daha çok) sayıda Poisson matrisi ve Hamilton fonksiyonu ikilileriyle $(J_i, H_i)$, $i = 1, 2$

$$\dot{z} = K_i(z) = J_1(z)\nabla H_1(z) = J_2(z)\nabla H_2(z),$$

Hamiltonsal olarak yazılabilen sistemlere yazım sırasında kullanılan Poisson matrisleri aşağıdaki uyumluluk koşulunu da sağlıyor iseler çift-Hamiltonsal dinamik sistem ya da kısaca çift-Hamiltonsal sistem denir.

**Tanım 7 :** $J_1$ ve $J_2$ birer Poisson matrisi olmak üzere $J_\lambda = J_1 + \lambda J_2$ doğrusal kombinasyonu da her keyfi sabit $\lambda$ için Poisson matrisi ise $J_1$ ve $J_2$ Poisson matrisleri uyumludur.

Çift-Hamiltonsal bir dinamik sistem için aşağıdaki teorem ispatlanmıştır (Blaszak 1998).

**Teorem 1 :** $J_1$ ve $J_2$ uyumlu Poisson matrisleri ve $H_0$, $J_1$ Poisson matrisinin Casimir fonksiyonu ($J_1\nabla H_0 = 0$) olsun. Uyumlu Poisson matris çifti $(J_1, J_2)$ ile yazılan

$$K = J_1\nabla H_1 = J_2\nabla H_0,$$

sistemi

$$\begin{array}{rcl} J_1\nabla H_0 = & 0 & \\ J_1\nabla H_1 = & K_1 & = J_2\nabla H_0 \\ J_1\nabla H_2 = & K_2 & = J_2\nabla H_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ J_1\nabla H_n = & K_n & = J_2\nabla H_{n-1} \\ & 0 & = J_2\nabla H_n \end{array}$$

sistemler hiyerarşisinin $K = K_1$ gibi bir üyesidir. Ayrıca $H_i$ fonksiyonlarının her biri, her iki Poisson matrisinin tanımladığı Poisson parantezlerine göre birbirleriyle involusyon içindeki

$$\{H_i, H_j\}_{J_1} = \{H_i, H_j\}_{J_2} = 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

hareket sabitleridir. Ayrıca, $K_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$ sistemler hiyerarşisindeki sistemler birbirlerinin simetrisidir.

Uyumlu Poisson matrisleri $J_1$ ve $J_2$ kullanılarak oluşturulan

$$J_1\nabla H_{i+1} = J_2\nabla H_i,$$

tekrar bağıntısının bu matrislerden birinin Casimir fonksiyonundan başlanılarak ardışık olarak kullanılmasıyla bulunan $H_i$ fonksiyonları, bu tekrar bağıntısıyla ortaya çıkan $K_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$ dinamik sistemlerinin entegre edilmesi için gereken hareket sabitleri olmaktadır. Bu nedenle

**Tanım 8 :** Çift-Hamiltonsal dinamik sistemler tamamiyle entegre edilebilirdirler.

# 3. ÇOKLU-HAMİLTONSAL DİNAMİK SİSTEM ÖRNEKLERİ

Bu bölümde çoklu-Hamiltonsal yapıları kurulabilmiş bazı örnek dinamik sistemler derlenmiştir.

## 3.1 Kermack-McKendrick Sistemi

Bu sistem hastalık salgınlarını modellemek üzere ortaya konulmuş olup modelde $S$ ile salgına yakalanabilecek birey sayısı, $I$ ile enfekte olan birey sayısı, $R$ ile de iyileşen/ayrılan birey sayısı gösterilmektedir. Model sabit $a$ enfeksiyon ve $r$ iyileşme oranlarıyla

$$\begin{aligned}
&\dot{S} = -rSI \\
&\dot{I} = rSI - aI \\
&\dot{R} = aI
\end{aligned}$$

dinamik sistemi olarak ortaya konulmuştur (Kermack ve McKendrick 1933). Bu sistemde toplam popülasyon

$$H_1 = R + I + S$$

ve

$$H_2 = R + \frac{a}{r} logS$$

nicelikleri korunmaktadır. Sistem

$$J_1 = rSI \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -rSI & 0 \\ rSI & 0 & -aI \\ 0 & aI & 0 \end{pmatrix}$$

uyumlu Poisson matrisleriyle

$$\begin{aligned} J_1 \nabla H_1 = & \quad 0 & \\ J_1 \nabla H_2 = & \quad K & = J_2 \nabla H_1 \\ & \quad 0 & = J_2 \nabla H_2 \end{aligned}$$

çift-Hamiltonsal bir sistemdir (Nutku 1990).

## 3.2 Henon-Heiles Sistemleri

Henon ve Heiles (1964) sistemi ilk olarak galaksi merkezi etrafında düzlemsel yörüngede hareket etmekte olan yıldızların hareketini modellemek üzere ortaya konulmuştur. Model ilk olarak

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}w_1 q_1^2 + \frac{1}{2}w_2 q_2^2 + a q_1 q_2^2 - \frac{1}{3} b q_1^3$$

Hamilton fonksiyonunundaki sabit parametrelerin $w_1 = w_2 = a = b = 1$ değerleri için ortaya konulmuş olup sonraki çalışmalarda modelin yukarıdaki şekilde parametrize edildiğinde parametrelerin hangi değerleri için entegre edilebilir olduğu çeşitli araştırmaların konusu olmuştur (Aizawa ve Saito 1972, Grammaticos vd. 1982). Yukarıdaki Hamilton fonksiyonunun tanımladığı dinamik sistemin Painleve özelliği gösterdiği parametre değerleri ve bu değerler durumundaki (ilk Hamilton fonksiyonu $H$ ile involusyon içindeki $\{H, K\} = 0$) ikinci hareket sabitleri

i) $b = -6a$, $w_1, w_2$-keyfi,
$K = aq_2^4 + 4a^2 q_1^2 q_2^2 + 4aw_1 q_1 q_2^2 + w_1(4w_1 - w_2)q_2^2 + [(4w_1 - w_2) - 4aq_1]p_2^2 + 4aq_2 p_1 p_2,$

ii) $b=-a,\ w_1=w_2,$

$K=p_1p_2+\frac{1}{3}a(3q_1^2q_2+q_2^3)+w_1q_1q_2,$

iii) $b=-16a,\ w_1=16w_2,$

$K=3p_2^4+6w_1q_2^2p_2^2+12aq_1q_2^2p_2^2-4aq_2^3p_1p_2-4aw_1q_1q_2^4-4a^2q_1^2q_2^4+3w_1^2q_2^4-\frac{2}{3}a^2q_2^6.$

olarak bulunmuştur (Chang vd. 1982). Daha sonra Blaszak ve Rauch-Wojciechowski (1994) yukarıdaki (i) durumunda

$$q_1=\tilde{q}_1-\frac{w_2}{2a}, \qquad q_2^2=\tilde{q}_2^2+(\frac{bw_2}{2a^2}-\frac{w_1}{2a})q_1+(\frac{w_1w_2}{2a^2}+\frac{bw_2^2}{4a^2})$$

(ii) ve (iii) durumlarında ise

$$q_1=\tilde{q}_1+\frac{w_1}{2b}, \qquad q_2^2=\tilde{q}_2^2-\frac{w_1^2}{4ab},$$

dönüşümleriyle $H$ Hamilton fonksiyonundaki $\frac{1}{2}(w_1q_1^2+w_2q_2^2)$ harmonik teriminin kaldırılabileceğini göstererek $c$ keyfi sabit olmak üzere

$$H_1=\frac{1}{2}\left(p_1^2+p_2^2\right)+\frac{1}{2}q_1q_2^2+q_1^3-cq_1$$

ve

$$H_2=\frac{1}{2}\left(p_1^2+p_2^2\right)+\frac{1}{2}q_1q_2^2+q_1^3-\frac{4}{q_2^2}c$$

Hamilton fonksiyonlarıyla verilen iki ayrı genelleştirilmiş Henon-Heiles (gHH1, gHH2) sistemini ortaya koymuşlardır.

Daha sonra ise Blaszak (1999) yukarıdaki genellemelere ek olarak

$$H_3=\frac{1}{2}\left(p_1^2+p_2^2\right)+\frac{1}{2}q_1q_2^2+q_1^3-c_1q_1-(q_1^2+\frac{1}{4}q_2^2)c_2$$

gHH3 ve

$$H_4 = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}q_1 q_2^2 + q_1^3 - \frac{4}{q_2^2}c_1 + \frac{16q_1}{q_2^4}c_2$$

gHH4 genellemelerini de yaparak bu genellemelerin üç-Hamilton yapılarını ortaya koydu.

### 3.2.1 Birinci Henon-Heiles genelleştirimi (gHH1)

Blaszak ve Rauch-Wojciechowski (1994) tarafından verilmiş olan ilk tek-Casimir $c$ Henon-Heiles genellemesi

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ -3q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2 + c \\ -q_1 q_2 \\ 0 \end{pmatrix} = K_1,$$

$$H_1 = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + q_1^3 + \frac{1}{2}q_1 q_2^2 - cq_1$$

Hamilton fonksiyonunun yanısıra

$$F_1 = \frac{1}{2}q_2 p_1 p_2 - \frac{1}{2}q_1 p_2^2 + \frac{1}{16}q_2^4 + \frac{1}{4}q_1^2 q_2^2 - \frac{1}{4}q_2^2 c$$

ve

$$G_1 = c$$

hareket sabitlerine de sahiptir. Bu sistem ve simetrisi

$$\begin{pmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \\ \dot p_1 \\ \dot p_2 \\ \dot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}q_2p_2 \\ \frac{1}{2}q_2p_1 - q_1p_2 \\ \frac{1}{2}p_2^2 - \frac{1}{2}q_1q_2^2 \\ -\frac{1}{2}p_1p_2 - \frac{1}{4}q_2^3 - \frac{1}{2}q_1^2q_2 + \frac{1}{2}q_2c \\ 0 \end{pmatrix} = K_2,$$

uyumlu Poisson matrisleri

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_1 & \frac{1}{2}q_2 & p_1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}q_2 & 0 & p_2 \\ -q_1 & -\frac{1}{2}q_2 & 0 & \frac{1}{2}p_2 & -3q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2 + c \\ -\frac{1}{2}q_2 & 0 & -\frac{1}{2}p_2 & 0 & -q_1q_2 \\ -p_1 & -p_2 & 3q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2 - c & q_1q_2 & 0 \end{pmatrix}$$

ile

$$\begin{aligned} J_1\nabla G_1 = {} & 0 & & \\ J_1\nabla H_1 = {} & K_1 & &= J_2\nabla G_1 \\ J_1\nabla F_1 = {} & K_2 & &= J_2\nabla H_1 \\ & 0 & &= J_2\nabla F_1 \end{aligned}$$

olarak çift-Hamiltonsal bir hiyerarşi oluşturmaktadır.

### 3.2.2 İkinci Henon-Heiles genelleştirimi (gHH2)

Henon-Heiles sisteminin ikinci tek-Casimir $c$ genellemesi

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ -3q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2 \\ -q_1 q_2 - (\frac{2}{q_2})^3 c \\ 0 \end{pmatrix} = K_1,$$

$$H_2 = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + q_1^3 + \frac{1}{2}q_1 q_2^2 - \frac{4}{q_2^2}c,$$

$$F_2 = \frac{1}{2}q_2 p_1 p_2 - \frac{1}{2}q_1 p_2^2 + \frac{1}{16}q_2^4 + \frac{1}{4}q_1^2 q_2^2 + \frac{4q_1}{q_2^2}c,$$

$$G_2 = c$$

hareket sabitleri ve simetrisi

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}q_2 p_2 \\ \frac{1}{2}q_2 p_1 - q_1 p_2 \\ \frac{1}{2}p_2^2 - \frac{1}{2}q_1 q_2^2 - \frac{4}{q_2^2}c \\ -\frac{1}{2}p_1 p_2 - \frac{1}{4}q_2^3 - \frac{1}{2}q_1^2 q_2 + \frac{8q_1}{q_2^3}c \\ 0 \end{pmatrix} = K_2,$$

sistemiyle

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2/q_2 & \frac{1}{2}q_2 p_2 \\ 0 & 0 & 2/q_2 & -4q_1/q_2^2 & \frac{1}{2}q_2 p_1 - q_1 p_2 \\ 0 & -2/q_2 & 0 & 2p_2/q_2^2 & -\frac{1}{2}q_1 q_2^2 + \frac{1}{2}p_2^2 - 4c/q_2^2 \\ -2/q_2 & 4q_1/q_2^2 & -2p_2/q_2^2 & 0 & -\frac{1}{2}p_1 p_2 - \frac{1}{4}q_2^3 - \frac{1}{2}q_1^2 q_2 + 8cq_1/q_2^3 \\ * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}$$

uyumlu Poisson matrisleri kullanılarak

$$\begin{array}{rcl} J_2\nabla H_2 = & 0 & \\ J_2\nabla F_2 = & K_1 & = J_1\nabla H_2 \\ J_2\nabla G_2 = & K_2 & = J_1\nabla F_2 \\ & 0 & = J_1\nabla G_2 \end{array}$$

çift-Hamiltonsal hiyerarşisini ortaya çıkarmaktadır. Yukarıdaki $J_2$ Poisson matrisi ve diğerlerinde $(*)$ ile matrisi antisimetrik yapacak terimler gösterilmiştir.

### 3.2.3 Üçüncü Henon-Heiles genelleştirimi (gHH3)

Henon-Heiles sistemi için Blaszak (1999) tarafından verilmiş olan çift-Casimir $c_1, c_2$ genellemesi

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ -3q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2 + 2q_1c_2 + c_1 \\ -q_1q_2 + \frac{1}{2}q_2c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = K_1,$$

ve simetrisi

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}q_2p_2 \\ \frac{1}{2}q_2p_1 - q_1p_2 \\ \frac{1}{2}p_2^2 - \frac{1}{2}q_1q_2^2 + \frac{1}{4}q_2c_2 \\ -\frac{1}{2}p_1p_2 - \frac{1}{4}q_2^3 - \frac{1}{2}q_1^2q_2 + \frac{1}{2}q_2c_1 + \frac{1}{4}q_1c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = K_2$$

$$H_3 = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + q_1^3 + \frac{1}{2}q_1q_2^2 - c_1q_1 - (q_1^2 + \frac{1}{4}q_2^2)c_2,$$

$$F_3 = \frac{1}{2}q_2p_1p_2 - \frac{1}{2}q_1p_2^2 + \frac{1}{16}q_2^4 + \frac{1}{4}q_1^2q_2^2 - \frac{1}{4}q_2^2c_1 - \frac{1}{4}q_1q_2c_2,$$

$$c_1, c_2,$$

hareket sabitleri ve

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_1 & \frac{1}{2}q_2 & \frac{\partial H_3}{\partial p_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}q_2 & 0 & \frac{\partial H_3}{\partial p_2} & 0 \\ -q_1 & -\frac{1}{2}q_2 & 0 & \frac{1}{2}p_2 & -\frac{\partial H_3}{\partial q_1} & 0 \\ -\frac{1}{2}q_2 & 0 & -\frac{1}{2}p_2 & 0 & -\frac{\partial H_3}{\partial q_2} & 0 \\ -\frac{\partial H_3}{\partial p_1} & -\frac{\partial H_3}{\partial p_2} & \frac{\partial H_3}{\partial q_1} & \frac{\partial H_3}{\partial q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_1^2 + \frac{1}{4}q_2^2 & \frac{1}{2}q_1q_2 & \frac{\partial F_3}{\partial p_1} & \frac{\partial H_3}{\partial p_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}q_1q_2 & \frac{1}{4}q_2^2 & \frac{\partial F_3}{\partial p_2} & \frac{\partial H_3}{\partial p_2} \\ -q_1^2 - \frac{1}{4}q_2^2 & -\frac{1}{2}q_1q_2 & 0 & \frac{1}{2}q_1p_2 & -\frac{\partial F_3}{\partial q_1} & -\frac{\partial H_3}{\partial q_1} \\ -\frac{1}{2}q_1q_2 & -\frac{1}{4}q_2^2 & -\frac{1}{2}q_1p_2 & 0 & -\frac{\partial F_3}{\partial q_2} & -\frac{\partial H_3}{\partial q_2} \\ -\frac{\partial F_3}{\partial p_1} & -\frac{\partial F_3}{\partial p_2} & \frac{\partial F_3}{\partial q_1} & \frac{\partial F_3}{\partial q_2} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial H_3}{\partial p_1} & -\frac{\partial H_3}{\partial p_2} & \frac{\partial H_3}{\partial q_1} & \frac{\partial H_3}{\partial q_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

uyumlu Poisson matrislerinden $(J_1, J_2)$ çiftiyle

$$\begin{array}{rcl} J_1\nabla c_1 = & 0 & \\ J_1\nabla H_3 = & K_1 & = J_2\nabla c_1 \\ J_1\nabla F_3 = & K_2 & = J_2\nabla H_3 \\ & 0 & = J_2\nabla F_3, \end{array}$$

$(J_1, J_3)$ çiftiyle

$$\begin{array}{rcl} J_1\nabla c_1 = & 0 & \\ J_1\nabla H_3 = & K_1 & = J_3\nabla c_2 \\ J_1\nabla F_3 = & K_2 & = J_3\nabla c_1 \\ & 0 & = J_3\nabla H_3, \end{array}$$

ve $(J_2, J_3)$ çiftiyle

$$\begin{array}{rcl} J_2\nabla c_2 = & 0 & \\ J_2\nabla c_1 = & K_1 & = J_3\nabla c_2 \\ J_2\nabla H_3 = & K_2 & = J_3\nabla c_1 \\ & 0 & = J_3\nabla H_3 \end{array}$$

üç farklı şekilde çift-Hamiltonsal hiyerarşi olarak verilmiştir.

### 3.2.4 Dördüncü Henon-Heiles genelleştirimi (gHH4)

Çift-Casimir $c_1, c_2$ ikinci bir genelleme olarak

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ -3q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2 - \frac{16}{q_2^4}c_2 \\ -q_1q_2 - \frac{8}{q_2^3}c_1 + \frac{64q_1}{q_2^5}c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = K_1$$

sistemi ve simetrisi

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}q_2p_2 \\ \frac{1}{2}q_2p_1 - q_1p_2 \\ \frac{1}{2}p_2^2 - \frac{1}{2}q_1q_2^2 - \frac{4}{q_2^2}c_1 + 32\frac{q_1}{q_2^4}c_2 \\ -\frac{1}{2}p_1p_2 - \frac{1}{4}q_2^3 - \frac{1}{2}q_1^2q_2 + 8\frac{q_1}{q_2^3}c_1 + \frac{8}{q_2^3}c_2 - 64\frac{q_1^2}{q_2^5}c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = K_2$$

sistemi,

$$H_4 = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + q_1^3 + \frac{1}{2}q_1q_2^2 - \frac{4}{q_2^2}c_1 + \frac{16q_1}{q_2^4}c_2,$$

$$F_4 = \frac{1}{2}q_2p_1p_2 - \frac{1}{2}q_1p_2^2 + \frac{1}{16}q_2^4 + \frac{1}{4}q_1^2q_2^2 + \frac{4q_1}{q_2^2}c_1 + (\frac{4}{q_2^2} - \frac{16q_1^2}{q_2^4})c_2,$$

$c_1, c_2,$

hareket sabitleri ve uyumlu

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2/q_2 & \frac{1}{2}q_2p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/q_2 & -4q_1/q_2^2 & \frac{1}{2}q_2p_1 - q_1p_2 & 0 \\ 0 & -2/q_2 & 0 & 2p_2/q_2^2 & -\frac{\partial F_4}{\partial q_1} & 0 \\ -2/q_2 & 4q_1/q_2^2 & -2p_2/q_2^2 & 0 & -\frac{\partial F_4}{\partial q_2} & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4/q_2^2 & -8q_1/q_2^3 & \frac{\partial H_4}{\partial p_1} & \frac{\partial F_4}{\partial p_1} \\ 0 & 0 & -8q_1/q_2^3 & (16q_1^2 + 4q_2^2)/q_2^4 & \frac{\partial H_4}{\partial p_2} & \frac{\partial F_4}{\partial p_2} \\ -4/q_2^2 & 8q_1/q_2^3 & 0 & -8q_1p_2/q_2^4 & -\frac{\partial H_4}{\partial q_1} & -\frac{\partial F_4}{\partial q_1} \\ 8q_1/q_2^3 & -(16q_1^2 + 4q_2^2)/q_2^4 & 8q_1p_2/q_2^4 & 0 & -\frac{\partial H_4}{\partial q_2} & -\frac{\partial F_4}{\partial q_2} \\ -\frac{\partial H_4}{\partial p_1} & -\frac{\partial H_4}{\partial p_2} & \frac{\partial H_4}{\partial q_1} & \frac{\partial H_4}{\partial q_2} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial F_4}{\partial p_1} & -\frac{\partial F_4}{\partial p_2} & \frac{\partial F_4}{\partial q_1} & \frac{\partial F_4}{\partial q_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poisson matrislerinin $(J_1, J_2)$ çiftiyle

$$\begin{aligned} J_1\nabla c_1 = &\quad 0 & \\ J_1\nabla F_4 = &\quad K_2 &= J_2\nabla c_1 \\ J_1\nabla H_4 = &\quad K_1 &= J_2\nabla F_4 \\ &\quad 0 &= J_2\nabla H_4, \end{aligned}$$

$(J_1, J_3)$ çiftiyle

$$\begin{aligned} J_1\nabla c_1 = &\quad 0 & \\ J_1\nabla F_4 = &\quad K_2 &= J_3\nabla c_2 \\ J_1\nabla H_4 = &\quad K_1 &= J_3\nabla c_1 \\ &\quad 0 &= J_3\nabla F_4 \end{aligned}$$

ve $(J_2, J_3)$ çiftiyle

$$\begin{array}{rcl} J_2\nabla c_2 = & 0 & \\ J_2\nabla c_1 = & K_2 & = J_3\nabla c_2 \\ J_2\nabla F_4 = & K_1 & = J_3\nabla c_1 \\ & 0 & = J_3\nabla F_4 \end{array}$$

üç farklı çift-Hamiltonsal hiyerarşi olarak verilmiştir.

## 3.3 Kepler Sistemleri

Gezegenlerin yörüngelerini modellemek üzere ortaya konulmuş olan klasik Kepler sisteminin iki ayrı tek Casimir genellemesi yine Blaszak (1999) tarafından verilmiştir.

### 3.3.1 Birinci tek Casimir genelleştirilmiş Kepler Sistemi

Henon-Heiles sistemleri için Blaszak (1999) tarafından verilmiş olan genellemelere benzer olarak Kepler sisteminin bir genelleştirimi olan

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ -\frac{aq_1}{(q_1^2+q_2^2)^{3/2}} \\ -\frac{aq_2}{(q_1^2+q_2^2)^{3/2}} + c \\ 0 \end{pmatrix} = K_1$$

sistemi ve bu sistemin simetrisi olan

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_2p_1 + \frac{1}{2}q_1p_2 \\ \frac{1}{2}q_1p_1 \\ -\frac{1}{2}p_1p_2 + \frac{a}{2}\frac{q_1q_2}{(q_1^2+q_2^2)^{3/2}} + \frac{1}{2}cq_1 \\ \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{a}{2}\frac{q_1^2}{(q_1^2+q_2^2)^{3/2}} \\ 0 \end{pmatrix} = K_2$$

sisteminin

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 - \frac{a}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} - cq_2,$$

$$F = -\frac{1}{2}q_2p_1^2 + \frac{1}{2}q_1p_1p_2 + \frac{1}{2}\frac{aq_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} - \frac{1}{4}cq_1^2,$$

hareket sabitleri ve

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poisson matrisinin Casimir'i $c$ ile ikinci Poisson matrisi

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2q_1 & \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ 0 & 0 & 1/2q_1 & q_2 & \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ 0 & -1/2q_1 & 0 & -1/2p_1 & -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ -1/2q_1 & -q_2 & 1/2p_1 & 0 & -\frac{\partial H}{\partial q_2} \\ -\frac{\partial H}{\partial p_1} & -\frac{\partial H}{\partial p_2} & \frac{\partial H}{\partial q_1} & \frac{\partial H}{\partial q_2} & 0 \end{pmatrix}$$

kullanılarak

$$\begin{array}{rcl} J_1\nabla c = & 0 & \\ J_1\nabla H = & K_1 & = J_2\nabla c \\ J_1\nabla F = & K_2 & = J_2\nabla H \\ & 0 & = J_2\nabla F, \end{array}$$

çift-Hamiltonsal bir hiyerarşi oluşturmaktadırlar.

### 3.3.2 İkinci tek Casimir genelleştirilmiş Kepler Sistemi

Birinci genelleştirime benzer olarak

$$H' = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 - \frac{a}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} - \frac{4}{q_1^2}c,$$

$$F' = -\frac{1}{2}q_2 p_1^2 + \frac{1}{2}q_1 p_1 p_2 + \frac{1}{2}\frac{aq_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} + \frac{4q_2}{q_1^2}c,$$

hareket sabitleri,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poisson matrisinin Casimir'i $c$ ve uyumlu Poisson matrisi

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4q_2/q_1^2 & 2/q_1 & \frac{\partial F'}{\partial p_1} \\ 0 & 0 & 2/q_1 & 0 & \frac{\partial F'}{\partial p_2} \\ 4q_2/q_1^2 & -2/q_1 & 0 & -2p_1/q_1^2 & -\frac{\partial F'}{\partial q_1} \\ -2/q_1 & 0 & 2/p_1/q_1^2 & 0 & -\frac{\partial F'}{\partial q_2} \\ -\frac{\partial F'}{\partial p_1} & -\frac{\partial F'}{\partial p_2} & \frac{\partial F'}{\partial q_1} & \frac{\partial F'}{\partial q_2} & 0 \end{pmatrix}$$

ile

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ -\frac{aq_1}{(q_1^2+q_2^2)^{3/2}} - \frac{8c}{q_1^3} \\ -\frac{aq_2}{(q_1^2+q_2^2)^{3/2}} \\ 0 \end{pmatrix} = K_1$$

sistemi ve simetrisi

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_2p_1 + \frac{1}{2}q_1p_2 \\ \frac{1}{2}q_1p_1 \\ -\frac{1}{2}p_1p_2 + \frac{a}{2}\frac{q_1q_2}{(q_1^2+q_2^2)^{3/2}} + \frac{8q_2}{q_1^3}c \\ \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{a}{2}\frac{q_1^2}{(q_1^2+q_2^2)^{3/2}} - \frac{4c}{q_1^2} \\ 0 \end{pmatrix} = K_2$$

sisteminin

$$\begin{array}{lll} J_1\nabla c = & 0 & \\ J_1\nabla F' = & K_2' & = J_2\nabla c \\ J_1\nabla H' = & K_1' & = J_2\nabla F' \\ & 0 & = J_2\nabla H', \end{array}$$

çift-Hamiltonsal hiyerarşi oluşturduğu Blaszak (1999) tarafından ortaya konulmuştur.

# 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada kanonik Hamilton formalizminden başlanılarak kanonik Poisson parantezleri üzerinde Hamiltonsal bir sistemin inşa edilmesi gözden geçirilmiş, sonra da Poisson parantezlerini tanımlayan özellikler saklı tutularak kanonik olmayan Hamiltonsal dinamik sistemlerin Poisson matrisleri kullanılarak kurulması irdelenmiştir.

Poisson matrisleri kanonik durumdaki simplektik matrislerin gerektirdiği çift sayıdaki faz uzayı değişkeni gerektirmemektedir. Bu durum tek sayıda dinamik değişken barındıran sistemlerin de Hamiltonsal formülasyonuna izin veriyor olması dolayısıyla kanonik formülasyona göre daha geniş bir çerçeve sunmaktadırlar. Bu geniş çerçeve verili bir dinamik sistemin birden çok uyumlu Poisson matrisleriyle yazılmasına da imkan sağlamaktadır.

Literatürdeki birçok dinamik sistemin sistem parametrelerinin hangi değerleri için hareket sabitlerine sahip olduğu öncelikli olarak araştırılmış olup, entegre edilebilmek için yeterince hareket sabitine sahip olan durumların daha sonra çoklu-Hamiltonsal yapılarının da kurulmuş olduğu gözlenmiştir. Bu şekildeki çoklu-Hamiltonsal yapıların kurulumu sırasında gereken Poisson matrisleri, genellikle var olduğu önceden bilinen hareket sabitlerine dayanılarak oluşturulmuştur. Bu açıdan çoklu-Hamiltonsal yazım, dinamik sistemlerde yapısal bütünlük dışında bilinen örnekler için entegre edilebilirlik açısından yeni bir bilgi sunmamaktadır (Pikovski ve Rabinovich 1981, Segur 1980). Ancak çoklu-Hamiltonsal olarak kurulabilen dinamik sistemlerin entegre edilebilirliklerini saklı tutarak genellemeleri için bu çoklu-Hamiltonsal yapılar zemin oluşturabilmektedir.

## KAYNAKLAR


Aizawa, Y. and Saito, N. 1972. On the Stability of Isolating Integrals. I. Effect of the Perturbation in the Potential Function. J. Phys. Soc. Jpn., Vol. 32, pp. 1636-1640.

Arnold, V. I. 1989. Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer, New York.

Blaszak, M. 1998. Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical systems. Springer-Verlag, Heidelberg Berlin.

Blaszak, M. and Wojciechowski, S. R. 1989. Bi-Hamiltonian dynamical systems related to low-dimensional Lie algebras. Physica A, Vol. 155, pp. 545-564.

Blaszak, M. and Wojciechowski, S. R. 1994. A generalized Henon-Heiles system and related integrable Newton equations. J. Math. Phys., Vol. 35 (4), pp. 1693-1709.

Blaszak, M. 1999. Theory of separability of multi-Hamiltonian chains. J. Math. Phys., Vol. 40 (11), pp. 5725-5748.

Chang, Y. F., Tabor, M. and Weiss J. 1982. Analytic structure of the Henon-Heiles Hamiltonian in integrable and nonintegrable regimes. J. Math. Phys., Vol. 23, pp. 531-538.

Goldstein, H. 1980. Classical Mechanics. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Grammaticos, B., Dorizzi, B. and Padjen, R. 1982. Painleve property and integrals of motion for the Henon-Heiles system. Phys. Lett. A., Vol. 89, pp. 111-113.

Henon, M. and Heiles, C. 1964. The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments. Astron. J., Vol. 69, pp. 73-79.

Kermack, W.O. and McKendrick, A.G. 1933. Contributions to the mathematical theory of epidemics–III. Further studies of the problem of endemicity. Proc. R. Soc. A., Vol. 141, pp. 94-122.

Kuś, M. 1983. Integrals of Motion for the Lorenz system. J. Phys. A: Math-Gen., Vol. 16, pp. L689–L691.

Lorenz, E. N. 1963. Deterministic Nonperiodic Flow. J. Atmos. Sci., Vol. 20, pp. 130–141.

Magri, F. 1978. A simple model of the integrable Hamiltonian Equation. J. Math. Phys., Vol. 19, pp. 1156-1162.

Nutku, Y. 1990. Bi-Hamiltonian structure of the Kermack-McKendrick model for epidemics. J. Phys. A: Math. Gen., Vol. 23, pp. L1145-L1146.

Nutku, Y. and Gümral, H. 1990. Poisson structure of dynamical systems with three degrees of freedom. J. Math. Phys., Vol. 34, pp. 5691-5723.

Olver, P. J. 1993. Application of Lie groups to differential equations. Springer-Verlag.

Pikovski, A. S. and Rabinovich, M. I. 1981. Stochastic behavior of dissipative systems. Math. Phys. Rev., Vol. 2, pp. 165-208.

Segur, H. 1980. Solitons and the Inverse Scattering Transform, Lect. Int. School Phys. 'Enrico Fermi', Varenna, Italy.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Bilge Banu KÖK SAYAR

Doğum Yeri : Adana

Doğum Tarihi : 7 Nisan 1981

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dil : İngilizce

**Eğitim Durumu**

Lise : Kocaeli Karamürsel Anadolu Lisesi (2000)

Lisans : Ankara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Fizik Mühendisliği Bölümü (2010)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı (Eylül 2010 - Haziran 2013)