

34384

T.C
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİFLEKS DİŞLİ ZİNCİR BAKLALARINDA
ELASTO-PLASTİK GERİLME ANALİZİ

34384

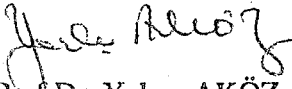
Behçet DAĞHAN


Doktora Tezi

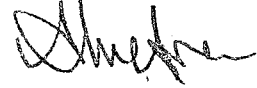
Makina Anabilim Dalı

Bu tez 2.../1994 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**


Prof. Dr. Yalçın AKÖZ
(Üye)


Prof. Dr. Hasan BODUROĞLU
(Üye)


Doç. Dr. Ahmet AVCI
(Danışman)

ÖZET

Doktora Tezi

BİFLEKS DİŞLİ ZİNCİR BAKLALARINDA ELASTO-PLASTİK GERİLME ANALİZİ

Behçet DAĞHAN

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Ahmet AVCI

1994, Sayfa: 114

Jüri: Prof.Dr. Yalçın AKÖZ
Prof.Dr. Hasan BODUROĞLU
Doç.Dr. Ahmet AVCI

Zincirler genellikle değişken yük altında, titreşimli ve darbeli olarak çalışırlar. Zincirlerin en zayıf elemanları baklalar ve rulolardır. Baklaların, kesit değişim bölgelerindeki kritik noktalarda gerilme yığılmaları ve bu yüzden bu bölgelerde plastik deformasyonlar ve çatlamlar olmaktadır. Böylece zincirlerin yorulma ömürleri kısalmaktadır. Dolayısıyla baklalardaki gerilme dağılımı bulunmalı ve kritik noktalar tespit edilmelidir.

Bu çalışmada bifleks dişli zincir baklalarında gerilme analizi yapılarak kritik bölgeler tespit edilmiş ve gerilme dağılımları incelenmiştir. Bir zincir sisteminin ömrünün artırılabilmesi ve daha büyük yükleri taşıyabilmesi için çalışma yüklerine zıt yönde kalıcı gerilmeler oluşturulmuştur. Bu amaçla elasto-plastik gerilme analizi yapılmıştır.

Problemin çözümü için sonlu elemanlar metodu kullanılarak bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Bu program ile gerek elastik bölgedeki, gerekse plastik bölgedeki gerilmeleri hesaplamak mümkündür. Plastik bölgedeki gerilmeleri bulurken von Mises akma kriteri kullanılmıştır. Sonuçlar tablo ve grafikler halinde verilmiştir. Ayrıca epoksi malzemeden zincir baklası numunesi hazırlanarak, fotoelastik metotla deneysel olarak gerilme dağılımı incelenerek, teorik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Bifleks dişli zincir baklası, elasto-plastik gerilme, gerilme yığılması, yorulma ömrü, artık gerilme, sonlu elemanlar metodu, fotoelastik metot.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ELASTO-PLASTIC STRESS ANALYSIS IN BIFLEX SILENT CHAIN PLATES

Behçet DAĞHAN

Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mechanical Engineering

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Ahmet AVCI

1994, Page: 114

Jury: Prof.Dr. Yalçın AKÖZ

Prof.Dr. Hasan BODUROĞLU

Assoc.Prof.Dr. Ahmet AVCI

Power chains usually work under variable loading and with vibration and impact components. Because of these severe working conditions, chain life is limited by the fatigue, and the chain plates are the weakest elements in many cases. The plates fail because of high stress concentrations at the critical points of the pitch holes. Stress distributions on the plates must be analysed and the critical points determined.

In this presented study, elasto-plastic stress analysis have been done on biflex silent chain plates and the stress distributions examined. If the stresses at the critical points can be reduce by reverse residual stresses, the chain life will be increased and the load capacity will be improved.

To solve the problem a computer program was developed by using FEM. This program is aplicable both elastic and elasto-plastic problems. The points in which plastical deformations are ocurred, were determined by von Mises yield criterion. It was found that, a considerable improvement of load capacity can be obtained. The obtained results are given in tabulated and graphical form.

The stress distribution is also found from photoelastic method experimentally. The results are compared with those obtained FEM.

Key words : Biflex silent chain plate, elasto-plastic stress, stress concentration, fatigue life, residual stress, finite element method, photoelastic method.

TEŞEKKÜR

İTÜ İnşaat Fakóltesi Fotoelastisite Laboratuarını yararlanmama sunan ve kıymetli bilgilerinden istifade imkanı bulduğum Sayın Prof.Dr. Yalçın AKÖZ ve Sayın Prof.Dr. Hasan BODUROĞLU'na,

Bu çalıőmanın tamamlanmasında her türlü desteğini esirgemeyen danıőmanım Sayın Doç.Dr. Ahmet AVCI'ya,

Minnet ve Őükranlarımı sunarım.

Behçet DAĞHAN

SEMBOLLER

- A : Üçgen alanı
 a : Akma vektörü
 a,b,c : Gradyen matris elemanları
 B : Gradyen matris
 b : Genişlik; kütle kuvvetleri matrisi
 C : Malzeme rijitlik matrisi; eleman matrisi
 E : Elastisite modülü
 E_T : Elasto-plastik teğetsel modül
 F : Kuvvet
 f : Fonksiyon; akma fonksiyonu
- G : Kayma modülü
 h : Yükseklik
 H' : Sertleşme fonksiyonu
 I : Gerilme invariantı
- i,j,k : Düğüm noktaları
 J : Deviatorik gerilme invariantı; transformasyon determinanı
 K : Toplam rijitlik matrisi; pekleşme oranı
 k : Eleman rijitlik matrisi; gerilme konsantrasyon faktörü
 L_i : Alan koordinatı
 l,m : Doğrultman kosinüsleri
 N : Şekil fonksiyonu
 n : Şekil değiştirme sertleşmesi üsteli
 P : Dış yük
 p,q : Yayılı yük
 Q : Plastik potansiyel
 R : Eleman matrisi
 r,R : Yarıçap
 s,t : Lokal koordinatlar

- t : Kalınlık
 U : Dügüm noktasının deplasmanları
 u : x yönündeki deplasman
 V : Hacim
 v : y yönündeki deplasman
 W : İş
 X, Y, Z : Kütle kuvvetleri; düğüm noktalarının koordinatları
 x, y, z : Kartezyen koordinatlar
 Y : Akma gerilmesi
 α : Lineer enterpolasyon polinomu katsayısı
 δ_{ij} : Kronecker delta
 $d\lambda$: Plastik çarpan
 ε, γ : Şekil değiştirme
 ϕ : Lineer enterpolasyon polinomu; açı
 κ : Pekleşme parametresi
 Λ : Şekil değiştirme enerjisi
 λ, μ : Lamé sabitleri
 ν : Poisson oranı
 Π : Toplam potansiyel enerji
 θ : Açı
 σ : Normal gerilme
 σ' : Deviatorik gerilme
 σ_m : Ortalama gerilme
 τ : Kayma gerilmesi
 ψ : Şekil değiştirme invariantı; artık kuvvet vektörü
 $(\cdot)^{(e)}$: Eleman
 $(\cdot)^T$: Transpoze
 $[\]$: Matris
 $\{ \}$: Sütun matris
 $(\cdot)_e$: Elastik bileşen
 $(\cdot)_p$: Plastik bileşen
 (\cdot) : Genelleştirilmiş, efektif veya eşdeğer

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SEMBOLLER	iv
1. GİRİŞ	1
1.1. Amaç ve Kapsam	4
2. ZİNCİR MEKANİZMALARI	7
2.1. Zincir Tipleri	8
2.1.1. Pernolu zincirler	8
2.1.1.1. Galle zincirleri	8
2.1.1.2. Fleyer zincirleri	9
2.1.2. Burçlu zincirler	9
2.1.3. Rulolu zincirler	10
2.1.4. Dişli zincirler	10
2.1.5. Özel zincirler	12
2.1.5.1. Büyük adımlı zincirler	12
2.1.5.2. Plastik yataklı rulolu zincirler	13
2.1.5.3. Rotary zincirleri	13
2.1.5.4. Blok zincirler	14
2.1.5.5. Mentşeli zincirler	14
2.1.5.6. Çelik pernolu zincirler	14
2.1.5.7. Yana yaylanabilen zincirler	15
2.1.5.8. Boncuklu zincirler	15
3. İZOTROPİK CİSİMLERDE ELASTİSİTE TEORİSİ	17
3.1. Statik Denge Denklemleri	18
3.2. Uygunluk Şartları	20
3.3. Deplasmanlar İçin Diferansiyel Denklemler	21
3.4. Sonlu Eleman Denklemleri	22
3.4.1. Varyasyon prensibi	24
3.4.2. Uygun eleman bileşkeleri	28
4. DÜZLEMDE ELASTO-PLASTİK GERİLME ANALİZİ	30
4.1. Plastisitenin Matematik Teorisi	30
4.1.1. Akma kriterleri	32
4.1.2. Elasto-plastik gerilme-şekil değiştirme bağıntıları	35
4.1.3. Pekleşen malzemede tek eksenli çekme deneyi	37

4.2. Matris Formülasyonu	39
4.3. Sonlu Eleman Denklemleri	40
4.4. Amprik Gerilme-Şekil Değiştirme Eğrisi Denklemleri	42
4.5. Artık Gerilmeler	43
4.6. Gerilme Konsantrasyonu	44
5. SINIR ŞARTLARI	46
5.1. Deplasmanlar	46
5.2. Dış Yükler	46
6. DENEYSEL ÇALIŞMA	52
6.1. Işık, Polarize Işık ve Polariskop	52
6.2. Fotoelastisite Teorisi	56
6.3. Fotoelastik Model Malzemesi Seçiminde Kriterler	58
6.4. Kalibrasyon Metotları	59
6.5. Analiz Teknikleri	61
6.5.1. İzokromatik saçaklar	61
6.5.2. İzoklinik ve izostatik saçaklar	62
6.5.3. Kompensasyon teknikleri	63
6.5.3.1. Babinet-Soleil metodu	63
6.5.3.2. Tardy metodu	64
6.5.4. Ayırma teknikleri	65
6.5.4.1. Kayma farkı metodu	65
6.6. Model İle Prototip Arasındaki Bağlıntılar	67
6.7. Deneyin Yapılışı ve Dikkat Edilecek Noktalar	68
7. NÜMERİK SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME	69
7.1. Giriş	69
7.2. Elastik Gerilmeler	73
7.3. Elasto-Plastik Gerilmeler	92
8. SONUÇLAR	97
KAYNAKLAR	99
Ek A	
A.1. Lineer Enterpolasyon Polinomları	107
A.1.1. Düzlemsel simpleks eleman	108
A.2. Lokal Koordinat Sistemleri	110
A.2.1. Alan Koordinatları	113

1. GİRİŞ

Zincirler yüzyıllardan beri kullanılmaktadır. Bu alanda binlerce gelişme olmasına rağmen çalışma şartlarının sürekli değişmesi zincir üretiminde ve güvenilir olmasında ihtiyaçları artırmıştır. Bilinen en eski zincir tipi yuvarlak baklalı zincirlerdir. Gemi çapaları, vinçler ve benzeri yerlerde daha çok yük taşımak amacıyla kullanılabilen bu tip zincirler hassas yerlerde pek kullanılmazlar. Makina imalinde geniş çapta mafsallı zincirler kullanılır. Mafsallı zincirlerin endüstride önemi XIX. yüzyıl başlarında André GALLE tarafından yapılan zincirle artmıştır.

ABD, Almanya, Japonya ve Türkiye gibi çoğu ülke, ulusal zincir standartlarını yayınlamıştır. Mesela ANSI B. 93, DIN 8150, JIS B. 1801 ve TS 2755 bunlardan bazılarıdır. Sözkonusu standartlar, ISO teknik komitesinin tavsiyesine göre hazırlanmış olduğundan birbirine benzerdir. Standartlarda transmisyon zincirlerinin ve dişlilerinin boyut, tolerans ve mekanik özellikleri, yağlama durumu ve diğer kullanma şartları belirtilmiştir.

Zincirler tek ve çok sıralı olabilirler. Tek sıralı bir zincir, birbirini izleyen iç ve dış baklalardan oluşur. Çok sıralı zincirler de sayıları 12'ye kadar ulaşabilen tek sıralı zincirlerin birleştirilmesiyle oluşturulur. Genellikle değişken yük altında, titreşimli ve darbeli olarak çalışan zincirlerin çok iyi yağlanmaları gerekir. Çalışma şartlarının böyle olmasından dolayı zincir ömrü yorulma ile sınırlıdır. Çok sıralı zincirlerde yük dağılımının üniform olarak sağlanamaması da yorulma ömrünü kısaltan faktörlerden biridir.

Kin ve Dubrovsky (1986), zincir baklalarının yorulma mukavemetini artırabilmek ve bu sayede aynı gücü daha az sıralı ve daha hafif zincirle aktarabilmek

maksadıyla yaptıkları deneysel çalışmalardan oldukça olumlu neticeler elde etmişlerdir [41]. Bu iki bilim adamı, üzerinde çalıştıkları yeni tip zincir baklalarının, konvansiyonel baklalara kıyasla daha hafif ve daha mukavemetli olduğu sonucuna varmışlardır. Fakat çalışmalarını sadece rulolu zincirler üzerinde yoğunlaştırmışlardır.

Peeken ve Coenen (1986), yağ viskozitesinin ve çeşitli katkı maddelerinin rulolu zincirlerin aşınması üzerine etkilerini araştırmışlar ve zincir mekanizmaları için optimal yağlama şartlarını tespit etmeye çalışmışlardır [68,69]. Tomashuns (1985), rulolu zincir mekanizmalarının geometrik hesabıyla ilgili yeni bir metot geliştirmiştir [87]. Hollingworth ve Hills (1986), çelik pernolu zincir mekanizmalarının teorik verimleri ve montaj esnasında ortaya çıkan kuvvetler üzerinde çalışma yapmışlardır [35,36]. Naji ve Marshek (1984), rulolu zincir dişlilerinin basınç açılarının analizini yapmışlardır [57,58]. Fawcett ve Nicol (1980), sabit hız ve yükte çalışan rulolu zincir mekanizmalarının titreşimlerini incelemişler, bu titreşimlerin ve sesin önlenmesi için araştırmalarda bulunmuşlardır. Ayrıca rulolu zincir mekanizmalarında dişrulo çarpışmasına yağlamanın etkisini incelemişlerdir [25,26].

Chew (1985), rulolu zincirlerin çarpışma şiddetine ataletin etkilerini araştırmıştır [17]. Antonescu ve Dix (1975), rulolu zincir baklalarında gerilme dağılımını, üçgen eleman kullanarak sonlu elemanlar metodu ile bulmuş ve fotoelastik sonuçlarla uyum içerisinde olduğunu göstermişlerdir [3,4,5,6]. Eldiwany ve Marshek (1984), zincir ve dişli üzerindeki yük dağılımlarını ve yağlamanın etkisini deneysel ve analitik olarak incelemişlerdir [24]. Mamed-Zade (1979), zincir baklalarının ortasına ilave küçük delikler açarak gerilme dağılımındaki değişimi deneysel olarak araştırmıştır [50].

Chen ve Freudenstein (1988), rulolu zincir mekanizmalarının tam bir kinematik çözümünü elde etmeye çalışmışlardır [16]. Wang ve ark. (1989), rulolu zincir mekanizmalarında zincir atması olayı üzerinde çalışma yapmışlardır [97]. Sueoka ve ark. (1989), yatay olarak gerilmiş bir rulolu zincirin lineer olmayan harmonik ve parametrik rezonanslarını araştırmışlardır [80]. Naji ve Marshek (1989), rulolu zincir baklalarında hatve boşluğunun kuvvet dağılımına etkilerini araştırmışlardır [59]. Bucknor ve Freudenstein (1992), evolvent dişlilerle eş çalışan salıncak pimli dişli zincirlerin kinematik ve statik kuvvet analizini yapmışlardır [14]. El-Shakery (1992), rulolu zincirler ve düzlemsel mekanizmalardan oluşan kombine sistemlerin kinematik analizini

yapmıştır [23]. Wang ve ark. (1992), rulolu zincirlerin aksenel hareketleri esnasındaki titreşimleri ile ortaya çıkan darbelerin şiddeti ile ilgili bir makale yayınlamıştır [96]. Veikos ve Freudenstein (1992) tarafından yayınlanan bir makalede ise rulolu zincir mekanizmalarının dinamik analizi yapılmıştır [91]. Furleigh ve Claar (1991), fleksibl elemanlı yılankavi mekanizmaların analizi ile ilgili bir CAD yöntemi vermişlerdir [30]. Conwell ve ark. (1992), rulolu zincir mekanizmalarındaki yükleri belirlemede kullanılan bir makinanın tasarımını ve üretimini yapmışlardır. Aynı makina ile, rulolu zincir mekanizmalarında rulonun dişliye oturması esnasında oluşan darbe kuvvetini araştırmışlardır [18,19]. Baranyi (1992), rulolu zincir kuvvetlerinin hesabı ile ilgili bir makale yayınlamıştır [8].

Sonlu elemanlar metodu fizik ve mühendislikteki diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bir nümerik prosedürdür. Metot, 1950`li yılların ilk yarısında uzay ve havacılık endüstrisinde doğmuş ve ilk önce Turner ve ark. (1956) tarafından yayın olarak sunulmuştur [89]. Bu yayınlar diğer araştırmacıları teşvik etmiş ve metodun yapı ve katı mekaniğine uygulanmasının çeşitli makalelerde tartışılması sonucunu doğurmuştur. 1963`te Melosh, sonlu elemanlar metodunun, iyi tanınan Raleigh-Ritz prosedürünün gerçek bir varyasyonu olduğunu gösteren önemli bir teorik makale yayınlamıştır [53]. Sonlu elemanlar metodu ile Ritz metodu esas olarak denktirler. Her iki metot da yaklaşık bir çözüm bulabilmek için başlangıç noktası olarak bir yaklaşık fonksiyon seti kullanırlar. Yaklaşık fonksiyonların lineer kombinasyonlarını alırlar ve bunlarla verilen bir fonksiyonel kararlılığı sağlamağa çalışırlar. Metotlar arasındaki temel farklılık, sonlu elemanlar metodundaki kabul edilen yaklaşık fonksiyonların bütün çözüm bölgesi üzerinde tanımlı olmasının ve sınır şartlarını sağlamanınin gerekmemesidir. Fakat yalnızca bazı süreklilik şartlarını sağlması gerekir. Öte yandan Ritz metodu ise bütün bölge üzerinde tanımlı fonksiyonlar kullanır. Sadece basit geometrik şekle sahip bölgeleri inceleyebilir. Sonlu elemanlar metodunda da benzer geometrik sınırlandırmalar vardır. Fakat sadece elemanlar içindir. Basit şekilli elemanlar birleştirilerek çok karmaşık geometriler elde edilebileceğinden sonlu elemanlar metodu, Ritz metodundan çok daha kullanışlıdır.

Yapı problemlerinde sonlu elemanlar metodu, sistemin potansiyel enerjisinin minimizasyonu ile elde edilen bir lineer denge denklem sistemi oluşturur. Sonlu elemanlar metoduyla minimizasyon prosedürünün birleştirilmesi, onun diğer mühen-

dislik alanlarında kullanılmasını sağlar. Metot, Laplace ve Poisson denklemleri ile ifade edilen problemlere uygulanmıştır. Çünkü bu denklemler minimizasyon ile fonksiyonel olarak yakından ilgilidir. Zienkiewicz ile Cheung (1965), Visser (1965) ve Wilson ile Nickell (1966), yayınladıkları eserlerde sonlu elemanlar metodunun kondüksiyon ısı transferine uygulanmasını göstermişlerdir [102,92,99]. Bunun hemen ardından akışkanlar mekaniğine uygulanması gelmiştir. Szabo ile Leé (1969) ve Zienkiewicz (1971) gibi araştırmacıların, yapı mekaniği, ısı transferi ve akışkanlar mekaniği ile ilgili eleman denklemlerinin Galerkin metodu veya en küçük kareler yaklaşımı gibi bir prosedürle de elde edilebileceğini göstermesi ile sonlu elemanlar metodunun uygulama alanı daha da genişlemiştir [82,103]. Bu sayede sonlu elemanlar metodunun herhangi bir diferansiyel denkleme uygulanabilmesi mümkün olmuştur. Sonlu elemanlar metodu, yapı problemlerini çözen bir nümerik prosedürü, bir diferansiyel denklemi veya denklem sistemini çözen genel bir prosedüre dönüştürür. Bu gelişme yüksek hızlı dijital bilgisayarların desteğiyle 15 yıllık bir zaman dilimi içerisinde olmuştur. Sonlu elemanlar metodunun ana fikri şu şekilde ifade edilebilir:

"Sıcaklık, basınç veya deplasman gibi herhangi sürekli bir nicelik, sonlu sayıda parçalardan oluşan ve bu parçalar üzerinde tanımlı parçalı sürekli fonksiyonlar ailesinin oluşturduğu bir model olarak kabul edilebilir."

1960`tan beri hızlı bir gelişme göstererek uygulamada kendine haklı bir yer edinen sonlu elemanlar metoduyla yapılan çalışmalar gün geçtikçe artmış, bu metotla ilgili binlerce makale ve çok sayıda kitap yayınlanmış, çeşitli konferanslar düzenlenmiştir. 1970`li yılların ortalarından bu yana, konuyla ilgili bilgisayar programları da hızla geliştirilmiş ve bilgisayar destekli tasarımın (CAD) fevkalade gelişmesinde önemli rol oynamıştır.

1.1. Amaç ve Kapsam

Zincirlerin en zayıf elemanları baklalar ve rulolardır. Baklalar, deliklerin ve kesit değişim bölgelerinin kritik noktalarındaki gerilme yığılmalarından dolayı hasara uğrarlar. Bu yüzden gerilme dağılımı ve kritik noktalar sağlıklı bir şekilde belirlenmeli ve gereken önlemler ona göre alınmalıdır.

Transmisyon zinciri baklalarında oluşan gerilmeleri bulmak için genellikle iki yol izlenir. Birinci yolda zincir baklası, kalın eğrisel konsol kiriş olarak ele alınır [5]. Bu şekilde bir yaklaşım ancak belirli kritik kesitlerin incelenmesine imkan verir. İkinci yolda ise Lamé'nin düzlem gerilme modeli kullanılır. Bu yolla bütün bakla üzerindeki gerilme dağılımını elde etmek mümkün olur.

Yapılan yayın taramasında bifleks dişli zincirlerle ilgili herhangi bir yayına rastlanmamıştır. Bunun yanında diğer transmisyon zincirleri ile ilgili bir takım çalışmaların olduğu saptanmıştır.

Bu çalışmada, bifleks dişli zincir baklalarında yorulma ömrünü ve bakla mukavemetini artıracak şekilde artık gerilmeler oluşturmak amacıyla elasto-plastik gerilme analizi yapılmıştır. Plastik şekil vererek oluşturulan artık gerilmelerin mukavemete olan etkisi araştırılmıştır. Elasto-plastik analizin yanında hem nümerik ve hem de fotoelastik yollarla elastik gerilme analizi de yapılmıştır. Bunların yanında rulolu zincir baklalarına ait elastik gerilme dağılımları bulunmuş ve literatürde verilen çözümlerle karşılaştırma olanağı kullanılmıştır. Ayrıca fotoelastik modelden elde edilen sonuçlarla da kıyaslama yapılmıştır.

İleri teknoloji ile yapılan mühendislik üretimleri üzerindeki ekonomik baskı sürmektedir. Sonlu elemanlar metodunun, tasarımların ilerlemesindeki ivmelendirici rolünü önümüzdeki yıllar gösterecektir. Şüphesiz ki sonlu elemanlar metodu, mühendislik problemlerinin analizinde kabul görmüş bir vasıta olmuştur. Bizim çalışmamızda da problemin çözümünde sonlu elemanlar metodundan yararlanılmış ve gerekli bilgisayar programı geliştirilmiştir.

Sonlu elemanlar metoduyla problemleri çözerken birçok değişik elemandan yararlanılabilir. Çalışmamızda ise lineer üç düğümlü üçgen elemanlar kullanılmıştır. Bu elemanlar çeşitli sebeplerden dolayı yaygın olarak kullanılırlar. Teorik olarak basittirler. Düzensiz sınırlara istendiği gibi uydurulabilirler. Diğer bir önemli sebep ise bu elemanlar için yapılmış birçok hazır bilgisayar programının bulunmasıdır. Yüksek mertebeli elemanlarla çalışmak istenirse işlemleri çok karmaşık hale getiren nümerik integrasyona ihtiyaç duyulmaktadır [76].

Lineer enterpolasyon fonksiyonlarının belirli bir dezavantajı, gradyenlerinin x ve y nin bir fonksiyonu olarak elde edilememesidir. Gradyen veya gradyene bağlı herhangi bir büyüklük, bir eleman üzerinde sabit değere sahiptir. İstenen büyüklüğün

bir düğüm noktasındaki değerini elde edebilmek için değişik ortalama bulma teknikleri kullanılmıştır. Mesela bunlardan birisi, düğüm noktasını çevreleyen her bir elemandaki gradyen değerlerinin ortalamasını kullanır. Düğüm noktalarındaki eleman bileşmelerini bulmak için en doğru yol, birleşik yaklaşım teorisini (conjugate approximation theory) kullanmaktır [62]. Bu teori, skaler veya vektörel bir büyüklük için eleman bileşke değerlerini, yaklaşım polinomuna uygun olarak elde eder.

Elasto-plastik gerilme analizi yaparken gerilme-şekil değiştirme eğrileri için verilmiş olan ampirik denklemlerden yararlanılmıştır. Akmanın başladığı gerilme seviyesini belirlerken de von Mises akma kriteri gözönüne alınmıştır.

Gerek elastik bölgedeki, gerekse plastik bölgedeki gerilmelerin bulunmasında kullanılmak üzere "Microsoft AmigaBASIC" kodlama dilinde bir bilgisayar programı geliştirilmiş ve araştırmacının kişisel bilgisayarında çalıştırılmıştır. Programın doğru sonuçlar verdiği, kesin çözümü bilinen problemlerle kanıtlanmıştır. Hazırlanmış olan program, her türlü düzlem gerilme problemlerine uygulanabileceği gibi, düzlem şekil değiştirme problemlerine de uygulanabilir. Bununla beraber, malzeme özellikleri matrisi tanımlandığı takdirde kompozit malzeme problemlerine de uygulama olanağı vardır.

2. ZİNCİR MEKANİZMALARI

Kuvvet makinalarının nominal devir sayılarına karşılık gelen güçleri sabit olduğundan açısal hız değişmedikçe döndürme momentleri de sabit kalacaktır. Ama makinalarda, çeşitli çalışma şartlarına göre değişen döndürme momenti ve devir sayılarına ihtiyaç vardır. Aynı motordan değişik moment ve değişik devir sayısı elde edebilmek için çeşitli mekanizmalar kullanılmaktadır. Bu mekanizmalardan birisi de zincir mekanizmalarıdır. Zincir mekanizmalarının da diğerlerinin olduğu gibi kendine özgü bazı avantaj ve dezavantajları vardır. Bunlar başlıca şu şekilde sıralanabilir:

a. Oldukça uzak mesafelere (8 m'ye kadar) güç ve hareket iletirler. Yaygın olarak 100 kW'a kadar güç iletimi yapabilen zincirlerin birkaç yüz kilowatt güç iletkenleri de vardır.

b. Sistem şekil bağı olduğu için istenen çevrim oranını tam olarak sağlarlar ve sekize kadar olan çevrim oranları elde edilebilir.

c. Aynı anda birden fazla mile hareket iletirler.

d. Sıcaklık, pislik, toz ve rutubet gibi değişik çalışma şartlarında çok iyi bir performans gösterirler.

e. Oldukça iyi bir verime sahiptirler. Bu değer

zincirlerde $\eta = 0,96...0,98$

dişli çarklarda $\eta = 0,97...0,99$

kayış-kasnak mekanizmalarında $\eta = 0,98$

sürtünmeli çarklarda $\eta = 0,70...0,95$

şeklindedir.

- f. Oldukça ağır ve pahalı bir konstrüksiyondur.
- g. Kütlesel atalet kuvveti, darbe ve titreşim gibi sebeplerden dolayı gürültülü olarak çalışırlar.
- h. Dikkatli bir montaj ve bakım gerektirir.
- i. Kinematik yapısından dolayı iletilen harekette küçük dişlilerde kendini gösteren bir süreksizlik vardır.

Teknikte zincirler çekme, kaldırma ve güç ile hareket iletme maksatlarıyla kullanılır. Kendisine geniş bir uygulama alanı bulmuş olan zincirlerin kullanıldığı yerlerden bazılarını sıralamak istersek şunları yazabiliriz. Ziraat makinaları, bisikletler, motosikletler, takım tezgahları, konveyörler, elevatörler, paketleme makinaları, kömür ve taş kırıcılar, petrol kuyusu makinaları, karıştırıcılar, madencilik, tekstil makinaları, taşıma makinaları, otomatik distribütörler, alternatörler, jeneratörler, blowerler, fanlar, tuğla ve kiremit makinaları, ekskavatör ve loderler, kren ve vinçler, kağıt imali, matbua makinaları, pülverizatörler, hadde tezgahları, lastik imalat makinaları, plastik endüstrisi, elekler, tel çekme makinaları, ağaç işleri ve ciltçilik.

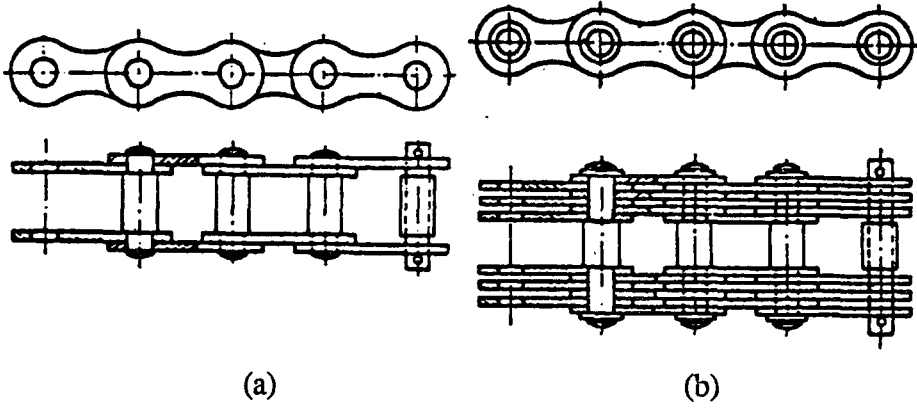
2.1. Zincir Tipleri

2.1.1. Pernolu zincirler

İç ve dış baklaları bir perno ile birleştirilen ve burç ile rulo gibi elemanları bulunmayan bu zincirlerin iki çeşidi vardır.

2.1.1.1. Galle zincirleri

Şekil 2.1'de görülen bu zincirler tahrik mekanizmalarında güç iletmede kullanılmazlar. Galle zincirleri, pislığe, bakımsızlığa ve montaj hatalarına karşı diğer zincirler kadar hassas olmadıklarından daha çok yük kaldırmada ve taşımada kullanılırlar. Bu zincirler, burçlu veya rulolu zincirlerden daha çok yük taşırlar.



Şekil 2.1. Galle zincirleri

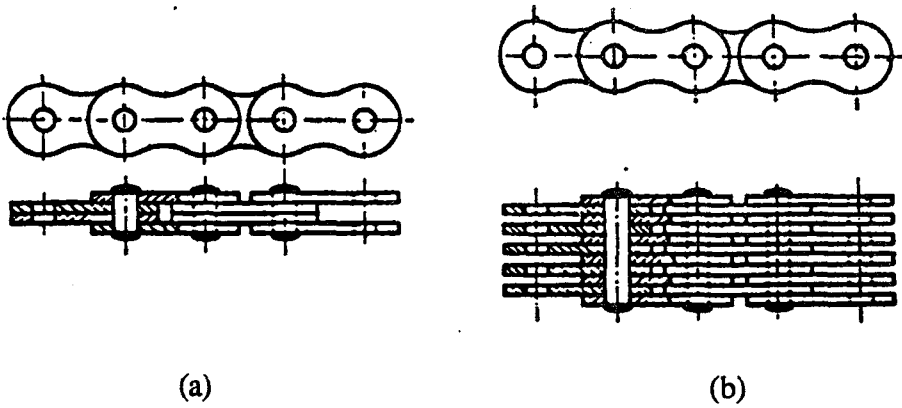
a) Hafif tip b) Ağır tip

2.1.1.2. Fleyer zincirleri

Şekil 2.2'de görülen ve Galle zincirlerinin bir çeşidi olan fleyer zincirlerinin yük taşıma kabiliyeti, Galle zincirlerine nazaran daha yüksektir. Bu zincirlerin, pernoları baklalara sıkı geçme olduğundan bir dişli çark etrafında dönmeleri mümkün değildir. Sadece çekici veya yük kaldıracı olarak kullanılırlar.

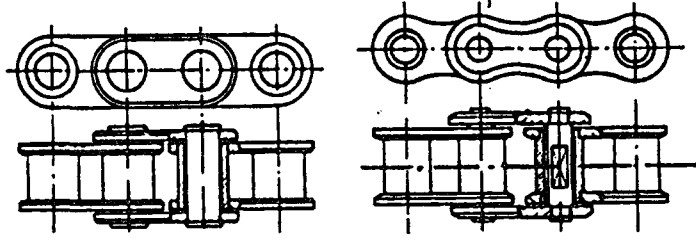
2.1.2. Burçlu zincirler

Bu zincirlerde iç baklalar birbirlerine burçlar vasıtası ile sıkı olarak tutturulurlar. Burçların içinden geçen pernolar da dış baklalara sıkı olarak tutturulurlar (Şekil 2.3). Böylece yüzey basıncı, daha büyük yüzeyi olan pernoya gelir. Çalışma sırasında



Şekil 2.2. Fleyer zincirleri

a) Dar tip b) Geniş tip



Şekil 2.3. Burçlu zincirler

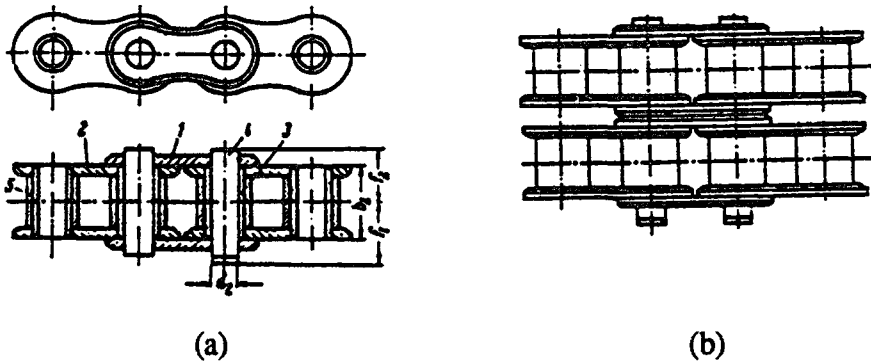
büyük kaymaların ve buna bağlı olarak aşınmaların meydana geldiği bu zincirler iyi bir yağlamayı gerektirirler.

2.1.3. Rulolu zincirler

Burç, perno, rulo, dış bakla ve iç bakla gibi elemanlardan oluşurlar (Şekil 2.4). Burç, iç baklaya ve perno da dış baklaya preslenmiştir. Rulo ise dişlinin aşınmasını önlemek gayesi ile burç üzerine boşluklu olarak takılmıştır.

2.1.4. Dişli zincirler

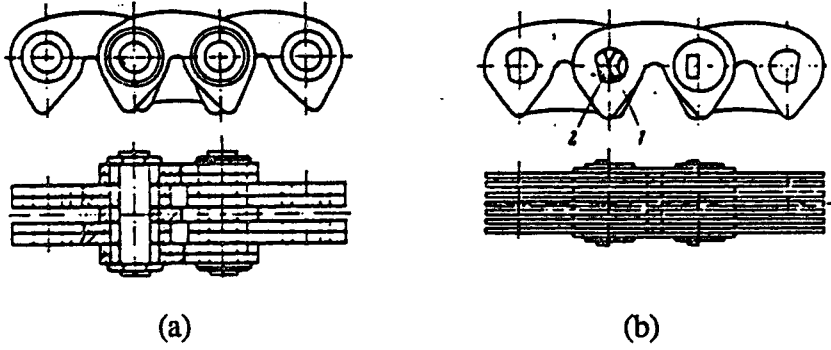
Sessiz zincir olarak da bilinen bu zincirlerin baklalarının bir tarafı diş şeklindedir. Profil açısı 60° olan dişlerin profilleri doğrusaldır. Baklalar birbirlerine bir pim ile bağlanmıştır (Şekil 2.5). Diğer zincirlere göre daha dikkatli bakım isteyen bu zincirler aynı zamanda daha pahalıdır. Yüksek hızlarda gürültüsüz olarak çalışı-



Şekil 2.4. Rulolu zincirler

a) Tek sıralı

b) Çok sıralı

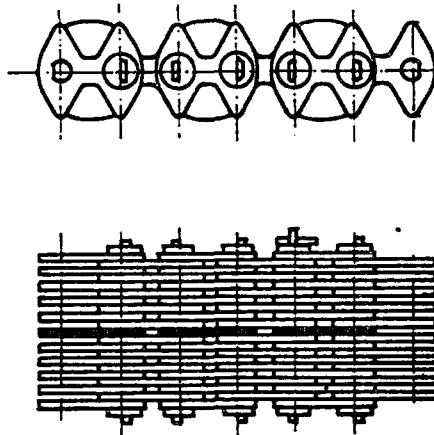


Şekil 2.5. Dişli zincirler

a) Tek pimli b) İki pimli

bilirler. Zincirlerin çarktan atmaması için merkezlemesi yapılır. Bu zincirlerin çalışma kabiliyeti baklaları birleştiren pimin şekli ile de ilgilidir. En basit şekil, pimin doğrudan doğruya baklalara takılmasıdır. Eğer pim baklalara preslenmiş bir burca takılırsa hem pimdeki hem de baklalardaki temas yüzeyi büyütülmüş ve dolayısıyla aşınma azaltılmış olur. Bunların dışında iki parçalı burç da kullanılmaktadır. Bu sayede de aşınmalar geniş çapta önlenmektedir. Son zamanlarda tek pim yerine iki parçalı pimler de kullanılmaktadır. Bu iki parçanın temas yüzeyleri arasında kayma yerine dönme hareketi meydana geldiğinden büyük bir hareket serbestisi ve çok iyi bir aşınma direnci elde edilebilir. Bu zincirler, çarka sarılma yönüne zıt olarak katlanamazlar. Dolayısı ile dişli zincirler, çeşitli yönlerde dönen milleri birbirine bağlamakta kullanılamazlar.

Sessiz zincirlerin bifleks olan tipleri de vardır (Şekil 2.6). Bifleks, her iki tarafa da katlanabilen demektir. Bu türle, zincir mekanizmaları alanında bir boşluk doldurulmuştur. Bugüne kadar, birbirine karşı çalışan millerde zincir kullanılmaktan kaçınılırdı. Bifleks dişli zincirler, çeşitli yönlerde dönen milleri birbirine bağlamakta kulla-



Şekil 2.6. Bifleks dişli zincir

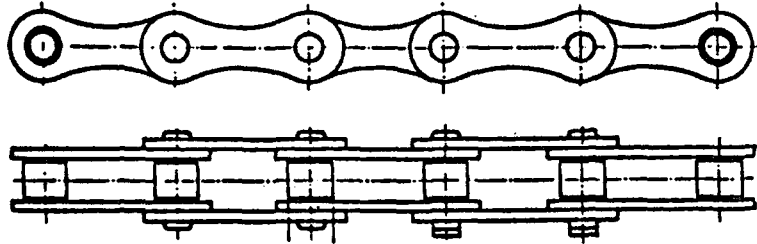
nılabilirler. Çünkü dişliden dişliye S şeklinde takılabilirler. Geri sarılmadan dolayı çalışmada bir zorlanma olmaz ve dıştan içe doğru normal olarak gerdirilebilirler.

Bifleks dişli zincir baklaları, iki parçalı pimlerle birbirlerine bağlanmışlardır. Her iki pim parçası aynı profile sahiptir ve büyük bir dönme yarıçapı vardır. Kayma sürtünmesi ortadan kaldırılmıştır. Her iki mafsal parçası simetrik olarak monte edilmiştir. Pimler arasında çok az bir boşluk vardır. Fakat bu durum zincirin fonksiyonunu yerine getirmesine mani değildir. Zincir baklasının profili tam simetrik formda olduğundan tercih edilen bir çalışma yönü yoktur. Normal diş profilleri ile kıyaslanırsa profil, bölüm dairesinden sonra daralır ve böylece kuvvetli bir profil kaydırması elde edilir. Bu yüzden bu zincirler, normal zincir dişlilerinde kullanılamazlar. Zincir, 18 dişi bulunan bir dişliye bile iki yönde sarılabilir ve mekanizma yüksek hızda dahi gürültüsüz ve düzgün çalışır. Bifleks dişli zincirler valsler, tekstil ve plastik makinaları, genel makina ve mekanizma üretiminde kullanılırlar.

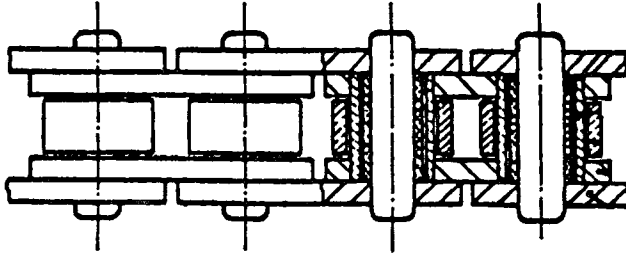
2.1.5. Özel zincirler

2.1.5.1. Büyük adımlı zincirler

Özel ihtiyaç halinde büyük adımlı rulolu zincirler yapılır (Şekil 2.7). Bunların adımı, normal adımlardan biraz fazladır. Az yüklenen ana milden güç alan yan tahriklerde kullanılır. Perno, burç ve rulo gibi elemanları normal zincirlerin aynıdır. Ancak baklaları daha uzundur.



Şekil 2.7. Büyük adımlı zincir



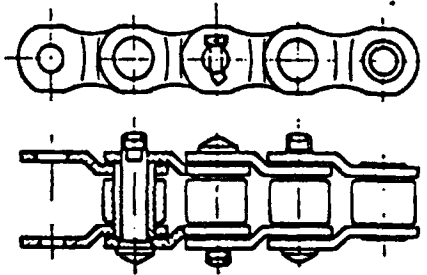
Şekil 2.8. Plastik yataklı rulolu zincir

2.1.5.2. Plastik yataklı rulolu zincirler

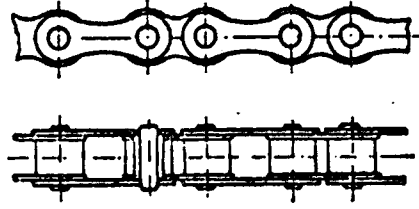
Bu tip zincirler son zamanlarda bir hayli yaygınlaşmıştır (Şekil 2.8). Düzgün aralıklarla yağlamanın mümkün olmadığı veya yağlamanın istenmediği (gıda ve tekstil endüstrisi) veya zincirin su içinde çalışmaya mecbur olduğu yerlerde bu zincirler kullanılır. Fakat ziraat makinaları gibi fazla pislikli ortamlarda çalışan mekanizmalarda iyi sonuç vermemektedirler.

2.1.5.3. Rotary zincirleri

Rotary tip zincirler, rulolu zincirin özel bir şeklidir (Şekil 2.9). Bu zincirlerde kademeli bir bakla cinsi kullanılır. Elastik olduğundan ve aynı zamanda kolay sökülüp takılabildiğinden petrol sondaj makinaları, ekskavatör ve inşaat makinalarında kullanılırlar.



Şekil 2.9. Rotary zincir



Şekil 2.10. Blok zincir

2.1.5.4. Blok zincirler

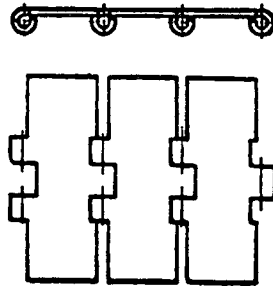
Bu tip zincirlerde dişli çarkın dişlerinin gireceği bakla grupları arasına ya bir ikinci rulo (Şekil 2.10), ya bir çelik blok veya bir sac lamel paketi konmuştur. Yük kaldırma tekniğinde kullanılan bu zincirler standartlaştırılmamıştır.

2.1.5.5. Mentşeli zincirler

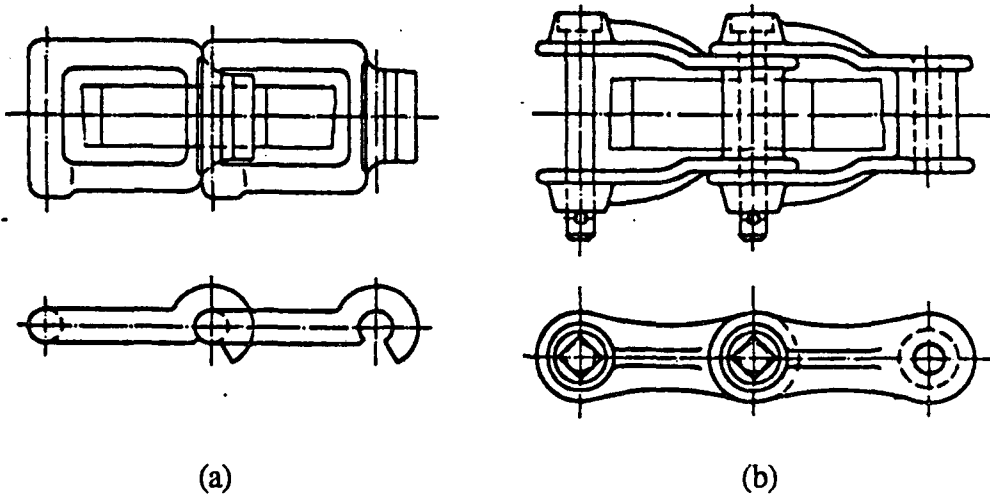
Standartlaştırılmış olan bu zincirler, menteşe şeklindeki çelik sacların yuvarlatılmış uç kısımlarından geçen çelik pernelarla birleştirilir (Şekil 2.11). Yuvarlatılmış uç kısımlar, dişli çarklardaki özel yuvalara oturur. Şişe yıkama ve doldurma işlerinde kullanılır.

2.1.5.6. Çelik pernelü zincirler

Mafsallar temper dökümden ve pernelar yüksek mukavemetli takım çeliğindedir. Bunlar büyük yükler taşıyabildikleri gibi aşınmaya karşı da dirençleri çok fazladır. Açık ve kapalı biçimde imal edilmektedir (Şekil 2.12). Standartlaştırılmış olan bu zincirler düşük hızlarda ($v < 3, \dots, 4$ m/s) kullanılmaktadır.



Şekil 2.11. Mentşeli zincir



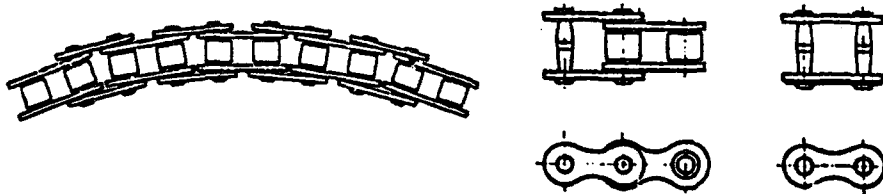
Şekil 2.12. Çelik pernolu zincir
a) Açık b) Kapalı

2.1.5.7. Yana yaylanabilen zincirler

Hava alanlarındaki yolcu bagajlarını sevk eden bantlar gibi transport makinalarında bir kavis çizerek yana doğru dönmek mecburiyeti olduğundan, böyle yerlerde yana yaylanabilen zincirler kullanılır (Şekil 2.13).

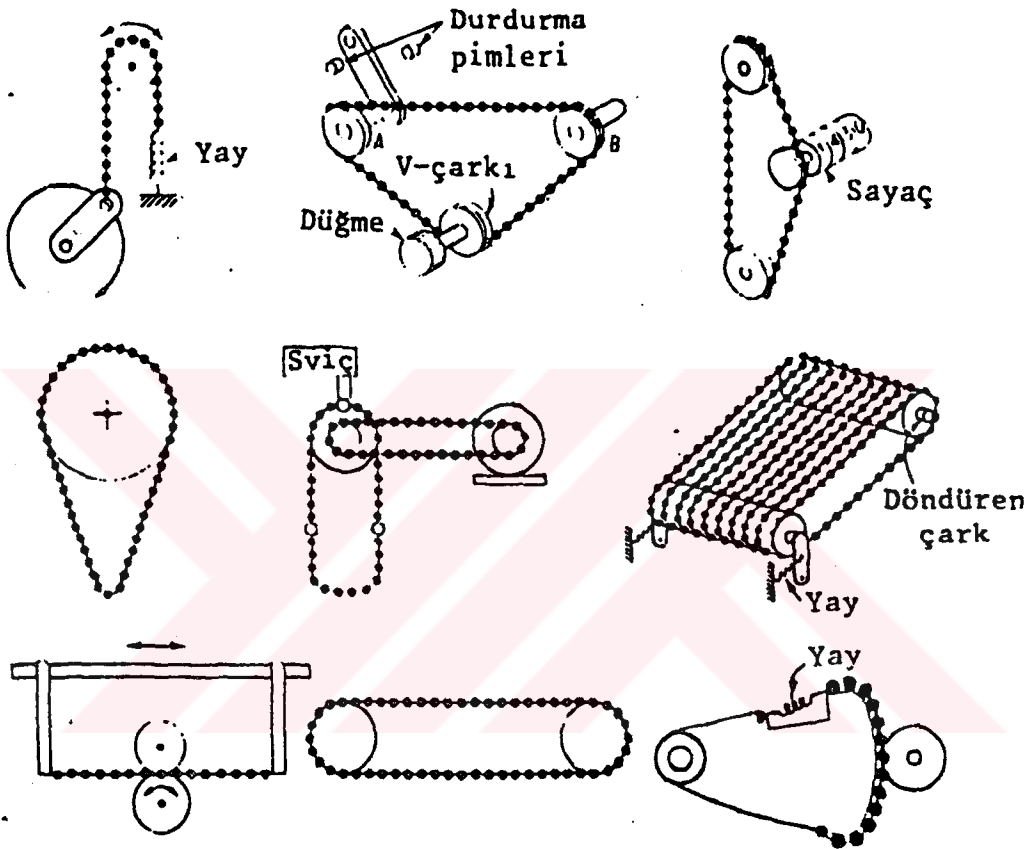
2.1.5.8. Boncuklu zincirler

Hafif işletme şartlarında çalışan ve çok az güç ileten hassas cihaz tekniği, otomatik kontrol sistemleri ve mekanik hesap makinaları gibi yerlerde boncuk şeklinde zincirler kullanılmaktadır (Şekil 2.14). Yalnız dönme hareketi iletmek için değil, dönme hareketlerini öteleme hareketine çevirmek ve büyük çevrim oranları elde etmek için kullanılır. Nispeten büyük imalat ve montaj hatalarını karşılayan bu zincirler basit ve ekonomik hareket iletme elemanlarıdır. Birbirlerine mafsallı olarak bağlanmış



Şekil 2.13. Yana yaylanabilen zincir

küresel elemanlardan oluşan bu zincirler, benzer şekilde yiv açılmış çarklar ile veya zincir dişlileri ile eş çalışır. Boncukları birbirine bağlayan elemanlar metal, ipek, naylon veya diğer plastik malzemeden yapılmış iplerden olabilir. Bu zincirler aynı zamanda, sistemin diğer elemanlarının hasara uğramaması için emniyet görevi de görürler.



Şekil 2.14. Boncuklu zincirler

3. İZOTROPİK CİSİMLERDE ELASTİSİTE TEORİSİ

Elastite teorisi, deforme olmuş tam elastik cisimlerdeki gerilme ve şekil değiştirmeleri hesaplama metotları ile ilgilidir. Bir malzeme, kuvvet uygulandığında ani olarak şekil değiştiriyor ve kuvvet kaldırıldığında da eski şeklini alıyorsa bu malzeme tam elastiktir. Teorik olarak, cismin homojen ve izotropik olduğu, gerilme ve şekil değiştirmeler arasında lineer bir bağıntı bulunduğu ve şekil değiştirmelerin sonsuz küçük olduğu kabul edilir. Bundan dolayı gerilmelerin ve deformasyonların süperpozisyonları yapılabilir ve hesaplamalarda cismin ilk şekli ve ilk boyutları kullanılabilir.

Gerilmelerin tam bir çözümünü elde edebilmek için şunların bulunması gerekir [40] :

a. İç ve dış kuvvetler arasında denge denklemleri. Burada cismin sınır şartları bilinmelidir.

b. Deformasyon geometrisini tanımlayan süreklilik veya uygunluk denklemleri.

c. Gerilme ve şekil değiştirmeler arasındaki genel bağıntular.

Birinci şart, bir statik problemdir. İkincisi ise şekil değiştirmelerle ilgilidir. Üçüncü şart ise verilen malzemenin elastik deformasyonunun deneysel gözlemlerine dayanır.

Özel bir problemin tam çözümünü matematiksel olarak elde etmek her zaman mümkün olmaz. Böyle hallerde, çözümü elde edebilmek için uygunluk şartları ile ilgili bazı kabuller yapılır ve deneylerden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılır. Biz buna "Malzemelerin Mukavemeti (Strength of Materials)" diyoruz. Örneğin, yanal olarak yüklenmiş bir kirişteki normal gerilmeleri ve kayma gerilmelerini hesaplarken, eğilmeden önce düzlem olan kesitlerin, eğilmeden sonra da düzlem kalacağı kabulü

yapılır. Daha sonra normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri, denge denklemlerinden hesaplanır. Kesitlerin çarpılmasını ihmal ederek yapılan bu çözüm her ne kadar matematiksel ya da fiziksel olarak doğru değilse de, bulunan gerilme değerlerinin ve kiriş sehimlerinin, deneyle karşılaştırıldığında, oldukça doğru olduğu görülür. Bütün böyle durumlarda, sonuçların doğruluğu deneylerle çek edilmelidir.

Elastik sabitler basit deneylerle elde edilirler. Young modülü (elastisite modülü) E ve rijitlik modülü G, deneysel olarak bulunur. Daha sonra Bulk modülü K, Poisson oranı ν vb. bunlardan türetilir [40].

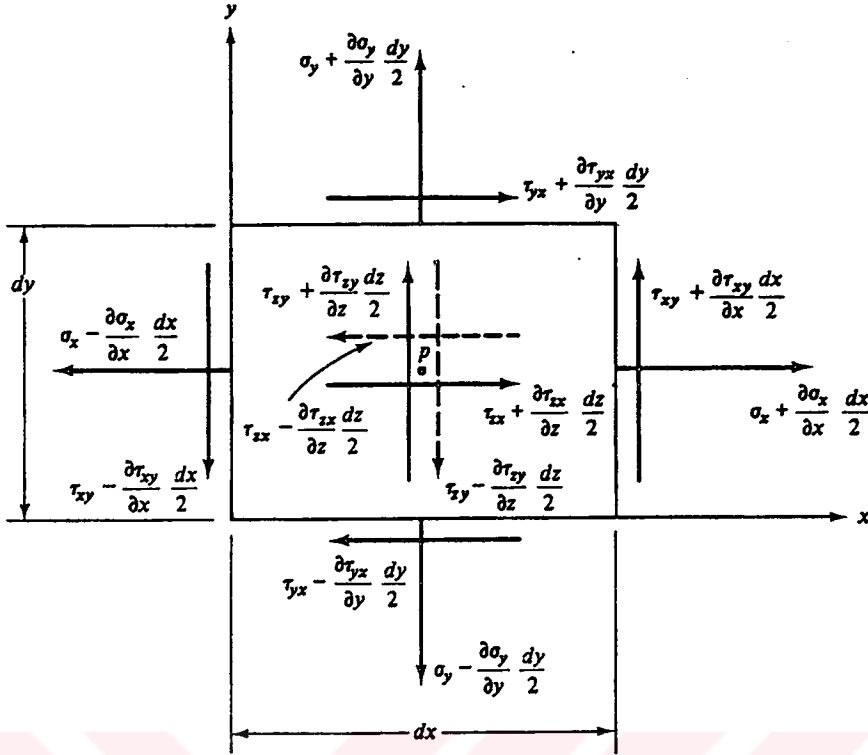
3.1. Statik Denge Denklemleri

Gerilme halinde bir elastik cismin dengesi, gerilme bileşenleri için yazılmış olan üç kısmi diferansiyel denklem tarafından belirlenir. Bu denklemler X, Y, ve Z gibi kütle kuvvetlerinin tesir ettiği bir hacim elemanı için kuvvet dengelerinin yazılmasından elde edilir. Elemana etkiyen kuvvetler, eleman yüzeylerinin sonsuz küçük alana sahip olduğu kabulünü yaptıktan sonra, eleman merkezlerindeki gerilmelerin yüzey alanları ile çarpımından elde edilir. Üç doğrultudaki kuvvetlerin toplamından

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemleri düzlem gerilme hali için yazacak olursak

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0\end{aligned}\tag{3.2}$$



Şekil 3.1. x-y düzleminde bulunan bir noktadaki gerilmelerin dengesi

elde edilir (Şekil 3.1). Cisme etki eden yüzey kuvvetleri gözönüne alınarak bu denge denklemleri için sınır şartları yazılabilir. Birim alana gelen bu yüzey kuvvetlerinin bileşenleri $\bar{\sigma}_x$ ve $\bar{\sigma}_y$ ile gösterilirse yüzeydeki herhangi bir noktada

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m \quad (3.3)$$

$$\bar{\sigma}_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m$$

yazılabilir [37,39]. Burada l ve m , yüzey normalinin doğrultman kosinüsleridir.

3.2. Uygunluk Şartları

Düzlem gerilme halinde denge denklemlerinin, sınır şartlarını sağlayacak şekilde çözülmesi gerekir. İki denge denklemi, üç tane bilinmeyen (gerilme bileşeni) içerdiğinden bu üç bilinmeyenin bulunması için cismin elastik şekil değiştirmesinin de gözönüne alınması gerekir. x ve y eksenlerine paralel deplasmanlar sırasıyla u ve v ile gösterilecek olursa cismin bir noktasındaki şekil değiştirmeler

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifadeler kullanılarak

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

türevleri alınabilir. Buradan da şekil değiştirmeler arasındaki uygunluk şartları

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.6)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z}$$

şeklinde ifade edilen diferansiyel denklemler olarak elde edilir.

3.3. Deplasmanlar İçin Diferansiyel Denklemler

Düzlem gerilme halinde, (3.2) denge denklemlerini ve (3.3) sınır şartlarını gözönüne alarak üç deplasman bileşeni için iki diferansiyel denklem elde edilebilir. Önce gerilme bileşenleri yerine, şekil değiştirme bileşenleri yazılır. Daha sonra da şekil değiştirme terimleri, (3.4) bağıntıları kullanılarak deplasmanlar cinsinden ifade edilir.

Sonuçta

$$\nabla^2 u + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{X}{\mu} = 0 \quad (3.9)$$

$$\nabla^2 v + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{Y}{\mu} = 0$$

diferansiyel denklemleri elde edilir [37]. Burada ∇^2 ,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

şeklinde ve Lamé sabiti olan μ ise

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (3.10)$$

şeklindedir. Sınır şartları da

$$F_x = \lambda \psi l + \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} l + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) m \right] \quad (3.11)$$

$$F_y = \lambda \psi m + \mu \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} m + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) l \right]$$

olarak yazılır. Burada F_x ve F_y yüzey kuvvetlerini göstermektedir. λ ise

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.12)$$

şeklinde verilen diğer Lamé sabitidir. Şekil değiştirme invariantı olan ψ de

$$\psi = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (3.13)$$

şeklindedir.

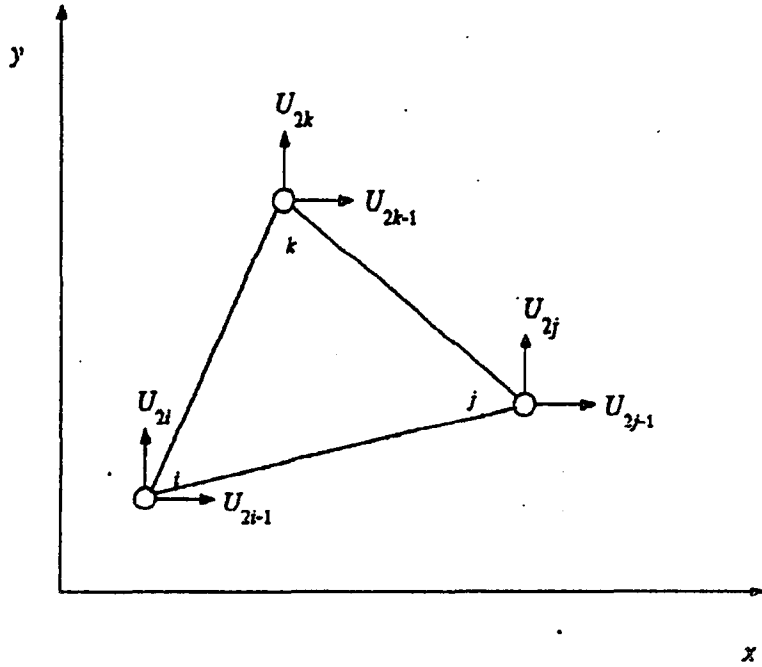
3.4. Sonlu Eleman Denklemleri

Sonlu elemanlar metoduyla problemleri çözerken birçok değişik elemandan yararlanılabilir. Çalışmamızda ise lineer üç düğümlü üçgen elemanlar kullanılmıştır. Bu elemanlar çeşitli sebeplerden dolayı yaygın olarak kullanılırlar. Teorik olarak basittirler. Düzensiz sınırlara istendiği gibi uydurulabilirler. Diğer bir önemli sebep ise bu elemanlar için yapılmış birçok hazır bilgisayar programının bulunmasıdır. Yüksek mertebeli elemanlarla çalışmak istenirse işlemleri çok karmaşık hale getiren nümerik integrasyona ihtiyaç duyulmaktadır [76].

Düzlemsel elastisite problemlerine, altı deplasman bileşeni bulunan simpleks üçgen eleman uygulanabilir (Şekil A.2). Elemandaki u ve v deplasmanları aşağıdaki şekilde verilir [76].

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Buradaki düğüm deplasmanları Şekil 3.2'de gösterildiği gibidir ve şekil fonksiyonları ise Ek A'da tanımlanmıştır. xy düzleminde bulunan bir bölgede düzlem gerilme halinde meydana gelebilecek gerilme ve şekil değiştirme bileşenleri



Şekil 3.2. Düzlemsel simpleks elemandaki deplasman bileşenleri

$$\{\sigma\}^T = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}]$$

ve

$$\{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}]$$

şeklinde. Burada $\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ dır. Aynı zamanda γ_{yz} ve γ_{xz} de sıfırdır. Fakat ε_{zz} sıfır değildir.

Denklem (3.4), Denklem (3.14)'deki deplasman bağıntılarına uygulanırsa

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.15) denklemi $\{\varepsilon\} = [B]\{U\}$ şeklinde gösterilecek olursak, burada $[B]$ gradyen matrisi gösterir. Öte yandan malzeme rijitlik matrisi $[C]$ aşağıdaki gibi yazılır:

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Yazılan bu denklem izotropik malzemeler içindir. Burada E elastisite modülü ve ν Poisson oranıdır.

3.4.1. Varyasyon prensibi

Elastisite teorisinde problemlerin çözümünde iki değişik yol takip edilebilir. Bunlardan birinde, seçilen sınır şartları için diferansiyel denklemlerin çözümü yapılır. Diğerinde ise gerilme bileşenleri ve dış kuvvetler tarafından yapılan iç ve dış işlerin minimizasyonu yapılır. Elastisite problemlerinin sonlu eleman denklemlerinde ikinci yol kullanılır. Eğer deplasman sınır şartlarını sağlayan deplasman denklemleri seçilerek işe başlanacak olursa o zaman sistemdeki potansiyel enerji minimize edilmelidir. Eğer önce gerilme sınır şartlarını sağlayan gerilme bağıntıları seçilecek olursa o zaman da sistemdeki komplementer enerjinin minimizasyonu yapılmalıdır. Sonlu elemanlar formülasyonunda genellikle bir deplasman alanı kabulü ile işe başlanır ve daha sonra deplasmanların düğüm noktalarındaki değerlerini elde etmek için potansiyel enerjinin minimizasyonu yapılır. Elde edilen deplasman değerleriyle de şekil değiştirmeler ve gerilmeler bulunabilir.

Bu çalışmada kullanılan sonlu elemanlar formülasyonu potansiyel enerjinin minimizasyonuna dayandığından, "Potansiyel Enerji Teoremi"nin tam bir ifadesini vermek yerinde olacaktır [29]:

"Verilen sınır şartlarını sağlayan deplasmanların, denge denklemlerini de sağlayanlarının hepsi potansiyel enerjinin sabit (ekstremum) bir değeri tarafından belirlenir."

Bu teoreme göre seçilen deplasman denklemleri, deplasman sınır şartlarını sağlamaktadır.

Bir elastik sistemin toplam potansiyel enerjisi iki bileşene ayrılabilir. Bileşenlerden birisi cisimdeki şekil değiştirme enerjisi sonucu ortaya çıkar. Diğeri ise iç ve dış kuvvetlerin potansiyel enerjisine bağlı olan bileşendir.

Toplam potansiyel enerji Π ,

$$\Pi = \Lambda + W_p \quad (3.17)$$

şeklinde yazılabilir. Burada Λ , şekil değiştirme enerjisini ve W_p dış yüklerin potansiyelini gösterir. Kuvvetlerin yaptığı iş, potansiyel enerjilerinin negatifine eşittir.

Yani

$$W = -W_p \quad (3.18)$$

dir. (3.17) ve (3.18)'in birleştirilmesiyle

$$\Pi = \Lambda - W \quad (3.19)$$

elde edilir. Seçilen bölgenin elemanlara ayrılmasıyla yukarıdaki (3.19) denklemini

$$\Pi = \sum_{e=1}^E (\Lambda^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^E \pi^{(e)} \quad (3.20)$$

şeklini alır.

Bir diferansiyel hacim elemanı dV için şekil değiştirme enerjisi

$$d\Lambda = \left(\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} - \frac{1}{2} \{\varepsilon_0\}^T \{\sigma\} \right) dV \quad (3.21)$$

şeklinde verilir. Burada $\{\varepsilon\}$, toplam şekil değiştirmeyi ve $\{\varepsilon_0\}$ iç gerilmelerden dolayı oluşan şekil değiştirmeyi göstermektedir. Şekil değiştirme yoğunluğu olarak adlandırılan $d\Lambda$, hacim üzerinde entegre edilecek olursa toplam şekil değiştirme enerjisi elde edilir:

$$\Lambda = \int_V \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (3.22)$$

Elimizde iki tane önemli bağıntı bulunmaktadır. Bunlardan birincisi Hooke Kanunu'dur. Gerilme ve şekil değiştirme bileşenleri arasında bir bağıntı olan Hooke Kanunu'nun genel formu

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon\} \quad (3.23)$$

şeklindedir. İkinci bağıntı ise Denklem (3.4)'te açık şekli verilen şekil değiştirme-deplasman bağıntıdır. Buradaki u ve v , sırasıyla x ve y yönündeki deplasman bileşenleridir. Bu bileşenler, düğüm noktalarına ait değerler cinsinden genel formda ifade edilmek istenirse

$$\{u\} = [N] \{U\} \quad (3.24)$$

yazılır. Burada $[N]$, şekil fonksiyonları matrisidir. İkinci bağıntının değişik bir formu (3.14)'te verilmiştir.

Bu bağıntılar yardımıyla, tek bir eleman için şekil değiştirme enerjisi $\Lambda^{(e)}$, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\Lambda^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{U\}^T [B^{(e)}]^T [C^{(e)}] [B^{(e)}] \{U\} dV \quad (3.25)$$

Diğer yandan dış yüklerin yaptığı iş üç parçaya ayrılabilir: Bunlar tekil yüklerin yaptığı iş W_c , kütle kuvvetlerinin yaptığı iş W_b ve yayılı yüklerin yaptığı iş W_p dir.

Tekil yüklerin yaptığı iş

$$W_c = \{U\}^T \{P\} = \{P\}^T \{U\} \quad (3.26)$$

şeklinde yazılır. Burada $\{P\}$, düğüm noktalarına uygulanan yükleri göstermektedir.

Bu kuvvetlerin, deplasman bileşenlerine paralel olduğu kabul edilmiştir.

Kütle kuvvetleri X ve Y ile gösterilirse yaptıkları iş

$$W_b^{(e)} = \int_{V^{(e)}} (u X^{(e)} + v Y^{(e)}) dV \quad (3.27)$$

olarak yazılır. Elemanların kalınlıkları değişmiyorsa kütle kuvvetleri de sabittir. (3.24) denkleminde faydalanılarak Denklem (3.27) tekrar yazılırsa

$$W_b^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \{U\}^T [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} X^{(e)} \\ Y^{(e)} \end{Bmatrix} dV$$

olur. Bu çalışmada kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir.

Yayıllı yüklerin yaptığı iş ise

$$W_p^{(e)} = \int_{S^{(e)}} (u p_x^{(e)} + v p_y^{(e)}) dS \quad (3.28)$$

şeklinde yazılır. Burada p_x ve p_y , sırasıyla x ve y eksenlerine paralel yayıllı yük bileşenleridir. (3.28) denklemini de Denklem (3.27)'nin yazıldığı gibi

$$W_p^{(e)} = \int_{S^{(e)}} \{U\}^T [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \end{Bmatrix} dS \quad (3.29)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.25), (3.26) ve (3.29) denklemleri, Denklem (3.20)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \Pi = \sum_{e=1}^E \left[\int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{U\}^T [B^{(e)}]^T [C^{(e)}] [B^{(e)}] \{U\} dV - \int_{S^{(e)}} \{U\}^T [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \end{Bmatrix} dS \right] - \\ - \{U\}^T \{P\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

elde edilir. Toplam potansiyel enerjinin minimizasyonu için Denklem (3.30), $\{U\}$ ya göre türevi alınarak sifıra eşitlenirse

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} = \sum_{e=1}^E \left[\int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{B^{(e)}\}^T [C^{(e)}] [B^{(e)}] dV \{U\} - \int_{S^{(e)}} [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \end{Bmatrix} dS \right] - \\ - \{P\} = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

elde edilir. Bu eşitlikten faydalanarak

$$\frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial \{U\}} = [k^{(e)}] \{U\} + \{f^{(e)}\} \quad (3.32)$$

yazılırsa burada

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [C^{(e)}] [B^{(e)}] dV \quad (3.330)$$

ve

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{S^{(e)}} [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \end{Bmatrix} dS - \{P\} \quad (3.34)$$

dir. Yukarıdaki $[k^{(e)}]$, eleman rijitlik matrisi ve $\{f^{(e)}\}$, eleman kuvvet vektörüdür. Genel rijitlik matrisi $[K]$ ve genel kuvvet kolon vektörü $\{F\}$ arasında

$$[K] \{U\} = \{F\} \quad (3.35)$$

şeklinde bir matris denklemleri elde edilir. Burada

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}] \quad (3.36)$$

ve

$$\{F\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\} \quad (3.37)$$

dir.

3.4.2. Uygun eleman bileşmeleri

Lineer enterpolasyon fonksiyonlarının belirli bir dezavantajı, gradyanlarının x ve y nin bir fonksiyonu olarak elde edilememesidir. Gradyen veya gradyene bağlı herhangi bir büyüklük, bir eleman üzerinde sabit değere sahiptir. İstenen büyüklüğün bir düğüm noktasındaki değerini elde edebilmek için değişik ortalama bulma teknikleri kullanılmıştır. Mesela bunlardan birisi, düğüm noktasını çevreleyen her bir elemandaki gradyan değerlerinin ortalamasını kullanır. Düğüm noktalarındaki eleman bileşmelerini bulmak için en doğru yol, birleşik yaklaşım teorisini (conjugate approximation theory)

kullanılmaktadır [62]. Bu teori, skaler veya vektörel bir büyüklük için eleman bileşke değerlerini, yaklaşım polinomuna uygun olarak elde eder.

Eleman bileşkelerinin düğüm noktalarına ait değerleri

$$[C] \{\sigma\} = \{R\} \quad (3.38)$$

denklem sisteminin çözümünden elde edilir. Burada $[C]$ ve $\{R\}$

$$[c^{(e)}] = \int_V [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dV \quad (3.39)$$

ve

$$[r^{(e)}] = \int_V \sigma^{(e)} [N^{(e)}]^T dV \quad (3.40)$$

şeklinde tanımlanan eleman matrislerinin toplamıdır. Burada da σ , eleman üzerinde sabit olarak bulunan sonuçtur. σ bir eleman üzerinde sabit olduğu için $[r^{(e)}]$ kolayca hesaplanabilir. $[c^{(e)}]$ yi hesaplariken de Ek A'da verilen alan koordinatları kullanıldığı takdirde işlemler oldukça kolaylaşır.

Birleşik yaklaşım teorisini kullanmak, boyutu düğüm noktası sayısına eşit olan bir lineer denklem sistemini daha çözmeyi gerektirdiğinden, eleman sayısı çok fazla olursa, bir dezavantaj oluşturmaktadır.

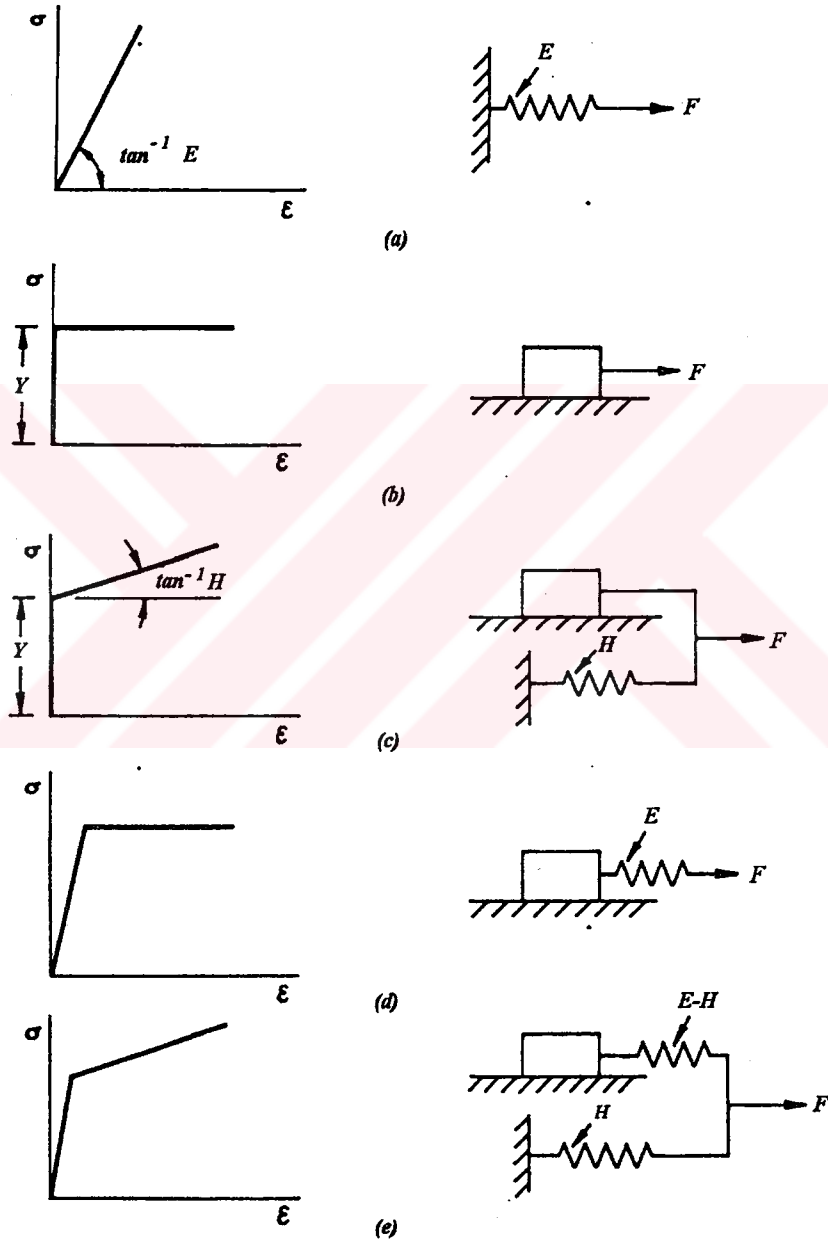
4. DÜZLEMDE ELASTO-PLASTİK GERİLME ANALİZİ

Plastisite, 1864 yılında Tresca'nın malzemenin akması ile ilgili kriterini ortaya koyması ile bilim olarak ortaya çıkmıştır. Bundan sonra Saint-Venant (1870) ve Lévy (1870), modern plastisite teorisini ortaya koymuşlardır [21,46]. Daha sonraki yıllarda ise Hill (1950) ve Westergaard (1952), plastisite teorisi hakkında yazılmış olan eserleri birleştirerek plastisitenin tam bir disiplin olarak ortaya çıkmasını sağlamışlardır [32,98].

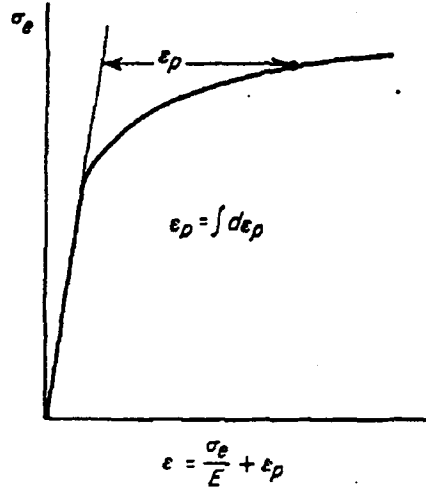
Bir deformasyon probleminin çözümünü elde edebilmek için gerilme-şekil değiştirme ilişkisinin idealize edilmesi gerekir. Bazı hallerde, elastik şekil değiştirmenin ve/veya pekleşmenin tesirinin ihmal edilmesi kabul edilebilir. Gerilme-şekil değiştirme diyagramında herhangi bir idealizasyon yapıldığında, bu yaklaşımın ne derece geçerli olduğu araştırılmalı ve uygulama alanlarının kısıtlı olacağı bilinmelidir. Tek eksenli çekme hali için bazı idealize edilmiş gerilme-şekil değiştirme diyagramları ve bunların mekanik davranışlarını gösteren dinamik modelleri, Şekil 4.1'de verilmiştir.

4.1. Plastisitenin Matematik Teorisi

Plastisitenin matematik teorisi, elasto-plastik davranış gösteren malzemelerin gerilme-şekil değiştirme ilişkilerini izah etmeye çalışır. Plastik davranışlar zamana bağlı olmayan kalıcı şekil değiştirmelerle karakterize edilir. Bu şekil değiştirmeler malzemenin özelliğine göre belirli bir gerilme değerine ulaşıldıktan sonra meydana



Şekil 4.1. İdealize edilmiş gerilme-şekil değiştirme diyagramları ve bunların mekanik yükleme davranışlarını gösteren dinamik modelleri
 a) Tam elastik b) Rijit-tam plastik c) Rijit-lineer pekleşen
 d) Elastik-tam plastik e) Elastik-lineer pekleşen



Şekil 4.2. Elasto-plastik gerilme-şekil değiştirme eğrisi

gelir (Şekil 4.2). Elasto-plastik incelemenin yapılabilmesi için şu üç şartın gerçekteşmesi gerekir [65]:

a. Elastik şartlarda malzeme davranışını belirlemek için gerilme ve şekil değiştirmeler arasındaki ilişkiyi belirleyen açık bir bağıntı olmalıdır (Yani plastik deformasyon başlangıcından önce).

b. Plastik akmanın meydana geldiği gerilme seviyesini belirleyecek bir akma kriterinin gözönüne alınması gerekir.

c. Akma başladıktan sonra gerilme ve şekil değiştirmeler arasında bir bağıntıya ihtiyaç vardır.

Plastik deformasyon başlangıcından önceki gerilme-şekil değiştirmeler arasındaki bağıntı Hooke Kanunu ile verilmiştir.

4.1.1. Akma kriterleri

Akma kriterleri, plastik deformasyonun başladığı gerilme seviyesini belirlerler.

Genel halde

$$f(\sigma_{ij}) = k(\kappa) \quad (4.1)$$

şeklinde yazılabilirler. Burada f , bir fonksiyon ve k , deneyle tespit edilen malzeme parametresidir. k , pekleşme parametresi κ 'nın bir fonksiyonudur. Herhangi bir akma kriteri, fiziksel olarak gözönüne alınan koordinat sisteminden bağımsız olduğundan, sadece üç gerilme invariyanının fonksiyonudur. Gerilme invariyanları

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ii} \\ I_2 &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \\ I_3 &= \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilirler. Bridgman (1952), metallerin plastik deformasyonunun esas olarak hidrostatik basınçtan bağımsız olduğunu deneysel olarak göstermiştir [13].

Neticede akma fonksiyonu

$$f(J_2, J_3) = k(\kappa) \quad (4.3)$$

şeklini alır. Burada J_2 ve J_3 ,

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \\ J_3 &= \frac{1}{3} \sigma'_{ij} \sigma'_{jk} \sigma'_{ki} \end{aligned} \quad (4.4)$$

şeklinde ifade edilen deviatorik gerilmelerin ikinci ve üçüncü invariyanlarıdır [40].

Deviatorik gerilmeler ise

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (4.5)$$

bağıntısı ile bulunur. Burada δ_{ij} ,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ ise} \\ 0 & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanan Kronecker deltadır. Metallerle ilgili ortaya atılan akma kriterlerinin çoğu deneysel verilerle çeliştiği için tarihe karışmışlardır. Tresca (1864) ve von Mises (1913) kriterleri bu hataya düşmeyen kriterlerden ikisidir [88,94].

Tresca akma kriteri :

Burada, maksimum kayma gerilmesi, belirli bir değere eriştiği zaman akmanın başlayacağı kabul edilir. σ_1 ve σ_2 ($\sigma_1 \geq \sigma_2$) asal gerilmeler ise

$$\sigma_1 - \sigma_2 = Y(\kappa) \quad (4.7)$$

olduğu zaman akma başlar. Burada Y , deneysel olarak belirlenen malzeme parametresidir.

Von Mises akma kriteri :

Von Mises, J_2 'nin kritik bir değeri aşması halinde akmanın meydana geleceğini öne sürmüştür.

$$\sqrt{J_2} = k(\kappa) \quad (4.8)$$

Buradaki J_2 ,

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = \frac{1}{6} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2) + \tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

şeklindedir. (4.8) ifadesi

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3 J_2} = \sqrt{3} k \quad (4.10)$$

olarak yazılabilir. Buradaki $\bar{\sigma}$ 'ye efektif gerilme veya genelleştirilmiş gerilme veya eşdeğer gerilme denir ve

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \quad (4.11)$$

şeklinde verilir.

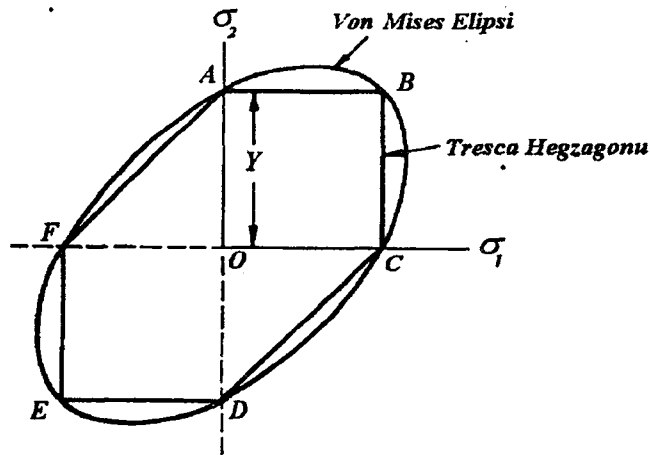
Tresca ve von Mises akma kriterlerinin iki boyutlu gösterimi Şekil 4.3'te verilmiştir. Bu çalışmada plastik akmanın meydana geldiği gerilme seviyesini belirlemek için von Mises kriteri gözönüne alınmıştır.

4.1.2. Elasto-plastik gerilme-şekil değiştirme bağıntıları

Akmanın başlamasından sonra malzeme davranışı kısmen elastik, kısmen de plastiktir. Herhangi bir gerilme artışında, şekil değiştirmede olacak artışın elastik ve plastik bileşenlere ayrılabilmesi kabul edilir.

$$d\epsilon_{ij} = (d\epsilon_{ij})_e + (d\epsilon_{ij})_p \quad (4.12)$$

Elastik şekil değiştirmedeki artış Hooke Kanunu ile belirlenir. Gerilme terimleri



Şekil 4.3. Tresca ve von Mises akma kriterlerinin iki boyutlu gösterimi

hidrostatik ve deviatorik bileşenlere ayrılarak

$$(d\varepsilon_{ij})_e = \frac{d\sigma_{ij}'}{2G} + \frac{1-2\nu}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} \quad (4.13)$$

şeklinde yazılabilir.

Plastik şekil değiştirme bileşeni ile gerilme artımı arasında bir bağıntı kurulmak istenirse malzeme davranışı üzerinde bir kabul daha yapmak gerekir. Plastik potansiyel olarak adlandırılan gerilme gradyeni Q ile plastik şekil değiştirme artımının orantılı olduğu kabul edilir.

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.14)$$

Burada orantı sabiti olan $d\lambda$ ya plastik çarpan denir. Yukarıdaki bağıntı akmadan sonraki plastik şekil değiştirmeyi gösterdiğinden akma şartı (flow rule) olarak bilinir. Plastik potansiyel Q , deviatorik gerilme ikinci ve üçüncü invariyanları J_2 ve J_3 ün fonksiyonu olmalıdır. Her ne kadar $f=Q$ ise de bu durum için özel bir dönüştürme prensibi geliştirilebilir. f ve Q nun ikisi de J_2 ve J_3 ün fonksiyonu olduğundan birbirine denk kabul edilebilir. O halde

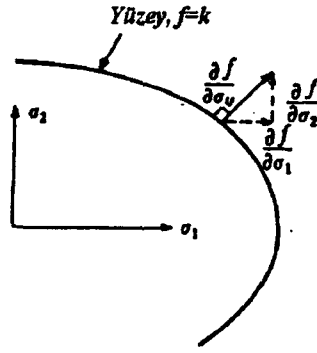
$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.15)$$

yazılabilir. Bu bağıntıya normalite şartı (normality condition) denir. $\partial f / \partial \sigma_{ij}$, akma yüzeyine dik bir vektör gösterir (Şekil 4.4). Temas noktası, dikkate alınan gerilme noktasıdır. Plastik şekil değiştirme artımının akma yüzeyine dik bir vektör vermesi için n boyutlu uzay vektörü oluşturması gerekir. $f=J_2$ durumunda

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma_{ij}' \quad (4.16)$$

ve böylece

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \sigma_{ij}' \quad (4.17)$$



Şekil 4.4. Normalite şartının geometrik gösterimi

olur. Buna, teorik çalışmalarda çok geniş uygulama alanı bulan Lévy-Mises denklemleri denir [46,94]. Deneysel gözlemler, normalite şartının metaller için geçerli bir kabul olduğunu göstermiştir [65]. Netice olarak (4.12) denklemi

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}'}{2G} + \frac{1-2\nu}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.18)$$

şeklini alır. Bu ise elasto-plastik gerilme-şekil değiştirme bağıntıdır.

4.1.3. Pekleşen malzemede tek eksenli çekme deneyi

Gerilme-şekil değiştirme eğrisi Şekil 4.5'deki gibi olan bir malzemeyi gözönüne alalım. Akma sınırına kadar elastik özellik gösteren malzemenin davranışı, elastisite modülü E ile karakterize edilir. Bu sınırdan sonra ise her noktaya göre devamlı değişen "elasto-plastik teğetsel modül" E_T ile karakterize edilir. Bu durumda pekleşme kanunu $k=k(\kappa)$, eşdeğer gerilme terimleri cinsinden yazılacak olursa

$$\bar{\sigma} = H(\kappa) \quad (4.19)$$

veya pekleşme hipotezi

$$\kappa = \bar{\varepsilon}_p \quad (4.20)$$

ile

$$\bar{\sigma} = H(\bar{\epsilon}_p) \quad (4.21)$$

şeklinde yazılır [65] veya türevi alınarak

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}_p} = H'(\bar{\epsilon}_p) \quad (4.22)$$

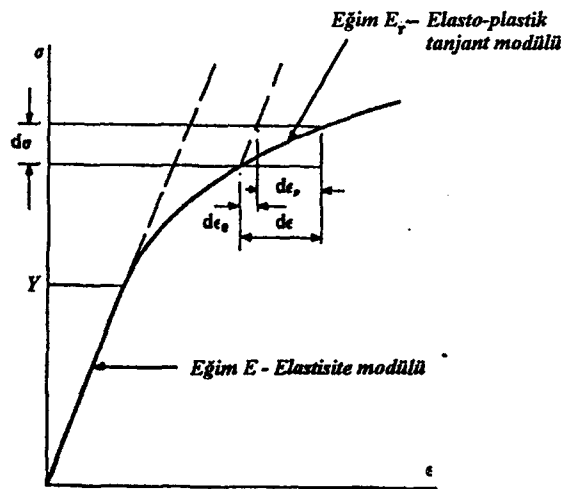
yazılır. Tek eksenli gerilme halinde $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ olduğu için (4.11) denklemi

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} = \sigma \quad (4.23)$$

şeklinde yazılır. Yükleme yönündeki şekil değiştirme artımı $d\epsilon_p$ ile gösterilirse, o zaman $(d\epsilon_1)_p = d\epsilon_p$ olur. Plastik şekil değiştirme sıkıştırılamaz kabul edildiğinden, Poisson oranı 0.5 alınır ve $(d\epsilon_2)_p = -1/2 d\epsilon_p$, $(d\epsilon_3)_p = -1/2 d\epsilon_p$ olur. Daha sonra efektif şekil değiştirme bağıntısı

$$d\bar{\epsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3} (\epsilon'_{ij})_p (\epsilon'_{ij})_p} = d\epsilon_p \quad (4.24)$$

şeklinde yazılır [65]. (4.23) ve (4.24) denklemleri kullanılarak (4.22) denklemi



Şekil 4.5. Tek eksenli halde elasto-plastik pekleşme davranışı

$$H'(\bar{\epsilon}_p) = \frac{d\sigma}{d\epsilon_p} = \frac{d\sigma}{d\epsilon - d\epsilon_e} = \frac{1}{d\epsilon / d\sigma - d\epsilon_e / d\sigma} \quad (4.25)$$

veya

$$H' = \frac{E_T}{1 - E_T / E} \quad (4.26)$$

şeklinde yazılır. Buradaki sertleşme fonksiyonu H' , tek eksenli çekme deneyi ile bulunur.

4.2. Matris Formülasyonu

Akma fonksiyonu

$$f(\{\sigma\}) = k(\kappa) \quad (4.27)$$

şeklinde yazılmıştı [Denklem (4.1)]. Burada $\{\sigma\}$, gerilme vektörünü, κ ise pekleşme katsayısını göstermektedir. Bu denklem

$$f(\{\sigma\}, \kappa) = f(\{\sigma\}) - k(\kappa) = 0 \quad (4.28)$$

veya

$$\{a\}^T d\{\sigma\} - A d\lambda = 0 \quad (4.29)$$

yazılır. Burada

$$\{a\}^T = \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right] \quad (4.30)$$

ve

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa \quad (4.31)$$

şeklinindedir. Buradaki $\{a\}$ vektörüne, akma vektörü denir. (4.18) denklemi

$$d\{\varepsilon\} = [C]^{-1} d\{\sigma\} + d\lambda \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \quad (4.32)$$

şeklinde yazılır. Burada $[C]$, malzeme rijitlik matrisidir. Her iki taraf $\{d_D\}^T = \{a\}^T [C]$ ile çarpılıp $\{a\}^T d\{\sigma\}$ terimi yerine $A d\lambda$ yazılarak, plastik çarpan $d\lambda$ için

$$d\lambda = \frac{1}{A + \{a\}^T [C] \{a\}} \{a\}^T \{d_D\} d\{\varepsilon\} \quad (4.33)$$

bağıntısı elde edilir. (4.33) denklemi, (4.32)'de yerine yazılarak elasto-plastik artımsal gerilme-şekil değiştirme bağıntısı bulunur:

$$d\{\sigma\} = [C_{ep}] d\{\varepsilon\} \quad (4.34)$$

Burada

$$[C_{ep}] = [C] - \frac{\{d_D\} \{d_D\}^T}{A + \{d_D\}^T \{a\}} \quad (4.35)$$

şeklindedir. Burada da

$$\{d_D\} = [C] \{a\} \quad (4.36)$$

şeklindedir [65].

4.3. Sonlu Eleman Denklemleri

Burada da temel denklemlerin çözümü virtüel iş prensibi ile yapılır. İç gerilmeler $\{\sigma\}$ ile, kütle kuvvetleri $\{b\}$ ile ve dış yükler $\{f\}$ ile gösterilerek

$$\int_{\Omega} \left(\delta \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} - \delta \{u^*\}^T \{b\} \right) d\Omega - \delta \{d^*\}^T \{f\} = 0 \quad (4.37)$$

yazılabilir. Burada $\delta\{d^*\}$, keyfi virtüel deplasmanları, $\delta\{\varepsilon^*\}$, şekil değiştirmeleri ve $\delta\{u^*\}$ ise iç deplasmanları göstermektedir. Bir elemanda, deplasmanlar ve şekil değiştirmeler arasında

$$\delta\{u^*\} = [N] \delta\{d^*\}, \quad \delta\{\varepsilon^*\} = [B] \delta\{d^*\} \quad (4.38)$$

şeklinde bağıntılar vardır [65]. Burada $[N]$, şekil fonksiyonları matrisidir ve $[B]$, elastik şekil değiştirme matrisidir. Elemanların birleştirilmesi ile

$$\int_{\Omega} \delta\{d^*\}^T ([B]^T \{\sigma\} - [N]^T \{b\}) d\Omega - \delta\{d^*\}^T \{f\} = 0 \quad (4.39)$$

elde edilir. Bu bağıntı keyfi bir $\delta\{d^*\}$ değeri için doğru olduğundan

$$\int_{\Omega} [B]^T \{\sigma\} d\Omega - \{f\} - \int_{\Omega} [N]^T \{b\} d\Omega = 0 \quad (4.40)$$

yazılabilir. Bu denklem hesaplamaların her aşamasında sağlanmadığı için

$$\{\psi\} = \int_{\Omega} [B]^T \{\sigma\} d\Omega - (\{f\} + \int_{\Omega} [N]^T \{b\} d\Omega) \neq 0 \quad (4.41)$$

şeklinde yazılır. Burada $\{\psi\}$, artık kuvvet vektörüdür (residual force vector). Elasto-plastik halde malzeme rijitliği sürekli değişir ve artımlı gerilme-şekil değiştirme bağıntıları (incremental stress/strain relation) geçerlidir. Herhangi bir anda malzemenin teğetsel rijitlik matrisi $[K_T]$ 'yi hesaplamak için (4.41) denkleminin artımlı şekli kullanılmalıdır. Bu amaçla

$$\Delta\{\psi\} = \int_{\Omega} [B]^T \Delta\{\sigma\} d\Omega - (\Delta\{f\} + \int_{\Omega} [N]^T \Delta\{b\} d\Omega) \quad (4.42)$$

yazılır. (4.34) denkleminden $\Delta\{\sigma\}$ çekilerek (4.42)'de yerine yazılacak olursa

$$\Delta\{\psi\}=[K_T]\{d\}-\left(\Delta\{f\}+\int_{\Omega}[N]^T\Delta\{b\}d\Omega\right) \quad (4.43)$$

elde edilir. Burada $[K_T]$,

$$[K_T]=\int_{\Omega}[B]^T[D_{ep}][B]d\Omega \quad (4.44)$$

şeklindedir. (4.43) denklemi, nonlinear denklemler için verilmiş olan çözüm yöntemlerinden herhangi biri ile çözülür. Newton-Raphson metodu, teğetsel rijitlik metodu ve başlangıç rijitlik metodu, bu metotlardan en çok kullanılanlarıdır.

4.4. Ampirik Gerilme-Şekil Değişirme Eğrisi Denklemleri

Karmaşık olmayan bazı plastisite problemlerinde, gerilme-şekil değişirme eğrilerinden elde edilen ampirik denklemler kullanılmaktadır. Bu denklemlerde logaritmik şekil değiştirmeler gözönüne alınmıştır. Fakat plastik şekil değiştirmelerin, elastik şekil değiştirmeler mertebesinde olduğu durumlarda normal şekil değiştirmeler de gözönüne alınabilir. Ludwik (1909), Voce (1948), Swift (1946) ve Prager (1959) gibi bilim adamları konu ile ilgili ampirik denklem önerisinde bulunmuşlardır. Bunlardan en çok kullanılanı Ludwik tarafından önerilen

$$\sigma = Y + K \varepsilon^n \quad (4.45)$$

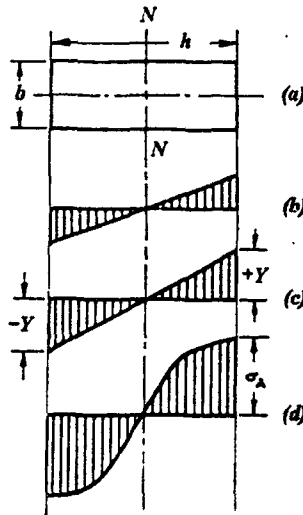
bağıntısıdır [48]. Burada σ , gerçek gerilmeyi, Y ise akma (başlangıç) gerilmesini gösterir. K ve n , sırasıyla pekleşme oranı ve pekleşme üstelidir. ε ise gerçek (logaritmik) şekil değiştirmedir [40,54]. Buradaki K ve n parametreleri tek eksenli çekme deneyi ile tespit edilir.

4.5. Artık Gerilmeler

Herhangi bir izotropik çubuk, elastik sınırı aşmamak şartıyla eğilme momentine maruz bırakılıp tekrar serbest bırakılacak olursa tıpkı eski halini alır. Çubuğun herhangi bir noktasında elastik bölgenin üzerinde gerilme oluşacak derecede uygulanan moment artırılacak olursa o noktada akma meydana gelir. Uygulanan moment kaldırıldığında çubuk ilk haline geri dönmeye çalışır. Fakat plastik şekil değiştirme meydana gelen yerlerde kalıcı gerilmeler bulunduğu görülür. İşte bu gerilmeler artık gerilmeler (residual stresses) olarak bilinir (Şekil 4.10). Bu gerilmenin sebebi elastik olarak yüklenmiş ve başlangıç şartlarına dönmeye çalışan noktaların oluşturduğu momenttir. Wöhler, tam elastik olarak hesaplanmış gerilmelerden, elastik olmayan gerilmeleri çıkararak yaklaşık olarak artık gerilmeleri hesaplamıştır. Bu yöntem, sünek malzemeler için kullanılabilen bir yöntemdir. Makina parçasının kritik kesitlerinde oluşturulan artık gerilmelerin yorulma ömrünü artırma veya azaltma yönündeki etkileri iki esasa dayanır:

- Yorulma hasarları değişken gerilmelerden dolayı meydana gelir,
- Malzeme yüzeyi, yüzey altına göre daha zayıftır.

Malzemede artık gerilmeler, ya ısıl işlem sebebiyle veya mekanik olarak oluşur. Bu gerilmeler, malzemenin mukavemeti açısından kimi zaman olumlu kimi zaman da olumsuz etki yaparlar. İster faydalı ister zararlı olsun artık gerilmeler, plastik deformasyondan dolayı oluşur. Malzeme yüzeyinde, basınç gerilmesi oluşturacak



Şekil 4.10. Eğilmeye zorlanan bir çubukta oluşan gerilmeler

şekilde plastik şekil değiştirmiş bir katman oluşturulursa, oluşan basınç gerilmesi malzeme yüzeyinde meydana gelecek çatlakları önler.

4.6. Gerilme Konsantrasyonu

Makina tasarımında kullanılan elemanlar formüller, kesiti sabit veya düzgün olan elemanlar içindir. Gerçekte ise makina parçalarında çıkıntılar, delikler, çentikler vb. gibi gerilme dağılımında değişikliğe yol açan faktörler yer alır. Böylece bazı bölgelerde yüksek gerilmeler oluşur. Bu olaya "gerilme konsantrasyonu (stress concentration)" denir.

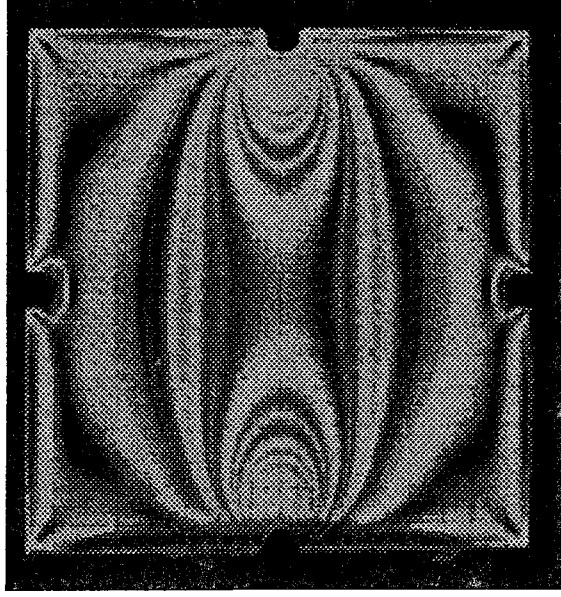
Yüksek gerilmeler sebebiyle ortaya çıkan ve ilerleyerek parçanın kırılmasına yol açan çatlaklar oluşur. Özellikle tekrarlı yüklerde makina parçalarının kırılmasına çoğunlukla bu çatlaklar sebep olur. Bu yüzden, ortaya çıkan yüksek gerilmelerin sıhhatli bir şekilde tespit edilmesi gerekir. Gerilme konsantrasyonlarını tespit etmek için bugüne kadar çeşitli metotlar kullanılmıştır. Bunlardan bazıları şunlardır:

- Elastisite teorisi,
- Fotoelastisite (Şekil 4.7)
- Sonlu elemanlar,
- Membran analogisi,
- Elektriksel analogi,
- Strain-gage,
- Gevrek kaplama,
- Gevrek malzeme (Plaster modeli),
- Sünek malzeme (Lüders bantları).

Gerilme konsantrasyonunu dikkate almak için

$$k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \quad (4.40)$$

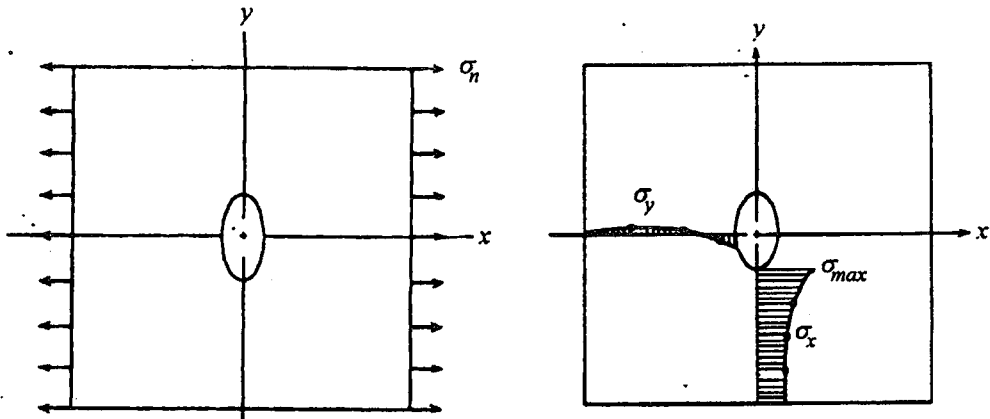
şeklinde bir "gerilme konsantrasyonu faktörü" tanımlanır. Burada σ_{max} , maksimum gerilmeyi ve σ_n , ortalama gerilmeyi ifade etmektedir (Şekil 4.8). Makina parçalarında



Şekil 4.7. Gerilme konsantrasyonunun fotoelastik yolla tespiti [105]
(İTÜ İnşaat Fak. Deneysel Mekanik Lab.)

gerilme konsantrasyonunun ortaya çıkmasına sebep olan durumlara şu örnekler gösterilebilir:

- Bir civatanın veya bir dişlinin dişdibinde veya millerdeki kama kanalının bir köşesinde meydana gelen konsantrasyon,
- Ray ile tekerlek arasındaki veya bir rulmanda bilya ile bilezik arasındaki temas gerilmeleri,
- Ağaçlardaki budaklar gibi malzeme süreksizliklerinin sebep olduğu konsantrasyon,
- İmalat ve montaj esnasındaki soğuk deformasyon ve ısı işlem sebebiyle meydana gelen artık gerilmeler.



Şekil 4.8. Kesitteki süreksizliğin oluşturduğu gerilme konsantrasyonu [37]

5. SINIR ŞARTLARI

5.1. Deplasmanlar

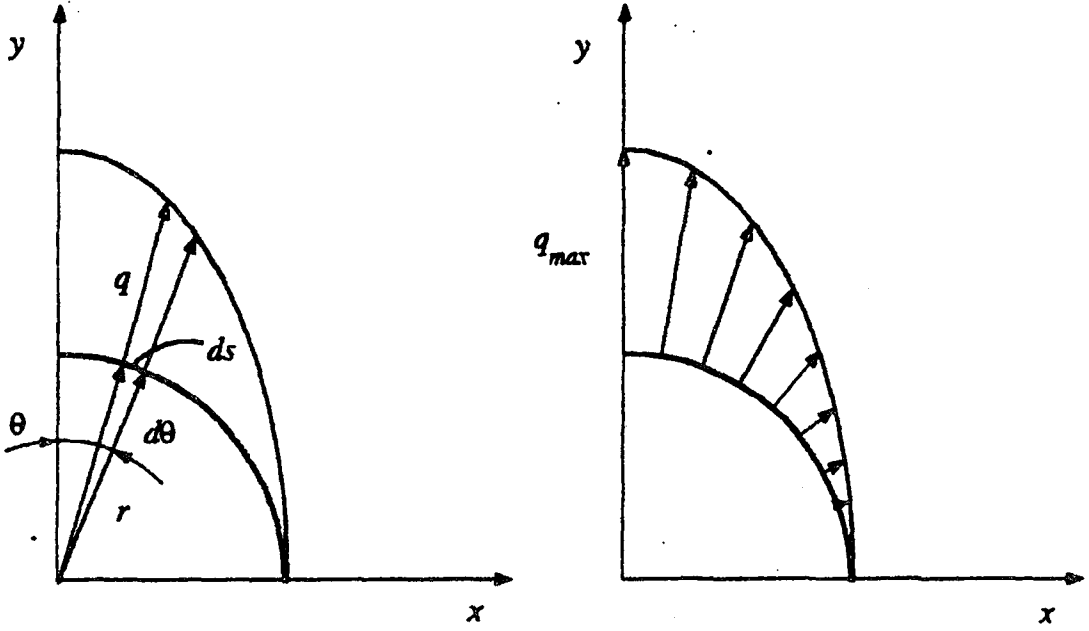
Sonlu elemanlar yönteminin özelliği gereği, iki eksene göre de simetrik olan zincir baklalarının dörttebir parçasını incelemek yeterli olacaktır. İncelenen parçaların simetri eksenini üzerinde kalan düğüm noktalarına birer kayıcı mesnet yerleştirilir. Bu mesnetler eksene dik doğrultuda deplasmana izin vermediklerinden, sınır şartı olarak bu düğüm noktalarının eksene dik doğrultudaki deplasmanları sifira eşitlenir.

5.2. Dış Yükler

Pim tarafından baklaya uygulanan dış kuvvet dairesel delik etrafında bir yayılı yük oluşturur (Şekil 5.1). Bu yayılı yükün, düğüm noktalarına uygulanan tekil yüklere indirgenmesi gerekir. Yayılı yükün açığa bağlı olarak dağılımı

$$q = k \cos \theta \quad (5.1)$$

olarak gösterilir [78]. Burada q , yayılı yükü ve k ise yayılı yükün aldığı maksimum değeri göstermektedir ($k=q_{max}$). θ ise Şekil 5.1'de verilen açıdır. Yayılı yükün dış kuvvet doğrultusundaki bileşeni alınır, bu bileşen dış kuvvete eşit olur. Deliğin yarısı gözönüne alındığı için



Şekil 5.1. Dairesel delik etrafında yayılı yük

$$\int_S q_y t ds = \frac{F}{2} \quad (5.2)$$

olur. Burada q_y , yayılı yükün dış yük doğrultusundaki bileşenini, t , parçanın kalınlığını, ds , diferansiyel yay elemanını ve F , dış kuvveti göstermektedir.

$$q_y = q \cos \theta = k \cos^2 \theta$$

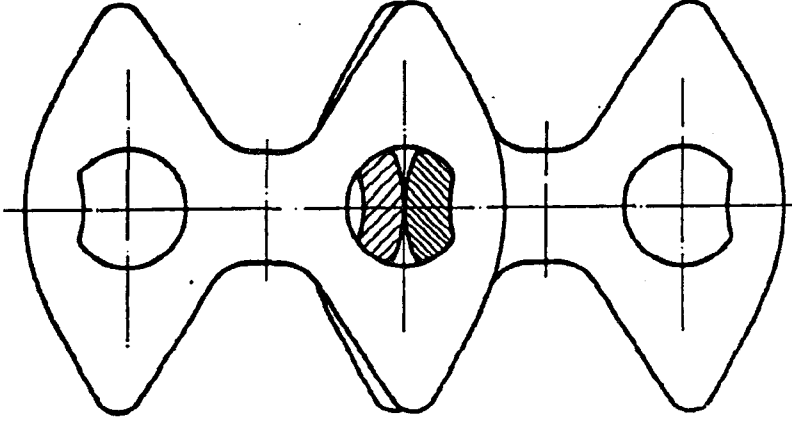
ve

$$ds = r d\theta$$

dir. Burada r , delik yarıçapını göstermektedir. Bu değerler yerlerine yazılır ve sabit terimler integral dışına alınır

$$k r t \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = F/2 \quad (5.3)$$

olur. Sonuçta da



Şekil 5.2. Bifleks dişli zincir baklası ve pim deliği

$$k r t \frac{\pi}{4} = F/2$$

ve

$$k = \frac{2 F}{\pi r t} \quad (5.4)$$

bulunur. Böylece yayılı yük dağılımı bilinenler cinsinden

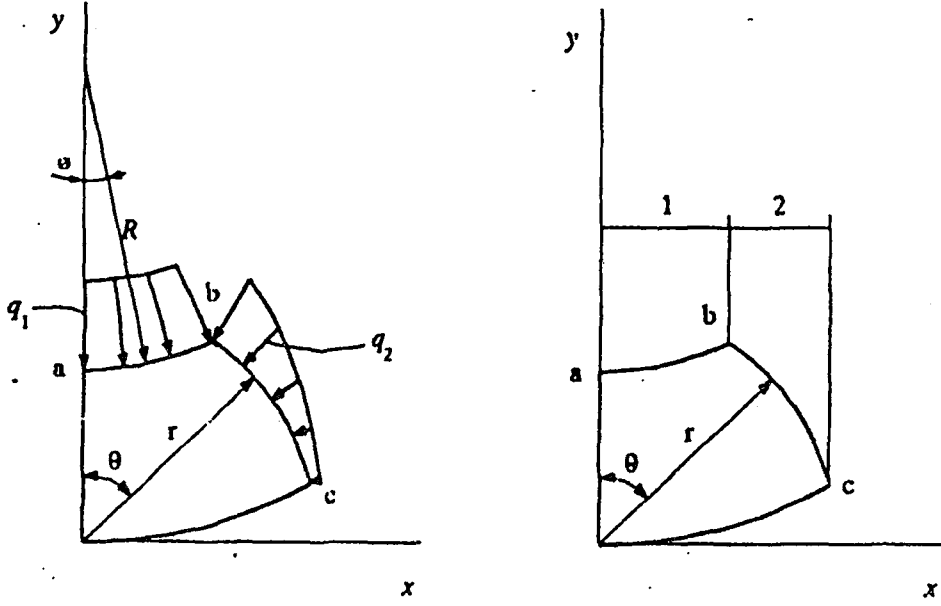
$$q = \frac{2 F}{\pi r t} \cos \theta \quad (5.5)$$

şeklinde ifade edilmiş olur.

İncelenen bifleks dişli zincir baklalarının pimleri, sürtünmeyi azaltmak amacıyla iki parçalı yapılmıştır (Şekil 5.2). Bundan dolayı bakla delikleri tam daire şeklinde değildir. Delikte pimin dayandığı kısım içe doğru bombelidir. Bu bombenin yarıçapı da delik yarıçapından farklıdır. Ayrıca pim, deliğin yarısına değil belirli bir bölgesine kuvvet uygulamaktadır.

Bu problemin çözümünde aşağıdaki prosedür izlenmiştir:

- a. Delik değişik yarıçaplı iki bölgeye ayrılmıştır.
- b. Uygulanan kuvvetin bölgelere paylaşılmasında izdüşüm alanları esas alınmıştır.
- c. Yayılı yüklerin düşey bileşenlerinin toplamının, uygulanan pim kuvvetine eşit olması prensibi kullanılmıştır.



Şekil 5.3. Yayılı yükün parçalı pim üzerindeki dağılımı

$$F_{1y} = \frac{A_1}{A} \frac{F}{2} \quad (5.6)$$

$$F_{2y} = \frac{A_2}{A} \frac{F}{2} \quad (5.7)$$

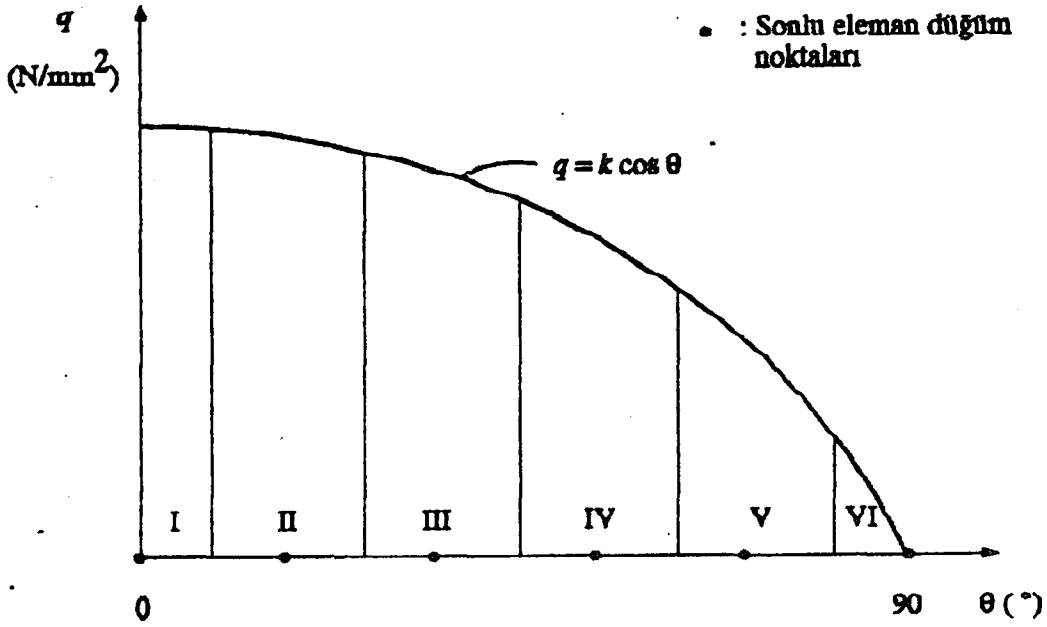
$$A = A_1 + A_2$$

bağıntıları kullanılarak birinci ve ikinci bölgelere ait k_1 ve k_2 katsayıları bilinenler cinsinden ifade edilmiştir. Burada F , pime uygulanan kuvvet, F_{1y} ve F_{2y} , sırasıyla 1. ve 2. bölgeye uygulanan yayılı yükün düşey bileşenleri, A_1 ve A_2 , sırasıyla 1. ve 2. bölgenin izdüşüm alanları ve A , toplam izdüşüm alanıdır. Şekil 5.3'ten

$$k_1 R t \int_{\phi_a=0}^{\phi_b} \cos^2 \phi d\phi = \frac{\sin \theta_b}{\sin \theta_c} \frac{F}{2}$$

$$k_2 R t \int_{\theta_b}^{\theta_c} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\sin \theta_c - \sin \theta_b}{\sin \theta_c} \frac{F}{2}$$

ve



Şekil 5.4. Yayılı yükün tekil yüklere indirgenmesi

$$k_1 = \frac{1}{\cos \phi_b \sin \phi_b + \phi_b} \frac{\sin \theta_b}{\sin \theta_c} \frac{F}{R t} \quad (5.8)$$

$$k_2 = \frac{1}{\cos \theta_c \sin \theta_c - \cos \theta_b \sin \theta_b + \theta_c - \theta_b} \frac{\sin \theta_c - \sin \theta_b}{\sin \theta_c} \frac{F}{r t} \quad (5.9)$$

elde edilir. Burada görülen semboller Şekil 5.3'te verilmiştir.

Dairesel delik etrafında yayılmış olan yükün, düğüm noktalarına uygulanan tekil yüklere indirgenmesi için Şekil 5.4'ten faydalanılmıştır. Burada gösterilen bölgelerin sınırları, sınırların ağırlık merkezleri düğüm noktalarına isabet edecek şekilde seçilmiştir. Uç kısımlardaki dar bölgelerin bileşkeleri ise uç düğümlere uygulanmıştır. Herhangi bir bölgenin kuvvet değerini bulmak için

$$\int_0^R dR = \int_{\theta_1}^{\theta_2} q dA \quad (5.10)$$

denkleminde hareketle elde edilen

$$R = \frac{2F}{\pi t} \sin\theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (5.11)$$

bağıntısı kullanılmıştır. Burada R , ele alınan bölgenin kuvvet değerini, θ_1 ve θ_2 de bölgenin sınırlarını göstermektedir. Ağırlık merkezlerinin yerini bulmak için de

$$\bar{y} = \frac{\int_A y \, dA}{\int_A dA} \quad (5.12)$$

ve

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (5.13)$$

bağıntıları kullanılmıştır [10]. Burada \bar{y} , bir bölgenin ağırlık merkezini göstermektedir.

6. DENEYSEL ÇALIŞMA

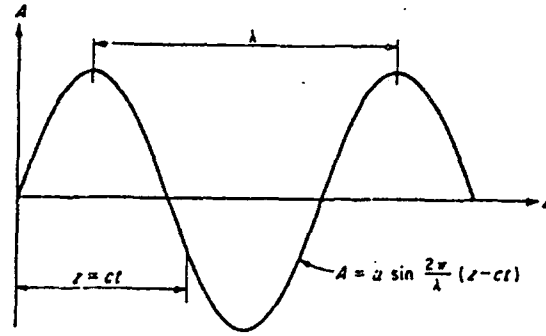
6.1. Işık, Polarize Işık ve Polariskop

Işığı, bir kaynaktan bütün doğrultularda yayılan çok küçük zerrelerin akışı olarak açıklayan tanecik teorisi, en eski teoridir. Bu teori, fotoelektrik etkilerin tanımlanmasında bugün hala kullanılmaktadır. Fotoelastik etkileri tanımlamak amacıyla ise daha çok Maxwell (1853) tarafından geliştirilen elektromanyetik teori kullanılır [52]. Bu teori ışığı, elektromanyetik dalga olarak tanımlar. Buradaki dalga, yayılma yönüne dik bir ışık vektörü olarak ifade edilebilir. Tungsten filamanlı bir ampulden yayılan adi bir ışıkta, ışık vektörü herhangi bir taraftan kısıtlanmamıştır ve ışık vektörünün rastgele enine titreşimlerden oluştuğu varsayılabilir. Işık, bir dalga hareketi olarak kabul edildiğinden dolayı ışık vektörünün genliğini, tek boyutlu dalga denkleminin çözümü olarak yazmak mümkündür:

$$A = f(z - c t) + g(z + c t) \quad (6.1)$$

Burada A , ışık vektörünün genliğini, z , yayılma eksenini, t , zamanı ve c , yayılma hızını göstermektedir. Pozitif z yönünde yayılan ışığın bir sinüzoidal bileşeni gözönüne alınarak fotoelastik etkinin basit bir tanımı elde edilir. Böylece (6.1) denklemi

$$A = f(z - c t) = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (z - c t) \quad (6.2)$$



Şekil 6.1. Işık vektörünün genliğinin yayılma eksenine göre değişimi

şeklinde yazılabilir. Pozitif z eksenine boyunca yayılan ışık vektörünün genliğinin grafiği Şekil 6.1'de verilmiştir.

Işık vektörünün sinüzoidal genlik grafiğinde iki tepe arasındaki uzaklığa dalga boyu (λ) denir. Birbirini izleyen iki tepeyi geçmek için gerekli zamana periyot (T) denir ve

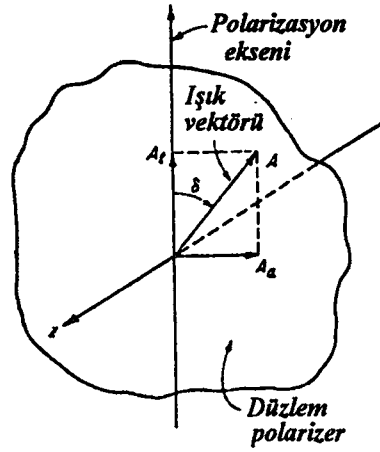
$$T = \frac{\lambda}{c} \quad (6.3)$$

olarak verilir. Işık vektörünün frekansı, saniyedeki genlik salınımı sayısıdır. Bu yüzden frekans (f),

$$f = \frac{1}{T} \quad (6.4)$$

olarak verilir. Gözümüzün görebildiği ışığın rengi, ışık vektörü bileşeninin frekansı tarafından belirlenir. Görülebilen gökkuşağı renkleri, frekansı 390×10^{12} cps olan kırmızı renkten frekansı 770×10^{12} cps olan mor renge kadardır. Çoğu fotoelastik araştırma, gözle görülebilen renklerden oluşan ışığı kullanarak yürütülse de fotoelastisite prensipleri radyan enerjinin kızılötesi ve morötesi bölgelerinde de geçerlidir.

Klasik fiziğe göre adi bir ışık, yayılma yönüne dik olarak titreşen elektromanyetik dalgalardan oluşur. Elektromanyetik dalganın titreşim şekli, titreşime dik doğrultu gibi bir istenen durum sergilerse o zaman ışık, polarize edilmiş kabul



Şekil 6.2. Düzlem polarizer

edilir. Gerilme analizinin fotoelastik metotla yapılmasında kullanılan üç tip polarize ışık vardır:

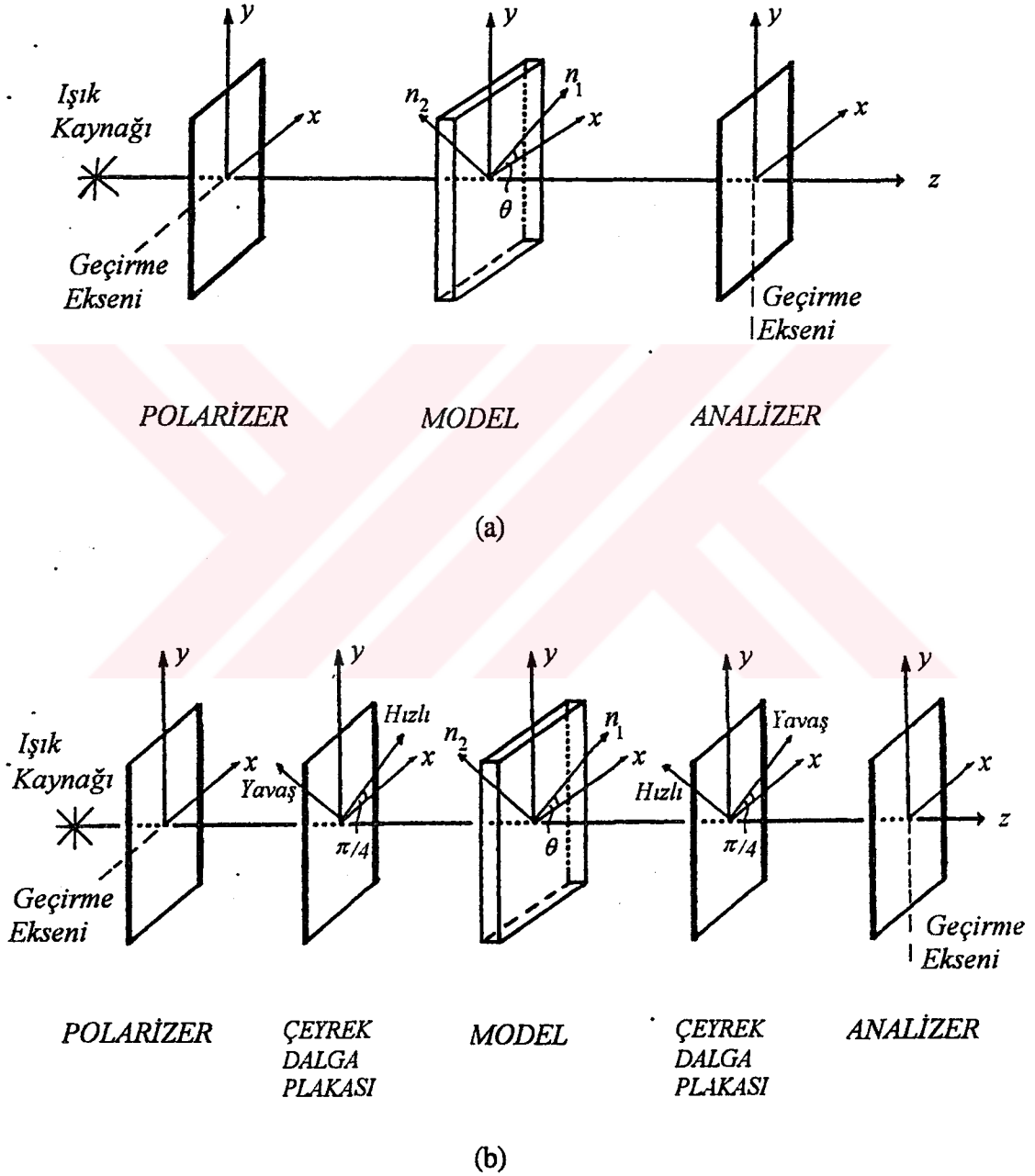
- Düzlem polarize ışık,
- Dairesel polarize ışık,
- Eliptik polarize ışık.

Pratikte, düzlem polarize ışık düzlem veya lineer polarizer olarak bilinen bir optik eleman aracılığıyla elde edilir (Şekil 6.2). Dairesel ve onun özel bir hali olan eliptik polarize ışıkları elde edebilmek için de iki optik elemana gerek vardır. Bunlardan birisi polarizer, diğeri ise dalga plakasıdır. Dalga plakaları, ışığı birbirine dik iki bileşene ayıran elemanlardır. Bileşenlerden birinin hızı diğerininkinden farklıdır.

Optik elemanların bir araya getirilmeleri ile elde edilen optik sistemlere polariskop denir. Fotoelastisitede kullanılan en basit polariskop, düzlem polariskoptur. Bir ışık kaynağı ve iki lineer polarizerden oluşur (Şekil 6.3a). Düzlem polariskopta ışık kaynağına yakın olan lineer polarizere polarizer, diğesine de analizler adı verilir. Polarizer ve analizlerin polarizasyon eksenleri birbirlerine daima diktir. Bundan dolayı analizlerden hiç ışık geçmez ve bu sistem bir karanlık alan oluşturur.

Bir ışık kaynağı ve dört optik elemandan meydana gelen dairesel polariskopta ise ışık kaynağından sonraki elemana polarizer denir (Şekil 6.3b). Polarizer, ışığı düzlem polarize ışığa dönüştürür. İkinci eleman ise polarizasyon düzlemi ile eksenleri arasında $\beta=\pi/4$ lük bir açı bulunan bir çeyrek dalga plakasıdır. Bu çeyrek dalga plakası düzlem polarize ışığı dairesel polarize ışığa dönüştürür. İkinci çeyrek dalga plakası ise

hızlı eksenini öncekinin yavaş eksenine paralel olacak şekilde yerleştirilir. Bu elemanın amacı dairesel polarize ışığı düzlem polarize ışığa dönüştürmektir. En son eleman ise analizördür. Dairesel polariskop standart düzeni ile karanlık alan oluşturur. Fakat optik elemanların döndürülmesi ile dört değişik düzen elde edilebilir. Bunlardan ikisinde karanlık alan, ikisinde de aydınlık alan oluşur.



Şekil 6.3. a) Düzlem polariskop

b) Dairesel polariskop

6.2. Fotoelastisite Teorisi

Fotoelastisitede kullanılan Maxwell teorisi, gerilme altındaki malzemelerin kırılma indislerinin değişmesi olayına dayanır. Kırılma indislerindeki değişimin gerilmelerle doğru orantılı olduğu kabul edilir ve

$$\begin{aligned} n_1 - n_0 &= c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 \\ n_2 - n_0 &= c_1 \sigma_2 + c_2 \sigma_1 \end{aligned} \quad (6.5)$$

yazılır. Burada n_0 , gerilmesiz modelin kırılma indisini, n_1 ve n_2 , asal eksenler boyunca olan kırılma indislerini, c_1 ve c_2 , gerilme optik katsayılarını göstermektedir. Yukarıdaki iki denklem n_0 'i elimine edecek şekilde taraf tarafa çıkarılırsa

$$n_1 - n_2 = (c_1 - c_2)(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (6.6)$$

olur. Gerilmiş fotoelastik modeli geçici bir dalga plakası gibi düşünerek

$$n_1 - n_2 = \frac{\lambda \Delta}{2\pi h} \quad (6.7)$$

yazılır. Burada Δ , faz farkını ve h , modelin kalınlığını göstermektedir. Buradan

$$\Delta = \frac{2\pi h}{\lambda} (c_1 - c_2)(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (6.8)$$

yazılabilir. Burada $c_1 - c_2$ yerine, bağıl gerilme optik katsayısı c yazılırsa

$$\Delta = \frac{2\pi hc}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (6.9)$$

olur. Yukarıdaki bağıntıda $\frac{\Delta}{2\pi} = N$ ve $\frac{h}{c} = f_\sigma$ yazılarak

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N f_\sigma}{h} \quad (6.10)$$

elde edilir. Burada N , bağıl faz farkını ve f_σ , malzeme saçak değerini göstermektedir.

Eğer bir fotoelastik model tam elastik davranış gösteriyorsa, asal şekil değiştirmeler arasındaki fark ($\varepsilon_1 - \varepsilon_2$), saçak mertebesi N 'in belirlenmesi ile ölçülebilir.

(6.10) denklemi asal şekil değiştirmeler cinsinden

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{N f_\varepsilon}{h} \quad (6.11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada f_ε , şekil değiştirmeler cinsinden malzeme saçak değeridir ve

$$f_\varepsilon = \frac{1 + \nu}{E} f_\sigma \quad (6.12)$$

şeklinde verilir.

Gerilmiş bir fotoelastik model dairesel polariskoba yerleştirildiği zaman izokromatik saçaklar meydana gelir. Analizlerden çıkan lineer polarize ışık

$$A = \frac{1}{2} k \sin \frac{\Delta}{2} [\cos(\alpha + \omega t) - \sin(\alpha + \omega t)] \quad (6.13)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada k ,

$$k = a \cos \delta$$

şeklinde ve ω ise ışığın açısal frekansını göstermektedir ($\omega = 2\pi f$). Burada da a , elipsin büyük eksenini ve δ ise ışık vektörü ile polarizer eksenini arasındaki açıyı göstermektedir.

Işığın şiddeti I ile gösterilecek olursa

$$I = K \sin^2 \frac{\Delta}{2} [\cos(\alpha + \omega t) - \sin(\alpha - \omega t)]^2 \quad (6.14)$$

yazılır. Burada K , bir katsayıdır. (6.14) denklemi incelenirse, ışığın kaybolması için ($I=0$) ya $\sin^2 \Delta/2=0$ olmalı veya köşeli parantez içerisi sıfır olmalıdır. Köşeli parantez

içerisindeki ifade sönüm meydana getirmeyeceğinden dolayı $\sin^2 \Delta/2=0$ olmalıdır. O halde $\Delta/2=n\pi$ ($n=0,1,2,\dots$) olduğu zaman ışık kaybolur.

6.3. Fotoelastik Model Malzemesi Seçiminde Kriterler

i. Saydamlık: Genelde bütün normal fotoelastik çalışmalarda model malzemesi olarak saydam plastikler seçilir. Bu plastiklerin görülebilen ışığı geçirmeleri yeterlidir. Renksiz saydam halde olmaları gerekmez. Örnek olarak epoksi reçine saydam, fakat açık sarı renktedir.

ii. Duyarlılık: Modelde elde edilen saçak sayısını artırdıklarından dolayı, yüksek duyarlılıktaki fotoelastik malzemeler daha çok tercih edilirler. Eğer f_σ düşük olursa az bir kuvvetle saçaklar oluşturulabilmektedir. Böylece bağıl olarak düşük yüklerle çalışıldığı için modelde çarpılmalar olmamaktadır.

iii. Lineerlik: Fotoelastik modeller normal olarak bir metal prototipte ortaya çıkan gerilmelerin belirlenmesinde kullanılırlar. Bundan dolayı gerilme-şekil değiştirme diyagramlarının baş kısımları yeterince lineer olmalıdır.

iv. İzotropi ve homojenlik: Fotoelastik malzemelerin çoğu, sıvı polimerin kalıp haline getirilmiş iki cam levha arasına dökülmesi yoluyla hazırlanırlar. Bu şekilde dökülen polimerlerin moleküler zincirleri rastgele dağılmışlardır ve esas olarak izotropik ve homojendirler. Halbuki bazı durumlarda plastikler haddelenirler. O zaman moleküler zincirler haddelenme doğrultusunda dizilirler. Bu tip malzemeler anizotropik özellikler sergilerler. Bu ise herhangi bir normal fotoelastik uygulamada istenmeyen bir durumdur.

v. Sünme: Çoğu fotoelastik malzeme, uzun zaman fotoelastik incelemeye tabi tutulursa mekanik ve optik olarak sünmeye uğrarlar. Bu yüzden polimerik malzemeler elastik malzemeleri tam olarak karakterize edemezler. Bu yüzden malzemelerin f_σ değerleri deneyle birlikte kalibre edilmelidir.

vi. Elastisite modülü ve kopma mukavemeti: Elastisite modülü fotoelastik malzeme seçiminde önemli bir kriterdir. Çünkü elastisite modülü, uygulanan gerilmelerden dolayı modelin çarpılmasını kontrol etmektedir. Çarpılma fazla olursa, fotoelastik ölçmeler pek sağlıklı olmaz.

Eğer bir fotoelastik malzemenin kopma mukavemeti yüksek olursa daha büyük yükler uygulanabilir ve daha yüksek mertebeden saçaklar üretilebilir.

vii. Sıcaklığa duyarlılık: Eğer malzemenin saçak değerleri sıcaklıkla değişiyorsa büyük sıcaklık değişimlerinde elde edilen saçaklar hatalı olacaktır.

viii. Zaman-kenar etkisi, işlenebilirlik ve artık gerilmeler: Bir fotoelastik model, bir plastik levhadan kesilirken model sınırlarında saçaklar oluşabilir. Bunun önüne geçmek için yüksek devirli kesiciler kullanılmalı ve gerekirse model fırına konmalıdır. Modelin kesileceği levhada artık gerilmeler bulunmamalıdır.

Fotoelastik literatür incelendiğinde, çok sayıda farklı malzemenin fotoelastik özellik sergilediği ve bunların çoğunun da fotoelastik analizde kullanıldığı görülmektedir. Bugün fotoelastik analizlerin yaklaşık % 90'ı aşağıdaki 5 malzeme ile yapılmaktadır [20]:

- Katalin 61-893,
- Kastolit,
- Kolombiya reçinesi CR-39,
- Epoksi reçine,
- Üretan kauçuk.

6.4. Kalibrasyon Metotları

Bu metotlarla malzemenin saçak değeri f_{σ} belirlenir.

1. metot: Model malzemesinden eni w ve kalınlığı h olan bir çekme çubuğu hazırlanır. Çubuk bir P yükü ile çekildiğinde boğaz kısmında

$$\sigma_1 = \frac{P}{wh} \quad \text{ve} \quad \sigma_2 = 0 \quad (6.15)$$

gerilmeleri oluşur. Bu değerler (6.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{P}{wh} = \frac{N f_{\sigma}}{h}$$

buradan

$$f_{\sigma} = \frac{P}{wN} \quad (6.16)$$

2. metot: Burada da çapından basılmış dairesel bir disk kalibrasyon modeli olarak gözönüne alınır. Yatay çap boyunca ($y=0$) gerilme yayılımı

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_1 &= \frac{2P}{\pi hD} \left(\frac{D^2 - 4x^2}{D^2 + 4x^2} \right)^2 \\ \sigma_y = \sigma_2 &= -\frac{2P}{\pi hD} \left[\frac{4D^4}{(D^2 + 4x^2)^2} - 1 \right] \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

şeklindedir. Burada D , diskin çapını, x , diskin merkezinden yatay uzaklığı ve h , diskin kalınlığını göstermektedir. Asal gerilme farkı yazılırsa

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{8P}{\pi hD} \frac{D^4 - 4D^2x^2}{(D^2 + 4x^2)^2} = \frac{N f_{\sigma}}{h}$$

buradan

$$f_{\sigma} = \frac{8P}{\pi DN} \frac{D^4 - 4D^2x^2}{(D^2 + 4x^2)^2} \quad (6.18)$$

elde edilir. Kalibrasyon noktası olarak diskin merkezi kullanılacak olursa $x=0$ yazılır ve

$$f_{\sigma} = \frac{8P}{\pi DN} \quad (6.19)$$

elde edilir.

3. metot: İki ucundan mesnetlenmiş, genişliği h ve yüksekliği b olan bir kiriş mesnetlere a uzaklıkta iki P yükü ile yüklenir. Kirişin orta kısmında alt ve üst noktadaki gerilmeler

$$\sigma_x = \sigma_1 = \frac{M y}{I_z} = \frac{P a \frac{b}{2}}{\frac{h b^3}{12}} = \frac{6 P a}{h b^2}$$

$$\sigma_y = \sigma_2 = 0$$

$$\tau_{xy} = 0$$
(6.20)

şeklindedir. Buradan

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{6 P a}{h b^2} = \frac{N f_\sigma}{h}$$

ve buradan da

$$f_\sigma = \frac{6 P a}{N b^2}$$
(6.21)

elde edilir

Üç metotta da elde edilen değerler kalınlıktan bağımsızdır.

6.5. Analiz Teknikleri

6.5.1. İzokromatik saçaklar

Dairesel polariskoba yerleştirilmiş gerilmiş bir model incelendiğinde asal gerilme farkının ($\sigma_1 - \sigma_2$) sabit olduğu çizgiler görülür. İşte bu çizgilere "izokromatik saçaklar" denir. Karanlık alanlı dairesele polariskopta saçak mertebeleri $N=0,1,2,\dots$ şeklinde, aydınlık alanlı dairesele polariskopta ise saçak mertebeleri $N = \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, \dots$ şeklinde elde edilir. Sıfırıncı mertebeden saçak siyah diğerleri renklidir. Model içerisindeki herhangi bir noktada saçak mertebesi belirlendiği takdirde asal gerilme farkı (6.10) denkleminde elde edilebilir. Eğer düzlem gerilme hali inceleniyorsa maksimum kayma gerilmesi

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$
(6.22)

denkleminde bulunur. Serbest sınırlardaki bir noktada asal gerilmelerden birisi sıfır olduğundan diğeri

$$\sigma_1, -\sigma_2 = \frac{N f \sigma}{h} \quad (6.23)$$

denklemden elde edilir. Yüklü sınırlarda ise asal gerilmelerden birisi dış yüke eşittir.

6.5.2. İzoklinik ve izostatik saçaklar

Düzlem polariskoba yerleştirilmiş gerilmiş bir modelde izokromatik saçakların yanında bir de asal gerilme doğrultularının sabit olduğu siyah çizgiler görülür. Bu çizgilere "izoklinik saçaklar" denir. Değişik doğrultulardaki izoklinikler bulunmak istendiğinde polariskop açısı değiştirilir ve elde edilen bütün çizgiler bir çizimde birleştirilir. İzoklinik saçak desenlerinin şu özellikleri vardır:

- i. Bütün parametrelerin izoklinikleri izotropik ($\sigma_1=\sigma_2$) veya tekil bir noktadan mutlaka geçerler.
- ii. Eğer modelde bir simetri ekseni varsa, parametrelerden birinin izokliniği mutlaka simetri ekseni ile çakışır.
- iii. İzokliniğin parametresi sınırdaki eğimden tayin edilebilir.
- iv. Bütün parametrelerin izoklinikleri tekil yükün uygulama noktasından geçerler.

Mühendislik alanında asal eksen doğrultularının değişimi, asal gerilme yörüngeleri adı verilen eğriler yardımı ile belirlenir. Bu eğrilere fotoelastisitede ayrıca "izostatik saçaklar" da denir. Gözönüne alınan herhangi bir noktada eğriye çizilen teğet asal gerilmelerden birinin doğrultusunu verir. Buna dik doğrultu ise diğer asal gerilmenin doğrultusudur. İzostatiklerin çiziminde izlenen yollardan birisi şudur:

0° parametrelili izoklinik üzerinde eşit aralıklarla noktalar işaretlenir. Daha sonra bu noktalardan izokliniğe dik doğrular çizilir. Bu doğrular ikinci parametrelili izokliniği kesene kadar uzatılır. İki izoklinik arasında kalan doğru parçasının ortasından ikinci parametre kadarlık açıyla bir doğru daha çizilir ve üçüncü parametrelili izokliniği kesene kadar uzatılır. Bu prosedüre böylece devam edilir.

İzoklinik saçaklar üzerinde asal gerilmelerin doğrultuları bilindiğine göre herhangi bir noktadaki kayma gerilmesi

$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta = -\frac{N f_{\sigma}}{2h} \sin 2\theta \quad (6.24)$$

bağıntısından bulunur. Burada θ , σ_1 ile x eksenini arasındaki açıyı göstermektedir. Eğer θ_1 , σ_2 ile x eksenini arasındaki açıyı gösterirse o zaman

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta_1 = \frac{N f_{\sigma}}{2h} \sin 2\theta_1 \quad (6.25)$$

yazılır.

6.5.3. Kompensasyon teknikleri

Karanlık ve aydınlık alanda elde edilen saçaklar ile saçak mertebesi 1/2 hassasiyete kadar elde edilebilmektedir. Ancak herhangi bir noktadaki saçak mertebesi daha hassas bir şekilde belirlenmek istendiğinde kompensasyon teknikleri kullanılmalıdır. Bunlardan en çok kullanılan ikisi Babinet-Soleil metodu ve Tardy metodudur.

6.5.3.1. Babinet-Soleil metodu

Bu metotla saçak mertebesinin ölçülmesi için kompensatör denilen bir cihaza gerek vardır. Yüklenmiş bir modelde incelemeye alınan noktada izoklinik saçaklar yardımı ile asal gerilme doğrultusu bulunur. Daha sonra dairesel polariskop sisteminde incelenen noktada asal gerilme doğrultusu ile kompensatör eksenini çakışacak şekilde kompensatör yerleştirilir. Kompensatör model ile ikinci çeyrek dalga plakası arasına yerleştirilmelidir. İncelenen noktaya tutulan kompensatörün vidası o noktada karanlık elde edilinceye kadar çevrilir. Kompensatördeki numaratoründen okunan değer, kompensatör sabitine bölünerek o noktadaki saçak mertebesi binde bir hassasiyetle bulunur.

6.5.3.2. Tardy metodu

Bu metotta polarizerin eksenini, asal gerilme doğrultusu ile karşılaştırılır. Daha sonra incelenen noktadan bir saçak geçinceye kadar analizör döndürülür. İkinci çeyrek dalga plakasından çıkan ışığın bileşenleri

$$\begin{aligned} A_1^v &= \frac{\sqrt{2}}{2} k \cos \omega t \left(\cos \frac{\Delta}{2} - \sin \frac{\Delta}{2} \right) \\ A_2^v &= \frac{\sqrt{2}}{2} k \cos \omega t \left(\cos \frac{\Delta}{2} + \sin \frac{\Delta}{2} \right) \end{aligned} \quad (6.26)$$

şeklinde dir. Analizör, ölçme yapılan noktada sönme elde etmek için γ kadar döndürülmüşse o zaman analizörden geçen ışığın genliği

$$A = A_2^v \cos \left(\frac{\pi}{4} + \gamma \right) - A_1^v \cos \left(\frac{\pi}{4} - \gamma \right) \quad (6.27)$$

dir. Bu denklemd e değerler yerine yazılırsa

$$\sin \left(\frac{\Delta}{2} - \gamma \right) = 0$$

ve

$$\frac{\Delta}{2} - \gamma = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.28)$$

elde edilir. Buradan

$$N = \frac{\Delta}{2\pi} = n + \frac{\gamma}{\pi} \quad (6.29)$$

bulunur. Eğer analizör negatif yönde γ_1 kadar döndürülmüş ise

$$N = n - \frac{\gamma_1}{\pi} \quad (6.30)$$

denklemini kullanılır. Bu yöntemle elde edilen saçak mertebesi yüzde bir hassasiyettedir.

6.5.4. Ayırma teknikleri

Şimdiye kadar ele alınan fotoelastik teori ile ancak asal gerilme farkı belirlenebilmektedir. Ama modelin içindeki noktalarda asal gerilmelerin değerlerinin bulunabilmesi için ikinci bir bağıntıya ihtiyaç vardır. İşte asal gerilmeleri birbirinden ayırmada kullanılan tekniklere "ayırma teknikleri (separation techniques)" denir. Bunun için birçok metot geliştirilmiştir. Bunlardan bazılarını şöyle sıralayabiliriz:

- i. Kayma farkı metodu,
- ii. Girişim (interferometer) metotları,
- iii. Elektriksel analogi metotları,
- iv. Eğik-geliş (oblique-incidence) metodu,
- v. Asal eksenler boyunca integrasyon metodu,
- vi. Relaksasyon metodu,
- vii. Laplace denkleminin iterasyonla çözümü,
- viii. Harmonik serilerle çözüm.

"Kayma farkı metodu" aşağıda anlatılmıştır.

6.5.4.1. Kayma farkı metodu

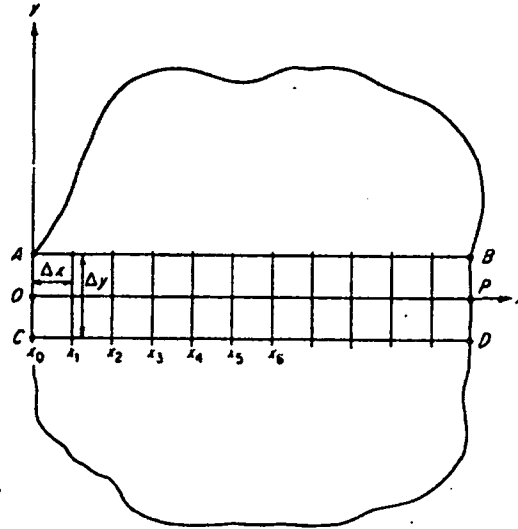
Bu metot, modelin içindeki noktalarda asal gerilmeleri denge denklemlerinden yararlanarak elde eder. Kütle kuvvetleri ihmal edilir ve birinci denklem x boyunca integre edilirse

$$\int_0^{x_1} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx = - \int_0^{x_1} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx \quad (6.31)$$

elde edilir. Bu denklem sonlu farklar metodu kullanılarak nümerik olarak çözülebilir. Kısmi diferansiyel denklem yerine sonlu fark denklemini yazılacak olursa

$$\int_0^{x_1} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx = \sigma_x \Big|_{x_1} - \sigma_x \Big|_{x_0} = - \frac{\Delta \tau_{xy}}{\Delta y} \Big|_{(x_0+x_1)/2} \Delta x \quad (6.32)$$

Şekil 6.4'te x ve y eksenleri boyunca Δx ve Δy sonlu aralıklarına bölünmüş bir model görülmektedir. Eğer $\Delta x = \Delta y$ alınırsa



Şekil 6.4. Kayma farkı metodunun uygulanmasında kullanılan ızgara sistemi

$$\sigma_x \Big|_{x_1} = \sigma_x \Big|_{x_0} - \Delta\tau_{xy} \Big|_{(x_0+x_1)/2} \quad (6.33)$$

elde edilir. Bu işlem ardışık olarak diğer noktalar için de yapılarak bütün noktalardaki gerilme değerleri bulunmuş olur. Metodun zayıf tarafı hataların üstüste binmesidir.

Metot şu şekilde uygulanır:

- i. Model üzerinde OP, AB ve CD doğruları çizilir ve $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ noktaları işaretlenir.
- ii. OP, AB ve CD boyunca izokromatik saçak mertebeleri bulunur ve yazılır.
- iii. Bu üç doğru boyunca asal gerilme doğrultularını veren izoklinik parametreler bulunur ve yazılır.
- iv. AB ve CD doğruları boyunca (6.24) denklemi ile τ_{xy} değerleri bulunur ve yazılır.
- v. $\Delta\tau_{xy} = \tau_{xy} \Big|_{AB} - \tau_{xy} \Big|_{CD}$ değerleri $(x_0+x_1)/2, (x_1+x_2)/2, (x_2+x_3)/2, \dots$ noktaları için bulunur.
- vi. σ_x değerleri OP boyunca (6.33) denkleminde hesaplanır.
- vii. Mohr dairesinden σ_y hesaplanır.

$$\sigma_y = \sigma_x - (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta = \sigma_x - \frac{N f_{\sigma}}{h} \cos 2\theta \quad (6.34)$$

viii. Gerilmenin birinci invariantı ve (6.10) bağıntısı ile σ_1 ve σ_2 elde edilir.

$$\begin{aligned}\sigma_x + \sigma_y &= \sigma_1 + \sigma_2 \\ \frac{N f_\sigma}{h} &= \sigma_1 - \sigma_2\end{aligned}$$

Bu iki denklemden

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{2} \left(\sigma_x + \sigma_y + \frac{N f_\sigma}{h} \right) \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} \left(\sigma_x + \sigma_y - \frac{N f_\sigma}{h} \right)\end{aligned}\tag{6.35}$$

elde edilir.

6.6. Model İle Prototip Arasındaki Bağıntılar

Düzlem gerilme halinde bir levhanın gerilme durumu, herhangi bir yükleme halinde, bulunmak istenirse diferansiyel denge denklemleri ile birlikte bir de uygunluk denkleminin olduğunu söylemiştik. Bu denklem elastisite modülünden bağımsız olduğundan elastisite modülü levhadaki gerilme dağılımını etkilememektedir. Kütle kuvvetleri ihmal edildiği zaman da Poisson oranının etkisi olmamaktadır.

Model, prototipin geometrik olarak benzeri olduğundan ve dış yükler de orantılı olduğundan prototipteki bir noktada gerilme ve deplasman değerleri aşağıdaki bağıntılardan bulunabilir.

$$\sigma_p = \sigma_m \frac{P_p h_m l_m}{P_m h_p l_p}\tag{6.36}$$

$$\delta_p = \delta_m \frac{P_p E_m h_m}{P_m E_p h_p}\tag{6.37}$$

Burada σ , gerilmeyi, δ , deplasmanı, P , uygulanan yükü, h , kalınlığı ve l , belirli bir uzunluğu göstermektedir. p ve m indisleri ise sırası ile prototip ve model için kullanılmıştır.

6.7. Deneyin Yapılışı ve Dikkat Edilecek Noktalar

Fotoelastik modeller dış tesirlere karşı çok duyarlı oldukları için hazırlık ve deney sırasında aşağıdaki noktalara dikkat edilmelidir:

i. Modelin yapılacağı levhada artık gerilme olup olmadığı polariskopta kontrol edildikten sonra modelden 0.5 cm kadar daha büyük bir parça elektrikli testere ile kesilir ve eşit aralıklarla karelaj yapılır.

ii. 3 mm kalınlığında alüminyumdan, modelin bir benzeri yapılır. Daha önce kesilen kaba model parçası çift tarafı yapışkan şeritle alüminyum modele yapıştırılır. Daha sonra yüksek devirli (20 000 rpm) bir kesici ile fazlalıklar alınır. Fazlalıkları alınırken bütün fazlalık bir seferde alınmayıp her seferinde 2 mm alınarak böylece devam edilir. Bu esnada modelin ısınmamasına gayret gösterilir.

iii. Herhangi bir sebeple levhada delik açmak gerektiğinde matkap ucuna yağ dökülerek ısınma önlenir.

iv. Hazırlanmış olan model fırına yerleştirilip sıcaklık 100 °C'a kadar artırılır. Model üzerinde istenen saçaklar oluşuncaya kadar yükleme yapılır. Daha sonra kendi halinde soğumaya bırakılan fırından bir gün sonra model çıkartılır.

v. Teorik yükleme şartları deneylerde titizlikle gerçekleştirilmelidir. Deney modeli elde fazla oynanmamalı, kalorifer ve soba gibi ısıtıcıların yapacakları olumsuz etkilerden korunmalıdır.

vi. Modeli polariskoba yerleştirdikten sonra istenen kesit ve noktalarda okumalar yapılır. İzokromatların kesirli kısımları kompensatörle veya Tardy metodu ile ölçülür. Buradan da gerilmeler hesaplanır.

vii. Fotoelastik deneyle asal gerilme yörüngelerini veren izostatik saçakları elde edebilmek için önce izoklinik saçaklar çizilmelidir. İzoklinik saçakların çiziminde, önce izokliniklerin genel gidişi belirlenir ve karelaj noktaları gözetlenerek herbirinin çizimi ayrı ayrı yapılır. Daha sonra da bütün izoklinikler birlikte bir kağıda çizilir. İzoklinik saçakların çiziminde herbir parametre için ayrı ayrı modelin fotoğrafı çekilip fotoğraflar yardımı ile de izoklinikler çizilebilir.

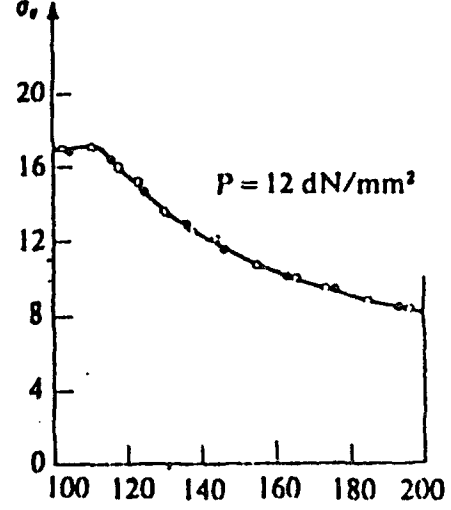
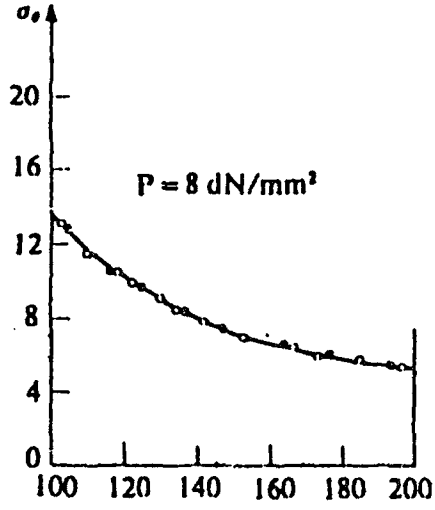
7. NÜMERİK SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

7.1. Giriş

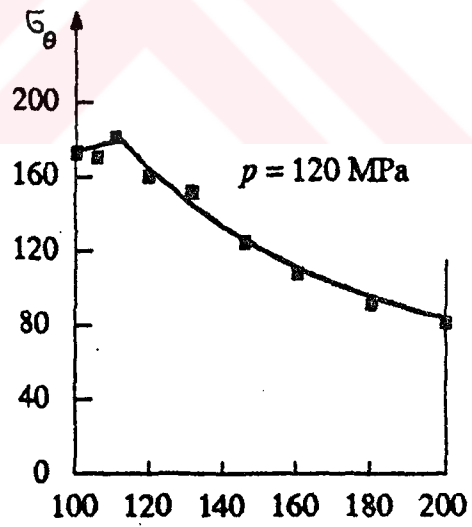
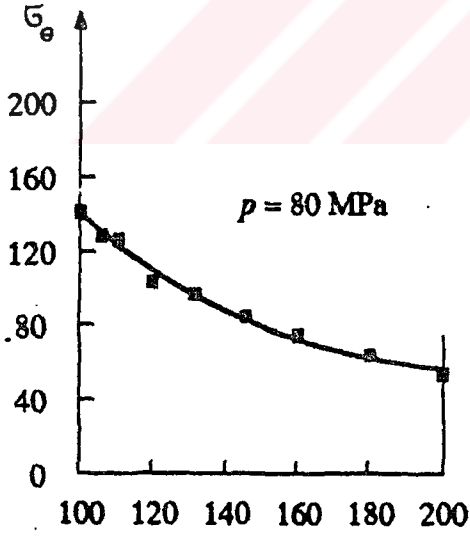
Problemin çözümü için geliştirilen bilgisayar programlarının sağlıklı sonuç verip vermediğini kontrol etmek amacıyla, çözümü daha önceden yapılmış problemler ele alınmıştır. İlk önce, aksel olarak yüklenmiş faturalı bir levhanın çözümü yapılmıştır. Düzlem gerilme şartlarına uyan bu problemin sonlu eleman çözümü Segerlind (1976) tarafından verilmiştir [76]. Adı geçen referansta da olduğu gibi aksel simetriden dolayı levhanın yarısı gözönüne alınmış ve 95 düğüm noktası oluşturacak şekilde elemanlara bölünmüştür. Bu problemde ortaya çıkan en büyük asal gerilme değeri, ortalama gerilmeye bölünerek gerilme konsantrasyon katsayısı elde edilmiştir. Segerlind'in çözümünde bu değer 1.47 iken bizim çözümümüzde de 1.47 olmuştur. Birbirinin aynısı olan bu değerler, Singer (1962) tarafından verilen 1.42 değerine oldukça yakındır [79].

İkinci olarak, içten basınca maruz kalın cidarlı bir silindirde oluşan gerilmeler elasto-plastik analizle bulunmuştur. Düzlem şekil değiştirme şartlarına uyan bu problemin sonlu eleman çözümünü de Owen ile Hinton (1986) ve Hodge ile White (1950) yapmışlardır [65,34]. Kalın cidarlı silindire içten uygulanan basınç kademe kademe artırılarak gerilme dağılımları elde edilmiştir. Elasto-plastik olarak yapılmış olan çözümün sonuçları ile referanslarda verilen sonuçların karşılaştırılması ise Şekil 7.1'de yapılmıştır. Şekil 7.1'den görüldüğü gibi bulunan gerilme değerleri ile referanslarda verilen değerler birbirine çok yakındır.

Üçüncü olarak, bir rulolu zincir baklasında oluşan gerilmelerin analizi yapılmış ve diğer referanslardaki deneysel ve teorik çözümlerle karşılaştırılmıştır [3,41]. Bu problemle ilgili sonlu elemanlarla teorik çalışma Antonescu ile Dix (1975) tarafından ve deneysel çalışma Kin ile Dubrovsky (1986) tarafından yapılmıştır. Buradan elde



(a)

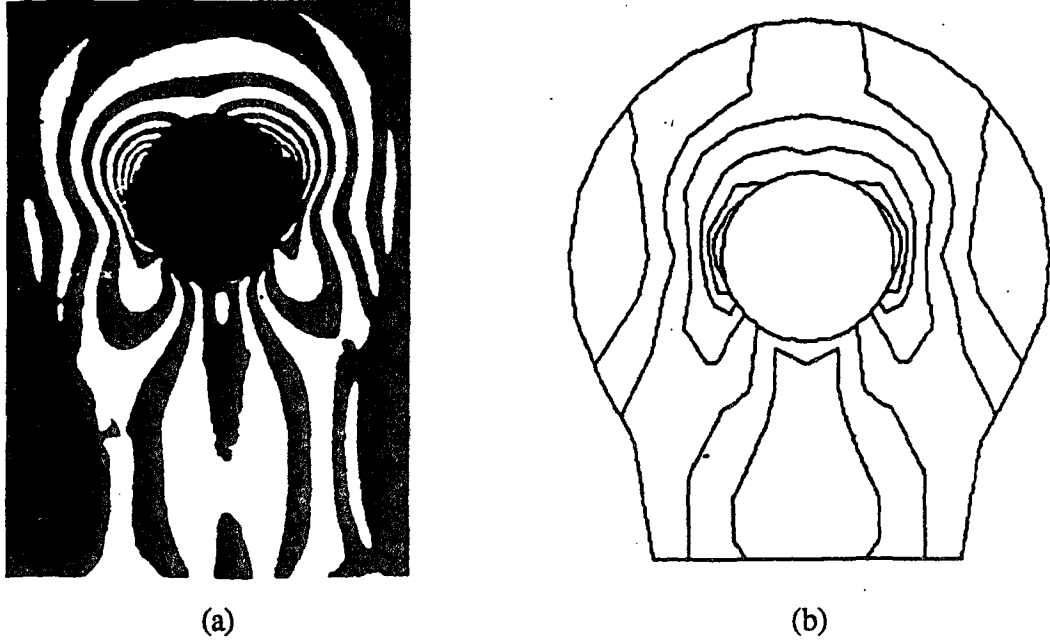


(b)

Şekil 7.1. İçten basınca maruz, kalın cidarlı silindirin farklı basınç değerleri için σ_r değerleri ($r_{iç}=100$ mm, $r_{dış}=200$ mm, $E=210$ GPa, $\nu=0.3$, $Y=240$ MPa)

a. (—) Referans 34; (●, ●) Referans 65

b. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar



Şekil 7.2. Rulolu zincir baklasında

- a) Fotoelastik yolla elde edilmiş gerilme dağılımı [41]
 b) Bu çalışmada sonlu elemanlar metodu ile elde edilmiş asal gerilme farkı yörüngeleri

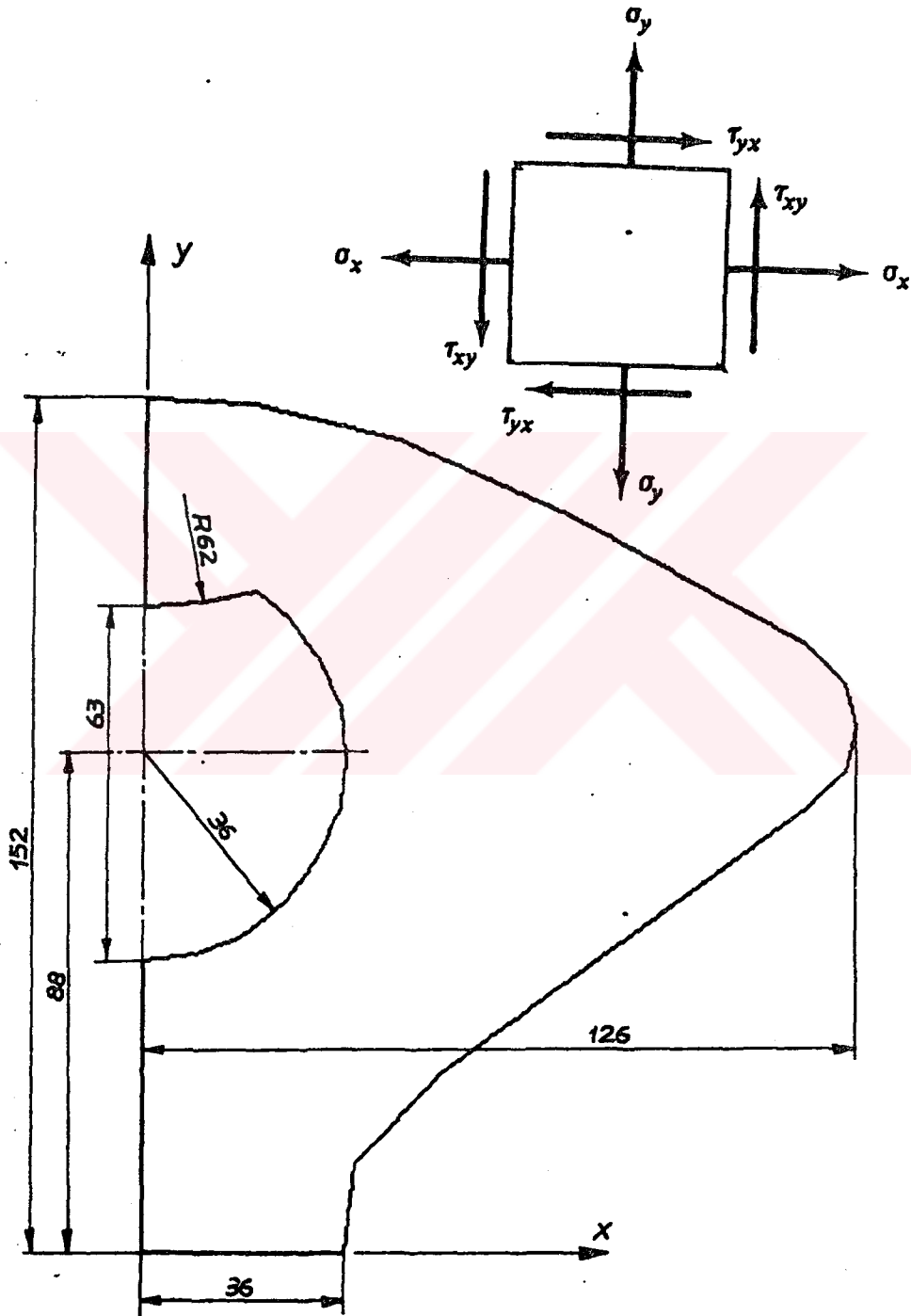
edilen sonuçların da birbiri ile uyum içerisinde olduğu görülmüştür (Şekil 7.2).

Bu karşılaştırmalardan, geliştirilen bilgisayar programının sağlıklı sonuçlar verdiği karar verilmiş ve problemin çözümüne geçilmiştir. Elasto-plastik olarak incelenen zincir baklası için Ç1060 malzemesi gözönüne alınmıştır. Bu malzemeye ait plastik mukavemet katsayısı K ve şekil değiştirme sertleşmesi üsteli n , Tablo 7.1`de verilmiştir. Bu değerler çekme deneyinden elde edilen kuvvet-uzama diyagramından faydalanılarak bulunmuştur. Ayrıca Elastisite modülü $E=210$ GPa ve Poisson oranı $\nu=0.3$ olarak alınmıştır. Dişli zincir baklasına ait boyutlar ise Şekil 7.3`te verilmiştir.

Baklanın kalınlığı diğer boyutlarına göre çok daha küçük ve uygulanan kuvvet bakla düzleminde olduğundan düzlem gerilme hali sözkonusudur. Yani gerilme vektörünün sıfır olmayan eleman sayısı üçtür.

Tablo 7.1. Ç1060 için pekleşme oranı ve pekleşme üsteli

Malzeme	K	n	Y (MPa)
Ç1060	198.5	0.5644	480



Şekil 7.3. Dişli zincir baklası boyutları

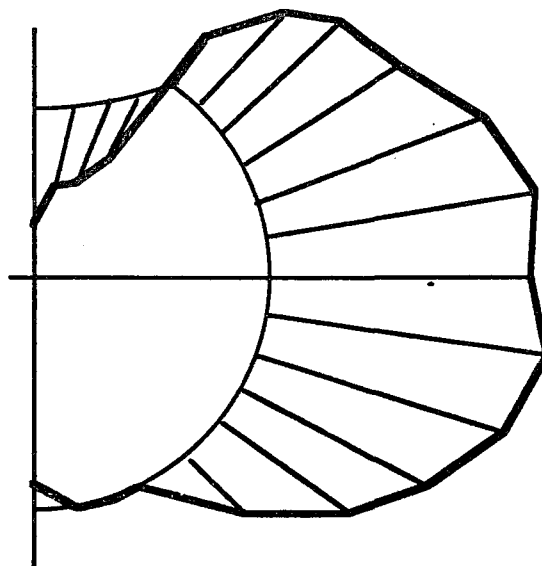
Baklanın sonlu elemanlara bölünmüş hali Şekil 7.5'te verilmiştir. Üçgen elemanlara bölünmüş olan dişli zincir baklasında, 243 eleman ve 154 düğüm noktası bulunmaktadır. Bakla sonlu elemanlara bölünürken simetriden dolayı dörttebir parçası gözönüne alınmış ve gerçek boyutlarının 7 katı büyütülmüştür. Boyutlar büyütülünce, boyutlarla birlikte, uygulanan pim kuvveti de o oranda büyütülmüştür. Yalnız kalınlık değiştirilmemiştir.

7.2. Elastik Gerilmeler

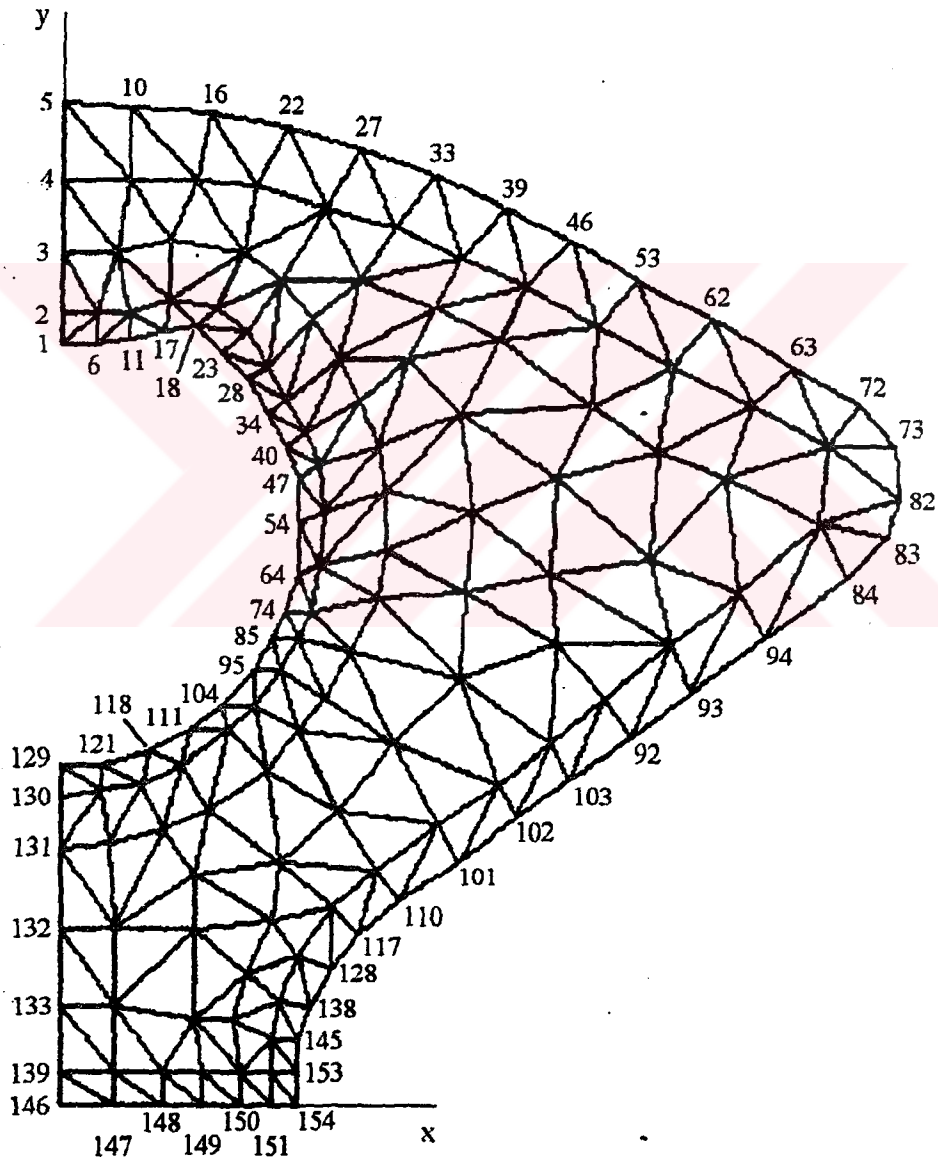
Problemin çözümü yapıldığında, eşdeğer gerilmenin en büyük değeri aldığı 64 nolu düğüm noktası en kritik nokta olarak tespit edilmiştir. Bu düğüm noktasını, delik üzerinde bulunan 47 ve 54 nolu düğümler takip etmiştir.

Pim deliği üzerinde σ_1 gerilmesinin dağılımı Şekil 7.4'te verilmiştir. En büyük gerilme 64 nolu düğümde ortaya çıkmıştır. Bu düğümünden itibaren saat yönünde gidildikçe sifira, oradan da negatif değere ulaşmıştır. 64 nolu düğümünden saat yönünün tersine gidildiği zaman gerilmedeki düşüş daha hızlı olmuş, negatif yönde artış başlamıştır. Referans 41'deki dairesel delikli zincir baklalarında, delik civarındaki gerilme dağılımı ile bu çalışmada bulunan gerilme dağılımının birbiri ile uyumlu olduğu görülür.

78.5 kN'luk yük (elastik bölge) için bütün düğümlerde oluşan gerilmeler Tablo 7.2'de verilmiştir.



Şekil 7.4. Dişli zincir baklası pim deliği üzerinde gerilme dağılımı (σ_1)



Şekil 7.5. Sonlu elemanlara bölünmüş dişli zincir baklası

Tablo 7.2. Dişli zincir baklasında, elastik bölgede oluşan gerilmeler
($F=78.5$ kN)

Düğüm No	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	$\sigma_1 - \sigma_2$ (MPa)	$\bar{\sigma}$ (MPa)	θ (°)	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	τ_{xy} (MPa)
1	-178	-187	9	183	-70	-186	-179	-3
2	-114	-164	50	146	-30	-127	-151	-21
3	2	-102	104	103	-8	0	-100	-13
4	93	-48	141	124	-10	88	-44	-24
5	223	27	197	211	-4	222	27	-13
6	-126	-192	66	169	88	-192	-126	3
7	-82	-129	46	113	-9	-83	-128	-7
8	39	-95	134	119	-15	30	-86	-33
9	143	-47	190	171	-14	132	-36	-44
10	244	-5	249	246	-6	241	-3	-26
11	-138	-218	80	191	-77	-214	-142	-18
12	-84	-179	95	155	-37	-118	-145	-45
13	41	-138	179	163	-33	-11	-87	-81
14	90	-107	197	171	-34	29	-46	-91
15	134	-46	179	161	-27	96	-8	-73
16	184	-9	192	188	-14	173	2	-44
17	-96	-151	54	132	-25	-106	-141	-21
18	85	-149	233	205	-33	16	-80	-106
19	109	-108	217	188	-49	-15	16	-107
20	127	-92	219	190	-47	10	24	-109
21	104	-46	151	134	-37	50	8	-72
22	110	-1	110	110	-24	91	18	-41
23	188	-150	338	293	-48	5	33	-168
24	193	-114	307	268	-51	8	71	-150
25	125	-84	210	183	-58	-26	67	-94
26	80	-45	124	109	-54	-2	38	-59
27	35	-12	46	42	-52	6	17	-22
28	241	-101	343	305	-55	13	128	-161
29	188	-104	291	256	-59	-26	110	-129
30	159	-70	229	203	-65	-28	118	-88
31	100	-49	149	131	-69	-29	81	-50
32	35	-30	65	56	-70	-22	27	-21
33	16	-36	52	46	-88	-36	16	-2
34	276	-88	364	329	-62	-7	196	-151
35	241	-82	323	291	-65	-26	184	-123
36	143	-47	190	171	-75	-33	129	-49
37	63	-28	91	81	-84	-27	62	-10
38	14	-33	47	41	-88	-32	14	-1

Tablo 7.2. Dişli zincir baklasında, elastik bölgede oluşan gerilmeler
(Devamı)

Düğüm No	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	$\sigma_1 - \sigma_2$ (MPa)	$\bar{\sigma}$ (MPa)	θ (°)	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	τ_{xy} (MPa)
39	12	-71	83	77	73	-64	5	23
40	377	-30	407	393	-72	10	336	-122
41	270	-47	318	297	-72	-15	238	-96
42	175	-20	195	186	-81	-16	171	-28
43	105	-16	121	113	-83	-14	103	-14
44	26	-7	33	30	68	-2	22	11
45	8	-37	45	41	58	-24	-4	20
46	3	-76	79	78	64	-61	-13	31
47	419	30	389	405	-81	41	408	-64
48	299	18	280	290	-79	29	288	-54
49	161	11	149	155	-90	11	161	-1
50	63	21	43	56	73	24	60	12
51	22	-14	36	31	31	12	-5	16
52	7	-38	45	42	45	-16	-16	22
53	-1	-68	67	67	60	-51	-18	29
54	392	-6	398	395	88	-5	391	17
55	312	40	273	295	-84	43	309	-28
56	161	49	112	143	85	50	160	10
57	70	45	26	62	68	48	67	9
58	34	6	28	32	11	33	7	5
59	23	-25	48	41	13	20	-23	10
60	9	-23	32	29	27	2	-17	13
61	12	-34	46	42	39	-6	-16	23
62	-1	-42	42	42	54	-28	-16	20
63	-0	-20	20	20	49	-11	-9	10
64	424	-2	425	425	77	21	401	96
65	284	57	226	260	87	58	283	14
66	144	55	89	126	79	59	141	16
67	60	42	19	53	1	42	60	-0
68	32	0	32	32	-3	32	1	-2
69	24	-22	45	39	-4	23	-22	-3
70	11	-21	33	29	6	11	-21	3
71	5	-11	15	13	14	4	-10	4
72	-0	-9	9	9	37	-3	-6	4
73	3	-0	3	3	-8	-0	3	0
74	393	-4	397	395	68	52	336	139
75	305	53	252	282	82	58	300	35

Tablo 7.2. Dişli zincir baklasında, elastik bölgede oluşan gerilmeler
(Devamı)

Düğüm No	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	$\sigma_1 - \sigma_2$ (MPa)	$\bar{\sigma}$ (MPa)	θ (°)	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	τ_{xy} (MPa)
76	161	55	105	141	85	56	160	9
77	63	5	59	61	-83	6	62	-8
78	21	-13	34	30	-35	10	-2	-16
79	20	-41	61	54	-28	7	-27	-25
80	10	-28	38	34	-21	5	-23	-13
81	6	-14	20	18	-11	5	-13	-4
82	-2	-9	7	8	-1	-2	-9	-0
83	3	2	0	3	28	2	3	-0
84	-1	-16	16	16	-41	-7	-9	-8
85	323	10	314	319	63	78	256	129
86	268	26	242	256	75	42	252	60
87	170	12	158	164	88	12	170	7
88	116	-31	147	134	86	-30	115	12
89	19	-45	64	57	-72	-39	13	-19
90	12	-54	66	61	-46	-22	-20	-33
91	17	-62	80	73	-42	-18	-28	-40
92	-12	-85	74	80	-60	-66	-31	-32
93	-4	-65	62	64	-54	-44	-26	-29
94	3	-28	31	29	-43	-11	-13	-15
95	235	5	230	233	55	81	160	108
96	224	3	221	222	70	29	197	72
97	201	-16	217	210	81	-10	195	36
98	170	-51	221	201	83	-47	166	29
99	148	-60	208	185	80	-53	141	37
100	53	-40	93	81	88	-40	52	4
101	0	-51	51	51	-75	-47	-3	-13
102	-7	-101	94	98	-64	-83	-26	-38
103	-8	-108	100	104	-63	-87	-29	-41
104	113	5	107	110	52	45	72	52
105	177	-24	201	190	69	2	152	67
106	96	-56	151	133	73	-42	83	43
107	160	-72	232	206	79	-63	151	45
108	159	-54	213	192	76	-42	147	49
109	106	-40	147	131	75	-30	96	37
110	58	-20	78	70	58	3	36	35
111	10	-28	38	34	-82	-27	9	-5
112	48	-98	146	129	79	-92	42	29
113	113	-81	195	169	76	-70	102	45
114	100	-22	122	112	73	-11	89	35

Tablo 7.2. Dişli zincir baklasında, elastik bölgede oluşan gerilmeler
(Devamı)

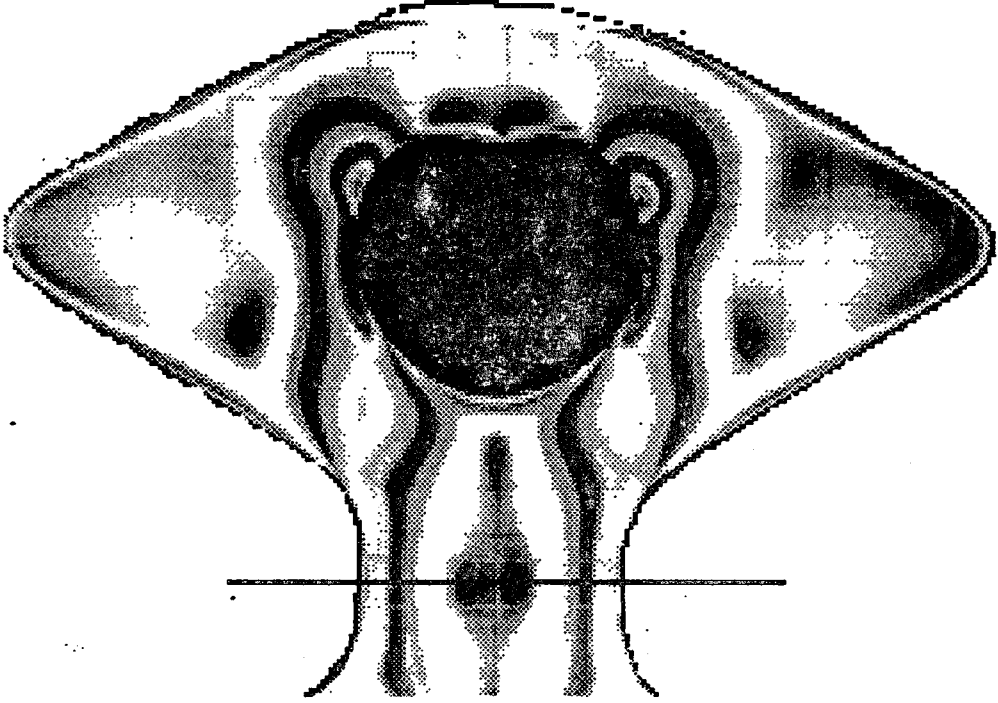
Düğüm No	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	$\sigma_1 - \sigma_2$ (MPa)	$\bar{\sigma}$ (MPa)	θ (°)	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	τ_{xy} (MPa)
115	159	-18	177	169	73	-3	144	50
116	170	-25	195	184	70	-2	147	63
117	172	3	169	171	54	63	112	81
118	12	-155	167	161	-76	-145	2	-40
119	4	-110	114	112	86	-109	3	9
120	52	-54	106	92	70	-42	40	34
121	6	-220	226	223	-80	-213	-1	-40
122	-7	-131	124	128	85	-130	-8	11
123	20	-57	77	69	77	-53	16	17
124	53	-6	59	56	66	4	43	22
125	103	20	83	95	68	32	91	30
126	158	23	134	148	69	41	141	45
127	204	8	196	200	70	31	181	63
128	267	22	245	256	58	92	197	111
129	-33	-197	165	183	-86	-196	-34	-12
130	4	-168	172	170	84	-166	3	18
131	18	-33	51	45	86	-33	18	4
132	55	42	13	50	7	55	42	1
133	78	53	26	69	-3	78	53	-1
134	74	45	29	64	62	52	68	12
135	119	55	64	103	74	60	114	17
136	182	50	132	163	73	61	171	37
137	218	25	193	206	72	43	199	57
138	310	18	292	302	64	75	253	116
139	76	63	13	71	10	76	63	2
140	79	61	18	72	5	79	61	1
141	105	62	43	91	67	69	98	16
142	139	58	81	121	87	58	139	5
143	183	42	141	166	80	46	179	25
144	219	33	187	205	79	40	212	36
145	325	31	294	311	74	54	302	79
146	76	59	17	69	-5	76	59	-1
147	75	64	11	70	3	75	64	0
148	93	71	22	84	84	72	93	2
149	113	48	65	98	-88	48	113	-2
150	170	50	121	152	88	50	170	3
151	209	13	196	203	-89	13	209	-3
152	244	16	229	237	87	16	244	12
153	286	24	263	275	83	28	282	33
154	235	15	220	228	-89	15	235	-3

Problemin sonlu elemanlar yöntemi ile teorik çözümü yapıldıktan sonra, elde edilen sonuçların kontrolünü yapmak için fotoelastik metotla bir deney yapılmıştır. Bu deneyden elde edilen sonuçlarla teorik sonuçların karşılaştırılması yapılmıştır.

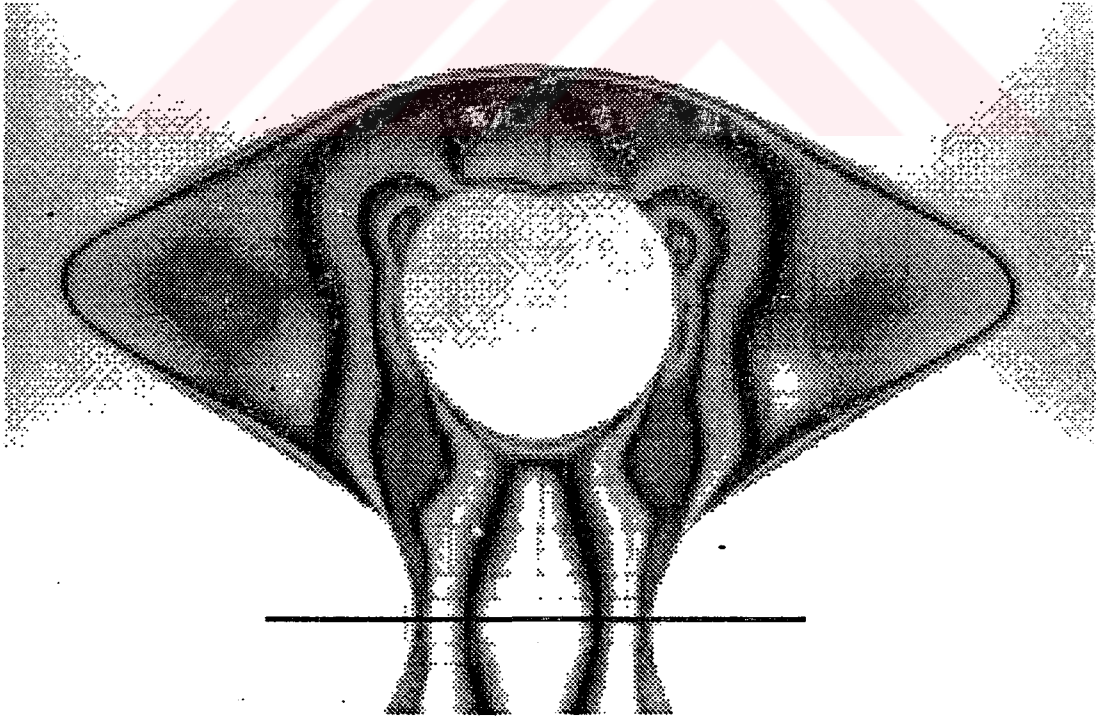
Bu amaçla deney numunesinden elde edilen eş-renk çizgilerinin (maksimum kayma gerilmesinin sabit olduğu noktalar), dairesel polariskobun karanlık ve aydınlık alan oryantasyonlarında birer fotoğrafı çekilmiştir (Şekil 7.6,7). Karanlık alan fotoğrafında $N=0,1,2...$ mertebeli eş-renk çizgileri görülmekte, aydınlık alan fotoğrafında ise $N = \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, \dots$ mertebeli eş-renk çizgileri görülmektedir. Bu fotoğraflarla kıyaslama yapabilmek için teorik yolla elde edilen sonuçlardan "asal gerilme farkı yörüngeleri" çizilmiştir (Şekil 7.8). Şekiller incelendiği zaman eş-renk çizgilerinin yayılma karakteri ile asal gerilme farkı yörüngelerinin yayılma karakterinin uyum içerisinde olduğu hemen dikkati çekmektedir.

Eş-renk çizgilerinden sonra başka bir kıyaslama yapmak için deneysel modelden eş-eğim çizgileri (asal gerilme doğrultularının sabit olduğu noktalar) çizilmiştir. Eş-eğim çizgileri 0° 'den başlayarak 15° aralıklarla ve hepsi aynı kağıt üzerine çizilmiştir (Şekil 7.9). Şekil incelendiği zaman eş-eğim çizgilerinin birkaç tane izotropik noktadan ($\sigma_1=\sigma_2$) geçtikleri görülmüştür. Bu noktalardan birisi y -simetri ekseninde, birisi x -simetri ekseninde, dört tanesi sınırlarda ve diğer ikisi ise baklanın iç kısımlarında ortaya çıkmıştır. Teorik yolla elde edilen eş-eğim çizgileri ise bütün parametreler için ayrı ayrı şekillerle gösterilmiştir (Şekil 7.10). Burada da şekiller incelendiği zaman benzerlik olduğu hemen fark edilmektedir.

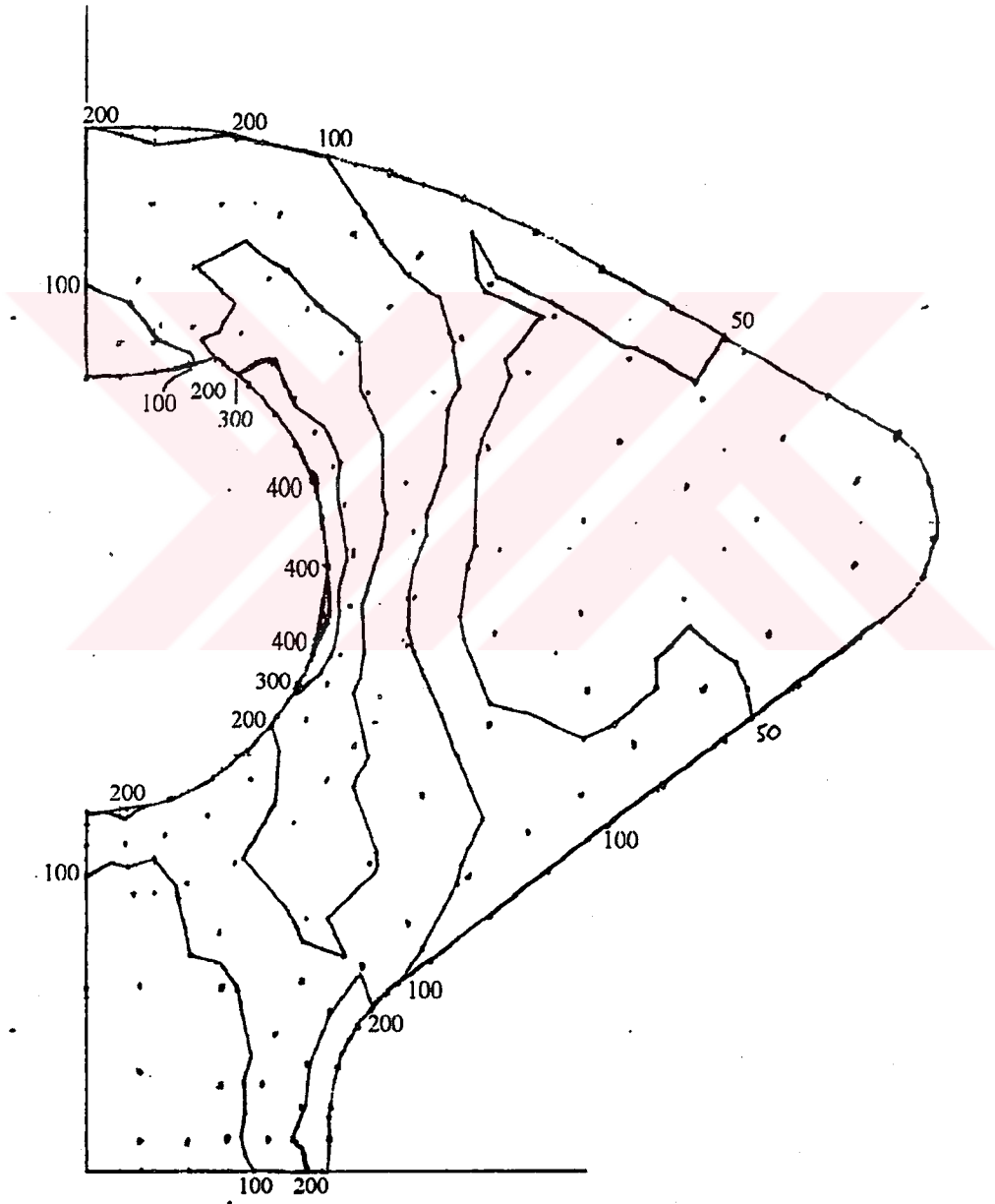
Üçüncü olarak deneysel metotta eş-eğim çizgilerinden çizilen asal gerilme yörüngeleri ile teorik yolla elde edilmiş olan asal gerilme doğrultuları verilmiştir (Şekil 7.11,12). Bu şekiller de incelendiği zaman sonuçların uyum içerisinde olduğu görülür.



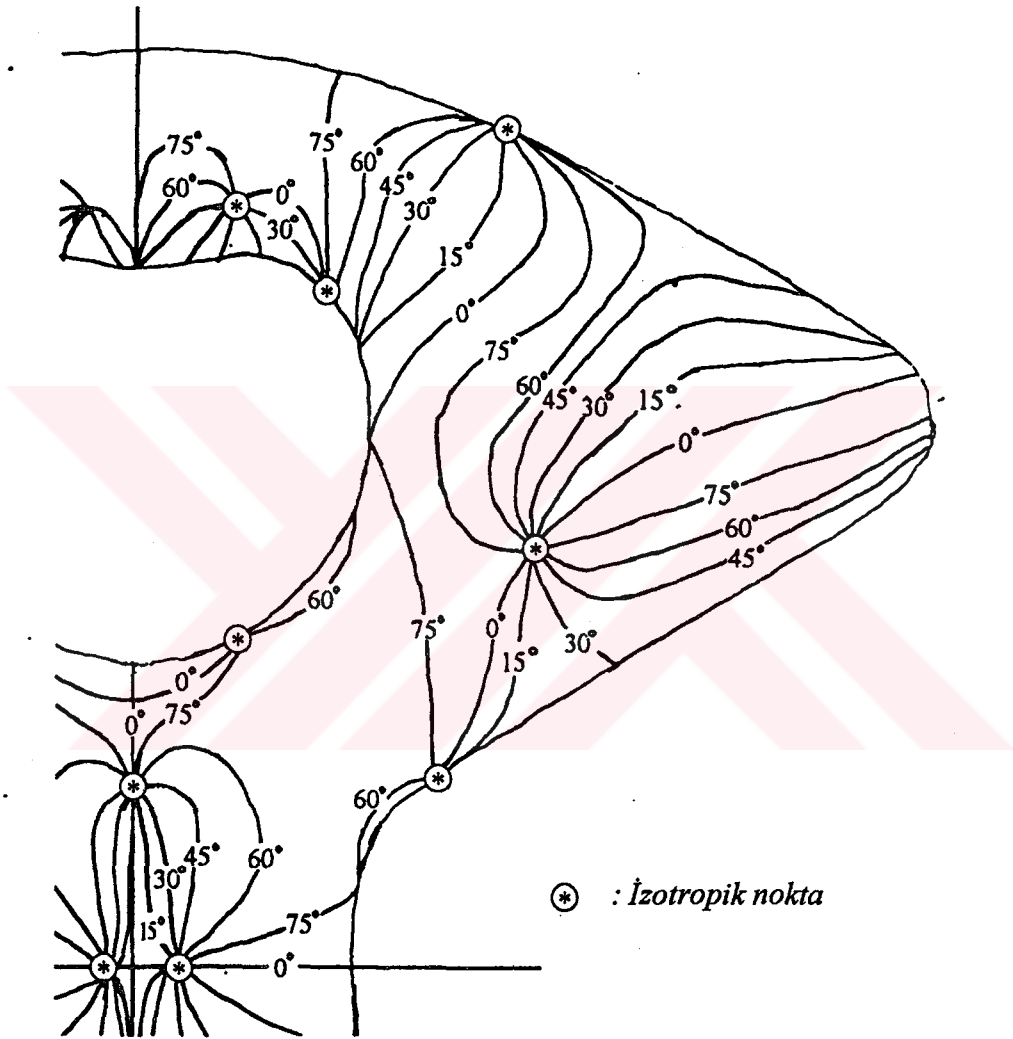
Şekil 7.6. Bifleks dişli zincir baklasında izokromatlar (Karanlık alan)



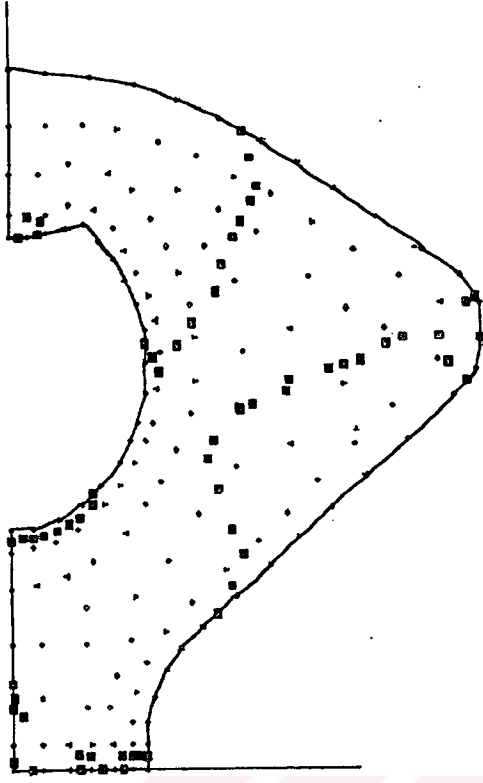
Şekil 7.7. Bifleks dişli zincir baklasında izokromatlar (Aydınlık alan)



Şekil 7.8. Dişli zincir baklasında, sonlu elemanlar metodu ile elde edilmiş asal gerilme farkı yörüngeleri



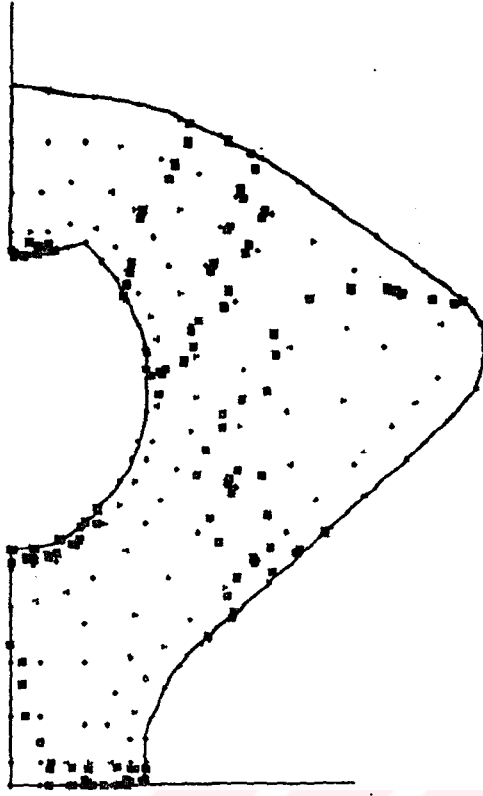
Şekil 7.9. Fotoelastik modelden çizilmiş eş-eğim çizgileri



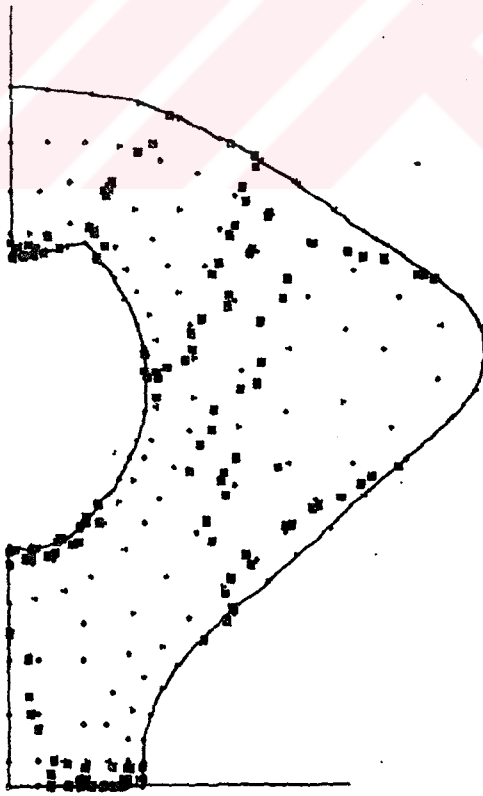
Şekil 7.10a. Teorik yolla elde edilen izoklinik saçaklar (0°)



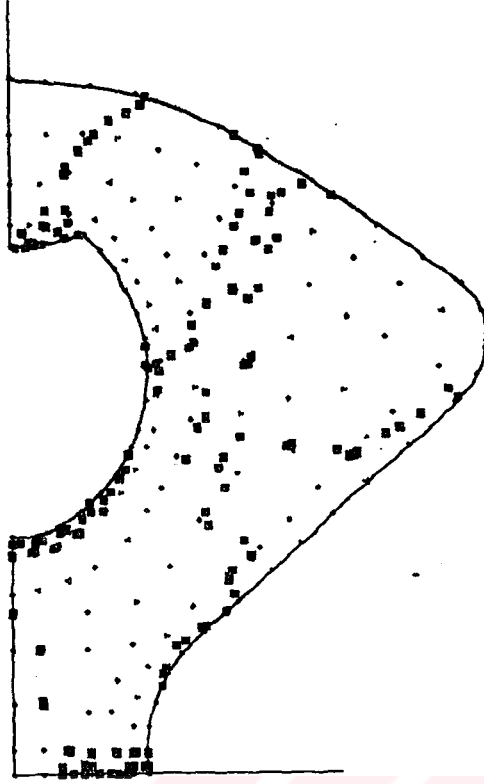
Şekil 7.10b. Teorik yolla elde edilen izoklinik saçaklar (15°)



Şekil 7.10c. Teorik yolla elde edilen izoklinik saçaklar (30°)



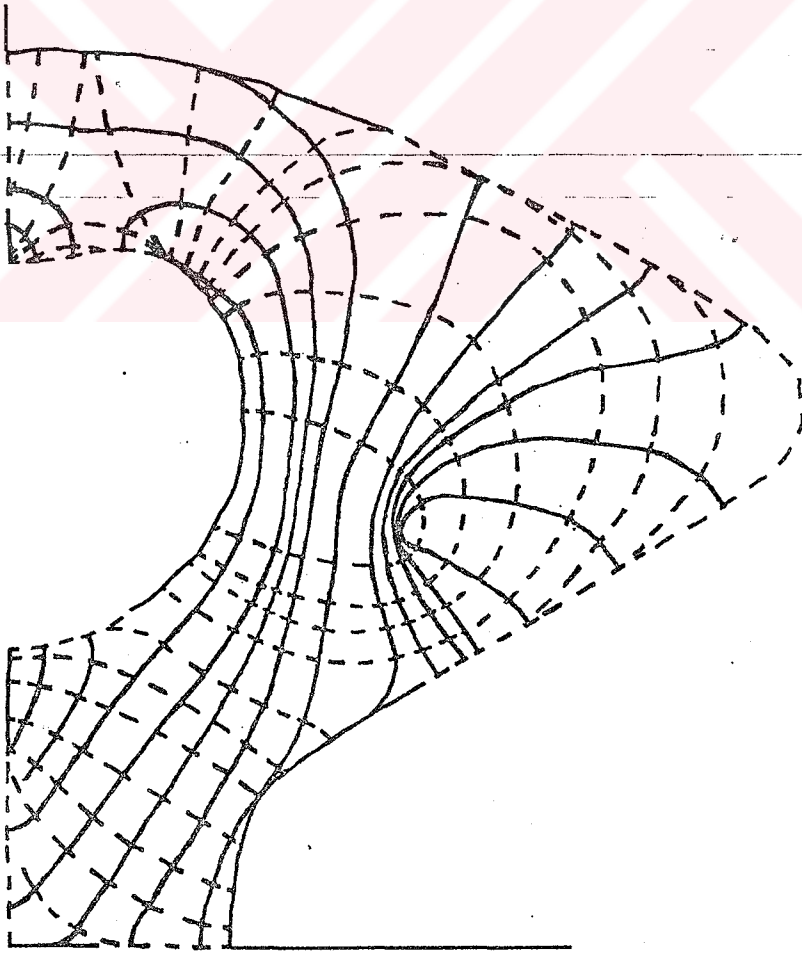
Şekil 7.10d. Teorik yolla elde edilen izoklinik saçaklar (45°)



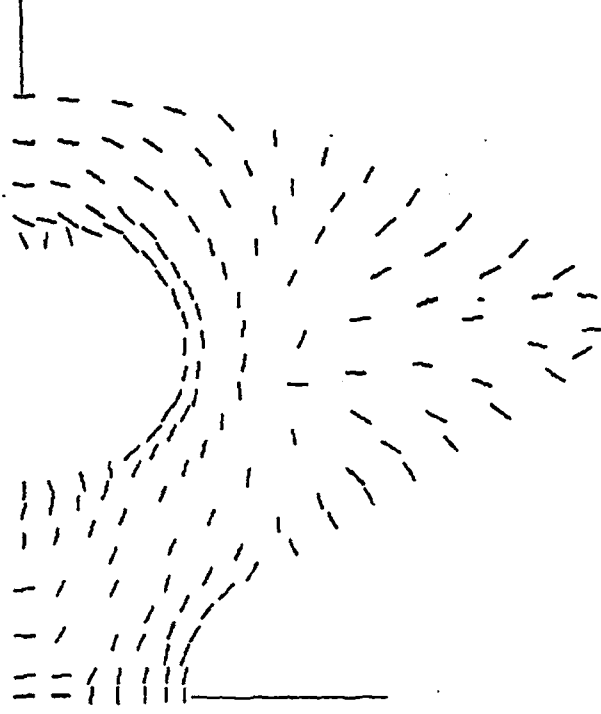
Şekil 7.10e. Teorik yolla elde edilen izoklinik saçaklar (60°)



Şekil 7.10f. Teorik yolla elde edilen izoklinik saçaklar (75°)

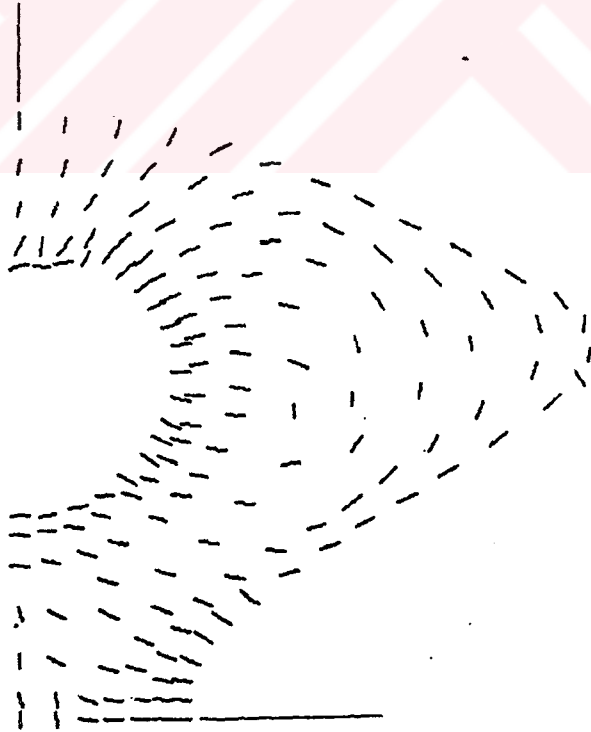


Şekil 7.11. Fotoelastik modele ait asal gerilme yörüngeleri



Şekil 7.12a. Teorik yolla elde edilmiş olan asal gerilme doğrultuları

(σ_1)



Şekil 7.12b. Teorik yolla elde edilmiş olan asal gerilme doğrultuları

(σ_2)

Deneysel ve teorik sonuçlar karşılaştırılırken zincir baklasının iki kesiti gözönüne alınmış ve bu kesitlerdeki gerilme dağılımları incelenmiştir. Bu iki kesitten birisi pim deliği ekseni ve ikincisi ise x -simetri eksenidir. Baklanın y ekseni de simetri eksenidir olduğundan x ekseni üzerindeki dağılımın yarısı gözönüne alınmıştır.

Delik eksenindeki kesitte x -yönündeki gerilmeler gerek teorik ve gerekse deneysel metotlarda sıfırdan başlayarak hızlı bir artış ile maksimuma ulaşmıştır. Fakat daha sonra delikten uzaklaştıkça deneyden elde edilen gerilmeler yavaş yavaş azalmasına rağmen teorik gerilmeler hızla azalmıştır. Teorik metotla, maksimum gerilme $x=50$ mm civarında elde edilmesine rağmen deneysel modelden hesaplanan maksimum gerilme $x=60$ mm civarında bulunmuştur (Şekil 7.13a).

Aynı kesit üzerinde y -yönündeki gerilmeler her iki metotta da maksimumdan başlayarak hızla düşüş göstermiştir (Şekil 7.13b). Daha sonra delikten uzaklaştıkça teorik gerilmeler negatif değerler olarak akabinde sıfıra ulaşmıştır. Buna rağmen deneysel gerilmeler negatif değerler almamıştır.

x -simetri ekseninde gerilme dağılımı maksimumdan eksponansiyel olarak azalan bir karakter göstermiştir (Şekil 7.14a). Şekil 7.14b'de x -simetri ekseninde y -yönündeki gerilme dağılımı verilmiştir. $x=0$ 'da minimumdan başlayan gerilmeler kesit boyunca ilerledikçe artış göstererek maksimuma ulaşırlar. Deneysel metottan elde edilen gerilmelerde maksimum, kesit sınırından biraz içeride görülmüştür (Şekil-7.14b).

Deneysel ve teorik metotlarla ayrı ayrı elde edilen bu dağılımlardaki sapmaların sebepleri araştırılacak olursa, deneysel metottaki zaman-kenar etkisinin ve sonlu elemanlar metodunun yaklaşık bir metot olmasının bu sapmalara sebep olabileceği düşünülmüştür. Ayrıca deneysel verilerin işlenmesi esnasında kullanılan yöntemlerin hataları biriktirici ve yansıtıcı olma özelliğinin bulunması da sebep olarak görülmüştür.

Deney modelinden polariskopta okunan, her iki kesite ait, izokromatik saçak mertebesi ve izoklinik parametreler aşağıda tablolar halinde verilmiştir (Tablo 7.3,4).

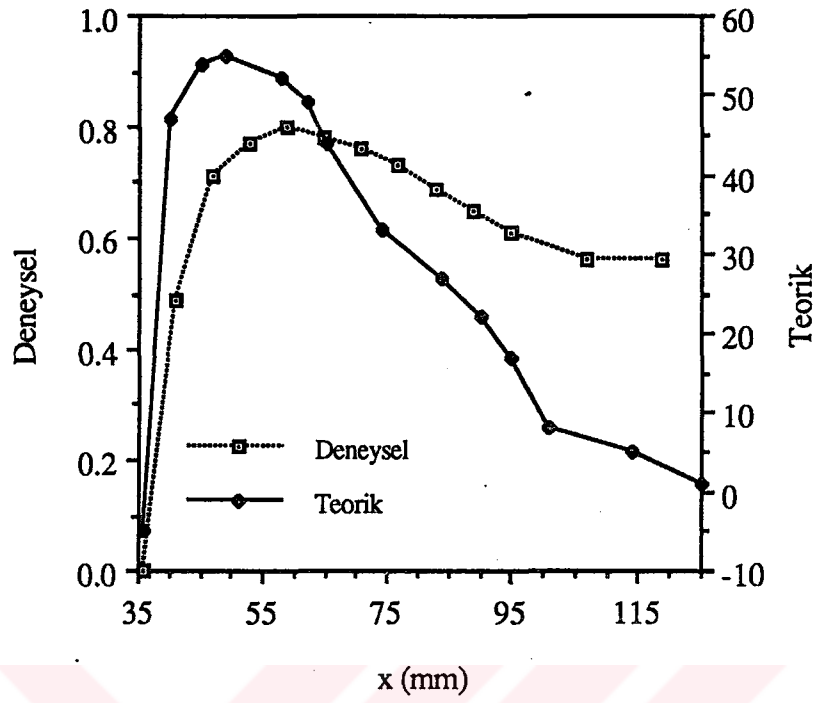
Tablo 7.3. Pim deliği ekseninde okunan saçak mertebesi (N) ve açı (θ)değerleri

N							
Kesit	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
AB	2.6	2.09	1.32	.89	.54	.3	.19
OP	1.9	2.04	1.14	.73	.43	.27	.23
CD	2.36	2	1	.58	.32	.23	.22
x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
.19	.23	.25	.25	.25	.19	.13	.1
.25	.27	.26	.24	.22	.18	.13	.1
.28	.27	.32	.29	.24	.18	.12	.1

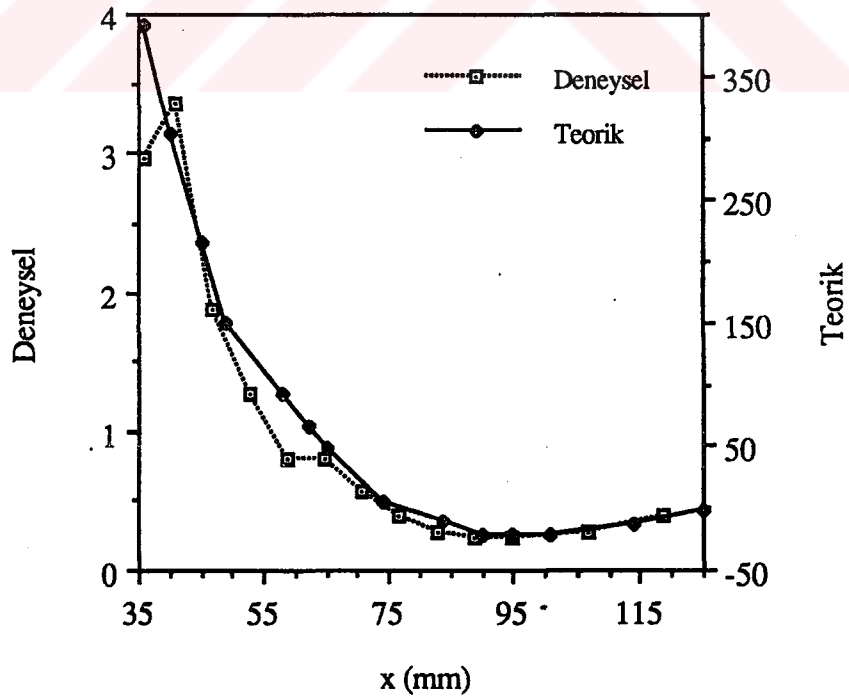
$\theta(^{\circ})$							
Kesit	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
AB	-74	-87	83	83	71	59	41
OP	90	87	77	74	68	47	28
CD	83	79	76	69	54	36	18
x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
21	12	7	4	1	0	0	0
14	6	1	0	0	0	0	0
5	0	-4	-6	-5	-2	0	0

Tablo 7.4. x ekseninde okunan saçak mertebesi (N) ve açı (θ)değerleri

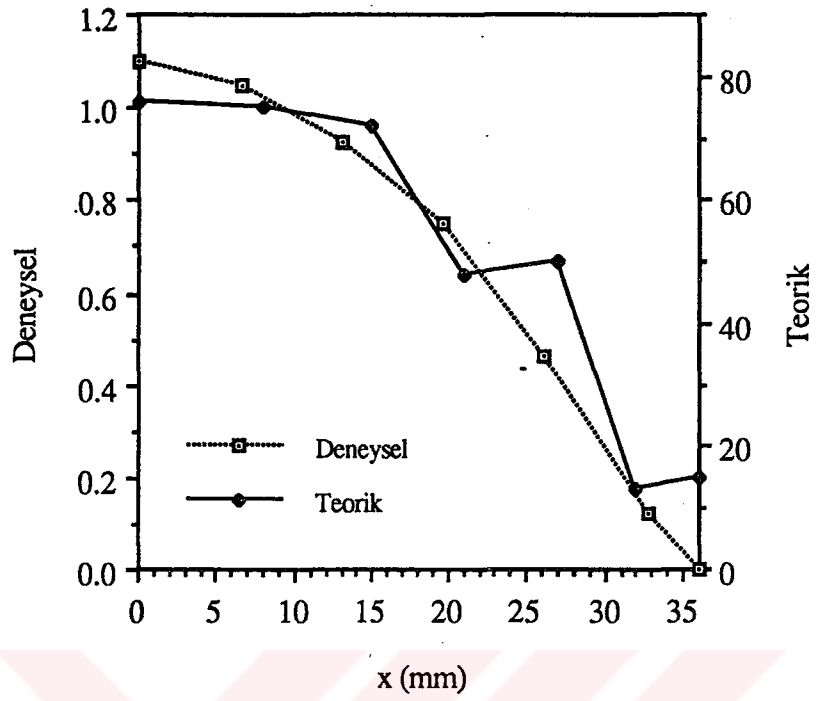
N							
Kesit	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
AB	.7	1.62	1.13	.65	.3	.13	.1
OP	.6	1.52	1.1	.6	.23	0	.1
$\theta(^{\circ})$							
Kesit	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
AB	-83	-82	-79	-77	-70	-45	0
OP	90	90	90	90	90	0	0



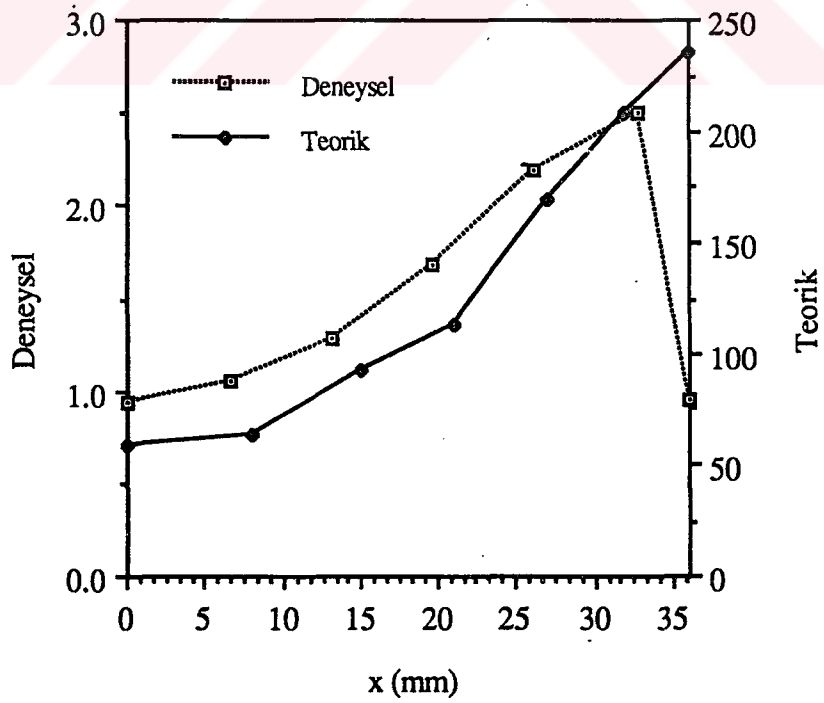
Şekil 7.13a. Diğli zincir baklası pim deliği ekseninde gerilme dağılımı (σ_x)



Şekil 7.13b. Diğli zincir baklası pim deliği ekseninde gerilme dağılımı (σ_y)



Şekil 7.14a. Diğli zincir baklası x-simetri ekseninde gerilme dağılımı (σ_x)



Şekil 7.14b. Diğli zincir baklası x-simetri ekseninde gerilme dağılımı (σ_y)

7.3. Elasto-Plastik Gerilmeler

Bifleks dişli zincir baklasına uygulanan pim kuvveti, gerilme değerleri plastik bölgeye ulaşıncaya kadar artırılıp, tekrar boşaltılırsa artık gerilmeler meydana gelir. Bu artık gerilmeler bir sonraki yükleme durumunda zıt yönde çalışarak baklanın taşıyabileceği yükü artırır. Nitekim kritik bölgelerde oluşan artık gerilmeler basma yönünde olursa çalışma şartlarında çekme yönünde oluşan gerilmeleri azaltıcı yönde etki eder. Dolayısı ile zincir baklasının taşıyabileceği yük artar.

Problemin elasto-plastik çözümü yapılırken kuvvet kademe kademe artırılarak, plastik bölgeye hangi kuvvet değerinde girildiği tespit edilmiştir. Uygulanan kuvvetler sırasıyla 78.5 kN, 88.5 kN, 95 kN, 110 kN, 120 kN ve -130 kN'dur. İlk plastik şekil değiştirme 88.5 kN'da olmuştur. 88.5 kN'luk kuvvet uygulandığı zaman 64 nolu düğüm plastik bölgeye girerek en kritik nokta olmuştur.

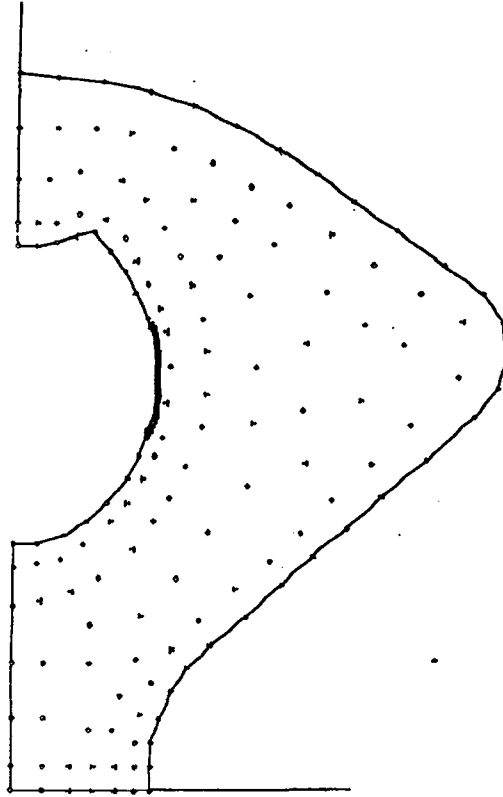
Pim kuvvetinin değeri 95 kN'a ulaştığı anda delik eksenine civarında 47 ve 64 nolu düğümlerdeki gerilmelerin plastik bölgeye girdiği tespit edilmiştir (Şekil 7.15). 47 ve 64 nolu düğüm noktalarının bulunduğu bölgelerde y-yönündeki artık gerilmeler sırası ile -10 MPa ve -32 MPa hesaplanmıştır (Tablo 7.4). Buna karşılık x-yönündeki gerilmeler -1 MPa ve -2 MPa gibi küçük değerlerde kalmıştır.

Uygulanan kuvvetin 110 kN'a, arkasından 120 kN'a çıkarılması ile plastik bölgenin hala delik civarında yayıldığı, zincir baklasının başka bölgelerinde akmanın oluşmadığı gözlenmiştir. Plastik bölgenin delik civarındaki yayılışı ise, derinlere nüfuz etmek yerine delik kenarı boyunca olmuştur (Şekil 7.16,17). Pim kuvveti 130 kN'a vardığı anda delik civarı ile birlikte, zincir baklasının bel kısmındaki 138 ve 145 nolu düğüm noktalarında da akma meydana geldiği görülmüştür (Şekil 7.18). Bu kuvvet değerinde, plastik bölgenin delik civarında içeriye doğru çok az girdiği buna karşılık delik kenarı boyunca iyice yayıldığı gözlenmiştir.

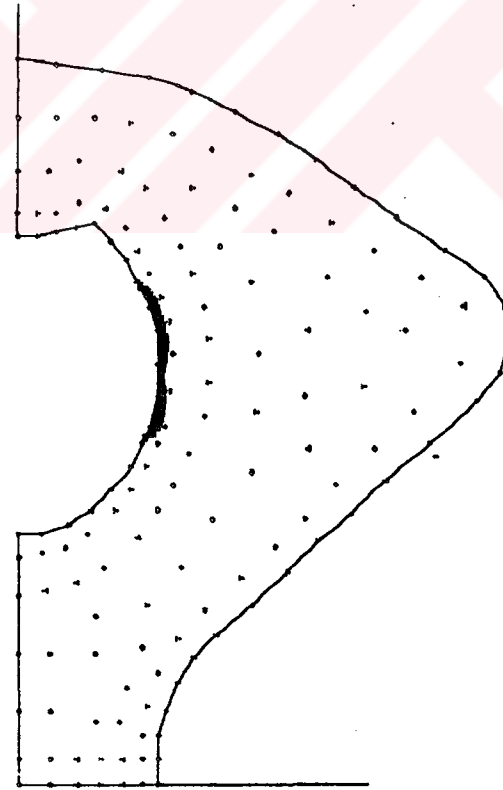
95 kN ve daha büyük pim yüklerinde hangi düğümlerin plastik bölgeye girdiği ve bu düğümlerde oluşan artık gerilmeler Tablo 7.4'te verilmiştir. En büyük artık gerilme, plastik bölgeye ilk giren 64 nolu düğüm noktasında elde edilmiştir. Artık gerilmelerin y-yönünde olanlarının diğerlerinden oldukça büyük olduğu dikkati çekmektedir.

Tablo 7.4. Elastik limit üzerinde zorlanmış bir dişli zincir baklasında plastik bölgeye giren düğümler ve oluşan artık gerilmeler

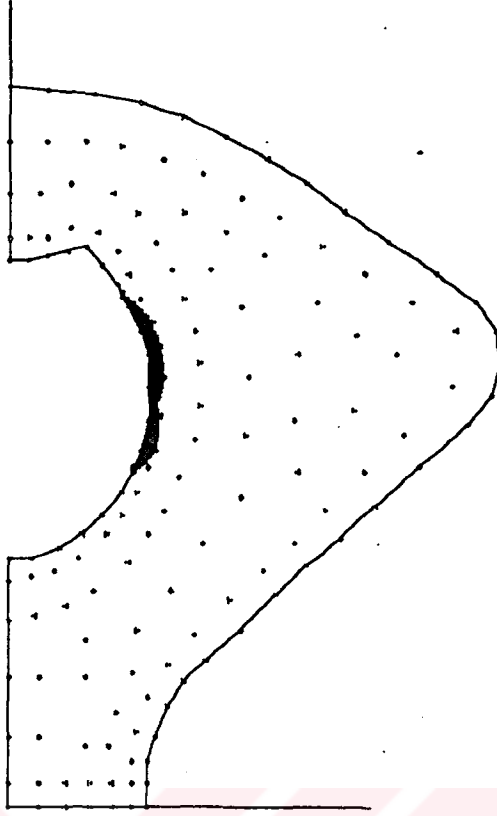
Kuvvet (kN)	Düğüm No	σ_{0x} (MPa)	σ_{0y} (MPa)	τ_{0xy} (MPa)
95	47	-1	-10	2
	64	-2	-32	-8
110	40	-2	-58	21
	47	-8	-84	13
	54	1	-70	-3
	64	-5	-101	-24
	74	-9	-60	-25
120	34	1	-14	11
	40	-3	-95	35
	47	-13	-129	20
	54	1	-113	-5
	64	-8	-146	-35
	74	-15	-97	-40
	85	-2	-6	-3
130	23	0	-1	3
	28	-1	-10	13
	34	1	-38	29
	35	0	-1	1
	40	-4	-133	48
	41	1	-9	4
	47	-17	-175	27
	54	2	-157	-7
	55	-1	-8	1
	64	-10	-191	-46
	74	-21	-135	-56
	85	-12	-38	-19
	138	-5	-16	-7
145	-6	-33	-9	



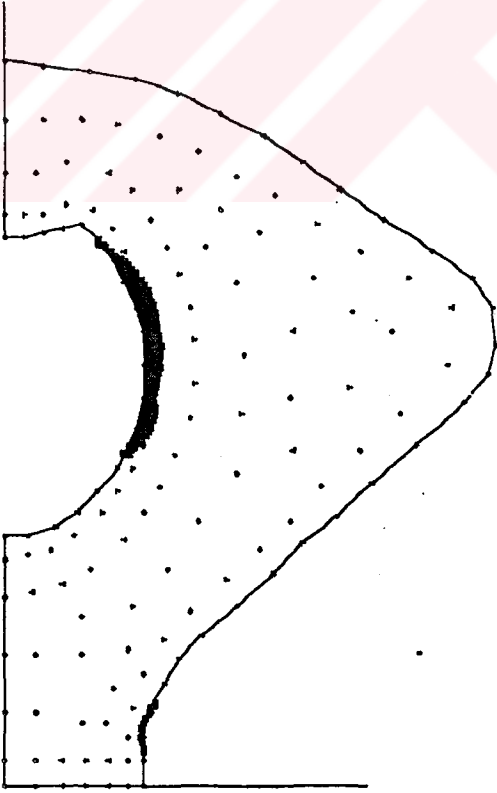
Şekil 7.15. Elastik limit üzerinde zorlanmış bir dişli zincir baklasında plastik bölgenin dağılımı ($F=95$ kN)



Şekil 7.16. Elastik limit üzerinde zorlanmış bir dişli zincir baklasında plastik bölgenin dağılımı ($F=110$ kN)



Şekil 7.17. Elastik limit üzerinde zorlanmış bir dişli zincir baklasında plastik bölgenin dağılımı ($F=120$ kN)



Şekil 7.18. Elastik limit üzerinde zorlanmış bir dişli zincir baklasında plastik bölgenin dağılımı ($F=130$ kN)

Çalışma yüklerine zıt yönde oluşturulan artık gerilmeler sayesinde, kritik bölgelerde meydana gelen gerilmelerin değeri daha düşük olacağından, zincirin yorulma ömrü artmış olacaktır. Kritik noktada 88.5 kN'luk yükte akma başlamaktadır. Fakat aşağıdaki tablodan da görüleceği gibi 120 kN'luk bir yükü oluşturulacak olan artık gerilmeler sayesinde 88.5 kN'luk yükün kritik noktada oluşturduğu gerilme değeri düşmektedir. 88.5 kN'luk yük için yorulma ömrü dikkate alındığında, σ_y gerilmesi 452 MPa değerinden 306 MPa değerine düşmektedir. Gerilmedeki bu düşme, yorulma ömründe de o oranda artmaya neden olacaktır.

Tablo 7.5. Bifleks dişli zincir baklasında ortaya çıkan gerilmelerin oluşturulan artık gerilmelerle değişmesi

Kuvvet (kN)	σ_v (MPa)	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	τ_{xy} (MPa)
120	649	25	467	111
Artık gerilmeler	-169	-8	-146	-35
88.5				
Artık gerilme oluşturulmadan	479	24	452	108
Artık gerilme oluşturulunca	310	16	306	73

8. SONUÇLAR

Bifleks dişli zincir baklalarında elastik ve plastik bölgelerdeki gerilme dağılımının incelendiği bu çalışmada aşağıdaki sonuçlar çıkarılmıştır:

1. Zincir baklalarında problemin geometrisi basit olmadığından gerilme yığılmasının olduğu bölgelerde, gerilmelerin gerçek değerlerinin analitik yollarla bulunması çok zordur. Fakat sonlu elemanlar metodu ile oldukça iyi sonuçlar alınmıştır.

2. Gerek elastik bölgedeki gerilmelerin, gerekse plastik bölgedeki gerilmelerin bulunması için hazırlanan bilgisayar programının doğru sonuçlar verdiği, faturalı levha ve içten basınca maruz kalın cidarlı silindir problemleri ile ispat edilmiştir. Hazırlanmış olan program, her türlü düzlem gerilme problemlerine uygulanabileceği gibi, düzlem şekil değiştirme problemlerine de uygulanabilir. Bununla beraber, malzeme özellikleri matrisi tanımlandığı takdirde kompozit malzeme problemlerine de uygulama olanağı vardır.

3. Pim tarafından zincir baklasına uygulanan yayılı yükün düğüm noktalarına etkiyen tekil yüklere dönüştürülmesi gerekir. Bu işlem-yayılı yükün düzgün olması halinde basittir. Zincir baklası deliğinde ise dağılım düzgün değildir. Buna rağmen yayılı yük parçasının ağırlık merkezinin, düğüm noktası ile çakıştırılması sağlanmıştır.

4. Bir üçgen eleman için elde edilen gerilme değerleri, o eleman içerisindeki noktaların koordinatlarından bağımsızdır. Ayrıca bir düğüm noktasına ait gerilme değeri bilinmek istendiğinde, o noktaya komşu olan elemanların hangisine ait değer alınacağı söylenemez. Bu yüzden düğüm noktalarındaki değerleri bulabilmek için çeşitli metotlar geliştirilmiştir. Bu çalışmada da Oden ve Brauchli tarafından geliştirilen birleşik yaklaşım teorisi (conjugate approximation theory) kullanılarak düğüm noktalarına ait değerler elde edilmiştir.

5. Bifleks dişli zincir baklalarında, elastik sınırlar içerisinde ortaya çıkan maksimum gerilme delik üzerinde görülmüştür. Bunun böyle olduğu yapılan fotoelastik deney ile de kanıtlanmıştır. Rulolu zincir baklalarında da maksimum gerilme delik üzerinde meydana gelmektedir. Bu husus Referans 3, 4, 5, 6 ve 41'de verilen, sonlu elemanlar, strain-gage ve fotoelastik metotlardan bulunan sonuçlarda görülmektedir.

6. Elastik bölgede asal gerilme farkı yörüngelerine bakıldığında delik civarında oluşan gerilme yığılmalarının, iç kısımlara doğru gidildikçe azaldığı görülür.

7. Kuvvet kademe kademe artırılınca plastik bölgeye ilk giren düğüm 64 nolu düğümdür. Bu düğüm noktası, zincir baklasının pim deliği üzerindedir. Bu husus en zayıf bölgenin burası olduğunu gösterir. Bu düğümü, delik civarındaki 47 ve 54 nolu düğümler takip eder. Daha büyük yükler uygulandığı zaman baklanın bel kısmında da plastik bölgeye giren düğümler görülmüştür.

8. Delik civarında plastik bölgenin yayılışı, radyal yönde derinlere fazla nüfuz etmeden açısal yönde olmaktadır.

9. Oluşturulan negatif artık gerilmeler sayesinde, kritik bölgelerde meydana gelen gerilmelerin değeri daha düşük olacağından, yorulma ömrünün artması beklenir. Örneğin, Tablo 7.5'ten görüldüğü gibi 88.5 kN'luk yük için yorulma ömrü dikkate alındığında, σ_y gerilmesi 452 MPa değerinden 306 MPa değerine düşmektedir. Gerilme değerindeki bu düşmenin, yorulma ömründe de o oranda artmaya neden olması beklenir.

KAYNAKLAR

1. AKÖZ, A. Y., 1969. Yüksekliği Değişen Kirişlerin Hesabı İçin Yeni Bir Metot ve Deneysel Gerçekleme, Doktora Tezi. İTÜ İnşaat Fakültesi, İstanbul. 157 sayfa.
2. ALMEN, J. O. and BLACK, P. H., 1963. Residual Stresses and Fatigue in Metals. McGraw-Hill Book Company, London.
3. ANTONESCU, N. N. and DIX, R. C., 1975. Stresses in Roller Chain Link Plates. Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl., Bucarest, 20 (2): 311-322.
4. ANTONESCU, N. N., 1971. Establishment of Roller Chain Link Plates Stress by Photoelasticity. Review of Applied Mechanics of the Romanian Academy of Science, 30 (3): 627-643.
5. ANTONESCU, N. N., 1973. The Computation of the Stresses in the Plates of Roller Chains. Review of Applied Mechanics of the Romanian Academy of Science, 32 (2): 231-238.
6. ANTONESCU, N. N., 1974. Establishment of Roller Chain Link Plates Stress by Strain Gauge Experiments. Review of Applied Mechanics of the Romanian Academy of Science, 35 (3).
7. AXELSON, K. and SAMUELSSON, A., 1979. Finite Element Analysis of Elasto-Plastic Materials Displaying Mixed Hardening. Int. J. Num. Meth. Engng., 14: 211-225.
8. BARANYI, S. J., 1992. Estimating Roller-chain Loads. Machine Design, 64(11): 58.
9. BATHE, K. J., 1982. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall, New Jersey, 735 pages.

10. BEER, F. P. and JOHNSON, E. R., 1983. *Mechanics of Materials*. Int. Stu. Ed., 2nd printing, Tokyo, 616 pages.
11. BERGHAUS, D. G., 1991. Combining Photoelasticity and Finite-Element Methods for Stress Analysis Using Least Squares. *Experimental Mechanics*, 31 (1): 36-41.
12. BLAND, D. R., 1957. The Associated Flow Rule of Plasticity. *J. Mech. Phy. of Solids*, 6: 71-78.
13. BRIDGMAN, P. W., 1952. *Studies in Large Plastic Flow and Fracture*. McGraw-Hill, New York.
14. BUCKNOR, N. K., and FREUDENSTEIN, F., 1992. Kinematic and Static Force Analysis of Rocker-pin Jointed Silent Chains with Involute Sprockets. *Mechanism Design and Synthesis*, ASME, New York, 46: 407-414.
15. CADDELL, R. M., 1980. *Deformation and Fracture of Solids*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs., New Jersey, 307 pages.
16. CHEN, C. K. and FREUDENSTEIN, F., 1988. Towards a More Exact Kinematics of Roller Chain Drives. *Trends and Developments in Mechanisms, Machines, and Robotics*. ASME Engineering Division, 15 (2):255-261.
17. CHEW, M., 1985. Inertia Effects of a Roller Chain on Impact Intensity. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 107 (March): 123-130.
18. CONWELL, J. C., JOHNSON, G. E. and PETERSON, S. W., 1992. Design and Construction of a Machine to Evaluate the Forces in Roller Chain Drives. *Proc. of the 1992 Int. Power Trans. and Gearing Conf.*, ASME Design Engineering Division, 43 (2): 703-709.
19. CONWELL, J. C., JOHNSON, G. E. and PETERSON, S. W., 1992. Experimental Investigation of the Impact Force that Occurs When a Roller Seats on the Sprocket During Normal Operation of a Roller Chain Drive. *Proc. of the 1992 Int. Power Trans. and Gearing Conf.*, ASME Design Engineering Division, 43 (2): 717-721.
20. DALLY, J. W. and RILEY, W. F., 1965. *Experimental Stress Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York. 520 pages.
21. DE SAINT-VENANT, B., 1870. Memoire sur l'Établissement des Équations Différentielles des Mouvements Intérieurs Opérés dans les Corps Solides Ductiles au Delà des Limites où l'Élasticité Pourrait les Ramener à Leur Premier État. *Compt. Rend. Acad. Sci.*, 70: 473-480.

22. EISENBERG, M. A. and MALVERN, L. E., 1973. On Finite Element Integration in Natural Coordinates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7: 574-575.
23. EL-SHAKERY, S. A., 1992. Kinematic Analysis of Combined Roller-chain and Planar Mechanisms. *Mech. and Machine Theory*, 27 (Nov 6):715-728.
24. ELDIWANY, H. B. and MARSHEK, K. M., 1984. Experimental Load Distribution for Double Pitch Steel Roller Chains on Steel Sprockets. *Mechanisms and Machine Theory*, 19 (6): 449-457.
25. FAWCETT, J. N. and NICOL, S. W., 1977. The Influence of Lubrication on Tooth-Roller Impacts in Chain Drives. *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, 191 (21/77): 271-275.
26. FAWCETT, J. N. and NICOL, S. W., 1980. Vibration of a Roller Chain Drive Operating at Constant Speed and Load. *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, 194: 97-101.
27. FRED, B., SEELY, M. S., JAMES, O. and SMITH, A. M., 1952. *Advanced Mechanics of Materials*. Second Edition, John Wiley and Sons.
28. FROCHT, M. M., 1949. *Photoelasticity*, Vol. I, John Wiley and Sons Inc., New York. 411 pages.
29. FUNG, Y. C., 1965. *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 525 pages.
30. FURLEIGH, D. D. and CLAAR, P. W., 1991. Flexible Member Serpentine Drive Analysis: A Computer-aided Design Methodology. *SAE Transactions*, 100 (Sept 5): 942-960.
31. GONCALVES, O. S. A. and OWEN, D. R. J., 1984. Incremental Elasto-Plastic Analysis of Stiffness Matrix for Materials Obeying the Principal Stress Yield Criterion. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 20: 1477-1489.
32. HILL, R., 1950. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, London.
33. HINTON, E. and OWEN, D. R. J., 1977. *Finite Element Programming*. Academic Press, London, 305 pages.
34. HODGE, P. G. and WHITE, G. N., 1950. A Quantitative Comparison of Flow and Deformation Theories of Plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 17: 180-184.
35. HOLLINGWORTH, N. E. and HILLS, D. A., 1986. Forces in a Heavy-Duty Drive Chain During Articulation. *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, 200 (C5): 367-374.

36. HOLLINGWORTH, N. E. and HILLS, D. A., 1986. Theoretical Efficiency of a Cranked Link Chain Drive. Proc. Instn. Mech. Engrs., 200 (C5): 375-377.
37. HUEBNER, K. H. and THORNTON, E. A., 1982. The Finite Element Method for Engineers. 2nd Edition, John Wiley and Sons, New York, 623 pages.
38. IVASHKOV, E. E., 1960. The Ways to Decrease Weight and Cost of the Chains. Vestnik Machinostroeniya, Moscow, 6: 10-17.
39. İNAN, M., 1969. Düzlemde Elastisite Teorisi. İTÜ Kütüphanesi, İstanbul, 336 sayfa.
40. JOHNSON, W. and MELLOR, P. B., 1983. Engineering Plasticity. Ellis Horwood, Chichester, 646 pages.
41. KIN, Y. and DUBROVSKY, R., 1986. New Power Transmission Chain Design. Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 108 (July): 255-261.
42. KIN, Y., 1971. Research of Power Transmission Chains for Oil Drilling Rigs. Dissertation, Moscow Institute of Oil and Gas Industry, Moscow.
43. KIN, Y., 1985. Influence of Fretting Wear on the Fatigue of Power Transmission Chains. Wear of Materials, The International Conference on Wear of Materials, Vancouver, B. C. Canada, 114-120.
44. KREYSZIG, E., 1972. Advanced Engineering Mathematics. 3rd Edition, Wiley, New York, 333 pages.
45. KRONGAUS, V. S., 1970. Research of Dynamic Loads in Power Transmission Chains. Dissertation, Moscow Institute of Oil and Gas Industry, Moscow.
46. LÉVY, M., 1870. Memoire sur les Équations Générales des Mouvements Intérieurs des Corps Solides Ductiles au Delà des Limites où l'Élasticité Pourrait les Ramener à Leur Premier État. Compt. Rend. Acad. Sci., 70: 1323-1325.
47. LO, S. H., 1985. A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains. Int. J. Num. Meth. Engng., 21: 1403-1426.
48. LUDWIK, P., 1909. Elemente der technologischen Mechanik, Springer, Berlin.
49. MAHAPATRA, R. C. and RASGUPTA, S. P., 1988. The Mixed Finite Element Method in Elastic and Elasto-Plastic Axisymmetric Problems. Computers and Structures, 30 (5): 1047-1065.

50. MAMED-ZADE, O. A., 1979. Reduction of Stress Concentration in the Lugs of Roller Chain Plates. *Vestnik Mashinostroeniya, Moscow*, 59 (7): 33-34.
51. MARCAL, P. V. and KING, I. P., 1967. Elasto-Plastic Analysis of Two Dimensional Stress Systems by the Finite Element Method. *Int. J. Mech. Sci., Pergamon Press Ltd.*, 9: 143-155.
52. MAXWELL, J. C., 1853. On the Equilibrium of Elastic Solids. *Trans. Roy. Soc. Edinburg*, 20 (1): 87-120.
53. MELOSH, R. J., 1965. Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method. *Journal American Institute for Aeronautics and Astronautics*, 1: 1631-1637.
54. MENDELSON, A., 1968. *Plasticity: Theory and Application*. The Macmillan, New York, 353 pages.
55. MOXON, J., 1979. Life Determining Factors Used in Chain Selection. *Chart. Mech. Engr.*, 4: 51-54.
56. MUHAMMED, R. N. and MARSHEK, K. M., 1983. Analysis of Sprocket Load Distribution. *Mechanisms and Machine Theory*, 18 (6): 349-356.
57. NAJI, M. R. and MARSHEK, K. M., 1983. Analysis of Sprocket Load Distribution. *MMT*, 18 (5): 349-356.
58. NAJI, M. R. and MARSHEK, K. M., 1984. Analysis of Roller Chain Sprocket Pressure Angles. *MMT*, 19 (2): 197-203.
59. NAJI, M. R. and MARSHEK, K. M., 1989. Effects of the Pitch Difference on the Load Distribution of a Roller Chain Drive. *Mechanism Design and Synthesis, ASME, New York*, 24 (5): 351-362.
60. NATH, B., 1974. *Fundamentals of Finite Elements for Engineers*. The Athlone Press, London, 256 pages.
61. NICOL, S. W. and FAWCETT, J. N., 1977. Reduction of Noise and Vibration in Roller Chain Drives. *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, 191 (39/77): 363-369.
62. ODEN, J. T. and BRAUCHLI, H. J., 1971. On the Calculation of Consistent Stress Distributions in Finite Element Approximations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3: 317-325.
63. ODEN, J. T., 1972. *Finite Elements of Nonlinear Continua*. McGraw-Hill, New York, 125-137.
64. OWEN, D. R. J. and FIGUEIRAS, J. A., 1983. Elasto-Plastic Finite Element Analysis of Thick and Thin Plates and Shells. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 19: 541-566.

65. OWEN, D. R. J. and HINTON, E., 1986. Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice. Pineridge Press, Swansea, U.K., 594 pages.
66. ÖNCÜL, H., AKTAŞ, Z. ve URAL, S., 1991. Sayısal Çözümleme. Cilt 1, ODTÜ, Ankara, 413 sayfa.
67. PAKDEMİRLİ, E., 1987. Plastisite Teorisi. Dokuz Eylül Üniversitesi, Müh-Mim. Fak, Mak. Müh. Böl., Yayın No: 6, İzmir, 55 sayfa.
68. PEEKEN, H. and COENEN, W., 1984. Influence of Lubrication on the Wear Characteristics of Roller Chains. Proceedings of Eleventh Leeds-Lyon Symposium, Leeds.
69. PEEKEN, H. and COENEN, W., 1986. Influence of Oil Viscosity and Various Additives on the Wear of Roller Chains. Wear, 108: 303-321.
70. PETERSON, R. E., 1974. Stress Concentration Factors, John Wiley and Sons, Inc., New York.
71. PETERSON, R. E., 1974. Stress Concentration Factors. John Wiley and Sons, Inc., New York.
72. PRAGER, W., 1959. An Introduction to Plasticity. Addison-Wesley, Amsterdam.
73. PRANDTL, L., 1924. Spannungsverteilung in plastischen Körpern. Proc. of the 1st Int. Congress on Applied Mechanics, Delft, pp. 43-54.
74. RACHNER, H. G., 1962. Stahlgelenkketten und Kettentriebe. Springer-Verlag, Berlin.
75. REUSS, A., 1930. Z. ang. Math. Mech., 10: 266.
76. SEGERLIND, L. J., 1976. Applied Finite Element Analysis. John Wiley and Sons, New York, 422 pages.
77. SEGUI, W. T., 1973. Computer Programs for the Solutions of Systems of Linear Algebraic Equations. Int. J. Num. Meth. Engng., 7: 479-490.
78. SHIGLEY, J. E., 1986. Mechanical Engineering Design, 1st metric ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 699 pages.
79. SINGER, G. L., 1962. Strength of Materials. Second Edition, Harper and Row, New York, 590 pages.
80. SUEOKA, A., KONDOU, T. and TANAKA, T., 1989. Nonlinear Harmonic and Parametric Resonances of a Roller Chain Stretched Horizontally. JSME Int. Journal, 32 (3): 385-393.
81. SWIFT, H. W., 1946. Plastic Strain in an Isotropic Strain-Hardening Material. Engineering, 162: 381.

82. SZABO, B. A. and LEÉ, G. C., 1969. Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1: 301-310.
83. THEOCARIS, P. S. and MARKETOS, E., 1964. Elasto-Plastic Analysis of Perforated Thin Strips of a Strain-Hardening Material. *J. Mech. Phys. Solids*, 12: 377-390.
84. TIMOSHENKO, S. and GOODIER, J. N., 1970. *Theory of Elasticity*. 3rd Edition, McGraw-Hill, New York.
85. TIMOSHENKO, S., 1950. *Strength of Materials: Advanced Theory and Problems*. Part II, D. Von Nostrand, Toronto, 510 pages.
86. TIMOSHENKO, S., 1960. *Strength of Materials*. Part I, Third Edition, D. Von Nostrand, Princeton, New Jersey.
87. TOMASHUNS, I. A., 1985. New Method of Geometric Calculation of Roller Chain Drives. *Vestnik Mashinostroeniya (Soviet Engineering Research)*, Moscow, 65 (7): 26-28.
88. TRESCA, H., 1864. Sur L'écoulement des Corps Solides Soumis à de Fortes Pression. *Compt. Rend. Acad. Sci., Paris*, 59: 754.
89. TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C. and TOPP, L. J., 1956. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. *Journal Aeronautical Science*, 23: 805-824.
90. VEIKOS, N. M. and FREUDENSTEIN, F, 1992. On the Dynamic Analysis of Roller Chain Drives: Part I-Theory. *Mechanism Design and Synthesis*, ASME Design Engineering Division, 46:431-439.
91. VEIKOS, N. M. and FREUDENSTEIN, F, 1992. On the Dynamic Analysis of Roller Chain Drives: Part II-Case Study. *Mechanism Design and Synthesis*, ASME Design Engineering Division, 46:441-450.
92. VISSER, W., 1965. A Finite Element Method for the Determination of Non-Stationary Temperature Distribution and Thermal Deformations. *Proceedings Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*. Air Force Institute of Technology, Wright Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio.
93. VOCE, E., 1948. The Relationship Between Stress and Strain for Homogeneous Deformation. *J. Inst. Metals*, 74: 537.
94. VON MISES, R., 1913. *Mechanik der festen Koerper im plastisch deformablen Zustant*, Göttinger Nachrichten, Math.-Phys. Kl., pp. 582-592.
95. VUKOBRATOVICH, D. and RICHARD, R. M., 1991. Roller Chain Supports for Large Optics. *Appl. of Optical Eng., Proc. of SPIE*, p 522-533.

96. WANG, K. W., LIU, S. P., HAYEK, S. I. and CHEN, F. H. K., 1992. On the Impact Intensity of Vibrating Axially Moving Roller Chains. *J. of Vibr. and Acoustics, Transactions of the ASME*, 114 (July 3):397-403.
97. WANG, Y., ZHENG, Z. and ZHANG, G., 1989. Study on Jumping-over-teeth Phenomenon in Roller Chain Drive. *Proc. of Int. Power Transm. Gearing Conf.*, p 91-97.
98. WESTERGAARD, H. M., 1952. *Theory of Elasticity and Plasticity*. Harvard University Press, Cambridge.
99. WILSON, E. L. and NICKELL, R. E., 1966. Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis. *Nuclear Engineering and Design*, 4: 276-286.
100. WÖHLER, A., 1860. *Zeitschrift für Bauwesen*, 10.
101. YAMADA, Y., YOSHIMURA, N. and SAKURAI, T., 1968. Plastic Stress-Strain Matrix and its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problems by the Finite Element Method. *Int. J. Mech. Sci.*, 10: 343-354.
102. ZIENKIEWICZ, O. C. and CHEUNG, Y. K., 1965. Finite Elements in the Solution of Field Problems. *The Engineer*, 507-510.
103. ZIENKIEWICZ, O. C., 1971. *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill, London, 521 pages.
104. ZIENKIEWICZ, O. C., VALLIAPPAN, S. and KING, I. P., 1969. Elasto-plastic Solutions of Engineering Problems: Initial Stress Finite Element Approach. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1: 75-100.
105. ÖZÜTOK, A., 1992. Fotoelastisite'de Sınır Eleman Yönteminin Ayırma Metodu Olarak Kullanılması. Yüksek Lisans Tezi, İTÜ, İstanbul, 126 sayfa.
106. AKÖZ, Y., 1973. Ortotropik Fotoelastisite Üzerine Bir Çalışma ve Öneriler. Doçentlik Tezi, İTÜ, İstanbul, 110 sayfa.
107. AKÖZ, Y. and TAUCHERT, T. R., 1972. Thermal Stresses in an Orthotropic Elastic Semispace. *J. Appl. Mech.*, 39 (E-1): 8791.
108. AKÖZ, Y. and MARK, R., 1972. Experimental Generation of the Flament Solution. *J. Appl. Mech.*, 39 (E-1): 306308.

Ek A

A.1. Lineer Enterpolasyon Polinomları

Sonlu elemanlar metodunun, sürekli bir fonksiyonu (sıcaklık, basınç, deplasman vb.), eleman denilen sonlu sayıda parçalar üzerinde tanımlı parçalı sürekli fonksiyonlar ailesinin meydana getirdiği ayrı ayrı parçalardan oluşan bir model olarak kabul etme fikrine dayandığını söylemiştik. Eleman fonksiyonunun en çok kullanılan şekli polinomdur. Sonlu elemanlar, eleman polinom derecesine göre üç grupta sınıflandırılabilir. Bunlar simpleks, kompleks ve multiplekstir [63]. Simpleks elemanlar, bir basit terim ve lineer terimler kısmından oluşan bir polinoma sahiptir. Polinomdaki katsayı adedi elemanın düğüm sayısına eşittir. Düzlemsel üçgen eleman için simpleks fonksiyon

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (\text{A.1})$$

şeklindedir. Bu polinom x ve y eksenlerinde lineerdir ve üçgenin üç düğüm noktası olduğu için üç tane katsayı içermektedir. Kompleks elemanların kullandığı polinom fonksiyonları sabit terim, lineer terimler ve gerektiği kadar iki, üç ve daha yüksek dereceden terimler içerir. Düzlemsel bir kompleks üçgen eleman için enterpolasyon polinomu

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \quad (\text{A.2})$$

şeklindedir. Bu bağıntıda altı katsayı bulunmasının sebebi, elemanın altı düğüm noktasının olmasındandır. Multipleks elemanlar ise yüksek mertebeli terimler içeren polinomlar kullanırlar. Fakat bunlarda elemanlar arası sürekliliği sağlayabilmek için eleman sınırları koordinat eksenlerine paralel olmak zorundadır.

A.1.1. Düzlemsel simpleks eleman

Düzlemsel simpleks eleman Şekil A.1'de görülen üçgendir. Bu elemanın kenarları düzdür. Üç düğüm noktasının herbiri bir köşeye yerleştirilmiştir. Rijitlik matrisinin bant genişliğinin küçük olabilmesi için bu düğüm noktalarının uygun bir şekilde numaralandırılması gerekir. Enterpolasyon polinomu ϕ 'nin düğüm noktalarındaki değerleri Φ_i , Φ_j ve Φ_k ile ve üç düğüm noktasının koordinatları da (X_i, Y_i) , (X_j, Y_j) ve (X_k, Y_k) ile gösterilmiştir.

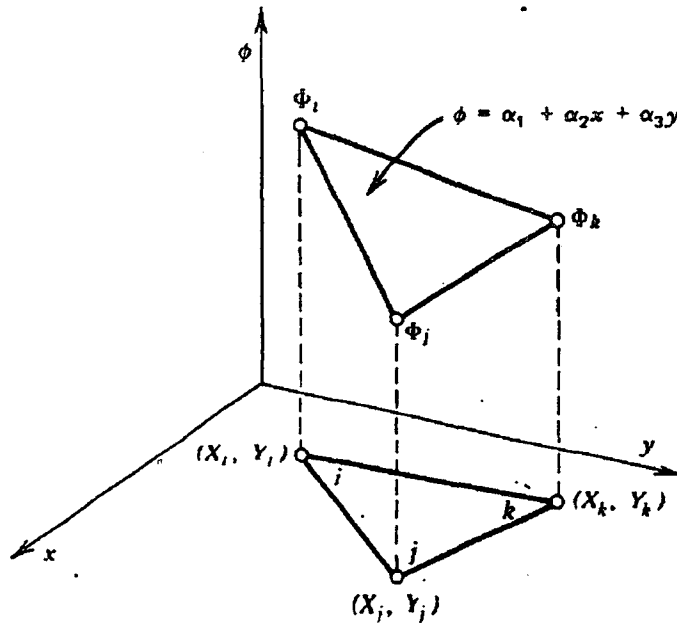
Enterpolasyon polinomu

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (\text{A.3})$$

şeklindedir. Düğüm noktalarına ait değerler Denklem (A.1)'de yerine yazılırsa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i \\ \Phi_j &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j \\ \Phi_k &= \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Buradan katsayılar



Şekil A.1. Düzlemsel simpleks eleman

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{2A} [(X_j Y_k - X_k Y_j)\Phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k)\Phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i)\Phi_k] \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A} [(Y_j - Y_k)\Phi_i + (Y_k - Y_i)\Phi_j + (Y_i - Y_j)\Phi_k] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A} [(X_k - X_j)\Phi_i + (X_i - X_k)\Phi_j + (X_j - X_i)\Phi_k]\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada A , üçgenin alanıdır ve katsayılar matrisinin determinanı üçgenin alanının iki katına eşittir.

$$\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = 2A \quad (\text{A.5})$$

α_1 , α_2 ve α_3 bağıntıları Denklem (A.1)'de yerine konularak düzenlenirse

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k \quad (\text{A.6})$$

elde edilir. Burada

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y)$$

$$N_j = \frac{1}{2A} (a_j + b_j x + c_j y)$$

$$N_k = \frac{1}{2A} (a_k + b_k x + c_k y)$$

dir ve burada da

$$\begin{aligned}a_i &= X_j Y_k - X_k Y_j & b_i &= Y_j - Y_k & c_i &= X_k - X_j \\ a_j &= X_k Y_i - X_i Y_k & b_j &= Y_k - Y_i & c_j &= X_i - X_k \\ a_k &= X_i Y_j - X_j Y_i & b_k &= Y_i - Y_j & c_k &= X_j - X_i\end{aligned}$$

şeklindedir. N 'nin " i " düğümündeki değeri bulunmak istenirse

$$\begin{aligned}N_i &= \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \\ &= \frac{1}{2A} (X_j Y_k - X_k Y_j + X_k Y_i - X_i Y_k + X_i Y_j - X_j Y_i)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadede parantez içerisinde, Denklem (A.5)'teki determinantın açılımı olduğu görülmektedir. O halde

$$N_i = \frac{1}{2A} 2A = 1$$

dir. İki ve üç nolu düğümlerde ve bu düğümlerden geçen doğru üzerindeki her noktada N_i değerinin sıfır olduğu gösterilebilir.

Enterpolasyon polinomu, lineer şekil fonksiyonları setinin bir fonksiyonudur. Bu demektir ki x ve y doğrultularındaki gradyenler sabittir. x doğrultusundaki gradyen

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \Phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} \Phi_k \quad (\text{A.7})$$

şeklindedir.

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x} = \frac{b_\beta}{2A} \quad \beta = i, j, k$$

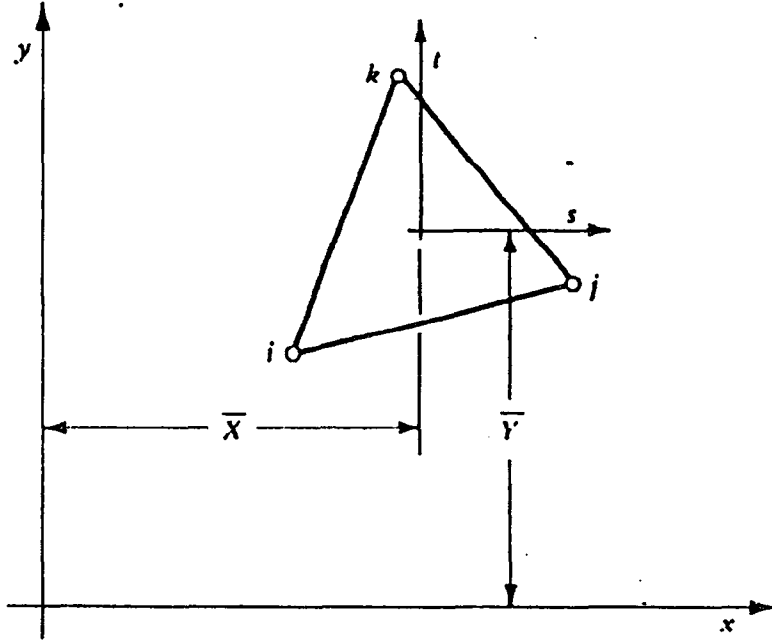
olduğundan

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2A} (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k)$$

sonucu elde edilir. b_i , b_j ve b_k seçilen eksen takımında sabit ve ϕ_i , ϕ_j ve ϕ_k da koordinatlardan bağımsız olduğundan yukarıdaki türev sabittir. Herhangi bir elemandaki sabit gradyen, ϕ 'nin değerindeki hızlı değişimi yaklaşık olarak bulabilmek için birçok küçük elemanın kullanılabileceğini gösterir.

A.2. Lokal Koordinat Sistemleri

Düğüm noktalarına ait gerilme değerlerini veren denklem sistemini hesaplarken şekil fonksiyonlarının integralinin veya türevlerinin veya her ikisinin birden eleman üzerinde alınması gerekir. Enterpolasyon denklemleri, bir "eleman koordinat



Şekil A.2. Üçgen eleman için bir lokal koordinat sistemi

sistemi"ne göre ifade edilirse integral alma işlemi daha kolay olacaktır. Eleman koordinat sistemi, eleman üzerinde veya sınırlarında yer alan bir koordinat sistemidir. Bu koordinat sistemi çoğunlukla bir lokal koordinat sistemine dayanır.

Bir lokal koordinat sistemine göre enterpolasyon denklemlerini yazarken, global koordinat sistemine göre yazılmış olan denklemlerin transformasyonu yoluna gidilir.

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k$$

olan bir üçgen eleman alınıp lokal koordinat sistemi elemanın ağırlık merkezine yerleştirilirse (Şekil A.2) koordinat transformasyon denklemleri

$$x = \bar{X} + s$$

$$y = \bar{Y} + t$$

(A.37)

olur. Burada ağırlık merkezinin koordinatları

$$\bar{X} = \frac{X_i + X_j + X_k}{3} \quad (\text{A.38})$$

$$\bar{Y} = \frac{Y_i + Y_j + Y_k}{3}$$

tür. Global koordinat sisteminde

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y)$$

dir. x ve y nin (A.37) denklemindeki değerleri yerlerine yazılırsa

$$N_i = \frac{1}{2A} [(a_i + b_i \bar{X} + c_i \bar{Y}) + b_i s + c_i t] \quad (\text{A.39})$$

olur. a_i , b_i ve c_i nin değerleri yerlerine yazılırsa

$$N_i = \frac{1}{2A} \left[-\frac{2A}{3} + (Y_j - Y_k) s + (X_k - X_j) t \right] \quad (\text{A.40})$$

olur. Benzer şekilde

$$N_j = \frac{1}{2A} \left[-\frac{2A}{3} + (Y_k - Y_i) s + (X_i - X_k) t \right] \quad (\text{A.41})$$

ve

$$N_k = \frac{1}{2A} \left[-\frac{2A}{3} + (Y_i - Y_j) s + (X_j - X_i) t \right] \quad (\text{A.42})$$

elde edilir. Global koordinat sisteminde ifade edilmiş bir fonksiyonun integralini lokal koordinat sisteminde hesaplayabilmek için Kreyszig (1972) bağıntısı kullanılır [44].

$$\int_R f(x,y) dx dy = \int_{R^*} f[x(s,t),y(s,t)] |J| ds dt \quad (\text{A.43})$$

Burada R eski bölgeyi, R^* yeni bölgeyi ve $|J|$ transformasyon determinantının mutlak değerini göstermektedir.

A.2.1. Alan koordinatları

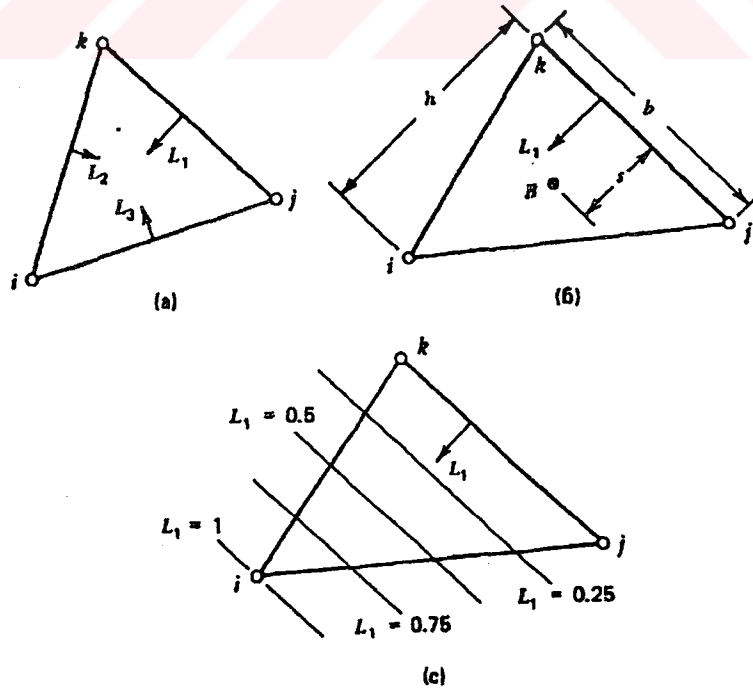
Şekil A.3a'da görüldüğü üzere L_1, L_2 ve L_3 gibi üç koordinat oranının tanımıyla elde edilen global koordinat sistemi, üçgen elemanlarda kullanılan çok tanınmış bir lokal koordinat sistemidir. Her bir koordinat, bir kenara olan dik uzaklığın, aynı kenara göre ölçülen üçgen yüksekliğine oranıdır (Şekil A.3b). Bundan dolayı L_1, L_2 ve L_3 koordinatları 0 ile 1 arasında değişen değer alırlar. L_1 in sabit olduğu noktaları gösteren çizgiler Şekil A.3c'de görülmektedir. Bu çizgilerin herbiri L_1 in ölçüldüğü kenara paraleldir.

L_1, L_2 ve L_3 koordinatları, alan koordinatları olarak da anılırlar. Çünkü koordinat değerleri, alt üçgenin alanının, toplam üçgen alanına oranını verir (Şekil A.4).

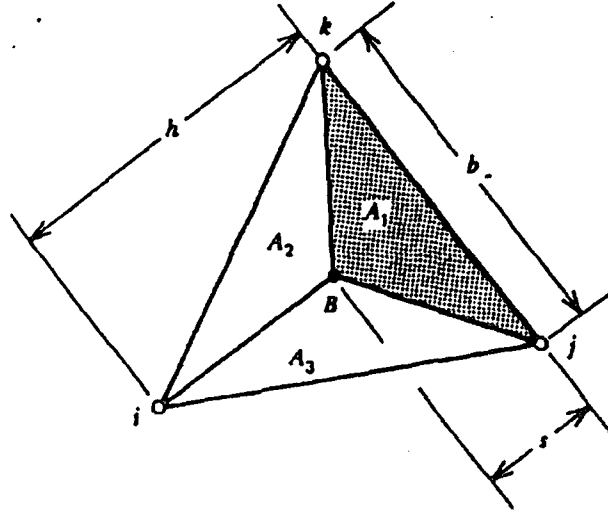
$$\frac{A_1}{A_t} = \frac{b s/2}{b h/2} = \frac{s}{h} = L_1 \quad (\text{A.44})$$

$A_1 + A_2 + A_3 = A_t$ olduğundan

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (\text{A.45})$$



Şekil A.3. Bir üçgen için alan koordinat sistemi



Şekil A.4. Herhangi bir üçgen içindeki bir noktaya göre oluşan alt üçgenler

dir. Bu denklem üç koordinat değeri arasında bir ilişki vermektedir. Bu da göstermektedir ki bu koordinatlar birbirinden bağımsız değildir.

(A.45) denklemini ile birlikte L_1, L_2 ve L_3 'ün özellikleri incelendiği zaman bunların simpleks lineer eleman için şekil fonksiyonları olduğu görülür.

$$N_i = L_1$$

$$N_j = L_2$$

$$N_k = L_3$$

(A.46)

Alan koordinatları sisteminin kullanılmasının avantajı, uzunluk ve alan integrallerinin hesabını kolaylaştıran integral denklemlerinin var olmasıdır [22].

$$\int_L L_1^a L_2^b dL = \frac{a! b!}{(a+b+1)!} L \quad (\text{A.47})$$

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!} 2A \quad (\text{A.48})$$

ÖZGEÇMİŞ

1960 yılında Kayseri ili Yahyalı ilçesinde doğdu. İlk ve orta eğitimini Yahyalı'da, Lise eğitimini ise yine aynı ilçede TÜBİTAK bursiyeri olarak birincilikle tamamladı. 1977 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Makina Fakültesi Genel Makina Mühendisliği Bölümünde başladığı üniversite öğrenimini 1982 yılında tamamladı. Aynı yıl Selçuk Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. 1986 yılında Yüksek Lisans öğrenimini bitirerek başladığı Doktora çalışmasını 1994 yılında tamamlayan Behçet Dağhan halen S.Ü. Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ