MATRİS DENKLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Cengiz ÇINAR
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA - 1995

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİS DENKLEMLERİ

Cengiz ÇINAR

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 15 / 09 / 1995 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

(Danışman)	(Üye)	(Üye)
Yrd.Doç.Dr.Cevdet ÇETİN	Prof.Dr.Hasan ŞENAY	Yrd.Doç.Dr.Hacı SULA

İÇİNDEKİLER

Notasyonlar .... (ii)
Özet .... (iii)
Abstract .... (iv)
Önsöz .... (v)

1. TEMEL BİLGİLER 1
   1.1. Matrisler 1
   1.2. Vektör Uzayları 8
   1.3. Bir Matrisin Rankı 11
   1.4. Lineer Dönüşümler 13
   1.5. Lineer Denklem Sistemleri 15
   1.6. Kronecker Çarpım 19

2. MATRİS TERSLERİ 20
   2.1. Kare Matrislerde Tersler 20
   2.2. Dikdörtgen Matrislerde Tersler 20
   2.3. Genelleştirilmiş Tersler 23

3. MATRİS DENKLEMLERİ 33
   3.1. $AX = 0$ ve $AX = b$ Lineer Denklemlerinin Çözümleri 33
   3.2. $AXB = C$ Denkleminin Çözümü 37
   3.3. $AX = 0$ ve $XB = 0$ Denklemlerinin Ortak Çözümü 40
   3.4. $AX = C$ ve $XB = D$ Denklemlerinin Ortak Çözümü 41
   3.5. $AX - YB = C$ Matris Denkleminin Çözümü 44

SONUÇ 48
KAYNAKLAR 49

NOTASYONLAR

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$	:	mxn tipinde matris.
A^t	:	A matrisinin transpozesi.
A^*	:	A matrisinin eşlenik transpozesi.
I_n	:	n-inci mertebeden birim matris.
A^{-1}	:	A matrisinin tersi.
A_R^{-1}	:	A matrisinin sağ tersi.
A_L^{-1}	:	A matrisinin sol tersi.
A^g	:	A matrisinin genelleştirilmiş tersi.
İz(A)	:	A matrisinin izi.
A^n	:	A matrisinin n-inci kuvveti.
Range(A)	:	A matrisinin görüntü uzayı.
Çöz(A)	:	A matrisinin çözüm uzayı.
Çek(F)	:	F dönüşümünün çekirdeği.
Rank(A)	:	A matrisinin rankı.
[0]	:	Sıfır matris.
Ek(A)	:	A matrisinin eki.
$M_{m,n}$	:	mxn tipindeki matrislerin meydana getirdiği uzay.
$A\oplus B$	:	A ve B matrislerinin direkt toplamı.
$A\otimes B$	:	A ve B matrislerinin Kronecker çarpımı
$\varphi(A)$	:	A matrisinin satırları ile meydana getirilen uzay.
M(A)	:	A matrisinin sütunları ile meydana getirilen uzay.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Matris Denklemleri

Cengiz ÇINAR

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Cevdet ÇETİN

Jüri :

Bu çalışma üç bölümden meydana gelmiştir. Birinci bölümde çalışmamızda kullanacağımız tanım ve teoremleri verip gerekli irdelemeleri yaptık. İkinci bölümde matris terslerini inceledik ve bunları sağ, sol ve genelleştirilmiş tersler olarak verdik. Ayrıca bir A matrisin genelleştirilmiş tersinin olması için gerekli ve yeterli şartları belirledik. Üçüncü bölümde ise genelleştirilmiş tersleri kullanarak, $AX = 0$ lineer denkleminin genel çözümünü verdik. Yine $AX = b$, $AXB = C$ ve $AX - YB = C$ matris denklemlerinin çözümünün olması için gerekli ve yeterli şartları belirleyip genel çözümlerini elde ettik. Bunlara ilaveten $AX=0$ ve $XB=0$ ile $AX=C$ ve $XB=D$ denklem çiftlerinin ortak çözümlerinin olması için gerekli ve yeterli şartları verip genel çözümlerini bulduk.

ABSTRACT

Master Thesis

Matrix Equations

Cengiz ÇINAR

Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc Prof. Dr. Cevdet ÇETİN
Jury :

This study is comprised of tree parts. In the first part the definitions and theorems to be used in the study have been given and examined in related terms.

In the second part, the inverses of matrices were examined and given as left and right generalized inverses. Furthemare, the necessary and sufficient conditions were specified for there to be A matrices.

In the third part, a general solution of the linear equation $AX = 0$, being used the generalized inverses. After words, the necessary and sufficient conditions were identified and general solutions were reached for there to be a solution for the equation $AX = b$, $AXB = C$ and $AX - YB = C$.

In addition, the necessary and sufficient conditions were imagined and the general solutions were proofed to be a common solution for these couple equation $AX = 0$ and $XB = 0$, $AX = C$ and $XB = D$.

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tezi, Matris Denklemleri üzerine yapılan bir çalışmadır. Bu çalışmada $AX = 0$, $AX = b$, $AX = 0$ ve $XB = 0$, $AX = C$ ve $XB = D$, $AXB = C$ ve $AX - YB = C$ matris denklemlerinin çözümlerinin varlığını inceledik ve herbiri için genel çözümleri ispatladık.

Çalışmalarım sırasında bana her türlü yardımda bulunan Danışman Hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Cevdet ÇETİN'e teşekkürü bir borç bilirim.

1. TEMEL BİLGİLER

1.1. Matrisler

Tarif 1.1.1. $m,n \in N$ ve $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ olmak üzere bütün (i,j) çiftlerinin cümlesi $A = N \times N$ olsun. Bir K cisminde değerler alan A daki bir

$$f : A \to K$$

fonksiyonunu $(i,j) \to f(i,j) = (a_{ij})$ şeklinde tanımlayalım ve $a_{ij} \in K$ değerlerini

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ veya } A = (a_{ij}) \qquad (1.1.1)$$

biçiminde düzenleyelim. K cisminden seçilen her m.n tane elemanın A tablosuna K cismi üzerinde $m \times n$ tipinde bir matris denir. Ayrıca her (i,j), $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ çiftine karşılık gelen a_{ij} elemanına A matrisinin (i,j) bileşeni denir.

Tarif 1.1.2. $1 \times n$ veya $m \times 1$ tipindeki matrislere sırasıyla satır veya sütun matrisleri denir.

Tarif 1.1.3. Eğer $A = (a_{ij})$ matrisinde her a_{ij} elemanı sıfır ise bu A matrisine sıfır matrisi denir

Tarif 1.1.4. Eğer $m \times n$ tipindeki $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ matrislerinde her (i,j) için $a_{ij} = b_{ij}$ ise bu iki matrise eşittir denir ve $A = B$ olarak yazılır.

Tarif 1.1.5. $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ $m \times n$ tipinde iki matris olsun.

$$A \pm B = (a_{ij}) \pm (b_{ij}) = (a_{ij} \pm b_{ij}) = (c_{ij}) = C$$

ile ifade edilen C matrisine A ve B matrislerinin toplamı denir.

Tarif 1.1.6. $A = (a_{ij})$, $m \times n$ tipinde bir karesel matris olsun. Eğer $m = n$ ise A matrisine karesel matris denir .

Tarif 1.1.7. $A = (a_{ij})$ $n \times n$ tipinde bir karesel matris olsun. Eğer A matrisinde $i = j$ için a_{ij} sıfırdan farklı ve diğer elemanlar sıfır ise A matrisine köşegen matris denir.

Tarif 1.1.8. $A = (a_{ij})$, n×n tipinde bir karesel matris olsun. Eğer her i = j ve i>j için $a_{ij} \neq 0$ ve her i<j için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine alt üçgen matris, yine her i = j ve i<j için $a_{ij} \neq 0$ ve her i>j için $a_{ij} = 0$ oluyorsa A matrisine üst üçgen matris denir.

Tarif 1.1.9. A, n×n tipinde bir köşegen matris olsun. Eğer A matrisinin köşegeni üzerindeki her eleman "1" ise bu matrise birim matris denir I_n ile gösterilir.

Tarif 1.1.10. A, n×n tipinde bir köşegen matris olsun. Eğer A matrisinin köşegeni üzerindeki her eleman eşit ise bu matrise skaler matris denir.

Tarif 1.1.11. $A = (a_{ij})$, m×n tipinde bir matris ve k herhangi bir skaler olsun. Bu halde;

$$k.A = A.k = (k.a_{ij})$$

matrisine A matrisinin k skaleri ile çarpımı denir.

Tarif 1.1.12. $A = (a_{is})$ ve $A = B(_{sj})$ sırasıyla m×p ve p×n tipinde matrisler olsun. Bu halde;

$$C = \sum_{s=1}^{p} a_{is} . b_{sj} = (c_{ij}) \qquad (1.1.2)$$

ile ifade edilen m×n tipindeki C matrisine A ve B matrislerinin çarpımı denir. Matrislerin çarpımı için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1. A(B + C) = AB + AC
2. (A+B)C = AC + BC
3. (AB)C = A(BC)
4. A.B = B.A eşitliği her zaman doğru değildir. Genel olarak $A.B \neq B.A$ dir.

Tarif 1.1.13. A ve B m×n tipinde iki matris, p ve q de her hangi iki sayı olmak üzere

$$C = p.A + qB \qquad (1.1.3)$$

toplamına A ve B matrislerinin lineer toplamı denir.

Tarif 1.1.14. m×n, tipindeki bir A matrisinin satırları ile sütunlarının yer değiştirmesi sonucu elde edilen n×m tipindeki matrise A matrisinin transpozesi denir ve A^t ile gösterilir.

Teorem 1.1.15. A ve B, reel elemanlı matrisler ve k da bir reel sayı olmak üzere matrisler üzerindeki transpoze işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$
2. $(A^t)^t = A$
3. $(kA)^t = k.A^t$
4. $(A.B)^t = B^t.A^t$ [7]

Tarif 1.1.15. Bir A matrisinin elemanları kompleks sayılardan oluşsun. Bu A matrisinin elemanlarının eşlenik traspozesi ile oluşturulan matrise A matrisinin eşlenik traspozesi denir ve A^* ile gösterilir.

Teorem 1.1.2. A ve B, m×n tpinde kompleks elemanlı matrisler ve λ da kompleks skaler olmak üzere eşlenik traspoze için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1. Her kopmleks A matrisi için $(A^*)^* = A$
2. A + B tanımlı ise $(A+B)^* = A^* + B^*$
3. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda}.A^*$
4. A.B tanımlı ise $(A.B)^* = B^*.A^*$ [10]

Tarif 1.1.16. Bir A matrisinin aynı sayıda satır ve sütunlarının silinmesiyle elde edilen matrise A matrisinin alt matrisi denir.

Tarif 1.1.17. A, n×n tipinde bir karesel matris olmak üzere;

$$A.B = B.A = I_n \qquad (1.1.4)$$

olacak şekilde bir B matrisi varsa bu B matrisine A matrisinin tersi denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir.

Teorem 1.1.3. A ve B, n×n tipinde tersleri mevcut iki matris ise

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1} \qquad (1.1.5)$$

olur [1].

Teorem 1.1.4. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mxm tipinde tersleri mevcut matrisler ise

$$(A_1.A_2\ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1}.A_{n-1}^{-1}\ldots A_1^{-1} \qquad (1.1.6)$$

olur [1].

Tarif 1.1.18. A, nxn tipinde bir karesel matris olsun. Eğer $A^t = A$ ise A matrisine simetrik, $A^t = -A$ ise A matrisine ters (anti) simetrik matris denir.

Tarif 1.1.19. A, kompleks elemanlı bir matris olsun. Eğer, $A^* = A$ ise A matrisine hermityen, $A^* = -A$ ise A matrisine ters hermityen matris denir.

Tarif 1.1.20. Bir A karesel matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanların toplamına A matrisinin izi denir ve iz(A) ile gösterilir.

Teorem 1.1.5. A ve B, nxn tipinde karesel matrisler ve a,b de skalerler olmak üzere iz için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1. $iz(a.A + b.B) = a.iz(A) + b.iz(B)$
2. $iz(A^t) = iz(A)$
3. $iz(A.B) = iz(B.A)$
4. $iz(A^*.A) = iz(A.A^*)$ [1]

Tarif 1.1.21. A, nxn tpinde bir karesel matris olsun. Eğer $A^2 = A$ ise A matrisine idempotent matris denir.

Teorem 1.1.6. A, idempotent bir matris ise aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1. A^* ve I_n - A matriside idempotenttir.
2. $A(I_n - A) = (I_n - A)A = 0$ dır.
3. X sütun matrisi için AX = X olması için gerek ve yeter şart $X \in Range(A)$ olmasıdır.
4. rank(A) = İz(A) ve Çöz(A) = Range(I_n - A) dır [9].

Tarif 1.1.22. A, nxn tpinde bir karesel matris olsun. Eğer $A^m = [0]$ ise A matrisine m-inci dereceden nilpotent matris denir.

Tarif 1.1.23. Bir A karesel matrisinin determinant değeri sıfır ise A matrisine singüler matris denir.

Tarif 1.1.24. Bir A karesel matrisinin determinant değeri sıfır değil ise A matrisine regüler yada singüler olmayan (non-singüler) matris denir.

Teorem 1.1.7. Her regüler A karesel matrisinin tersi vardır ve tektir [1].

Tarif 1.1.25. A reel elemanlı regüler bir karesel matris olsun. Eğer $A = A^{-1}$ ise A matrisine ortagonal matris denir.

Teorem 1.1.8. A reel elemanlı regüler bir matris ise, A^tmatrisi de regülerdir[10].

Teorem 1.1.9. A kompleks elemanlı regüler bir matris ise, A^* matrisi de regülerdir [10].

Teorem 1.1.10. A ve B karesel matrisler ve $AB = 0$ ise bu halde aşağıdaki üç durum vardır.

1. $A = 0$, 2. $B = 0$ 3. A ve B matrislerinin ikiside singülerdir [11].

Teorem 1.1.11. $A \neq O$, A,X ve Y dikdörtgen matrisler olmak üzere

$$AX = AY \quad \text{veya} \quad XB = YB$$

eşitliklerinde $X = Y$ değildir [11].

Tarif 1.1.26. Bir A matrisini yatay ve düşey çizgiler kullanarak A nın bloklar denen daha küçük tipte matrislere bölünebilir. Bu şekilde bölünmüş her A matrisine blok matris denir.

Teorem 1.1.12. A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} sırasıyla s×s, s×m,m×s, m×m biçiminde alt matrisler ve A_{22}^{-1} mevcut olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad (1.1.7)$$

biçiminde bölmeli bir matris olsun. Bu durumda B_{11}, B_{12}, B_{21} ve B_{22} sırasıyla s×s, s×m,m×s, m×m biçiminde olmak üzere A matrisinin

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \qquad (1.1.8)$$

biçiminde A ile aynı şekilde bloka sahip bir tersi vardır. Şayet A_{22} matrisinin tersi biliniyor ise

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12} . A_{22})^{-1}$$
$$B_{12} = -B_{11} . A_{12} . A_{22}^{-1}$$
$$B_{21} = -A_{22}^{-1} . A_{21} . B_{11}$$
$$B_{22} = -A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1} . A_{21} B_{12}$$

olur. Bu eşitliklerden A^{-1} ters matrisi bulunur [10].

Teorem 1.1.13. A, m×n tipinde rankı k olan bir matris olsun. $\text{rank}(A_{11}) = k$ ise A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

biçiminde de kısımlara ayrılabilir. $P = A_{21} . A_{11}^{-1}$ ve $Q = A_{11}^{-1} . A_{12}$ olmak üzere;

$$A = \begin{bmatrix} I_k \\ P \end{bmatrix} [A_{11} \quad A_{12}] = \begin{bmatrix} I_k \\ P \end{bmatrix} A_{11} [I_k \quad Q] = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} [I_k \quad Q] = B.C \qquad (1.1.9)$$

şeklinde yazılabilir [12].

Tarif 1.1.27. Herhangi bir A matrisine uygulanan aşağıdaki işlemlere elemanter işlemler denir.

1. A matrisinin iki satır veya sütununun yerini değiştirmek
2. A matrisinin bir satır veya sütununun sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak
3. A matrisinin bir satır veya sütununa bunlara parelel satır veya sütunları eklemek

Tarif 1.1.28. Eğer bir B matrisi A matrisinden elemanter satır işlemleri ile elde ediliyorsa A matrisine B ye satırca eşdeğerdir denir.

Tarif 1.1.29. Eğer I_n birim matrsine elemanter satır veya sütun dönüşümlerinin uygulanmasıyla elde edilen matrise elemanter satır veya sütun matrisi denir.

Teorem 1.1.14. Elemanter matrisler singüler değildir [3].

Teorem 1.1.15. Her regüler matris elemanter matrislerin çarpımı olarak ifade edilebilirler [3].

Teorem 1.1.16. A ve B matrislerinin eşdeğer olması için gerek ve yeter şart

$$PAQ = B \tag{1.1.10}$$

olacak biçimde P ve Q regüler matrislerinin olmasıdır. Burada P, A matrisine uygulanan satır işlemlerinin, Q da A matrisine uygulanan sütun işlemlerinin çarpımıdır [3].

Teorem 1.1.17. A, n×n tipinde singüler olmayan bir matris ise

$$PAQ = I_n \tag{1.1.11}$$

olacak şekilde P ve Q matrisleri vardır [3].

Teorem 1.1.18. A ve B, n×n tipinde iki regüler matris olsun. O zaman AB ve BA çarpım matrisleri de regülerdir [15].

Teorem 1.1.19. A ve B, n×n tipinde iki matris olsun. Eğer A ve B den en az biri singüler ise AB ve BA çarpımları da singülerdir [15].

***Tarif* 1.1.30.** A ve B, F cismi üzerinde n×n tpinde karesel matrisler olsunlar. Eğer,

$$B = P^{1}AP \tag{1.1.12}$$

olacak şekilde F cismi üzerinde regüler bir P matrisi varsa A ve B matrislerine denk matrisler denir.

Teorem 1.1.20. A, rankı r olan n×n tipinde bir matris ise A matrisi,

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1.13}$$

matrisine eşdeğerdir [10].

***Tarif* 1.1.31.** A, bir karesel matris olsun. Eğer $a_{ij} \in A$ elemanının bulunduğu i. satır ve j. sütun elemanları atılarak elde edilen alt matrisin determinant değerine a_{ij} elemanına ait minör denir ve A_{ij} ile gösterilir.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.A_{ij}$$

ile tarif edilen değere de a_{ij} elemanının kofaktörü veya işaretli minörü denir.

Tarif 1.1.32. Bir A karesel matrisinde a_{ij} elemanlarının yerine A_{ij} değerlerinin konulması ile bulunan işaretli minörler matrisinin transpozesine A matrisinin ek matrisi veya adjointi denir ve adj(A) veya ek(A) ile gösterilir.

Tarif 1.1.33. P, regüler bir matris olmak üzere A ve B karesel matrisleri arasında

$$A = P^{-1}BP \qquad (1.1.14)$$

eşitliği sağlanıyorsa A ve B matrislerine benzer matrisler denir. Eğer A ve B benzer matrisler ise $n \in N^{+}$ olmak üzere $A^{n} = P^{-1}B^{n}P$ ve $|A| = |B|$ özellikleri vardır.

1.2. Vektör Uzayları

Tarif 1.2.1. $n\times 1$ tipindeki bir sütun veya $1\times n$ tipindeki bir satır matrisine bir vektör denir.

Tarif 1.2.2. K, verilen herhangi bir cisim ve V de toplam ve skalerle çarpma işlemleri ile tanımlı boş olmayan bir cümle olsun. Bu takdirde herhangi $u,v \in V$ için $u+v \in V$ toplam ve herhangi $u \in V$ ve $k \in K$ için skalerle $k.u \in V$ çarpma işlemlerine göre V cümlesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu cümleye K cismi üzerinde bir vektör uzay denir.

1) $\forall\, m,v,w \in V$ için $(m+v)+w = m+(v+w)$
2) $\forall\, m,v \in V$ için $m+v = v+m$
3) $\forall\, u \in V$ için $u+(-u) = 0$ olacak şekilde bir $(-u)$ vektörü vardır
4) $\forall\, u \in V$ için $u+0 = u$
5) $\forall\, k \in K$ ve $\forall u,v \in V$ için $k(u+v) = ku+kv$
6) $\forall\, k_1,k_2 \in K$, $\forall u \in V$ için $(k_1+k_2)u = k_1u+k_2u$
7) $\forall\, k_1,k_2 \in K$, $\forall u \in V$ için $(k_1.k_2)u = k_1(k_2u)$
8) $1 \in K$ birim skaler ise ve herhangi bir $u \in V$ için $1.u = u$ dur.

Tarif 1.2.3. K, bir cisim olmak üzere K üzerindeki bütün $m\times n$ matrislerinin cümlesi, vektör uzayı aksiyomlarını sağlıyorsa, K cismi üzerindeki $m\times n$ tipindeki bütün matrislerin cümlesi bir vektör uzayını meydana getirirler. İşte bu uzaya "Matris Uzayı" denir.

Tarif 1.2.4. W, K cismi üzerinde tarifli V vektör uzayının alt cümlesi olsun. W, V vektör uzayındaki skalerle çarpma ve vektör toplamları işlemlerine göre K cismi üzerinde bir vektör uzayı ise W alt cümlesine V vektör uzayının bir alt vektör uzayı denir.

Teorem 1.2.1. Bir V vektör uzayının herhangi sayıda alt uzaylarının kesişimi de V vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır [15].

Tarif 1.2.5. K cismi üzerinde bir V vektör uzayı tarif edilmiş olsun. $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ olmak üzere

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0 \qquad (1.2.1)$$

eşitliği sadece $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ olmasıyla sağlanıyorsa $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ vektörlerine lineer bağımsız, aksi halde lineer bağımlıdırlar denir.

Tarif 1.2.6. Bir V vektör uzayında V yi geren Lineer bağımsız $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektörleri varsa; V-vektör uzayındaki bu Lineer bağımsız vektörlerin sayısına V nin boyutu ve $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektörlerine de V'nin bazı denir.

Tarif 1.2.7. Bir vektör uzayının bazında sonlu eleman var ise, V ye sonlu boyutludur denir.

Tarif 1.2.8. Bir V vektör uzayının bazında sonsuz eleman var ise, V ye sonsuz boyutludur denir.

Teorem 1.2.2. A, m×n tipinde bir matris ve X de keyfi bir vektör olmak üzere AX formundaki bütün vektörlerin cümlesi Rank(A) boyutlu ve m-inci dereceden bir vektör uzayıdır [11].

Tarif 1.2.9. K cismi üzerinde, m×n tipindeki

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1.2.2)$$

matrisi verilsin. A matrisinin,

$$R_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_n), \ldots, R_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$$

satırları ile meydana getirilen uzaya A nın satır uzayı

$$S_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})^t, \ldots, S_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})^t$$

sütunlar ile meydana getirilen uzaya da A nın sütun uzayı denir. A nın satır uzayı K^n nin, A nın sütun uzayıda K^m nin alt uzayını meydana getirirler.

Teorem 1.2.3. u ve v Lineer bağımsız iki vektör olsun. Bu halde her $k \in K$ skalerleri için

$$u + k(u - v)$$

vektörleri de Lineer bağımsızdır [15].

Teorem 1.2.4. Satırca eşdeğer olan matrisler aynı satır uzayına, sütunca eşdeğer olan matrislerde aynı sütun uzayına sahiptir [15].

Tarif 1.2.10. Bir V vektör uzayının herhangi bir V vektörü U cümlesinin sonlu $u_1, u_2, \ldots u_m$ vektörleri yardımıyla

$$V = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_m u_m \qquad (1.2.3)$$

olarak yazılabiliyorsa, V vektörüne, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ vektörlerinin lineer toplamı denir.

Tarif 1.2.11. U ve W, V vektör uzayının iki alt uzayı olsun. V = U+W şeklinde yazılabiliyorsa, V vektör uzayına U ve W alt uzaylarının direk toplam uzayı denir ve

$$V = U \oplus W$$

olarak gösterilir.

Teorem 1.2.5. U ve W, V vektör uzayının iki alt uzayı olsunlar.

$$V = U \oplus W$$

olması için gerek ve yeter şart

$$V = U + W \quad \text{ve} \quad U \cap W = \{0\} \qquad (1.2.4)$$

olmasıdır [15].

Teorem 1.2.6. AB çarpımı verilmiş olsun. Bu taktirde AB matrisinin satır uzayı B matrisinin satır uzayının ve AB matrisinin sütun uzayıda A matrisinin sütun uzayınının içindedir [15].

Teorem 1.2.7. U ve W, bir V vektör uzayının sonlu boyutlu alt uzayları olsunlar. Bu halde U + W toplam uzayıda sonlu boyutlu ve

$$\text{Boyut}(U + W) = \text{Boyut}U + \text{Boyut}W - \text{Boyut}\,(U \cap W) \quad (1.2.5)$$

olur [15].

Teorem 1.2.8. Bir V vektör uzayının n vektörden oluşan bir bazı varsa, aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

1. V nın herhangi n tane Lineer bağımsız vektörü de yine V nin bir bazıdır.
2. V den çıkarılan Lineer bağımsız vektör sistemlerinin hiçbirisi n den fazla vektör ihtiva etmezler.
3. V nin her bazı n vektörden meydana gelir [15].

Teorem 1.2.9. A; $m\times r$ ve B den $r\times n$ tipinde iki matris olsun. $BX = 0$ olacak biçimde X vektörlerinin vektör uzayı U ve $ABX = 0$ olacak şekilde X vektörlerinin vektör uzayı V ise $U\subset V$ dir [11].

Teorem 1.2.10. Her A matrisi için

$$\text{Range}(A.A^*) = \text{Range}(A) \quad \text{ve} \quad \text{Çöz}\,(A^*\cdot A) = \text{Çöz}(A) \quad [9]$$

1.3. Bir Matrisin Rankı

Tarif 1.3.1. $m\times n$ tipindeki bir A matrisinin lineer bağımsız satır veya sütun vektörlerinin maksimum sayısına, A matrisinin satır veya sütun rankı denir.

Teorem 1.3.1. Bir matrisin rankı, matrisin satır veya sütun vektörlerinin ortak rankına eşittir [15].

Teorem 1.3.2. Bir matriste satır vektörlerinin rankı ile sütun vektörlerinin rankı eşittir. Bir A matrisinin rankı r ise bu rank; $\text{rank}A = r$ ile gösterilir [15].

Teorem 1.3.3. A, $m\times n$ tipinde bir matris olsun. Bu takdirde

$\text{Rank}(A)=\text{rakn}(A^t) = \text{rank}(A.A^t) = \text{rank}(A^tA)$ olur [15]

Teorem 1.3.4. A ve B matrisleri sırasıyla m×n ve n×p tipinde matrisler olsunlar. Bu taktirde

$$\text{Rank}\,(A.B) \leq \text{Min}\{\text{Rank}\,(A),\ \text{Rank}\,(B)\} \tag{1.3.2}$$

dir [11].

Teorem 1.3.5. A ve B m×n tipinde iki matris olsun. Bu taktirde

$$\text{Rank}(A + B) \leq \text{Rank}A + \text{Rank}B \tag{1.3.3}$$

dir [11].

Teorem 1.3.6. A m×n ve B de n×p tipinde iki matris olsun. Bu taktirde

$$\text{Rank}(AB) \geq \text{Rank}(A) + \text{Rank}(B) - n \tag{1.3.4}$$

dir [11].

Teorem 1.3.7. A,B ve C matrisleri sırasıyla m×n, n×p ve p×q tipinde matrisler olsunlar; bu taktirde

$$\text{Rank}(AB) + \text{Rank}(BC) \leq \text{Rank}(B) + \text{Rank}(ABC)$$ dir [11].

Teorem 1.3.8. A, m×n ve B de n×p tipinde iki matris olsun. Eğer $AB = 0$ ise

$$\text{Rank}A + \text{Ran}B \leq n$$ dir [11].

Teorem 1.3.9. A, n×n tipinde bir matris, ve $A^2 = A$ ise bu taktirde;

$$\text{Rank}(A) + \text{Rank}(I - A) = n \tag{1.3.5}$$

dir [11].

Teorem 1.3.10. A, m×n tipinde bir matris olsun. Bu taktirde A, A^t ve A^* aynı ranka sahiptir [3].

Teorem 1.3.11. Her A matrisi için

$$\text{Rank}\,(A^*A) = \text{Rank}\,(AA^*) = \text{Rank}(A) \tag{1.3.6}$$

dır [9].

1.4. Lineer Dönüşümler

Tarif 1.4.1. V ve U aynı K cismi üzerinde tanımlı iki vektör uzay olsun. $F : V \rightarrow U$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa F dönüşümüne Lineer dönüşüm denir.

1. Herhangi $v,w \in V$ için $F(v+w) = F(v)+F(w)$
2. Herhangi $k \in K$ ve herhangi $v \in V$ için $F(kv) = kF(v)$

Tarif 1.4.2. $F: V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olsun. F dönüşümünün U içindeki değer bölgesine F nin görüntü cümlesi denir ve

$$\text{RangeF} = \{u \in U \mid F(v) = U, \text{ her } v \in V \text{ için}\}$$

olarak yazılır.

Tarif 1.4.3. $F:V \rightarrow U$ bir Lineer dönüşüm olsun. Eğer $f(v) = 0$ olacak şekilde bazı $v \in V$ elemanları var ise $f(v) = 0$ eşitliğini sağlayan v-lerin meydana getirdiği cümleye F nin çekirdeği denir ve

$$\text{ÇekF} = \{\text{Bazı } v \in V \mid F(v) = 0\}$$

ile gösterilir.

Teorem 1.4.1. U ve V aynı bir K cismi üzerinde tanımlı iki vektör uzay olsunlar. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ V nin bir bazı ve $\{u_1, u_2, \ldots u_n\}$ de U'nun içinde herhangi vektörler ise,

$$F(v_1) = u_1,\ F(v_2) = u_2, \ldots,\ F(v_n) = u_n \qquad (1.4.1)$$

olacak biçimde bir tek $F: V \rightarrow U$ lineer dönüşümü vardır[15].

Teorem 1.4.2. $F: V \rightarrow U$ bir Lineer dönüşüm olsun. Bu halde F dönüşümünün görütnüsü U nun; ve F dönüşümünün çekirdeği de V nin bir alt uzayıdır [15].

Teorem 1.4.3. V sonlu boyutlu bir vektör uzay ve $F: V \rightarrow U$ da bir Lineer dönüşüm olsun. Bu taktirde

$$\text{Boyut}(V) = \text{Boyut}(\text{çekF}) + \text{Boyut}(\text{RangeF})$$

dir[15].

Tarif 1.4.4. $F:V \to U$ bir Lineer dönüşüm olsun. Eğer $v \neq 0$ olmak üzere $F(v) = 0$ olacak şekilde bir $v \in V$ vektörü varsa, F dönüşümüne singüler dönüşüm, yine F dönüşümü sadece $0 \in V$ vektörünü $0 \in U$ vektörüne dönüştürüyorsa bu halde F dönümüşüne regüler dönüşüm denir.

Tarif 1.4.5. $E^2 = E$ olmak üzere $E : V \to V$ Lineer dönüşümüne izdüşüm dönüşüm denir. Eğer U lineer dönüşümün görüntüsü ve W da dönüşümün çekirdeği ise,

1. Eğer $u \in U$ ise $E(U) = U$
2. Eğer $E \neq I$ ise E Singüler dönüşümdür.
3. $V = U \oplus W$
4. $I - E$ de izdüşüm dönüşümdür.
5. $I + E$ ters çevrilebilir özellikleri geçerlidir.

Tarif 1.4.6. $F: V \to U$ dönüşümü her $v \in V$ için $F(v)$ sıfır oluyorsa F dönüşümüne sıfır dönüşüm denir. Sıfır dönüşüm aynı zamanda lineerdir.

Tarif 1.4.7. $F: U \to U$ dönüşümü her $v \in V$ yine kendisine dönüştürülüyorsa, F dönüşümüne özdeşlik dönüşümü denir. Ayrıca özdeşlik dönüşümü lineerdir.

Tarif 1.4.8. $F:V \to U$ lineer dönüşümünde $v_1, v_2 \in V$ için $F(v_1) = F(v_2)$ eşitliği ancak $v_1 = v_2$ olması halinde geçerli ise F Lineer dönüşümüne bire-bir dönüşüm denir.

Tarif 1.4.9. $F:V \to U$ Lineer dönüşümü verilsin. Eğer her $u \in U$, V içindeki bir elemanın görüntüsü ise F dönüşümüne üzerine dönüşüm denir.

Tarif 1.4.10. $F:V \to U$ Lineer dönüşümü bire-bir ve üzerine ise dönüşümün F^{-1} gibi bir ters dönüşümü vardır ve bu ters dönüşüm de lineerdir.

Eğer F ve G iki Lineer dönüşüm ise tanım cümleleri F ve G nin arakesit cümleleri olmak üzere; F , G, F+G, F-G ve F.G dönüşümleri elde edilir. Yine F ve G lineer dönüşümleri var ise bileşke fonksiyon içinde aşağıdaki teoremleri yazabiliriz.

Teorem 1.4.4. $F: R^n \to R^r$ ve $G: R^s \to R^m$ lineer dönüşümler olsunlar. GoF dönüşümününün tanımlı olması için gerek ve yeterşart $r = s$ olmasıdır[10].

Teorem 1.4.5. V, U ve W, K cismi üzerinde tanımlı vektör uzaylar olsunlar. Eğer F ve F', V den U ya ve G ve G' de U dan W ya lineer dönüşümler olsunlar. $k \in K$ olmak üzere;

1. Go (FoF') = GoF+GoF'
2. (G+G')oF = GoF+G'oF
3. K(GoF) = (KG)F = Go(kF) özellikleri geçerlidir [10].

1.5. Lineer Denklem Sistemleri

Tarif 1.5.1. $x_1, x_2, ..., x_n$ ler bilinmeyenler ve $a_1, a_2, ..., a_n$ lerde K-komutatif cisminin elemanları olsun.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b \qquad (1.5.1)$$

şeklindeki eşitliğe Lineer denklem denir. Ayrıca buradaki b ye de denklemin ikinci tarafındaki sabit terimi denir.

Tarif 1.5.2. Sonlu sayıda Lineer denklemlerden meydana gelen

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \qquad (1.5.2)$$

şeklindeki denklem sistemine, Lineer denklem sistemi denir.

Tarif 1.5.3. Bir Lineer denklem sisteminde $x_1, x_2, ..., x_n$ bilinmeyenleri yerine K cisminin $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2, ... x_n = c_n$ değerleri konulduğunda bu sistemin bütün denklemleri aynı anda sağlanıyorsa $c_1, c_2, ..., c_n$ değerlerinden oluşan

$$\{c_1, c_2, ..., c_n\}$$

cümlesine verilen denklem sisteminin özel bir çözümü denir. Ayrıca mümkün olan bütün çözüm cümlesine de sistemin genel çözümü denir.

Tarif 1.5.4. (1.5.2) ile verilen lineer denklem sisteminin ikinci tarafında bulunan b_1, b_2, ..., b_m elemanlarının hepsi birden sıfır ise yani,

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0 \qquad (1.5.3)$$

ise verilen denklem sistemine homojen denklem sistemi denir

Tarif 1.5.5. Çözümleri aynı olan denklem sistemine denk sistemler denir.

Tarif 1.5.6. (1.5.2) ile verilen denklem sisteminde

$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^t \in K^n \quad B = [b_1, b_2, \ldots, b_m]^t$ ve $A^i = [a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}]^t \in K^m$

($i = 1,2,\ldots,n$) olarak alındığında (1,5,2) denklem sistemi

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \ldots + x_n A^n = B \qquad (1.5.4)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu yazım şekline (1.5.2) denkleminin vektörel gösterimi denir.

Tarif 1.5.7. (1.5.2) ile verilen denklem sistemini,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (1.5.5)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1.5.6)$$

matrisine denklem sisteminin katsayılar matrisi,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (1.5.7)$$

matrisine denklem sisteminin bilinmiyenler matrisi,

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (1.5.8)$$

matrisine de denklem sisteminin ikinci taraf sabiti denir.
(1.5.6) matrisini A, (1.5.7) matrisini X ve (1.5.8) matrisini de b ile gösterirsek (1.5.5) lineer denklem sistemini

$$AX = b \qquad (1.5.9)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu yazılış şekline (1.5.2) lineer denklem sisteminin matris gösterimi denir.

Tarif 1.5.8. A katsayılar matrisinin sütun vektörlerine b sütun vektörünün eklenmesiyle elde edilen

$$[A:b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & : & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & : & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & : & b_m \end{bmatrix} \qquad (1.5.10)$$

matrisine arttırılmış matris denir.

Tarif 1.5.9. (1.5.6) ile verilen denklem sisteminin katsayılar matrisinin rankına (1.5.2) denklem sisteminin rankı denir.

Netice. Her hangi bir denklem sisteminin katsayılar matrisinin rankı r ise denklem sisteminin r tane lineer bağımsız denklemi vardır.

Tarif 1.5.10. Lineer denklem sistemi (1.5.4) olarak yazıldığında, b vektörü K^m uzayının bir vektörüdür. Fakat verilen sistemin, uzayın her b vektörü için çözümü olmayabilir. İşte verilen sistemin bir çözümünün olması için b vektörünün sağladığı şarta uygunluk şartı denir.

Netice. Özel olarak b vektörü sıfır vektörü ise AX = 0 homojen denklemi her zaman uyumludur.

Teorem 1.5.1. Vektörel olarak verilen

$$x_1A^1 + x_2A^2 + \dots + x_nA^n = b \qquad (1.5.11)$$

denklem sisteminin rankı r olsun. Bu denklem sisteminde rank r olduğundan

$$A^1, A^2, \dots, A^r \qquad (1.5.12)$$

vektörleri lineer bağımsız olarak alınabilir. Bu halde denklem sisteminin çözümünün olması için gerek ve yeter şart

$$A^1, A^2, \dots, A^r, b \qquad (1.5.13)$$

vektör sisteminin lineer bağımlı olması yada

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A,b) \qquad (1.5.14)$$

olmasıdır[1].

Teorem 1.5.2. $AX = 0$ uyumlu bir sistem ve $AX = 0$ da bu sistemin homojen kısmı olsun. Eğer $AX = b$ sisteminin Y_1 gibi bir özel çözümü ve $AX = 0$ homojen sistemininde Y gibi bir genel çözümü var ise, o zaman homojen olmayan $AX = b$ denklem sisteminin X genel çözümü

$$X = Y_1 + Y'$$

şeklindedir[1].

Teorem 1.5.3. $AX = b$ denklem sisteminin iki çözümü X_1 ve X_2 olsun. Eğer λ da K cismine ait herhangi bir sabit ise

$$X_3 = X_1 + \lambda(X_2 - X_1)$$

de denklem sisteminin bir çözümüdür[1].

Teorem 1.5.4. A, m×n tipinde bir matris olmak üzere $AX = 0$ homojen denklem sisteminin çözüm kümesi

$$n - \text{rank}(A)$$

boyutlu bir vektör uzay meydana getirir[11].

Teorem 1.5.5. $ABX = 0$ olacak şekilde BX formundaki vektörlerin cümlesi rankB - rankAB boyutlu bir vektör uzay meydana getirir[11].

İrdeleme. n bilinmiyenli ve m denklemden meydana gelen

$$AX = b \qquad (1.5.15)$$

ve bu denklemin ikinci tarafının sıfır yapılmasıyla elede edilecek homojen denklem $AX = 0$ olsun. Eğer $AX = b$ denklem sisteminin katsayılar matrisinin rankı r ise o zaman aşağıdaki irdelemeyi yapabiliriz.

1. $r = n = m$ ise; (1.5.15) lineer denklem sisteminin daima bir çözümü vardır ve bu çözüm tektir. Bu X çözümü

$$X = A^{-1}b$$

dir. Yine $AX = 0$ homojen denklem sisteminin çözümüde

$$X = A^{-1}0 = 0$$

dir ve sistemin sıfırdan farklı çözümü yoktur. Bu durumda sisteme Kramer sistemi adı verilir.

2. $r = m<n$ ise; $AX = 0$ homojen sistem daima bir çözüme sahiptir ve çözümlerin sayısı ∞^{n-r} tanedir. Bu çözümleri bulmak için n-r tane bilinmiyeni keyfi seçerek sistem Kramer sistemine dönüştürülür.

3. $r = n<m$ ise; $AX = b$ sisteminin uygunluk şartını sağlaması halinde, bir tek çözümü vardır. Bu çözümü bulmak için r tane uygun denklem seçilerek sistem Kramer hale getirilir.

4. $r<n$ ve $r<m$ ise; $AX = b$ sistemi uyumlu olduğu zaman ∞^{n-r} tane çözüm vardır. Bu çözümleri bulmak için n-r tane bilinmiyen ve m-r tane uygun denklem keyfi seçilerek sistem Kramer hale getirilir. $AX = 0$ sistemi ise n-r bilinmiyen keyfi seçilerek Kramer hale getirilir.

1.6. Kronecker Çarpım

Tarif 1.6.1. $A = (a_{ij})$ matrisi $m\times n$ be $B = (b_{ij})$ matriside $p\times q$ tipinde matrisler olsunlar. $mp\times nq$ tipindeki

$$A\otimes B = (a_{ij}\, B) \qquad (1.6.1)$$

($i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$) matrisine kronecker çarpım matrisi denir. Kronecker matrisi için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1. $0\otimes A = A\otimes 0 = 0$
2. $(A_1 + A_2)\otimes B = (A_1\otimes B) + (A_2\otimes B)$
3. $A\otimes(B_1 + B_2) = A\otimes B_1 + A\otimes B_2$
4. $\alpha A\otimes \beta B = \alpha\beta(A\otimes B)$ (α,β skaler)
5. $A_1A_2\otimes B_1B_2 = (A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)$
6. $(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1}$ (Eğer çarpımın tersi var ise)
7. $(A\otimes B)^{g} = A^{g}\otimes B^{g}$

Ayrıca Kronecker çarpım $AXB = C$ matris denkelminin çözümünde kolaylık sağlar. X matrisini $n\times r$ tipinde bir matris olarak düşünülürse bundan birinci sütunu başa yazmak suretiyle ikinci sütunu bunun altına ve nihayet r inci sütunu da r-1 inci sütunun altına yazarak $nr\times 1$ tipinde bir sütun matrisi elde edilebilir. *Yine aynı işlemler C matrisine uygulanırsa C matrisinden $mr\times 1$ tipinde* bir matris elde edilir. Bu yapılanlardan

$$AXB = C \qquad (1.6.2)$$

denkleminde A, $m\times n$ ve B de $r\times k$ tipinde matrisler olarak alındığında Kronecker çarpımı kullanarak denklem,

$$(A\otimes B^{t})x = c \qquad (1.6.3)$$

şekline dönüşür.

2. MATRİS TERSLERİ

2.1. Karesel Matrislerde Tersler

Tarif 2.1.1. A, m×m tipinde bir karesel matris olsun. Eğer rank(A) = m ve $A^{-1}.A = A^{-1}.A = I_m$ ise, A matrisine regüler matris denir. Her regüler matrisin tersi vardır ve tektir. Şayet rank(A)<m ise A matrisi singüler olup tek olmayan tersi vardır.

2.2. Dikdörtgen Matrislerde Tersler

m×n tipindeki matrislere dikdörtgen matris denir ve dikdörtgen matrislerin terslerinde aşağıdaki üç durum vardır.

1. A, m×n tipinde bir dikdörtgen matris ve rank(A) = n ise A matrisinin bir sol tersi vardır.
2. A, m×n tipinde bir dikdörtgen matris ve rank(A) = m ise, A matrisinin bir sağ tersi vardır.
3. A, m×n tipinde bir dikdörtgen matris ve rank(A) < min(m,n) ise A matrisinin genelleştirilmiş tersi vardır.

1. Durum (Sol Ters)

Tarif 2.2.1. A, m×n tipinde bir dikdörtgen matris olsun. Eğer A matrisinin rankı n ye eşitse, yani rank(A) = n ise

$$A_L^{-1}A = I_n$$

olacak şekilde, A matrisinin bir tersi vardır. İşte bu terse A matrisinin sol tersi denir. Şimdi bu sol tersi bulmaya çalışalım. A, m×n tipinde ve rank(A) = n olduğundan, A^tA matrisi n×n tipinde ve rank(A^tA) = n dir. Böylece A^tA matrisi regüler olup bir tek tersi vardır. A^tA matrisinin regüler olmasından

$$(A^tA)^{-1}.(A^tA) = I_n$$

eşitliğini yazarız. Bu eşitliği

$$[(A^tA)^{-1}.A^t]A = I_n$$

olarak düzenlersek, $[(A^tA)^{-1}.A^t]$ matrisi bizim aradığımız sol terstir. Sonuç olarak A matrisinin sol tersi

$$A_L^{-1} = (A^t A)^{-1}.A \qquad (2.2.1)$$

olur.

2. Durum (Sağ Ters)

Tarif 2.2.2. A, m×n tipinde bir dikdörtgen matris ve rank(A) = m olsun. Bu halde A matrisinin

$$A.A_R^{-1} = I_m$$

olacak şekilde bir tersi vardır. İşte bu terse A matrisinin sağ tersi denir. Şimdi bu sağ tersi bulmaya çalışalım. A, m×n tipinde bir matris ve rank(A) = m olduğundan, $A.A^t$ matrisi m×n tipinde ve regülerdir. $A.A^t$ matrisi regüler olduğundan,

$$(AA^t)(A.A^t)^{-1} = I_m$$

olacak şekilde bir tek tersi vardır. Bu eşitliği

$$A[A^t(A.A^t)^{-1}] = I_m$$

şeklinde düzenlersek, $A^t(A.A^t)^{-1}$ matrisi bizim aradığımız sağ terstir. Sonuç olarak A matrisinin sağ tersi

$$A_R^{-1} = A^t(A.A^t)^{-1} \qquad (2.2.2)$$

olur.

Buraya kadar yapılanlardan A, m×n tipinde bir matris olmak üzere sağ ve sol terslerin varlığını aşağıdaki şekilde özetleyebiliriz.

1. Rank(A) = m = n ise; A matrisinin sağ ve sol tersleri eşit olup, A nın tersi tektir.
2. Rank(A) = m<n ise; A matrisinin sadece sağ tersleri olup, sol tersleri yoktur.
3. Rank(A) = n<m ise; A matrisinin sadece sol tersleri olup, sağ tersleri yoktur.
4. Rank(A)<m<n veya Rank(A)<n<m ise; A matrisinin ne sağ, ne de sol tersleri vardır.
5. Rank (A)<m = n ise; A matrisinin ne sağ, ne de sol tersleri vardır. Bu son iki halde A matrisinin genelleştirilmiş ters dediğimiz tersleri vardır. Bunu 3. durum olarak inceleyeceğiz.

Örnek 2.2.1.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$$ matrisinin tersini bulalım.

m = 2, n = 3 ve rank(A) = 2 olduğundan A matrisinin sadece sağ tersi vardır. Şimdi bu tersi bulmaya çalışalım.

$$A^t=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad A.A^t=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix} \text{ ve } (A.A^t)^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/6\end{bmatrix}$$

olduklarından sağ ters,

$$A_R^{-1}=A^t(A.A^t)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/6\\ -1/2 & 1/6\\ 0 & 1/3\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.2.2. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulalım.

m = 3, n = 2 ve rank(A) = 2 olduğundan, A matrisinin sadece sol tersi vardır. Şimdi bu tersi bulmaya çalışalım.

$$A^t=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix},\quad A^t.A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 6\end{bmatrix} \text{ ve } (A^t.A)=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2/3\end{bmatrix}$$

olduklarından A matrisinin sol tersi,

$$A_L^{-1}=(A^tA)^{-1}.A^t=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2/3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ 1/3 & 2/3 & 1/3\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

3. Durum

2.3. Genelleştirilmiş Tersler

Bu bölümde singuler olan karesel matrisler ile, m×n tipinde olupta rankı m ve n den herhangi birine eşit olmayan matrislerin terslerini araştıracağız. Ayrıca (2.2) de belirtilen sağ ve sol terslerin de birer genelleştirilmiş ters olduğunu göstereceğiz. Yine genelleştirilmiş terslerin özelliklerini inceleyip, AX = b lineer denklemi ile olan ilişkisini kuracağız.

Eğer A matrisi, m×m tipinde regüler bir matris ise Tarif 2.1.1 den A nın bir tek tersinin olduğunu biliyoruz. Bu tersle birlikte, eğer A regüler ise

$$AX = b$$

lineer denkleminin $X = Ab^{-1}$ şeklinde bir tek çözümü vardır.

Eğer A matrisi singuler veya m×n tipinde bir matris ise o zman A nın bir genelleştirilmiş tersi vardır ve bu tersi A^g ile göstereceğiz.

A^g genelleştirilmiş tersi de AX = b lineer denklem sisteminin çözümünde kullanılır. Eğer denklem uyumlu ise çözüm

$$X = A^g b$$

olarak verilir. Fakat buradaki A^g tersi A^{-1} ile aynı işi görmesine rağmen, A^{-1} gibi tek değildir.

Tarif 2.3.1. A, Keyfi ranklı, m×n tipinde bir matris olsun. Eğer

$$AX = b$$

denklemi uyumlu ise, $X = A^g b$ bir çözümdür. Buradaki A^g matrisine A nın genelleştirilmiş tersi denir.

Tarif 2.3.2. A, B ve C sırasıyla m×n, m×r ve r×n tipinde rankları r olan dikdörtgen matrisler olsunlar. Eğer

$$A = B.C$$

ise, A^g genelleştirilmiş tersi,

$$A^g = C_R^{-1}.B_L^{-1}$$

ile ifade edilir.

Teorem 2.3.1. A; m×n, B; m×r ve C de r×n tiplerinde rankları r olan matrisler olsunlar. Eğer AX = b denkleminde, A = B.C ve $A^g = C^t(CC^t)^{-1}.(B^tB)^{-1}.B^t$ ise AX = b denkleminin bir özel çözümü $X = A^g b$ dir[6].

İspat. A = B.C ve AX = b teoremde verildiğinden AX = b lineer denkleminin (B.C)X = b olarak yazabiliriz. (B.C)X = b eşitliğinin her iki tarafını soldan $C(BC)^t$ ile çarpalım, bu halde eşitlik

$$C(BC)^t(BC)X = C(BC)^t b \qquad (2.3.1)$$

$$(CC^t)(B^tB)CX = (CC^t)B^t b) \qquad (2.3.2)$$

olur. CC^t ve B^tB matrisleri, r-inci dereceden ve rankları r-olduklarından, regüler matrisler olup, $(CC^t)^{-1}$ ve $(B^tB)^{-1}$ gibi tersleri vardır. (2.3.2) ifadesini soldan

$$(B^tB)^{-1}.(CC^t)^{-1}$$

ile çarparsak,

$$(B^tB)^{-1}(CC^t)^{-1}(CC^t)(B^t.B).CX = (B^t.B)^{-1}.(C.C^t)^{-1}.(C.C^t).B^t.b$$

$$CX = (B^tB)^{-1}.B^t b \qquad (2.3.3)$$

olarak yazarız. C matrisi r×n tipinde ve rank C = r olduğundan (2.3.3) ifadesinin bir sağ tersi vardır ve (2.3.3) ifadesi bu sağ tersle birlikte,

$$X = C^t(CC^t)^{-1}.(B^t.B)^{-1}.B^t b \qquad (2.3.4)$$

yada

$$X = C_R^{-1}.B_L^{-1}.b \quad \text{veya } X = A^g b \qquad (2.3.5)$$

olarak yazılır.

Örnek 2.3.1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin genelleştirilmiş tersini bulalım.

Rank(A) = 2 olduğundan A matrisi singulerdir. Teorem 1.1.13 kullanılarak A yı A = B.C şeklinde yazmaya çalışalım.

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

alarak A matrisini $A_{11} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ şeklinde yazarız. $\mathrm{Rank}(A) = \mathrm{Rank}(A_{11})$ olduğundan Teorem 1.1.13 kullanabiliriz. Böylece

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = A_{11}^{-1}.A_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ olarak alırsak}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}.[E.Q] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

olur. $\mathrm{Rank}(B) = 2$ ve $\mathrm{Rank}(C) = 2$ olduğundan B nin bir sol tersi ve C ninde bir sağ tersi vardır. Şimdi bu tersleri bulmaya çalışalım.

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ ve } B^tB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (B^tB)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve}$$

$$B_L^{-1} = (B^tB)^{-1}B^t = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$C^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad (C.C^t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad (C.C^t)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C_R^{-1} = C^t(C.C^t)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ olur. Buradan da}$$

$$A^g = C_R^{-1}.B_L^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 7 & -8 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{olur.}$$

Teorem 2.3.2. A, m×n tipinde bir dikdörtgen matris olsun. A nın n×m tipinde bir A^g genelleştirilmiş tersinin olması için gerek ve yeterşart

$$AA^gA = A$$

olmasıdır[14].

İspat. Z, n×1 tipinde AX = b lineer denklemini sağlayan keyfi bir vektör olsun. Böylece AZ = b olacağından AX = b denklemi uyumlu olup, bir genelleştirilmiş tersi vardır.

Şimdi A^g var ise, $AA^gA = A$ olduğunu gösterelim. AX = b lineer denklemini uyumlu yapan her Z değeri için, AZ = b, eşitliğinin her iki tarafını soldan A^g ile çarparsak,

$$A^gAZ = A^gb \qquad (2.3.6)$$

olur. (2.3.6) eşitliğini bu kez soldan A ile çarparsak,

$$AA^gAZ = AA^gb$$

$$AA^gAZ = AZ$$

olarak yazarız. Böylece AZ = b denklemini uyumlu yapan her Z vektörü için

$$AA^gA = A \qquad (2.3.7)$$

olarak yazılır.

Şimdi $AA^gA = A$ eşitliğini kabul edip A^g nin varlığını gösterelim

AX = b lineer denkleminin uyumlu olduğunu kabul edelim. AX = b uyumlu olduğundan, n×1 tipinde bir W vektörü için AW = b dir. AW = b nin her iki tarafını soldan AA^g ile çarparsak

$$AA^gAW = AA^gb = AW = b$$

olur. $AA^gAW = b$ eşitliğinde AW = b değerini yerine yazarsak

$$AA^gb = b \qquad (2.3.8)$$

eşitliğini elde ederiz. Buda $X = A^gb$ nin, AX = b lineer denkleminin bir çözümü olduğunu verir. Tarif 2.3.1 den A^g, A nın bir genelleştirilmiş tersidir.

Tarif 2.3.3. A, m×n tipinde bir matris olsun.

$$AA^gA = A$$

eşitliğini sağlayan, n×m tipindeki, A^g matrisine A matrisinin genelleştirilmiş tersi denir.

Teorem 2.3.3. A, m×n tipinde bir matris olsun. Eğer A matrisi $AA^gA = A$ eşitliğini sağlıyorsa,

$$\text{Range}\,(AA^g) = \text{Range}(A)$$

$$\text{Çöz}\,(A^gA) = \text{Çöz}\,(A)$$

ve

$$\text{Range}\,(A^gA)^* = \text{Range}(A^*)$$

olur [9].

İspat. Teorem 1.2.6 dan

$$\text{Range}\,(A) \supset \text{Range}\,(AA^g) \supset \text{Range}\,(AA^gA) = \text{Range}\,(A)$$

olarak yazarız. Bu da

$$\text{Range}\,(A) = \text{Range}\,(AA^g) \tag{2.3.9}$$

olduğunu verir. Teorem 1.2.9 dan

$$\text{Çöz}\,(A) \subset \text{Çöz}(A^gA) \subset \text{Çöz}\,(AA^gA) = \text{Çöz}(A)$$

olarak yazarız. Buradan

$$\text{Çöz}(A) = \text{Çöz}\,(A^gA) \tag{2.3.10}$$

olur. Teorem 1.2.6 ve Teorem 1.1.2 den

$$\text{Range}\,(A^*) \supset \text{Range}\,(A^*(A^g)^*) \supset \text{Range}\,(A^*(A^g)^*A^*) = \text{Range}\,(A^*)$$

olarak yazarız. Bu da bize

$$\text{Range}\,(A^*) = \text{Range}\,(A^gA)^* \tag{2.3.11}$$

olduğunu verir.

Tarif 2.3.4. A, m×n tipinde bir matris olsun. A^gA idempontent ve $\text{rank}(A^gA) = \text{rank}(A)$ olacak şekilde verilen n×m tipindeki A^g matrisine A nın genelleştirilmiş tersi denir.

Teorem 2.3.4. A, $m\times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer A nın A^g genelleştirilmiş tersi var ise

$$\mathrm{rank}(A^g)\geq \mathrm{rank}(A)$$

olur[14].

İspat. $m\times n$ tipindeki A matrisinin rankı r olsun. Tarif 2.3.2 den, A matrisini rankı r olacak şekilde $m\times n$ ve $r\times n$ tipinde C ve D matrislerinin çarpımı olarak yazabiliriz. Yani $A = C.D$ olur. Teorem 2.3.1 den A nın genelleştirilmiş tersi

$$A^g = D_R^{-1}.C_L^{-1}$$

dir. Yine Tarif 2.3.3 den A^g, $AA^gA = A$ eşitliğini sağlar. Böylece açık olarak, Teorem 1.3.4 den A^g nin her seçimi için

$$\mathrm{rank}(A^g) \geq \mathrm{rank}(A) \qquad (2.3.13)$$

dir. Daha genel olarak aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 2.3.5. Range (AB) = Range(A) olması için gerek ve yeterşart

$$\mathrm{Rank}\ (AB) = \mathrm{Rank}A$$

Çöz(AB) = Çöz(B) olması için gerek ve yeterşart

$$\mathrm{Rank}(AB) = \mathrm{Rank}B$$

olmasıdır [9].

İspat. Range(AB) = Range(A) olduğunu kabul edelim, Rank(A) = RankAB olduğunu gösterelim. Teorem 1.2.6 dan

RangeA$\supset$Range(AB) yazarız. Yukarıdaki kabulden Rank(A) = Rank(AB) olur. Şimdi Rank(A) = Rank(AB) olsun. Range(AB) = Range(A) olduğunu gösterelim. RangeA$\supset$Range(AB) ve RankA = RankAB kabulünden

$$\mathrm{Range}(AB) = \mathrm{Range}(A) \qquad (2.3.17)$$

olur.

Çöz(B) = Çöz(AB) olduğunu kabul edip, Rank(AB) = Rank(B) olduğunu gösterelim. Teorem 1.2.9 dan

$$\text{Çöz}(B) \subset \text{Çöz}(AB)$$

olduğunu yazarız. Çöz(B) = Çöz(AB) kabulünden

$$\text{Rank}(B) = \text{Rank}(AB)$$

olur. Şimdi Rank(B) = Rank(AB) olduğunu kabul edip Çöz(B) = Çöz(AB) olduğunu gösterelim. Teorem 1.2.9 dan

$$\text{Çöz}(B) \subset \text{Çöz}(AB)$$

olarak yazarız. Rank(B) = Rank(AB) kabulünden

$$\text{Çöz}(B) = \text{Çöz}(AB) \qquad (2.3.18)$$

olur.

Teorem 2.3.6. A, m×n tipinde, rankı r olan bir dikdörtgen matris olsun.
i) $A^g A = I_n$ olması için gerek ve yeterşart $r = n$ olmasıdır.
ii) $AA^g = I_m$ olması için gerek ve yeterşart $r = m$ olmasıdır [9].
İspat. i) $r = n$ olduğunu kabul edip $A^g A = I_n$ olduğunu gösterelim. $r = n$ ise $A^g A$ matrisi n×n tipinde bir matris olup, idempotent ve regülerdir. $A^g A$ matrisinin idempotent olmasından

$$(A^g A)^2 = A^g A \qquad (2.3.19)$$

ve $A^g A$ nın regülerliğinden $(A^g A)^{-1}$ vardır. Eşitliğin her iki tarafını sağdan $(A^g A)^{-1}$ ile çarparsak,

$$(A^g A)^2 . (A^g A)^{-1} = (A^g A)(A^g A)^{-1}$$

$$A^g A = (A^g(AA^{-1})(A^g)^{-1} = I_n \qquad (2.3.20)$$

olur. Şimdi $A^g A = I_n$ eşitliğini kabul edip $r = n$ olduğunu gösterelim.
$A^g A = I_n$ ise $\text{Rank}(A^g A) = n$ dir. Buradan $r = n$ olur.

ii) $r = m$ olduğunu kabul edip $AA^g = I_m$ olduğunu gösterelim. $r = m$ ise, AA^g matrisi m×m tipinde idempotent ve regülerdir. AA^g nin idempotent ve regüler olmasından

$$(AA^g)^2 = AA^g$$

$$(AA^g)^{-1}(AA^g)^2 = (AA^g)^{-1}.AA^g$$

$$AA^g = I_m \qquad (2.3.21)$$

bulunur. Şimdi $AA^g = I_m$ olduğunu kabul edip $r = m$ olduğunu gösterelim.
$AA^g = I_m$ ise $\text{Rank}(AA^g) = m$ dir. Buradan da $r = m$ olur.

Teorem 2.3.7. A^g nin var olması için gerek ve yeterşart A^gA nin idempotent ve Rank $(A^gA) = İz(A^gA) = rank(A)$ olmasıdır [14].

İspat. A^g nin varlığını kabul edip rank(A^gA) = İz(A^gA) = Rank(A) olduğunu gösterelim. A^g nin varlığından $AA^gA = A$ olarak yazarız. Eşitliğin her iki tarafını soldan A^g ile çarparsak

$$A^gAA^gA = A^gA \text{ ve } (A^gA)^2 = A^gA$$

olur. Buradan A^gA idempotenttir. Teorem 2.3.4 den

$$\text{Rank}(A) \geq \text{Rank}(A^gA) \geq \text{Rank}(AA^gA) = \text{Rank}(A)$$

olur. Buda RankA = RankA^gA) sonucunu verir. A^gA idempotent olduğundan, ve Teorem 1.1.6 dan

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A^gA) = İz(A^gA) \text{ olur.}$$

Şimdi, A^gA idempotent ve RankA = Rank (A^gA) olduğunu kabul edip. A^g nin var olduğunu gösterelim
$(A^gA)^2 = A^gA$ olduğundan, $A^gA(I - A^gA) = 0$ olur. Bizim göstermek istediğimiz şey, $A(I - A^gA) = 0$ olduğudur.
Teorem 1.2.6 den

$$M(A^*) \supset M(A^*(A^*)^g) \supset M(A^*(A^*)^g . A^*) = M(A^*)$$

olarak yazarız. Buradan

$$M(A^*) = M((A^gA)^*) \qquad (2.3.22)$$

olur. $M(A^*) = M((A^gA)^*) \Rightarrow \varphi(A^*) = \varphi((A^gA)^*)$ olur.

Çöz$(A) = \varphi(A^*)$ ve Çöz$(A^gA) = \varphi((A^gA)^*)$ olduğundan
A ile A^gA, $(I - A^gA)$ için aynı çözümlere sahiptir.
Buradan da

$$A^gA(I - A^gA) = 0 \Rightarrow A(I - A^gA) = 0 \text{ dır.}$$

Teorem 2.3.8. Herhangi bir A, matrisi için, U, V ve W keyfi matrisler olmak üzere,

$$A^g = Q\begin{bmatrix} I_r & U \\ V & W \end{bmatrix}P$$

genelleştirilmiş tersi vardır. Burada, (Q ve P matrisleri regüler matrislerdir) [13].

İspat. Teorem 1.1.20 den

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde, singüler olmayan P ve Q matrisleri vardır. Şimdi

$$A^g=Q\begin{bmatrix} I_r & U \\ V & W \end{bmatrix}P$$

matrisinin, $AA^gA = A$ eşitliğini sağladığını gösterelim.

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A=P^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1}$$

olarak yazarız.

$$AA^gA=P^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1}.Q\begin{bmatrix} I_r & U \\ V & W \end{bmatrix}P.P^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1}$$

$$=P^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} I_r & U \\ V & W \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1}$$

$$=P^{-1}\begin{bmatrix} I_r & I_rU \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1}$$

$$=P^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1}=A$$

olur. Buradan $A^g=Q\begin{bmatrix} I_r & U \\ V & W \end{bmatrix}P$ bir genelleştirilimiş terstir. Bu teoremden; U,V ve W keyfi olarak seçileceğinden A^g nin tek olmadığı sonucunu çıkarırız.

Örnek 2.3.1 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin A^g genelleştirilmiş tersini bulalım.

A matrisini $PAQ=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde yazalım

$$I_3 A I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$

Böylece $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olur.

$A^g = Q \begin{bmatrix} I_r & U \\ V & W \end{bmatrix} P$ de $U = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ve $W = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

keyfi matrisler olmak üzere, genelleştirilmiş ters,

$$A^g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

3. MATRİS DENKLEMLERİ

Bu bölümde elemanları kompleks sayılardan ibaret olan C cismi üzerinde aşağıdaki denklemleri inceleyeceğiz.

1. $AX = 0$ lineer denkleminin her zaman en az bir çözümünün olduğunu belirtip genel çözümü kuracağız.
2. $AX = b$ lineer denkleminin çözümünün olabilmesi için gerekli ve yeterli şartı verip genel çözümü kuracağız.
3. $AXB = C$ matris denkleminin çözümünün olabilmesi için gerekli ve yeterli şartı belirtip genel çözümü vereceğiz.
4. $AX = 0$ ve $XB = 0$ matris denkleminin ortak genel çözümünü kuracağız.
5. $AX = C$ ve $XB = D$ matris denkleminin ortak çözümlerinin olması için gerekli ve yeterli şartı belirtip genel çözümü vereceğiz.
6. Son olarak bir F cismi üzerinde $AX\text{-}YB = C$ matris denkleminin çözümünün olabilmesi için gerekli ve yeterli şartı belirtip genel çözümü vereceğiz.

3.1. AX = 0 ve AX = b Lineer Denklemlerinin Çözümleri

Teorem 3.1.1. A, mxn tipinde bir matris ve A^g de A matrisinin genelleştirilmiş tersi olsun. Bu halde Z, n. dereceden keyfi bir vektör olmak üzere

$$AX = 0$$

homojen denkleminin genel çözümü

$$X = (I - A^g A)Z$$

dir [14].

İspat. $A(I - A^g A) = 0$ ve çöz$(A^g A)$ = çöz(A) = $M(I\text{-}A^g A)$ olduklarından her Z keyfi değeri için $A(I - A^g A)Z = 0$ olur. Buradan

$$A[(I - A^g A)]Z = 0 \;\Rightarrow\; X = (I - A^g A)Z$$

$AX = 0$ homojen denklemin genel çözümüdür.

Örnek 3.1.1. $\begin{bmatrix} 0 & 2i & i & 0 & 4+2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1 \end{bmatrix}[X] = 0$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2i & i & 0 & 4+2i & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1\end{bmatrix}$$ olup $\operatorname{rank}(A)=2$ dir. Denklemin sıfırdan farklı çözümleri vardır.

$$A^{g}=\begin{bmatrix}i & 1/3 & 1\\ -i/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1/3 & 0\\ i & 1/3 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ olduğundan

$$A^{g}A=\begin{bmatrix}i & 1/3 & 1\\ -i/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1/3 & 0\\ i & 1/3 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2i & i & 0 & 4+2i & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{g}A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1-2i & -i/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1+i\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

olarak yazarız. Buradan

$$(I-A^{g}A)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1+2i & i/2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1-i\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

olur. Herhangi bir $Z=(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6)^t$ keyfi vektörü için X çözümü

$$(I - A^{g}A)Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1+2i & i/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1-i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix}$$

olur. Ayrıca $Z = (1,1,1,1,0,1)^t$ keyfi vektörü için çözüm,

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}+\frac{i}{2} \\ 1 \\ -1-i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Teorem 3.1.2. A, m×n tipinde bir matris ve A^g de A matrisinin genelleştirilmiş tersi olsun. Bu halde

$$AX = b$$

uyumlu lineer denklem sisteminin genel çözümü Z keyfi vektör olmak üzere

$$X = A^{g}b+(I-A^{g}A)Z$$

dir. [14]

İspat. Teorem 1.5.2 den AX = b uyumlu lineer denkleminin genel çözümü, denklemin özel çözümü ile Ax = b denkleminde b nin sıfır seçilmesiyle elde edilen Ax = 0 homojen denklem sisteminin, genel çözümünün toplamıdır. Yine Tarif 2.3.1 den Ax = b uyumlu denkleminin bir özel çözümü $A^{g}b$ dir. Teorem 3.1.1 kullanılarak Ax = b denkleminin genel çözümünü

$$X = A^{g}b+(I-A^{g}A)Z \qquad (3.1.1)$$

olarak yazarız. Burada Z- keyfi bir vektördür.

Örnek 3.1.2. $\begin{bmatrix} 0 & 2i & i & 0 & 4+2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1 \end{bmatrix}[X] = \begin{bmatrix} 14+5i \\ -15+3i \\ 10-15i \end{bmatrix}$

lineer denklemini çözelim. Burada,

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2i & i & 0 & 4+2i & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1\end{bmatrix}$$

olup, Rank (A) = 2 dir. Teorem 3.1.2 uygulanırsa

$$A^g=\begin{bmatrix} i & 1/3 & 1\\ -i/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1/3 & 0\\ i & 1/3 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \text{ olduğundan } A^gA=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1/2&0&1-2i&-i/2\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&2&1+i\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

olur.

$$(I-A^gA)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1/2&0&-1+2i&i/2\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&-2&-1-i\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad A^gB=\begin{bmatrix}0\\ \frac{5}{2}-7i\\ 0\\ 5-i\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

olarak aldığımızda, $Z = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^t$ keyfi vektörü için genel çözüm

$$X=A^gb+(I-A^gA)Z=\begin{bmatrix}0\\ \frac{5}{2}-7i\\ 0\\ 5-i\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1/2&0&-1+2i&i/2\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&-2&-1-i\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5\\ y_6\end{bmatrix}$$

olur. Ayrıca $Z=(1,i,0,i,5,0)^t$ olarak alırsak,

$$X=\begin{bmatrix}0\\ \frac{5}{2}-7i\\ 0\\ 5-i\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ -5+10i\\ 0\\ -10\\ 5\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -\frac{5}{2}+3i\\ 0\\ -5-i\\ 5\\ 0\end{bmatrix}$$

çözümünü buluruz.

3.2. AXB = C Denkleminin Çözümü

Teorem 3.2.1. A,B ve C matrisleri sırasıyle mxn, rxk ve mxk tipinde matrisler olmak üzere;

$$AXB = C$$

matris denkleminin çözümünün olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$AA^{g}CB^{g}B = C$$

olmasıdır ve Z keyfi matris olmak üzere genel çözüm

$$X = A^{g}CB^{g} + Z - A^{g}AZBB^{g}$$

dir [14].

İspat. Önce AXB = C denkleminin uyumlu olduğunu kabul edip $AA^{g}CB^{g}B = C$ olduğunu gösterelim. AXB = C uyumlu olduğundan

$$A^{g}AXBB^{g} = A^{g}CB^{g}$$

$$AA^{g}AXBB^{g}B = AA^{g}CB^{g}B$$

olarak yazarız. Yine $AA^{g}A = A$ ve $BB^{g}B = B$ olduklarından son eşitliği

$$AXB = AA^{g}CA^{g}B$$

olarak yazarız. Buradan $AA^{g}CA^{g}b = C$ dir. Şimdi $AA^{g}CB^{g}B = C$ olduğunu kabul edip AXB = C denkleminin uyumlu olduğunu gösterelim.

$AA^{g}CB^{g}B = C$ kabulünden $X = A^{g}CB^{g}$ olarak alındığında AXB = C denklemi uyumludur.

Z matrisinin her farklı seçimi için

$$X = A^{g}CB^{g} + Z - A^{g}AZBB^{g}$$

Çözümü,
$$\begin{aligned} AXB &= AA^{g}CB^{g}B + AZB - AA^{g}AZBB^{g}B \\ &= AA^{g}CB^{g}B + AZB - AZB \\ &= C \end{aligned}$$

olacağından, $X = A^{g}CB^{g} + Z - A^{g}AZBB^{g}$ bir genel çözümdür. Ayrıca X'in genel çözüm olduğunu kronecker çarpımı kullanılarak da bulabiliriz.

AXB = C denklemini Tarif 1.6.1 den

$$(A \otimes B^{t})x = c$$

olarak yazarız. Yine $(A\otimes B^t)x = c$ denkleminin genel çözümü Teorem 3.1.2 den

$$x = (A\otimes B^t)^g c + [I - (A\otimes B^t)^g (A\otimes B^t)]Z$$

olarak yazarız. Yine 1.6 kesimde belirtilen kronecker çarpımın özelliklerini kullanarak

$$x = (A^g\otimes(B^t)^g)c + (I - A^gA\otimes(B^t)^g B^t)z$$

olarak yazarız. Tekrar x, c ve z yi matris formunda yazarsak

$$X = A^gCB^g + Z - A^gAZBB^g$$

olarak elde ederiz.

Örnek 3.2.1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}[X]\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

matris denkleminin çözümünün olup olmadığını araştırıp, var ise denklemin genel çözümünü bulalım.

Denklemde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

olarak alırsak, denkleme Teorem 3.2.1 uygulanabilir. Yine

$$A^g = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^g = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Şimdi $AA^gCB^gB = C$ gereklilik şartının sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

$$AA^g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^gB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

değerlerini kullanarak

$$AA^gCB^gB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}=C$$

sağlandığını görürüz. Böylece denklemin çözümü vardır ve

$$X=\ A^gCB^g=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

matrisi de denklemin bir özel çözümüdür.

Şimdi denklemin genel çözümünü bulmaya çalışalım.

$Z=\begin{bmatrix}s_1 & s_2 & s_3\\ s_4 & s_5 & s_6\\ s_7 & s_8 & s_9\end{bmatrix}$ keyfi matris olsun.

$$A^gCB^g=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad AA^gCB^gB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

$$A^gAZB^gB=\begin{bmatrix}s_1-s_7-s_3+s_9 & s_2-s_8 & 0\\ s_4+s_7-s_6-s_9 & s_5+s_8 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

değerlerini $X=\ A^gCB^g+Z-A^gAZBB^g$ eşitliğinde yerine yazdığımızda

$$X=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}s_1 & s_2 & s_3\\ s_4 & s_5 & s_6\\ s_7 & s_8 & s_9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}s_1-s_7-s_3+s_9 & s_2-s_8 & 0\\ s_4+s_7-s_6-s_9 & s_5+s_8 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

genel çözümünü elde ederiz. Daha sade şekilde genel çözümü

$$X=\begin{bmatrix}-3+s_7+s_3-s_9 & -2+s_8 & s_3\\ -s_7+s_6+s_9 & -s_8 & s_6\\ s_7 & s_8 & s_9\end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Özel olarak

$Z=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 1\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$ için çözüm $X=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$ olur.

3.3. $AX = 0$ ve $XB = 0$ Denklemlerinin Ortak Çözümü

Teorem 3.3.1. A, mxn ve B de pxq tipinde matrisler olsunlar. $AX = 0$ ve $XB = 0$ denklemlerinin ortak çözümünün olması için gerek ve yeter şart nxp tipindeki Z matrisi için

$$X = (I - A^g A)Z(I - BB^g)$$

olmasıdır[14].

İspat. A, mxn, B, pxq ve X de nxp tipinde matrisler olmak üzere $AX = 0$ ve $XB = 0$ denklemlerini sağlayan bir X matrisinin var olduğunu kabul edelim. X matrisinin rankı r ise X matrisini Teorem 2.3.1 den rankları r olacak şekilde nxr tipinde U ve rxp tipinde V matrislerinin çarpımı olarak yazabiliriz. Yani $Y = U.V$ dir. Bu halde, eğer $AX = 0$ ise $AU = 0$, ve nxr tipindeki her D matrisi için $U = (I - A^g A)D$ dir. Yine $XB = 0$ ise $VB = 0$ ve kxp tipindeki her E matrisi için $V = E(I - BB^g)$ olarak yazarız. $Y = U.V$ olduğundan

$$X = (I - A^g A)DE(I - BB^g)$$

olur. $DE = Z$ keyfi olarak alırsak

$$X = (I - A^g A)Z(I - BB^g) \qquad (3.3.1)$$

olur. Yine (3.3.1), $AX = 0$ ve $XB = 0$ denklemlerini sağlayacağından bir ortak çözümdür.

Örnek 3.3.1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}[X] = 0$ ve $[X]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$

denkleminin ortak çözümünü bulalım. Burada

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olarak alalım.

$$A^g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^g = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^gA=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\-1&2&-3&-1\\-1&1&-2&-1\\1&-1&2&1\end{bmatrix},\quad BB^g=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$$

$$(I-A^gA)=\begin{bmatrix}0&0&-1&-1\\1&-1&3&1\\1&-1&3&1\\-1&1&-2&0\end{bmatrix},\qquad (I-BB^g)=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

değerlerini Teorem 3.3.1 ile verilen genel çözümde yerine yazarsak

$$Z=\begin{bmatrix}k_1&k_2&k_3\\k_4&k_5&k_6\\k_7&k_8&k_9\\k_{10}&k_{11}&k_{12}\end{bmatrix}$$ keyfi matrisi için genel çözüm

$$X=\begin{bmatrix}0&0&-1&-1\\1&-1&3&1\\1&-1&3&1\\-1&1&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1&k_2&k_3\\k_4&k_5&k_6\\k_7&k_8&k_9\\k_{10}&k_{11}&k_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$ olur.

$$K=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$ keyfi matrisi için çözüm $$X=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\2&2&-2\\2&2&-2\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$ bulunur.

3.4. AX = C ve XB = D Denklemlerinin Ortak Çözümü

Teorem 3.4.1. A,B,C ve D sırası ile mxn, pxq, mxp, nxq tipinde matrisler olmak üzere AX = C ve XB = D uyumlu denklemlerinin bir ortak çözümünün olması için gerek ve yeter şart

$$AD=CB$$

olmasıdır.Bu halde genel çözüm Z, nxp tipinde keyfi bir matris olmak üzere

$$X=A^gC+DB^g-A^gADB^g+(I-A^gA)Z(I-BB^g)$$

dir [14].

İspat. AX = C ve XB = D denklemleri uyumlu olarak verilir. Denklemlerin bir X ortak çözümün varlığını kabul edip AD = CB olduğunu gösterelim.

$$AX = C \Rightarrow AXB = CB$$

$$XB = D \Rightarrow AXB = AD \qquad (3.4.1)$$

olarak yazabiliriz. Bu iki eşitlikten $AXB = CB = AD$ olur.

Şimdi $AD = CB$ eşitliğini kabul edip $AX = C$ ve $XB = D$ denklemlerinin bir ortak çözümünü bulalım.

$AX = C$ denklemi uyumlu olduğundan denklemin genel çözümü, keyfi Z matrisi için

$$X = A^g C + (I - A^g A)Z \qquad (3.4.2)$$

dir. Yine $XB = D$ denklemi uyumlu olduğundan denklemin genel çözümü, W keyfi matrisi için

$$X = DB^g + W(I - BB^g) \qquad (3.4.3.)$$

dir. Şimdi $AX = C$ denkleminin özel çözümü (3.4.3) de W keyfi matrisi yerine ve yine $XB = D$ denkleminin DB^g özel çözümünüde (3.4.2) de Z keyfi matrisi yerine yazalım. Bu halde (3.4.2) ve (3.4.3) genel çözümlerini

$$X = A^g C + (I - A^g A)DB^g = A^g C + DB^g - A^g ADB^g \qquad (3.4.4)$$

$$X = DB^g + A^g C\,(I - BB^g) = A^g C + DB^g - A^g CBB^g \qquad (3.4.5)$$

olarak yazarız. $AD = CB$ kabülünden hareketle (3.4.5) eşitliğinde CB yerine AD yazarsak ortak özel çözüm

$$X = A^g C + DB^g - A^g ADB^g$$

olur. Buradan $AX = C$ ve $XB = D$ denklem çiftinin uyumlu olduğunu söyleyebiliriz. Denklemleri sağlayan genel çözüm ise $AX = C$ ve $XB = D$ denklemlerinin ortak özel çözümü ile $AX = 0$ ve $XB = 0$ denklem çiftinin genel çözümünün toplamı olacağından Z, nxp tipinde belirtilen keyfi bir matris olmak üzere genel çözümü Teorem 3.3.1 ile birlikte

$$X = A^g C + DB^g - A^g ADB^g + (I - A^g A)Z\,(I - BB^g)$$

olarak yazarız.

Örnek 3.4.1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}[X] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ve $[X]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

uyumlu matris denklemlerinin ortak çözümünün olup olmadığını araştırıp çözüm var ise genel çözümünü bulalım.

Denklemde

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&-1\\0&1&-1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}4&0&-5\\1&0&-2\\-3&0&3\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\2&0&2\end{bmatrix}$$

olarak alalım. Buradan

$$A.D=\begin{bmatrix}4&-1&5\\1&-1&2\\-3&0&-3\end{bmatrix},\quad C.B=\begin{bmatrix}4&-1&5\\1&-1&2\\-3&0&-3\end{bmatrix}$$

olduklrından $A.D=C.B$ olup denklem çiftinin ortak çözümü vardır. Yine

$$A^g=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ B^g=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ A^gA=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix},\ BB^g=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

$$DB^g=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&-1&0\\4&-2&0\end{bmatrix},\quad A^gC=\begin{bmatrix}3&0&-3\\-2&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad A^gADB^g=\begin{bmatrix}6&-3&0\\-3&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^gC+DB^g-A^gADB^g=\begin{bmatrix}-1&2&-3\\2&-2&1\\1&-1&1\end{bmatrix},\quad (I-A^gA)=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$(I-BB^g)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&-1&1\end{bmatrix}\quad \text{ve}\quad Z=\begin{bmatrix}k_1&k_2&k_3\\k_4&k_5&k_6\\k_7&k_8&k_9\end{bmatrix}\ \text{kullanarak;}$$

$$X=\begin{bmatrix}3&0&-3\\-2&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&-1&0\\4&-2&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&-3&0\\-2&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1&k_2&k_3\\k_4&k_5&k_6\\k_7&k_8&k_9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}-1&2&-3\\2&-2&1\\4&-2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-k_9&k_9&-k_9\\k_9&-k_9&k_9\\k_9&-k_9&k_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-k_9&2+k_9&-3-k_9\\2+k_9&-2-k_9&1+k_9\\4+k_9&-2-k_9&k_9\end{bmatrix}$$

özel olarak $Z=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ için X çözümü $X=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\ 2 & -2 & 1\\ 4 & -2 & 0\end{bmatrix}$ olur.

3.5. AX - YB = C Matris Denkleminin Çözümü

Bir F cismini ve mxn tipindeki matrislerin uzayı $M_{m,n}$ ve A nın $AA^gA = A$ eşitliğini sağlayan genelleştirilmiş tersi A^g olsun. Bu halde $AX - YB = C$ matris denkleminin varlığı ve genel çözümü için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.5.1. $A\in M_{m,k}$, $B\in M_{l,n}$ ve $C\in M_{m,n}$ olarak alındığında

$$AX - YB = C$$

denkleminin $X\in M_{m,n}$ ve $Y\in M_{m,l}$ çözüm çiftinin olması için gerek ve yeter şart

$$(I - AA^g)\,C(I - B^gB) = 0$$

olmasıdır. Bu şart sağlandığında $AX - YB = C$ denkleminin genel çözümü $W\in M_{k,n}$ ve $Z\in M_{m,l}$ keyfi matrisler olmak üzere,

$$X = A^gC + A^gZB + (I - A^gA)W \qquad (3.5.1)$$

$$Y = -(I - AA^g)CB^g + Z - (I - AA^g)ZBB^g \qquad (3.5.2)$$

dir [4].

İspat.

$$AX - YB = C \qquad (3.5.3)$$

denkleminin X ve Y gibi çözümünün olduğunu kabul edip $(I-AA^g)C(I-B^gB) = 0$ olduğunu gösterelim.

(3.5.3) denklemini soldan $(I - AA^g)$ ve sağdan $(I - B^gB)$ ile çarparsak

$$(I - AA^g)[AX - YB](I - B^gB) = (I - AA^g)C\,(I - B^gB)$$
$$[AX - YB - AA^gAX + AA^gYB]\,(I - B^gB) = (I - AA^g)\,C\,(I - B^gB)$$
$$[- YB + AA^gYB]\,(I - B^gB) = (I - AA^g)C\,(I - B^gB)$$
$$- YB + AA^gYB + YBB^gB - AA^gYBB^gB = (I - AA^g)C\,(I - B^gB)$$

$$0 = (I - AA^g)C(I - B^gB) \qquad (3.5.4)$$

olur. Şimdi $(I - AA^g)C(I - B^gB) = 0$ olduğunu kabul edip X ve Y çözümlerini bulalım ya da (3.5.3) denkleminin uyumlu olduğunu gösterelim.

$$(I - AA^g)C(I - B^gB) = 0$$
$$(C - AA^gC)(I - B^gB) = 0$$
$$C - CB^gB - AA^gC + AA^gCB^gB = 0$$
$$AA^gC + CB^gB - AA^gCB^gB = C$$
$$AA^gC + (I - AA^g)CB^gB = C \text{ olur.}$$

Bu son eşitlikte $X = A^gC$ ve $Y = (I - AA^g)CB^g$ olarak seçersek X ve Y (3.5.3) denkleminin bir çözümü olur. Yani $AX - YB = C$ uyumludur.

Şimdi $AX - YB = C$ denkleminin genel çözümünü bulmaya çalışalım. (3.5.4) eşitliğinin varlığını kabul edelim. Ayrıca W ve Z nin her keyfi seçimi için (3.5.1) ve (3.5.2) değerleri (3.5.3) denklemini sağlar. (3.5.1) ve (3.5.2) değerlerinin (3.5.3) denkleminin genel çözümü olduğunu gösterelim. (3.5.3) denklemini uyumlu kılacak her X_0 ve Y_0 çözümlerinin varlığını kabul edelim. Yani $X_0 \in M_{k,n}$ ve $Y_0 \in M_{m,l}$ için

$$AX_0 - Y_0B = C$$

olsun. (3.5.1) ve (3.5.2) ifadelerinde $W = X_0$ ve $Z = Y_0$ olarak seçersek

$$\begin{aligned} X &= A^gC + A^gY_0B + (I - A^gA)X_0 \\ &= A^g(AX_0 - Y_0B) + A^gY_0B + X_0 - A^gAX_0 \\ &= A^gAX_0 - A^gY_0B + A^gY_0B + X_0 - A^gAX_0 \\ &= X_0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Y &= -(I - AA^g)CB^g + Y_0 - (I - AA^g)Y_0BB^g \\ &= -(I - AA^g)(AX_0 - Y_0B)B^g + Y_0 - (I - AA^g)Y_0BB^g \\ &= -(I - AA^g)(AX_0B^g - Y_0BB^g) + Y_0 - Y_0BB^g + AA^gY_0BB^g \\ &= -[AX_0B^g - Y_0BB^g - AA^gAX_0B^g + AA^gY_0BB^g] + Y_0 - Y_0BB^g + AA^gY_0BB^g \\ &= -AX_0B^g + Y_0BB^g + AX_0B^g - AA^gY_0BB^g + Y_0 - Y_0BB^g + AA^gY_0BB^g \\ &= Y_0 \end{aligned}$$

olur. Bunlar bize W ve Z nin her keyfi seçimi için X ve Y nin çözüm olacağını gösterir. Bu çözümde denklemin genel çözümüdür.

Örnek 3.5.1. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}[X] - [Y]\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

matris denkleminin çözümünün olup olmadığını araştıralım. Çözüm var ise genel çözümü bulalım.

Denkelmde $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

olarak alalım. $A^g = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B^g = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olarak yazarız. Yine

$$AA^g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^gB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(I - AA^g) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (I - B^gB) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak yazarız. Şimdi $(I - AA^g)C\,(I - B^gB) = 0$ eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

$$(I - AA^g)C\,(I - B^gB) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlandığından denklemin çözümü vardır. Şimdi denklemin genel çözümünü bulalım.

$$A^gC = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad CB^g = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^gA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(I - A^gA) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $BB^g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve keyfi

$$Z=\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \\ k_7 & k_8 & k_9 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad W=\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_4 & t_5 & t_6 \\ t_7 & t_8 & t_9 \end{bmatrix}$$

matrislerini X ve Y çözümlerinde yerine yazarsak

$$X=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \\ k_7 & k_8 & k_9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_4 & t_5 & t_6 \\ t_7 & t_8 & t_9 \end{bmatrix}$$

$$Y=-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \\ k_7 & k_8 & k_9 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \\ k_7 & k_8 & k_9 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad W=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ keyfi matrisleri için çözüm,

$$X=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad Y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ olur.

SONUÇ

AX-YB = C matris denkleminin çözümünden hareketle, XA - BY = C matris denkleminin çözümü için gerekli ve yeterli şartı

$$(I - BB^g)C(I - A^gA) = 0$$

olarak yazabiliriz ve benzer olarak genel çözüm

$$X = CA^g + BZA^g + W(I - AA^g)$$

$$Y = - B^gC(I - A^gA) + Z - B^gBZ(I - A^gA)$$

olur. Ayrıca AX - YB = C matris denkleminin çözümünün varlığı ve genel çözümünü göz önüne alır, B = 0 olarak seçersek, AX = C matris denkleminin çözümü için gerekli ve yeterli şartı $AA^gC = C$ olarak buluruz. Yine AX = C matris denklemi için genel çözümün

$$X = A^gC + A^gZ.O + (I - A^gA)W = A^gC + (I - A^gA)W$$

olduğu sonucuna varırız.

KAYNAKLAR

[1]. AKBULUT. F., (1989), Lineer Cebir, cilt II, Ege Üniv. Matb., İzmir.

[2]. AKIN. S., (1986), Lineer Cebir. İstanbul Tek. Üniv. Matb., İstanbul.

[3]. AYRES. F., (1980), Teori ve Problemlerle Matrisler Güven Kitabevi Matb., Ankara.

[4]. BAKSALARY. J.K and Kala.R., The Matrix Equation AX-YB = C, Linear Algebra its Apllications, 25, 41- 43(1989).

[5]. CULLEN. C.G., (1966), Matrices and Linear Transformations, Addison - Wesley Publishing Company, London.

[6]. ERGÜN. A.N., (1960), Adi Diferansiyel Denklemler, Kurtuluş Matb. İstanbul.

[7]. GANTMACHER. F.R., (1960), The Theory of Matrices, Chelsea Publishing Company - New York.

[8]. HACISALİHOĞLU. H.H., (1985), Lineer Cebir, Gazi Üniv. Matb. Ankara.

[9]. ISRAİL. A.B and GREVILLE. T.N.E., (1980), Generalized İnvers: Theory and Application, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington New York.

[10]. KART. C., (1985), Matris Metotları ve Lineer Dönüşümler, Ankara Üniv. Matbası, Ankara.

[11]. MIRSKY. L., (1955), An introduction to Lineer Algebra, Oxford Üniv., London.

[12]. NOBLE. B., (1969), Applied Lineer Algebra, Prentice - Hill Inc. Englewood - New Jersey.

[13]. ODELL - L.P., (1971), Generalized Inverse Matrices, Willey - Interscience, New York

[14]. RAO. C.R and MİTRA. S.K., (1971), Generalized Inverse of Matrices and Its Applications, John Wiley, Sonsinc, New York.

[15]. SEYMOUR. L., (1955), Teori ve Problemlerle Lineer Cebir, Oxford Üniv., London.