

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DENEYİM MERKEZİ



BETONARME PLAKLARIN
SONLU ELEMANLAR METODU İLE
NONLİNEER ANALİZİ

Rıfat SEZER
DOKTORA TEZİ
İNŞAAT ANABİLİM DALI
Konya, 1995

45248

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BETONARME PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR METODU İLE
NONLİNEER ANALİZİ

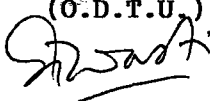
Rıfat SEZER

DOKTORA TEZİ
İNŞAAT ANABİLİM DALI

Bu tez 10.07.1995. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

Prof.Dr.S.Tanvir WASTİ

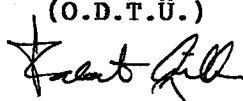
(O.D.T.Ü.)



(Üye)

Prof.Dr.Polat GÜLKAN

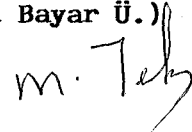
(O.D.T.Ü.)



(Üye)

Prof.Dr. Muhammed D.TEKİN

(Celal Bayar Ü.)



(Danışman)

ÖZET

Doktora Tezi

BETONARME PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR METODU İLE NONLİNEER ANALİZİ

Rıfat SEZER
Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Muhammed D. TEKİN
1995, Sayfa:209

Jüri: Prof.Dr. Muhammed D. TEKİN (C.B.Ü.)
Prof.Dr. S.Tanvir WASTİ (O.D.T.Ü.)
Prof.Dr. Polat GÜLKAN (O.D.T.Ü.)

Bu çalışmada, sıfırdan göçme yüküne kadar, düzenli bir şekilde artan yüke maruz, betonarme plakların nonlineer analizi Sonlu Elemanlar Metodu ile yapılmıştır. Bu analizde, betonarme plakların modellenmesinde, tabakalı kompozit malzeme modeli kullanılmıştır. Tabakalı kompozitler mekaniğinde esasları verilen bu yaklaşım, betonarme plakların nonlineer analizinde başarı ile uygulanmıştır. Bu yaklaşım, literatürde aynı konu için kullanılan diğer yaklaşımlardan farklıdır.

Analizde beton ve donatı için nonlineer gerilme-şekil değiştirme ilişkisi ve çekme çatlağı hesaba katılmıştır. Beton çekme bölgesinde elastik ve basınç bölgesinde pekleşen elasto-plastik olarak kabul edilmiştir. Donatı çeliği şekil değiştirme pekleşmesi gösteren bir malzeme olarak dikkate alınmıştır. Çatlaklar arasındaki betonun çekme rijitliği etkisi de göz önüne alınmıştır. Ayrıca sonlu eleman ağ boyutu etkisini dikkate alan ve çatlak enerji kavramına dayanan bir kriter kullanılmıştır.

Kullanılan tabakalı kompozit malzeme yaklaşımına göre, plakların yük-sehim değerleri bulunmuştur. Bulunan sonuçlar, deney sonuçları ve daha önceki araştırmacıların buldukları sonuçlar ile karşılaştırılmış ve genelde uyum içinde oldukları görülmüştür. Bu çalışmadaki sonuçlarının bulunmasında, FORTRAN 77 dilinde geliştirilen bilgisayar programından faydalanılmıştır.

ANAHTAR KELİMELELER : Betonarme plak, sonlu elemanlar metodu, nonlineer analiz, kompozit malzemeler, tabakalı kompozitler

ABSTRACT

Ph D Thesis

NONLINEAR ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE PLATES BY FINITE ELEMENT METHOD

Rıfat SEZER
Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Civil Engineering

Supervisor : Prof.Dr. Muhammed D. TEKİN
1995, Page: 209

Jury: Prof.Dr. Muhammed D. TEKİN (C.B.Ü.)
Prof.Dr. S.Tanvir WASTİ (O.D.T.Ü.)
Prof.Dr. Polat GÜLKAN (O.D.T.Ü.)

In this study, nonlinear analysis of reinforced concrete plates were investigated by finite element method by gradually increasing the load from zero to ultimate. In this analysis, models of composite laminates materials were employed for modelling the reinforced concrete plates. The principles of this approach given in the mechanics of composite laminate materials were applied successfully in the nonlinear analysis of reinforced concrete plates. This approach is different than the other approaches used for the same analysis in the literature.

Tensile cracking and the nonlinear stress-strain relationship for concrete and reinforcement were taken into account in the analysis. The concrete was assumed to be elastic in the tension region and elasto-hardening plastic in the compression region. The reinforcing bar was considered as a linear strain hardening material. The tension stiffening effect of concrete between cracks is also considered. In addition, a criteria depending on a crack energy concept, was used and the finite element mesh size effect was considered.

Load-deflection values of plates were found according to the composite laminates materials approach employed. The results obtained from the analysis and experiments were compared with the results of the previous researchers and it was seen that they were in quite good agreement generally. The computer program which was written in FORTRAN 77 language was used for finding of the results of this study.

KEY WORDS : Reinforced concrete plates, finite element method, nonlinear analysis, composite materials, composite laminates

TEŞEKKÜR

Doktora tez alıőmam sırasında değerli fikir ve yardımlarını esirgemeyen sayın danışman hocam Prof. Dr. Muhammed D.TEKİN'e, çalıőmam sırasında buyk destek ve yardımını gördüğüm sayın Prof. Dr. Onur SAYMAN'a, değerli fikir ve desteğinden dolayı Doç. Dr. Ahmet AVCI'ya, tezi bilgisayarda yazan ve çalıőmamı destekleyen eőim Ziraat Mühendisi Asuman SEZER'e ve çizim konusunda yardımcı olan Emine AYDIN'a teőekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	vii
TABLoların LİSTESİ	x
KULLANILAN SEMBOLLER	xi
1.GİRİŞ	1
2.KAYNAK ARAŞTIRMASI	4
3.MALZEME ÖZELLİKLERİ VE KABULLER	10
3.1. Donatı	10
3.2. Beton	11
3.2.1. Çatlamış betonun rijitliği	13
3.3. Çekme Rijitliği Etkisi	14
3.4. Kullanılan çatlak Modeli	16
3.4.1. Mikroçatlakların dağılımı	16
3.4.2. Kırılma enerjisi	17
4.İZOPARAMETRİK SONLU ELEMANLAR METODU	19
4.1. Doğal Koordinatlar	19
4.2. Gauss Sayısal İntegrasyonu	26
4.3. Dört Düğüm Noktalı İzoparametrik Eleman.....	35
4.3.1. Enterpolasyon fonksiyonları	35
4.3.2. Eleman rijitlik matrislerinin hesaplanması	38
4.4. Sekiz Düğüm Noktalı İzoparametrik Eleman	49
4.4.1. Enterpolasyon fonksiyonları	49
4.5. Dokuz Düğüm Noktalı İzoparametrik Eleman	51
4.5.1. Enterpolasyon fonksiyonları	51
4.6. Plakların İzoparametrik Sonlu Elemanlar Metodu ile Lineer Analizi	53
4.6.1. Şekil fonksiyonları ve kartezyen türevleri	58

4.6.2. B şekil değiştirme matrisi	59
4.6.3. D Elastik rijitlik matrisi	60
4.6.4. σ Gerilme matrisi	61
4.6.5. Eleman rijitlik matrisi	62
4.6.6. Plak eğilme durumu için yükleme	63
5. YAPI MEKANİĞİNDE NONLİNEERLİKLER	64
5.1. Birleşik Geometrik ve Malzeme Nonlineerliği	65
5.2. Malzeme Nonlineerliği	68
5.2.1. Genel fiziksel yaklaşım	69
5.2.2. Değişken rijitlik metotları	71
5.2.3. Başlangıç gerilme metotları	72
5.2.4. Başlangıç şekil değiştirme metotları	75
5.2.5. Hızlandırma işlemleri	75
5.2.6. Matematiksel yaklaşım	76
5.3. Geometrik Nonlineerlik	80
5.3.1. Genel düşünceler	80
5.3.2. İterasyon işlemleri	82
5.3.3. Başlangıç stabilite problemi	84
5.3.4. Stabilite kriterinin enerji yorumu	85
5.3.5. Şekil değiştirmeye bağlı kuvvetler	86
5.3.6. Plakların başlangıç stabilitesi ve büyük sehimi	86
5.3.6.1. $[B]'$ nin bulunması	90
5.3.6.2. $[K_T]'$ nin bulunması	93
5.3.6.3. Büyük plak sehimi problemi	94
6. BETONARME PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR METODU İLE	96
NONLİNEER ANALİZİ	96
6.1. Betonun Nonlineer Analizi	96
6.2. Donatının Etkisi	97
6.2.1. Donatının modellenmesi	98
6.3. Kompozit Malzemeler	98
6.3.1. Kompozit malzemelerde Hooke sabitlerinin bulunması	98
6.3.1.1. E_1' in bulunması	99

6.3.1.2. E_2' nin bulunması	101
6.3.1.3. ν_{12}' nin bulunması	102
6.3.1.4. G_{12}' nin bulunması	103
6.3.2. Ortotropik malzemelerde gerilmeler	104
6.4. Tabakalı Kompozitler	109
6.4.1. Tabakanın gerilme-şekil değiştirme davranışı	109
6.4.2. Tabakalanmış plak boyunca şekil değişimi	110
6.4.3. Plaklarda kuvvet ve moment bileşenleri	114
6.4.4. Tabakalanmış plak rijitliklerinin özel durumları	119
6.4.4.1. Simetrik tabakalanmış plaklar	119
6.4.4.2. Antisimetrik tabakalanmış plaklar	124
6.4.4.3. Nonsimetrik tabakalanmış plaklar	128
6.5. Sonlu elemanlar metodunun betonarmeye uygulanması	129
7.DENEYSEL ÇALIŞMA	136
7.1. Agrega Granülometrisinin Belirlenmesi	136
7.2. Beton Karışımlarının Hesabı	138
7.3. İmal Edilen Plakların Yük Şehim İlişkisi	141
8.BİLGİSAYAR PROGRAMI	145.
8.1. Bilgisayar Programında Kullanılan Ortotropik Plak Denklemleri	145
8.2. Bilgisayar Programının Tanıtımı	151
8.2.1. Data girişi (Ön işlemler)	152
8.2.2. Eleman matrislerinin hesabı (işlemler)	153
8.2.3. Bant fomundaki matrisin birleşimi	154
8.2.4. Sınır şartlarının değerlendirilmesi	156
8.2.5. Denklemlerin çözüm ve son işlemler	158
9.TARTIŞMA	158
10.SONUÇ VE ÖNERİLER.....	168
11.KAYNAKLAR.....	169
EKLER	

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil 3.1	: Tabakalı sistem	10
Şekil 3.2	: Çeliğin idealleştirilmiş tek eksenli gerilme-şekil değiştirme ilişkisi.....	11
Şekil 3.3	: Betonun çift eksenli dayanım zarfı	11
Şekil 3.4	: Betonun çatlama yüzeyi.....	12
Şekil 3.5	: Betonun idealleştirilmiş tek eksenli gerilme şekil değiştirme ilişkisi.....	13
Şekil 3.6	: Kırılma ve akma bölgesinin bağıl (relative) boyutları	15
Şekil 3.7	: Bir elemanda mikroçatlakların kabul edilen dağılımı.....	15
Şekil 3.8	: Sonlu eleman ağ boyutuna göre mikroçatlakların dağılım fonksiyonu..... a) nisbeten küçük ağ b) orta ağ c) nisbeten büyük ağ.....	16
Şekil 4.1	: Global-yerel koordinat dönüşümü	19
Şekil 4.2	: Lineer enterpolasyon fonksiyonları	21
Şekil 4.3	: Gauss integrasyonu.....	27
Şekil 4.4	: Yayılı yük altında bir kablo.....	30
Şekil 4.5	: Bir kirişte gerçek ve birim eleman	31
Şekil 4.6	: Dört düğüm noktalı izoparametrik eleman.....	36
Şekil 4.7	: Birim kare eleman ve enterpolasyon fonksiyonları.....	37
Şekil 4.8	: N=2 ve 4 için birim kare eleman üzerinde Gauss integrasyon noktaları (31).....	42
Şekil 4.9	: Bir kenarı düzgün yayılı yük altında ince elastik bir plak	42
Şekil 4.10	: Sekiz düğüm noktalı izoparametrik eleman (a) x,y koordinatlarında..... (b) ξ, η koordinatlarında.....	49
Şekil 4.11	: Dokuz düğüm noktalı izoparametrik eleman (a) x, y koordinatların-..... da, (b) ξ, η koordinatlarında, (c) genel enterpolasyon fonksiyonlarının.... tanımı (30).....	51
Şekil 4.12	: Homojen plak parçasının kesit deformasyonu.....	54
Şekil 4.13	: Parabolik izoparametrik plak eğilme elemanı.....	55
Şekil 4.14	: Eğilme momentleri ve kayma kuvvetleri için genel semboller..... (+ yönleri ile).....	55
Şekil 4.15	: Bir plak eğilme elemanına ait genelleştirilmiş düğüm kuvvetleri.....	63
Şekil 5.1	: Başlangıç gerilme ve başlangıç şekil değiştirme işlemi	76

Şekil 5.2	: Newton-Raphson metodunun grafiği (a) Newton-Rapson metodu	
	(b) değiştirilmiş Newton-Rapson metodu (sabit eğimli).....	77
Şekil 5.3	: (a) Bir plak elemanına ait düzlemdeki ve eğilme gerilmesi bileşenleri	
	(b) Yanal yer değiştirmeden dolayı orta yüzey sehiminin artışı.....	87
Şekil 5.4	: Üniform p yükü altındaki ankastre kare bir plağın w_c merkezi sehimi	
	(kenarlarda $u = v = 0$ dir).....	95
Şekil 6.1	: Kompozit malzemenin takviye doğrultusunda çekilmesi.....	99
Şekil 6.2	: Kompozit malzemenin takviye doğrultusuna dik yönde çekilmesi.....	101
Şekil 6.3	: Kompozit malzemeye kayma gerilmesinin uygulanması.....	103
Şekil 6.4	: Kompozit malzemede toplam kayma şekil değiştirmesinin gösterilişi...104	
Şekil 6.5	: Koordinat eksenleriyle, asal eksenler arasındaki ilişki.....	105
Şekil 6.6	: Eksenlerin θ açısı kadar dönmesi halinde σ_1 gerilmesi	105
Şekil 6.7	: Eksenlerin θ açısı kadar dönmesi halinde σ_2 gerilmesi	106
Şekil 6.8	: Genel ortotropik plak	108
Şekil 6.9	: Yükleme maruz plak a) yüklemeye önce b) yüklemeye sonra.....	111
Şekil 6.10	: Tabakalanmış bir plakta gerilme ve şekil değiştirmeler.....	
	a) Tabakalanmış plak, b) Şekil değiştirme değişimi.....	
	c) Modül karakteristiği, d) gerilme değişimi	114
Şekil 6.11	: Plakda kuvvet bileşenleri	115
Şekil 6.12	: Plakta moment bileşenleri.....	116
Şekil 6.13	: Tabakalardan meydana gelmiş plak (28,30).....	117
Şekil 6.14	: Simetrik tabakalanmış üç tabakalı izotropik plak.....	118
Şekil 6.15	: Üç tabakalı düzenli simetrik çapraz-katlı tabakalanmış plağın ayrılmış	
	görünüşü.....	123
Şekil 6.16	: Düzenli antisimetrik çapraz-katlı (cross-ply) tabakalanmış iki tabakalı bir..	
	plağın ayrılmış görünüşü.....	127
Şekil 6.17	: Tabakalanmış bir kesit.....	130
Şekil 7.1	: Deneye tabi tutulan plakların boyutları, donatı detayı ve yükleme.....	
	durumu.....	141
Şekil 7.2	: C14 Betonuna göre imal edilmiş plakların.....	
	yük-sehim ilişkisi.....	143

Şekil 7.3	: C16 Betonuna göre imal edilmiş plakların yük-sehim ilişkisi.....	143
Şekil 7.4	: C20 Betonuna göre imal edilmiş plakların yük-sehim ilişkisi.....	144
Şekil 8.1	: Bir plak elemanı için moment ve kayma kuvveti bileşenleri.....	147
Şekil 8.2	: Bir noktadaki yer değiştirmeler ve dış kuvvetler a)yer değiştirmeler..... b)dış kuvvetler.....	147
Şekil 8.3	: Üst yarı bant formuna getirilmiş rijitlik matrisi.....	155
Şekil 8.4	: Dört köşesinden mesnetlenmiş çift yönlü döşeme.....	159
Şekil 8.5	: Şekil 8.4'deki 2 düğüm noktasındaki yük-sehim ilişkisi.....	160
Şekil 8.6	: Örnek 8.2'de verilen plak için sonlu eleman ağı.....	161
Şekil 8.7	: Örnek 8.6'daki 3 düğüm noktasındaki yük-sehim ilişkisi.....	162
Şekil 8.8	: Örnek 8.3'de verilen plak için sonlu eleman ağı.....	163
Şekil 8.9	: Şekil 8.8'de verilen 3 düğüm noktasındaki yük-sehim ilişkisi.....	164
Şekil 9.1	: Şekil 8.6'daki 3 düğüm noktasındaki yük-sehim ilişkileri..... (C14 Beton için).....	165
Şekil 9.2	: Şekil 8.8'deki 3 düğüm noktasındaki yük sehim ilişkileri..... (C20 Beton için).....	166
Şekil 9.3	: Şekil 8.4'deki 2 düğüm noktasındaki yük-sehim ilişkileri.....	167

TABLULARIN LİSTESİ

Tablo 4.1 Gauss formülü için integral noktalarının koordinatları..... ve ağırlık katsayıları.....	29
Tablo 5.1 Nonlineer analiz için artımlı adım metodu.....	67
Tablo 6.1 Simetrik tabakalanmış altı tabakalı izotropik plak.....	121
Tablo 6.2 Simetrik tabakalanmış beş tabakalı ortotropik plak.....	122
Tablo 6.3 Özel ortotropik altı tabakalı antisimetrik tabakalanmış plak.....	127
Tablo 7.1 Granülometri deneyi sonuçları.....	136
Tablo 7.2 TS 706'ya göre maksimum agrega boyutu 31.5 mm olan karışık..... agregaların incelik, kalınlık ve ideal granülometri değerleri.....	137
Tablo 7.3 C14 Beton sınıfına göre imal edilen plakların..... 2 l/3 mesafesindeki ortalama yük-sehim değerleri.....	142
Tablo 7.4 C16 Beton sınıfına göre imal edilen plakların..... 2 l/3 mesafesindeki ortalama yük-sehim değerleri.....	142
Tablo 7.5 C20 Beton sınıfına göre imal edilen plakların..... 2 l/3 mesafesindeki ortalama yük-sehim değerleri.....	143
Tablo 7.6 Silindir numune basınç dayanımları.....	144
Tablo 8.1 Plaklar için sınır şartları.....	148
Tablo 8.2 Örnek 8.1'de kullanılan malzeme özellikleri.....	159
Tablo 8.3 Şekil 8.4'deki 2 düğüm noktasındaki yük-sehim değerleri.....	160
Tablo 8.4 Örnek 8.2'de kullanılan malzeme özellikleri.....	161
Tablo 8.5 Şekil 8.6'deki 3 düğüm noktasındaki yük-sehim değerleri.....	162
Tablo 8.6 Örnek 8.3'de kullanılan malzeme özellikleri.....	163
Tablo 8.7 Şekil 8.8'deki 3 düğüm noktasındaki yük-sehim değerleri.....	164
Tablo 9.1 Şekil 8.4'deki 2 düğüm noktasındaki yük-sehim değerleri.....	167

KULLANILAN SEMBOLLER

σ_y	: Çeliğin akma gerilmesi
E_s	: Çeliğin elastisite modülü
σ_1, σ_2	: Asal gerilmeler
f_c	: Betonun tek eksenli basınç dayanımı
ϵ_{cu}	: Betonun maksimum basınç şekil değiştirmesi
ϵ_o	: Asal çekme şekil değiştirmesi
G	: Kayma modülü
λ	: Çatlamış betonun kayma sabiti
ν	: Poisson oranı
G_f	: Çatlağın tüketilmiş kırılma enerjisi
f_t	: Betonun çekme dayanımı
b	: Sonlu elemanın genişliği
$f(x)$: Çatlağın dağılımını gösteren fonksiyon
x, y	: Global koordinatlar
ξ, η	: Yerel koordinatlar
N_i	: Enterpolasyon fonksiyonu
L	: Açıklık
K_e	: Eleman rijitlik matrisi
r_e	: Eleman deplasman vektörü
F_e	: Eleman yük vektörü
B	: Şekil değiştirme matrisi
J	: Jacobian matrisi
h	: Plak kalınlığı
D	: Malzeme matrisi
p	: Yaylı yük
P	: Tekil yük
σ_x, σ_y	: x ve y yönündeki eğilme gerilmesi
τ_{xy}	: x-y düzlemindeki kayma gerilmesi

M	: Moment
Q	: Kesme kuvveti
D_f, D_s	: İzotrop malzeme için eğilme ve kayma matrisleri
w	: Düşey yer değiştirme
θ_x, θ_y	: x ve y yönündeki dönme
χ	: Eğrilik
B_{fi}, B_{si}	: Eğilme ve kayma şekil değiştirme matrisi
\emptyset	: Kayma deformasyonu
K_{ijf}, K_{ijs}	: Eğilme ve kayma rijitlik matrisi
F_i	: Düğüm yük vektörü
$[k_o]$: Rijitlik matrisi
$[k_G]$: Geometrik rijitlik matrisi
$\{R\}$: Yük vektörü
δ	: Deplasman
$\{\sigma_o\} \{\epsilon_o\}$: Başlangıç gerilme ve şekil değiştirmesi
$[K_T]$: Tanjant matrisi
$[K_o]$: Küçük yer değiştirme rijitlik matrisi
$[K_L]$: Büyük yer değiştirme rijitlik matrisi
$[K_\sigma]$: Başlangıç gerilme ve geometrik rijitlik matrisi
$E_1, E_2,$: 1 ve 2 yönündeki elastisite modülü
ν_{12}	: 1 yönündeki Poisson oranı
G_{12}	: 1 yüzeyine paralel kayma modülü
$[T]$: Transformasyon matrisi
$[Q]$: İndirgenmiş transformasyon rijitlik matrisi
D_{ij}	: Eğilme rijitliği terimleri
$(Q)_k$: Tabaka eğilme rijitliği terimleri
$[D_k]_i, [D_c]_j$: Kompozit ve beton tabaka malzeme matrisi
$[D_p], [D_t]$: Eğilme ve kayma malzeme matrisi
$[B_p], [B_t]$: Eğilme ve kayma şekil değiştirme matrisi

- γ : Kayma şekil değiştirmesi
- $\{\epsilon_s\}_i, \{\epsilon_c\}_j$: Çelik ve beton tabaka şekil değiştirmeleri
- $\{\sigma_s\}_i, \{\sigma_c\}_j$: Çelik ve beton tabaka gerilmeleri
- $D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{44}, D_{55}$: Ortotropik plak rijitlikleri



1. GİRİŞ

Yapı mekaniğinde, sistemlerin nonlinear olması iki sebepten ileri gelmektedir. Birinci sebep, malzemenin lineer elastik olmaması dolayısıyla gerilme-şekil değiştirme bağıntılarının nonlinear olmasıdır. İkinci sebep, dış etkilerin sistemde meydana getirdiği geometri değişimlerinin büyük olması halinde, denge şartlarının ve uygunluk şartlarının nonlinear olmasıdır. Geometri değişiminin, geometrik uygunluk şartları üzerindeki etkisinin göz önüne alınmayıp, yalnız denge denklemlerindeki etkisinin alındığı teoriye “ikinci mertebeli teori” denir.

Ayrıca geometrik ve malzeme nonlinearlığının birlikte bulunduğu nonlinear sistemler de vardır. Bu tip nonlinearlığa, “birleşik geometrik ve malzeme nonlinearlığı” denir.

Betonarme yapılar çoğunlukla, kullanılabilirlik ve güvenlik kriterlerini karşılamak için tasarlanırlar. Kullanılabilirlik şartını sağlamak için, çalışma yükleri altında betonarme yapıların çatlak ve sehimlerini doğru bir şekilde tahmin etmek gereklidir. Yapıların, göçmeye karşı güvenliğini tayin etmek için önemli olan maksimum yükün doğru olarak hesaplanabilmesidir. Deneysel çalışmalar elemanların denenmesi hakkında iyi bir bilgi verebilirse de, zaman kaybettirmesi ve pahalı olması dolayısıyla, deney yerine geçebilen güvenilir bir sayısal analiz modeli geliştirmek tercih edilmektedir. Laboratuvarda yapılan deneysel çalışmalar, sayısal çözümleri karşılaştırmak amacıyla laboratuvar imkanlarının müsait olduğu durumlarda yapılmalıdır.

Analitik bir metod betonarme yapılar için büyük bir gelişmedir, ancak aşağıda verilen özelliklerinden dolayı karmaşıktır. Bunlar;

- 1) Betonarme yapılar, beton ve çelik gibi, farklı iki malzemenin birleşimidirler;
- 2) Nonlinear esas ilişkilere uygun betonun nonlinear davranışı, çekme çatlağı, çift eksenli rijitlik ve şekil değiştirme azalması gibi etkiler;

3) Beton ve donatı çubukları arasındaki aderans sıyrılması (bond slip) ve agrega kilitlenmesi (aggregate interlocking); vs. gibi özelliklerdir.

Genelde betonarme plak ve kirişlerin Sonlu Elemanlar Metodu ile analizinde iki farklı yaklaşım kullanılmaktadır. Bunlar;

- 1) Değiştirilmiş rijitlik yaklaşımı,
- 2) Tabakalı yaklaşımdır.

Bu çalışmanın amacı, betonarme plakların Sonlu Elemanlar Metodu ile non-linear analizini yapmak ve bunun için bir bilgisayar programı geliştirmektir. Bunun için, önce İzoparametrik Sonlu Elemanlar Metoduna göre lineer analiz yapılmakta ve daha sonra tabakalı yaklaşım kullanılarak nonlineer analiz yapılmaktadır. Nonlineer analiz sonuçları, daha önceki araştırmacıların buldukları sonuçlar ve deney sonuçları ile karşılaştırılmaktadır. Böylece betonarme plaklarda pahalı ve zaman alıcı olan deneysel çalışmaların yerine geçebilecek güvenilir ve daha cazip sayısal analiz modelinin geliştirilmesine çalışılmıştır.

Aynı konuda çalışmış olan başka araştırmacılar kullandıkları modelde beton ve çeliği ayrı tabaka olarak alıp rijitliklerini ayrı ayrı hesaplayıp sonra toplamak suretiyle elemanın toplam rijitliğini bulmuşlardır. Bu çalışmada ise, beton ve çelikten oluşan tabakalardaki malzeme, kompozit bir malzeme olarak alınıp kompozit malzemeler mekaniğindeki kurallara göre elastisite modülleri hesaplanmıştır. Tabaka rijitliklerinin hesabı ise, tabakalı kompozitler mekaniğindeki kurallara göre yapılmıştır.

Betonarme plakların nonlineer hesabı için geliştirilen modelde; plak elemanlar dört, sekiz ve dokuz düğüm noktalı olarak alınmış olup bunların kullanılmasından elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Betonarme plakların deneysel analizi için, S.Ü. Müh. Mim. Fak. Yapı Mekaniği laboratuvarında deneysel çalışmalar yapılmış ve bulunan sonuçlar Sonlu Elemanlar Metodundan elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Bu yapılan çalışma, literatürde aynı konuda yapılan çalışmalara göre, betonarme- nin modellenmesi ve plak elemanı olarak 8 ve 9 düğüm noktalı elemanın kullanıl- masıyla çalışmalara orjinallik kazandırılmış ve sayısal çalışmanın daha gerçekçi sonuç vermesi sağlanmıştır.

Ayrıca bu çalışmada, geliştirilen bilgisayar programı ile, değişken kesitli betonarme plakların nonlinear analizi, her plak elemanında ortalama kalınlıklar esas alınmak şartıyla yapılabilmektedir.

Bu çalışmada, hazırlanan bilgisayar programı FORTRAN 77 programlama dilin- de yazılmış olup programın listesi Ek-3' te verilmiştir.



2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Sonlu Elemanlar Metodu ilgili çalışmalar, 1960 yılından bu yana büyük hız kazanmıştır. Metodun betonarmeye uygulanışı Ngo ve Scordelis (1) tarafından 1967'de gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada betonarme kirişler incelenmiş ve gerek beton gerekse donatı iki boyutlu üçgen elemanlarla lineer elastik olarak modellenmiştir. Donatı ile beton arasındaki aderans küçük yaylarla modellenmiş olup, çatlakların nasıl oluşacağı için önceden bir dağılım varsayılmıştır. Çalışma daha sonra Scordelis ve ark.(2) tarafından genişletilerek etriye katkısı ve agrega kilitlenmesi gibi konularıda içerecek duruma getirilmiştir.

Nilson (3) tarafından beton için nonlineer gerilme-şekil değiştirme eğrisi kullanılmış ve analizde aderans sıyrılması için nonlineer bir ifade kullanılmıştır. Analizde artımlı (incremental) olarak gerçekleştirilmiştir. İki eleman arasında oluşan çatlak, ortak düğüm noktalarının birbirinden ayrılması ve yeni bir geometrik durumun tanımlanması ile gösterilmiştir.

Scanlan ve Murray (4), betonarme döşemelerin çatlama analizi için, bir iterasyon işlemi teklif etmişlerdir. Bu çalışmada, döşeme tabakalardan meydana gelmiş bir plak olarak kabul edilmiştir. Bununla beraber bu analizin, çatlakların sadece donatı çubuklarına paralel veya dik doğrultularda yayılmasını gerektirmesi bir kısıtlama teşkil etmiştir.

Valliappan (5) ve Suidan (6) tarafından, beton ve çeliğin nonlineer davranışını içine alan bir gerilme analizi yapılmıştır. Bu analizlerde, betonun σ_{yc} akma gerilmesine kadar elastik ve daha sonra tam plastik olarak şekil değiştirdiği kabul edilmiştir.

Büyüköztürk ve Nilson (7), iki boyutlu bir beton modelini, sonlu elemanlar tekniğinin özel bir adaptasyonu ile analiz etmişlerdir. Bu analizde modelin homojen olmama karakteri, agrega yüzeyindeki aderans kaybı ve çatlama gibi faktörlerin etkileri dikkate alınmıştır. Basınç-kayma ve çekme şeklindeki çatlak oluşumları

formüle edilmiştir. Bu analizde, aderans çatlamları için, özel “sınır tabaka” elemanları kullanılmıştır. Çatlamların analize dahil edilmesi, çatlayan elemanların mekanik karakterlerini değiştirerek mümkün kılınmıştır. Böyle bir yaklaşım, çatlama olayının tek bir analizle otomatik olarak yayılmasını ve çatlama yer ve doğrultularının eleman kenarlarının geometrisinden bağımsız olarak incelenmesini sağlamıştır.

Suidan ve Schnobrich (6) tarafından, sürekli çatlamanın sonlu eleman yaklaşımı ile analizinde, üç boyutlu izoparametrik elemanlar kullanılmıştır. Analizde, çatlamların eleman dahilinde adım adım ilerlemesinin incelenmesi sağlanmıştır. Bu gerilme ve deformasyonların eleman dahilinde seçilen integrasyon noktalarında bulunması ile mümkün olmuştur.

Büyüköztürk (4) tarafından yapılan çalışmada, betonun, çok eksenli yüklemde, geliştirilmiş akma ve göçme kriterleri formüle edilmiştir. Bu genel kriterler, iki eksenli gerilme durumu için mevcut olan deneysel bilgilerin kullanılması ile, betonarme plak ve kabukların lineer olmayan analizine uygulanmışlardır. Beton için geliştirilen akma kriterlerine dayanarak, betona ait artımlı gerilme-birim deformasyon bağıntıları kurulmuştur. Analiz için, sonlu elemanlar metodu kullanılmıştır. Beton da, nonlineer deformasyon davranışının önemli bir kaynağı olan sürekli çatlama olayı, yük artımı sırasında çatlayan elemanların mekanik karakterlerinin değiştirilmesi ile dikkate alınmıştır. Betonarmede donatının etkisi, sonlu elemanlar metodunun özel bir adaptasyonu ile direkt olarak analize dahil edilmiştir. Çalışmada geliştirilen artımlı analiz metodu örnek problemlere uygulanmış ve metodun geçerliliği, deneysel ve analitik kıyaslamalarla gösterilmiştir.

Jofriet ve McNeice (8) tarafından yapılan çalışmada, çatlak döşeme atalet momenti etkisinin amprik olarak belirlenmesine dayanan çift eksenli bir moment eğrilik ilişkisi kullanılmıştır.

Vebo (9) ve Bashur (10) tarafından, kesit içindeki malzeme özelliklerinin nonlineer değişimini dikkate almak için akma çizgilerinin teorik olarak belirlenmesine dayanan bir moment-eğrilik ilişkisi kullanılmıştır.

Lin (11), Hand (12) ve Gilbert (13) tarafından kullanılan tabakalı yaklaşım, beton ve çelik için idealleştirilmiş gerilme-şekil değiştirme ilişkisine dayanmakta ve bu metotdaki bir sonlu elemanda beton ve çelik hayali tabakalara bölünmektedir. Bu çalışmalarda tabakalı yaklaşım geniş olarak kullanılmıştır.

Lin (11) ve Hand (12) tarafından, çeliğin gerilme-şekil değiştirme ilişkisi değiştirilerek rijitliği suni olarak artırılmış ve betonun çekmede gerilme-şekil değiştirme eğrisi, azalan kısmı dikkate alınarak değiştirilmiştir.

Gilbert ve Warner (13) tarafından, betonarme döşemelerin davranışı, betonun gerilme-şekil değiştirme ilişkisinin azalan kısmı esas alınarak analiz edilmiştir. Bahsedilen çalışmada, ilk defa betonarme yapıların sayısal analiz sonuçlarının sonlu eleman ağ boyutuna büyük ölçüde bağlı olduğu ve betondaki çekme rijitliği etkisinden çok etkilendiği belirtilmiştir.

Lin (11), Gilbert (13), Bazant (14), Leibengood (15) tarafından, eğilmeye maruz kalmış betonarme döşeme ve kirişlerin ayrıntılı nonlineer çözümünün, çekme rijitliğinden önemli bir şekilde etkilendiği ve yapıştırılmış çatlak modeli kullanılarak analiz yapıldığında, analiz sonuçlarının sonlu eleman ağı boyutuna bağlı olduğu belirtilmiştir.

Arnesen ve Sorensen (16) tarafından betonarme yapıların nonlineer analizi için iki programın tartışması yapılmıştır. Birinci programda düzlem gerilme problemleri ele alınmıştır. Beton ve donatının modellenmesinde plastisitenin akma teorisi kullanılmıştır. İkinci program ise, plakların ve kabukların analizi için geliştirilmiştir. Örnek olarak, dört kenarından ankastre kare bir plak analiz edilip artan yüke karşılık orta noktanın sehimini gösterilmiştir.

Mikkola ve Sinisalo (17) tarafından yapılan çalışmada, tanımlanan modele dahil edilen betonarmenin malzeme nonlineerlik etkileri, gerilme cinsinden verilen bir çatlak kriterine göre çekme çatlağı, basınçta elastik olmayan elastik-plastik ilişkisi, agrega kilitlemesi, kaldıraç etkisi (dowel action) ve aderans sıyrılması (bond slip)'dir.

Hareket denklemleri toplam Lagrange yaklaşımının kullanılması ile çıkarılmıştır. Sayısal uygulamalarda, kiriş ve döşeme problemleri ele alınmıştır. Sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen sonuçlar, mevcut deneysel sonuçlarla karşılaştırılmış ve yeterli derecede uyum içinde olduğu gözlenmiştir.

Ma ve May (18) tarafından yapılan çalışmada, sıfırdan başlayarak göçme yüküne kadar betonarme yapıların analizinde Sonlu Elemanlar Metodu kullanılmıştır. Değiştirilmiş Newton- Rapsion metodu , temel çözüm metodu olarak alınmıştır.

Aksoğan (19) tarafından, nonlinear yapı analizinin gelişimi konusunda bilgiler verilmiş ve nonlinear yapı analizinde kullanılan sayısal metotlardan bahsedilmiştir. Ayrıca yapı mekaniğinde nonlinearlığı doğuran sebepler açıklanmıştır.

Ramadan (20) tarafından yapılan çalışmada, 1968 yılında Nilson tarafından betonarme için yazılmış olan sonlu eleman programı daha etkin ve verimli olması için geliştirilmiştir. Programda, verilen analiz yöntemi betonarme kirişlere uygulanmıştır. Programda beton ve çelik için nonlinear malzeme özellikleri ve nonlinear aderans ilişkileri dikkate alınmıştır. Donatının aderans davranışını modellemek için özel elemanlar kullanılmıştır. Program kullanılarak örnek kiriş problemleri çözülmüş ve deneysel sonuçlarla uyum içinde olduğu görülmüştür. Buna göre, sonlu elemanlar metodunun betonarme yapı elemanlarının analizi için güçlü bir araç olduğu belirtilmiştir.

Wasti (21) tarafından yapılan çalışmada, yapı sistemlerinin gerilme analizinde kullanılan Sonlu Elemanlar Metodu hakkında kısa bilgiler verilmiş ve metodun matrisel formülasyonu gösterilmiştir. Metodun betonarme yapı elemanlarına uygulanışındaki zorluklar anlatılmıştır. Nonlinear malzeme, aderans ve artan yükler altında oluşan çatlaklarla değişen yapı özelliğinin nasıl modellendiği açıklanmıştır. Hazırlanan bilgisayar programları tanıtılmış ve içeriğindeki çözüm metotları adımlar halinde verilmiştir.

Choi ve Kwak (22) tarafından, artan yük etkisinde betonarme yapıların nonlinear analizi için yeni bir yaklaşım geliştirilmiştir. Analizde beton için çekmede lineer elastik ve basınçta ise pekleşen elasto-plastik (elasto-hardening plastic) bir özellik gösteren gerilme-şekil değiştirme eğrisi kullanılmış ve donatı için şekil değiştirme pekleşmesi (strain hardening) gösteren bir malzeme kabul edilmiştir. Yük artımı, integrasyon derecesi gibi etkiler arasında en önemli görülen yapının davranışının analizinde sonlu eleman ağ boyutunun etkisi araştırılmıştır. Ayrıca çatlaklar arasındaki betonun çekme rijitliği etkisinde dikkate alınmıştır. Geliştirilen modelin çekme rijitliği etkisinin uygunluğunu araştırmak için, dört köşesinden mesnetlenmiş bir plağa Sonlu Elemanlar Metodu uygulanmış ve bulunan sonuçlar diğer araştırmacıların sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Ghassemieh ve Kukreti (23) tarafından yapılan çalışmada, geometrik ve malzeme nonlinearliği dikkate alınmıştır. Ancak, geometrik nonlinearliği tanımlamak için, büyük deplasmanlar fakat küçük şekil değiştirmeler dikkate alınmıştır. Verilen yöntem, lineer elastik rijitlik matrisinin bir kez tersini alma işlemine ihtiyaç gösterir ve iterasyonlar nonlinear matrisleri değiştirmeksizin denge denklemleri üzerinde gerçekleştirilir. Önce artımlı plastisite teorisi denklemlerinin analitik formülasyonu ve sonra çözüm algoritmasının bir tanımı verilmiştir. Sonunda, çözüm algoritması, ayrı ayrı monotonik ve tekrarlı yüklemeye maruz basit mesnetli dairesel bir plak problemi üzerinde gösterilmiştir. Bulunan sayısal sonuçlar, benzer problemler için literatürde verilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Birleşik nonlinearliklerle ilgili problemler için, yöntem kararlı, doğru ve rölatif olarak büyük yük artışları için etkili bulunmuştur.

Hu ve Schnobrich (24) tarafından yapılan çalışmada, monotonik yükleme altında, betonarme yapıların sonlu elemanlar metodu ile nonlinear analizi için, düzlem gerilme modelleri önerilmiştir. Basınçta beton modeli için, bir elastik şekil değiştirme pekleşmesi gösteren plastik gerilme-şekil değiştirme ilişkisi kullanılmıştır. Çekmede ise, beton için bir elastik gevrek kırılma davranışı kabul edilmiştir. Çatlamadan sonra, yapılandırılmış çatlak yaklaşımı ile birlikte dönen çatlak görüşü kullanılmıştır. Çelik çekme ve basınçta benzer bir idealleştirilmiş iki eksenli eğri ile modellenmiştir. Bu malzeme modelleri, bir tabakalı yaklaşım yoluyla, betonarme plak ve kabukların

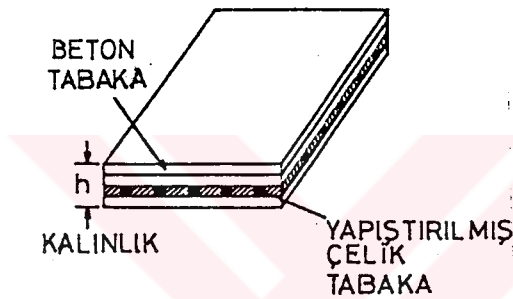
eğilme davranışını modellemek için daha da genişletilmiştir. Bu malzeme modelleri, deneysel sonuçlarla karşılaştırılmış ve iyi bir uyum elde edilmiştir.

Sathurappan ve ark. (25), tarafından yapılan çalışmada, betonarme ve öngerilmeli plakların analizi için, donatı ile takviyeli dört düğümlü kuadratik bir plak-kabuk elemanı verilmiştir. Öngerilme eleman üzerinde bir iç kuvvet gibi ele alınmıştır. Donatı çubuğunun bir eleman içindeki yeri ve konumu planda rastgele veya koordinat eksenlerine paraleldir. Beton rijitliğini ve betondaki gerilmelere eşdeğer yükleri değerlendirmek için kalınlık doğrultusunda Gauss integrasyonu da kullanılmıştır. Her bir donatı çubuğunun elemanın rijitliğine tesiri Gauss integrasyonu kullanılarak bir doğrusal integral ile dikkate alınmıştır. Beton basınçta bir plastisite modeli ile modellenmiş ve çekme çatlama için yapıştırılmış çatlak yaklaşımı kullanılmıştır. Analizde malzeme ve geometrik nonlineerliğin her ikisinde dikkate alınmıştır. Analitik modelin tahkiki için bulunan sonuçlar, deney sonuçları ve literatürde verilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve uyum içinde olduğu görülmüştür.

3. MALZEME ÖZELLİKLERİ VE KABULLER

Betonarme elemanın bir tabakadaki esas ilişkilerini sıra ile formül haline getirmek için aşağıdaki basitleştirilmiş kabuller yapılmıştır:

- 1) Eleman içindeki beton ve çelik, hayali tabakalara bölünmüştür (Şekil 3.1);
- 2) Plaklar için, Mindlin'in plağın eğilmesi hipotezi kabul edilmiştir;
- 3) Donatı çeliğinin sadece tek eksenli gerilme taşıdığı kabul edilmiştir;
- 4) Çelik ve beton arasında mükemmel bir aderans olduğu kabul edilmiştir (22).



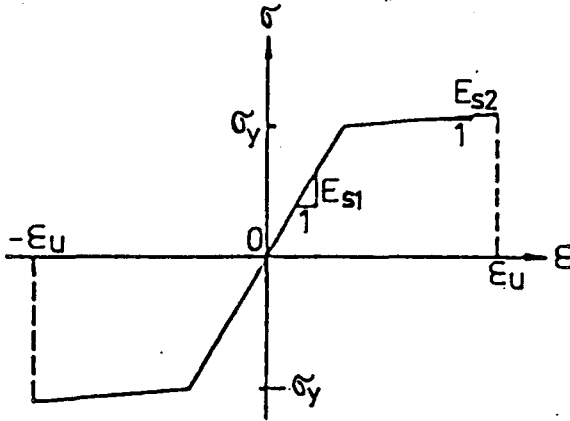
Şekil 3.1 Tabakalı sistem

3.1. Donatı

Donatı çeliğinin lineer şekil değiştirme pekleşmesi (strain hardening) gösteren bir malzeme olduğu kabul edilmiştir. Çeliğin akma gerilmesi σ_y dir (Şekil 3.2).

Gerilme-şekil değiştirme ilişkisi donatı çubuğu yönünde ve ona dik olarak seçilen yerel eksenler referans alınarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{s1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

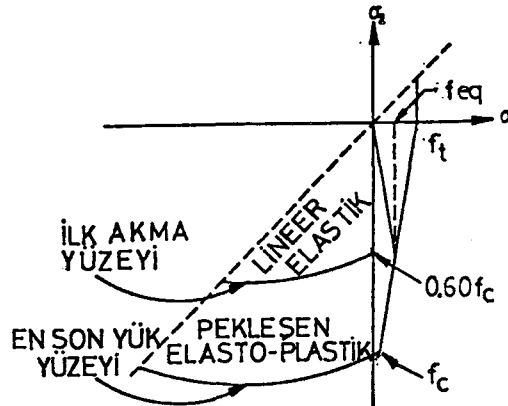


Şekil 3.2 Çeliğin idealleştirilmiş tek eksenli gerilme-şekil değiştirme ilişkisi.

burada E_{s1} çeliğin birinci elastisite modülüdür. Çelik aktığında, E_{s1} yerine ikinci elastisite modülü E_{s2} koyulmaktadır (22).

3.2. Beton

Şekil 3.3 de görüldüğü gibi, f_c sağda en uç noktadaki gerilme, beton basınç çekmede ve çift eksenlide çekme bölgesinde kalmak üzere lineer elastik olduğu kabul



Şekil 3.3 Betonun çift eksenli dayanım zarfi

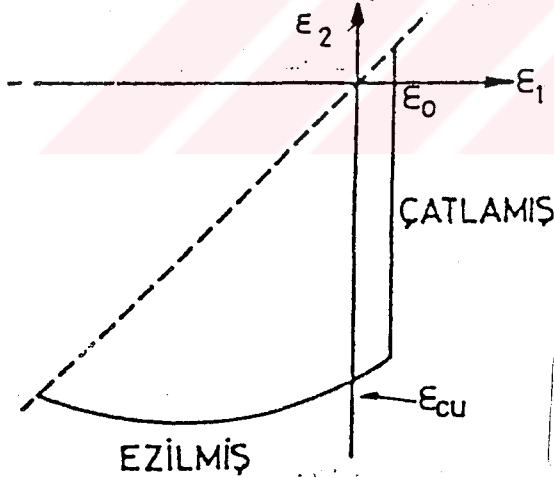
edilmiştir. Bu durumda, tek eksenli şekil değiştirmenin eşit miktarda artması ile gerilme lineer olarak düşer. Çift eksenlide basınç bölgesi, genellikle pekleşen elastoplastik

(elasto-hardening plastic) model olarak kabul edilmiştir. Bunun gibi bir akma kriteri Kupfer ve ark.(17) tarafından ifade edilmiştir.

$$F = [(\sigma_1 + \sigma_2)^2 / (\sigma_2 + 3.65\sigma_1)] - Af_c = 0 \quad (3.2)$$

Burada σ_1 ve σ_2 asal gerilmelerdir; f_c tek eksenli basınç dayanımı ve A ise ilk akma yüzeyinden ($A=0.6$) en son yük yüzeyine kadar ($A=1.0$) olan plastik akmayı gösteren bir parametredir. Buna ilave olarak, beton için son akma (post-yielding) gerilme-şekil değiştirme ilişkisini idare etmek için ortak akma çizgisi kabul edilmiştir (12).

Çift eksenli gerilme durumunda Kupfer çatlak zarfı açıldığında, gerilme-şekil değiştirme ilişkilerini ifade etmek için şekil değiştirmenin azalan bölgesinde beton elastik ortotropik bir model olarak kabul edilmiştir (18). Betonun çatlama durumunu düzenli olarak kontrol etmek için, yani çatlama ve ezilmeyi, şekil değiştirme terimleriyle ifade edilmiş bir çatlak yüzeyini kabul etmek gerekir. Bu çalışmada, şekil değiştirme terimleri denklem (3.2) nin akma yüzeyine benzer bir şekilde bir çatlak yüzeyi (Şekil 3.4) tesbit edilmiş ve aşağıdaki denklemde ifade edilmiştir.



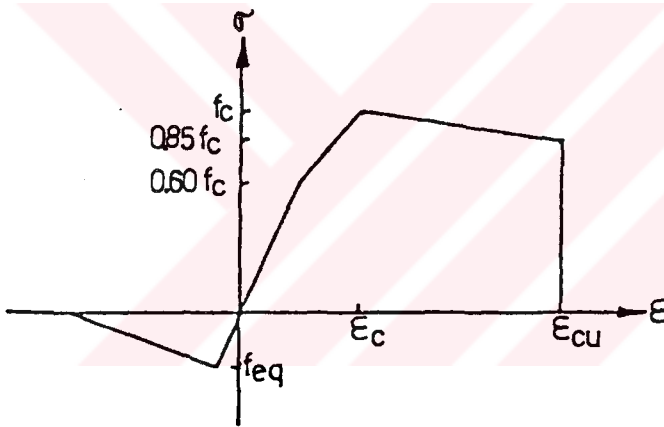
Şekil 3.4 Betonun çatlama yüzeyi

$$C = [(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 / (\epsilon_2 + 3.65\epsilon_1)] - \epsilon_{cu} = 0 \quad (3.3)$$

burada ϵ_1 ve ϵ_2 asal şekil değiştirmeleri ve ϵ_{cu} (şekil 3.5) ise betonun basınçtaki maksimum şekil değiştirmesidir. Sonuçta, beton ezildiğinde, bütün rijitliğini kaybetmiş olduğu kabul edilmiştir (22).

3.2.1. Çatlamış Betonun Rijitliği

Asal çekme şekil değiştirmesi biraz aşıldığında (Şekil 3.5), asal gerilmeye dik yönde çatlaklar gelişecektir. Çatlakta normal gerilme sıfır olabilir ve çatlama ile kayma modülü azaltılmış olmalıdır. Ancak, etkili bir kayma modülü belirlemeye yönelmek, kaldıraç etkisi (dowel action) ve agrega kilitlemesi (aggregate inter locking) etkileri yanında daha karmaşıktır.



Şekil 3.5 Betonun idealleştirilmiş tek eksenli gerilme-şekil değiştirme ilişkisi

Bundan dolayı , çatlamış kayma modülünün çatlama sonrası değerinin sürekli sabit olduğu kabul edilmiştir, yani denklem (3.4) de $\lambda = 0.4$ dür. O zaman, çatlamış rijitlik aşağıdaki gibi kabul edilmiştir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \frac{1-\nu}{2} G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

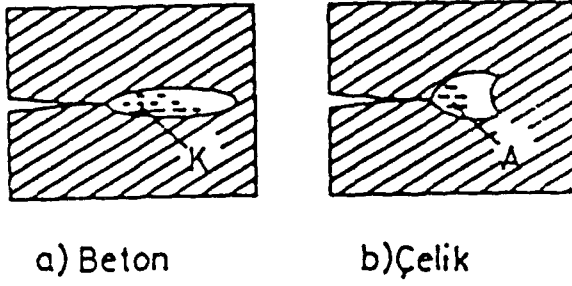
burada 1 ve 2 çatlaklara paralel ve dik yöndedirler. Sırası ile; G çatlamamış beton için kayma modülü ve λ ise çatlamış beton için kayma sabitidir (22).

3.3. Çekme Rijitliği Etkisi

Betondaki çatlama, çatlağın ilk önce oluştuğu yerden başlayarak en büyük asal gerilmeye dik yönde gelişir. Fakat çatlaktan sonra bile hala çekme kuvvetine karşı beton ve çelik arasındaki aderanstan dolayı kısmi bir kapasite vardır. Bu etki, çatlamış kesitin boyutu ile karşılaştırıldığında nisbeten büyük boyutlara sahip olan elemanın ortalama rijitliği artırılarak yeterli bir şekilde hesaplanabilir. Betonun çekme rijitliğini arttırmak, çekme bölgesindeki azalan kısmını kapsayan bir gerilme-şekil değiştirme ilişkisi kullanılarak başarılabilir (12,14).

Diğer taraftan, yapının sehimlerini daha hassas tahmin edebilmek için, çatlama modelini nonlineer olarak kullanmak gerekir. Çünkü beton içindeki çatlaklar malzemenin önemli bir nonlineerliğidir. Fakat Şekil 3.6'da gösterildiği gibi, betonun kırılma davranışı metallerinkinden oldukça farklıdır. Çünkü betondaki kırılma, mikroçatlaktan meydana gelir, metallerde ise akma ile olur. Bundan dolayı, gerilme kontrollü çatlama modeli ilk önce Rashid (22) tarafından betonarme yapıların sayısal analizinde geniş olarak kullanıldı. Bu metod çatlak düzlemine dik azaltılmış modüllü bir elastik ortotropik malzeme olarak çatlamış betonu gösterir.

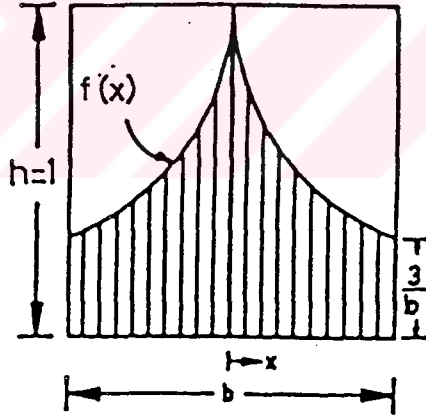
Bu yaklaşım uygulamak için geniş ve kolay olarak kabul edilmesine rağmen, bazı iyi olmayan yönleride vardır. Örneğin sonlu eleman ağı boyutlarına bağlı olmaması (16). Bir çok araştırma, bu kötü yönün giderilmesi için yapılmıştır. Bu çalışmalar da kırılma mekaniği üzerinde yoğunlaşmıştır. Bazant ve Oh (19) düz beton panellerinde fiktif kırılma modelinin en kolay olan çatlak bant teorisini önermişlerdir (22).



Şekil 3.6 Kırılma ve akma bölgesinin bağıl (relative) boyutları

Bu modelde iki temel kabul vardır; bunlar kırılma bölgesi genişliğinin maksimum agrega boyutunun üç katı (yaklaşık olarak 3×25.4 mm) ile orantılı olan belirli bir w_c genişliği değerine sahip olduğu ve bant içerisindeki deformasyonun üniform olduğudur. Böylece çıkarılmış son eşitlik ϵ_0 'ın belirlenmesi için aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

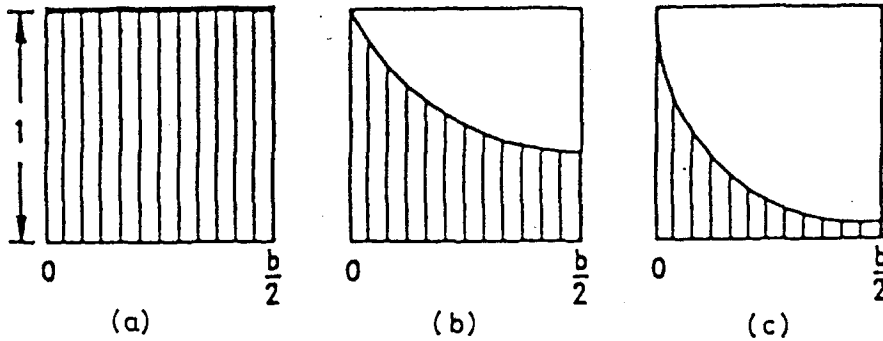
$$\epsilon_0 = \frac{2 G_f}{f_t b} \quad (3.5)$$



Şekil 3.7 Bir elemanda mikroçatlakların kabul edilen dağılımı

Bu model nisbeten küçük sonlu eleman ağ boyutu kullanıldığında betonarme problemlere başarılı bir şekilde uygulanabilir. Fakat onların analitik sonuçları, ağ boyutları artırılmış iken, deney sonuçlarından önemli bir şekilde farklıdır. Çünkü bu modelde nisbeten büyük bir sonlu elemanın bütün bölgesinde mikroçatlakların dağılımı üniform kabul edilir (Şekil 3.8a). Halbuki, elemandaki gerçek mikroçatlaklar nisbeten

küçük çatlaklı bölgede yoğunlaşmaktadır (Şekil 3.8c). Bu yüzden, nisbeten büyük sonlu eleman ağı boyutları ile modellenmiş betonarme yapıların sayısal analizine direkt uygulamak için denklem (3.5) yeterli değildir (22).



Şekil 3.8 Sonlu eleman ağı boyutuna göre mikroçatlakların dağılım fonksiyonu a) nisbeten küçük ağı b) orta ağı c) nisbeten büyük ağı

3.4. Kullanılan Çatlak Modeli

Bu çalışmada oldukça büyük bir sonlu eleman ağı boyutuna uygulanabilen yeni bir kriter betonarme yapıların nonlineer analizinde kullanılmıştır. Aşağıdaki kısımlardaki işlemler modelin çıkarılması için tanımlanmışlardır.

3.4.1. Mikroçatlakların dağılımı

İlk önce, genellikle bir elemandaki mikroçatlakların dağılımını formül haline getirmek için, üstel bir fonksiyon (Şekil 3.7) geliştirilmiştir. Bu tip çatlakta yoğunlaştırılmış karakteristik mikroçatlakın kabul edilmiş olduğu ifade edilebilir. Uzunluğu (yani sonlu eleman ağı boyutu) oldukça büyüktür,

$$f(x) = \alpha e^{\beta x} \quad (3.6)$$

burada α ve β belirlenebilen sabitlerdir.

Sınır Şartları yerine geçen; yani $f(0) = 1.0$ ve $f(b/2) = 3/b$ denklem (3.6) da yerine koyulursa, aşağıdaki denklem bulunabilir.

$$f(x) = e^{-2b \ln(b/3) x} \quad (3.7)$$

buradaki b elemanın genişliğidir.

Şekil 3.7 ve 3.8'de tanımlanmış denklem (3.7) deki $f(x)$ fonksiyonu ifadeleri : 1) Şekil 3.7 de gösterildiği gibi mikroçatlakların dağılımı simetrik bir karakteristiğe sahiptir; 2) sonlu eleman ağının sonunda mikroçatlağın tipik boyutu $3/b$ dir. İkinci özellik genişliğin 76 mm'den daha az olduğu durumda kabul edilmiş olan mikroçatlak dağılımının ünüform olduğunu gösterir. Bu durumda ise genişlik maksimum agrega boyutunun üç katıdır (yaklaşık 3×25 mm)(22,19).

3.4.2. Kırılma enerjisi

Betonun gerilme-şekil değiştirme ilişkisi ile kırılma enerjisi aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$G_f = \frac{1}{2} \varepsilon_0 f_t \int_0^{b/2} f(x) dx \quad (3.8)$$

Burada f_t betonun çekme dayanımıdır. ε_0 azalan şekil değiştirmenin sonundaki şekil değiştirmedir ve G_f ise formülde ifade edilen ve birim kalınlık boyunca birim uzunlukta açılan bir çatlağın tüketilmiş kırılma enerjisidir. Eğer G_f ve f_t ölçümlerden biliniyorsa, bu durumda ε_0 aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\varepsilon_0 = \frac{G_f}{\frac{b/2}{\int_0^1 f(x) dx}} \quad (3.9)$$

ε_0 , sonlu eleman ağı boyutu değiştirildiğinde, her zaman denklem (3.9) kullanılarak hesaplanabilir.

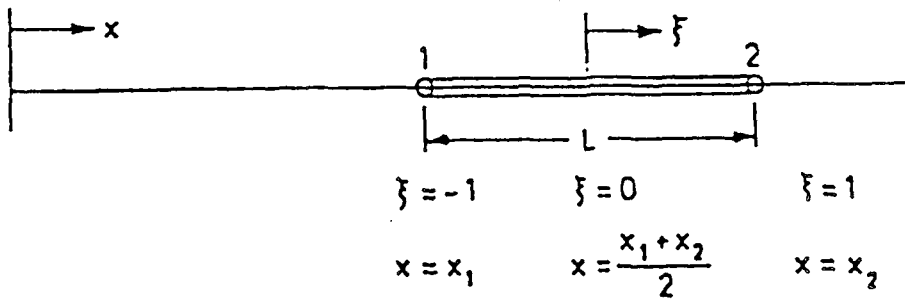
$f(x)=1.0$ olduğunda denklem (3.5) ile denklem (3.9) da önerilen kriter aynı sonucu verir, yani sonlu eleman ağı boyutu 76 mm'ye eşit veya daha küçüktür. Sonlu eleman ağı boyutu 76 mm'den daha büyük olduğunda, pratik durumların çoğunda olduğu gibi, denklem (3.7) deki $f(x)$ fonksiyonuna uygun olarak bir elemandaki mikroçatlak dağılımı kabul edilmelidir. Bu durumda, ε_0 'ın değeri denklem (3.5) ile hesaplanandan farklı olur ve betonarme yapılarıdaki gerçek çatlaklara daha yakın olur. Bundan dolayı, denklem (3.9) sonlu eleman ağı boyutlarının geniş sahası ile betonarme yapıların sayısal nonlineer analizinde kullanılabilir (22).

4. İZOPARAMETRİK SONLU ELEMANLAR METODU

Sınır bölgeleri düzgün olmayan gelişigüzel geometriye sahip ortamların üçgen veya dörtgen sonlu elemanlarla modellenmesinde parçalama hatalarının (discretization error) olması kaçınılmazdır. Böylece, eğri sınırları olan ortamları modelleyebilen yani kenarları eğri olan elemanlar için gereksinim doğmaktadır. Sonlu eleman literatüründe “İzoparametrik Eleman” denilen bu formülasyonda, deplasmanların eleman içerisindeki değişimini tanımlayan enterpolasyon fonksiyonları (veya şekil fonksiyonları) aynı zamanda eleman geometrisini tanımlamakta kullanıldığından, gelişigüzel geometriye sahip elemanlar geliştirmek kolayca mümkün olabilmektedir. İzoparametrik sonlu elemanlar ilk defa Irons tarafından önerilmiştir (29).

4.1. Doğal Koordinatlar

Bu kısımda, bir çubuk elemanı için global x koordinat sisteminden yerel ξ koordinat sistemine dönüşüm incelenmektedir. Şekil 4.1’de hem yerel hem de global koordinatlarda bir çubuk elemanı gösterilmektedir. Burada ξ ile gösterilen yerel koordinat sisteminin merkezi elemanın ortasına yerleştirilmiştir ve sol düğüm noktasında $\xi = -1$, sağ düğüm noktasında ise $\xi = 1$ şeklindedir. Her iki koordinat sistemi arasındaki dönüşüm aşağıdaki ifade ile gerçekleşir.



Şekil 4.1 Global-yerel koordinat dönüşümü

$$\xi = \frac{2x - (x_1 + x_2)}{L} \quad (4.1)$$

Burada x_1 ve x_2 düğüm noktalarının global koordinatlarını, L eleman uzunluğunu göstermektedir. ξ koordinatı daima -1 ve $+1$ arasında değerler aldığından, doğal koordinat olarak adlandırılır. Denklem (4.1) deki ifade ile gerçek eleman üzerindeki herhangi bir x noktası ($x_1 \leq x \leq x_2$), doğal koordinat sisteminde ξ ile gösterilen bir noktaya ($-1 \leq \xi \leq 1$) dönüştürülür.

Doğal koordinat sisteminin kullanılması, enterpolasyon fonksiyonlarının elde edilmesinde ve ayrıca eleman matrislerinin sayısal integrasyonunda kolaylık sağlar. Önce ξ koordinat sisteminde tarif edilmiş enterpolasyon fonksiyonlarının çıkarılışı açıklanmaktadır. Hatırlanacağı gibi, sonlu eleman literatüründe enterpolasyon fonksiyonları çoğu kez şekil fonksiyonları olarak adlandırılır. Enterpolasyon fonksiyonları aşağıdaki özelliğe sahiptirler.

$$N_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } i=j \\ 0 & \text{eğer } i \neq j \end{cases} \quad (4.2)$$

Burada ξ_j ile eleman j düğüm noktasının ξ koordinatı gösterilmektedir. Düğüm sayısı n olan bir boyutlu bir eleman için enterpolasyon fonksiyonları $n-1$ 'inci dereceden fonksiyonlardır. Herbir N_i fonksiyonunu bulmak için aşağıdaki çarpım yazılabilir. Becker ve ark.(29).

$$N_i = c_i (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_n) \quad (4.3)$$

Burada dikkat edilecek husus $(\xi - \xi_i)$ teriminin bu ifadede olmayışı ve N_i 'nin i düğüm noktası hariç diğer noktalarda sıfır değerini almasıdır. c_i sabiti, i düğüm noktasında $\xi = \xi_i$ ve $N_i = 1$ olma özelliğinden

$$c_i = [(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \dots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_n)]^{-1}$$

şeklini alır. Böylece i düğüm noktasına karşılık gelen enterpolasyon fonksiyonu aşağıdaki şekli alır,

$$N_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\dots(\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1})\dots(\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2)\dots(\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1})\dots(\xi_i - \xi_n)} \quad (4.4)$$

ve dikkat edileceği gibi denklem (4.2) de istenen özellikleri içerir. Örneğin, Şekil 4.1'de gösterilen iki düğüm noktalı ($n=2$) çubuk elemanı için

$$N_1 = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\xi - (1)}{(-1) - (+1)} = \frac{1}{2} (1 - \xi)$$

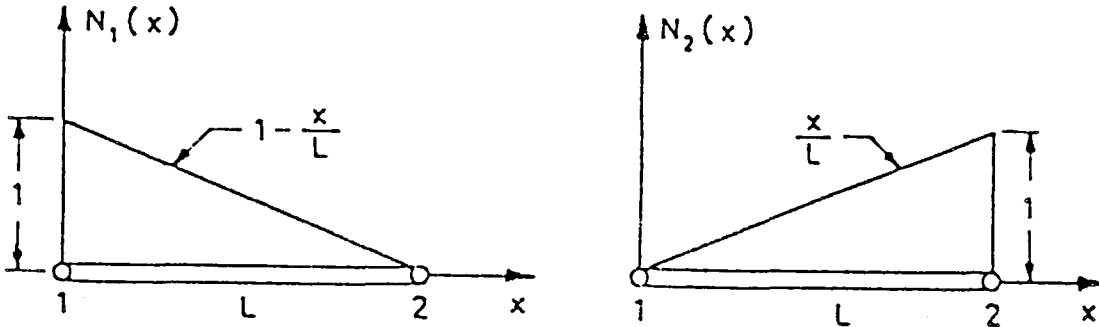
$$N_2 = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\xi - (-1)}{(1) - (-1)} = \frac{1}{2} (1 + \xi)$$

$\xi = -1$ de $N_1=1$, $\xi=1$ de ise $N_1 = 0$ olduğu görülmektedir. Aynı şekilde, $\xi = -1$ de $N_2 = 0$ $\xi=1$ de ise $N_2 = 1$ olduğu ortaya çıkmaktadır.

Böyle bir çubuk elemanı için Şekil 4.2 gösterilen koordinatlarla N_1 ve N_2 enterpolasyon fonksiyonlarının ifadeleri Wasti ve Utku (29) tarafından polinomlar kullanılarak şu şekilde bulunmuştur.

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L}$$

$$N_2 = \frac{x}{L}$$



Şekil 4.2. Lineer enterpolasyon fonksiyonları

Denklem (4.1) ve Şekil 4.1'deki değerler Şekil 4.2'ye uygulandığında $x_1 = 0$ ve $x_2 = L$ olduğu görülmektedir. O halde,

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}(1-\xi) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2x-(0+L)}{L}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2x-L}{L}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2x}{L} + 1\right) \\ &= 1 - \frac{x}{L} \end{aligned}$$

Aynı tip işlemler sonucu

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{1}{2}(1+\xi) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2x-(0+L)}{L}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2x-L}{L}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2x}{L} - 1\right) \\ &= \frac{x}{L} \end{aligned}$$

Yukarıdaki işlemlerle şekil fonksiyonlarının ister doğal koordinatlarla, ister global koordinatlarla elde edilebildiği gösterilmiştir.

Denklem (4.4) deki ifadeye Lagrange enterpolasyon fonksiyonu denilmektedir. Lagrange enterpolasyon fonksiyonunun elverişli olması, kullanılan ifadede, aralarında enterpolasyon yapılacağı noktalarındaki (çoğu kez bilinen) fonksiyon değerlerinin, ifadede doğrudan yer almasından ileri gelmektedir. Aşağıda gösterildiği gibi, Denklem (4.4) ile başka eğri-uyarlama yöntemleri arasında temelde ayrılık yoktur.

Örnek 4.1.

Doğal koordinat ξ ile değişen bir u fonksiyonunun değerleri şöyle verilmektedir.

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -1 & u_1 &= 2 \\ \xi_2 &= 0 & u_2 &= 5 \\ \xi_3 &= 1 & u_3 &= 11\end{aligned}$$

Buna göre u fonksiyonunu elde ediniz.

Çözüm:

Klasik eğri uyarılama yönteminde üç noktadan ikinci dereceden bir eğri geçer. O halde ,

$$u = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2$$

yazılabilir. $\xi = -1, 0$ ve 1 deki değerler yerleştirildiğinde

$$2 = c_0 - c_1 + c_2$$

$$5 = c_0$$

$$11 = c_0 + c_1 + c_2$$

Buna göre, $c_0 = 5$, $c_1 = 4.5$ ve $c_2 = 1.5$ olup, sonuçta

$$u = 5 + 4.5\xi + 1.5\xi^2 \text{ bulunur.}$$

Lagrange enterpolasyon yöntemi ile u fonksiyonu, u 'nun ilgili noktalardaki değerleri ile enterpolasyon fonsiyonlarını da içerecek şekilde şöyle yazılır:

$$u = u_1 N_1(\xi) + u_2 N_2(\xi) + u_3 N_3(\xi)$$

Burada görüldüğü gibi, $\xi = -1$ olduğu zaman $N_1 = 1$, $N_2 = N_3 = 0$ 'dır ve dolayısıyla $\xi = -1$ 'de, $u = u_1$ 'dir.

Aynı şekilde $\xi_2 = 0$ da $u = u_2$ ve $\xi_3 = 1$ de $u = u_3$ çıkmaktadır.

Denklem (4.4) ile $N_1(\xi)$, $N_2(\xi)$ ve $N_3(\xi)$ nin belirlenmesi:

$$N_1 = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{\xi(\xi - 1)}{2}$$

$$N_2 = \frac{(\xi - (-1))(\xi - 1)}{(0 - (-1))} = \frac{\xi^2 - 1}{-1} = 1 - \xi^2$$

$$N_3 = \frac{(\xi - 1)(\xi - 0)}{(1 - (-1))(1 - 0)} = \frac{(\xi + 1)\xi}{2}$$

Böylece, $u = (2) \frac{\xi(\xi - 1)}{2} + (5)(1 - \xi^2) + (11) \frac{(\xi + 1)\xi}{2} \dots\dots\dots$

Bu ifade açıldığında klasik enterpolasyonda olduğu gibi,

$$\begin{aligned} u &= \xi^2 - \xi + 5 - 5\xi^2 + 5.5\xi^2 + 5.5\xi \\ &= 5 + 4.5\xi + 1.5\xi^2 \end{aligned}$$

elde edilmektedir. Ancak, u_1 , u_2 ve u_3 değerlerinin 2, 5 ve 11 yerine 15, 8 ve 10 olarak alınmaları halinde, Lagrange enterpolasyonu ile hemen şu ifade yazılabilmektedir:

$$u = (15) \frac{\xi(\xi - 1)}{2} + (8)(1 - \xi^2) + (10) \frac{(\xi + 1)\xi}{2}$$

Oysa, klasik enterpolasyonla problemin yeniden çözülmesi gerekmektedir. Ayrıca enterpolasyon üç nokta yerine çok sayıda nokta arasında yapılması gerektiğinde Lagrange enterpolasyonunun daha kolay olduğu açıktır.

Önceden belirtildiği gibi eleman rijitlik matrisleri enterpolasyon fonksiyonlarının global x koordinatına göre türevlerini içermektedir. Buna karşın N_i doğal ξ koordinat sisteminde tarif edildiğinden, integralleri ξ cinsinden yazmak için

$$x = f(\xi) \quad (4.5)$$

şeklinde dönüşüme gerek vardır.

Denklem (4.5)deki dönüşüm ifadesi enterpolasyon fonksiyonları cinsinden

$$x = \sum_{i=1}^n x_i N_i(\xi) \quad (4.6)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadede x_i düğüm noktalarının global x koordinatlarıdır. N_i enterpolasyon fonksiyonlarının sonlu eleman literatüründe “enterpolasyon fonksiyonları” olarak adlandırılması, denklem (4.6) da bir elemanın şeklinin tanımlandığından ileri gelmektedir. Denklem (4.6) kullanılarak,

$$dx = \left(\sum_{i=1}^n x_i \frac{dN_i}{d\xi} \right) d\xi = J d\xi \quad (4.7)$$

Burada “Jacobian” olarak adlandırılan J terimi

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \left(\sum_{i=1}^n x_i \frac{dN_i}{d\xi} \right) \quad (4.8)$$

ifadesiyle tanımlanır. Enterpolasyon fonksiyonların x koordinatına göre türevleri, türev-zincir kuralından şöyle hesaplanır,

$$\frac{dN_i}{d\xi} = \frac{dN_i}{dx} \frac{dx}{d\xi} = J \frac{dN_i}{dx}$$

veya

$$\frac{dN_i}{dx} = (J)^{-1} \frac{dN_i}{d\xi} \quad (4.9)$$

Örnek olarak, bilinmeyen deplasman bileşeni u aşağıdaki gibi ifade edilsin.

$$u = \sum_{i=1}^n u_i N_i(\xi)$$

Burada u_i , u deplasman bileşeninin düğüm noktalarındaki bilinmeyen değerleridir. Ayrıca denklem (4.6) da x koordinatı, ξ koordinatı cinsinden

$$x = \sum_{i=1}^n x_i N_i(\xi)$$

şeklinde yazılmıştı. Burada olduğu gibi, aynı enterpolasyon fonksiyonları hem deplasman bileşenlerinin değişimi, hem de eleman geometrisini tanımlamak için kullanılırsa bu tür elemanlara “izoparametrik elemanlar” denir. (29).

4.2. Gauss Sayısal İntegrasyonu

En genel halinde

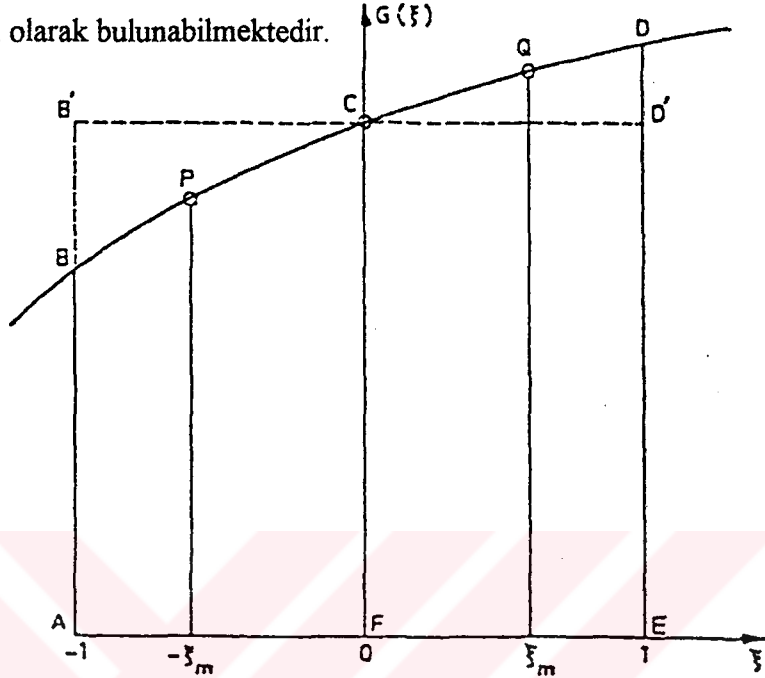
$$I = \int_{-1}^1 G(\xi) d\xi \quad (4.11)$$

şeklindeki bir integral ifadesinde, integral sınırları basit olmasına karşılık, $G(\xi)$ terimi genellikle çok karışıktır ve bundan dolayı bir analitik integral almak imkansızdır. Bu nedenle, integrallerin sayısal olarak hesaplanması zorunluluğu belirlemektedir. İzoparametrik elemanlarda sayısal integrasyon için en çok kullanılan yöntem “Gauss” sayısal integrasyonudur. Yöntem, eleman matrislerinin elde edilmesinde gerekli cebirsel işlem sayısını ve hata ihtimalini azaltmakta, matrislerin bilgisayarda sistematik ve genel bir şekilde hesaplanmasına imkan sağlamaktadır.

Gauss sayısal integrasyon yönteminde denklem (4.11) deki integral, yaklaşık olarak

$$I \approx \sum_{m=1}^N w_m G(\xi_m)$$

formülünden hesaplanır. Burada w_m , Gauss formülünün ağırlık katsayılarıdır. ξ_m , Gauss integrasyon noktalarının koordinatlarıdır. N ise integrasyon nokta sayısıdır. Mertebesi N olan Gauss integrasyon formülünde, $2N-1$ derecedeki bir polinomun integrasyonu kesin olarak bulunabilmektedir.



Şekil 4.3 Gauss integrasyonu

Şekil 4.3 te gösterildiği gibi $\int_{-1}^1 G(\xi) d\xi$ integrali ABCDE adlı alan ile eşittir. İntegrali hesaplamadan yaklaşık bir değer vermek isteniyorsa, C noktasından düz bir çizgi çekilebilir. Yaklaşık alan AB'CD'E nin değeri $A_y = (2)(CF)$ dir. Burada yapılan iş, integrale yaklaşık bir değer sağlanırken, $\xi = 0$ noktasına karşılık gelen G değeri, ağırlık katsayısı olarak adlandırılan 2 ile çarpılır. Yani burada $w_m = 2$ ve G için seçilen koordinat $\xi_m = 0$ dir.

Bir başka yaklaşımda, G ekseninin her iki tarafında simetrik olarak $\xi = -\xi_m$ ve $\xi = \xi_m$ de iki nokta P ve Q seçilebilir. Bu durumda integralin değeri yaklaşık olarak şöyle ifade edilebilir:

$$A_y = w_m G_p + w_m G_Q$$

G fonksiyonu için $2N-1$ değeri, iki nokta ile 3'e eşit olduğundan, G fonksiyonu aşağıdaki gibi üçüncü derece polinom olarak yazılabilir:

$$G = C_0 + C_1 \xi + C_2 \xi^2 + C_3 \xi^3$$

Buradan P ve Q noktalarında G'nin değerleri şöyledir:

$$G_p = C_0 - C_1 \xi_m + C_2 \xi_m^2 - C_3 \xi_m^3$$

$$G_Q = C_0 + C_1 \xi_m + C_2 \xi_m^2 + C_3 \xi_m^3$$

Böylece yaklaşık alan

$$A_y = 2w_m (C_0 + C_2 \xi_m^2)$$

olmaktadır. İntegral değerinden ise alan şöyle hesaplanmaktadır:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 G(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 (C_0 + C_1 \xi + C_2 \xi^2 + C_3 \xi^3) d\xi \\ &= (C_0 \xi)_{-1}^1 + \left(\frac{C_1 \xi^2}{2} \right)_{-1}^1 + \left(\frac{C_2 \xi^3}{3} \right)_{-1}^1 \\ &= 2C_0 + \frac{2C_2}{3} \end{aligned}$$

İntegralden elde edilen değer ile yaklaşık alan arasındaki fark f aşağıda verilmiştir:

$$f = I - A_y = 2C_0 + \left(\frac{2C_2}{3} \right) - 2w_m C_0 - 2w_m C_2 \xi_m^2$$

Bu farkın minimum olması için $\frac{\partial f}{\partial C_0} = 0$ ve $\frac{\partial f}{\partial C_2} = 0$ şartları vardır. O halde,

$$\frac{\partial f}{\partial C_0} = 2 - 2w_m = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f}{\partial C_2} = \frac{2}{3} - 2w_m \xi_m^2 = 0$$

İlk denklemden ağırlık katsayısı $w_m = 1$, ikinci denklemden ise $\xi_m^2 = 1/3$ veya $\xi_m = \pm 1/\sqrt{3} = \pm 0.57735\dots$ elde edilmektedir.

Bu şekilde bulunan ağırlık katsayıları ve koordinatları, genellikle bir çok integral tablosunda mevcuttur ve ayrıca $N = 6$ 'ya kadar olan değerler için Tablo 4.1 de verilmektedir (29,30).

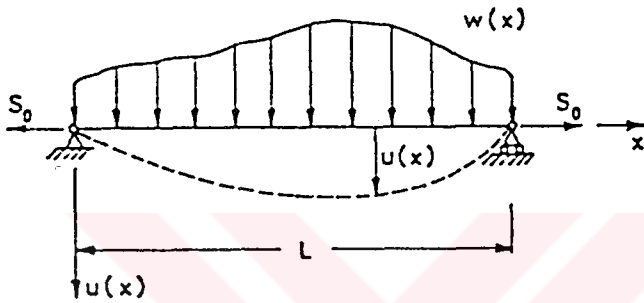
Tablo 4.1 Gauss formülü için integral noktalarının koordinatları ve ağırlık katsayıları (30).

Mertebe N	Koordinat ξ_m	Ağırlık katsayısı w_m
1	0.	2.
2	$\pm 0.57735 \ 02691 \ 89626$	1.00000 00000 00000
3	$\pm 0.77459 \ 66692 \ 41483$	0.55555 55555 55556
	0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88889
4	$\pm 0.86113 \ 63115 \ 94053$	0.34785 48451 37454
	$\pm 0.33998 \ 10435 \ 84856$	0.65214 51548 62546
5	$\pm 0.90617 \ 98459 \ 00000$	0.23692 68851 00000
	$\pm 0.53846 \ 93101 \ 00000$	0.47862 86705 00000
	0.0	0.56888 88889 00000
6	$\pm 0.93246 \ 95142 \ 00000$	0.17132 44924 00000
	$\pm 0.66120 \ 93865 \ 00000$	0.36076 15730 00000
	$\pm 0.23861 \ 91861 \ 00000$	0.46791 39346 00000

Örnek 4.2

Uçlarından S_0 kuvvetiyle gerilmiş, L uzunluğunda, $w(x)$ yayılı yükü altında bir kablo veriliyor (Şekil 4.4).

- Tipik bir eleman için sonlu eleman denklemlerini çıkarınız.
- $w(x) = w_0x/L$ olarak verildiğinde, iki noktalı bir izoparametrik eleman için rijitlik matrisi ve yük vektörünü bulunuz.



Şekil 4.4 Yayılı yük altında bir kablo.

Çözüm:

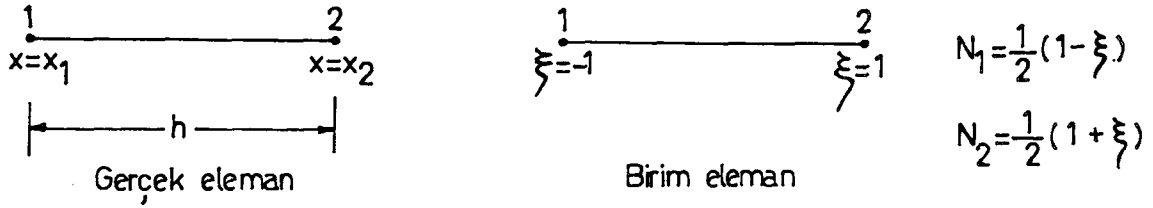
Elastik kablonun toplam potansiyel enerjisi

$$\Pi(u) = \frac{S_0}{2} \int_0^L \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L u w(x) dx \quad (4.13)$$

şeklindedir. Tipik bir "e" kablo elemanın toplam potansiyel enerjisi

$$\Pi_e = \frac{S}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_{x_1}^{x_2} u w(x) dx \quad (4.14)$$

olarak yazılır.



Şekil 4.5 Bir kirişte gerçek ve birim eleman

a) Eleman üzerindeki deplasman değişimi

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^2 u_i N_i = u_1 N_1 + u_2 N_2 \quad (4.15)$$

$$\mathbf{u} = [N_1 \ N_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}^T \mathbf{r}_e$$

şeklinde yazılırsa

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^2 u_i N_i \right) = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{r}_e \quad (4.16)$$

olur. Bu değerler elemanın toplam potansiyel enerji ifadesinde yerlerine konularak

$$\Pi_e = \frac{S_0}{2} \mathbf{r}_e^T \left(\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \right) \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_e^T \int_{x_1}^{x_2} w \mathbf{N} dx \quad (4.17)$$

ifadesi elde edilir. Minimum potansiyel enerji ilkesine göre, Π_e 'nin ilk varyasyonu sıfıra eşitlendiğinde eleman denklemleri elde edilir.

$$\delta \Pi_e = \frac{\partial \Pi_e}{\partial \mathbf{r}_e^T} \delta \mathbf{r}_e^T = 0 \quad (4.18)$$

veya

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial \mathbf{r}_e^T} = 0 \quad (4.19)$$

Böylece $\underline{K}_e \underline{r}_e = \underline{F}_e$ (4.20)

Burada $\underline{K}_e = S_0 \int_{x_1}^{x_2} \underline{B}^T \underline{B} dx$ (4.21)

eleman rijitlik matrisi ve eleman yük vektörü

$$\underline{F}_e = \int_{x_1}^{x_2} w \underline{N} dx \quad (4.22)$$

b) Eleman rijitlik matrisinin hesabı

$$\underline{K}_e = S_0 \int_{x_1}^{x_2} \underline{B}^T \underline{B} dx$$

Burada

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix}$$

enterpolasyon fonksiyonlarının x 'e göre türevini içeren bir matristir. Her bir N_i için

$$\frac{dN_i}{d\xi} = \frac{dN_i}{dx} \frac{dx}{d\xi} = J \frac{dN_i}{dx} \quad (4.23)$$

Burada Jacobian J , $x = x_1 N_1 + x_2 N_2$ yazılarak

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{2} (1-\xi)x_1 + \frac{1}{2} (1+\xi)x_2 \right]$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{h}{2}$$

veya

$$dx = J d\xi = \frac{h}{2} d\xi \quad (4.24)$$

denklem (4.23) den

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{1}{J} \frac{dN_i}{d\xi}$$

veya

$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{2}{h} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{h}$$

$$\frac{dN_2}{dx} = \frac{2}{h} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{h}$$

ve rijitlik matrisi \underline{K}_e , Denklem (4.24) kullanılarak ve integral sınırları -1 ile 1 arasında yazılarak

$$\underline{K}_e = S_0 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -1/h \\ 1/h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ h & h \end{bmatrix} \frac{h}{2} d\xi$$

ve integral hesaplandığında

$$\underline{K}_e = \frac{S_0}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Yük vektöründe bulunan $w(x)$ terimi, $w(x) = \frac{w_0}{L} x$ olarak verilmişti. Yani

$$F_e = \int_{x_1}^{x_2} \frac{w_0}{L} x \underline{N} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{w_0}{L} \begin{bmatrix} x N_1 \\ x N_2 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$dx = \frac{h}{2} d\xi, \quad x = x_1 N_1 + x_2 N_2 \quad \text{ifadeleri kullanılarak}$$

$$F_1 = \int_{-1}^1 \frac{1}{L} \left[\frac{x_1}{2} (1-\xi) + \frac{x_2}{2} (1+\xi) \right] \frac{1}{2} (1-\xi) \left\{ \frac{h}{2} d\xi \right\} = \int_{-1}^1 G(\xi) d\xi$$

Burada görüldüğü gibi integrali alınacak ifade ξ 'e göre 2inci dereceden bir polinomdur. Evvelce de bahsedildiği gibi mertebesi N olan Gauss İntegrasyonu ile, $2N-1$ derecedeki bir polinomun kesin olarak integrali alınabilmektedir. Yani $2N-1=2$ şeklinde yazarsa, $N=1.5$ ve dolayısıyla $N=2$ olan Gauss formülü kullanılır. $N=2$ için integrasyon noktaları $\xi_{m.} = \pm 1/\sqrt{3}$ ve ağırlık katsayıları $w = \pm 1$ dir. Böylece

$$F_1 = \int_{-1}^1 G(\xi) d\xi = w_1 G(\xi_1) + w_2 G(\xi_2)$$

$$G(\xi) = \frac{w_0 h}{8L} (1-\xi) [x_1 (1-\xi) + x_2 (1+\xi)]$$

$$G(\xi_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}) = \frac{w_0 h}{8L} (1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) \left[x_1 (1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) + x_2 (1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) \right]$$

$$= \frac{w_0 h}{8L} \left[\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) x_1 + \frac{2}{3} x_2 \right]$$

$$G(\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{w_0 h}{8L} (1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) \left[x_1 (1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) + x_2 (1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) \right]$$

$$= \frac{w_0 h}{8L} \left[\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) x_1 + \frac{2}{3} x_2 \right]$$

Buradan

$$F_1 = (1)G\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + (1)G\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{w_0 h}{8L} (2x_1 + x_2)$$

ve benzer şekilde

$$F_2 = \frac{w_0 h}{6L} (x_1 + 2x_2)$$

vektör şeklinde

$$\underline{F}_e = \frac{w_0 h}{6L} \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

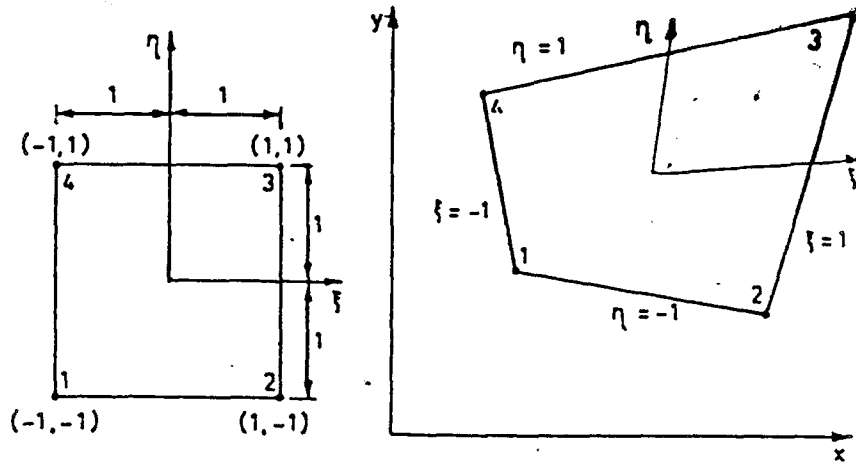
olarak yazılır. Bu integraller direkt olarak da kolaylıkla hesaplanabilirdi. Fakat örnekte Gauss integrasyonu açıklanmak istendiğinden bu yol seçilmiştir (29).

4.3. Dört Düğüm Noktalı İzoparametrik Eleman

İzoparametrik elemanların, iki boyutlu problemlerde eğri sınırları olan ortamların modellenmesinde büyük kolaylık sağladığı daha önceden belirtilmişti. Fakat eğri kenarlı elemanlar, global koordinat sisteminde eleman rijitlik matrislerinin ve yük vektörlerinin hesabını güçleştirmektedir. Bu güçlük, bir boyutlu problemlere benzer şekilde, global koordinatlardaki gerçek elemanı doğal koordinatlarda tanımlanan bir birim-kare elemana (master element) dönüştürerek ve bütün integral hesaplarını bu basit eleman üzerinde yaparak ortadan kaldırılabilir. Bu kısımda önce dört, sekiz ve dokuz düğüm noktalı izoparametrik elemanlar için enterpolasyon fonksiyonlarının çıkarılışı incelenmiş, daha sonra da bir düzlem elastisite ve bir plak eğilme probleminin izoparametrik formülasyonu gösterilmiştir (29).

4.3.1. Enterpolasyon fonksiyonları

Şekil 4.6 da doğal koordinatlarda “birim-kare” (köşe noktaları $\xi = \pm 1$, $\eta = \pm 1$), global koordinatlarda “genel dörtgen” olan, dört düğüm noktalı bir eleman gösteril-



a) Değal koordinatlar :

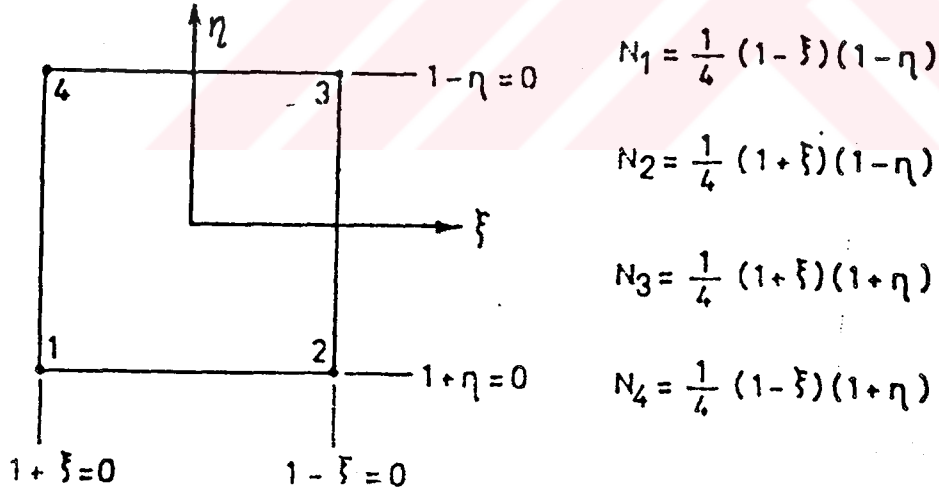
b) Global koordinatlar :

Şekil 4.6 Dört düğüm noktalı izoparametrik eleman

mektedir. N_1 enterpolasyon fonksiyonu 1 numaralı düğüm noktasında bir, diğer düğüm noktalarında sıfır değerini almalıdır. Diğer bir deyişle N_1 , 2-3 ve 3-4 kenarları boyunca sıfırdır. Şekil 4.7 de görüldüğü gibi bu kenarların denklemleri, 2-3 kenarı için $1-\xi = 0$ ve 3-4 kenarı için $1-\eta = 0$ şeklindedir. O halde

$$N_1(\xi, \eta) = c(1-\xi)(1-\eta)$$

şeklindedir ve c sabiti $N(-1, -1) = 1$ olma şartından $c = 1/4$ bulunur. Böylece



Şekil 4.7 Birim-kare eleman ve enterpolasyon fonksiyonları

$$N_1 = (1/4)(1-\xi)(1-\eta)$$

ve benzer şekilde

$$N_2 = (1/4) (1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = (1/4) (1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4 = (1/4) (1-\xi)(1+\eta)$$

veya herhangi bir N_i ,

$$N_i(\xi, \eta) = (1/4) (1-\xi \xi_i)(1+\eta \eta_i), \quad i=1,2,3,4 \quad (4.25)$$

şeklinde ifade edilir. ξ_i ve η_i birim elemanın düğüm noktalarının koordinatlarıdır. Denklem (4.25) deki fonksiyonlar, enterpolasyon fonksiyonlarının gereken özelliklerini sağlamaktadır. Herbir N_i i numaralı düğüm noktasında bir, diğer düğüm noktalarında sıfır değerini almakta ve düğüm noktaları arasında lineer olarak değişmektedir.

Burada örnek olarak düzlem-gerilme problemi ele alınmaktadır. Bu durumda aynı lineer enterpolasyon fonksiyonları ile deplasmanların birim eleman içerisindeki değişimleri

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 u_i N_i, \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^4 v_i N_i$$

veya matris halinde,

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^T \underline{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{N}^T \underline{\mathbf{v}} \quad (4.26)$$

olarak yazılır.

4.3.2. Eleman rijitlik matrislerinin hesaplanması

Kalınlığı h ve alanı A_e olan 4 düğüm noktalı bir eleman için 8×8 boyutlu rijitlik matrisi

$$\underline{K}_e = h \int_{A_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, dx \, dy \quad (4.27)$$

olarak ifade edilir. Bu ifadedeki \underline{B} ve \underline{D} matrisleri aşağıda çıkarılmıştır. İki boyutlu lineer elastisite teorisinden birim deformasyon-deplasman bağıntıları, Denklem (4.26) kullanılarak,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (\underline{N}^T \underline{u}_e) & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} (\underline{N}^T \underline{v}_e) \\ \frac{\partial}{\partial y} (\underline{N}^T \underline{u}_e) & \frac{\partial}{\partial x} (\underline{N}^T \underline{v}_e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{N}^T_{,x} & 0 \\ 0 & \underline{N}^T_{,y} \\ \underline{N}^T_{,y} & \underline{N}^T_{,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_e \\ \underline{v}_e \end{bmatrix}$$

veya

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{r}_e \quad (4.28)$$

olarak yazılır.

\underline{B} matrisi eleman enterpolasyon fonksiyonlarının x ve y 'ye göre kısmi türevlerini içeren 3×8 boyutlu bir matris, \underline{r}_e ise elemanları düğüm noktalarının deplasmanları olan 1×8 boyutlu bir vektördür. \underline{D} matrisi, elastisite modülü E ve poisson oranı ν cinsinden yazılan 3×3 boyutlu elastisite matrisidir. Denklem (4.28) aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$(N_i)_{,x}$ ve $(N_i)_{,y}$ x ve y 'ye göre kısmi türevleri göstermektedir. Denklem (4.25) te enterpolasyon fonksiyonları doğal koordinatları cinsinden ifade edilmektedir. Diğer taraftan Denklem(4.27)'deki rijitlik matrislerinin hesabı için, enterpolasyon fonksiyonlarının global x, y koordinatlarına göre türevlerinin alınması ve integrallerin global koordinatlarda yapılması gerekmektedir. Bu sebepten (bir boyutlu problemlerde olduğu gibi) izoparametrik formülasyon için bir koordinat dönüşümü yapmak zorunlu olmaktadır. Denklem (4.29) daki \underline{B} matrisinin $N_{i,x}$ ve $N_{i,y}$ terimlerinin hesabı için, önce "türev-zincir" kuralından, şekil fonksiyonlarının sırasıyla ξ ve η 'ya göre kısmi türevleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (4.30a)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (4.30b)$$

veya matris şeklinde

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Burada, "Jacobian" dönüşüm matrisi olarak bilinen \underline{J} matrisi şekil fonksiyonları cinsinden

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^4 y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^4 y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

olarak kolaylıkla hesaplanabilir.

Denklem(4.31)'den enterpolasyon fonksiyonlarının global koordinatlara göre türevlerini elde etmek için Jacobian matrisinin tersi alındığında,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\underline{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

bulunur. $|\underline{J}|$, Jacobian matrisinin determinantıdır. Ayrıca global koordinat sistemindeki herhangi bir elemanter alan, doğal koordinatlar cinsinden,

$$dA = dx dy = |\underline{J}| d\xi d\eta \quad (4.34)$$

şeklinde ifade edilir, Cope(29). Böylelikle denklem (4.33) ve (4.34) deki ifadeler, integral sınırları değiştirilerek denklem (4.27)'ye yerleştirildiğinde eleman rijitlik matrisi,

$$\begin{aligned} \underline{K}_e &= h \int_{A_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dx dy = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} |\underline{J}| d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{G}(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.35)$$

şeklini alır. \underline{G} matrisi, $\underline{G} = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \det \underline{J}$ ifadesidir. Denklem (4.35) te görüldüğü gibi, denklem (4.27) de tanımı global koordinatlarda yapılan eleman rijitlik matrisi, gerekli dönüşümlerden sonra tamamen ξ, η koordinatlarında yazılmakta ve integrallerin sadece birim-kare elemanı üzerinde alınması gerekmektedir.

Daha önce belirtildiği gibi denklem (4.35)'deki \underline{G} matrisinin terimleri genellikle çok karışıktır ve gerçek elemanın dörtgen olduğu durumların dışında bir analitik integral almak imkansızdır. Bu sebeple integraller Gauss sayısal integrasyon yöntemiyle hesaplanır. Böylece,

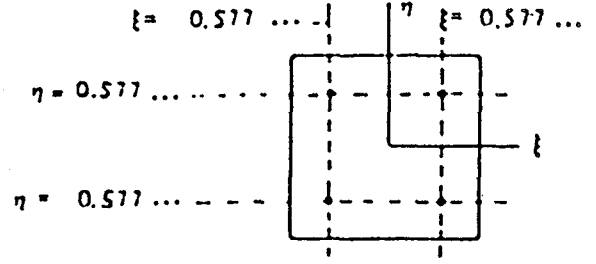
$$\begin{aligned} \underline{K}_e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{G}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &\approx \int_{-1}^1 \left[\sum_{m=1}^N w_m \underline{G}(\xi_m, \eta) \right] d\eta \\ &\approx \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N w_m w_n \underline{G}(\xi_m, \eta_n) \end{aligned} \quad (4.36)$$

formülünden hesaplanır. Burada w_m ve w_n gauss formülünün ağırlık katsayılarıdır. ξ_m, η_n ise Gauss integrasyon noktalarının koordinatlarıdır. Bu değerler daha önce Tablo 4.1'de verilmişti. N ise ξ ve η yönlerindeki integrasyon nokta sayısıdır. Mertebesi N olan bir Gauss integrasyon formülünde, iki boyutlu bir ortam için, $N \times N$ kadar nokta sayısı bulunmakta ve $2N-1$ derecedeki bir polinomun integrasyonu kesin olarak bulunabilmektedir. 4 düğüm noktalı bir "genel dörtgen" eleman için $N=2$ formülü yeterlidir (29). İntegrasyon noktalarının birim-kare elemanı üzerindeki konumu $N=2$ ve 3 formülü için Şekil 4.8'de gösterildiği gibidir (31).

LINEER

 2×2

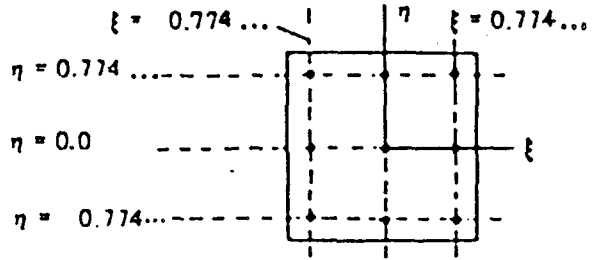
3



KUADRATİK

 3×3

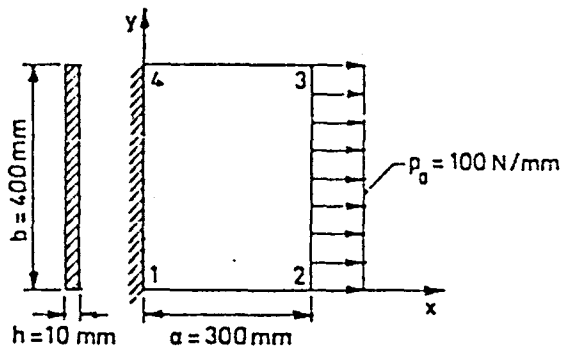
5



Şekil 4.8 N=2 ve 3 için birim-kare eleman üzerinde Gauss integrasyon noktaları (31)

Örnek 4.3

Bir kenarı düzgün yaylı yük altında, ince elastik bir plak verilmektedir (Şekil 4.9). Placı dört noktalı bir izoparametrik eleman ile modelleyerek düğüm noktalarının deplasmanlarını ve eleman da oluşacak gerilmelerin hesabı istenmektedir.



$$E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.25$$

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Şekil 4.9 Bir kenarı düzgün yaylı yük altında ince elastik bir plak

Çözüm:

$x_1 = x_4 = 0$, $x_2 = x_3 = a$, $y_1 = y_2 = 0$ ve $y_3 = y_4 = b$ değerlerini kullanarak önce koordinat dönüşümü yapılmaktadır.

$$\begin{aligned} x &= x_1N_1 + x_2N_2 + x_3N_3 + x_4N_4 = x_2N_2 + x_3N_3 \\ &= \frac{a}{4} [(1+\xi)(1-\eta) + (1+\xi)(1+\eta)] \\ &= \frac{a}{2} (1+\xi) \end{aligned} \quad (4.37a)$$

$$\begin{aligned} y &= y_1N_1 + y_2N_2 + y_3N_3 + y_4N_4 = y_3N_3 + y_4N_4 \\ &= \frac{b}{4} [(1+\xi)(1+\eta) + (1-\xi)(1+\eta)] \\ &= \frac{b}{2} (1+\eta) \end{aligned} \quad (4.37b)$$

Böylece Jacobian dönüşüm matrisi ve determinanı

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\det \underline{J} = |\underline{J}| = ab / 4$$

Elemanın alanı global koordinatlarda ab olup, doğal koordinatlarla denklem (4.34)'e göre hesaplandığında $(2)(2)\det \underline{J} = (4)ab/4=ab$ olur. Denklem (4.38)'den \underline{J} 'nin inversi

$$\underline{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b} \end{bmatrix}$$

olur. \underline{B} matrisi

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix}$$

olduğundan denklem (4.33) kullanıldığında

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{I}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{2}{a} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{2}{b} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array} \right\} i=1,2,3,4 \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \text{Böylece, } N_1 &= (1/4)(1-\xi)(1-\eta), & N_3 &= (1/4)(1+\xi)(1+\eta) \\ N_2 &= (1/4)(1+\xi)(1-\eta), & N_4 &= (1/4)(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned}$$

ifadeleri kullanılarak, \underline{B} matrisi Denklem (4.39) yardımıyla,

$$\underline{B} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{(1-\eta)}{a} & 0 & \frac{(1-\eta)}{a} & 0 & \frac{(1+\eta)}{a} & 0 & \frac{(1+\eta)}{a} & 0 \\ 0 & \frac{(1-\xi)}{b} & 0 & \frac{(1+\xi)}{b} & 0 & \frac{(1+\xi)}{b} & 0 & \frac{(1-\xi)}{b} \\ \frac{(1-\xi)}{b} & \frac{(1-\eta)}{a} & \frac{(1+\xi)}{b} & \frac{(1-\eta)}{a} & \frac{(1+\xi)}{b} & \frac{(1+\eta)}{a} & \frac{(1-\xi)}{b} & \frac{(1+\eta)}{a} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Eleman rijitlik matrisi:

$$\underline{\mathbf{K}} = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{B}} |J| d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\mathbf{G}}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.41)$$

$$\approx \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N w_m w_n \underline{\mathbf{G}}(\xi_m, \eta_n)$$

denklem (4.41), $N=2$ için Gauss formülü kullanılarak

$$\underline{\mathbf{K}} = w_1 w_1 \underline{\mathbf{G}}(\xi_1, \eta_1) + w_1 w_2 \underline{\mathbf{G}}(\xi_1, \eta_2) + w_2 w_1 \underline{\mathbf{G}}(\xi_2, \eta_1) + w_2 w_2 \underline{\mathbf{G}}(\xi_2, \eta_2)$$

olarak hesaplanır. Burada

$$w_1 = w_2 = 1$$

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

alınmaktadır.

Sistem matrisleri:

Eleman denklemleri ve dolayısıyla plağın denklemleri aşağıdaki şekildedir

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ & & & & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ \text{Simetrik} & & & & & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ & & & & & & K_{77} & K_{78} \\ & & & & & & & K_{88} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{bmatrix}$$

Sınır şartları:

Bilinen deplasman değerleri

$$u_1 = v_1 = u_4 = v_4 = 0$$

ve bilinen kuvvet değerleri

$$F_{2x} = F_{3x} = \frac{P_0 b}{2}$$

$$F_{2y} = F_{3y} = 0$$

Denklem takımlarının çözümü:

Rijitlik matrisinin bilinen u_1, v_1, u_4 ve v_4 deplasmanlarına karşılık gelen satır ve sütunları çıkarılarak aşağıdaki denklem takımları elde edilir.

$$\begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 b/2 \\ 0 \\ P_0 b/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

veya ($a=300$ mm, $b=400$ mm, $h=10$ mm, $\nu=0.25$, $E=2 \times 10^5$ N/mm² ve $P_0=100$ N/mm değerlerini kullanarak.)

$$10^4 \begin{bmatrix} 15 & -33.3 & 27.4 & -6.7 \\ -33.3 & 88.9 & 6.7 & -35.6 \\ 27.4 & 6.7 & 115 & 33.3 \\ -6.7 & -35.6 & 33.3 & 88.9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20000 \\ 0 \\ 20000 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

denklem (4.43) çözülerek,

$$u_2 = 14.65 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$v_2 = 3.14 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$u_3 = 14.65 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$v_3 = -3.14 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

düğüm noktalarının bilinmeyen deplasmanları bulunur. $\delta = PL/AE$ formülünden

$u_2 = u_3 = 15 \times 10^{-3} \text{ mm}$ elde edilmektedir.

Gerilmelerin bulunması:

Gerilme-şekil değiştirme bağıntısını kullanarak,

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

veya

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad (4.45)$$

denklem (4.28)'den şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntısı tekrar yazılırsa,

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{r}_e \quad (4.46)$$

denklem (4.46)'yı denklem (4.45)'te kullanarak

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{B} \underline{r}_e \quad (4.47)$$

ve

$$\underline{r}_e^T = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]$$

denklem (4.47)'de sağ tarafta yer alan matrisler bilinmektedir. Denklem (4.40)'ta açık olarak verilen \underline{B} matrisi ξ ve η koordinatları cinsinden tarif edilmiştir. Dolayısıyla gerilmelerin, seçilen belirli ξ ve η koordinat değerlerinde bulunması gereklidir. Sonlu eleman çözümlerinde, elemanların ortasında hesaplanan gerilmeler sürekli ortamdaki gerilme dağılımı hakkında genellikle iyi bir fikir vermektedir. Elemanın orta noktası ise $\xi=0$, $\eta=0$ doğal koordinatlarına karşılık gelmektedir. \underline{B} matrisi $\xi=0$, $\eta=0$ noktasında hesaplandığında, $\underline{B} \underline{r}_e$ matris çarpımının sonucu 3×1 boyutlu bir vektördür. $u_1 = v_1 = u_4 = v_4 = 0$ ve $u_2 = v_3$, $v_3 = -v_2$ olduğundan,

$$\underline{B}_{\underline{r}_e} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{b} & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_2}{a} \\ \frac{v_2}{b} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bu sonuç denklem (4.47)'deki üçlü matris çarpımı kullanıldığında,

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{B}_{\underline{r}_e} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{u_2}{a} \\ -\frac{v_2}{b} \\ 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{x,y} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{u_2}{a} & -\nu \frac{v_2}{b} \\ \nu \frac{u_2}{a} & -\frac{v_2}{b} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Elastisite E ve Poisson oranı ν 'nün bilinen değerleri ve u_2 , v_2 deplasmanlarının hesaplanan değerleri yerlerine konulduğunda,

$$\sigma_x = 10 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_y = 0.93 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{x,y} = 0$$

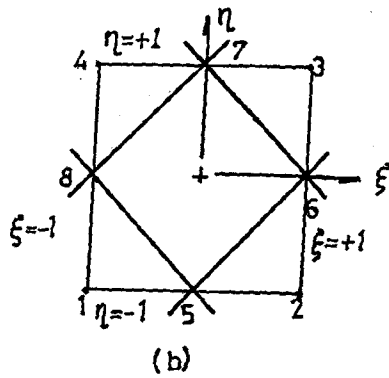
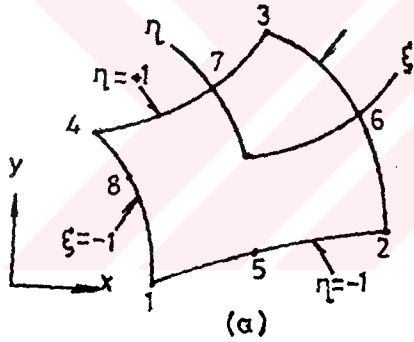
olarak bulunur (29).

4.4. Sekiz Dügüm Noktalı İzoparametrik Eleman

Bu elemanlar sekiz düğümünden oluşmaktadır ve düğüm noktaları köşelere ve kenar ortalarına yerleştirilmiştir. Şekil 4.10 da doğal koordinatlarda ve global koordinatlarda sekiz düğüm noktalı izoparametrik eleman gösterilmektedir (30)

4.4.1. Enterpolasyon fonksiyonları

N_i enterpolasyon fonksiyonu i düğümünde $N_i=1$ ve diğer bütün düğümlerde sıfırdır. Şekil 4.10a' da birim-kare (master) eleman gösterilmektedir. Önce, $N_1, N_3,$



Şekil 4.10 Sekiz düğüm noktalı izoparametrik eleman

(a) x, y koordinatlarında (b) ξ, η koordinatlarında

N_6, N_8 , tanımlanmaktadır. N_1 için, 1 düğümünde $N_1=1$ ve diğer düğümlerde sıfırdır. Böylece, $N_1, \xi = +1, \eta = +1$ ve $\xi+\eta = -1$ kenarları boyunca sıfıra eşit olur. Buna göre N_1 aşağıdaki formdadır (30).

$$N_1=c(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \quad (4.48)$$

1 düğümünde $N_1=1$ ve $\xi = \eta = -1$ dir. Böylece, $c = -1/4$ dir. Buna göre,

$$N_1= 1/4 (1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)$$

$$N_3= 1/4 (1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta)$$

$$N_6= 1/4 (1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta)$$

$$N_8= 1/4 (1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta)$$

Orta noktadaki N_2, N_4, N_5 ve N_7 ise şöyle tanımlanmaktadır. $N_2, \xi = +1, \eta = +1$ ve $\xi = -1$ kenarları boyunca sıfır olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla, N_2 aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned} N_2 &= c(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi) \\ &= c(1-\xi^2)(1-\eta) \end{aligned} \quad (4.49)$$

c sabiti 2 düğümünde $N_2=1$ veya $\xi=0, \eta=-1$ de $N_2=1$ şartından yukarıdaki denklem (4.49) dan bulunur. Böylece $c = 1/2$ ve

$$N_2 = (1/2)(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_4 = (1/2)(1-\xi)(1-\eta^2)$$

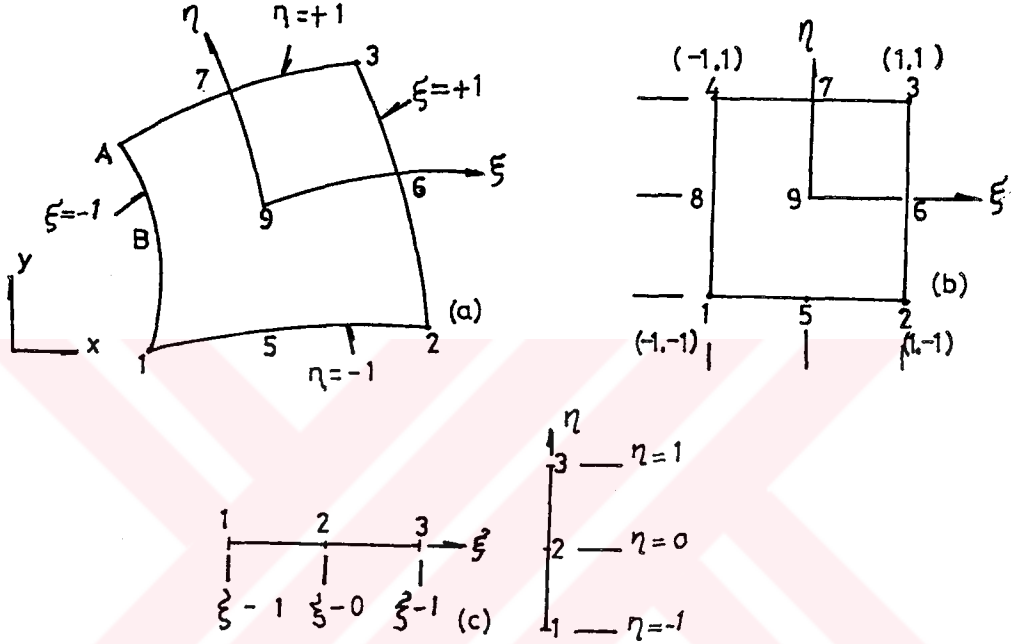
$$N_5 = (1/2)(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_7 = (1/2)(1-\xi^2)(1+\eta)$$

olarak bulunur (30,31).

4.5. Dokuz Düğüm Noktalı İzoparametrik Eleman

Dokuz düğümünden oluşan bu elemanlar, sonlu eleman metodu uygulamalarında çok etkili bulunmaktadır. Şekil 4.11'de bu eleman doğal koordinatlarda ve global koordinatlarda gösterilmektedir (30).



Şekil 4.11 Dokuz düğüm noktalı izoparametrik eleman (a) x,y koordinatlarında, (b) ξ, η koordinatlarında, (c) genel enterpolasyon fonksiyonlarının tanımı

4.5.1. Enterpolasyon fonksiyonları

Enterpolasyon fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır. Önce sadece ξ eksenine Şekil 4.11c' deki gibi gösterilir. Yerel düğüm numaraları 1, 2 ve 3 bu eksen boyunca yerleri sırasıyla $\xi = 1, 0$ ve 1 dir. Bu düğümlerde, genel enterpolasyon fonksiyonları L_1, L_2 ve L_3 aşağıdaki gibidir.

i düğümünde $L_i=1$ ve diğer iki düğümde sıfırdır. Önce L_1 bulunmaktadır. $\xi=0$ ve $\xi=+1$ de $L_1=0$ dir. Buna göre , $L_1=c\xi(1-\xi)$ formundadır. c sabiti, $\xi=-1$ de $L_1=1$ den $c=-1/2$ olarak bulunur. Böylece, $L_1=-\xi(1-\xi)/2$ dir. L_2 ve L_3 . benzer olarak bulunabilir. Buna göre

$$\left. \begin{aligned} L_1(\xi) &= (-1/2) \xi(1-\xi) = (1/2) (\xi^2-\xi) \\ L_2(\xi) &= (1+\xi)(1-\xi) = (1-\xi^2) \\ L_3(\xi) &= (1/2) \xi(1+\xi) = (1/2) (\xi^2+\xi) \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

Benzer olarak, η eksenini boyunca (şekil 4.11c) enterpolasyon fonksiyonları aşağıdaki gibidir

$$\left. \begin{aligned} L_1(\eta) &= (-1/2) \eta(1-\eta) = (1/2) (\eta^2-\eta) \\ L_2(\eta) &= (1+\eta)(1-\eta) = (1-\eta^2) \\ L_3(\eta) &= (1/2) \eta(1+\eta) = (1/2) (\eta^2+\eta) \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

Şekil 4.11b'deki birim-kare elemana tekrar bakıldığında, her düğüm noktası koordinatlarının $\xi=-1,0$ veya $+1$ ve $\eta=-1,0$ veya $+1$ olduğu görülmektedir. Böylece, aşağıdaki çarpım kuralı N_1, N_2, \dots, N_9 enterpolasyon fonksiyonlarını verir (30). Buna göre,

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1(\xi)L_1(\eta) = (1/4) (\xi^2-\xi) (\eta^2-\eta) \\ N_2 &= L_2(\xi)L_1(\eta) = (1/2) (1-\xi^2) (\eta^2-\eta) \\ N_3 &= L_3(\xi)L_1(\eta) = (1/4) (\xi^2+\xi) (\eta^2-\eta) \\ N_4 &= L_1(\xi)L_2(\eta) = (1/2) (\xi^2-\xi) (1-\eta^2) \\ N_5 &= L_2(\xi)L_2(\eta) = (1-\xi^2) (1-\eta^2) \\ N_6 &= L_3(\xi)L_2(\eta) = (1/2) (\xi^2+\xi) (1-\eta^2) \\ N_7 &= L_1(\xi)L_3(\eta) = (1/4) (\xi^2-\xi) (\eta^2+\eta) \\ N_8 &= L_2(\xi)L_3(\eta) = (1/2) (1-\xi^2) (\eta^2+\eta) \\ N_9 &= L_3(\xi)L_3(\eta) = (1/4) (\xi^2+\xi) (\eta^2+\eta) \end{aligned} \quad (4.52)$$

olarak bulunur (30,31) Burada L_i 'ler kolayca kurulmuş ve gerçekleştirilmiştir. Burada i düğümünde $N_i=1$ ve diğer düğümlerde sıfıra eşittir (30).

4.6. Plakların İzoparametrik Sonlu Elemanlar Metodu ile Lineer Analizi

Plak eğilmesine ait klasik problemler sonlu elemanlar metodu uygulamasında ilk konuları oluşturmuştur. Başlangıçta, daha çok, kayma şekil değiştirmelerinin ihmal edildiği "ince plak" teorisine dayalı problemlerin çözülmesine uğraşmıştır. Komşu elemanlar arasında eğim sürekliliğinin şartlarından dolayı deplasman tipi formülasyonda büyük zorluklarla karşılaşmıştır. Bu zorluğun giderilmesi için çok sayıda çalışma yapılmış ve bunun için çok karışık fonksiyonlar devreye sokulmuştur. Bu konuda yapılan bütün çalışmalar (35)'de verilmektedir.

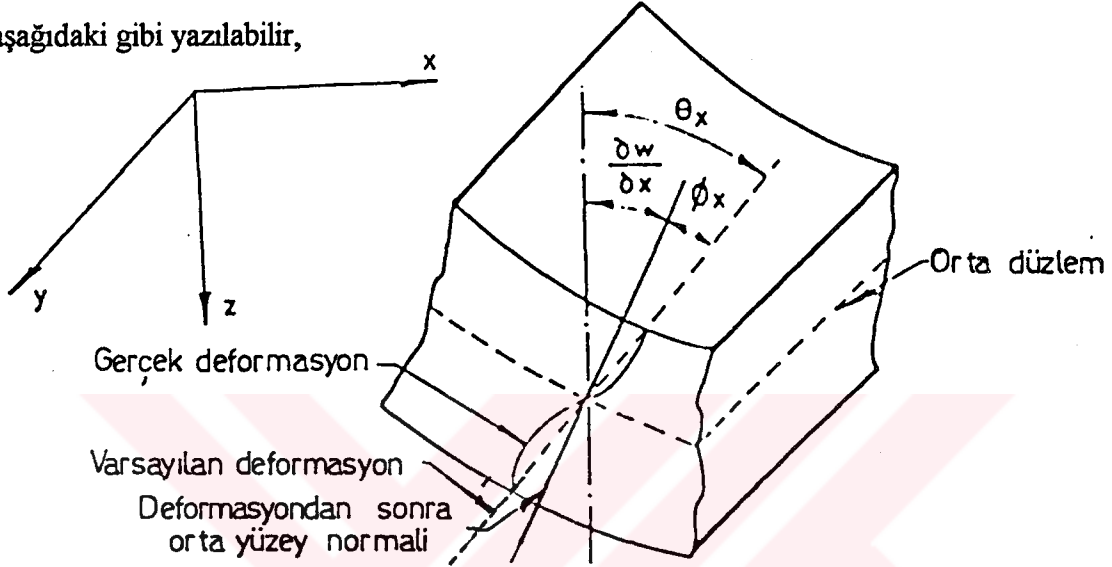
Kalın plaklarda olduğu gibi, kayma şekil değiştirmeleri önemli ise, problemin çözümü daha çok karmaşık olur ve eksiksiz bir metodun bulunması için son zamanlarda çok gayret sarfedilmiştir. Bu kısımda bir metod verilmektedir. Bu sadece tüm plak tiplerini kapsamamakta, aynı zamanda ince plakların çözümünü bu kadar zorlaştıran süreklilik şartlarını da sağlamaktadır. Yine de daha doğru netice almak için, 8 ve 9 düğümlü izoparametrik sonlu eleman kullanılmaktadır.

Kiriş elemanı plak elemanın tek boyutlu eşdeğeri olarak ele alınabilir.

Plak elemanın formülasyonunda Mindlin (32) tarafından uyarlanan varsayımlar kullanılmaktadır:

- Plakın sehim (w) küçüktür,
- Şekil değiştirmeden önce orta yüzey normalleri düzgün kalır. Fakat şekil değiştirmeden sonra orta yüzey normaleri düz kalmaz,
- Orta yüzey normaleri gerilmeleri yük ne olursa olsun ihmal edilebilirler.

Deplasman alanı, ancak w düşey deplasmanı ve Şekil 4.12’de gösterildiği gibi plağın orta yüzeyine orjinal olarak normal olan çizginin yönünü tanımlayan iki açının bağımsız değişimi (variation) ile belirlenebilir. Bundan dolayı θ_x ve θ_y değişkenleri ortalama dönme olarak ele alınabilir ve üniform olmayan kayma dağılımına (veya çarpılmaya) izin vermek için sonradan bir düzeltme yapılır. Şekil 4.12’de ϕ_x ve ϕ_y açıları x ve y yönleri ortalama kayma şekil değiştirmelerini belirtirler. Buna göre aşağıdaki gibi yazılabilir,



Şekil 4.12 Homojen plak parçasının kesit deformasyonu

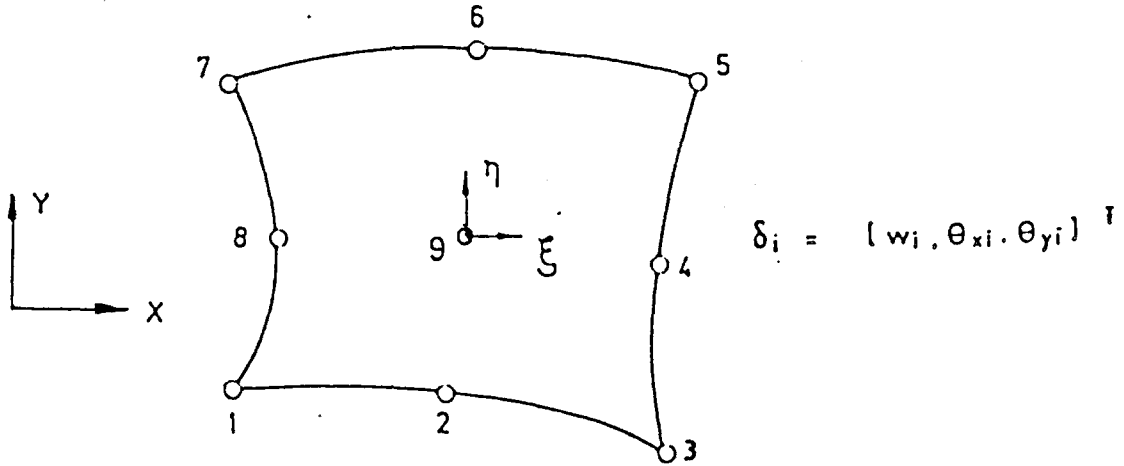
$$\delta = \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

ve

$$\Phi = \begin{bmatrix} -\phi_x \\ -\phi_y \end{bmatrix}$$

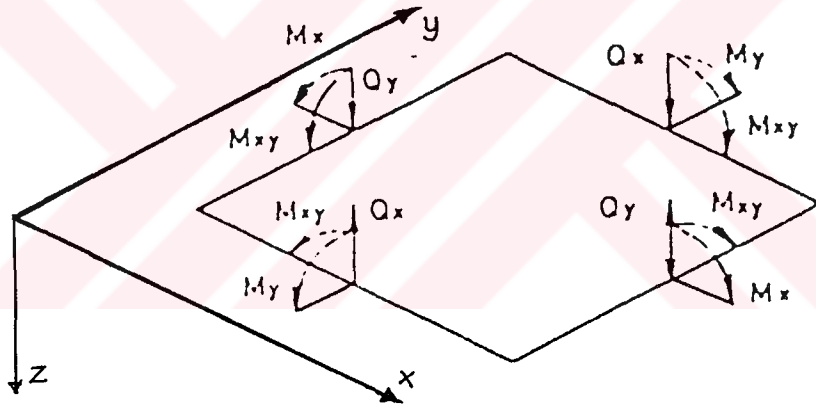
Şekil 4.13’de gösterildiği gibi, x - y düzlemi plağın orta düzlemi ile çakışacak şekilde alınır ve h plak kalınlığını belirtir. Dış kuvvetlerin plağın orta yüzeyine uygulandığı düşünülmekte ve iki boyutlu kuvvetlerle iş yapılmaktadır, yani birim alandaki yüzey kuvvetleri ele alınmaktadır. Burada, hem gerçek kuvveti (z yönünde-

ki) hemde momentleri (xz veya yz düzlemindeki) ifade etmek için genel anlamda “kuvvet” terimi kullanılmaktadır.



Şekil 4.13 Parabolik izoparametrik plak eğilme elemanı

Eğilme momentleri ve kayma kuvvetleri Şekil 4.14'te gösterilmekte ve aşağıdaki ifadelerle tanımlanmaktadır.



Şekil 4.14 Eğilme momentleri ve kayma kuvvetleri için genel semboller.

(+ yönleri ile)

$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int \sigma_x z dz \\ \int \sigma_y z dz \\ \int \tau_{xy} z dz \end{bmatrix}$$

ve

$$Q = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int \tau_{xz} dz \\ \int \tau_{yz} dz \end{bmatrix}$$

(4.54)

burada yukarıdaki integraller $z = -h/2$ den $z = +h/2$ ye kadar hesaplanırlar. Böylece plağın toplam potansiyel enerjisi aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A (M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy} + Q_x \phi_x + Q_y \phi_y) dA - \int_A p w dA \quad (4.55)$$

burada χ_x , χ_y , χ_{xy} eğrilikleri,

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

ve p birim alandaki yayılı yükü gösterir.

Böylece Π toplam potansiyel enerjisi kısaltılmış şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A ([M]^T \chi + [Q]^T \Phi) dA - \int_A p w dA \quad (4.57)$$

Gerilme-şekil değiştirme ilişkisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$M = D_f \chi \quad (4.58)$$

ve

$$Q = D_s \Phi$$

burada homojen izotrop malzeme için

$$D_f = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

ve

$$D_s = \frac{E h k}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

burada $k=5/6$ kayma düzeltme faktörü , E elastisite modülü ve ν Poisson oranıdır. Kalın plaklarda veya diğer durumlarda olduğu gibi, D_f ve D_s (32)' de ele alınan standart işlemler kullanılarak kolayca elde edilebilir.

Buna göre toplam potansiyel enerjisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A ([\chi]^T D_f \chi + [\Phi]^T D_s \Phi) dA - \int_A p w dA$$

Burada kalın plak teorisinin iki belirgin özelliği ele alınmaktadır. Belli bir noktada ince plak teorisinde sadece iki sınır şartının gerek deplasman gerekse çekme terimleri ile uygulandığı çok iyi bilinmektedir. Bu "Kirchhoff Kayması" gibi durumların girişine sebep olur ve görünüşte tutarsız sınır şartlarına yol açabilir. Kayma deformasyonlu kalın plakların analizinde üç bağımsız sınır şartı dikkate alınmaktadır, bu yüzden ince plak teorisine alışmış analizci bunları karışık bulabilir. Bu, özellikle kenardaki deplasmanlar öngörüldüğünde ortaya çıkar. w sehimi ince plak teorisinin belirlenmesinde, θ_s sınır normalinin yönündeki dönmeleri hemen tesbit eder, bunlar sadece $\partial w / \partial s$ ' ye eşittir. Burada s sınırlanmış kenar boyunca olan mesafedir. Kalın plak teorisinde bu dönme bağımsızdır ve θ_s bağımsız olarak sınırlandırılmalıdır. Daha açıkcası uygulanan gerçek fiziksel sınırlamaya bağlıdır, böyle bir sınırlama ile olan veya olmayan çözüm desteğinin yapısına bağlı olarak fiziksel olarak açıklanabilir. İnce plaklar için klasik teoriyle en uyumlu olması amacıyla hem basit mesnetli hem de ankastre plaklar için en azından bu dönmeyi belirlemek zorunludur.

İnce plak teorisinde "tekil yükler" teorik olarak uygulama noktasında sonsuz olarak büyük eğilme momentlerine sebep olurlar. Fakat böyle yükler altındaki deplasmanlar hala sonludurlar. Eğer kayma deformasyonu ele alınırsa , tekil kuvvetler burada da teorik olarak sonlu deplasmanlara sebep olurlar. Söz konusu nokta yüklere

nerede rastlanırsa bunların “makul” sonlu alanda dağılması gerektiği belirtilmelidir (32).

4.6.1. Şekil fonksiyonları ve kartezyen türevleri

Önceki kısımlarda, lineer ve parabolik izoparametrik plak eğilme elemanı (4,8 ve 9 düğümlü) tanımlanmıştır. Böylece geometrisi tanımlanan ifade

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \underline{N}_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad (n = 4,8 \text{ veya } 9) \quad (4.60)$$

burada i düğümlü birleştirilmiş enterpolasyon fonksiyonu

$$\underline{N}_i = N_i I_3 ,$$

I_3 , 3×3 'lük özdeşlik matrisidir ve N_i önceki kısımlarda tanımlanmış i düğümlü birleştirilmiş enterpolasyon fonksiyonudur. Düğüm deplasman terimleriyle tanımlanmış eleman deplasman değişimi ifadesi

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \underline{N}_i \delta_i , \quad (n=4,8 \text{ veya } 9) \quad (4.61)$$

burada $\delta_i = [w_i , \theta_{xi} , \theta_{yi}]^T$ i düğümü yer değiştirme vektörüdür.

Düzlem gerilme-şekil değiştirme elemanında olduğu gibi, geometri ve deplasman değişimini tanımlamak için aynı enterpolasyon fonksiyonları kullanılır, bundan dolayı terim “izoparametrik”dir. Önceki kısımlarda tanımlandığı gibi enterpolasyon fonksiyonları ve türevleri hesaplanır.

Alışılmış zincir kuralı kullanılarak tekrar şekil fonksiyonu türevleri hesaplanabilir.

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (4.62)$$

$\partial \xi / \partial x$ v.b. türevler $[J]^{-1}$ Jacobian matrisinin inversinden hesaplanabilir. Bu değerler için B şekil değiştirme matrisini hesaplamak gerekir. Eleman alanını ve eleman üzerindeki integralleri alabilmek için Jacobian matrisinin determinanı da gerekir. Eleman alanı aşağıdaki formülle verilir.

$$dx dy = \det J d\xi d\eta$$

Önceki kısımlarda yapıldığı gibi, enterpolasyon fonksiyonlarının kartezyen türevleri ve Jacobian matrisinin determinanı hesaplanır. Bu büyüklüklerin Gauss integrasyon noktasındaki değerleri ve koordinatları hesaplanır (32).

4.6.2. B şekil değiştirme matrisi

Plak eğilme elemanı için geliştirilmiş şekil değiştirme - yer değiştirme ilişkisi aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n B_i \delta_i \quad (4.63)$$

burada

$$[\varepsilon]^T = [[\chi]^T, [\Phi]^T],$$

ve

$$B_i = \begin{bmatrix} B_{\bar{e}} \\ B_{si} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \hline \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Burada $B_{\bar{e}}$, χ eğilme deformasyonlu ve B_{si} , Φ kayma deformasyonlu şekil değiştirme matrisidir.

4.6.3. D Elastik rijitlik matrisi

Bu matris denklem (4.58) de verilen genelleştirilmiş kuvvet deformasyon ilişkisindeki matrislere özdeştir. Kalın plaklar için bulunmuş olan D matrisi burada da kullanılmış ve aşağıda verilmiştir (32).

$$D = \begin{bmatrix} \frac{E h^3}{12 (1- \nu^2)} & \frac{\nu E h^3}{12 (1- \nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E h^3}{12 (1- \nu^2)} & \frac{E h^3}{12 (1- \nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1- \nu}{2} & \frac{E h^3}{12 (1- \nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E h}{2.4 (1+ \nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E h}{2.4 (1+ \nu)} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

4.6.4. σ Gerilme matrisi

Sonlu eleman yaklaşımında şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varepsilon = [B_1, \dots, B_8] \delta^e \quad (4.66)$$

eleman içinde herhangi bir noktadaki gerilme şu şekilde ifade edilebilir,

$$\sigma = D B \delta^e \quad (4.67)$$

Gereksiz çarpma işleminden kaçınmak için D ile B matrisinin çarpımında belirli bir ekonomi sağlanabilir. Bunu sağlayan ve denklem (4.67) nin yerine kullanılan bir ifade aşağıda verilmiştir (32).

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_f \\ \sigma_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_f B_f \\ D_s B_s \end{bmatrix} \delta^e \quad (4.68)$$

4.6.5. Eleman rijitlik matrisi

Şimdi K^e eleman rijitlik matrisini hesaplamak için gerekli bütün bilgiler elde edilmiştir.

i ve j düğüm noktalarına bağlanan tipik bir eleman rijitlik matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$K_{ij} = \iint [B_i]^T D B_j \, dx \, dy \quad (4.69)$$

Burada

$$D = \begin{bmatrix} D_f & 0 \\ 0 & D_s \end{bmatrix}$$

Programda belirli bir ekonomi sağlamak için rijitlik matrisi alt matrislere ayrılabilir. Buna göre eğilme alt rijitlik matrisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$K_{ijf} = \iint [B_{if}]^T D_f B_{jf} \, dx \, dy \quad (4.70)$$

Benzer şekilde, kayma alt rijitlik matrisi de aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$K_{ijs} = \iint [B_{is}]^T D_s B_{js} \, dx \, dy \quad (4.71)$$

bu şekilde ki rijitlik matrisi ile, daha çok gereksiz matris çarpımlarından sakınılabılır, buna göre rijitlik matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir (32).

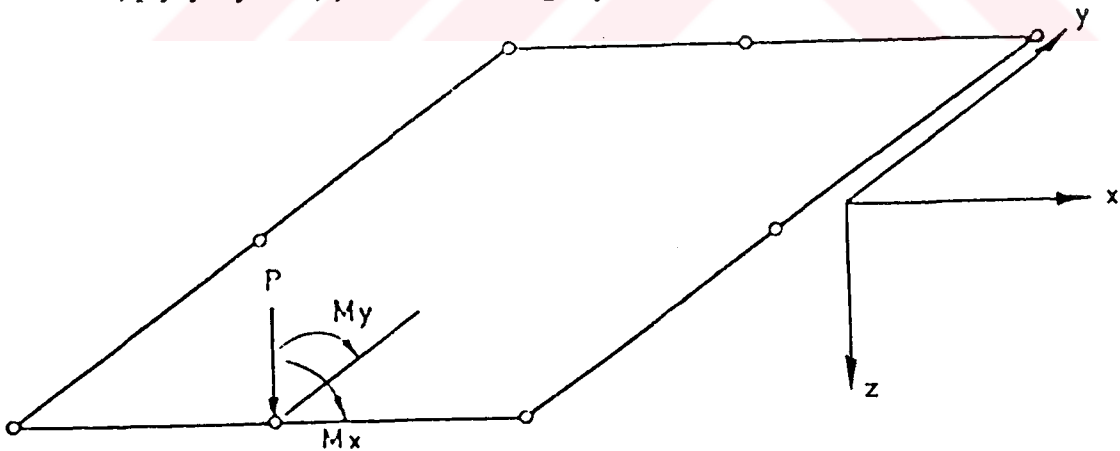
$$K_{ij} = K_{ijf} + K_{ijs} \quad (4.72)$$

4.6.6. Plak eğilme durumu için yükleme

Plak eğilmesi için iki yükleme formu dikkate alınmaktadır. Birinci olarak, müsaade edilen genelleştirilmiş kuvvetlere eşdeğer olarak düğüm noktalarında verilmiş olan yük elemanlarıdır. Bunlar, şekil 4.15'ten sırayla her düğümde z yönünde bir yük ve xz ve yz düzlemlerinde etkiyen momentlerdir. İkinci olarak, plak düzlemine dik olarak (z yönünde) etkiyen üniform yayılı yük uygulamasıdır. Bu üniform yayılı yükten oluşan düğüm kuvvetleri aşağıdaki denklemin kullanılması ile kolayca bulunabilir.

$$F_i = \begin{bmatrix} P \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} = \int_{A_e} N_i \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dA \quad (4.73)$$

Burada, p yayılı yükün, şiddetidir ve integrasyon eleman alanı üzerinde alınır (32).



Şekil 4.15 Bir plak eğilme elemanına ait genelleştirilmiş düğüm kuvvetleri

5. YAPI MEKANİĞİNDE NONLİNEERLİKLER

Bu bölüme kadar plakların sadece lineer elastik teorisi ele alınmıştı. Burada nonlineer yapı mekaniği konusunda bazı problemler ele alınarak bu teorinin nasıl kullanıldığı ve kapsamının ne olduğu gösterilmektedir.

Sistemlerin nonlineer olması iki sebepten ileri gelir. Birinci sebep, malzemenin lineer elastik olmaması dolayısıyla gerilme-şekil değiştirme bağıntılarının nonlineer olmasıdır. İkinci sebep, dış etkilerin sistemde meydana getirdiği geometri değişimlerinin büyük olması halinde denge şartlarının ve geometrik uygunluk şartlarının nonlineer olmasıdır. Geometri değişiminin, geometrik uygunluk şartları üzerindeki etkisinin göz önüne alınmayıp, yalnız denge denklemlerindeki etkisinin alındığı teoriye “ikinci mertebeye teorisi” denir (33).

Ayrıca geometrik ve malzeme nonlineerliğinin birlikte bulunduğu nonlineer sistemler de vardır (33,34). Buna göre, nonlineer yapı analizi aşağıda verildiği gibi üç tipten oluşur (34).

a) Geometrik nonlineerlik : Burada yapı hala elastik olmasına rağmen, büyük sehim etkileri yapı geometrisinin değişmesine sebep olur, bu yüzden lineer elastik teorisi işlemez duruma gelir. Bu sınıftaki tipik problemler, tıpkı Euler’in çubukların burkulması ve aynı zamanda plakların büyük sehim analizinde olduğu gibi, yapıların elastik kararsızlığıdır. Ayrıca plakların geometrisi değişir ve bundan dolayı membran etkileri önem kazanır.

Genel olarak, geometrik nonlineerlik için, bir elemana uygulanan aksenal basınç kuvvetinin elemanın eğilme rijitliğini azalttığı, fakat, aksenal çekme kuvvetinin eğilme rijitliğini arttırdığı söylenebilir.

b) Malzeme nonlineerliği: Burada malzeme plastik şekil değiştirmeye uğrar.

c) Birleşik geometrik ve malzeme nonlineerliği: Bunun tipik durumu, başlangıç kusurlarının önemli olduğu Rankine-Gordon tarafından analiz edilenler gibi, çubukların elastik olmayan kararsızlığıdır. Elastik kararsızlık nedeni ile teorik olarak başarısızlığa uğrayacak bir çok yapı vardır. Fakat, başlangıç kusurlarından dolayı, elastik teoride daha düşük yük altında başarısız olurlar. Böyle yapıların elastik göçmeye maruz kaldıkları söylenir.(34).

5.1. Birleşik Geometrik ve Malzeme Nonlineerliği

Kararsızlık içeren problemlere rijitlik analizini uygulama zorluğu, yapı elemanı üzerindeki aksenal basınç yükünün elemanın eğilme rijitliğini azaltma eğiliminde olması ve aksenal çekme yükünün ise bunun tersi olmasıdır. Nitekim, bir yapı elemanı aksenal basınç yüküne maruz ise, eğilme rijitliği çok azaldığı zaman, burkulma ortaya çıkar. Böylece, yük artışının sebep olduğu küçük bir eğilme, yapının eğilme direncinden daha büyük olur. Böyle bir analiz, yapının bazı elemanlarında gerilmelerinin orantılılık sınırlarını aştığı malzeme nonlineerlik etkilerinden dolayı oldukça karmaşıktır.

Bu davranış aksenal yüklü çubukların kararsızlığının incelenmesi ile açıkça gözlemlenebilir. Bu tür yapıların kararsızlığını analiz etmeye ait matris metodunda, rijitlik matrisi $[K]$ 'ya, başlangıç gerilme-rijitlik matrisi $[K_G]$ ' yi ekliyerek bu etkileri de almak gereklidir. Bu sonuncu matris, yapıdaki iç kuvvetlerden dolayı rijitlik değişimini içine alır ve lineer yük-yer değişirme bağıntısını daima geçersiz kılar.

Bu nonlineer terimler, $[K]$ üzerindeki malzeme nonlineerlik etkileri ile birlikte ortaya çıkan rijitlik matrisini aşağıdaki şekilde değişikliğe uğratar,

$$[k] = [k_0] + [k_G]$$

burada $[k_o]$ rijitlik matrisi (eğer eleman malzeme özellikleri sabit ise, o zaman bu matris bilinen rijitlik matrisidir.), $[k_G]$ ise elemandaki iç kuvvetlere dayanan geometrik rijitlik matrisidir. Bu matris aynı zamanda başlangıç gerilme-rijitlik matrisi olarak da bilinir.

Eşdeğer eleman rijitlik-yer değiştirme bağıntısı,

$$\{P\} = ([k_o] + [k_G])\{u_i\} \quad (5.1)$$

Benzer olarak, global koordinatlar halinde toplam rijitlik matrisi aşağıdaki gibi verilir,

$$[K^o] = [K_o^o] + [K_G^o]$$

yük-yer değiştirme ilişkisi de,

$$\{q^o\} = ([K_o^o] + [K_G^o])\{u_i\} \quad (5.2)$$

ile ifade edilir. Burada,

$$[K_o^o] = \sum [k_o^o]$$

global koordinatlardaki sistem rijitlik matrisi ve

$$[K_G^o] = \sum [k_G^o]$$

global koordinatlardaki sistem geometrik rijitlik matrisidir.

Böylece benimsenen sistem artımlı sistemdir. Burada yük küçük adımlar halinde arttırılmaktadır. Geometrik ve malzeme nonlineerlik etkileri her adım için ele alınmakta ve her adımın sonunda tüm etkiyi sağlamak için birlikte toplanmaktadır.

Turner ve ark. artımlı adım metodunun ilk uygulayıcısıdır. Bu konuda daha fazla çalışma Turner ve ark., Martin ve Argyris ve ark. tarafından yürütülmüştür (34).

Tablo 5.1' de Turner ve ark.'nın artımlı adım metodu özetlenmektedir (34). Adım 1 de, yükten önce başlangıç gerilmeleri sıfır ise, o zaman $[K_G]$ sıfırdır, Böylece bir $\{\delta q_1^0\}$ artımlı yükün uygulanmasında, bu yükten dolayı $\{\delta u_1^0\}$ deplasmanları hesaplanırlar, ve $\{u_1^0\}$ 'a eşit olurlar.

Tablo 5.1 Nonlineer analiz için artımlı adım metodu

Adım	$\{\delta q^0\}$	Rijitlik matrisi	$\{\delta u^0\}$	Deplasmanlar
1	$\{\delta q_1^0\}$	$[K_o^0(0)] + [K_G^0(0)]$	$\{\delta u_1^0\}$	$\{u_1^0\} = \{\delta u_1^0\}$
2	$\{\delta q_2^0\}$	$[K_o^0(u_1^0)] + [K_G^0(u_1^0)]$	$\{\delta u_2^0\}$	$\{u_2^0\} = \{u_1^0\} + \{\delta u_2^0\}$
3	$\{\delta q_3^0\}$	$[K_o^0(u_2^0)] + [K_G^0(u_2^0)]$	$\{\delta u_3^0\}$	$\{u_3^0\} = \{u_2^0\} + \{\delta u_3^0\}$
.
.
n	$\{\delta q_n^0\}$	$[K_o^0(u_{n-1}^0)] + [K_G^0(u_{n-1}^0)]$	$\{\delta u_n^0\}$	$\{u_n^0\} = \{u_{n-1}^0\} + \{\delta u_n^0\}$
Σ	$\{q_n^0\}$		$\{u_n^0\}$	

$\{u_1^0\}$ ' in geometrik nonlineer etkileri o zaman $[K_G^0]$ için tanımlanır ve herhangi bir malzeme nonlineerlik etkileri $[K_o^0]$ da hesaplanır. Bu iki matris, yeni rijitlik matrisini vermek için adım 2'de birlikte toplanırlar. Bu durumda yapı, $\{\delta q_2^0\}$ artımlı yüklerin başka bir vektörüne tabidir. $\{\delta u_2^0\}$ deplasmanlarına karşılık olan vektörü hesaplanır ve $\{u_2^0\}$ 'ı vermek için $\{u_1^0\}$ ' a eklenir.

$\{u_2^0\}$ 'in geometrik nonlineer etkileri $[K_G^0]$ için tanımlanır ve herhangi bir malzeme nonlineerliği $[K_o^0]$ ' da hesaplanır. Adım 3 de yeni rijitlik matrisini vermesi için bu iki matris birlikte toplanırlar ve yapıda $\{\delta q_3^0\}$ artımlı yüklerin vektörüne tabidir. Bu yük vektöründen dolayı $\{\delta u_3^0\}$ deplasman vektörü hesaplanır ve bu aşamada toplam yük sebebiyle, başka bir deyişle $\{\delta q_1^0\} + \{\delta q_2^0\} + \{\delta q_3^0\}$ sebebiyle oluşan $\{u_3^0\}$ sonuç deplasman vektörünü elde etmek için $\{u_2^0\}$ 'ye eklenir.

İstenilen sonuca ulaşıncaya kadar yada yapı göçünceye kadar bu işlem sürdürülür.

Tablo 5.1' de aşağıdaki notasyon kullanılmaktadır:

$[K_o^o(u_i^o)]$ = Hemen adım i 'den sonra global koordinatlardaki yapı rijitlik matrisi,

$[K_G^o(u_i^o)]$ = Hemen adım i 'den sonra global koordinatlardaki sistem geometrik rijitlik matrisi,

$\{u_n^o\} = \sum_{i=1}^n \{\delta u^o_i\}$ = Yük çevrimi sonunda global koordinatlardaki düğüm deplasmanlar vektörü,

$\{q_n^o\} = \sum_{i=1}^n \{\delta q^o_i\}$ = Yük çevrimi sonunda global koordinatlardaki düğüm kuvvetleri vektörü (34).

5.2. Malzeme Nonlineerliği

Katı cisimler mekaniğinde, ele alınan tüm problemlerde, her yerde etkin olan diferansiyel denklemler lineerdir. Şekil değiştirme-yer değiştirme ve gerilme-şekil değiştirme lineer bağıntıları aşağıda verilmiştir. Buna göre,

a) Şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntısı

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta^o\}$$

b) Gerilme-şekil değiştirme bağıntısı,

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_o\}) + \{\sigma_o\}$$

olarak ifade edilmiştir. Burada ϵ_0 ve σ_0 başlangıç şekil değiştirme ve başlangıç gerilme değerleridir.

Fakat, şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntısı nonlinear ise, o zaman formülasyonun daha esaslı olarak yeniden düzenlenmesi gerekir.

Önemli olan bir noktayı gözardı etmemek lazımdır. Lineer problemlerde çözüm daima tek olmasına rağmen, çoğu nonlinear durumlarda böyle olmaz. Böylece, bir çözüm bulunsa bile bunun aranılan çözüm olması gerekmez. Problemin yapısındaki durum sebebiyle, bazen küçük bir adımla, anlamlı cevaplar elde etmek için artımlı (incremental) yöntemler esastır.

Bazen, kullanılan ardışık (iterative) yöntemler, Newton-Raphson yöntemi, vb. gibi, sadece “sayısal analiz” olarak yorumlanır. Ama yine de, problemin yapısındaki fiziksel durum sebebiyle, başarılı yöntemler her zaman matematikçiden ziyade mühendis (veya fizikçi) tarafından bulunmaktadır (35).

5.2.1. Genel fiziksel yaklaşım

Deplasman yöntemiyle formüle edilen küçük şekil değiştirme yapan lineer elastik problemlerde, birleştirilmiş (stiffness) denklemleri çözerek kesin sonuca her zaman varılabilir.

$$[K]\{\delta\} - \{R\} = 0 \quad (5.3)$$

burada $\{R\}$ vektörü, başlangıç şekil değiştirme ve gerilme vs. gibi dış yüklerden kaynaklanan bütün kuvvetlerin listesini vermektedir.

Yukarıdaki denklemin geçerliliği aşağıdaki lineer elastik temel bağıntıya,

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (5.4)$$

lineer şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntısına, yer değiştirmelerin sürekliliğine ve yeterli denge tahminine ilave olarak kabul edilmiştir.

İçinde farklı, nonlinear etkiler olması mümkün, esas bağıntının uygulandığı problemlerin küçük deplasman analizinde, yer değiştirme sürekliliği ve denge daima sağlanmalıdır. Böylece, yerine konulması gereken tek bağıntı denklem (5.4)dür.

Genelde bu yeni bağıntı, şöyle bir bağıntı ile verilmektedir,

$$F(\{\sigma\}, \{\varepsilon\}) = 0 \quad (5.5)$$

Denklem (5.4)' daki bir veya birden çok [D] parametrisini, $\{\varepsilon_0\}$ veya $\{\sigma_0\}$ ' ı ayarlayarak, bu ve denklem (5.5) aynı gerilme ve şekil değiştirme değerlerini vermek için kurulduğu denklem (5.3) oluşturulabilirse , o zaman bir çözüm bulunur.

Açıkça ardışık bir yöntem uygundur.

Yukarıda bahsedilen üç büyüklükten düzenlenecek ardışık işlem şuna bağlıdır:

- a) Eşdeğer lineer elastik problemlerde kullanılan çözüm metoduna,
- b) Gerilme-şekil değiştirme bağıntısını tanımlayan fiziksel kanunun yapısına,

Eğer ardışıklık (iteration), [D] matrisinin düzeltilmesi ile sürdürülürse işlem “değişken rijitlik yöntemi “ olarak bilinir.

Eğer $\{\varepsilon_0\}$ veya $\{\sigma_0\}$ ayarlanırsa, “başlangıç şekil değiştirme” veya “başlangıç gerilme” denilen yöntemler elde edilir.

Çoğu gerçek durumlarda, denklem (5.5) tipinin bağıntıları toplam şekil değiştirme ve gerilme terimleriyle yazılamazlar, fakat bunların $\Delta\{\varepsilon\}$ ve $\Delta\{\sigma\}$ artımları için düzenlenebilirler. Böyle durumlarda aynı işlemler bir yük artımı için uygulanabilirler. Bu “artımlı işlemler” önceki metotların herhangi biri ile birleştirilebilir.

Daha öncede görüldüğü gibi $[D]$, $\{\varepsilon_o\}$ ve $\{\sigma_o\}$ 'ın belirlenmesi, herhangi bir lineer elastik analiz programına esas veri formları girilerek yapılır. Bu nedenle bu programlar herhangi bir nonlineer programın esas çekirdeğini oluştururlar. Gerçekten bu durumda çözüm alanının elemanlara ayrılması (discretization) temelinde böyle programların çıkartılması önemsiz ise de, çözümü formüle etmede aynı verileri kullanarak diğer herhangi bir elemanlara ayırma (sonlu farklar metodunda olduğu gibi) işlemi ile birleştirmede kullanılabilir (35).

5.2.2. Değişken rijitlik metodları

Özel bir malzemenin davranışına ait denklem (5.5)'deki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı denklem (5.4) deki gibi yazılabilir. Fakat ulaşılmış şekil değiştirme seviye fonksiyonu şimdi elastiklik matrisi, yani ,

$$[D] = [D(\{\varepsilon\})] = [D(\{\delta\})] \quad (5.6)$$

olursa, o zaman “değişken rijitlik” işlemi uygulanabilir. Elastiklik matrisinin kurulmasının rijitlik matrisini kesin etkilemesinden dolayı, geriye sadece problemin çözümü kalır,

$$\{\psi\} = [K(\{\delta\})]\{\delta\} - \{R\} = 0 \quad (5.7)$$

bu ardışık olarak farklı yollardan yapılabilir.

Basit bir ardışık işlemde başlangıçta $[K(\{\delta\}_0)] = [K_0]$ değeri için $\{\delta\}_0 = 0$ alınarak $\{\delta\}_1 = [K_0]^{-1} \{R\}$ çözülür ve

$$\{\delta\}_n = [K]^{-1}_{n-1} \{R\} \quad (5.8)$$

hiçbir deplasman değişimi ortaya çıkmayınca kadar işlemler tekrarlanır ve bunlardan biri aranılan çözümdür.

Eğer esas bağıntı, denklem (5.6) tipinde bir bağıntının sadece gerilme ve şekil değiştirme artımları için yazılanı gibiyse, o zaman işlemin önceden varılan şartlardan başlayarak küçük yük artımlarına uygulanması gerekir.

Her halde standart lineer elastiklik programı, varılan $[D]$ formu simetrik olması şartı ile, kullanılabilir. Bu genelde simetri özelliklerini kullanan böyle programlarda esastır.

Değişken elastiklik yaklaşımlarının önemli bir sakıncası şudur ki, her adımda rijitlik matrislerinin yeniden formüle edilmesi ve denklemlerin yani sonucunun elde edilmesi gerekir. Eğer elastik programda direkt çözüm metotları kullanılırsa, bu aşırı derecede ekonomik değildir. Bu yüzden, genelde bundan sonraki kısımlarda tanımlanan alternatif işlemler tercih edilmektedir (35).

5.2.3. Başlangıç gerilme metotları

Eğer temel bağıntı verilen bir şekil değiştirme için gerilme seviyesinin belirlenmesi gibi ise, bu durumda, denklem (5.5) şu biçimi alır.

$$\{\sigma\} = f(\{\varepsilon\}) \quad (5.9)$$

Buna göre denklem (5.4)'deki elastik temel bağıntıda, $\{\sigma_o\}$ 'ın değeri ayarlanarak, yukarıdaki ile uyuşması için kurulabilir. $\{\sigma_o\}$, $\{R\}$ kuvvetlerini etkilediğinden, geriye ardışık işlemlerin çözümü kalır,

$$\{\psi\} = [K_o]\{\delta\} - R(\{\delta\}) = 0 \quad (5.10)$$

burada aşağıdaki gibi işlem yapılabilir. Önce aşağıdaki denklem çözülür,

$$\{\delta_o\} = [K_o]^{-1} \{R_o\}$$

burada $\{R_o\}$ uygulanan gerçek yüklere uygundur. Ulaşılan şekil değiştirmelere karşı gelen gerçek gerilmeleri elastik çözümle uyuşan hale getirmek için istenilen $\{\sigma_o\}$, seviyesi belirlenir. Sonra yeni bir "başlangıç gerilmesi" alınarak ve aşağıdaki denklem kullanılarak,

$$\{F\}^e_{\sigma_o} = \int [B]^T \{\sigma_o\} dv$$

$\{R_1\}$ bulunur. Burada $\{F\}^e_{\sigma_o}$ başlangıçtaki gerilmelere karşılık gelen düğüm kuvvetlerini gösterir. Buna göre,

$$\{\delta_1\} = [K_o]^{-1} \{R_1\}$$

v.b. şekilde

$$\{\delta_n\} = [K_o]^{-1} \{R_n\} \quad (5.11)$$

denklemlerinden başka hiçbir değişim ortaya çıkmayınca kadar işlemler tekrarlanır.

Uygun bir alternatif çözüm ise, istenilen başlangıç gerilme değişimlerine karşılık, sadece $\{R\}$ değişimlerini belirlemektir. Bunu izleyerek, $\{\delta_0\}$ önceki gibi bulunur, fakat,

$$\Delta\{\delta_1\} = [K_0]^{-1}\Delta\{R_1\}, \text{ v.s.}$$

ve $\Delta\{\delta\}_n$ yeterince sifıra yaklaşıncaya kadar ardışık işlemler devam eder.

Sayısal olarak sonuncu alternatif arzu edilir, gerçekten bunun farklı fiziksel anlamı vardır. Her aşamada yapının tüm noktalarında, uygun şekil değiştirmelere karşılık gelen gerçek gerilme seviyesi ile, elastik çözüme uygun düşen gerilme seviyesi arasındaki fark belirlenir. Bu gerilme farkı dengeyi sağlamak için yeniden dağıtılır ve bu işlem “gerilme transferi” olarak adlandırılır.

Ardışık işlemlerin (iterasyonun) n'inci aşamasında hesaplanan $\Delta\{R\}_n$ kuvvet büyüklüğü fiziksel olarak yapı üzerinde kalan dengelenmemiş (unbalanced) artık kuvvet olarak yorumlanmaktadır. Bu aktif kuvvetlere karşı tayin edilebilen hatanın son derece uygun ölçümüdür.

İterasyonun her aşamasında aynı rijitlik matrisi kullanılmaktadır. Eğer bunun için bant matris kullanılırsa, birinci çözüm için ihtiyaç duyulan küçük zaman süresinde her basamak tamamlanabilir.

$[K_0]$ matrisini belirlemek için elastik sabitlerin hangi değerinin kullanılması gerektiği aşamasında soru sorulabilir. Eğer malzeme yeri belli olan lineerlikten oluşan hareketleri ile lineer elastik şekilde davranırsa o zaman açıkça orjinal elastik sabitlerin seçimi yerinde olur. Fakat, nonlineerlik tüm gerilme seviyelerinde varsa, yakınsaklığı (convergence) hızlandırmak için ilk iterasyondan sonra elastik sabitlerini ayarlamak yerinde olur (35).

5.2.4. Başlangıç şekil değiştirme metodları

Bazı problemlerde, özellikle sünmede, gerilme seviyesi açıkça gerilme terimleriyle tanımlanamaz. Diğer taraftan şekil değiştirmeleri (veya şekil değiştirme artımlarını) gerilme terimleriyle belirlemek mümkün olur. Buna göre, sembolik olarak

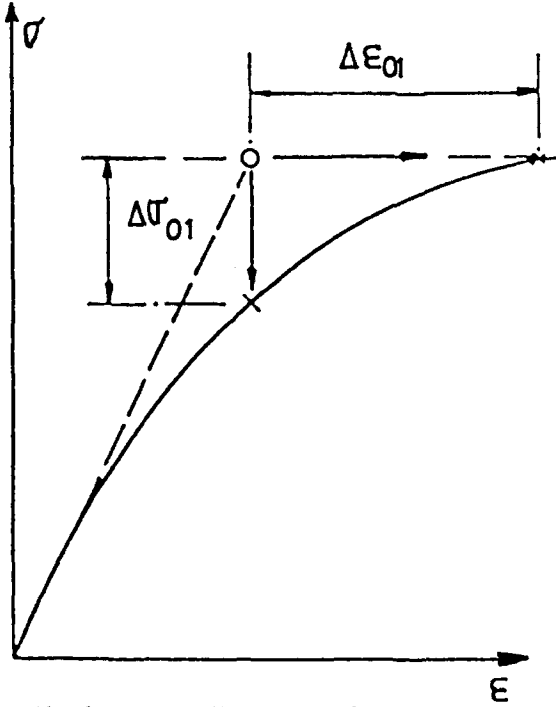
$$\{\varepsilon\} = f(\{\sigma_0\}) \quad (5.12)$$

Yazılabilir. Şimdi, denklem (5.12) ile elastik bağıntı denklemi (5.4) arasındaki eşitlik, $\{\varepsilon_0\}$ ayarlanarak bulunabilir. Yine denklem (5.10) ardışık olarak çözümlenir. Fakat her aşamada elde edilen elastik şekil değiştirmeler temel bağıntı (5.12)'ye uygun olanla ve artık kuvvetler olan $\Delta\{R\}_n$ 'i değerlendirmede kullanılan farkla karşılaştırılırlar. Oysa işlem daha önce tanımlananla özdeştir ve tüm aşamalarda korunmuş olan sabit rijitlik matrisi aynı değerlere sahiptir.

Bazı sünme bağıntıları ve ek şekil değiştirmeler elastik şekil değiştirmelerden kesin olarak ayrılmıştır. Bu yüzden iterasyonun her aşamasında düzeltici başlangıç şekil değiştirme direkt olarak verilmektedir. Başlangıç gerilmesi ve başlangıç şekil değiştirmesi yaklaşımları arasındaki fark belki de diyagram halinde daha iyi gösterilir. Şekil 5.1'de birinci çözümle varılan gerilme-şekil değiştirme seviyesi 1 noktası olarak gösterilmiştir. Başlangıç gerilme işleminde, gerilme seviyesini düzeltmek için, bir $\Delta\{\sigma_0\}_1$ başlangıç gerilmesi kullanarak gerilmeler aşağı getirilirler. Oysa başlangıç şekil değiştirme işlemiyle şekil değiştirmeler bir $\Delta\{\varepsilon_0\}_1$ düzeltmesi ile ayarlanmaktadır. Bu ikinci işlemin tersi olduğunda, yani gerilmenin artması ile şekil değişmeler arttığında, bu işlem açıkça avantajlıdır.

5.2.5. Hızlandırma işlemi

Hem başlangıç gerilme hemde başlangıç şekil değiştirme yaklaşımlarında, $\{\sigma_0\}$ veya $\{\varepsilon_0\}$ 'ın ilk yerdeki değerleri doğru tahmin edilebilirse, kesin çözüm bulunabilir.



Şekil 5.1 Başlangıç gerilme ve başlangıç şekil değiştirme işlemi

Taslağı çizilen sistematik ayarlama işlemleri her zaman hızlı bir şekilde yakınsak (convergent) olmayabilir. Hesaplama işlemi esnasında yakınsaklığı inceleyerek, her basamakta fazladan düzeltme yaparak yakınsaklığı hızlandırmak mümkündür. Fakat programı yapan mühendis hünerini burada sonuna kadar kullanabilir. Hiçbir yöntem kurallara aykırı değildir. Yeter ki, tüm ihtiyaçları karşılamak için kesin çözüm bulunsun (35).

5.2.6. Matematiksel yaklaşım

Bu aşamada, tüm problemi matematiksel olarak yeniden incelemek yerinde olur. x tek değişkenli,

$$\psi(x) = 0$$

şeklindeki, genel nonlinear denklemlerin çözümünde Newton metodunun kullanıldığı bilinmektedir. Eğer x_n 'nin deneme değeri, $\psi(x) \neq 0$ olmak şartıyla, doğru bir değere yeterince yakın olarak bulunursa, düzeltilmiş deneme çözüm,

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_{n+1}$$

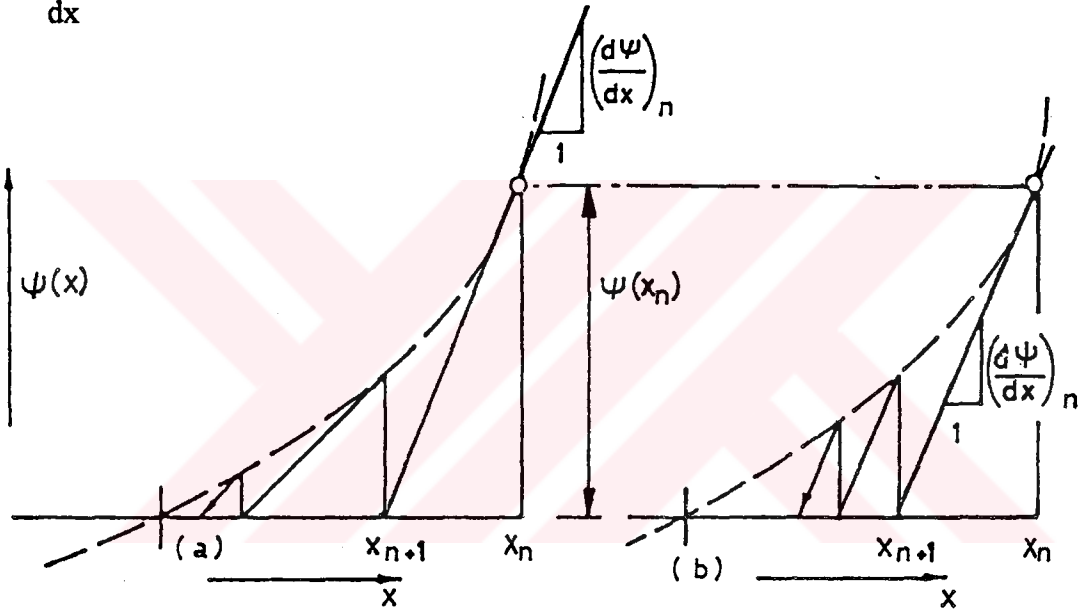
ile

$$\Delta x_{n+1} = -\psi(x_n) / \frac{d}{dx} (\psi)_n$$

bulunabilir.

Newton yönteminin yakınsaklığı Şekil 5.2a' da grafik olarak gösterilmiştir. Alternatif bir yaklaşım ise, tüm aşamalarda

$$\frac{d}{dx} (\psi)_0$$



Şekil 5.2. Newton-Raphson metodunun grafiği a) Newton-Raphson metodu b) değiştirilmiş Newton-Raphson metodu (sabit eğimli)

sabit değerini kullanarak, aşağıdaki gibi bulunur.

$$\Delta x_{n+1} = -\psi(x_n) / \frac{d}{dx} (\psi)_0$$

Şekil 5.2b'de gösterildiği gibi böyle bir işlemin yakınsaklığı daha yavaş olur. Aynı fikirler çok sayıda değişkenlerin nonlineer denklemlerine kadar genişletilebilir. Buradaki metod, Newton-Raphson metodu olarak bilinmektedir ve yukarıda bir defa daha

gösterildiği gibi bu değişebilir. Kısım 5.2.1' in genel düşüncesinde kullanılan değişken veya sabit rijitlik işlemlerinin buki sınıfa girdiği görülmektedir.

Burada daha ileri gitmek için sonlu eleman denklemlerinin temel formülasyonuna dönmek uygun olur. Böylece, eğer $\{\psi\}$ iç ve dış kuvvetler toplamının vektörünü gösterirse, aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$d\{\delta\}^T \{\psi\} = \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV - d\{\delta\}^T \{R\} = 0 \quad (5.13)$$

Burada $\{R\}$ yüklenmiş yüklerden dolayı bütün dış kuvvetleri gösterir. Eğer şekil değiştirme değişimi için

$$d\{\epsilon\} = [B] d\{\delta\} \quad (5.14)$$

yazılabilirse, sonra $d\{\delta\}^T$ nin çıkarılmasıyla, genel olarak geçerli denklem elde edilir.

$$\{\psi(\{\delta\})\} = \int_V [B]^T \{\sigma\} dV - \{R\} = 0 \quad (5.15)$$

burada $\{\sigma\}$ ulaşılan şekil değiştirme seviyesine bağlı olan gerçek gerilmelerdir.

Eğer şekil değiştirmeler küçükse, $[B]$ koordinatlara bağlı şekil değiştirme matrisidir. Eğer $\{\sigma\}$ 'nin şekil değiştirmelere ve dolayısıyla yer değiştirmelere bağımlılığı belirlenebilirse, nonlinear denklem çözülebilir. Bunun için

$$\psi(\{\delta\}) = 0$$

olmalıdır. Bu tüm problemi özetler.

Şimdi $d\{\delta\}$ değişmesinden dolayı $\{\psi\}$ 'nin değişimleri dikkate alınrsa,

$$d\{\psi\} = \int_V [B]^T d\{\sigma\} dV \quad (5.16)$$

olur. Burada $\{R\}$, $\{\delta\}$ 'den bağımsızdır ve $d\{R\}=0$ dır.

Şimdi,

$$d\{\sigma\} = [D_T(\{\epsilon\})] d\{\epsilon\} \quad (5.17)$$

yazılırsa, burada D_T artımlı (veya tanjant) elastiklik matrisidir. Sonra denklem (5.14) ile birlikte denklem (5.17)'yi kullanarak denklem (5.16) yeniden yazılabilir,

$$d\{\psi\} = \left(\int_V [B]^T [D_T(\{\epsilon\})] [B] dV \right) d\{\delta\} = [K_T] d\{\delta\} \quad (5.18)$$

Şimdi, Newton-Raphson işlemi, sıfır olmayan bir $\{\psi\}_n$ deneme değerini veren $\{\delta\}_n$ deneme çözümüne uygulanırsa, o zaman, bir deneme işlemine uygulanan düzeltme aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\Delta\{\delta\}_{n+1} = -[K_T]^{-1}_n \{\psi\}_n \quad (5.19)$$

Burada $[K_T]_n$ yer değiştirmeler için geliştirilen tanjant matrisi ve $\{\delta\}_n$ ise deneme için verilen şekil değiştirmedir.

Böylece, nonlinear problemler için kullanılan değişken rijitlik yaklaşımı başka bir metod gibi davranır. Ancak Newton-Raphson işlemi burada yol gösterir. Bu kullanılan sekant rijitliği kısım 5.2.2'de tanımlanan tanjant rijitliğinden oldukça farklıdır. Gerçekten, pratikte, bu yol genellikle fizik kanunlarının formülasyonuna daha çok uygundur.

Fakat, eğer tanjantlı matris başlangıç elastik rijitliğe uygun bir sabit ile temsil edilirse, "değiştirilmiş Newton-Raphson metodu" (Şekil 5.2b) daha önce tanımlanan başlangıç gerilme veya başlangıç şekil değiştirme metodu ile özdeş olur.

Böylece, basit bir fiziksel akıl yürütme ile çıkarılan bu metotların matematiksel temeli burada verilmektedir. Açıkça, sadece bir rijitlik matrisinin tersinin alınması gerekse bile, daha öncede değinildiği gibi, ardışık adımların sayısının daha çok olması gerekmektedir. Optimum ekonomi hem sabit hem de değişken rijitlik yaklaşımlarının doğru birleşimiyle daha iyi olarak elde edilebilir.

Öyle görünüyorki, tüm nonlinear işlemlerde esas olan, dengelenmemiş toplam kuvvetleri veren $\{\psi\}$ vektörünün direkt olarak hesaplanmasıdır. Elastik çözüm deneme çözümlerinin yakınsaklığını hızlandırmanın basit bir aracı olarak kullanılır.

$\{\psi\}_n$ vektörü dengelenmemiş artık kuvvetler gibi yorumlanabilir ve bu yüzden hesaplamada önemli bir rolü vardır.

Yakınsaklığı hızlandırmaya ait tüm işlemler keşfedilen tüm genel yaklaşımlar ile birlikte kullanılabilir (35).

5.3. Geometrik Nonlineerlik

Bundan önceki kısımda malzeme özelliklerinden ortaya çıkan nonlinearlikler ele alındı ve ardışık bir yolla çözüm bulmada kullanılan standart lineer biçimlerde metodlar verildi. Bu kısımdaki geometrik nonlinear davranış için de benzer bir yol takip edilmektedir.

5.3.1. Genel düşünceler

Yer değiştirmeler (veya şekil değiştirmeler) büyük veya küçük olsada, iç ve dış kuvvetler arasındaki denge şartları tatmin edici olmak zorundadır. Böylece, $\{\delta\}$

düğüm parametrelerinin sonlu bir sayısı ile alışımlı usulde yer değiştirmeler önceden, kısım 5.2'deki gibi yazılabilir. Eğer denklem (5.15) yeniden aşağıdaki gibi tekrarlanır.

$$\{\psi(\{\delta\})\} = \int_V [\bar{B}]^T \{\sigma\} dV - \{R\} = 0 \quad (5.20)$$

ve gerilme Kirchhoff -Piola gerilmesi gibi yorumlanırsa, bu ifade büyük Şekil değiştirme için de geğerlidir. Burada $\{\psi\}$ genelleştirilmiş iç ve diş kuvvetlerin toplamını gösterir ve $[\bar{B}]$ Şekil değiştirme tanımından aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$d\{\epsilon\} = [\bar{B}] d\{\delta\} \quad (5.21)$$

Eğer yer değiştirmeler büyükse, yer değiştirmede nonlinearlik Şekil değiştirmelere bağlıdır ve burada $[\bar{B}]$ matrisi $\{\delta\}$ 'ya bağlıdır. Buna göre $[\bar{B}]$ matrisi her zaman uygun bir Şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[\bar{B}] = [B_o] + [B_L(\{\delta\})] \quad (5.22)$$

burada $[B_o]$ sonsuz küçük olan lineer Şekil değiştirme analizindeki ile aynı matristir ve sadece $[B_L]$ yer değiştirmelere bağlıdır. Genelde $[B_L]$ bunun gibi yer değiştirmelerin "lineer bir fonksiyonu" olarak bulunabilir.

Eğer Şekil değiştirmeler oldukça küçükse genel elastik ilişki tekrar yazılabilir.

$$\{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_o\}) + \{\sigma_o\} \quad (5.23)$$

burada $[D]$ alışımlı elastik sabitler matrisidir.

Ancak, her bir nonlinear gerilme-Şekil değiştirme ilişkisi yazılabilirken, denklem (5.20)'deki nonlinear denklem takımının çözümünde tüm çözüm işlemi bir kez daha azaltılmaktadır (35).

5.3.2. İterasyon işlemleri

Denklem (5.20)'nin açık olarak çözümü ardışık yaklaşımla yapılmak zorundadır. Bu metodlar özellikle önceki kısım 5.3'de açık olarak tanımlanmış olan genel metodlardır.

Eğer $d\{\delta\}$ ve $d\{\psi\}$ arasındaki ilişki bulunmak zorunda ise, kısım 5.3.6' da olduğu gibi Newton işlemi benimsenir. Böylece, $d\{\delta\}$ yönü ile denklem (5.20)'nin tahmini değişimleri aşağıdaki denklem ile elde edilir,

$$d\{\psi\} = \int_V d[\bar{B}]^T \{\sigma\} dV + \int_V [\bar{B}]^T d\{\sigma\} dV \quad (5.24)$$

denklem (5.21) ve (5.23) kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$d\{\sigma\} = [D]d\{\varepsilon\} = [D][\bar{B}]d\{\delta\}$$

denklem (5.22)'den

$$d[\bar{B}] = d[B_i]$$

bulunur. Eğer nonlineer gerilme-şekil değiştirme ilişkilerinde $[D] = [D(\{\sigma\})]$ kullanılırsa artırılmış elastiklik matrisi denklem (5.17) ile verilmektedir.

Buradan,

$$d\{\psi\} = \int_V d[B_L]^T \{\sigma\} dV + [\bar{K}] d\{\delta\} \quad (5.25)$$

bulunur. Burada,

$$[\bar{K}] = \int_V [\bar{B}]^T [D][\bar{B}] dV = [K_o + K_L] \quad (5.26)$$

dır. Burada $[K_o]$ alışımlı küçük yer değiştirme rijitlik matrisini gösterir, yani,

$$[K_o] = \int_V [B_o]^T [D][B_o] dV \quad (5.26a)$$

dir. $[K_L]$ matrisi ise büyük yer değiştirmeye aittir ve aşağıdaki gibi verilir.

$$[K_L] = \int_V ([B_o]^T [D][B_L] + [B_L]^T [D][B_L] + [B_L]^T [D][B_o]) dV \quad (5.26b)$$

$[\bar{K}]$ “başlangıç yer değiştirme matrisi”, büyük yer değiştirme matrisi v.s. gibi farklı olarak bilinir. Bu sonsuz küçük (infinitesimal) bir şekil değiştirme yaklaşımı kullanılarak alternatif olarak bulunabilen bir matristir. Fakat, rijitliğin hesaplanmasında eleman koordinatları düzeltilmektedir.

Denklem (5.25)’nin ilk terimi genel olarak aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\int_V d[B_L]^T \{ \sigma \} dV = [K_\sigma] d \{ \delta \} \quad (5.27)$$

burada $[K_\sigma]$ gerilme seviyesine bağlı simetrik bir matristir. Bu matris başlangıç gerilme matrisi veya geometrik matris olarak bilinir. Böylece,

$$d\{ \psi \} = ([K_o] + [K_\sigma] + [K_L]) d \{ \delta \} = [K_T] d \{ \delta \} \quad (5.28)$$

burada $[K_T]$ toplam “tanjant rijitlik” matrisi olmaktadır. Kısım 5.3.6’deki Newton tipi iterasyon bir kez daha kesin olarak uygulanabilir.

Özet olarak:

(a) $\{ \delta \}$ ’nin ilk tahmini olarak lineer elastik çözüm bulunur,

(b) Denklem (5.20) kullanılarak $[\bar{B}]$ 'nin tahmini tanımı ile $\{\psi\}_1$ bulunur ve denklem (5.23) (veya diğer bir lineer veya nonlineer bağıntı) ile gerilmeler bulunur,

(c) $[K_T]$ matrisi kurulur ve

(d) Aşağıdaki gibi düzeltilir

$$\Delta\{\delta\}_1 = -[K_T]^{-1} \{\psi\}_1$$

ve $\{\psi\}_n$ yeterince küçük oluncaya kadar işlem tekrar edilir.

İterasyon adımlarının sayısı artırılarak tekrar sabit bir matris kullanılabilir. Fakat bu matrisin yarısının tersi alınarak, bilgisayarda işlem daha az zamanda yeniden çözülebilir. Bu göstermektedir ki, $\{\psi\}_n$ her adımdaki ifadelerin düzeltilmesi ile elde edilir. Fakat, bu işlem ile bazen yakınsaklık yavaş olur.

Ara sıra tam bir yük için operasyonun bir adımında bütün çözümler başarılabilirken, bütün nonlineer problemlerde olduğu gibi, tek olmayan bir çözüm imkanı ortaya çıkar ve fiziksel olarak önemli olmayan bir çözüm bulunabilir. Bunun gibi durumlarda yük artımı ile ilerlemek uygundur ve her artım için böylece nonlineer çözüm bulunur. Bu gerçekten hesaplama olarak daha ucuzdur ve nonlineerliğin etkileri her adımda azaltılır. Eğer yeterince küçük miktarda yük artımları alınırsa her artımlı çözüm bir adımda yeterince doğru olarak başarılabilir. Ancak denklem (5.20)'nin tam kullanılması toplamı periyodik olarak kontrol etmek için önemlidir (35).

5.3.3. Başlangıç stabilite problemi

Bu safhada, $[K_\sigma]$ 'nin yer değiştirmeleri açıkça kapsamadığına ve gerilme seviyesine bağlı olduğuna dikkat etmek gerekir. Böylece, eğer hesaplamanın ilk adımında $\{\sigma\}$ 'ya lineer bir çözüm ile değer verilirse, denklem (5.15)'den aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$d\{\psi\} = ([K_o] + [K_\sigma]) d\{\delta\} \quad (5.29)$$

Eğer bir λ faktörü ile yük artırılırsa var olan tarafsız stabilite bulunabilir.

$$d\{\psi\} = ([K_o] + \lambda [K_\sigma]) d\{\delta\} \equiv 0 \quad (5.30)$$

Burada λ yukarıda tanımlanmış tipik bir özdeğer probleminin çözülmesinden bulunabilir.

Bu çubuklar, plaklar, kabuklar v.b. elemanların burkulmasında olduğu gibi klasik “başlangıç” stabilite problemidir.

Gerçekten literatürde sık sık bu tip yaklaşım uygulanabilme sınırlarının dışında kullanılır. “Başlangıç stabilite” sadece ifade edilmiş önemli fiziksel cevaplar verebilir. Eğer “büyük şekil değiştirme matrisi” $[K_L]$ aynı şekilde sıfır ise $[K_o]$ elastik çözüm gibi şekil değiştirmeleri verir. Bu sadece pratik durumların çok sınırlanmış bir sayısında olur (örneğin, aksenal yük altındaki tamamen düz bir çubukta, üniform basınç altındaki tam kürede, v.s.). Bunun gibi durumlarda önceki araştırmacıların yaptığı gibi, “başlangıç kusurları” konusu ile tamamen sınırlandırılır. Burada iki sınıfa ayırma olabilir. Gerçek mühendislik durumlarında, bunun gibi problemler tüm tanjant rijitlik matrisi kullanılarak araştırılmalıdır. Aynı şekilde $[K_T]d\{\delta\}$ olduğunda, tarafsız denge bulunabilir. Burada açıkça artımlı adım (a step-by-step) yaklaşımı gereklidir (35).

5.3.4. Stabilite kriterinin enerji yorumu

Daha öncede görüldüğü gibi, gerçekte, Π toplam potansiyel enerjisinin değişimi, $d\{\delta\}$ deplasman değişkeni boyunca yapılan virtüel işe eşittir. Böylece, denge için

$$d\Pi = d\{\delta\}^T \{\psi\} = 0 \quad (5.31)$$

dır yani, toplam potansiyel enerjisi sabittir (bu denklem (5.20)' ye eşdeğerdir).

Π ' nin ikinci türevi denklem (5.28)' den

$$d^2\Pi = d(d\Pi) = d\{\delta\}^T d\{\psi\} = d\{\delta\}^T [K_T] d\{\delta\} \quad (5.32)$$

stabilite kriteri, bu ikinci türevinin pozitif bir değeri ile ve aksi olarak kararsız (instability) olan negatif bir değeri ile verilir (ikinci durumda yapı fazla miktarda enerji içerirken birinci durumda ise yapıya enerji eklenmelidir). Diğer bir değişle, eğer $[K_T]$ pozitif-tanımlı ise, stabilite bulunur. Bu kriter, büyük şekil değiştirme esnasında, stabilite araştırıldığında çok kullanılır (35).

5.3.5. Şekil değiştirmeye bağlı kuvvetler

Denklem (5.26)'nın çıkarılmasında, $\{\bar{R}\}$ kuvvetlerinin şekil değiştirmeye bağlı olmadığı tamamen kabul edilmiştir. Bazen de bu örnekler doğru değildir. Örneğin, genelde, çok fazla şekil değiştirme yapan bir yapıdaki basınç kuvvetleri ve şekil değiştirmeye bağlı olan bazı aerodinamik kuvvetler gerçekten bu sınıftadırlar.

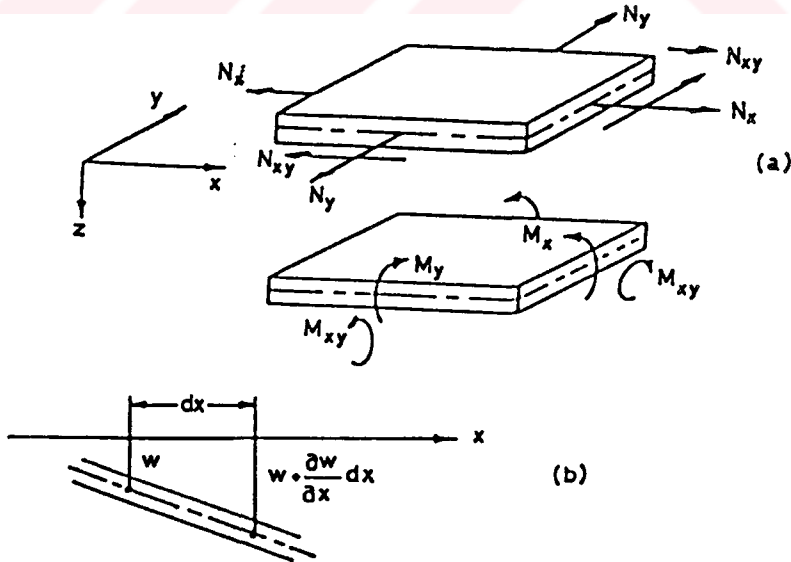
Eğer kuvvetler yer değiştirmeler ile değişirse, sonra denklem (5.24)' deki ilişki $d\{\bar{R}\}$ değişimi ile $d\{\delta\}$ ilişkisi düşünülmelidir. Stabilite ve büyük şekil değiştirme problemleri bunun gibi yükler altında (korunumlu olmayan), eğer yukarıdaki terime uygun karşılık verilirse, bir kez daha çalışabilir (35).

5.3.6. Plakların başlangıç stabilitesi ve büyük sehimi

İlk olarak, yer değiştirmelerin sonsuz küçük olmadığı, fakat aşırı şekilde de büyük olmadığı ve yanal kuvvetler altında düzlemdaki şekil değiştirmelerin plak konusu ile birlikte ele alındığı düşünölmelidir. Bunun gibi durumlarda yanal yer değiştirmeler membran tipi şekil değiştirmelerin gelişmesi için güvenilirdir. Burada, düzlemdaki ve yanal şekil değiştirme problemlerine fazla uzun olmayacak şekilde ayrı ayrı değinilmekte, fakat bu ikisi birleştirilmektedir. Önceki gibi, plak şekil değiştirmeleri, yüzey ortasındaki yer değiştirme terimle riyle tanımlanmalıdır. Yani, eğer Şekil 5.3a daki gibi yüzey ortasına rastlarsa, aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{pl} \\ \epsilon_b \end{Bmatrix} ; \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{pl} \\ \sigma_b \end{Bmatrix} \quad (5.33)$$

Yukarıda "gerilmeler" alışılmış terimlerle tanımlanmıştır. Burada düzlem içindeki ve eğilme elemanları uygun bir şekilde indislerle birbirinden ayrılmışlardır.



Şekil 5.3 a) Bir plak elemanına ait düzlemdaki ve eğilme gerilmesi bileşenleri,
b)Yanal yer değiştirmeden dolayı orta yüzey sehiminin artışı.

$N_x = \bar{\sigma}_x t$, burada $\bar{\sigma}_x$ ortalama membran gerilmesi v.s. Şimdi, eğer Şekil 5.3b'deki gibi şekil değiştirmiş durum dikkate alınırsa, görülür ki, w sehimli orta yüzeyin x ve y yönlerinde bir miktar artış meydana getirir ve dx mesafesini artırır. Yani,

$$dx' = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \dots \right\}$$

tanımdan x uzaması aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

Diğer elemanlar içinde benzer yol dikkate alınarak, şekil değiştirme tanımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{pl}^o \\ \epsilon_b^o \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \epsilon_{pl}^L \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.34)$$

Burada daha öncede karşılaşılan ilk terim çoğu zaman lineer ifadedir ve ikinci terim ise nonlinear olarak verilir. Yukarıdaki u,v,w orta yüzeye ait tahmini yer değiştirmeleri gösterirler.

Eğer sadece lineer elastik davranış dikkate alınırsa, düzlem gerilme ve eğilme elemanına ait $[D]$ matrisi, aşağıdaki gibi birleştirilir.

$$[D] = \begin{bmatrix} [D^{pl}] & 0 \\ 0 & [D^b] \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Sonunda uygun enterpolasyon fonksiyonları kullanılarak düğüm parametrelerinin terimleriyle yer değiştirmeler tanımlanırlar. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [N] \{\delta\}^e \quad (5.36)$$

burada tipik bir düğüm parametreleri takımı uygunluk için bölünebilir. Buna göre düzlem içindeki etki ve eğilme şekil değiştirmesi sırayla aşağıdaki gibi verilir,

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \delta_i^{pl} \\ \delta_i^b \end{Bmatrix} \quad \{\delta_i^{pl}\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (\text{düzlemindeki etki}) \quad (5.37)$$

ve

$$\{\delta_i^b\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \frac{\partial w}{\partial x_i} \\ \frac{\partial w}{\partial y_i} \end{Bmatrix} \quad (\text{eğilme şekil değiştirmesi})$$

Böylece enterpolasyon fonksiyonu aşağıdaki gibi tekrar bölünebilir,

$$[N_i] = \begin{bmatrix} [N_i]^{pl} & 0 \\ 0 & [N_i]^b \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

ve gerçekten denklem (5.37)'deki yoldan tekrar bölünebilen birleştirilmiş sonuç yer değiştirme vektörü yukarıdaki gibi kabul edilebilir.

Bu uygunluk nonlineer şekil değiştirme $\{\varepsilon_{pl}^L\}$ istisnası ile bütün standart lineer analiz uygulaması gibidir. Bu yüzden burada tekrarlanması zorunlu değildir(35).

5.3.6.1. $[\bar{B}]$ 'nin bulunması

Daha önceki formüle ilaveten $[\bar{B}]$ ve $[K_T]$ matrislerini kurmak için bu gerekli olmaktadır. İlk önce aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[\bar{B}] = [B_o] + [B_L] \quad (5.39)$$

burada

$$[B_o] = \begin{bmatrix} [B_o]^{pl} & 0 \\ 0 & [B_o]^b \end{bmatrix}, \quad [B_L] = \begin{bmatrix} 0 & [B_L]^b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada $[B_o]^{pl}$, $[B_o]^b$ düzlem içindeki ve eğilme elemanlarına ait uygun lineer standartlar olarak iyi tanımlanır ve $[B_L]^b$ ise $\{\delta^b\}$ parametreleri yönünde $\{\varepsilon_{pl}^L\}$ 'nin birinci türevinin alınması ile bulunur.

Bu nonlinear şekil değiştirme elamanı, denklem (5.34)'den uygun bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\{\varepsilon_{pl}^L\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [A] \{O\} \quad (5.40)$$

w türevleri ile $\{\delta^b\}$ düğüm parametreleri arasında aşağıdaki bağıntı kurulabilir.

$$\{O\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [G] \{\delta^b\} \quad (5.41)$$

burada

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^b}{\partial x}, & \frac{\partial N_2^b}{\partial x} \dots\dots \\ \frac{\partial N_1^b}{\partial y}, & \frac{\partial N_2^b}{\partial y} \dots\dots \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Böylece [G] matrisi sadece koordinat terimleriyle tanımlanır.

Denklem (5.40)'nin türevi alınırsa,

$$d\{\varepsilon_{pl}^L\} = \frac{1}{2} d[A] \{O\} + \frac{1}{2} [A] d\{O\} = [A] d\{O\} = [A] [G] d\{\delta^b\} \quad (5.43)$$

Burada denklem (5.43)'in idaresi $[A]$ ve $\{O\}$ matrislerinin ilginç özelliklerine uygundur. Bunu gerçekleştirmek kolaydır. Bununla ilgili gerekli açıklama aşağıda verilmiştir. Eğer,

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

keyfi bir vektör ise,

$$d[A]\{x\} = \begin{bmatrix} d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) & 0 \\ 0 & d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) & d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} d\{O\} \quad (5.43a)$$

böylece,

$$d[A]\{O\} = [A]d\{O\}$$

benzer olarak,

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

$$d[A]^T\{y\} = \begin{bmatrix} d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) & 0 & d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ 0 & d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) & d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_3 \\ y_3 & y_2 \end{bmatrix} d\{O\}. \quad (5.43b)$$

Bu ikinci özellik daha sonra kullanılmaktadır. Denklem (5.43)'ten hemen tanımlama ile,

$$[B^b_L] = [A][G] \quad (5.44)$$

bulunur (35).

5.3.6.2. $[K_T]$ 'nin bulunması

Lineer, küçük şekil değiştirme, matrisleri aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$[K_o] = \begin{bmatrix} K_o^{pl} & 0 \\ 0 & K_o^b \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

burada K_o^{pl} ve K_o^b sırayla düzlem gerilme ve eğilme elemanları için lineer elastik rijitlik matrisleridir. Büyük yer değiştirme matrisleri, denklem (5.26b) kullanılarak ve denklem (5.39)' da yerine konularak tanımlanabilir. Böylece bazı işlemlerden sonra, $[K_L]$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$[K_L] = \int_V \begin{bmatrix} 0, & [B_o^{pl}]^T & [D^{pl}] & [B_L^b] \\ \text{Sim.}, & [B_L^b]^T & [D^{pl}] & [B_L^b] \end{bmatrix} dV \quad (5.46)$$

Sonunda denklem (5.27)'nin tanımı kullanılarak $[K_\sigma]$ bulunabilir. Denklem (5.39)'un türevi alınarak,

$$d [B_L]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d [B_L^b]^T & 0 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

bulunur. Bu denklem (5.27) ve (5.44)' de yerine konularak,

$$[K_{\sigma}] d\{\delta\} = \int_V \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [G]^T d[A]^T & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} dV \quad (5.48)$$

bulunur. Fakat denklem (5.43b)'deki tanım kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$d[A]^T \times \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} d\{O\} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} [G] d\{\delta^b\}$$

ve sonunda bulunabilir,

$$[K_{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [K_{\sigma}^b] \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

burada,

$$[K_{\sigma}^b] = \int_V [G]^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} [G] dV \quad (5.50)$$

bu “başlangıç gerilmesinin simetrik biçimdeki” plak matrisi olarak iyi bilinir (35).

5.3.6.3. Büyük plak sehimi problemi

Şimdi büyük plak sehimi probleminin çözümü için gerekli bütün malzemeler hazırdır.

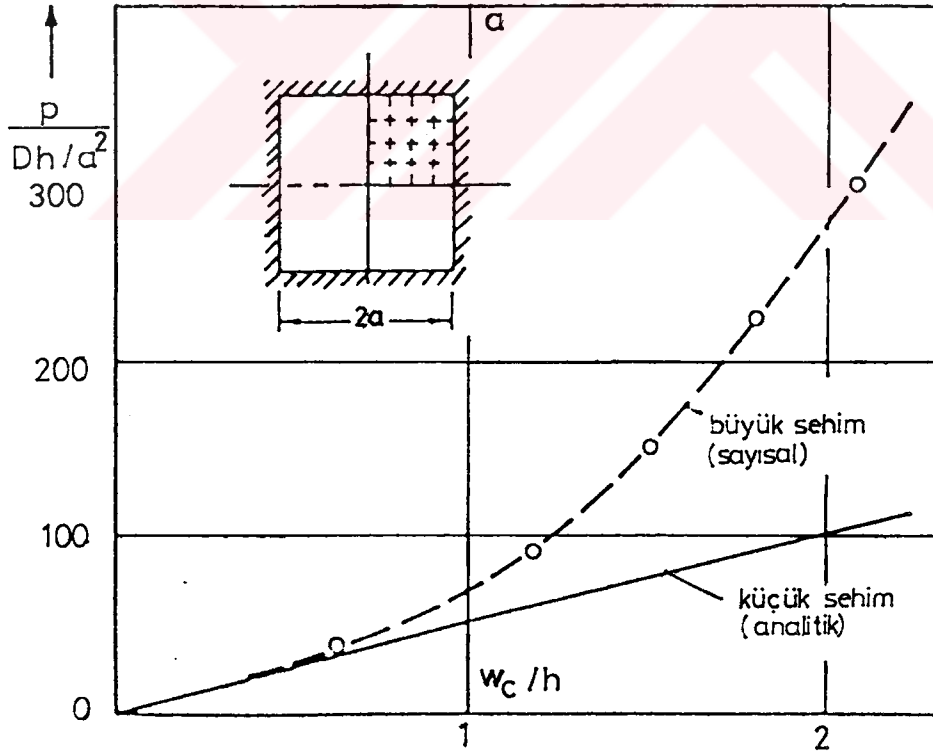
Buna göre;

- 1) Birinci adım olarak $\{\delta\}$ yer değiştirmeleri küçük yer değiştirmelere göre

- bulunur.;
- 2) Gerçek şekil değiştirmeler uygun lineer yardımlar ile beraber denklem (5.42)'de tanımlanmış nonlineer yardım dikkate alınarak belirlenir;
 - 3) Eşdeğer gerilmeler denklem (5.22)'ye göre belirlenmiş $\{\psi\}_0$ ve lineer elastik ifadeler ile bulunabilir;
 - 4) $[K_T]$ 'nin alt tahminleri denklem (5.47),(5.48) ve (5.51)'den bulunur.

Böylece, tipik bir çözüm bulunmuş olur ve Şekil 5.4'te membran gerilmelerin gelişmesinden dolayı Şekil değiştirme artımı ile plağın rijitliği gösterilmektedir. Bütün plak içinde ve plağın kenarlarında yanal şekil değiştirmeler engellenmiştir. Bu sonuçlar alternatif analitik bir çözüm ile mükemmel bir uyum gösterir.

Eleman özellikleri, düzlem içinde şekil değiştirmeler için en basit dikdörtgene ait şekil fonksiyonu ve eğilme şekil değiştirme için ise non-conforming (uygun olmayan) dikdörtgene ait enterpolasyon fonksiyonu kullanılarak çıkarılmıştır(35).



Şekil 5.4 Üniform p yükü altındaki ankastre kare bir plağın w_c merkezi sehimini (kenarlarda $u=v=0$ dır) (35).

6. BETONARME PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR METODU İLE NONLİNEER ANALİZİ.

Bu bölümde betonun nonlineer analizi, betonarme plakların tabakalı kompozit elemanlar olarak modellenmesi ve sonlu elemanlar metodunun betonarmeye uygulanması konuları ayrıntılı olarak açıklanmaktadır.

6.1. Betonun Nonlineer Analizi

Betonarme yapı elemanlarının doğru olarak analiz edilmesi, bir çok nedenlerle güçleşmektedir. Bunların başında betonarme sisteminin homojen olmayan tabiatı gösterilebilir. Burada ele alınan problemi, genel deyimlerle, elasto-plastik, nonlineer ve izotrop olmayan bir sistem analizi olarak sınıflandırmak mümkündür. Betonarmede analizi güçleştiren faktörler aşağıdaki şekilde özetlenebilirler.

- 1) Betonun gerilme ve şekil değiştirme bağıntıları bir çok değişkenin fonksiyonudur ve yüklemenin büyük bir kısmı için lineer değildir. Bu bağıntıların çok eksenli durumda kurulması ve betona ait akma ve göçme kriterlerinin formüle edilmesi güçtür.
- 2) Betonarmenin iki esas malzemedan yapılmış olması (beton ve çelik), yapının kompozit bir sistem olarak incelenmesini gerektirir.
- 3) Yapı elemanının topolojisi, yük altında oluşan çatlaklar nedeniyle, sürekli olarak değişmektedir.
- 4) Donatı çubuklarının kayma gerilmelerinin aktarılmasına yardımı, çelik çubuklarla beton arasındaki aderans kaybı, çatlamış beton yüzeylerinde agreganın kenetlenmesi gibi faktörlerin analitik olarak modellenmesi güçtür.
- 5) Betondaki şekil değiştirmeler, sünme ve büzülme gibi, zamana ve çevre şartlarına bağlı olaylarla etkilenirler.

Kompozit bir sistemin nonlinear davranışı, sistemi meydana getiren bileşenlerin ayrı ayrı özellikleri ve bu bileşenlerin sistem içerisinde birbirleri üzerindeki etkilerine bağlıdır. Betonarmede nonlinear şekil değiştirmelerin başlıca iki kaynağı vardır. Birincisi yük altında betonun sürekli çatlaması ve bunun sonucunda sistemdeki gerilme durumunun baştan dağıtımındır. İkincisi ise betonun malzeme karakteri bakımından nonlinear davranışdır. Şimdiki zamanda, çok eksenli gerilme durumunda, beton sisteminin bu iki olayını da içine alan genel bir şekil değiştirme kanunu mevcut değildir. Şurası belirtilmelidir ki çelik malzemenin (bağımsız bir bileşen olarak) yük altında akması ve mukavemetini kaybetmesi klasik plastisite kuralları ile kolayca tasvir edilebilir.

Bu çalışma betonarme plakların sonlu elemanlar metodu ile nonlinear analizini kapsar. Analiz metodu, dış yüklemelerin kısa süreli olması şartı ile kısıtlıdır; betonun sünmesi veya büzülmesi olayları şimdiki durumda dikkate alınmamıştır. Donatı çubukları ile beton arasındaki aderansın tam olduğu kabul edilmiştir. Çelik donatının sistem rijitliğine olan etkisi kompozit tabaka modeli ile dikkate alınmıştır (4).

6.2. Donatının Etkisi

Betonarmede analizi güçleştiren faktörlerden birisi, sistemin kompozit olan yapısıdır. Betonarme sistemi, beton ve çelik olmak üzere başlıca iki bileşenden meydana gelir.

Kompozit sistemin dış yükler altında etkili bir mekanik davranış göstermesi, sistemin bileşenlerinin birlikte yer değiştirmesine bağlıdır. Betonarmede bu durum, çelik ve betonun ortak yüzeyinde, donatı ile beton arasındaki relatif hareketleri önleyebilecek yeterlikte bir aderansın sağlanması ile elde edilir (4).

6.2.1. Donatının modellenmesi

Plak ve kabuk gibi, gerilme durumları esas itibariyle iki eksenli olan yapıların sonlu elemanlarla analizinde, genellikle tabakalı elemanlar kullanılır. Bu elemanlar, gerilme-şekil değiştirme bağıntıları birbirinden farklı olan ince tabakaların, uygunluk şartlarını sağlamak üzere bir araya konması ile meydana gelir (4).

Tabakalı elemanın betonarme için kullanılması halinde, donatının bulunduğu tabaka, çelik ve betondan meydana gelen kompozit bir tabaka gibi düşünülür. Kompozit malzemeler ve tabakalı kompozitlerle ilgili gerekli bilgiler bundan sonraki kısımlarda verilmiştir.

6.3. Kompozit Malzemeler

İki veya daha fazla malzemenin kullanım yerindeki aranan özellikleri verebilecek daha uygun bir malzeme teşkil etmek için makro seviyede birleştirilmesi sonucu meydana gelen malzemelere “kompozit malzemeler” denir. Doğrudan doğruya istenilen maksatla kullanılmayan en az iki malzemedan, belli olan bir özelliği elde edebilmek için bunların belli şartlar altında ve belli bir oranda fiziksel olarak birleştirilmeleri ile elde edilirler. Kompozit malzemeler genellikle matriks adı verilen ana faz ile takviyelendirici olarak adlandırılan tali fazdan oluşurlar (36).

6.3.1. Kompozit malzemelerde Hooke sabitlerinin bulunması

Bir malzemenin kayma modülü “G” elastiklik (Young) modülü “E” ve Poisson oranı “ ν ” genel olarak malzemenin mühendislik sabitleri diye adlandırılır. Bu sabitler, tek eksenli gerilme ve tam kayma testleri gibi basit testlerle ölçülebilirler. Böylece

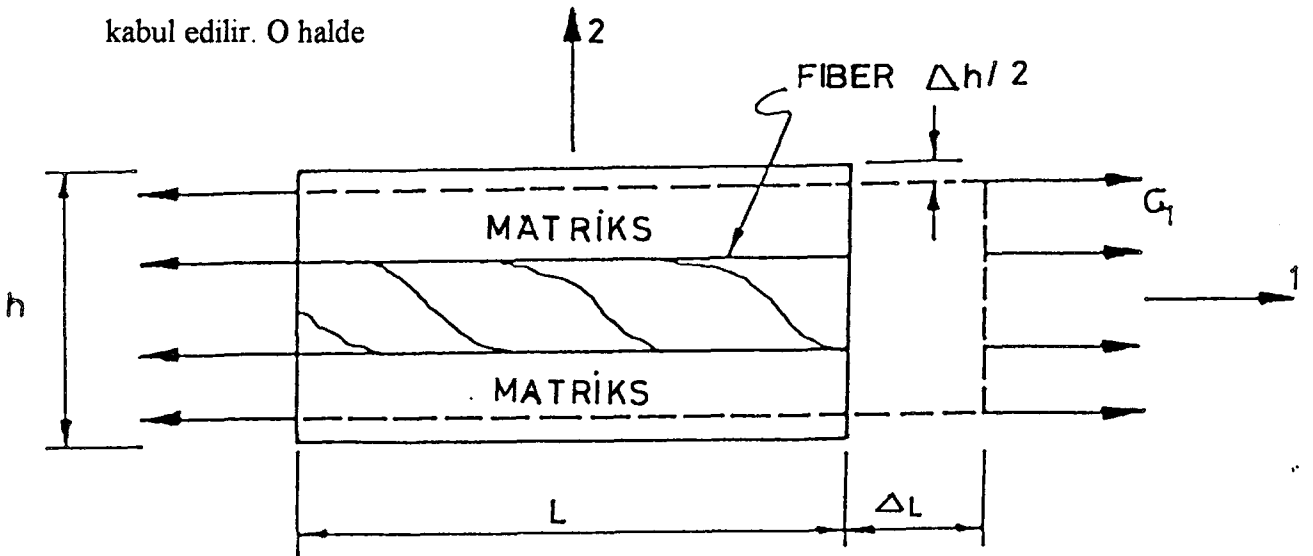
rijitlik matrisi elemanları matematiksel olarak ifade edildikleri değerden kurtulup daha açık ve fiziksel anlam taşıyan mühendislik sabitleri ile ifade edilebilme imkanına sahip olurlar.

Ortotropik elastik malzemeye ait mühendislik sabitlerinin bulunabilmesi için , bilinen bir yük veya gerilme yardımıyla gerçekleştirilen basit çekme ve kayma testleri yapılır. Yapılan deneylerin sonuçları değerlendirildiğinde malzemenin elastisite modülü “E” ile kayma modülü “G” tesbit edilebilir.

Bazen kompozit malzemenin mukavemet değerleri ve mühendislik sabitleri bilinmeyebilir. Fakat buna karşılık malzemeyi oluşturan matris ve fiber fazların mühendislik sabitleri ve konsantrasyonları biliniyorsa o taktirde kompozit malzemenin takviye istikametinde veya buna dik doğrultuda mühendislik sabitleri ile buna bağlı olarak rijitlik matrisi elemanları teorik olarak hesaplanabilir (36).

6.3.1.1. E_1 'in bulunması

Eğer malzeme şekil 6.1’de olduğu gibi takviye doğrultusunda bir σ_1 gerilmesinin etkisinde kalıyorsa hem lifler hemde matris malzeme aynı miktarda ϵ_1 kadar uzuyor kabul edilir. O halde



Şekil 6.1. Kompozit malzemenin takviye doğrultusunda çekilmesi

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= E_1 \varepsilon_1 \\
\sigma_f &= E_f \varepsilon_1 \\
\sigma_m &= E_m \varepsilon_1
\end{aligned}
\tag{6.1}$$

yazılabilir. Malzeme kesit alanı A , bu alan içerisinde fiber alanının A_f ve matriks alanının A_m olduğu düşünülürse F çekme kuvveti aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$F = \sigma_1 A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \tag{6.2}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
E_1 \varepsilon_1 A &= E_f \varepsilon_1 A_f + E_m \varepsilon_1 A_m \\
E_1 &= (A_f / A) E_f + (A_m / A) E_m
\end{aligned}
\tag{6.3}$$

elde edilir (36,37). Hacimsel konsantrasyon

$$\begin{aligned}
V_f &= A_f / A \\
V_m &= A_m / A \\
V_f + V_m &= 1
\end{aligned}
\tag{6.4}$$

şeklinde tanımlanacak olursa

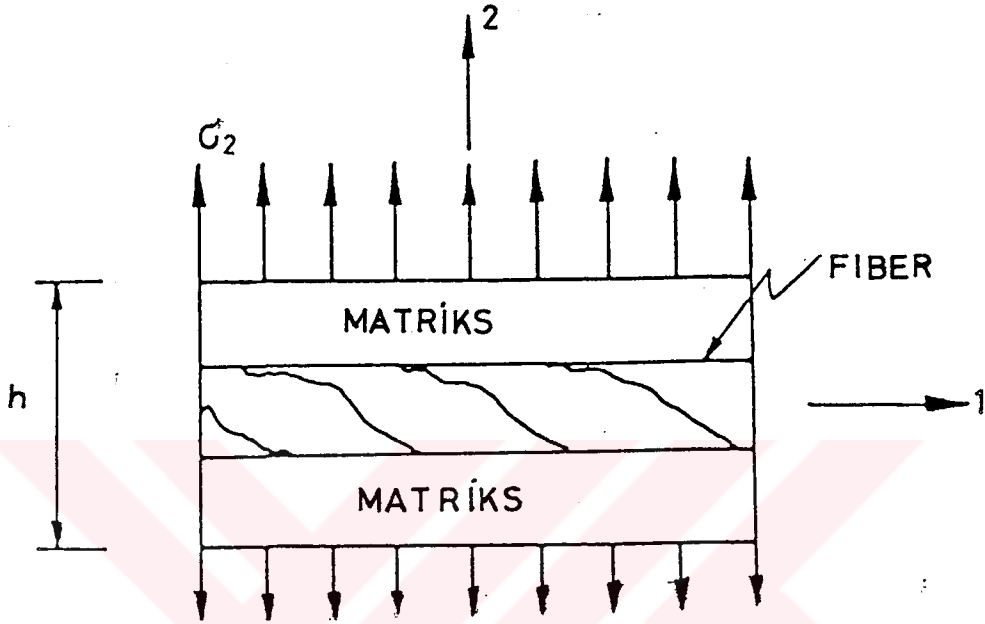
$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \tag{6.5}$$

elde edilmiş olur (36,37).

6.3.1.2. E_2' nin bulunması

ÖZEL İNŞAAT MÜHÜRÜ
TASTOS MİRALİ

Malzeme Şekil 6.2'deki gibi yüklendiği takdirde σ_2 gerilmesinin matriks ve fiber tarafından eşit olarak taşındığı kabul edilir. O zaman



Şekil 6.2 Kompozit malzemenin takviye doğrultusuna dik yönde çekilmesi

$$\sigma_m = E_m \epsilon_m$$

$$\sigma_f = E_f \epsilon_f$$

$$\sigma_2 = E_2 \epsilon_2$$

$$\sigma_2 = \sigma_f = \sigma_m$$

(6.6)

yazılabilir. Malzemenin kalınlığı h ise, bunun $V_f h$ kadarını fiber, $V_m h$ kadarını da matriks oluşturuyor demektir. Buna göre

$$\epsilon_2 h = V_f h \epsilon_f + V_m h \epsilon_m$$

(6.7)

bağıntısı malzemenin şekil değiştirme miktarını verir. Buradan

$$E_2 = V_f E_f + V_m E_m$$

(6.8)

$$E_2 = V_f (\sigma_f / E_f) + V_m (\sigma_2 / E_m) \quad (6.9)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeden

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2 = E_2 [V_f (\sigma_2 / E_f) + V_m (\sigma_2 / E_m)] \quad (6.10)$$

$$E_2 = E_f E_m / (V_m E_f + V_f E_m) \quad (6.11)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir (36,37).

$$1/E_2 = (V_f/E_f) + (V_m/E_m) \quad (6.12)$$

6.3.1.3. v_{12} 'nin bulunması

Şekil 6.3' den

$$v_{12} = -\varepsilon_2 / \varepsilon_1 \quad (6.13)$$

$$\Delta h = -h \varepsilon_2 = h v_{12} \varepsilon_1 \quad (6.14)$$

$$\Delta h = \Delta h_m + \Delta h_f \quad (6.15)$$

yazılır. (6.15) bağıntısının sağ tarafındaki ifadeler

$$\Delta h_m = V_m h v_m \varepsilon_1 \quad (6.16)$$

$$\Delta h_f = V_f h v_f \varepsilon_1 \quad (6.17)$$

eşitlikleriyle tesbit edilirler. Buradan da

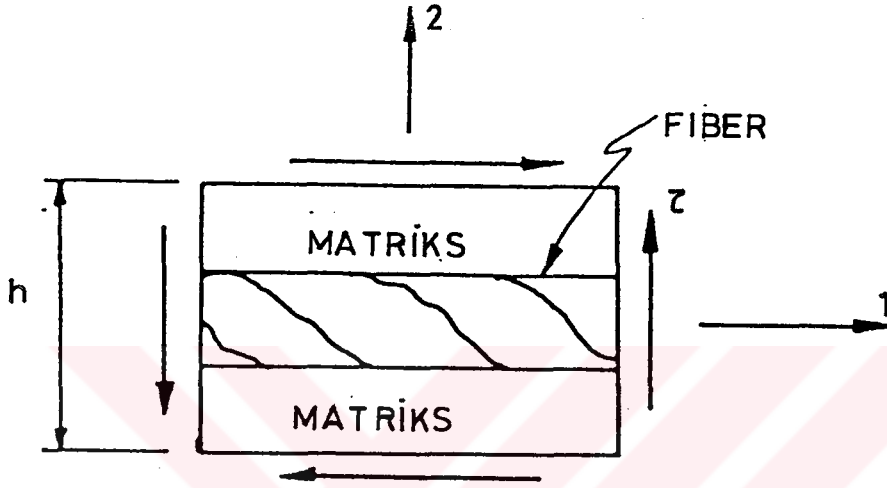
$$v_{12} = V_m v_m + V_f v_f \quad (6.18)$$

sonucu elde edilir. Eğer $v_m = v_f$ ise $v_{12} = v_m = v_f$ olur (36).

sonucu elde edilir. Eğer $v_m = v_f$ ise $v_{12} = v_m = v_f$ olur (36).

6.3.1.4. G_{12} 'nin bulunması

Malzeme Şekil 6.2 gibi yüklendiğinde



Şekil 6.3 Kompozit malzemeye kayma gerilmesinin uygulanması

$$\gamma_m = \tau / G_m \quad (6.19)$$

$$\gamma_f = \tau / G_f \quad (6.20)$$

bağıntısı yazılabilir. Malzemede meydana gelen şekil değiştirmeler Şekil 6.4' de gösterilmiştir. Toplam kayma şekil değiştirmesi

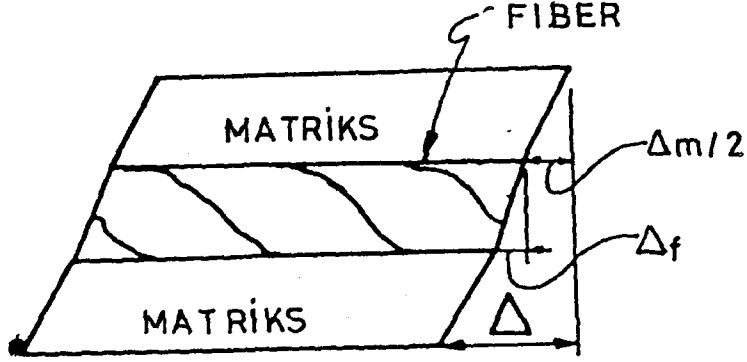
$$\Delta = \gamma h \quad (6.21)$$

ile bulunur. Matriks ve fiber içinde

$$\Delta_m = V_m \gamma_m h \quad (6.22)$$

$$\Delta_f = V_f \gamma_f h \quad (6.23)$$

bağıntıları yazılır. Daha sonra $\Delta = \Delta_m + \Delta_f$ eşitliğinden



Şekil 6.4 Kompozit malzemede toplam kayma şekil değiştirmesinin gösterilişi

$$\gamma = V_m \gamma_m + V_f \gamma_f \quad (6.24)$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$\gamma = \tau / G_{12} = V_m (\tau / G_m) + V_f (\tau / G_f) \quad (6.25)$$

$$G_{12} = G_m G_f / (V_m G_f + V_f G_m) \quad (6.26)$$

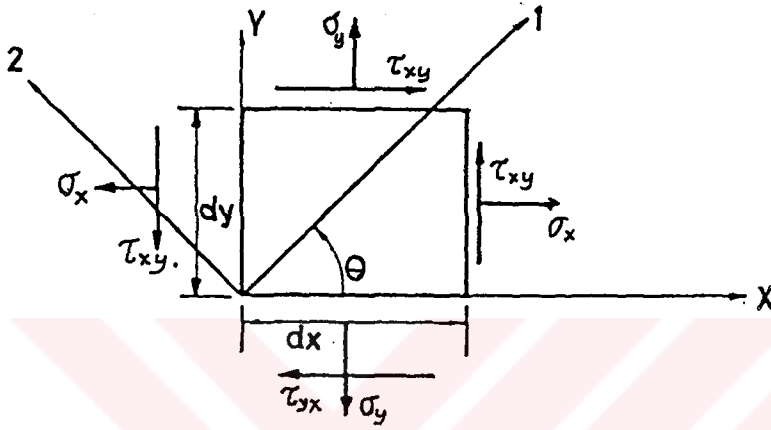
bağıntısı elde edilir (37).

6.3.2. Ortotropik malzemelerde gerilmeler

Asal malzeme doğrultuları 1 ve 2 eksenleriyle (Şekil 6.5) tanımlanan ortotropik kompozit malzemenin üzerine uygulanan θ açısı kadar farklı x ve y eksenleri

doğrultularında uygulandığı, malzemenin elemanter mekaniğinden faydalanarak transformasyon denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir. Şekil 6.6'dan faydalanarak 1 yönündeki gerilmeler

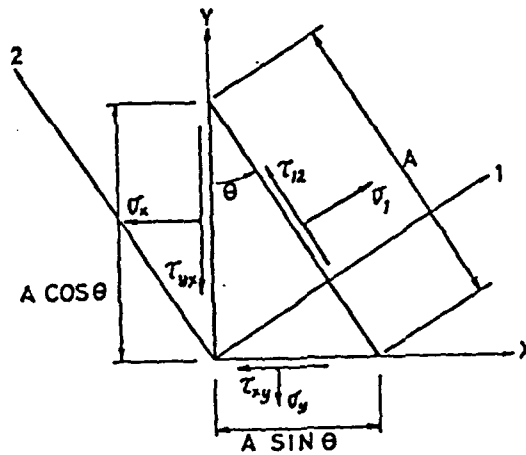
$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (6.27)$$



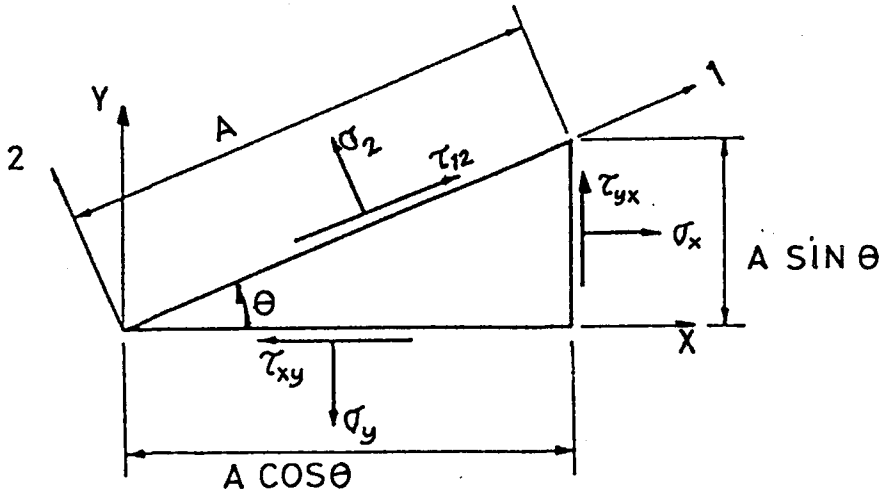
Şekil 6.5 Koordinat eksenleriyle, asal eksenler arasındaki ilişki

$$\tau_{12} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (6.28)$$

Benzer şekilde Şekil 6.7'den faydalanarak G_2 gerilmesi de aşağıdaki gibi yazılabilir.



Şekil 6.6 Eksenlerin θ açısı kadar dönmesi halinde σ_1 gerilmesi



Şekil 6.7 Eksenlerin θ açısı kadar dönmesi halinde σ_2 gerilmesi

$$\sigma_2 = \sigma_y \cos^2 \theta + \sigma_x \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta \quad (6.29)$$

(6.27), (6.28) ve (6.29) denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.30)$$

Burada T transformasyon matrisidir. Transformasyon matrisi ise

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

şeklinde yazılır.

Tek yönde fiber takviyeli ortotropik kompozit plaklarda gerilme ile şekil değiştirme arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibi ifade edilir. Buna göre

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (6.32)$$

burada [Q] indirgenmiş rijitlik matrisi olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi verilir.

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

İndirgenmiş rijitlik matrisi elemanları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_{11}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{12} &= Q_{21} = \nu_{12} E_{11}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{21} &= \nu_{21} E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{22} &= E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Yukarıdaki denklemlerde

E_{11} : 1 yönündeki elastisite modülü (N/mm^2)

E_{22} : 2 yönündeki elastisite modülü (N/mm^2)

G_{12} : 1 yüzeyine paralel kayma modülü (N/mm^2)

ν_{12} : 1 yönündeki Poisson oranı

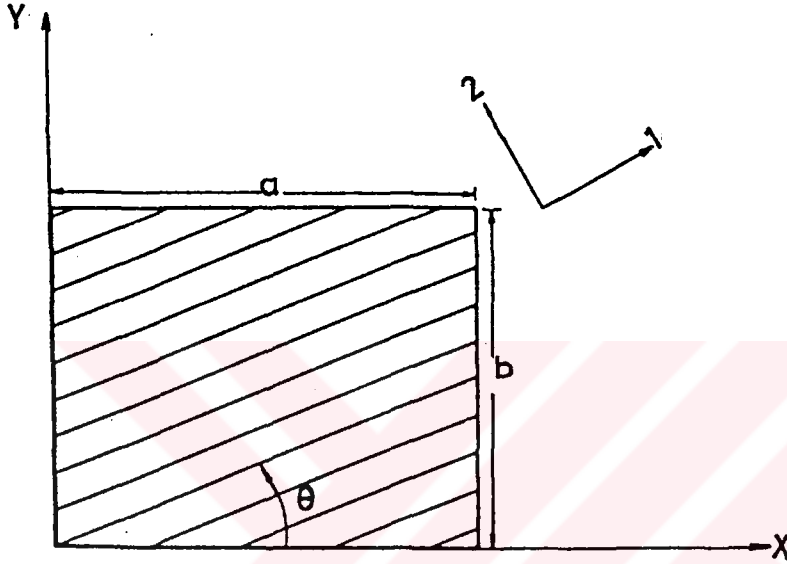
ν_{21} : 2 yönündeki Poisson oranı

dır.

Genel ortotropik bir plak Şekil 6.8'de gösterilmiştir.

x-y koordinat sisteminde gerilme ve şekil değiştirme arasındaki bağını aşağıdaki gibi verilmifitir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} [T]^{-1} [Q] [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.35)$$



şekil 6.8 Genel ortotropik plak

Burada $[\bar{Q}]$ indirgenmiş transformasyon rijitlik matrisidir. Buna g6re, $[\bar{Q}]$ matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 2\bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 2\bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 2\bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

burada

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22} n^4 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) m^2n^2 + Q_{22} m^4 \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) nm^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})n^3m \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})n^3m + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})nm^3 \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})n^2m^2 + Q_{66}(m^4 + n^4)\end{aligned}\quad (6.37)$$

$n = \sin\theta$, $m = \cos\theta$ 'dir. Gerilme ve şekil değiştirme arasındaki bu bağıntılardan istenen değerler hesaplanabilirler (36).

6.4. Tabakalı Kompozitler

Klasik plak teorisi gerilme-şekil değiştirme hipotezleriyle izah edilir. Klasik plak teorisi ile bir yapı bloğu, tabaka veya yapı elemanına gerilme-şekil değiştirme hipotezleri uygulanarak incelenir (36).

6.4.1. Tabakanın gerilme-şekil değiştirme davranışı

Düzlem gerilme altında ortotropik bir plak için asal malzeme koordinatlarındaki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı aşağıda verilmiştir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}\quad (6.38)$$

İndirgenmiş rijitlik matrisi, Q_{ij} 'nin elemanları denklem (6.34)'te verilmiştir. x-y koordinatlarındaki gerilmeler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\quad (6.39)$$

İndirgenmiş transformasyon rijitlik matrisi, \bar{Q}_{ij} 'nin elemanları denklem (6.37)'de verilmiştir.

Tabakalanmış bir plakta k'ncü tabakadaki gerilme ile şekil değiştirme arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi verilir (36).

$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k \{\varepsilon\}_k \quad (6.40)$$

6.4.2. Tabakalanmış plak boyunca şekil değişimi

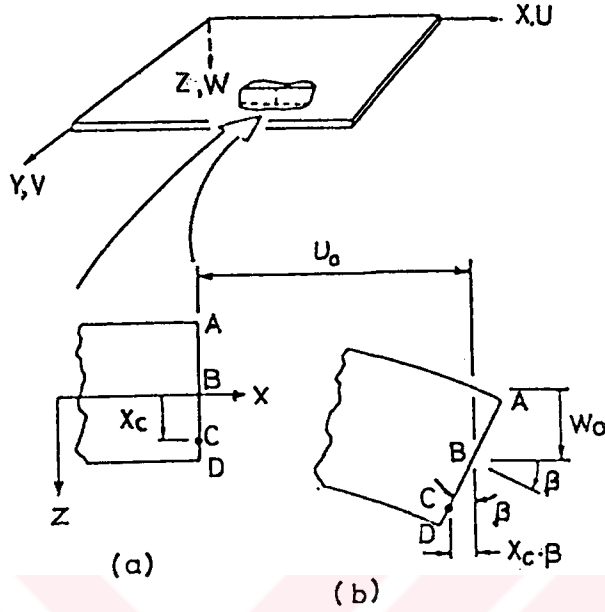
Tabakalanmış plak boyunca şekil değişimi ve gerilme değişiminin bilinmesi, plağın eğilme ve uzama şekil değiştirme rijitliğinin tarif edilmesi için önemlidir. Plakların, birkaç tabakanın tam olarak birleşmesi ile meydana geldiği varsayılır. Bundan başka tabakalar arasındaki yapıştırıcının yeterince ince olması halinde bile tabakalar arasında kayma şekil değiştirmesinin olmadığı düşünülür. Plaklarda şekil değiştirme esnasında tabakalar birbirlerine göre kayma göstermezler. Bundan dolayı bir plak kendine has özellikler gösteren bir plak gibi davranır.

Plağın orta düzlem normali, plak uzamaya veya eğilmeye maruz bırakıldığı durumda bile yine plak yüzeyine dik ve doğru olarak kaldığı varsayılır.

Deformasyon sonunda orta yüzey normalinin (ABCD doğrusu) (Şekil 6.9) yine orta yüzeye dik ve doğru olarak kalması, orta yüzeye dik düzlemlerde kayma deformasyonlarının ihmal edilebilecek kadar küçük olmasını gerektirir.

Bir tabakanın davranışını izah eden bütün bu kabuller plaklar için Kirchoff, kabuklar için de Kirchoff-Love hipotezi olarak bilinir.

Şekil 6.9.'a göre plağın yüklemeye sonraki şekil değiştirmesi incelenmektedir. Buna göre, plakta meydana gelen yer değiştirmeler x yönünde u , y yönünde v ve z



Şekil 6.9 Yüklemeye maruz plak. a) yüklemeye önce, b) yüklemeye sonra

yönünde w ile gösterilebilir. B noktasının yüklemeye önceki konumu ile yüklemeye sonraki konumu arasındaki mesafe u_0 ile gösterilirse, ABCD doğruyu üzerindeki C noktasının yer değiştirmesi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$u_c = u_0 - z_c \beta$$

Burada β levhanın orta yüzeyinin x yönündeki dönme miktarıdır. Buradan

$$\beta = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (6.42)$$

olarak yazılabilir. z kalınlığındaki bir levhanın herhangi bir noktasının x yönündeki yer değiştirmesi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$u = u_0 - z (\partial w_0 / \partial x) \quad (6.43)$$

Benzer şekilde y yönünde meydana gelen yer değiştirme v' de aşağıdaki gibi yazılır.

$$v = v_0 - z (\partial w_0 / \partial y) \quad (6.44)$$

Bir plakta meydana gelen birim şekil değiştirmeler ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} ile ifade edilirse, yer değiştirmeler cinsinde karşılıkları (lineer elastisiteye göre)

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \partial u / \partial x \\ \epsilon_y &= \partial v / \partial y \\ \gamma_{xy} &= (\partial u / \partial y) + (\partial v / \partial x) \end{aligned} \quad (6.45)$$

şeklinde yazılır. Buradan şekil değiştirmeler denklem (6.43) ve (6.44)' e göre aşağıdaki gibi ifade edilir (36,38).

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (6.46)$$

veya

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.47)$$

Burada orta yüzey şekil değiştirmeleri

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_o}{\partial x} \\ \frac{\partial v_o}{\partial y} \\ \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (6.48)$$

ve orta yüzey eğrilikleri de

$$\begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (6.49)$$

olarak yazılır (36,38).

Denklem (6.49)'daki son terim orta yüzeyin burulma eğriliğidir. Kirchoff yada Kirchoff-Love hipotezleri plak kalınlığı boyunca lineer bir şekil değiştirmenin olduğunu doğrulamaktadır.

Kalınlık boyunca olan şekil değişimini ifade eden denklem (6.47), gerilme şekil değiştirme bağıntısı, denklem (6.40)'da yerine koyulursa, k'nci tabakadaki gerilmeler eğrilik ve orta yüzey şekil değiştirmeleri cinsinden

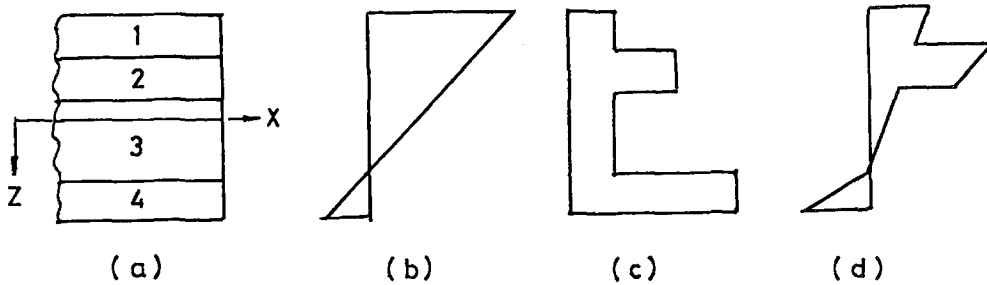
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \right\} \quad (6.50)$$

şeklinde ifade edilir. Her bir tabaka için \bar{Q}_{ij} farklı olabileceğinden plak kalınlığı boyunca oluşan şekil değiştirmeler lineer olsa bile gerilme değişiminin lineer olması gerekmez.

Şekil değiştirme ve gerilmeyle ilgili tipik bir örnek Şekil 6.10'da verilmiştir (36).

6.4.3. Plaklarda kuvvet ve moment bileşenleri

Bir plağa etki eden kuvvet ve moment bileşenleri herbir tabakanın kalınlığı boyunca gerilmelerin integre edilmesiyle elde edilir.



Şekil 6.10 Tabakalanmış bir plakta gerilme ve şekil değiştirmeler. a) Tabakalanmış plak, b) şekil değiştirme değişimi, c) modül karakteristiği, d) gerilme değişimi

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \quad (6.51)$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz$$

Burada N_x ve N_y plağın birim uzunluğuna karşılık gelen normal kuvvetler, N_{xy} ve N_{yx} plağın birim uzunluğuna karşılık gelen kesme kuvvetleridir. Şekil 6.11 ve 6.12'de N tabakalı bir plağa gelen kuvvet ve moment bileşenleri gösterilmiştir. Diğer taraftan plağa gelen momentler ise

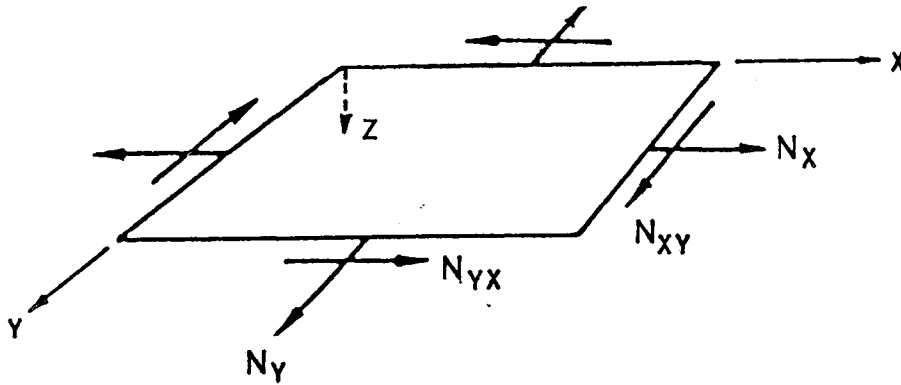
$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz$$

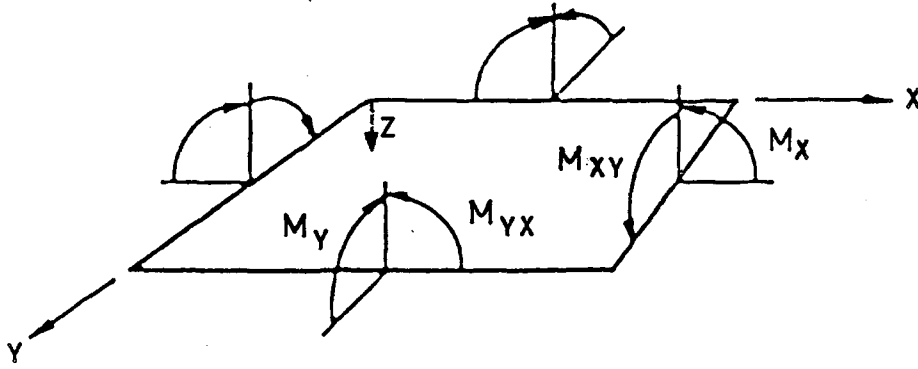
$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz$$

(6.52)

formunda verilebilir. Burada M_x ve M_y plağın birim uzunluğuna karşılık gelen normal moment bileşeni, M_{xy} ve M_{yx} de plağın birim uzunluğuna karşılık gelen yüzeye paralel moment bileşenleridir (36).



Şekil 6.11 Plakta kuvvet bileşenleri

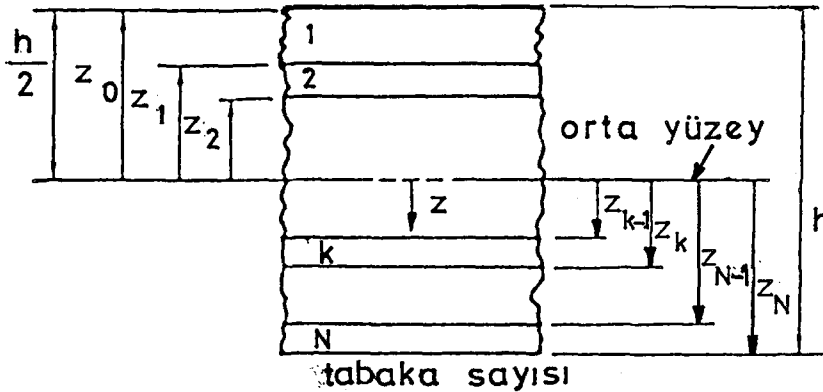


Şekil 6.12 Plakta moment bileşenleri

Şekil 6.11 ve 6.12’de gösterilen kuvvet ve moment bileşenleri N tabakalı bir plak için matris formunda aşağıdaki gibi ifade edilir (37,39).

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (6.53)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (6.54)$$



Şekil 6.13 Tabakalardan meydana gelmiş plak (28,30)

Burada z_k ve z_{k-1} Şekil6.13'de gösterilmiştir. Kuvvet ve moment bileşenleri integrasyondan sonra z 'den bağımsız olurlar. Fakat plağın orta yüzey koordinatları olan x ve y 'nin fonksiyonudurlar.

Rijitlik matrisinin, bir tabaka için sabit olması avantajını kullanarak denklem (6.53) ve (6.54) ile gösterilen integrasyon yeniden düzenlenebilir. Böylece rijitlik matrisi herbir kat için integrasyon dışına çıkar. Fakat kuvvet ve moment bileşenleri integrasyonun içinde kalır. Denklem (6.50)'deki gerilme-şekil değiştirme bağıntıları yerine konulduğu zaman

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (6.55)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} z dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} z^2 dz \quad (6.56)$$

ifadeleri elde edilir. Burada ϵ_x^0 , ϵ_y^0 ve γ_{xy}^0 orta yüzey şekil değiştirmeleri K_x, K_y ve K_{xy} 'de orta yüzeyin eğrilikleridir. Bununla beraber ϵ_x^0 , ϵ_y^0 , γ_{xy}^0 , K_x, K_y ve K_{xy} 'nin ve z 'nin fonksiyonu olmadığını belirtmek gerekir. Fakat bunlar orta yüzey değerleri olduğundan, toplama işaretleri altından çıkartılabilirler (28). Böylece (6.55) ve (6.56) denklemleri aşağıdaki şekli alırlar (36,38).

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.57)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.58)$$

Burada

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) & (i,j = 1,2,6) \\
 B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) & (i,j = 1,2,6) \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) & (i,j = 1,2,6)
 \end{aligned} \tag{6.59}$$

olarak yazılır. Denklem (6.57), (6.58) ve (6.59)'daki A_{ij} uzama rijitliği, B_{ij} birleşik (bending-stretching coupling) rijitlik ve D_{ij} eğilme rijitliği olarak adlandırılmaktadır. B_{ij} 'nin mevcudiyeti plaklarda eğilme ile uzama arasında bir bağıntıyı ifade etmektedir. B_{ij} terimi mevcut olan bir plâğı aynı anda eğmek veya burmaksızın çekmek (veya basmak) mümkün değildir. Yani çekmeye veya basmaya çalışan bir kuvvet sadece çekme şekil değiştirmelerine değil, aynı zamanda plâğı bükmeye yada burmaya sebep olur. Ayrıca böyle bir plak, orta yüzeyi uzamaya maruz kalmaksızın momente maruz bırakılamaz. Orta yüzeyine göre, malzeme ve geometrik özellikleri dolayısıyla simetrik olarak imal edilmiş tabakalı plaklarda B_{ij} sıfır değerini almaktadır (36,38).

Özel olarak bir tabakalı izotropik malzeme durumunda, malzeme özellikleri E ve ν ve kalınlıklar h olmak üzere, uzama ve eğilme rijitlikleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 A_{11} = A_{22} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \\
 D_{11} = D_{22} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}
 \end{aligned} \tag{6.59a}$$

Denklem (6.59)'daki uzama, birleşik (coupling) ve eğilme rijitlikleri daha kolay bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k h_k \\
B_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k h_k z_k \\
D_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k \left(h_k z_k^2 - \frac{h_k^3}{12} \right)
\end{aligned} \tag{6.59b}$$

Burada h_k tabaka kalınlıklarını ve z_k ise k 'nci tabaka ağırlık merkezinin orta yüzeye olan uzaklığını gösterir (36).

6.4.4. Tabakalanmış plak rijitliklerin özel durumları

Orta yüzeyine göre, malzeme ve geometrik özelliklerinin simetrik olup olmamasına göre tabakalanmış plak rijitlikleri değişir. Buna göre, genel olarak üç tabakalanmış plak durumu aşağıda dikkate alınmıştır.

6.4.4.1. Simetrik tabakalanmış plaklar

Orta yüzeye göre, malzeme ve geometrik özellikleri simetrik olarak imal edilmiş tabakalı plaklarda B_{ij} terimleri sıfır değerini alır. Buna göre, (6.57) ve (6.58) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \tag{6.60}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.61)$$

Aşağıda, simetrik tabakalanmış plakların özel durumları tanımlanmıştır. Herbir durumda, denklem (6.60) ve (6.61)'deki A_{ij} ve D_{ij} terimleri farklı değerler alır ve bazıları sıfır olur (36).

1) Simetrik tabakalanmış çok tabakalı izotropik plaklar:

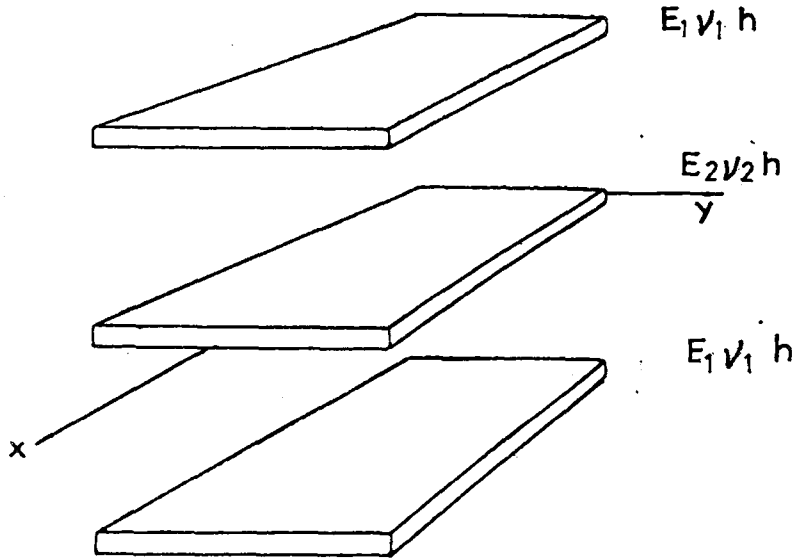
Orta yüzeye göre, malzeme ve geometrik özellikleri simetrik olarak düzenlemiş çok tabakalı izotropik plaklarda, eğilme ve uzama arasındaki birleşik etki meydana gelmez. Yani B_{ij} terimleri sıfır olur. Simetrik tabakalanmış üç tabakalı izotropik plak için basit bir örnek Şekil 6.14'te gösterilmiştir. Daha çok karmaşık ve altı tabakalı izotropik plak için farklı elastik özellikleri ve kalınlıkları tablo 6.1' de verilmiştir.

Uzama ve eğilme rijitlikleri, k 'nci tabaka için denklem (6.59) dan aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} (\bar{Q}_{11})_k = (\bar{Q}_{22})_k &= \frac{E_k}{1-\nu_k^2}, & (\bar{Q}_{16})_k = (\bar{Q}_{26})_k &= 0 \\ (\bar{Q}_{12})_k &= \frac{\nu_k E_k}{1-\nu_k^2}, & (\bar{Q}_{66})_k &= \frac{E_k}{2(1+\nu_k)} \end{aligned} \quad (6.62)$$

Kuvvet ve moment bileşenleri aşağıdaki formda hesaplanır.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad (6.63)$$



Şekil 6.14 Simetrik tabakalanmış üç tabakalı izotropik plak

Tablo 6.1 Simetrik tabakalanmış altı tabakalı izotropik plak

Tabaka	Malzeme özellikleri	Kalınlıklar
1	E_1, ν_1	h
2	E_2, ν_2	$2h$
3	E_3, ν_3	$3h$
4	E_3, ν_3	$3h$
5	E_2, ν_2	$2h$
6	E_1, ν_1	h

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.64)$$

Burada, izotropik plaklar için, denklem (6.62)'den dolayı $A_{11}=A_{22}$ ve $D_{11}=D_{22}$ 'dir(36).

2) Simetrik tabakalanmış çok tabakalı özel ortotropik plaklar:

Bu plaklarda, analitik zorlukları içeren A_{16} , A_{26} , D_{16} ve D_{26} rijitlikleri sıfırdır. Bu plaklar, asal malzeme yönleri tabakalanmış plak eksenlerine göre sıralanmış olan

ortotropik tabakalardan yapılmışlardır. Eğer tabakaların kalınlıkları, yerleri ve malzeme özellikleri plak orta yüzeyine göre simetrik ise, uzama ve eğilme arasındaki birleşik (coupling) etki yoktur. Genel bir örnek Tablo 6.2’de gösterilmiştir. Uzama ve eğilme rijitlikleri denklem (6.59)’dan k ’nci tabaka için aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned} (\bar{Q}_{11})_k &= \frac{E_1^k}{1-\nu_{12}^k \nu_{21}^k}, & (\bar{Q}_{16})_k &= 0 \\ (\bar{Q}_{12})_k &= \frac{\nu_{12}^k E_1^k}{1-\nu_{12}^k \nu_{21}^k}, & (\bar{Q}_{26})_k &= 0 \end{aligned} \quad (6.65)$$

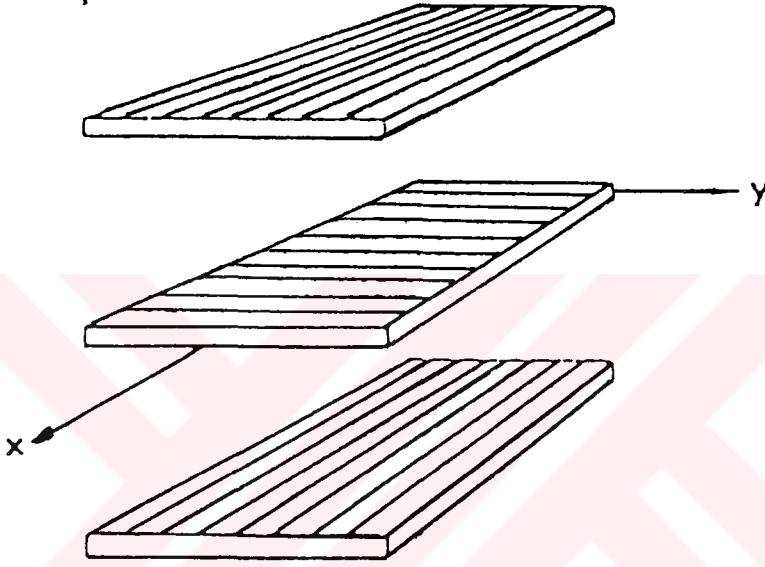
Tablo 6.2 Simetrik tabakalanmış beş tabakalı ortotropik plak

Tabaka	Malzeme özellikleri				Oryantasyon (yönelme)	Kalınlık
	Q_{11}	Q_{12}	Q_{22}	Q_{66}		
1	F_1	F_2	F_3	F_4	0°	h
2	G_1	G_2	G_3	G_4	90°	$2h$
3	H_1	H_2	H_3	H_4	90°	$4h$
4	G_1	G_2	G_3	G_4	90°	$2h$
5	F_1	F_2	F_3	F_4	0°	h

$$(\bar{Q}_{22})_k = \frac{E_2^k}{1-\nu_{12}^k \nu_{21}^k}, \quad (\bar{Q}_{66})_k = G^k_{12} \quad (6.65)$$

A_{16} , A_{26} , D_{16} ve D_{26} rijitlikleri yoktur. Çünkü $(\bar{Q}_{16})_k$ ve $(\bar{Q}_{26})_k$ sıfırdır. Simetriden dolayı B_{ij} rijitlikleri de sıfırdır. Bu yüzden, bu tip plaklar özel ortotropik plak analojisinde, “özel ortotropik plak” olarak adlandırılır. Kuvvet ve moment bileşenleri sırayla denklem (6.63) ve (6.64)’den alınabilir.

Tüm tabakaların kalınlıkları ve malzeme özellikleri aynı olduğundan simetrik tabakalanmış çok tabakalı özel ortotropik plakların çok özel durumu oluşur. Fakat onların başlıca asal malzeme yönleri plak eksenlerine göre 0° ve 90° olarak sıralanmışlardır. Örneğin $0^\circ/90^\circ/0^\circ$. Bunun gibi plaklar “düzenli simetrik çapraz-katlı (cross-ply) tabakalanmış plaklar” olarak adlandırılır. Eşit kalınlıklı ve özellikli üç tabakalı düzenli simetrik çapraz-katlı plağın basit bir örneği, Şekil 6.15’te gösterilmiştir. Her tabakanın fiber yönleri ince çizgiler halinde şematik olarak Şekil 6.15’te gösterilmiştir.



Şekil 6.15 Üç tabakalı düzenli simetrik çapraz-katlı tabakalanmış plağın ayrılmış görünüşü

Simetrik tabakalanmış çok katlı ortotropik plakların rijitlikleri aşağıda sıralanmıştır. İlk önce uzama rijitliği verilmiştir.

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (6.66)$$

Burada A_{ij} terimi, tabaka kalınlıkları ile ayrı tabaka \bar{Q}_{ij} terimleri çarpımının toplamıdır. Denklem (6.37)’deki transforme edilmiş indirgenmiş rijitlik, \bar{Q}_{ij} ifadelerinden \bar{Q}_{11} , \bar{Q}_{12} , \bar{Q}_{22} ve \bar{Q}_{66} pozitif olarak tanımlanır. Böylece, A_{11} , A_{12} , A_{22} ve A_{66} kalınlıklardan dolayı, daima pozitiftir. Ancak, \bar{Q}_{16} ve \bar{Q}_{26} plak eksenlerine göre 0° ve 90° yönelmiş

tabakalar için sıfırdır. Böylece A_{16} ve A_{26} plak eksenlerine göre 0° veya 90° olarak yönelmiş ortotropik tabakalı plaklar için sıfırdır.

İkinci olarak, birleşik rijitlik aşağıda verilmiştir.

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (6.67)$$

Eğer çapraz-katlı plaklar orta yüzeye göre simetrikse, bu durumda tüm B_{ij} 'ler sıfır olur.

Son olarak, eğilme rijitliği aşağıda verilmiştir.

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (6.68)$$

D_{ij} terimi, $(z_k^3 - z_{k-1}^3)$ terimi ile ayrı tabaka \bar{Q}_{ij} terimleri çarpımlarının toplamıdır. \bar{Q}_{11} , \bar{Q}_{12} , \bar{Q}_{22} ve \bar{Q}_{66} 'nın ve geometrik teriminin pozitif tanımlanmasından dolayı, D_{11} , D_{12} , D_{22} ve D_{66} pozitif olarak tanımlanır. Plak eksenlerine göre, asal malzeme yönleri 0° ve 90° olan tabakalar için \bar{Q}_{16} ve \bar{Q}_{26} sıfırdır. Böylece, D_{16} ve D_{26} sıfırdır (36).

6.4.4.2. Antisimetrik tabakalanmış plaklar

Çekme ve eğilme arasındaki birleşik (coupling) etkiden kaçınmak için, orta yüzeye göre simetrik tabakalanmış bir plak çoğu kez caziptir. Ancak, tabakalanmış plakların fiziksel uygulamalarının çoğunda, tasarım ihtiyaçlarını karşılamak için, nonsimetrik tabakalanmış plaklar gerekir. Örneğin, fiberleri zıt yönlü tabakadan yapılmış bir plağın kayma rijitliği artırılmak istenirse, bir yönde, plak eksenlerine bir miktar açı yapan tabaka durumları bu ihtiyacı karşılar. Bu ihtiyaçları karşılamak için, tabakadan tabakaya birbirini izleyen, yani, $+\alpha$ $-\alpha$ $+\alpha$ $-\alpha$ yönlerindeki gibi, tabakalar gerekir.

Böylece, orta yüzeye göre simetri yok olur ve tabakalanmış plağın karakteristik davranışları simetrik durumdan önemli bir şekilde değişebilir. Yukarıda verilen örnekteki tabakalanmış plak simetrik olmasa da (orta yüzeye göre antisimetrikdir), belirli rijitlik basitleştirmeleri mümkündür.

Eğer bitişik tabakalı tabakalanmış plak eksenleri yönü ile asal malzeme özelliği yönlerinin işaretleri birbirini izliyorsa, tabakaların sayısına eşit bir antisimetrik tabakalanmış plakların genel sınıfı olmalıdır. İlave olarak, her bir tabaka parçasının kalınlıkları aynı olmalıdır. Yukarıda şart koşulan istisnalar sadece 0° veya 90° yönlerinde açı olduğunda meydana gelir.

Eğer merkezi tabaka 0° 'li veya 90° 'li bir tabaka ise (merkezi tabaka sembolik olarak ikiye bölünür ve aynı yönlenmiş iki tabaka gibi düşünülür), o zaman tabakaların bambaşka bir sayısı tanımlamaya uyar.

Anizotropik tabakalı antisimetrik tabakalanmış bir plağın rijitlikleri, denklem (6.57) ve (6.58)'de verilenden basit değildir. Ancak, genel olarak ortotropik malzeme özellikli ve antisimetrik tabakalı olduğu gibi, onların kalınlıkları simetriktir. Birleşik (coupled) uzama rijitliği,

$$A_{16} = \sum_{k=1}^N (Q_{16})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (6.69)$$

kolayca görüldüğü gibi sıfırdır. Burada,

$$(Q_{16})_{+\alpha} = -(Q_{16})_{-\alpha} \quad (6.70)$$

dır. Simetrik tabakaların orta yüzeye göre kalınlıkları eşittir. Bundan dolayı, çok tabakalı $(Q_{16})_k$ geometrik teriminin değeri aynıdır. Benzer olarak, A_{26} , eğilme-burulma birleşik rijitliği D_{16} gibi sıfırdır. Buna göre,

$$D_{16} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{16})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (6.71)$$

dir. Burada tekrar denklem (6.70) dikkate alınır ve orta yüzeye göre simetrik iki tabaka için çok tabakalı geometrik terim $(\bar{Q}_{16})_k$ 'de aynıdır. D_{26} için de aynı usul uygulanır.

B_{ij} birleşik rijitlikleri, genel ortotropik tabakalı antisimetrik tabakalanmış plakların farklı sınıfları için değişir ve gerçekte aşağıdaki kuvvet ve moment bileşenlerinden başka genel ifade bulunmaz.

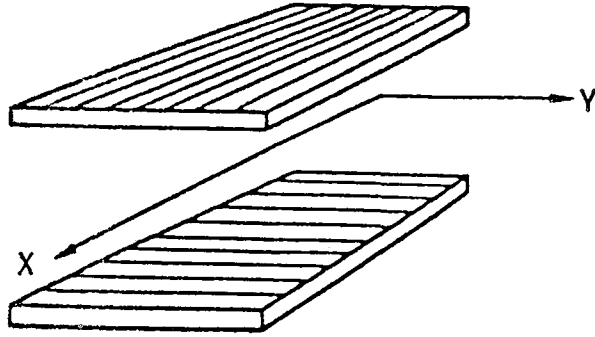
$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.72)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.73)$$

Antisimetrik tabakalanmış plakların önemli bir sınıfı olan, antisimetrik çapraz-katlı (cross-ply) tabakalanmış plaklar aşağıda verilmiştir (36).

Antisimetrik çapraz-katlı (cross-ply) tabakalanmış plaklar :

Antisimetrik çapraz-katlı (cross-ply) tabakalanmış bir plak, Şekil 6.16' nın basit örneğindeki gibi, tabakalanmış plak eksenlerine 0° ve 90° li birbirini izleyen asal malzeme yönleri ile diğer herbirinde, bir ortotropiğin sayısına eşit yayılmış tabakadan meydana gelmiştir. Tablo 6.3'de daha karmaşık bir örnek verilmiştir. Bunun gibi tabakalanmış plaklarda, A_{16} , A_{26} , D_{16} ve D_{26} yoktur. Fakat, uzama ve eğilme arasındaki birleşik (coupling) etki vardır. Bunun gibi birleşik (coupling) etki aşağıda kuvvet ve moment bileşenlerinde verilmiştir.



Şekil 6.16 Düzenli antisimetrik çapraz-katlı (cross-ply) tabakalanmış iki tabakalı bir plağın ayrılmış görünüşü

Tablo 6.3 Özel ortotropik altı tabakalı antisimetrik tabakalanmış plak

Tabaka	Malzeme özellikleri				Oryantasyon (Yönelme)	Kalınlık
	Q_{11}	Q_{12}	Q_{22}	Q_{66}		
1	F_1	F_2	F_3	F_4	0°	h
2	G_1	G_2	G_3	G_4	90°	$3h$
3	H_1	H_2	H_3	H_4	90°	$2h$
4	H_1	H_2	H_3	H_4	0°	$2h$
5	G_1	G_2	G_3	G_4	0°	$3h$
6	F_1	F_2	F_3	F_4	90°	h

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.74)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.75)$$

Düzenli antisimetrik çapraz-katlı (cross-ply) tabakalanmış bir plak, bütün kalınlıkları eşit tabakaya sahip olmak için, tanımlanmıştır. Çünkü, imal etme basitliği yaygındır. Görüldüğü gibi, B_{11} birleşik (coupling) rijitliği sıfıra yaklaştırmak için tabakaların sayısı artırılır (36).

6.4.4.3. Nonsimetrik tabakalanmış plaklar

Çok tabakalı izotropik tabakaların kalınlıklar h_k ve malzeme özellikleri E_k ve ν_k , genel durumu için, uzama, birleşik ve eğilme rijitlikleri denklem (6.59) da verilmiştir. Bu denklemdeki \bar{Q}_{ij} rijitlikleri ise denklem (6.62)'de verilmiştir.

Rijitliklerin özel azaltılması h_k kalınlıkları keyfi olduğundan mümkün değildir. Buna göre, farklı malzeme özellikli ve farklı kalınlıklı izotropik tabakaların orta yüzeye göre nonsimetrik olarak düzenlenmeleri halinde uzama ve eğilme arasındaki birleşik (coupling) etki bulunabilir. Böylece, uzama ve eğilme arasındaki birleşik (coupling) etki, malzeme ortotropisinin tezahürü değildir. Fakat tabakaların farklı oluşundan dolayı, geometrik ve malzeme özelliklerinin bir bileşimidir. Kuvvet ve moment bileşenleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.76)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.77)$$

Nonsimetrik tabakalanmış çok tabakalı özel ortotropik tabakaların, kuvvet ve moment bileşenleri denklem (6.76) ve (6.77)' den hesaplanabilir. Fakat, A_{11} , B_{11} ve D_{11} , sırasıyla, A_{22} , ve B_{22} ve D_{22} ' den farklıdır. Buna göre, kayma birleşik (coupling) etkisi yoktur. Bundan dolayı, bu çeşit tabakalanmış problemlerin çözümü izotropik tabakalı plaklarda olduğu gibi kolaydır (36).

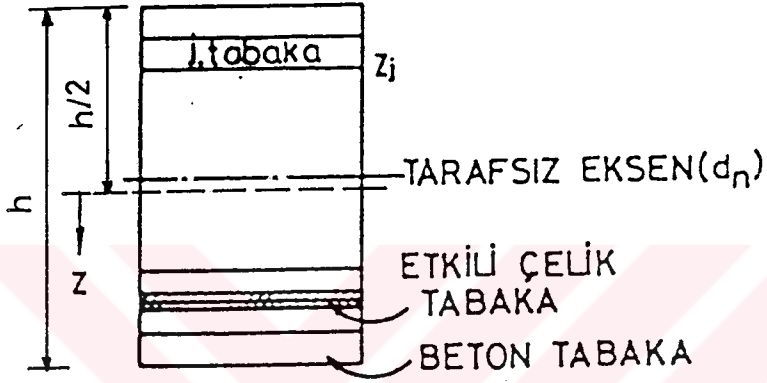
6.5. Sonlu Elemanlar Metodunun Betonarmeye Uygulanması

Şekil 6.17'de gösterildiği gibi, tipik bir sonlu eleman hayali beton ve kompozit (beton ve çelikten oluşan) tabakalara bölünmüştür. Elemanın yer değiştirme alanının sürekli olduğu ve tabakalar arasında aralık olmadığı kabul edilmiştir. Her tabakada malzeme özellikleri farklı olabilir, fakat bu özelliklerin tabaka kalınlığının her yerinde aynı olduğu kabul edilmiştir. Buna göre, malzeme özelliklerini içeren integrasyon hacmi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\int [B]^T [D][B]_{dv} = \sum_{i=1}^{n_k} \int_v [B]^T [D_k]_i [B] dV + \sum_{j=1}^{n_c} \int_v [B]^T [D_c]_j [B] dV \quad (6.78)$$

Burada $[D_k]_i$ ve $[D_c]_j$ sırasıyla, i 'inci kompozit tabakanın ve j 'inci beton tabakanın malzeme matrisleri, n_k ve n_c ise kompozit tabakaların ve beton tabakaların sayısıdır.

Mindlin hipotezine dayanan, yer değiştirme alanı matris formunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.



şekil 6.17 Tabakalanmış bir kesit

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}_j \quad (6.79)$$

Burada n düğüm sayısı ve N_j ise enterpolasyon fonksiyonudur.

şekil değiştirmeler ile N_j ile yer değiştirmeler arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N}{\partial x} & -\frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (6.80)$$

veya

$$\{\epsilon_p\} = [B_p]\{u\} \quad (6.81)$$

Aynı zamanda, enine kayma şekil değiştirmeleri ve yer değiştirme elemanları arasındaki bağıntı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial N}{\partial y} & -N & 0 \\ \frac{\partial N}{\partial y} & 0 & -N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (6.82)$$

veya

$$\{\epsilon_t\} = [B_t]\{u\} \quad (6.83)$$

Denklem (6.81) ve (6.83)'deki alt denklemler, denklem (6.78)'de yerine yazılır ve malzeme matrisi yeniden düzenlenirse, eleman rijitlik matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[K] = \int_V [B_p]^T [D_p] [B_p] dV + \int_V [B_t]^T [D_t] [B_t] dV \quad (6.84)$$

Burada $[D_p]$ ve $[D_t]$ sırasıyla, malzeme matrisinin eğilme ve kayma kısımlarıdır(22). Bunlardan eğilme malzeme matrisinin terimleri denklem (6.59b)'den aşağıdaki yazılabilir.

$$D_{pij} = \sum_{k=1}^N (Q_{ij})_k \left(h_k z_k + \frac{h_k^3}{12} \right) \quad (6.85)$$

Burada z_k , orta yüzeyden k 'inci tabaka ortasına olan yüksekliği ve h_k k 'inci tabakanın kalınlığını gösterir, $(Q_{ij})_k$ k 'inci tabakanın eğilme rijitliklerini gösterir, izotropik ve ortotropik plaklar için denklem (6.62) ve (6.65)'den hesaplanabilir (36).

Denklem (6.84)'deki kayma malzeme matrisi aşağıda verilmiştir (39).

$$[D_s] = \frac{E h k}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.86)$$

Burada k kayma düzeltme faktörüdür ve $k=5/6$ dir. E elastisite modülü ve ν poisson oranıdır (39).

Düğüm yer değiştirme parametrelerinin bir kez hesaplanması ile, denklem (6.81) ve (6.85) kullanılarak her tabakanın şekil değiştirme elemanları çelik ve beton tabakalar için aşağıda verilmiştir.

$$\{\varepsilon_s\}_i = \begin{cases} \varepsilon_{xi} = (d_x - d_{nx}) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yi} = (d_y - d_{ny}) \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{cases} \quad (6.87)$$

$$\{\epsilon_c\}_j = \begin{cases} \epsilon_{xj} = (-d_{nx} + 0.5h + z_j) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \epsilon_{yj} = (-d_{ny} + 0.5h + z_j) \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \gamma_{xyj} = (-d_{nxy} + 0.5h + z_j) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xzj} = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \gamma_{yzj} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{cases} \quad (6.88)$$

Burada d_{nx} , d_{ny} ve d_{nxy} tarafsız eksen derinliklerini gösterir (Şekil 6.16) ve düzlemde istenmeyen kuvvetlerin gelişmesini önlemek için verilmişlerdir.

$\int \sigma_x dz = \int \sigma_y dz = \int \tau_{xy} dz = 0$ şartının kullanılması ile hesaplanabilirler. Burada z orta yüzeyden (Şekil 6.16) ölçülen derinliktir. Buna ilave olarak, kullanılan basitleştirilmiş kabuller; derinlik boyunca kayma modülü G sabittir ve d_{nxy} 'nin $h/2$ kadar olduğu kabul edilebilir. Burada h elemanın kalınlığıdır. d_x ve d_y , x ve y yönlerindeki faydalı yüksekliklerdir ve z_j ise orta yüzeyden beton tabaka ortasına ölçülen yüksekliklerdir (Şekil 6.16) (22).

Gerilme elemanları ise, gerilme-şekil değiştirme ilişkisine göre hesap edilmiş ve malzemenin sınır durumlarını kontrol etmek için kullanılmışlardır (22). Buna göre beton tabakalar için gerilme-şekil değiştirme ilişkileri denklem (6.39), (6.40) ve (6.62)'den aşağıdaki gibi yazılabilir (36).

$$\{\sigma_c\}_j = [\bar{Q}]_{kj} \{\epsilon_c\}_j \quad (6.89)$$

veya

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\}_{cj} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}_{cj} \quad (6.90)$$

Donatı çubuğu yönünde ve ona dik yöndeki yerel eksenlerde gerilme-şekil değiştirme ilişkisi denklem (3.1) ve (6.40)'dan aşağıdaki gibi yazılabilir (22).

$$\{\sigma_s\}_i = [\bar{Q}]_{ki} \{\varepsilon_s\}_i \quad (6.91)$$

veya

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\}_{si} = \begin{bmatrix} E_{s1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{array} \right\}_{si}$$

Burada $\{\sigma_s\}_i$ ve $\{\varepsilon_s\}_i$ i'inci çelik tabanın ortasındaki gerilme ve şekil değiştirmeyi, $\{\sigma_c\}_j$ ve $\{\varepsilon_c\}_j$ j'inci beton tabakanın ortasındaki gerilme ve şekil değiştirmeyi gösterir. E_{s1} çeliğin birinci elastisite modülünü gösterir ve çelik aktıktan sonra E_{s1} yerine ikinci elastisite modülü E_{s2} alınır. Denklem (6.90)'daki \bar{Q}_{ij} terimleri, beton tabakalarda, izotropik plaklar için verilen denklem (5.62)'den alınır (36).

Eğer beton bir yönde çatlarsa, gerilme-şekil değiştirme ilişkisi denklem (3.4)'den aşağıdaki gibi yazılabilir (22).

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{array} \right\}_{cj} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \frac{1-\nu}{2} G \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{array} \right\}_{cj}$$

İki yönde çatlama olursa, denklem (3.4) aşağıdaki gibi yazılabilir (24,22).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_{cj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda G}{2} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}_{cj} \quad (6.92)$$

Burada 1 ve 2 sırayla, çatlaklara paralel ve dik yöndedir ve G çatlamamış beton için kayma modülü ve $\lambda = 0.40$ 'dir.

Nonlinear problemlerde gerçek gerilmeler ile hesaplanan gerilmeler genellikle uyuzmaz. Çünkü dengelenmemiş düğüm kuvvetleri ve eşdeğer düğüm kuvvetlerinin hesaplanması gerekir. Her iterasyonda eşdeğer düğüm kuvvetleri statik olarak eşdeğer gerilme alanında aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\begin{aligned} \{R\}_{eşdeğer} &= \int_v [B]^T \{\sigma\} dV \\ &= \int_v [B]^T \{\sigma_p\} dV + \int_v [B]^T \{\sigma_s\} dV \end{aligned} \quad (6.93)$$

Burada, $\{\sigma_p\}$ eğilme gerilmelerini ve $\{\sigma_s\}$ ise kayma gerilmelerini gösterir. Eşdeğer düğüm kuvvetleri bulunduktan sonra, dengelenmemiş düğüm kuvvetleri aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\{R\}_{dengelenmemiş} = \{R\}_{uygulanmış} - \{R\}_{eşdeğer} \quad (6.94)$$

Çözümde bu dengelenmemiş (artık) düğüm kuvvetlerini bulmak için yük artımı uygulanmış ve yakınsaklık toleransına yaklaşmak için iteratif olarak yeniden hesaplanmıştır (22).

7. DENEYSEL ÇALIŞMA

Deneysel çalışma olarak betonarme plakların yük-sehim ilişkisinin belirlenebilmesi için Selçuk Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü yapı laboratuvarında üretilen plak numuneler üzerinde denemeler yapılmıştır. Yapılan deneyler de üç çeşit beton sınıfı kullanılmıştır. Kullanılan beton sınıfları C14, C16 ve C20'dir.

7.1. Agrega Granülometrisinin Belirlenmesi

Beton karışımlarında esas alınan agrega granülometrisi, laboratuvarında yapılan elek analizleri ile belirlenmiş ve yönetmelikte verilen sınır değerlerle karşılaştırılmış ve agrega birleşiminin kullanılabilir sınırlar içinde kaldığı görülmüştür. Tablo 7.1'de elek analizi sonuçları ve agrega granülometrik değerleri verilmiştir.

Tablo 7.1 Granülometri deneyi sonuçları

Elek boyutu (mm)	Elek üstünde kalan ağırlık (gr)	Elek üstünde kalan kümülatif ağırlık (gr)	Elek üstünde kalan kümülatif yüzde q (%)	Elekten geçen kümülatif p (%)	1-P (%)
31.5	600	600	5	95	5
16	1000	1600	14	86	14
8	1100	2700	23	77	23
4	1900	4600	40	60	40
2	1300	5900	51	49	51
1	1700	7600	66	34	66
0.50	2300	9900	85	15	85
0.25	1450	11350	98	2	98
elek altı	250	11600	100	0	-

Tablo 7.1'de maksimum elek boyutu 31.5 mm olan bir dizi elek ile analiz yapılmış ve agregaların granülometri eğrisinin ordinat değerleri ve incelik modülünün hesabında esas alınan değerler verilmiştir. Daha sonra deneyden bulunan agrega granülometri değerleri TS706'da verilen sınır eğri değerleri ile karşılaştırılmıştır.

Tablo 7.1'de verilen P değerleri granülometri eğrisinin ordinatlarını gösterir (40) ve Tablo 7.1'den incelik modülü ($\sum (1-P)/100$) = 3.82 olarak bulunmuştur.

TS706'ya göre maksimum tane büyüklüğüne göre karışık agregaların incelik, kalınlık sınırları ve ideal granülometri değerleri Tablo 7.2'de gösterilmiştir. Tabloda C sütununda verilen değerler incelik sınırını, A sütununda verilen değerler kalınlık sınırını ve B sütununda verilenler ise ideal granülometri değerlerini göstermektedir (41).

Tablo 7.2 TS706'ya göre maksimum agrega boyutu 31.5 mm olan karışık agregaların incelik, kalınlık ve ideal granülometri değerleri

Elek boy (mm)	Elekten geçen kümülatif değerler yüzde olarak			
	Sınır değerler (TS706)			Deneydeki P değerleri
	C	B	A	
31.5	100	100	100	95
16	89	80	62	86
8	77	62	38	77
4	65	47	23	60
2	53	37	14	49
1	42	28	8	34
0.50	-	-	-	15
0.25	15	8	2	2

Tablo 7.2 deki, deneyden bulunan P değerleri ile TS706'ya göre verilen sınır değerler karşılaştırıldığında, deneyden bulunan sonuçların B ile C eğrisi arasında

kaldığı görülür. Dolayısıyla granülometrisi belirlenen karışık agreganın beton karışımında kullanılabileceği ortaya çıkar.

7.2. Beton Karışım Hesabı

Beton karışım hesapları, agrega granülometrisi esas alınarak ve C14 betonu için aşağıda verilmiştir. C16 ve C20 betonu için sadece sonuçlar tablo halinde verilmiştir (40).

C14 betonu için karışım hesapları :

C14 betonu dayanımı : $f_c = 140 \text{ kg/cm}^2$

C14 betonu için : $\Delta f_c = 40 \text{ kg/cm}^2$

1) Hedeflenen beton dayanımı :

$$f = f_c + \Delta f = 140 + 40 = 180 \text{ kg/cm}^2$$

2) Çimento/Su oranı :

$$f = G r_c \left(\frac{C}{W} - 0.5 \right)$$

Burada r_c çimento dayanımı, G agreganın granülometrisine ve maksimum agrega boyutu D 'ye bağlı olan bir katsayı, C çimento ağırlığı ve W ise suyun ağırlığıdır.

Buna göre, çimento/su oranı,

$$f = 180 \text{ kg/cm}^2, \quad r_c = 350 \text{ kg/cm}^2, \quad G = 0.46$$

ise

$$180 = 0.46 \times 350 \left(\frac{C}{W} - 0.5 \right)$$

$$180 = 161 \frac{C}{W} - 80.5$$

$$\frac{C}{W} = 2.11$$

olarak bulunur.

3) Su miktarı :

$$W = \gamma (10 - m)$$

$$m = 3.82 \text{ (incelik katsayısı)}$$

$$\gamma = 29 \text{ (betonun işlenebilme katsayısı)}$$

$$W = 29 (10 - 3.82) = 179 \text{ kg}$$

4) Çimento miktarı :

$$\frac{C}{W} = 1.62 \Rightarrow C = W \cdot 1.62 = 179 \times 1.62 = 290 \text{ kg}$$

5) 1 m³ üretilmiş betonda agreganın m³ olarak gerçek hacmi :

$$a = 1 - \left(\frac{C}{\delta_c \times 1000} + \frac{W}{1000} + h \right)$$

Burada $\delta_c = 3.12 \text{ kg/dm}^3$ çimentonun özgül ağırlığı ve $h = 0.01$ bir katsayıdır.

$$a = 1 - \left(\frac{290}{3.12 \times 1000} + \frac{179}{1000} + 0.01 \right) = 0.72$$

Agrega miktarı : $A = a \cdot \gamma_A \cdot 1000$

Burada $\gamma_A = 2.60 \text{ kg/dm}^3$ agreganın özgül ağırlığıdır.

$$A = 0.72 \times 2.60 \times 1000 = 1872 \text{ kg}$$

1 m³ betonda karışım miktarı :

$$\begin{array}{r} \text{Çimento} : 290 \text{ kg} \\ \text{Agrega} : 1872 \text{ kg} \\ \text{Su} : 179 \text{ kg} \\ + \text{-----} \\ G = 2377 \text{ kg} \end{array}$$

C16 ve C20 betonu için karışım miktarları aşağıda verilmiştir (40).

C16 için 1m³ betonda karışım miktarları :

$$f_c = 160 \text{ kg/cm}^2, \quad \Delta f = 60 \text{ kg/cm}^2$$

$$\begin{array}{r} \text{Çimento} : 312 \text{ kg} \\ \text{Agrega} : 1846 \text{ kg} \\ \text{Su} : 179 \text{ kg} \\ + \text{-----} \\ G = 2337 \text{ kg} \end{array}$$

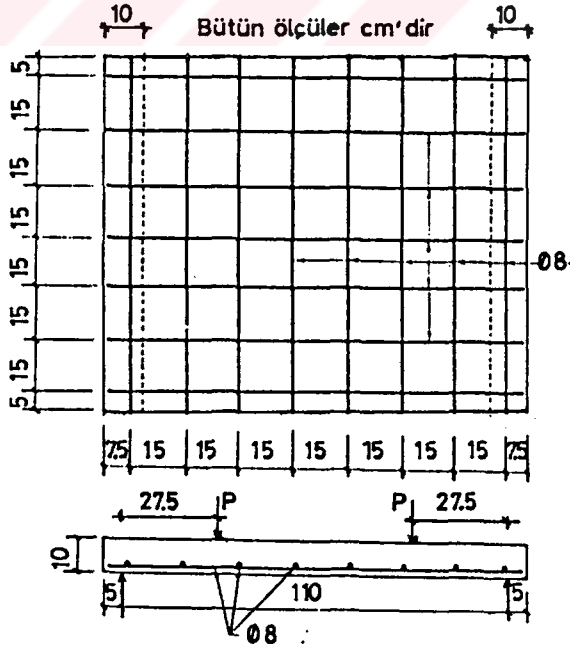
C20 için 1 m³ betonda karışım miktarları :

$$f_c = 200 \text{ kg/cm}^2, \quad \Delta f = 80 \text{ kg/cm}^2$$

Çimento :	378 kg
Agrega :	1794 kg
Su :	179 kg
	+
G =	2351 kg

7.3. İmal Edilen Plakların Yük-Sehim İlişkisi

Yukarıdaki karışım miktarlarına göre, C14, C16 ve C20 beton sınıflarından üçer adet 100x120 cm boyutlarında ve 10 cm kalınlığında ve her iki yönde Ø8/15'lik donatıya sahip plak ve üçer adet standart silindir numune laboratuvarında imal edilmiştir (Şekil 7.1). Silindir numuneler 28 gün suda saklanmış ve 28 gün sonra kırılarak beton dayanımları bulunmuştur. Plak numunelerde aynı şekilde 28 gün gerekli bakımı yapılarak ve 28 gün sonra S.Ü.Müh.Mim.Fak.İnş.Böl.Yapı laboratuvarındaki eğilme deney aletinde kırılarak yük-sehim değerleri bulunmuştur. Yük, sıfırdan başlanarak kademeli olarak artırılmış ve plak kırılıncaya kadar yük artışı devam ettirilmiştir.



Şekil 7.1 Deneye tabi tutulan plakların boyutları, donatı detayı ve yükleme durumu

Sehimler ise belli aralıklarda okunarak plak kırılıncaya kadar devam edilmiştir. Bu şekilde elde edilen yük-sehim değerlerinin ortalamaları üç beton sınıfına göre imal edilen plaklar için tablo ve grafik halinde sırayla verilmiştir. Plaklar mesnet ortasından $l/4$ mesafesinde iki çizgisel tekil yükü yüklenmiş ve sehimler $l/3$ mesafesinde ölçülmüştür.

Tablo 7.3 C14 beton sınıfına göre imal edilen plakların $l/3$ mesafesindeki ortalama yük-sehim değerleri

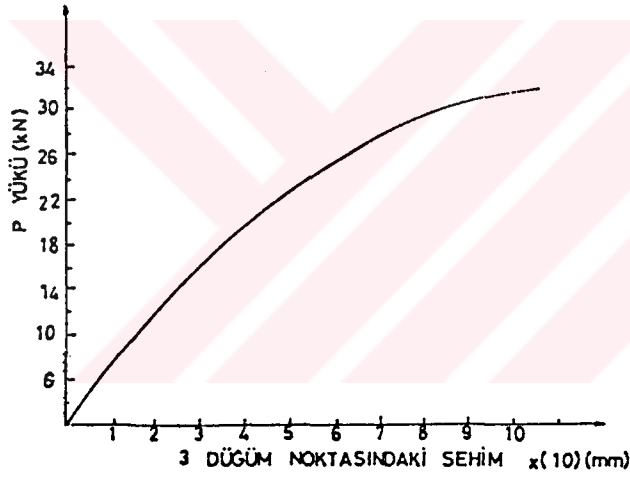
Yük (kN)	Sehim (mm)	Yük (kN)	Sehim (mm)	Yük (kN)	Sehim (mm)
4	0.04	14	0.25	24	0.53
6	0.08	16	0.30	26	0.61
8	0.11	18	0.35	28	0.74
10	0.15	20	0.41	30	0.82
12	0.20	22	0.47	32	1.05

Tablo 7.4 C16 beton sınıfına göre imal edilen plakların $l/3$ mesafesindeki ortalama yük-sehim değerleri

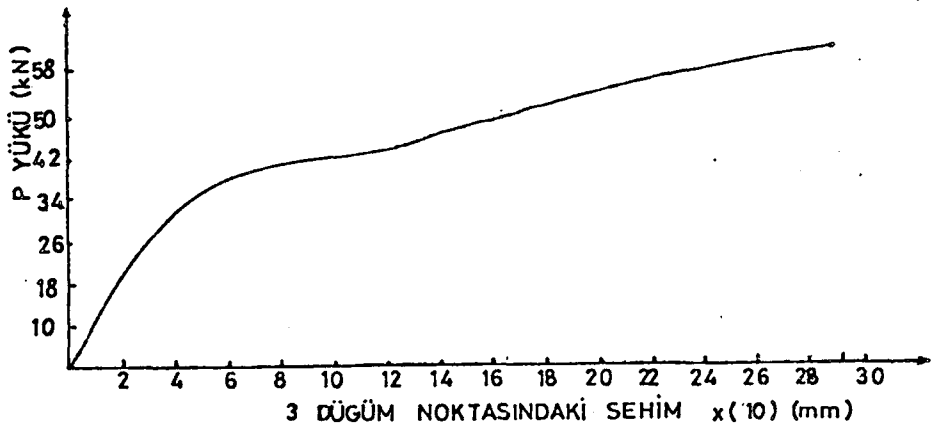
Yük (kN)	Sehim (mm)	Yük (kN)	Sehim (mm)	Yük (kN)	Sehim (mm)	Yük (kN)	Sehim (mm)
4	0.05	20	0.55	36	1.50	52	2.63
6	0.08	22	0.62	38	1.64	54	2.81
8	0.14	24	0.69	40	1.78	56	2.91
10	0.20	26	0.77	42	1.91	58	3.08
12	0.29	28	0.87	44	2.07	60	3.38
14	0.35	30	0.98	46	2.19		
16	0.44	32	1.17	48	2.33		
18	0.50	34	1.33	50	2.48		

Tablo 7.5 C20 beton sınıfına göre imal edilen plakların $l/3$ mesafesindeki ortalama yük-sehim değerleri

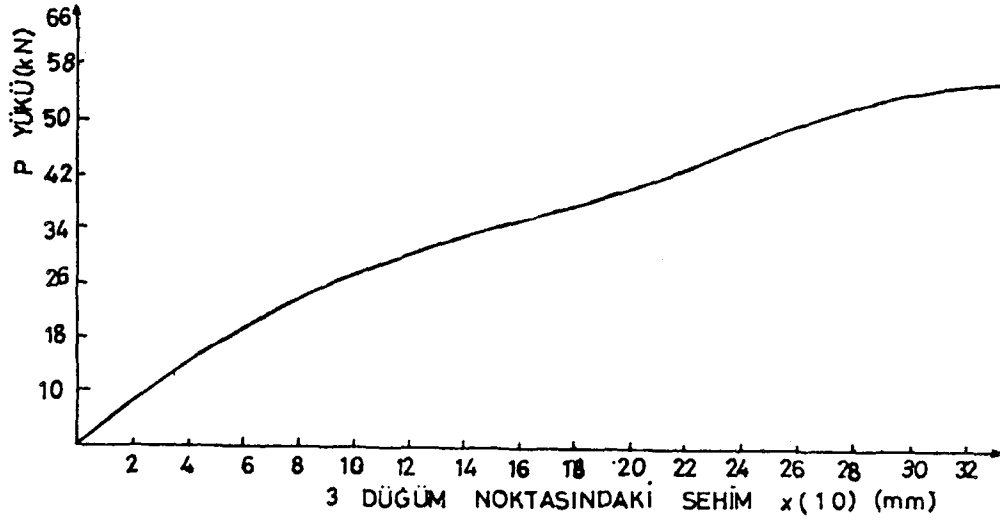
Yük (kN)	Sehim (mm)	Yük (kN)	Sehim (mm)	Yük (kN)	Sehim (mm)	Yük (kN)	Sehim (mm)
4	0.02	20	0.21	36	0.50	52	1.88
6	0.04	22	0.24	38	0.59	54	2.10
8	0.06	24	0.27	40	0.75	56	2.25
10	0.09	26	0.30	42	1.12	58	2.50
12	0.11	28	0.33	44	1.20	60	2.72
14	0.14	30	0.37	46	1.33	62	2.92
16	0.16	32	0.40	48	1.53		
18	0.18	34	0.45	50	1.67		



Şekil 7.2 C14 betonuna göre imal edilmiş plakların yük-sehim ilişkisi



Şekil 7.3 C16 betonuna göre imal edilmiş plakların yük-sehim ilişkisi



Şekil 7.4 C20 betonuna göre imal edilmiş plakların yük-sehim ilişkisi

Üç beton sınıfına göre imal edilmiş olan silindir numunelerin basınç dayanımları Tablo 7.6'da verilmiştir.

Tablo 7.6 Silindir numune basınç dayanımları

Beton Sınıfı	Numune dayanımları (N/mm ²)			Ortalama (N/mm ²)	Elastisite modülü x10 ⁴ (N/mm ²)
	1	2	3		
C14	12	12	13	12.3	2.54
C16	15	15	16	15.3	2.67
C20	20.3	19.3	18.7	19.4	2.83

Deneyisel çalışmada kullanılan deney aleti ve plakların kırılmasını gösteren resimler EK-4'de verilmişlerdir.

8. BİLGİSAYAR PROGRAMI

8.1. Bilgisayar Programında Kullanılan Ortotropik Plak Denklemleri

Plaklar, kalınlığı diğer iki boyutu yanında küçük olan ve düzlemine dik olarak yüklenen taşıyıcı elemanlardır. Plakların eğilmesini idare eden ve kayma şekil değiştirmelerini göz önüne alan, plak orta düzleminin w sehimi, θ_x ve θ_y dönmeleri cinsinden, denklemler aşağıda verilmiştir (Bu teori plakların kayma şekil değiştirme teorisi olarak adlandırılır).

$$\begin{aligned}
 & D_{44} \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + D_{55} \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + p = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + D_{33} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) - D_{44} \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (8.1) \\
 & D_{33} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) - D_{55} \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Burada p yayılı yükün şiddetidir ve D_{44} , D_{55} , D_{11} , D_{22} , ve D_{33} ise ortotropik plak rijitlikleridir.

$$\begin{aligned}
 D_{44} &= G_{23} h \\
 D_{55} &= G_{13} h \\
 D_{11} &= \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \\
 D_{22} &= \frac{E_2 D_{11}}{E_1}
 \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$D_{12} = \nu_{12} D_{22} = \nu_{21} D_{11} \quad (8.2)$$

$$D_{33} = \frac{G_{12} h^3}{12}$$

Burada E_1 ve E_2 , x ve y yönlerindeki elastisite modüllerini, ν_{12} ve ν_{21} ($=\nu_{12}E_2/E_1$) Poisson oranlarını, G_{12} , G_{13} ve G_{23} plağın malzeme eksenlerinin x-y, x-z ve y-z düzlemlerindeki kayma modüllerini ve h plağın kalınlığını göstermektedir.

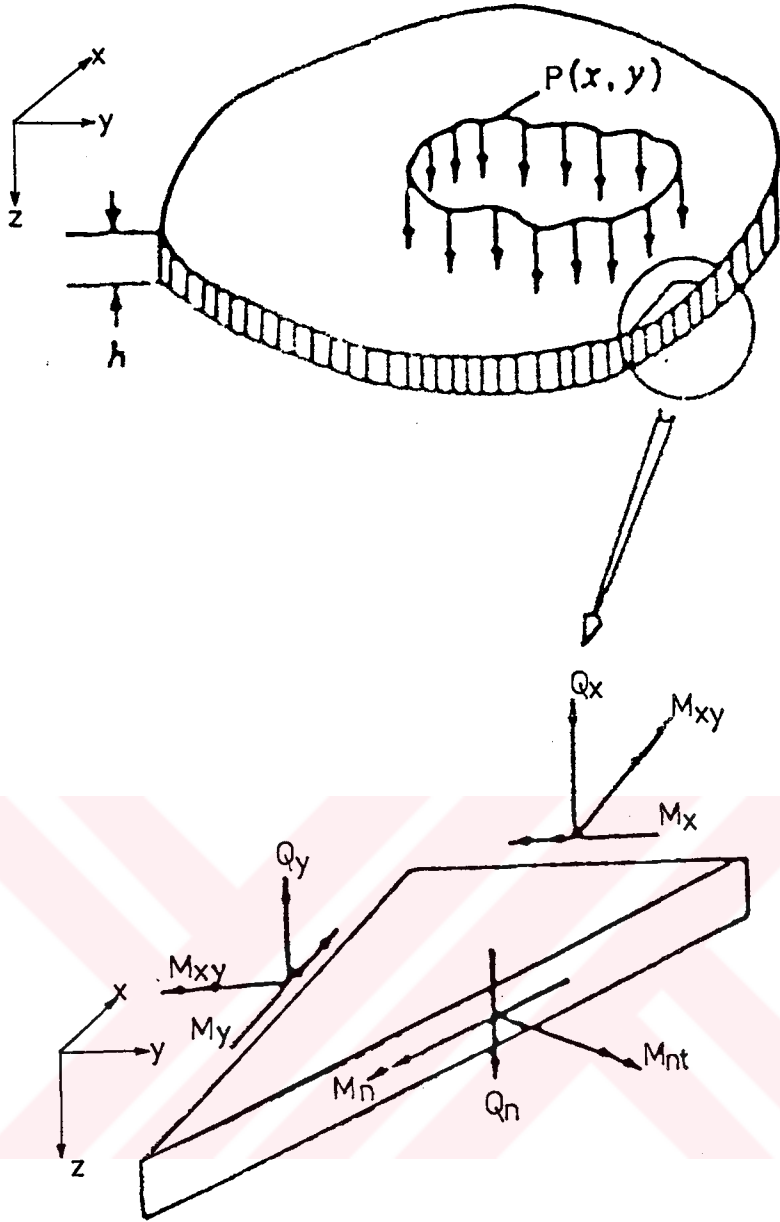
Bir plak elemanının moment ve kayma kuvveti bileşenleri, doğal sınır şartlarındaki terimler ile aşağıdaki gibi tanımlanabilirler (Şekil 8.1).

$$\begin{aligned} M_x &= D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ M_y &= D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ M_{xy} &= D_{33} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (8.3)$$

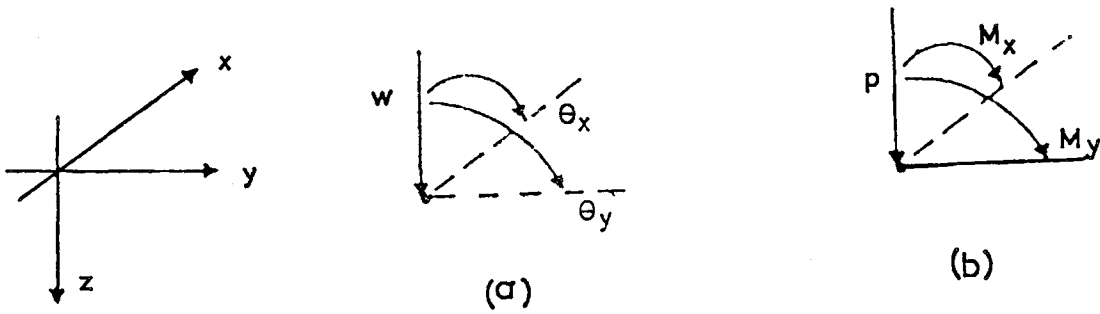
$$Q_x = D_{44} \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$Q_y = D_{55} \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Bir plak elemanının herhangi bir noktasındaki yer değiştirmeler ve dış kuvvetler Şekil 8.2'de verilmiştir.



Şekil 8.1 Bir plak elemanın moment ve kayma kuvvetleri bileşenleri



Şekil 8.2 Bir noktadaki yer değiştirmeler ve dış kuvvetler. a) Yer değiştirmeler
b) dış kuvvetler.

Plaklar için sınır şartları Tablo 8.1'de verilmiştir.

Tablo 8.1 Plaklar için sınır şartları

Ankastre mesnet	Basit mesnet - 1	Basit mesnet - 2	Serbest kenar
$w = 0$	$w = 0$	$w = 0$	$Q_n = 0$
$\theta_t = 0$	$M_{nt} = 0$	$\theta_t = 0$	$M_{nt} = 0$
$Q_n = 0$	$M_n = 0$	$M_n = 0$	$M_n = 0$

Plak orta düzleminin w sehimi, θ_x ve θ_y dönmeleri şekil fonksiyonları ile aşağıdaki formda yazılabilir.

$$w = \sum_{i=1}^n w_i N_i, \quad \theta_x = \sum_{i=1}^n \theta_x^i N_i, \quad \theta_y = \sum_{i=1}^n \theta_y^i N_i \quad (8.4)$$

Burada, N_i , lineer ve kuadratik olabilir. Buna göre, aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] \\ & [K^{22}] & [K^{23}] \\ \text{Simetrik} & & [K^{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{\theta_x\} \\ \{\theta_y\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \\ \{F^3\} \end{Bmatrix} \quad (8.5)$$

Burada

$$K_{ij}^{11} = \int_{\Omega^e} \left(D_{44} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + D_{55} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy$$

$$K_{ij}^{12} = \int_{\Omega^e} D_{44} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j dx dy$$

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{13} &= \int_{\Omega^e} D_{55} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j \, dx \, dy \\
K_{ij}^{22} &= \int_{\Omega^e} \left(D_{11} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + D_{33} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + D_{44} N_i N_j \right) dx \, dy \\
K_{ij}^{23} &= \int_{\Omega^e} \left(D_{12} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + D_{33} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) dx \, dy \\
K_{ij}^{33} &= \int_{\Omega^e} \left(D_{33} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + D_{55} N_i N_j \right) dx \, dy
\end{aligned} \tag{8.6}$$

$$F_i^1 = \int_{\Omega^e} p N_i \, dx \, dy + \int_{\Gamma^e} Q_n N_i \, dt, \quad Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y$$

$$F_i^2 = \int_{\Gamma^e} M_n N_i \, dt, \quad M_n = M_x n_x + M_{xy} n_y$$

$$F_i^3 = \int_{\Gamma^e} M_{nt} N_i \, dt, \quad M_{nt} = M_{xy} n_x + M_y n_y$$

olarak ifade edilmektedir.

Burada Ω^e tipik sonlu elemanı ve Γ^e ise elemanın sınırını gösterir. Denklem (8.5)'deki eleman rijitlik matrisinin boyutları $3n \times 3n$ dir. Burada n her bir elemanın düğüm sayısıdır. Dört düğümlü dikdörtgen eleman kullanıldığında, eleman rijitlik matrisinin boyutu 12×12 dir ve denklem (8.6) kullanılarak matrisin katsayıları hesaplanabilir.

İnce plak halinde kayma şekil değiştirmeleri ihmal edilmekte ve x, y eksenleri etrafındaki dönme, w sehimi cinsinden ifade edilmektedir.

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \tag{8.7}$$

Burada ince plak kabulü yapılmamakta ve bir noktada θ_x , θ_y ve w değişkenleri bağımsız değişkenler olarak seçilmektedir.

Özel olarak izotropik plak durumunda, mühendislik sabitleri aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 = E \\ G_{23} &= G_{13} = G \\ \nu_{12} &= \nu_{21} = \nu \end{aligned} \quad (8.8)$$

Plak programı, denklem (8.1) - (8.6)'da verilen ortotropik plak denklemlerinin formülasyonu kullanılarak geliştirilmiştir. Plak elemanının her düğüm noktasında başlıca üç serbestlik derecesi (w , θ_x , θ_y) göz önüne alınmıştır. Programda, dört, sekiz ve dokuz düğümlü dörtgen izoparametrik elemanlar kullanılmaktadır.

Bir ortotropik plak kesitinin altındaki veya üstündeki gerilmeler denklem (8.3)'ten faydalanılarak aşağıdaki gibi verilmektedir (birim genişlik için)(31).

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y}) \frac{6}{h^2} \\ \sigma_y &= (D_{21} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y}) \frac{6}{h^2} \\ \tau_{xy} &= D_{33} (\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y}) \frac{6}{h^2} \\ \tau_{xz} &= D_{44} (\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x) \frac{1}{h} \\ \tau_{yz} &= D_{55} (\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y) \frac{1}{h} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Geliştirilen bilgisayar programının akış diyagramı EK - 1'de verilmektedir ve program üç temel kısımdan oluşmaktadır:

1. Ön işlem birimi
2. İşlem birimi
3. Son işlem birimi

Programın ön işlem biriminde problemin datası, data dosyasından okunur veya oluşturulur. Bu geometriyi (yani, çözüm alanının uzunluğunu, sınır şartlarını, v.s.), problemin datasını (yani diferansiyel denklemdaki katsayıları, kaynak terimi, v.s.), sonlu eleman ağ bilgisini (yani, eleman numaralarını, eleman uzunluğunu, birleştirme matrisi, v.s.) kapsar.

İşlem biriminde sonlu eleman metodundaki bütün adımlar, son işlemler hariç gerçekleşir. Bu kısımda; yük artımı, betonarme plağın tabakalı kompozit olarak modellenmesi ve tabaka rijitliklerinin hesabı, sayısal integrasyon kullanılarak eleman matrislerinin oluşturulması, sınır şartlarının değerlendirilmesi ve asıl değişkenlerinin düğüm noktası değerleri için denklemlerin çözümü yapılmaktadır.

Programın son işlem biriminde dataların ve sonuçların istenilen formatta çıktısı ekrandan veya yazıcıdan alınır.

Ön işlemler ve son işlemler, bir kaç Fortran programlama durumlarını okumak ve uygun bilgi vermek için, basit alt programları (yani, ağ oluşturmak ve çözüm eğimini hesaplamak için altprogramlar) veya karmaşık programları disk veya disket birimlerindeki dosyalara bağlamak için yapılır.

İşlemler kısmı, herbiri özel amaca sahip olan (yani, eleman matrislerinin hesaplanması için bir alt program, sınır şartlarının değerlendirilmesi için bir altprogram ve denklemlerin çözülmesi için bir altprogram), büyük miktarda hesaplama zamanı harcayan, tipik birkaç altprogramdan meydana gelir. Bir sonlu eleman programının karmaşıklığı ve karmaşıklığının derecesi, programlanmış olan problemin genel sınıfına,

ve denklemlerin çözülmesi için bir altprogram), büyük miktarda hesaplama zamanı harcanan, tipik birkaç altprogramdan meydana gelir. Bir sonlu eleman programının karmaşıklığı ve karmaşıklığının derecesi, programlanmış olan problemin genel sınıfına, denklemdaki datanın genelliğine ve programın amaçlanan kullanıcıya bağlıdır. Bilgisayar programında kullanılan bütün değişkenler, yorum durumları dolayısıyla, daima tanımlanmaları gerekir.

8.2.1. Data girişi (ön işlemler)

Eleman tipini (yani, plak eleman) okumadan ibaret olan bir sonlu eleman programında data girişi, eleman numaraları(eğer üniform ağ serileri kullanılmak zorunda ise, minimum ve maksimum eleman numaraları verilir), belirtilmiş kaynak sınır noktaları (numara, global serbestlik derecesi ve belirtilmiş kuvvetlerin değerleri), belirtilmiş sınır şartları (numara, global serbestlik derecesi ve belirlenmiş deplasmanların değerleri) ve eleman global koordinatları ve eleman malzeme özellikleri olarak belirlenir.

Eğer üniform ağ kullanılmışsa, programda meydana getirilebilen düğümlerin global koordinatları ve çözüm alanının uzunluğu okunabilir. Burada MESH (ağ) programı dikdörtgen çözüm alanının üçgen ve dörtgen eleman ağlarını oluşturmak için kullanılır. Bu alt program, keyfi çözüm alanının eleman ağlarını oluşturmak için yeterli değildir. Tabiki, MESH' in yerine herhangi bir ağ oluşturma programı kullanılabilir. MESH altprogramı birleştirilmiş matrisi (NOD dizisi) ve düğümünün global koordinatlarını (x ve y dizileri) oluşturur. Dikdörtgen olmayan çözüm alanları analiz edildiğinde, alan içindeki ağ bilgisi okunabilir (31).

Data değişkenlerinin listesi EK-2'de verilmiştir.

8.2.2. Eleman matrislerinin hesabı (İşlemler)

İki boyutlu elemanların hesaplamaları aşağıdaki özellikleri içerir:

1. Elemanların çeşitli geometrik şekillerinin olması,
2. Problemlerin çok değişkenli olması,
3. Belirli formülasyonlarda (plakların eğilmesi) indirgenmiş-düzenli integrasyonlar dikkate alınması.
4. Elemanın farklı düğümlerindeki asıl serbestlik derecelerinin farklı sayısının dikkate alınması, dolayısıyla daha çok birleşmenin olması.

İzoparametrik dikdörtgen elemanlar için eleman hesaplamaları Bölüm.4'de ve bu bölümde verilen denklemlere uygun olarak yapılmaktadır. Başlıca şu adımlardan oluşur:

1. Enterpolasyon fonksiyonları ve onların global koordinatlara göre alınan türevlerinin değerlendirilmesi için, SHAPE, altprogramın geliştirilmesi (denklem (4.32)-(4.34)).
2. Gauss dörtgeni kullanılarak eleman matrislerinin katsayılarının nümerik integrasyonu (denklem (4.36)).
3. Çözülmüş olan problemlerin sınıfına göre gereken eleman matrislerinin kurulması.

SHAPE altprogramı (Gauss noktalarının sayısındaki bir döngüden çağrılır) çeşitli - düzenli elemanlar için enterpolasyon fonksiyonlarının ifadelerini ve onların yerel (yani, doğal) koordinatlara göre türevlerini içerir. Denklem (4.32) kullanılarak Gauss noktalarında Jacobian matrisi değerlendirilir. Bu enterpolasyon fonksiyonlarının doğal koordinatlara ve bir dikdörtgen dizi formundaki eleman düğümlerinin global koordinatlara göre de enterpolasyon fonksiyonlarının türevleri hesaplanır.

İki boyutlu problemlerde eleman matrislerinin katsayıları ile ilgili olarak denklem (4.35)'de tanımlanmış eleman matrislerinin değerlendirilmesi gerekir. Bu matrisler enterpolasyon fonksiyonları ile onların global koordinatlara göre türevlerinin

çarpımlarını içerir. İntegrallerin sayısal olarak değerlendirilmesinden dolayı (denklem 4.36), toplamlar integrasyon noktalarının sayısına (NGP) göre yapıp dörtgenin noktalarında değerlendirilmektedir. Böylece, denklem (4.35)'deki integrallerin hesaplanması, enterpolasyon fonksiyonlarının ve türevlerinin değerlendirilmesi döngü içinde yapılmaktadır (31).

Eleman rijitlik matrislerinin hesabı, ortotropik plaklar için verilen denklem (8.6)'ya göre, STIFF alt programında yapılmaktadır. Bu denklemdeki ortotropik plak rijitlikleri, antisimetrik çapraz-katlı tabakalanmış plaklar için kısım 6.4'de ve denklem (6.59), (6.65) ve (6.75)' de verilmiştir.

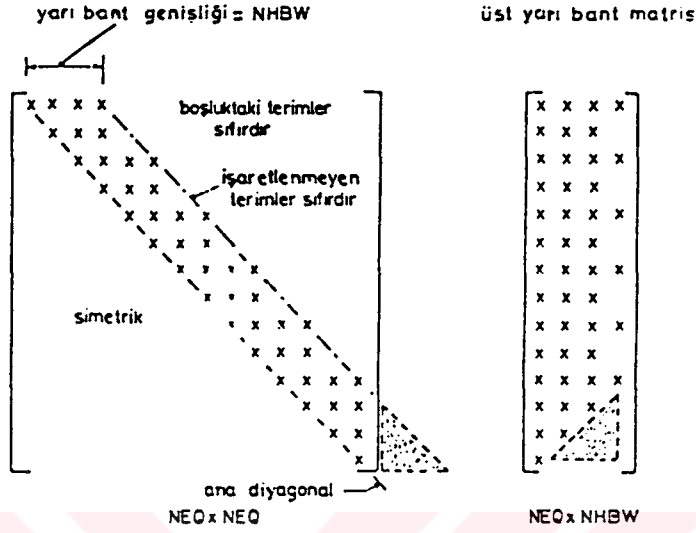
Bu altprogramların yer aldığı, FORTRAN 77 programlama diline göre geliştirilmiş olan programın listesi EK-3'de verilmiştir.

8.2.3. Bant formundaki bir matrisin birleşimi

Eleman matrislerinin birleşimi, her elemanın eleman matrisleri hesaplandıktan sonra tamamlanmaz, aksine, bütün elemanların eleman kuyruk matrisleri hesaplanıncaya kadar devam eder. Sonra her elemanın eleman matrislerinin saklanması gerekir. Önceki durumda, eleman matrislerinin hesaplanması için STIFF altprogramı çağrılarak aynı döngüde birleşim yapılabilmektedir. Diğer bir nokta, üst bant formundaki eleman matrislerinin birleşimi hesaplama zamanını ve saklamak için depolamayı mümkün kılar. Eleman matrisleri simetrik olduğunda (genelde çoğu problemde böyledir), global (veya birleştirilmiş) matrisin sonucu da simetrik ve ana diyagonaldan uzaklaşıldıkça çoğu terimler sıfır olur (Şekil 8.3). Bundan dolayı, birleşmiş matrisin sadece üst yarı bantını saklamak yeterli olur.

Birleşmiş (yani global) sonlu eleman matrisinin, NHBW yarı bant genişliğini sonlu eleman programının kendisi belirleyebilmektedir. Birleşmiş matrisinin bant karakteri için sonlu eleman enterpolasyon fonksiyonlarının (yani, $N_i^{(e)}$, e elemanı

üzerinde sadece sıfır olmayan terimler tanımlanır) sıklık özellikleri güvenilirdir. Eğer iki global düğüm aynı elemana ait değilse, o zaman girişlere uygun olarak global rijitlik matrisi de sıfırları kapsar.



Şekil 8.3 Üst yarı bant formuna getirilmiş rijitlik matrisi

$K_{IJ} = 0$ ise I ve J aynı elemana ait değildir.

Bu özellik, birleşim matrisin NHBW yarı bant genişliğini belirlemek için yeterlidir.

$$NHBW = [|NOD(N,I) - NOD(N,J)| + 1] \times NDF \quad (8.10)$$

$$(1 \leq N \leq NEM \text{ ve } 1 \leq I, J \leq NPE)$$

Burada

NDF = her düğümün serbestlik derecesi sayısı (yani, asıl bilinmeyenlerin),

NEM = sonlu eleman ağındaki elemanların sayısı,

NPE = her eleman düğümünün sayısıdır.

NHBW daima, problemin sonlu eleman ağındaki asıl serbestlik derecesinin toplam sayısına eşit veya ondan daha azdır.

Şimdi birleşmiş bant işlemi tanımlanabilir. Her ne zaman $J < I$ ve $J > NHBW$ olursa eleman matrislerinin bileşiminde sıçrama olabilir. Birleşmiş kare matrisinin, $I=J$, ana diyagonali, Şekil 8.3'de gösterildiği gibi, birleşmiş bant matrisin (yani, bant formundaki depolama) birinci kolonu olur. Bant matrisde üst diyagonaller (ana diyagonale paralel) kendi kolonlarının durumunu alır. Böylece, bant matris $NEQ \times NHBW$ (gerçek) boyutuna sahip olur, burada NEQ problemde denklemlerin toplam sayısını (veya asıl bilinmeyenleri) gösterir (31). Bant formundaki sonlu eleman matrislerinin bileşimi EK-3'de verilen Fortran programının ana program kısmında verilmiştir.

8.2.4. Sınır şartlarının değerlendirilmesi

Sınır şartlarının değerlendirilmesi (asıl bilinmeyenler üzerinde) aşağıdaki gibi yapılabilir. Bu yöntem, matris denkleminin sağdaki kolonda çarpımların bilinmesinden hareketle, "birleşmiş matrisin modifiye edilmesini (değiştirilmesini) içerir. Satırlar ve kolonlar, ana diyagonal üstündeki hariç, sıfır olan başlıca değişkenlerin bilinmesine uygun olarak yerleştirilir. Burada değişken bileşime koyulur ve değişkenin belirtilmiş değeri ile sağdaki kolonun elemanlarına uygun olarak yerleştirilir. Bunları uygulayabilmek için, aşağıda matris formunda n tane cebrik denklem gözönüne alınır.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

$U_2 = \alpha$ olarak belirlendiği varsayılır. (Düğümdeki yer değiştirmeler genelleştirildiğinde bilinir ve buna karşılık kuvvetlere uygun olarak genelleştirildiğinde bilinmez.) Şimdi aşağıda gösterilen usuldeki sınır şartını uygulamak için ilerlenir. $K_{22} = 1$ ve $F_2 = \alpha$

koyulur; daha sonra $i \neq 2$ için $K_{2i} = K_{i2} = 0$ koyulur ($i=1,3,\dots,n$). Buna göre aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} & K_{14} & K_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{31} & 0 & K_{33} & K_{34} & K_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & 0 & K_{n3} & K_{n4} & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \cdot \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \alpha \\ F_3 \\ \cdot \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (8.12)$$

Burada

$$F_i = F_i - K_{i2} \alpha, \quad i=1,3,4,5,\dots,n, \quad i \neq 2 \quad (8.13)$$

dir.

Burada, $U_k = \alpha$ bilirse, aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\begin{aligned} K_{kk} &= 1, \quad F_k = \alpha \\ F_i &= F_i - K_{ik} \alpha \\ K_{ki} &= K_{ik} = 0 \end{aligned} \quad (8.14)$$

Burada,

$$i=1,2,\dots,k-1, k+1,\dots,n, \quad i \neq k$$

dir.

Bu metod, matrisin orjinal dizisini kaybetmemeyi ve çözüm kısmındaki gibi yüklenmiş sınır şartlarının yazdırılmasını mümkün kılar. Ancak, depolama indirgenmiş değildir (burada, eğer serbestlik derecesinin belirlenmesine uygun olarak satır ve kolon silinebilirse bu cazip olabilir) (31). Aynı metod bant matris için EK-3'teki BNDY alt programında tanımlanmıştır.

8.2.5. Denklemlerin çözümü ve son işlemler

Ek-3’de verilen SOLVE altprogramında, GF dizisindeki çözüm geri döner ve bant halindeki sistem denklemleri çözülür. Burada hesaplama sisteminde çözümü bulmak için alışılmış bir metod olarak Gauss eliminasyon ve geri yerine koyma metodu kullanılır.

Son işlemler, çözüm sonuçlarının hesaplanmasını ve yazdırılmasını içerir. Son işlemler bilgisayar programında STRAN alt programında yapılmaktadır (EK-3). Bu altprogramda nonlinear alt işlemler yapılır ve tarafsız eksen gerilme seviyesine bağlı olarak yeniden kurulur ve denge kontrolü yapılır.

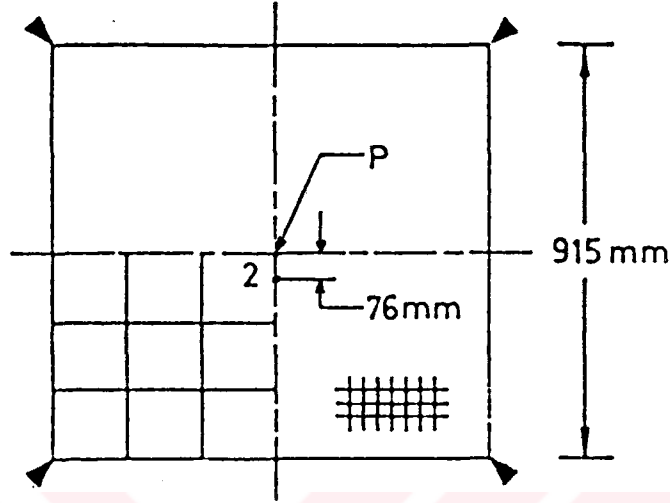
8.3. Programla Yapılan Çözümler

Bu kısımda literatürde çözümü yapılan sayısal örneklerin ve deneysel çalışmada deneye tabi tutulan plakların, bu çalışmada geliştirilen bilgisayar programı ile çözümü yapılmış ve çözümler tablo halinde ve grafik olarak verilmiştir. Buna göre çözülen sayısal örnekler aşağıda sırayla verilmiştir.

Örnek 8.1

Şekil 8.3’de görülen ve literatürde çözümü yapılan, dört köşesinden mesnetlenmiş çift yönlü bir döşeme, geliştirilen bilgisayar programı ile çözülmüştür. Kare şeklinde olan bu döşemenin boyutları 915 mm, kalınlığı 44.5 mm ve izotropik bir ağ şeklindeki donatının oranı 0.0085 dir. Döşeme merkezinden tesir eden tekil bir yüke maruzdur.

Kabul edilen malzeme özellikleri şöyledir: Poisson oranı $\nu_c = 0.167$, betonun çekme dayanımı $f_{ctk} = 2.15 \text{ N/mm}^2$ ve kırılma enerjisi $G_f = 0.09 \text{ N/mm}$, beton tabakaların sayısı $n_c = 8$ dir. Diğer malzeme özellikleri Tablo 8.2’de verilmiştir (22)



Şekil 8.4 Dört köşesinden mesnetlenmiş çift yönlü döşeme (22).

Bu döşeme, (8.10,12,13.22) numaraları ile verilen önceki araştırmacıların buldukları sonuçlarla bu çalışmada bulunan sonuçlarla karşılaştırmak için çözülmüştür.

Tablo 8.2 Örnek 8.1’de kullanılan malzeme özellikleri (8)

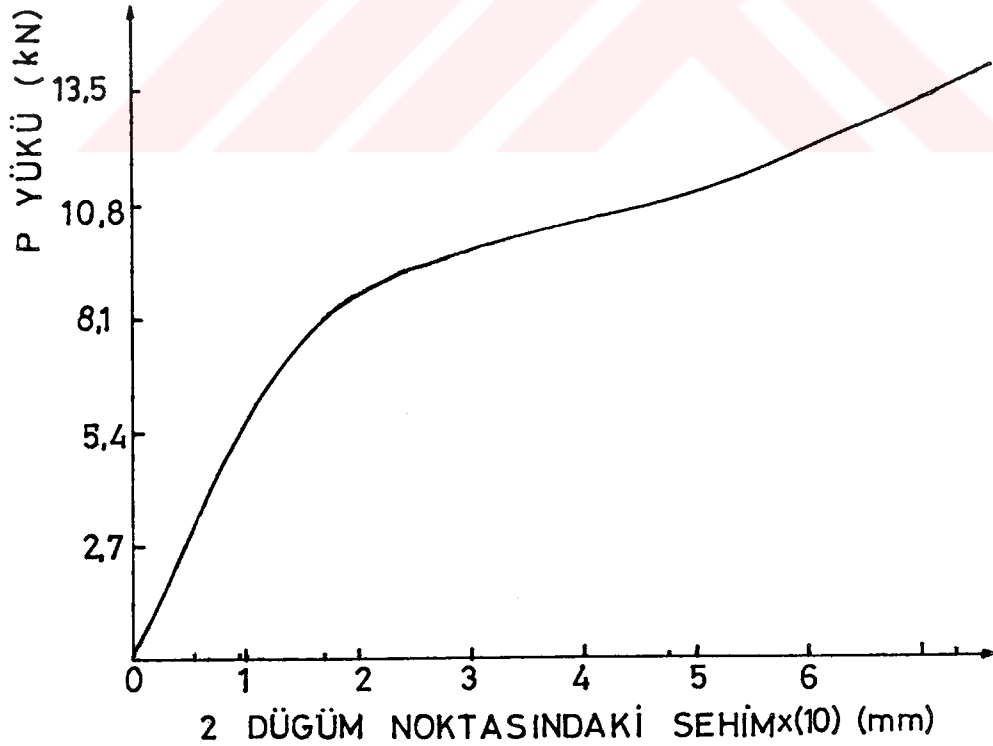
Döşeme	E_c (N/mm ²)	E_s (N/mm ²)	f_{ck} (N/mm ²)	f_{yk} (N/mm ²)	ρ (%)	d (mm)
Jofriet and Mc Neice (8)	3.10^4	2.10^5	38	276	0.85	33.3

Kullanılan sonlu eleman ağı Şekil 8.4’de gösterilmiştir. Literatürde yapılan çözümlere uygun olarak, 2 düğüm noktasında yük artışlarına göre sehim miktarları bulunmuş ve yük-sehim değerleri Tablo 8.3’de verilmiştir.

Şekil 8.4'deki 2 düğüm noktasındaki yük-sehim ilişkisi grafik olarak Şekil 8.5'de gösterilmiştir. 2 düğüm noktasındaki sehim, yaklaşık olarak bitişik düğüm noktalarındaki sehimlerden enterpolasyonla bulunabilir.

Tablo 8.3 Şekil 8.4'deki 2 düğüm noktasındaki yük-sehim değerleri

Yük No	Yük (kN)	Sehim (mm)
1	2.7	0.47
2	5.4	0.93
3	8.1	1.69
4	10.8	4.74
5	13.5	7.30



Şekil 8.5 Şekil 8.4'deki 2 düğüm noktasındaki yük-sehim ilişkisi

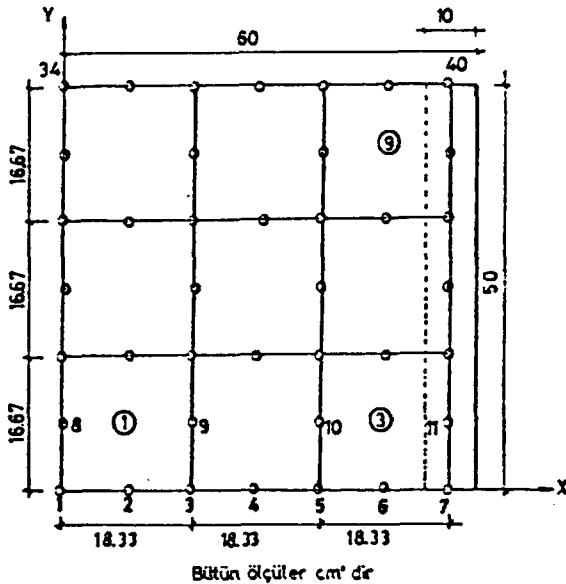
Örnek 8.2

Bölüm 7’de verilen ve iki kenarından mesnetli, C14 betonundan imal edilmiş, 10 cm kalınlığında, 100x120 cm ebatlarında ve her iki yönde $\varnothing 8/15$ donatılarına sahip olan plak, bu çalışmada geliştirilen bilgisayar programı ile çözülmüş ve sonuçlar tablo halinde ve grafik olarak verilmiştir. Plâğin çözümü sırasında, deneye uygun olarak, iki çizgisel tekil yük mesnet ortasından $l/4$ mesafesinde uygulanmış ve sehimler $l/3$ mesafesinde hesaplanmıştır. Kabul edilen malzeme özellikleri şöyledir :

Beton ve çeliğin poisson oranları $\nu_c = 0.20$ ve $\nu_s = 0.30$, betonun çekme dayanımı $f_{ck} = 1.21 \text{ N/mm}^2$ ve toplam tabaka sayısı $n_T = 9$ ve $\epsilon_{cu} = 0.0035$ dir. Diğer malzeme özellikleri Tablo 8.4’de verilmiştir. Kullanılan sonlu eleman ağı Şekil 8.6’da verilmiştir. Şekil 8.6’daki 3 düğüm noktasındaki yük-sehim değerleri Tablo 8.5’de ve yük-sehim ilişkisi Şekil 8.7’de verilmiştir.

Tablo 8.4 Örnek 8.2’de kullanılan malzeme özellikleri

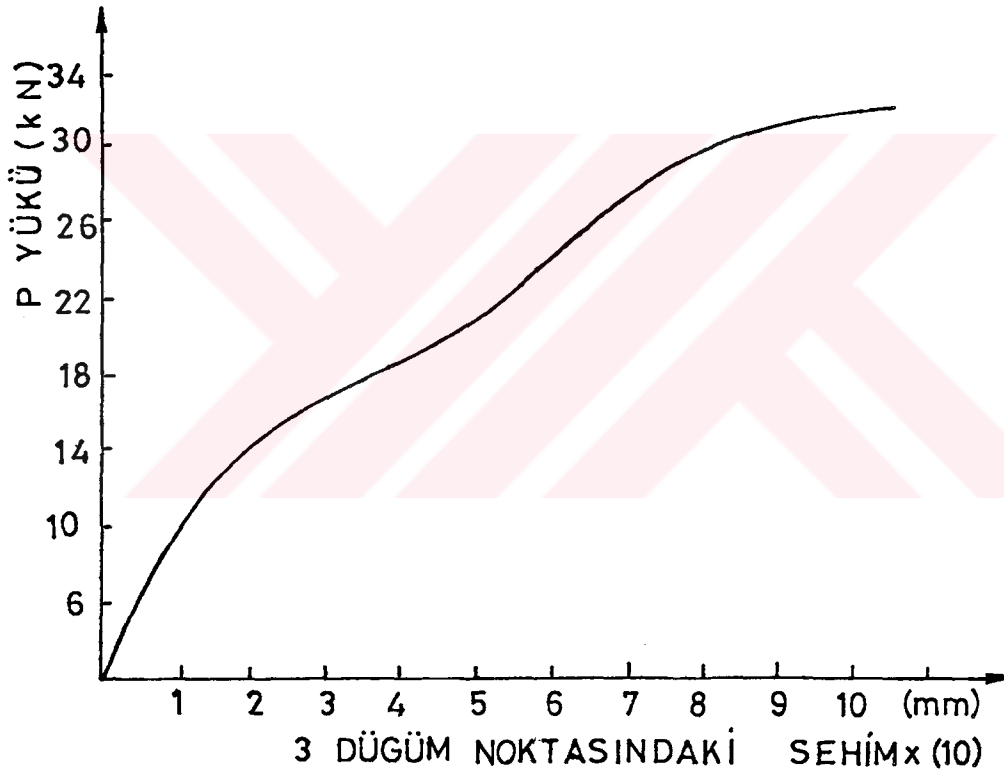
E_c (N/mm ²)	E_s (N/mm ²)	f_{ck} (N/mm ²)	f_{yk} (N/mm ²)	ρ_x (%)	ρ_y (%)	d_x (mm)	d_y (mm)
$2.53 \cdot 10^4$	2.10^5	12	220	0.392	0.433	85	77



Şekil 8.6 Örnek 8.2’de verilen plak için sonlu eleman ağı

Tablo 8.5 Şekil 8.6'daki 3 düğüm noktasındaki yük sehim değerleri

Yük (kN)	Sehim (mm)	Yük (kN)	Sehim (mm)	Yük (kN)	Sehim (mm)
4	0.01	14	0.13	24	0.61
6	0.02	16	0.16	26	0.67
8	0.07	18	0.45	28	0.72
10	0.09	20	0.50	30	0.78
12	0.11	22	0.56	32	0.84



Şekil 8.7 Şekil 8.6'daki 3 düğüm noktasındaki yük-sehim ilişkisi

Örnek 8.3

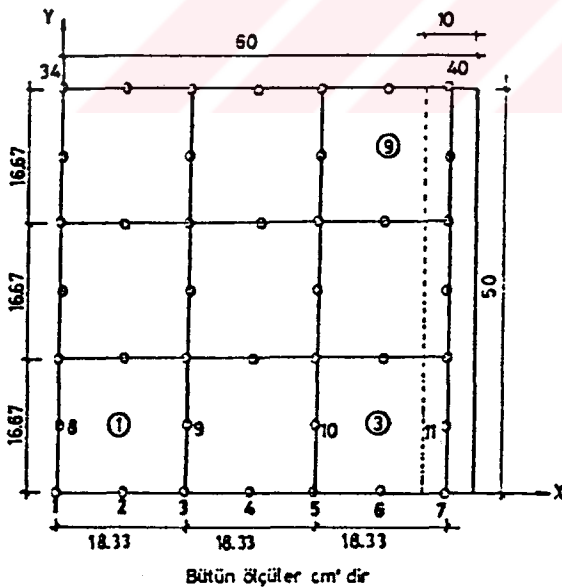
Bölüm 7' de verilen iki kenarından mesnetli, C20 betonundan imal edilmiş, 10 cm kalınlığında, 100x120 cm ebatlarında ve her iki yönde $\varnothing 8/15$ donatılarına sahip olan

plak, bu çalışmada geliştirilen bilgisayar programı ile çözülmüş ve sonuçlar tablo halinde ve grafik olarak verilmiştir. Plakın çözümü sırasında, deneye uygun olarak, iki çizgisel tekil yük mesnet ortasından $l/4$ mesafesinde uygulanmış ve sehimler $l/3$ mesafesinde hesaplanmıştır. Kabul edilen malzeme özellikleri şöyledir :

Beton ve çeliğin poisson oranları $\nu_c = 0.20$ ve $\nu_s = 0.30$, betonun çekme dayanımı $f_{ctk} = 1.6 \text{ N/mm}^2$ ve toplam tabaka sayısı $n_T = 9$ ve $\epsilon_{cu} = 0.0035$ dir. Diğer malzeme özellikleri Tablo 8.6'da verilmiştir. Kullanılan sonlu eleman ağı Şekil 8.8'de verilmiştir. Şekil 8.8'deki 3 düğüm noktasındaki yük-sehim değerleri Tablo 8.7'de ve yük-sehim ilişkisi Şekil 8.9'da verilmiştir.

Tablo 8.6 Örnek 8.3'de kullanılan malzeme özellikleri

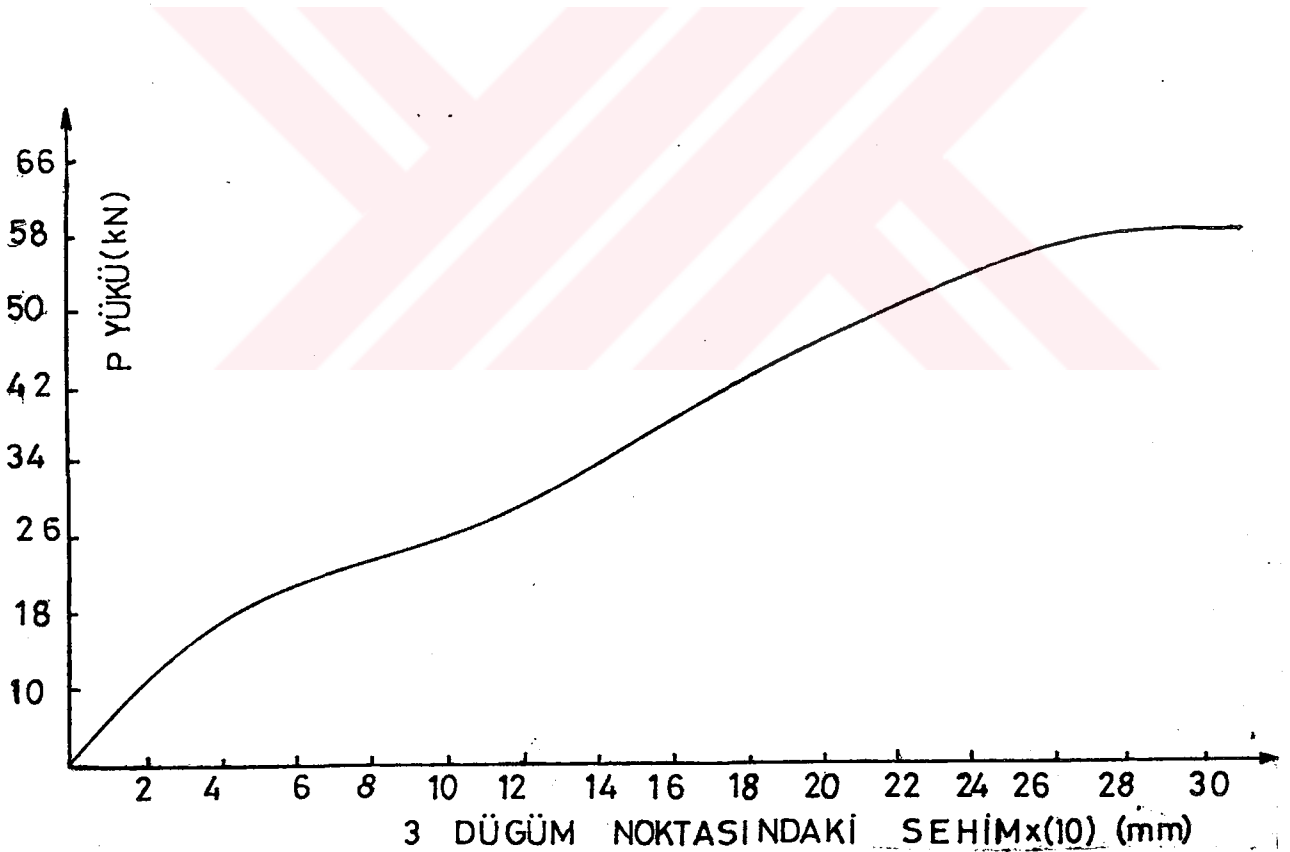
E_c (N/mm^2)	E_s (N/mm^2)	f_{ck} (N/mm^2)	f_{yk} (N/mm^2)	ρ_x (%)	ρ_y (%)	d_x (mm)	d_y (mm)
$2.85 \cdot 10^4$	2.10^5	20	220	0.392	0.432	85	77



Şekil 8.8 Örnek 8.3'de verilen plak için sonlu eleman ağı

Tablo 8.7 Şekil 8.8'deki 3 düğüm noktasındaki yük-sehim değerleri

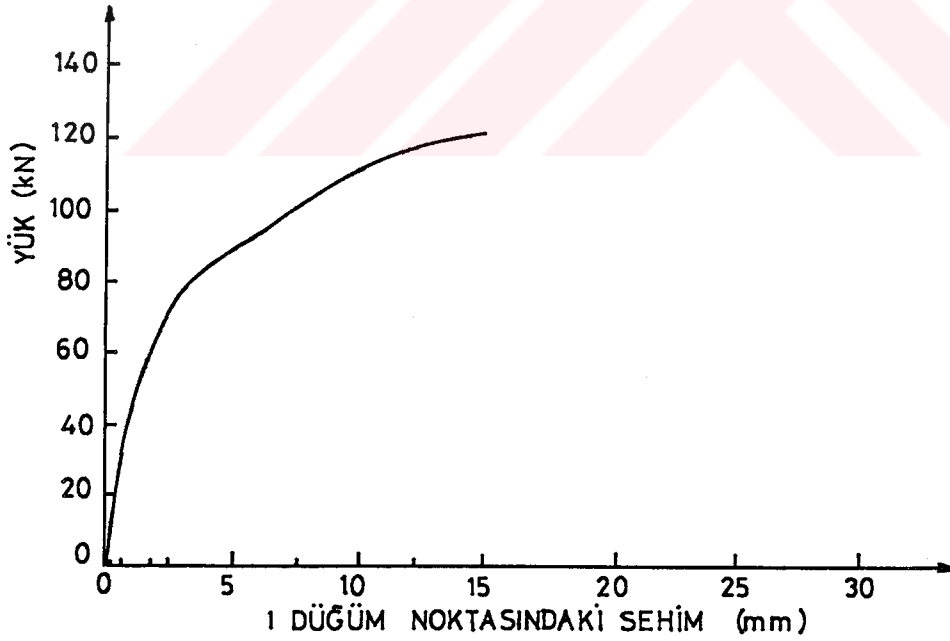
Yük (kN)	Sehim (mm)	Yük (kN)	Sehim (mm)	Yük (kN)	Sehim (mm)	Yük (kN)	Sehim (mm)
4	0.01	20	0.18	36	0.72	52	1.60
6	0.02	22	0.20	38	0.77	54	1.79
8	0.03	24	0.47	40	0.81	56	1.91
10	0.08	26	0.51	42	0.90	58	2.13
12	0.10	28	0.55	44	1.02	60	2.31
14	0.12	30	0.60	46	1.13	62	2.48
16	0.14	32	0.64	48	1.30		
18	0.16	34	0.68	50	1.42		



Şekil 8.9 Şekil 8.8'deki 3 düğüm noktasındaki yük-sehim ilişkisi

Tablo 8.9 Şekil 8.10'daki 1 düğüm noktasındaki sehim değerleri

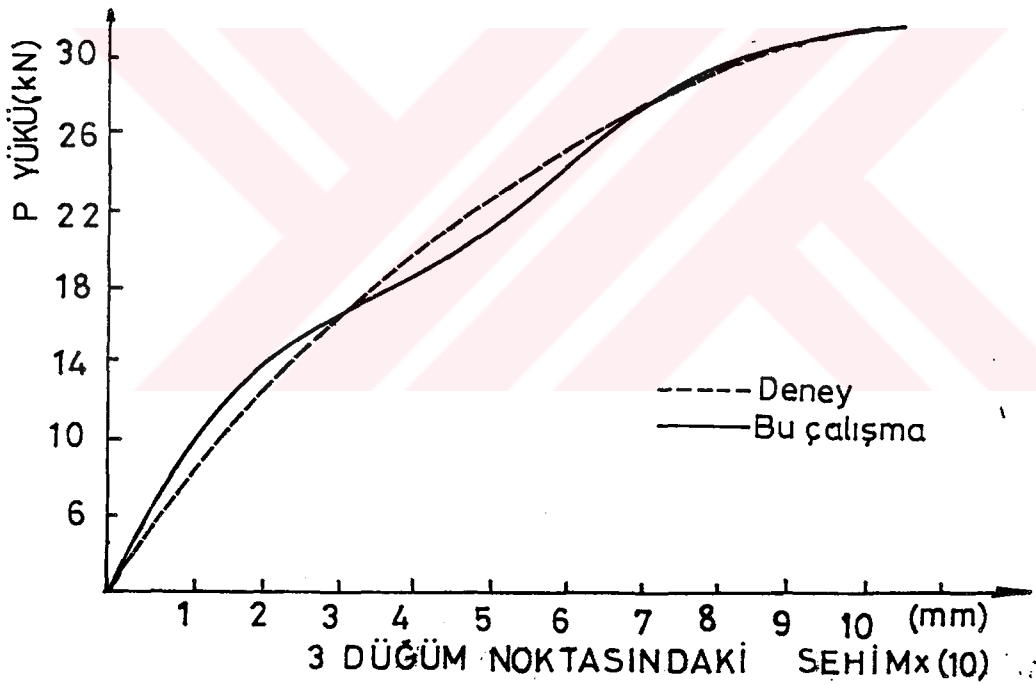
Yük (kN)	Sehim (mm)	Yük (kN)	Sehim (mm)
20	0.27	80	2.44
40	0.80	100	7.53
60	1.83	120	12.10



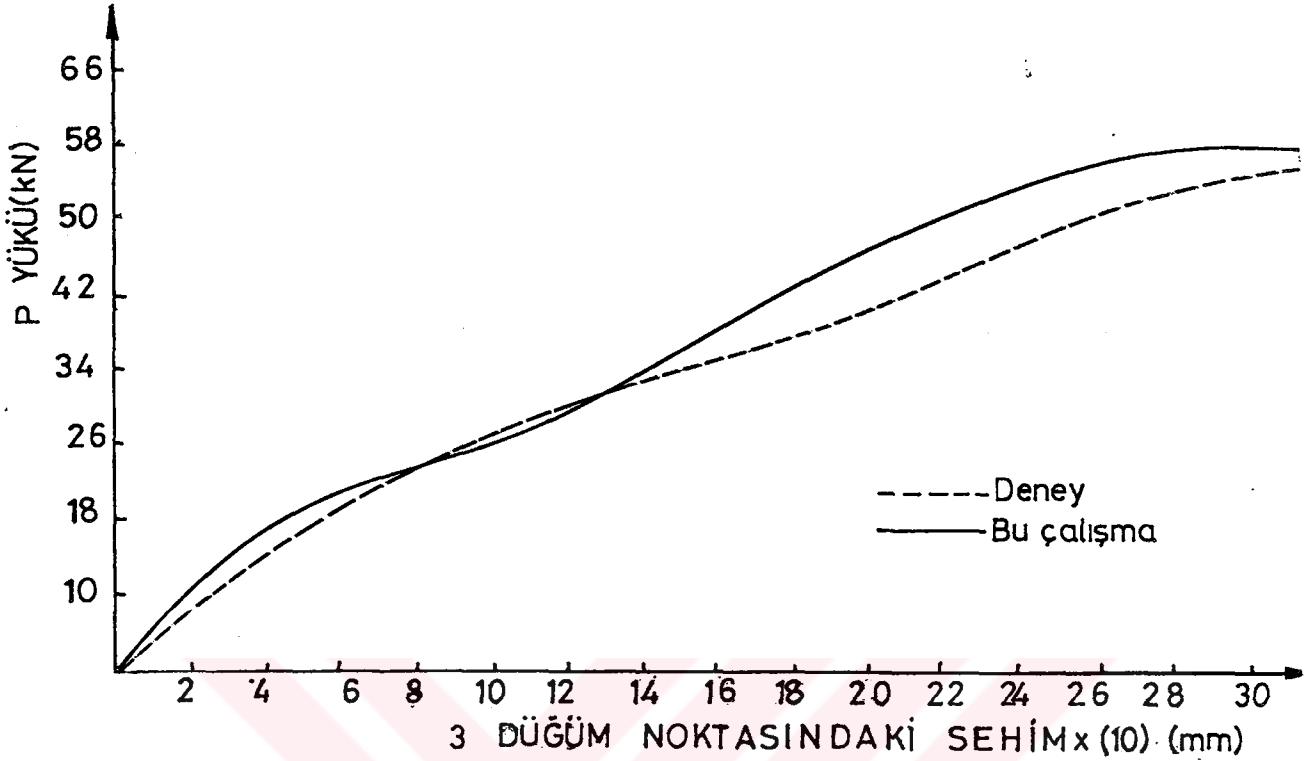
Şekil 8.11 Şekil 8.10'daki 1 düğüm noktasındaki yük-sehim ilişkisi

9. TARTIŞMA

Bu bölümde geliştirilen bilgisayar programı ile çözülen sayısal örnekler, deneysel çalışmadan elde edilen sonuçlarla ve literatürde çözümlü yapılan sayısal örnek sonuçları ile karşılaştırılmış ve sonuçların değerlendirilmesi yapılmıştır. Buna göre deneysel çalışmada ve bilgisayar programında çözülen plakların yük-sehim ilişkileri, grafik olarak, C14 ve C20 betonundan imal edilen plaklar için, Şekil 9.1 ve 9.2'de verilmiştir.



Şekil 9.1 Şekil 8.5'deki 3 düğüm noktasındaki yük-sehim ilişkileri
(C14 betonu için)



Şekil 9.2 Şekil 8.7'deki 3 düğüm noktasındaki yük-sehim ilişkileri
(C20 betonu için)

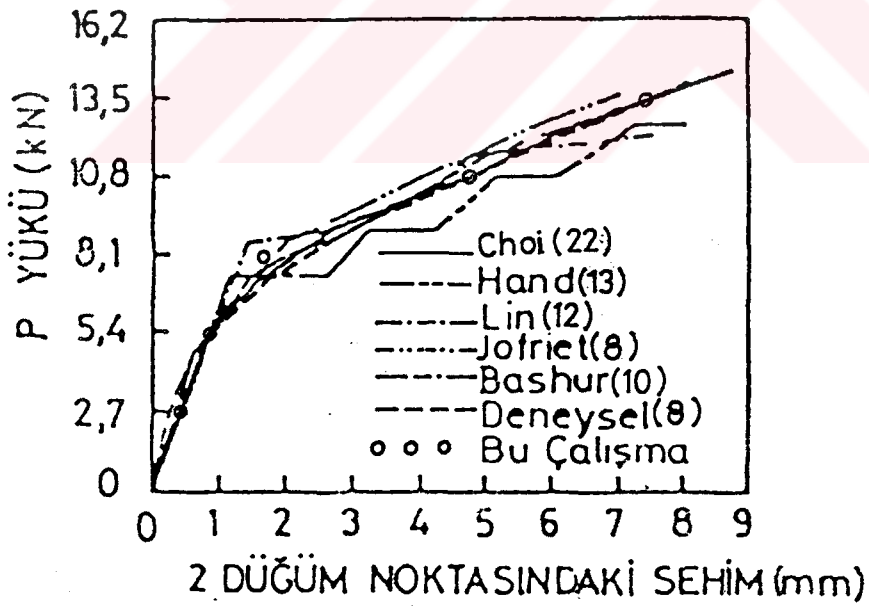
Deney sonuçları ile bilgisayar programından bulunan sonuçlar karşılaştırıldığında C14 ve C20 betonundan imal edilmiş plaklar için yük-sehim ilişkilerinin genellikle uyum içinde olduğu görülmüştür. Buna göre, bu çalışmada, betonarmenin tabakalı kompozit malzeme olarak modellenmesi uygun olmuştur. Böylece, geliştirilen bilgisayar programı ile deney parametreleri kolayca değiştirilebilir ve değişik şartlar dikkate alınabilir. Bu çalışmada kullanılan kompozit tabaka modeli betonarme plaklara başarı ile uygulanabilir.

Örnek 8.1'de literatürde (8,10,12,13,22) çözümü yapılan 4 köşesinden mesnetli betonarme plak bilgisayar programı ile çözülmüş ve sonuçların yük-sehim değerleri Tablo 9.1'de ve yük-sehim ilişkileri grafik olarak Şekil 9.3'de verilmiştir. Tablo 9.1'de ve Şekil 9.3'de gösterilen yük-sehim ilişkileri incelendiğinde, bu çalışmadan bulunan sonuçların, literatürde verilen deney sonuçları ve diğer sonuçlarla uyum

içinde olduğu görülmektedir. Buna göre, geliştirilen bilgisayar programı başarılı bir şekilde kullanılabilir.

Tablo 9.1 Şekil 8.4' deki 2 düğüm noktasındaki yük-sehim değerleri

Yük No	Yük (kN)	Sehim (mm)						
		Deney (8)	Choi (22)	Bashur (10)	Bu çalışma	Jofriet (8)	Hand (13)	Lin (12)
1	2.7	0.25	0.48	0.48	0.47	0.48	0.48	0.48
2	5.4	0.83	0.83	0.83	0.93	0.83	0.83	0.83
3	8.1	2.33	2.25	2.00	1.69	1.83	2.83	1.33
4	10.8	4.70	4.70	4.33	4.74	4.00	5.10	4.33
5	13.5	7.54	7.52	7.54	7.30	7.00	—	—

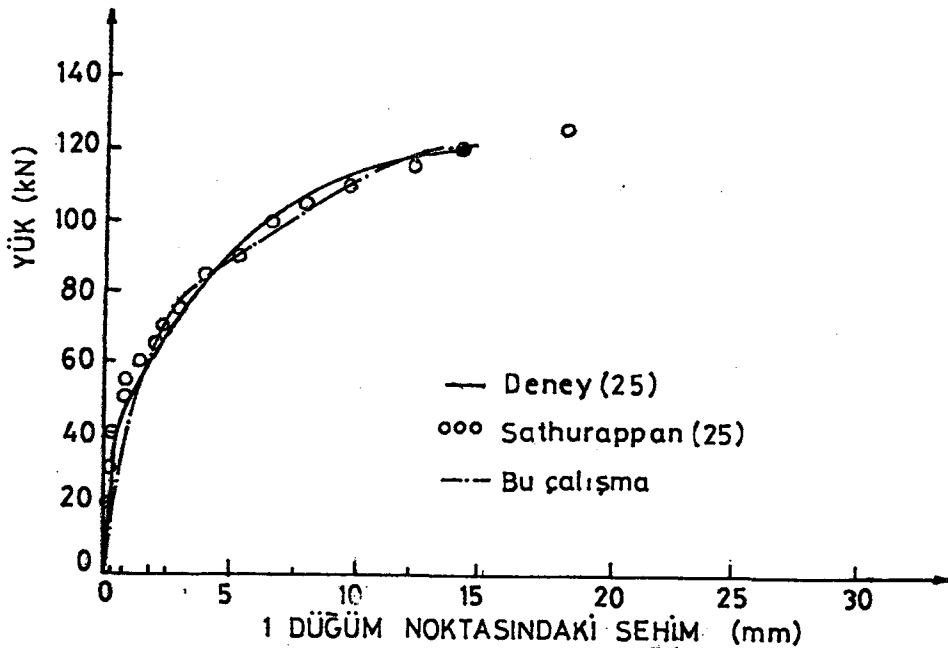


Şekil 9.3 Şekil 8.4' deki 2 düğüm noktasındaki yük-sehim ilişkileri (22).

Örnek 8.4 de verilen ve Sathurappan ve ark.(25) tarafından çözümü yapılan iki kenarından mesnetli plak, bilgisayar programı ile çözülmüş ve sonuçların yük-sehim değerleri Tablo 9.2’de ve yük-sehim ilişkileri grafik olarak Şekil 9.4’de verilmiştir. Tablo 9.2’de ve Şekil 9.4’de verilen yük-sehim ilişkileri incelendiğinde, bu çalışmadan bulunan sonuçların, Sathurappan ve ark.(25) tarafından verilen deney sonuçları ve sayısal sonuçlarla uyum içinde olduğu görülmektedir. Bundan dolayı, hazırlanan bilgisayar programı betonarme plakların nonlinear analizinde başarılı bir şekilde kullanılabilir.

Tablo 9.2 Şekil 8.10’deki 1 düğüm noktasındaki yük-sehim değerleri

Yük No	Yük (kN)	Sehim (mm)		
		Deney (25)	Sathurappan (25)	Bu çalışma
1	20	0.23	0.21	0.27
2	40	0.45	0.23	0.80
3	60	1.82	1.36	1.83
4	80	3.40	2.73	2.44
5	100	6.14	6.36	7.53
6	120	12.72	13.86	12.10



Şekil 9.4 Şekil 8.10’deki 1 düğüm noktasındaki yük-sehim ilişkileri

10. SONUÇ VE ÖNERİLER

10.1. Gaye ve Kapsam

Betonarme yapılar çoğunlukla kullanılabilirlik ve güvenlik kriterlerini karşılamak için tasarlanırlar. Kullanılabilirlik şartını sağlamak için, çalışma yükleri altında betonarme yapıların çatlak ve sehimlerini doğru bir şekilde tahmin etmek gereklidir. Yapıların, göçmeye karşı güvenliğini tayin etmek için önemli olan maksimum yükün doğru olarak hesaplanabilmesidir. Deneysel çalışmalar elemanların denenmesi hakkında iyi bir bilgi verebilirse de zaman kaybettirmesi ve pahalı olması dolayısıyla, deney yerine geçebilen güvenilir bir sayısal analiz modeli geliştirmek tercih edilmelidir.

Analitik bir metot betonarme yapılar için iyi bir gelişmedir. Aşağıdaki özellikler dikkate alındığı takdirde gerçeğe yakın bir modelleme yapılmış olacaktır.

- 1) Betonun lineer olmayan davranışı, çekme çatlağı, çift eksenli rijitlik ve şekil değiştirme azalması,
- 2) Beton ve donatı çubukları arasındaki aderans sıyrılması ve agrega kenetlenmesi .

Betonarme plakların sonlu elemanlar metodu ile çözümünde iki yaklaşım kullanılmaktadır.

- 1) Değiştirilmiş rijitlik yaklaşımı,
- 2) Tabakalı yaklaşım.

10.2. Çalışmanın Özeti ve Sonuçlar

Bu çalışmada tabakalı yaklaşım kullanılarak ve yukarıda sıralanan iki özellik dikkate alınarak yapılan sonlu eleman modellemesinde dört, sekiz ve dokuz düğüm noktalı izoprametrik elemanlar kullanıldı.

Geliştirilen sonlu elemanlar modeli ile dört köşesinden mesnetlenmiş betonarme plak (Şekil 8.4), Fortran programlama dili ile hazırlanan programla çözüldü. Bu sonuç, literatürde aynı plağın çözümü için bulunan sonuçlarla karşılaştırıldı. Bu karşılaştırma Tablo 10.1 de verilmiştir. Bu çalışmanın sonucu, aynı konuda literatürde verilen deneysel çalışma ile karşılaştırılmaktadır. Bu çalışmanın verdiği sonucun, literatürdeki çözümler ve deneysel çalışma ile uyum içinde olduğu görülmektedir.

Tablo 10.1. Şekil 8.4 deki plak için literatürde verilen ve bu çalışmada bulunan sonuçların literatürdeki deney sonuçları ile karşılaştırılması

Literatürde verilen deney sonucuna göre ortalama farklar (%)					
Choi (22)	Bashur (10)	Bu çalışma	Jofriet (8)	Hand (13)	Lin (12)
10.2	14.0	17.8	18.2	18.5	24.8

Bu çalışmada geliştirilen bilgisayar programı ile, Sathurappan ve ark.(25) tarafından çözümü yapılan ve karşılıklı iki kenarından mesnetlenmiş olan ve üniform yükle yüklenmiş plağın çözümü yapılmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalar Tablo 10.2 de verilmiştir.

Tablo 10.2. Örnek 8.4 deki plak için Sathurappan ve ark.(25) tarafından verilen ve bu çalışmadan bulunan sonuçların karşılaştırılması

Sathurappan ve ark.(25) tarafından verilen Deney sonucuna göre ortalama farklar (%)	
Sathurappan ve ark.(25)	Bu çalışma
19.17	18.33

Sonuçlar karşılaştırıldığında, bu çalışmadan bulunan sonuçların, Sathurappan tarafından verilen deney sonuçları ve sayısal sonuçlarla uyum içinde olduğu görülmektedir.

Geliştirilen programla, ortotropik plakların, delikli plakların, çift donatılı plakların ve ortalama kalınlıklar alınarak değişken kesitli plakların analizi yapılabilmektedir. Agrega kenetlenmesi ve aderans sınırlanması gibi etkiler, betonun çatlamasından sonra, kayma modülünün azaltılması ile dikkate alınmıştır.

Bu çalışmada aynı bilgisayar programı ile, iki tarafından mesnetli ve üzerinde iki sıra çizgisel yük bulunan (Şekil 7.1) bir plağın çözümü yapılmıştır. Aynı plak S.Ü. Yapı Laboratuvarında hazırlanan deney düzeneği ile plağın $1/3$ noktalarındaki sehimleri ölçülmüştür. Deney sonucu ile bilgisayar sonucu karşılaştırılmıştır. İki sonucun kabul edilebilir sınırlar içinde olduğu görülmüştür. Sonlu elemanlar metoduna ve tabakalı kompozit malzeme modeline dayalı olarak betonarme plakların analizi için geliştirilen bilgisayar programının, eğilmeye maruz betonarme plakların nonlineer analizinde kullanılabileceği, yukarıdaki paragraflardaki verilere dayanılarak ispatlanmıştır. Böylece pahalı olan deneysel çalışmaların yerine geçebilecek bilgisayar destekli bir çalışma geliştirilmiş bulunmaktadır.

Yapılan analizde, yük sıfırdan göçme yüküne kadar düzenli olarak artırılmış ve her yük adımında rijitlik matrisi yeniden hesaplanmıştır. Kullanılan iterasyon metodu, birleştirilmiş sabit-değişken rijitlik metodudur. Tipik bir yük artışı için çözüm metodundaki önemli adımlar Ek-1' deki akış diyagramında verilmiştir. Sayısal örneklerin çözümünde 8 düğümlü kuadratik eleman kullanılmıştır. Ancak programda, 4 düğümlü lineer dörtgen ve 9 düğümlü kuadratik elemanlar da kullanılabilmektedir.

10.3. İleride Yapılacak Çalışmalar İçin Tavsiyeler

Bu çalışmada, betonarme plakların nonlineer analizi, kısa süreli yüklemeler için yapılmıştır. Bundan dolayı, betonun rötre ve sünme etkileri dikkate alınmamıştır. Bu etkiler dikkate alınarak yeni bir analiz yapılabilir. Ayrıca, değişken kalınlıklı betonarme plakların nonlineer analizi, ortalama kalınlıklar yerine, gerçek durum dikkate alınarak yapılabilir.

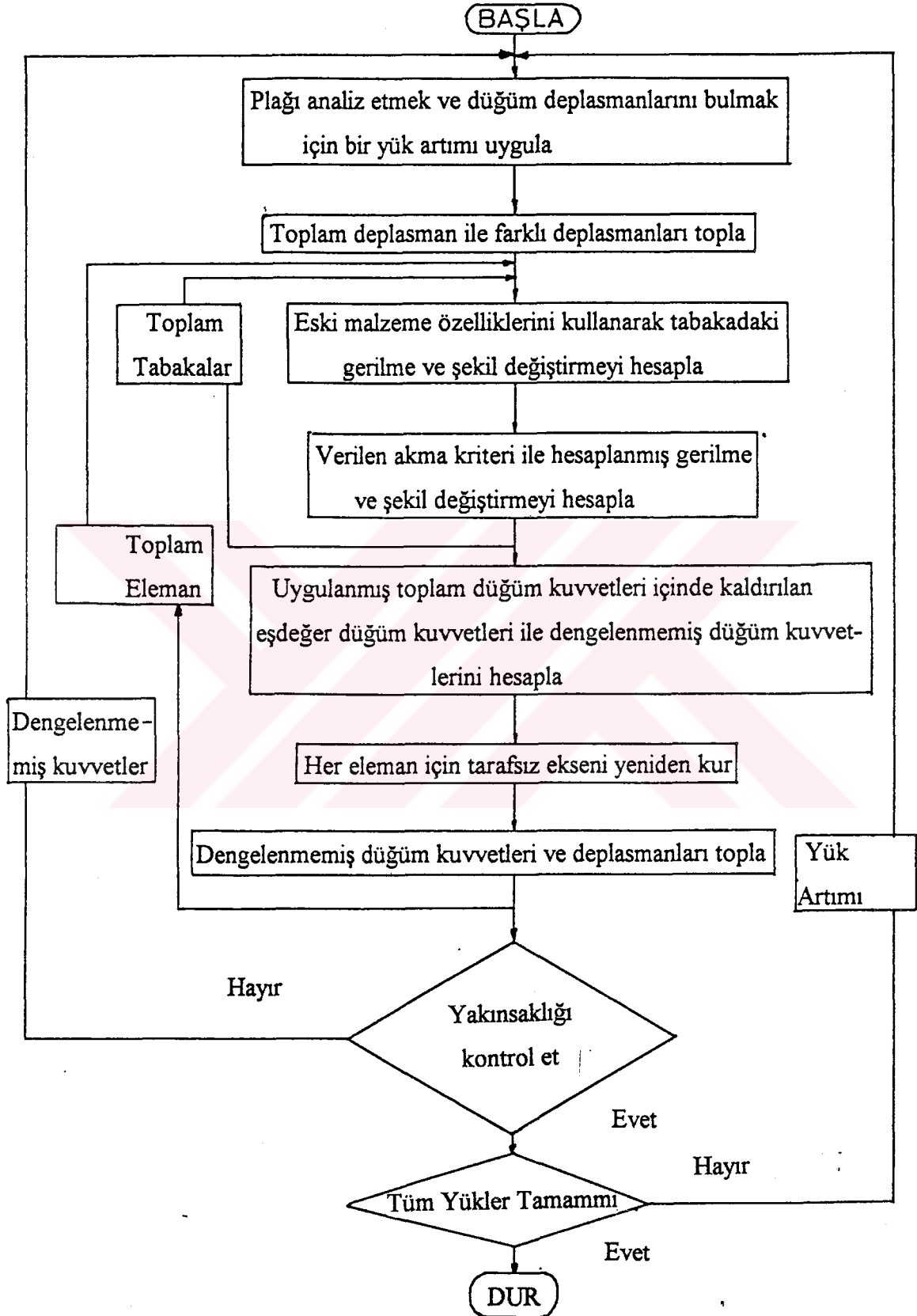
11. KAYNAKLAR

1. NGO, D., SCORDELIS, A.C., 1967. Finite element analysis of reinforced concrete beams. ACI Journal No.3: 64.
2. SCORDELIS, A.C., NGO, D., FRANKLIN, H.A., 1974. Finite element study of reinforced concrete beams with diagonal tension cracks. Proceedings. Symposium on shear in reinforced concrete. ACI Publication: 42.
3. NILSON, A.H., 1968. Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method. ACI Journal 9:65.
4. BÜYÜKÖZTÜRK, O., 1975. Betonarme yapı elemanlarının lineer olmayan analizi. Doçentlik tezi. İ.T.Ü. İstanbul.
5. VALLIAPAN, S., DOOLAN, T.F., 1972. Nonlinear stress analysis of reinforced concrete. J. of the Struc. Div., ASCE 98:885-897.
6. SUIDAN, M., SCHNOBRICH, W.C., 1973. Finite element analysis of reinforced concrete. J. of the Struc. Div., ASCE, No. ST10: 2109-2122.
7. BÜYÜKÖZTÜRK, O., NILSON, A.H., 1972. Deformation and fracture of a particulate composite. J of Engrg. Mechs. Div., ASCE 98:581-593.
8. JOFRIET, J.C., MCNEICE, G.M., 1971. Finite element analysis of RS slabs. J. Struct. Div., ASCE 97, 785-806.
9. VEBO, A., GHALI, A., 1978. Moment-curvature relation of reinforced concrete slabs. J. Struct. Div., ASCE 103: 515-531.
10. BASHUR, F.K., DARWIN, D., 1978. Nonlinear model for reinforced concrete slabs. J. Struct. Div., ASCE 104: 157-170.
11. LIN, C.S., SCORDELIS, A.C., 1975. Nonlinear analysis of RC shells of General form. J. Struct. Div., ASCE 101: 523-538.
12. HAND, F.R., PECKNOLD, D.A., SCHNOBRICH, W.C., 1973. Nonlinear layered analysis of RC plates and shells. J Struct. Div., ASCE 99: 1491-1505.
13. GILBERT, R.I., WARNER, R.F., 1978. Tension stiffening in reinforced concrete slabs. J. Struct. Div., ASCE 104: 1885-1900.
14. BAZANT, Z.P., CEDOLIN, L., 1980. Fracture mechanics of reinforced concrete. J. Engng. Mech. Div., ASCE 106: 1287-1306.

15. LEİBENGOOD, L.D., DARWIN, D., DOODS, R.H., 1986. Parameters affecting FE analysis of concrete structures. *J. Struct. Engng Div. ASCE* 112: 326-341.
16. ARNESEN, A., SORENSEN, S.I., BERGAN, P.G., 1980. Nonlinear Analysis of reinforced concrete. *Comput. Struct.* 12: 571-579.
17. MIKKOLA, M.J., SINISALO, H.S., 1983. Finite element analysis of transient nonlinear response of reinforced concrete structures. *Int. J. Pres. Ves. & Piping* 12:107-122.
18. MA, S.Y.A., MAY, I.M., 1986. The Newton-Raphson method used in the nonlinear analysis of concrete structures. *Comput. Struct.* 24: 177-185.
19. AKSOĞAN, O., 1986. Nonlinear yapı analizi. Yapı mekaniğinde son gelişmeler. Trabzon.
20. RAMADAN, S.L., 1987. Finite element analysis of reinforced concrete members. A master's thesis. M.E.T.U. Ankara.
21. WASTI, S.T., Ekim 1990. Sonlu eleman yönteminin betonarme yapı elemanlarına uygulanması. *IMO Teknik Dergi*, Cilt 1 Sayı 4:199-206.
22. CHOI, C.K., ve KWAK, H.G., 1990. The Effect of finite element mesh size in nonlinear analysis of reinforced concrete structures. *Comput. Struct.* Vol.36, No.5: 807-815
23. GHASSEMIH, M., KUKRETI, A.R., 1990. An algoritma for the analysis of problems with combined material and geometric nonlinearities. *Comput. Struct.* Vol. 35, No.5:579-591.
24. HU, H.T., SCHNOBRICH, W.C., 1991. Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete plates and shells under monotonic loading. *Comput. Struct.* Vol.38, No.5/6:637-651.
25. SATHURAPPAN, G., RAJAGOPALAN, N., KRISHNAMOORTHY, C.S., 1992. Nonlinear finite element analysis of reinforced and prestressed concrete slabs with reinforcement (inclusive of prestressing steel) modelled as discrete integral components. *Comput. Struct.* Vol.44, No.3:575-584.
26. KUPFER, H., HILSOLORT, H.K., RUSH, H., 1969. Behavior of concrete under biaxial stresses. *J. Am. Coner. Inst.* 66: 656-666.
27. DARWIN, D., PECKNOLD, A.W., 1977. Analysis of cyclic loading of plane RC structures. *Comput. Struct.* 7: 137-147.

28. BAZANT, Z.P., OH, B.H.,1983. Crack band theory for fracture of concrete. Mater. Struct. 16: 155-176
29. UTKU, M., WASTI, S.T.,1986. İzoparametrik sonlu elemanlar. Yapı mekaniğinde son gelişmeler. Trabzon.
30. CHANDRUPATLA, T.R., BELEGUNDU, A.D., 1991.Introduction to finite elements in engineering.194-222. New Jersey.
31. REEDY, J.N., 1984. An introduction to the finite element method. 194-332. New York.
32. HINTON, E., OWEN, D.R.J., 1977. Finite element programming.123-141. London.
33. ÇAKIROĞLU, A., ÖZDEN, E., ÖZMEN, G., 1992. Yapı sistemlerin hesabı için matris metotları. Cilt I.2.Baskı 199-230. İstanbul.
34. ROSS, C.T.F., 1990. Finite element methods in engineering science. 346-367. London.
35. ZIENKIEWICZ,O.C.,1971. The Finite element method in engineering science. 369-425. New York.
36. JONES, R.M., 1975. Mechanics of compozit materials.Mc Graw-Hill.
37. ONARAN, K.,1993. Malzeme bilimi. Bilim Teknik Yayınevi. 4.Baskı 345-350. İstanbul.
38. VINSON, J.R., CHOU, T.W., 1975. Composite materials and their use in structures Applied Science Publishers Ltd. 216-221. London.
39. BATHE, K.J., 1982. Finite element procedures in engineering analysis. 251-260. New Jersey
40. POSTACIOĞLU, B., 1987.Beton. Cilt 2. Matbaa Teknisyenleri Basımevi. İstanbul.
41. BARADAN, B., 1994. Yapı malzemesi II.Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik Fakültesi yayınları No: 207. İzmir.

EK-1 BİLGİSAYAR PROGRAMI İÇİN AKIŞ DİYAGRAMI



EK-2 : BİLGİSAYAR PROGRAMI DATA DOSYASININ HAZIRLANIŞI

DATA DOSTASI ADI: TABAKA. DAT

DATA SATIRI NO:1

ISIM

Çıktı dosyasında problemi tanıtmak içindir ve zorunludur.

DATA SATIRI NO :2

IEL, NPE, IMESH, NPRINT

IEL : Eleman tipini gösteren parametre

IEL = 1 ise 4 - düğümlü lineer eleman

IEL = 2 ise 8 veya 9 düğümlü kuadratik eleman

NPE : Elemandaki düğüm sayısı

NPE = 4 (IEL = 1 ise)

NPE = 8 veya 9 (IEL = 2 ise)

IMESH : Ağ üretimini belirten parametre

IMESH = 0 ise ağ üretimi yok. Gerekli bilgiler verilmelidir.

IMESH = 1 ise ağ üretimi var (sadece dörtgen bölgeler için)

NPRINT : Eleman matrisleri ve yük vektörlerinin dosyaya yazdırılması

NPRINT = 1 ise yazdır

NPRINT = 0 ise yazdırma yok

DATA SATIRI NO:3 (IMESH =1 ise 3,4 ve 5.satırları atlayınız)

NEM, NNM

NEM : Aşağıdaki toplam eleman sayısı

NNM : Aşağıdaki toplam düğüm sayısı

DATA SATIRI NO:4 Elemanı tarif eden kodlama tablosu

NOD (I;J) I= 1, NEM J= 1, NPE

DATA SATIRI NO:5

X(I), Y(I) I. düğüm x ve y koordinatları

DATA SATIRI NO:6 (IMESH =0 ise 6,7 ve 8.satırları atlayınız)

NX; NY x ve y doğrultularındaki bölme sayısı

DATA SATIRI NO:7ve 8

DX(I) IEL*NX adet veri

DY(I) IEL*NY adet veri

DX(I): x boyunca düğümler arası mesafe

DY(I): y boyunca düğümler arası mesafe

DATA SATIRI NO:9

EC1, ,EC2,GC12,GC13,GC23,ANUC12,FC,ECU,EC,ECTU,FT,GK,B

EC1 : x doğrultusunda betonun elastisite modülü

EC2 : y doğrultusunda betonun elastisite modülü

GC12 : x-y düzleminde betonun kayma modülü

GC13 : x-z düzleminde betonun kayma modülü

GC23 : y-z düzleminde betonun kayma modülü

ANUC12 : Betonun Poisson oranı

FC : Betonun basınç dayanımı

ECU : Betonun maksimum basınç şekil değiştirmesi

EC : Betonun max. basınç gerilmesine karşılık şekil değiştirme

ECTU : Betonun maksimum çekme şekil değiştirmesi

FT : Betonun çekme dayanımı

GK : Çatlak enerjisi

B : Sonlu eleman genişliği

DATA SATIRI NO:10

ES1 ,ES2,GS12,GS13,GS23,ANUS12,FY,ESU,EY

ES1 : x doğrultusunda çeliğin elastisite modülü

ES2 : y doğrultusunda çeliğin elastisite modülü

GS12 : x-y düzleminde çeliğin kayma modülü

GS13 : x-z düzleminde çeliğin kayma modülü

GS23 : y-z düzleminde çeliğin kayma modülü

ANUS12 : Çeliğin Poisson oranı

FY : Çeliğin basınç dayanımı

ESU : Çeliğin akma şekil değiştirmesi

DATA SATIRI NO:11

NUN

NUN : Eleman kalınlıkları kontrol parametresi

NUN = 1 ise bütün eleman kalınlıkları aynı, sadece bir eleman değerleri okunur,

NUN = 0 ise bütün eleman kalınlıkları farklı,her eleman değerleri okunur,

DATA SATIRI NO:12

$H(N)$ $N = 1, NEM$

$H(N)$: Eleman kalınlıklarını gösterir. Eğer $NUN = 1$ ise bir eleman kalınlığı yazılır.

DATA SATIRI NO:13

$HDX(N)$ $N= 1,NEM$

$HDX(N)$: Elemanların x yönündeki faydalı yüksekliklerini gösterir. Eğer $NUN = 1$ ise bir eleman değeri yazılır.

DATA SATIRI NO:14

$HDY(N)$ $N = 1,NEM$

$HDY(N)$: Elemanların y yönündeki faydalı yüksekliklerini gösterir. Eğer $NUN = 1$ ise bir eleman değeri yazılır.

DATA SATIRI NO:15

$NT, N1, N2$

NT : Toplam tabaka sayısı

$N1, N2$: y ve x yönündeki kompozit tabaka numarası

DATA SATIRI NO:16

ROX, ROY

ROX, ROY : x ve y yönündeki donatı oranı

DATA SATIRI NO:17

$ZT(N,K)$ $N = 1, NEM$ $I= 1, NT$

$ZT(N,K)$: Kesit orta yüzeyinden tabaka ortasına olan mesafeler

Eğer $NUN = 1$ ise bir eleman değeri okunur.

DATA SATIRI NO:18

$DPOY, DPOT$

$DPOY, DPOT$: Yayılı ve tekil yükün artış miktarları. Eğer herhangi bir yük türü yoksa sıfır yazılır.

DATA SATIRI NO:19

$PO(N)$ $N= 1, NEM$

$PO(N)$: Her eleman için üniform yayılı yükün şiddeti . Başka tür yük varsa sıfır verilir.

DATA SATIRI NO:20 (SIFIR OLAMAZ)

$NBDY$

$NBDY$: Verilen genel deplasman sayısı(Sınırlandırılmış deplasman dereceleri sayısı)

DATA SATIRI NO:21

IBDY(I) I = 1, NBDY

IBDY(I) : Verilen serbestlik dereceleri dizisi

DATA SATIRI NO:22

NAT

NAT : Yük adımı sayısı

DATA SATIRI NO:23

NBSF

NBSF : Sıfırdan farklı ve belirtilen kuvvetlerin sayısı (Yok ise sıfır verilir)

DATA SATIRI NO:24 (NBSF == ise geçiniz)

IBSF (I) (I) =1, NBSF

Verilen kuvvetlerin etkilediği serbestlik dereceleri numaraları

DATA SATIRI NO:25

VBSF(I) (I) = 1, NBSF

Belirtilen kuvvetlerin değerleri

BETONARME PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR METODU İLE
NONLINEER ANALIZI

PROGRAM ADI: TABAKA.FOR

Programlayan: RIFAT SEZER
S.U.Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Anabilim Dalı Yapı
Programı Doktora öğrencisi
KONYA

DEĞİSKENLERİN TARIFLARI

H.....Plak kalınlığı
NUN.....Eleman kalınlıkları aynı ise 1, değilse 0
HDX.....x yönündeki faydalı yükseklik
HDY.....y yönündeki faydalı yükseklik
AK.....Kayma düzeltme faktörü
D(I,J)....Malzeme sabitleri matrisi
D44,D55....Malzeme kayma katsayıları
E1,E2.....X ve Y doğrultularında elastisite modülleri
ELP(I).....Eleman kuvvet vektörü
ELXY(I,J)..I.Eleman düğümünün J.koordinatı (J=1,2)
GSTIF.....Global rijitlik matrisi(bant formunda)
IBDY(I)....Belirtilen sistem deplasmanları dizini
IBSF(I)....Belirtilen (sifirdan farklı) sistem kuvvetleri
IEL.....Eleman tipini belirten parametre:
IEL=1, 4-düğümlü eleman
IEL=2, 8/9 " "
NCMAX.....GSTIF'in kolon boyutu
NRMAX.....GSTIF'in satır boyutu
NOD(I,J)...Kod numaraları (komsuluk) matrisi
NBDY.....Belirtilen serbestlik derecesi toplam sayısı
PO.....Yayılı veya tekil yükün şiddeti
STIF.....Eleman rijitlik matrisi
VBDY.....IBDY dizininde belirtilen deplasman değerleri
VBSF.....IBSF dizininde belirtilen deplasman değerleri
X,Y.....Sistem düğümlerinin X ve Y koordinatları dizin-
leri
DPOY.....Yayılı yük artışı miktarı
DPOT.....Tekil yük artışı miktarı
NAT.....Yük adımı sayısı

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

CHARACTER*72 TITLE

DIMENSION GSTIF(283,93),GF(283),VBDY(85),IBDY(85),VBSF(25),
1 IBSF(25),WO(45),E1(20),E2(20),G12(20),G13(20)

DIMENSION G23(20),ANU12(20),ANU21(20),DENOM(20),Q(50,20,3,3),

1 H(50),HDX(50),HDY(50),PO(50),GFNA(10,150)

COMMON/SKL/SF(9),GDSF(2,9),ELXY(9,2)

COMMON/STF/STIF(45,45),ELP(45)

COMMON/MALZ/D(50,3,3),D44(50),D55(50),ZT(50,20),QT(50,20,3,3),

1 DK4(50,20),DK5(50,20),HT(50,20)

COMMON/MODL/EC1,EC2

COMMON/MSH/NOD(200,9),X(225),Y(225),DX(25),DY(25)

DATA NDF,NRMAX,NCMAX/3,283,93/

```
OPEN(2,FILE='TABAKA.DAT',FORM='FORMATTED',STATUS='OLD')
```

```
.....
.           ISLEM ONCESI BIRIMI
.....
```

```

READ (2,1111) TITLE
L11 FORMAT(A72)
READ (2,*) IEL,NPE,IMESH,NPRNT
IF(IMESH.EQ.1)GOTO 3
READ (2,*) NEM,NNM
DO 1 I=1,NEM
1 READ (2,*) (NOD(I,J),J=1,NPE)
READ (2,*) (X(I),Y(I),I=1,NNM)
GOTO 5
3 READ (2,*) NX,NY
NX1=IEL*NX+1
NY1=IEL*NY+1
NX2=NX1-1
NY2=NY1-1
READ (2,*) (DX(I),I=1,NX2)
READ (2,*) (DY(I),I=1,NY2)
DX(NX1)=0.0
DY(NY1)=0.0

CALL MESH(IEL,NX,NY,NPE,NNM,NEM)
5 READ (2,*) EC1,EC2,GC12,GC13,GC23,ANUC12,FC,ECU,EC,ECTU,FT,GK,B
READ (2,*) ES1,ES2,GS12,GS13,GS23,ANUS12,FY,ESU,EY
READ (2,*) NUN
IF (NUN.EQ.1) THEN
READ (2,*) H(1)
DO 7 N=1,NEM
7 H(N)=H(1)
GOTO 9
ENDIF
READ (2,*) (H(N),N=1,NEM)
9 IF (NUN.EQ.1) THEN
READ (2,*) HDY(1)
DO 11 N=1,NEM
11 HDY(N)=HDY(1)
GOTO 13
ENDIF
READ (2,*) (HDY(N),N=1,NEM)
13 IF (NUN.EQ.1) THEN
READ (2,*) HDX(1)
DO 15 N=1,NEM
15 HDX(N)=HDX(1)
GOTO 17
ENDIF
READ (2,*) (HDX(N),N=1,NEM)
17 READ (2,*) NT,N1,N2
READ (2,*) ROX,ROY
IF (NUN.EQ.1) THEN
READ (2,*) (ZT(1,I),I=1,NT)
DO 19 N=1,NEM
DO 19 I=1,NT
19 ZT(N,I)=ZT(1,I)
GOTO 23
ENDIF
```

```

DO 21 N=1,NEM
21 READ (2,*) (ZT(N,I),I=1,NT)
23 IF (NUN.EQ.1) THEN
  READ (2,*) (HT(1,I),I=1,NT)
  DO 25 N=1,NEM
  DO 25 I=1,NT
25 HT(N,I)=HT(1,I)
  GOTO 29
ENDIF
DO 27 N=1,NEM
27 READ (2,*) (HT(N,I),I=1,NT)
29 READ (2,*) DPOY,DPOY
  READ (2,*) (PO(N),N=1,NEM)
  READ (2,*) NBDY
  READ (2,*) (IBDY(I),I=1,NBDY)
  READ (2,*) (VBDY(I),I=1,NBDY)
  READ (2,*) NAT
  READ (2,*) NBSF
  IF (NBSF.EQ.0) GOTO 31
  READ (2,*) (IBSF(I),I=1,NBSF)
  READ (2,*) (VBSF(I),I=1,NBSF)
  CLOSE(2)

```

VERI GIRISININ SONU

```

.....
.           ISLEMLERIN YAPILDIGI BIRIM           .
.....

```

*** Yuk adimlarinin baslangici ***

```

31 TG=0
  TE=0
  TE1=0
  TG1=0
  TE2=0
  TE3=0
  NEQ=NNM*NDF
  NN=NPE*NDF
  AK=5.0/6.0
  Toplam yuke bagli deplasmanlariin sifirlanmasi
  DO 33 I=1,NEQ,NDF
  GFNA(NA,I)=0
  GFNA(NA,I+1)=0
33 GFNA(NA,I+2)=0

DO 220 NA=1,NAT
WRITE (*,*) 'Yuk Adimi No=',NA

Celik elastisite modulunun degistirilmesi
IF (FS.GE.FY) THEN
ES1=.01*ES1
ENDIF

IF (NA.EQ.1) THEN
WRITE(*,*)'PO uniform yayili yuku:'
WRITE(*,300) (PO(N),N=1,NEM)
WRITE(*,*)'VBSF tekil yuku:'

```

```

WRITE(*,300) (VBSF(I),I=1,NBSF)
ENDIF
IF (NA .EQ. 1) GOTO 39
Yuk artiminin yapilmasi
IF (PO(1) .GT. 0) THEN
DO 35 N=1,NEM
35 PO(N)=PO(N)+DPOY
WRITE(*,*)'PO uniform yayili yuku:'
WRITE(*,300) (PO(N),N=1,NEM)
ENDIF
IF (NBSF .GT. 0) THEN
DO 37 I=1,NBSF
37 VBSF(I)=VBSF(I)+DPOT
WRITE(*,*)'VBSF tekil yuku:'
WRITE(*,300) (VBSF(I),I=1,NBSF)
ENDIF

```

Malzeme matrislerinin sifirlanmasi

```

39 DO 550 N=1,NEM
DO 550 K=1,NT
DO 530 I=1,3
DO 530 J=1,3
530 QT(N,K,J,I)=0.0
DK4(N,K)=0.0
DK5(N,K)=0.0
D44(N)=0.0
D55(N)=0.0
DO 540 I=1,3
DO 540 J=1,3
540 Q(N,K,I,J)=0.0
DO 550 I=1,3
DO 550 J=1,3
550 D(N,I,J)=0.0

```

```

40 DO 60 N=1,NEM
WRITE (*,*)'Eleman No=',N

```

Tabaka islemlerinin yapilmasi

```

DO 41 K=1,NT
E1(K)=EC1
E2(K)=EC1
G12(K)=GC12
G13(K)=GC12
G23(K)=GC12
41 ANU12(K)=ANUC12
y yonundeki kompozit tabaka malzeme degerlerinin hesabi
IF (N1.EQ.0) GOTO 43
ACY=HDY(N)*1
ACS=HT(N,N1)*1
ASY=ROY*ACY
VSY=ASY/ACS
E2(N1)=E1*VSY+EC1*(1-VSY)
E1(N1)=EC2*ES2/(EC2*VSY+(1-VSY)*ES2)
G12(N1)=GC12*GS12/(VSY*GC12+(1-VSY)*GS12)
G13(N1)=GC13*GS13/(VSY*GC13+(1-VSY)*GS13)
G23(N1)=GC23*GS23/(VSY*GC23+(1-VSY)*GS23)
IF (ROY.NE.ROY) THEN
G13(N1)=.6*E2(N1)
G23(N1)=.6*E2(N1)

```



```

ENDIF
ANU12(N1)=(1-VSY)*ANUC12+VSY*ANUS12
y yonundeki kompozit tabaka malzeme degerleri
EY1=E1(N1)
EY2=E2(N1)
GY12=G12(N1)
GY13=G13(N1)
GY23=G23(N1)
ANUY12=ANU12(N1)
x yonundeki kompozit tabaka malzeme degerleri
43 IF (N2.EQ.0) GOTO 43
ACX=HDX(N)*1
ACS=HT(N,N2)*1
ASX=ROX*ACX
VSX=ASX/ACS
E1(N2)=ES1*VSX+EC1*(1-VSX)
E2(N2)=EC2*ES2/(EC2*VSX+(1-VSX)*ES2)
G12(N2)=GC12*GS12/(VSX*GC12+(1-VSX)*GS12)
G13(N2)=GC13*GS13/(VSX*GC13+(1-VSX)*GS13)
G23(N2)=GC23*GS23/(VSX*GC23+(1-VSX)*GS23)
IF (ROX.NE.ROY) THEN
G13(N2)=.6*E2(N2)
G23(N2)=.6*E2(N2)
ENDIF
ANU12(N2)=(1-VSX)*ANUC12+VSX*ANUS12
x yonundeki kompozit tabaka malzeme degerleri
EX1=E1(N2)
EX2=E2(N2)
GX12=G12(N2)
GX13=G13(N2)
GX23=G23(N2)
ANUX12=ANU12(N2)
Beton Tabaka Rijitligi QT' nin hesabi
DO 44 K=1,NT
ANU21(K)=ANU12(K)*E2(K)/E1(K)
DENOM(K)=(1.0-ANU12(K)*ANU21(K))
QT(N,K,1,1)=E1(K)/DENOM(K)
QT(N,K,1,2)=ANU12(K)*QT(N,K,1,1)
QT(N,K,1,3)=0.0
QT(N,K,2,2)=QT(N,K,1,1)*E2(K)/E1(K)
QT(N,K,2,3)=0.0
44 QT(N,K,3,3)=G12(K)

y Yonundeki N1. Celik Tabaka Rijitligi QT' nin hesabi
QT(N,N1,1,1)=0
QT(N,N1,1,2)=0
QT(N,N1,1,3)=0
QT(N,N1,2,2)=ES1
QT(N,N1,2,3)=0
QT(N,N1,3,3)=0
x Yonundeki N2. Celik Tabaka Rijitligi QT' nin hesabi
QT(N,N2,1,1)=ES1
QT(N,N2,1,2)=0
QT(N,N2,1,3)=0
QT(N,N2,2,2)=0
QT(N,N2,2,3)=0
QT(N,N2,3,3)=0

DO 45 K=1,NT
DO 45 I=1,3

```

```

DO 45 J=1,3
45 QT(N,K,J,I)=QT(N,K,I,J)
WRITE(*,*)'QT MATRISI'
DO 46 K=1,NT
WRITE(*,*)'TABAKA NO=',K
DO 46 I=1,3
DO 46 J=1,3
46 WRITE(*,49) QT(N,K,I,J)
WRITE(*,*)'ZT MATRISI'
WRITE(*,49) (ZT(N,K),K=1,NT)
WRITE(*,*)'HT MATRISI'
WRITE(*,49) (HT(N,K),K=1,NT)
49 FORMAT (8(1X,E12.3))
Beton Tabaka Kayma Matrisi D44 ve D55'nin hesabi :
DO 48 K=1,NT
DK4(N,K)=AK*G13(K)*HT(N,K)
DK5(N,K)=AK*G23(K)*HT(N,K)
48 CONTINUE
y Yonundeki N1. Celik Tabaka Kayma Matrisi D44 ve D55'nin hesabi :
DK4(N,N1)=0
DK5(N,N1)=0
x Yonundeki N2.Celik Tabaka Kayma Matrisi D44 ve D55'nin hesabi :
DK4(N,N2)=0
DK5(N,N2)=0

DO 50 K=1,NT
D44(N)=D44(N)+DK4(N,K)
50 D55(N)=D55(N)+DK5(N,K)
WRITE(*,*)'DK4(K) ve DK5(K) DEGERLERI'
WRITE(*,49) (DK4(N,K),K=1,NT)
WRITE(*,49) (DK5(N,K),K=1,NT)
WRITE(*,*)'D44 ve D55 DEGERLERI'
WRITE(*,49)D44
WRITE(*,49)D55

Beton Tabakalar icin Malzeme Egilme Matrisi D'nin hesabi :
DO 52 K=1,NT
DO 52 I=1,3
DO 52 J=1,3
52 Q(N,K,I,J)=QT(N,K,I,J)*(HT(N,K)*ZT(N,K)**2+HT(N,K)**3/12)
52 CONTINUE
y Yonunde Celik Tabaka Malzeme Egilme Matrisi D'nin hesabi :
DO 54 K=1,NT
DO 54 I=1,3
DO 54 J=1,3
54 Q(N,N1,I,J)=VSY*QT(N,N1,I,J)*(HT(N,N1)*ZT(N,N1)**2+HT(N,N1)**3/12)
54 CONTINUE
x Yonunde Celik Tabaka Malzeme Egilme Matrisi D'nin hesabi :
DO 56 K=1,NT
DO 56 I=1,3
DO 56 J=1,3
56 Q(N,N2,I,J)=VSX*QT(N,N2,I,J)*(HT(N,N2)*ZT(N,N2)**2+HT(N,N2)**3/12)
56 CONTINUE
DO 58 K=1,NT
DO 58 I=1,3
DO 58 J=1,3
58 D(N,I,J)=D(N,I,J)+Q(N,K,I,J)
WRITE(*,*)'Q MATRISI'
DO 59 K=1,NT
DO 59 I=1,3

```

```

59 WRITE(*,300) (Q(N,K,I,J),J=1,3)
   WRITE(*,*)'D MATRISI'
   DO 60 I=1,3
60 WRITE(*,300) (D(N,I,J),J=1,3)

```

Girilen verileri ve a γ ile ilgili bilgileri yazdir

```
OPEN(2,FILE='TABAKA.OUT',FORM='FORMATTED',STATUS='NEW')
```

```

IF (NA .GT. 1) GOTO 500
WRITE (*,260) TITLE
WRITE (2,260) TITLE
WRITE (*,310) IEL,NPE
WRITE (2,310) IEL,NPE
WRITE (*,320) NEM,NNM,NDF
WRITE (2,320) NEM,NNM,NDF
500 WRITE (*,330) EC1,EC2,GC12,GC13,GC23,ANUC12,AK,H(1),PO(1)
   WRITE (2,330) EC1,EC2,GC12,GC13,GC23,ANUC12,AK,H(1),PO(1)
   IF (ES1 .EQ. 0) GOTO 61
   WRITE (*,335) ES1,ES2,GS12,GS13,GS23,ANUS12,AK,H(1),PO(1)
   WRITE (2,335) ES1,ES2,GS12,GS13,GS23,ANUS12,AK,H(1),PO(1)
   IF (N1 .EQ. 0) GOTO 61
   WRITE (*,336) EY1,EY2,GY12,GY13,GY23,ANUY12,AK,H(1),PO(1)
   WRITE (2,336) EY1,EY2,GY12,GY13,GY23,ANUY12,AK,H(1),PO(1)
   IF (N2 .EQ. 0) GOTO 61
   WRITE (*,338) EX1,EX2,GX12,GX13,GX23,ANUX12,AK,H(1),PO(1)
   WRITE (2,338) EX1,EX2,GX12,GX13,GX23,ANUX12,AK,H(1),PO(1)
61 WRITE (*,340)
   WRITE (2,340)
   DO 62 I=1,NBDY
   WRITE (*,266) IBDY(I),VBDY(I)
62 WRITE (2,266) IBDY(I),VBDY(I)
266 FORMAT (1X,I5,2F15.4)
   WRITE (*,350)
   WRITE (2,350)
   DO 64 I=1,NBSF
   WRITE (*,266) IBSF(I),VBSF(I)
64 WRITE (2,266) IBSF(I),VBSF(I)
   WRITE (*,360)
   WRITE (2,360)
   DO 65 I=1,NEM
   WRITE (*,270) I,(NOD(I,J),J=1,NPE)
65 WRITE (2,270) I,(NOD(I,J),J=1,NPE)
   WRITE (*,370)
   WRITE (2,370)
   WRITE (*,*)'DUGUM           X(I)           Y(I) '
   WRITE (2,*)'DUGUM           X(I)           Y(I) '
   DO 233 I=1,NNM
   WRITE (*,234) I,X(I),Y(I)
233 WRITE (2,234) I,X(I),Y(I)
234 FORMAT (1X,I3,2X,2F15.4)
   Yari bant genisliginin hesabi
67 NHBW=0.0
   DO 70 N=1,NEM
   DO 70 I=1,NPE
   DO 70 J=1,NPE
   NW=(IABS(NOD(N,I)-NOD(N,J))+1)*NDF
70 IF(NHBW.LT.NW) NHBW=NW
   WRITE (*,400) NHBW
   WRITE (2,400) NHBW

```

Yayili yukun her adimda yazdirilmesi

```
IF (PO(1).GT.0) THEN
DO 75 N=1,NEM
75 WRITE(*,300) PO(N)
ENDIF
```

Sistem rijitlik matrisi ve yuk vektorunun sifirlanmasi

```
DO 80 I=1,NEQ
GF(I)=0.0
DO 80 J=1,NHBW
80 GSTIF(I,J)=0.0
WRITE (*,*) 'Eleman rijitlik matrisleri hesabi'
DO 130 N=1,NEM
IF (PRINT.EQ.0) GOTO 84
WRITE(*,*) 'Eleman No:',N
```

Eleman rijitlik matrisinin sifirlanmasi

```
84 DO 85 I=1,NN
DO 85 J=1,NN
85 STIF(I,J)=0
L=0
DO 90 I=1,NPE
NI=NOD(N,I)
ELXY(I,1)=X(NI)
ELXY(I,2)=Y(NI)
90 LI=(NI-1)*NDF

CALL STIFF (IEL,NPE,NN,PO,N)
IF (NPRNT.EQ.0) GOTO 110
IF (N.GT.1) GOTO 110
WRITE (*,380)
WRITE (2,380)
DO 100 I=1,NN
WRITE (*,300) (STIF(I,J),J=1,NN)
100 WRITE (2,300) (STIF(I,J),J=1,NN)
WRITE (*,410)
WRITE (2,410)
WRITE (*,300) (ELP(I),I=1,NN)
WRITE (2,300) (ELP(I),I=1,NN)
WRITE (*,410)
WRITE (2,410)
110 CONTINUE
```

WRITE(*,*)'Sistem rijitlik matrisine katilmasi'
Eleman rijitlik matrisinin sistem rijitlik matrisine katkisi

```
DO 130 I=1,NPE
NR=(NOD(N,I)-1)*NDF
DO 130 II=1,NDF
NR=NR+1
L=(I-1)*NDF+II
GF(NR) = GF(NR) + ELP(L)
DO 130 J=1,NPE
NCL=(NOD(N,J)-1)*NDF
DO 130 JJ=1,NDF
M=(J-1)*NDF+JJ
NC=NCL+JJ-NR+1
IF (NC) 130, 130, 120
120 GSTIF(NR,NC)=GSTIF(NR,NC)+STIF(L,M)
```

WRITE(*,*)'Sinir sartlarinin isleme katilmasi'
Kuvvet ve deplasman sinir sartlari sistem denklemine katiliyor

```
IF(NBSF.EQ.0) GOTO 145
DO 140 I=1,NBSF
NB=IBSF(I)
140 GF(NB)=GF(NB)+VBSF(I)
WRITE (*,300) (GF(I),I=1,NBSF)
145 CALL BNDY(NRMAX,NCMAX,NEQ,NHBW,GSTIF,GF,NBDY,IBDY,VBDY)
```

Sistem denklemlerinin cozumu icin "SOLVE" alt-programi
cagriliyor

```
WRITE(*,*)'Denklem sisteminin cozumu'
CALL SOLVE (NRMAX,NCMAX,NEQ,NHBW,GSTIF,GF,0)
WRITE (*,420)
WRITE (2,420)
II=0
DO 182 I=1,NEQ,NDF
II=II+1
GFNA(NA,I)=GFNA(NA-1,I)+GF(I)
GFNA(NA,I+1)=GFNA(NA-1,I+1)+GF(I+1)
GFNA(NA,I+2)=GFNA(NA-1,I+2)+GF(I+2)
WRITE(*,301) II,GF(I),GF(I+1),GF(I+2)
182 WRITE(2,301) II,GF(I),GF(I+1),GF(I+2)
301 FORMAT(1X,I5,3E15.4)
Yuke bagli toplam deplamanlarin hesabi
WRITE(*,*)'Yuke Bagli Toplam Deplasmanlar, Yuk No=',NA
WRITE(2,*)'Yuke Bagli Toplam Deplasmanlar, Yuk No=',NA
WRITE (*,420)
WRITE (2,420)
II=0
DO 190 I=1,NEQ,NDF
II=II+1
WRITE(*,301) II,GFNA(NA,I),GFNA(NA,I+1),GFNA(NA,I+2)
190 WRITE(2,301) II,GFNA(NA,I),GFNA(NA,I+1),GFNA(NA,I+2)
```

.....
. ISLEM SONRASI BIRIMI .
.....

Egilme gerilmelerinin hesabi (Gauss noktalarinda)

```
WRITE(*,*)'Gerilme ve sekil degistirmeler :'  
WRITE(2,*)'Gerilme ve sekil degistirmeler :'  
DO 210 N=1,NEM  
IF (N.GT.1) GOTO 220  
WRITE(*,*)'Eleman No:',N  
WRITE(2,*)'Eleman No:',N  
L=0  
DO 205 I=1,NPE  
NI=NOD(N,I)  
ELXY(I,1)=X(NI)  
ELXY(I,2)=Y(NI)  
LI=(NI-1)*NDF  
DO 205 J=1,NDF  
LI=LI+1  
L=L+1
```

```

205 WO(L)=GF(LI)
210 CALL STRAN (NPE,NDF,IEL,W0,H,ECU,EC,ECTU,FC,B,GK,FT,NT,N,EC1,
1      EC2,GC12,GC13,GC23,ANUC12,NA,N1,N2,HDX,HDX,ASY,ASX,ES1,FY,FS,
2      GS12,E1,SGMAX,VSX,VSX)
220 CONTINUE

```

```

CLOSE(2)
STOP 'ISLEM TAMAM'

```

FORMATLAR

```

260 FORMAT (A72)
270 FORMAT (I5,5X,15I5)
280 FORMAT (8F10.4)
290 FORMAT (8F10.3)
300 FORMAT (8(2X,E12.5))
310 FORMAT (/ ,5X,'Eleman tipi(1=Lineer,2=Kvadratik)=' ,I2,/ ,5X,'Eleman
1 dugum sayisi=' ,I2)
320 FORMAT (5X,'Agdaki toplam eleman sayisi=' ,I3,/ ,5X,'Agdaki toplam
1 dugum sayisi=' ,I3,/ ,5X,'Serbestlik derecesi =',I2,/ )
330 FORMAT (5X,'Beton Malzeme Ozellikleri:' ,/ ,10X,'Modul ,
1 E1=' ,E12.5,/ ,10X,'Modul ,E2=' ,E12.5,/ ,10X,'Kayma modulu,G12,G13,
2 G23=' ,3E11.4,/ ,10X,'Poisson oranı ,ANU12=' ,E12.5,/ ,10X,'Kayma du
3 zeltme katsayisi ,K=' ,E12.5,/ ,10X,'Plak kalınlığı ,H=' ,E12.5,/ ,
4 10X,'Yayılı Yuk siddeti, P=' ,E12.5,/ )
335 FORMAT (5X,'Celik Malzeme Ozellikleri:' ,/ ,10X,'Modul ,
1 E1=' ,E12.5,/ ,10X,'Modul ,E2=' ,E12.5,/ ,10X,'Kayma modulu,G12,G13,
2 G23=' ,3E11.4,/ ,10X,'Poisson oranı ,ANU12=' ,E12.5,/ ,10X,'Kayma du
3 zeltme katsayisi ,K=' ,E12.5,/ ,10X,'Plak kalınlığı ,H=' ,E12.5,/ ,
4 10X,'Yayılı Yuk siddeti, P=' ,E12.5,/ )
336 FORMAT (5X,'y Yonundeki tabaka Malzeme Ozellikleri:' ,/ ,10X,'Modul ,
1 E1=' ,E12.5,/ ,10X,'Modul ,E2=' ,E12.5,/ ,10X,'Kayma modulu,G12,G13,
2 G23=' ,3E11.4,/ ,10X,'Poisson oranı ,ANU12=' ,E12.5,/ ,10X,'Kayma du
3 zeltme katsayisi ,K=' ,E12.5,/ ,10X,'Plak kalınlığı ,H=' ,E12.5,/ ,
4 10X,'Yayılı Yuk siddeti, P=' ,E12.5,/ )
338 FORMAT (5X,'x Yonundeki Tabaka Malzeme Ozellikleri:' ,/ ,10X,'Modul ,
1 E1=' ,E12.5,/ ,10X,'Modul ,E2=' ,E12.5,/ ,10X,'Kayma modulu,G12,G13,
2 G23=' ,3E11.4,/ ,10X,'Poisson oranı ,ANU12=' ,E12.5,/ ,10X,'Kayma du
3 zeltme katsayisi ,K=' ,E12.5,/ ,10X,'Plak kalınlığı ,H=' ,E12.5,/ ,
4 10X,'Yayılı Yuk siddeti, P=' ,E12.5,/ )
340 FORMAT (/ ,5X,'Belirtilen deplasman kod numaralari ve değerleri')
350 FORMAT (/ ,5X,'Belirtilen kuvvet kod numaralari ve değerleri')
360 FORMAT (/ ,5X,'Eleman kod numaralari matrisi.....NOD(I,J) ' ,/ )
370 FORMAT (/ ,5X,'Dugumlerin sistem koordinatlari:' ,/ )
380 FORMAT (/ ,5X,'Eleman rijitlik ve kuvvet matrisleri:' ,/ )
390 FORMAT (1X,'.....' ,/ )
400 FORMAT (/ ,5X,'Sistem rijitlik matrisi yari bant genisligi=' ,I5,/ )
410 FORMAT (/ )
420 FORMAT (/ ,2X,'Dug. No. ' , 'Deplasman w' ,8X,'teta-x' ,8X,'teta-y' ,/ )
END

```

```
SUBROUTINE STIFF (IEL,NPE,NN,PO,N)
```

.....
Bu program ortotropik plaklari da kapsamaktadır.Kayma deformatiyonlari goz onune alınmaktadır. Burada 4, 8 ve 9 dugumlu izoparametrik eleman ve her dugumde 3 serbestlik derecesi (W,SX,SY) vardır.

```

.....
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
COMMON/STF/STIF(45,45),ELP(45)
COMMON/MALZ/D(50,3,3),D44(50),D55(50),ZT(50,20),QT(50,20,3,3),
1      DK4(50,20),DK5(50,20),HT(50,20)
COMMON/SKL/SF(9),GDSF(2,9),ELXY(9,2)
DIMENSION WT(4,4),GAUSS(4,4),PO(50)

DATA GAUSS/4*0.0D0,-.57735027D0,.57735027D0,2*0.0D0,-.77459667D0,
1 0.0D0,.77459667D0,0.0D0,-.86113631D0,-.33998104D0,.33998104D0,
2 .86113631D0/

```

```

DATA WT/2.0D0,3*0.0D0,2*1.0D0,2*0.0D0,.55555555D0,.88888888D0,
1 .55555555D0,0.0D0,.34785485D0,2*.65214515D0,.34785485D0/

```

```

NGP=IEL+1
LGP=IEL
NDF=NN/NPE

```

Eleman matrisleri ve kuvvet vektörü sıfırlanıyor

```

DO 10 I=1,NN
ELP(I)=0.0
DO 10 J=1,NN
10 STIF(I,J)=0.0

```

Egilme terimleri üzerinde Gauss integrasyonu (FULL) buradan başlıyor

```

DO 80 NI=1,NGP
DO 80 NJ=1,NGP
XI=GAUSS(NI,NGP)
ETA=GAUSS(NJ,NGP)

```

```

CALL SHAPE(NPE,XI,ETA,DET)
CNST=DET*WT(NI,NGP)*WT(NJ,NGP)
DO 30 I=1,NPE
L=(I-1)*NDF+1
ELP(L)=ELP(L)+CNST*SF(I)*PO(N)
30 CONTINUE

```

Rijitlik matrisi 'STIF' nin tanımı

```

II=1
DO 70 I=1,NPE
JJ=1
DO 60 J=1,NPE
STIF(II+1,JJ+1)=STIF(II+1,JJ+1)+(D(N,1,1)*GDSF(1,I)*GDSF(1,J)
1      +D(N,3,3)*GDSF(2,I)*GDSF(2,J))*CNST
STIF(II+1,JJ+2)=STIF(II+1,JJ+2)+(D(N,1,2)*GDSF(1,I)*GDSF(2,J)
1      +D(N,3,3)*GDSF(2,I)*GDSF(1,J))*CNST
STIF(II+2,JJ+1)=STIF(II+2,JJ+1)+(D(N,1,2)*GDSF(2,I)*GDSF(1,J)
1      +D(N,3,3)*GDSF(1,I)*GDSF(2,J))*CNST
STIF(II+2,JJ+2)=STIF(II+2,JJ+2)+(D(N,3,3)*GDSF(1,I)*GDSF(1,J)
1      +D(N,2,2)*GDSF(2,I)*GDSF(2,J))*CNST
60 JJ=NDF*J+1
70 II=NDF*I+1
80 CONTINUE

```

Kayma terimleri üzerinde Gauss integrasyonu (REDUCED) buradan

```

basliyor
DO 110 NI=1,LGP
DO 110 NJ=1,LGP
XI=GAUSS(NI,LGP)
ETA=GAUSS(NJ,LGP)
CALL SHAPE(NPE,XI,ETA,DET)
CNST=DET*WT(NI,LGP)*WT(NJ,LGP)
II=1
DO 100 I=1,NPE
JJ=1
DO 90 J=1,NPE
STIF(II,JJ) =STIF(II,JJ)+(D44(N)*GDSF(1,I)*GDSF(1,J)+
1 D55(N)*GDSF(2,I)*GDSF(2,J))*CNST
STIF(II,JJ+1)=STIF(II,JJ+1)+D44(N)*GDSF(1,I)*SF(J)*CNST
STIF(II+1,JJ)=STIF(II+1,JJ)+D44(N)*SF(I)*GDSF(1,J)*CNST
STIF(II,JJ+2)=STIF(II,JJ+2)+D55(N)*GDSF(2,I)*SF(J)*CNST
STIF(II+2,JJ)=STIF(II+2,JJ)+D55(N)*SF(I)*GDSF(2,J)*CNST
STIF(II+1,JJ+1)=STIF(II+1,JJ+1)+D44(N)*SF(I)*SF(J)*CNST
STIF(II+2,JJ+2)=STIF(II+2,JJ+2)+D55(N)*SF(I)*SF(J)*CNST
90 JJ=NDF*J+1
100 II=NDF*I+1
110 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE STRAN (NPE,NDF,IEL,W,H,ECU,EC,ECTU,FC,B,GK,FT,NT,N,EC1,
1 EC2,GC12,GC13,GC23,ANUC12,NA,N1,N2,HDY,HDX,ASY,ASX,ES1,
2 FY,FS,GS12,E1,SGMAX,VSX,VSY)

```

.....
Program Gauss noktalarinda 'Reduced Integrasyon' yaparak egilme
sekil degistirmelerini hesaplamaktadir. sekil degistirmeler pla-
ust yuzundeki (veya tersi alt yuzundeki) degerlerdir.
.....

```

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
COMMON/SKL/SF(9),GDSF(2,9),ELXY(9,2)
COMMON/MALZ/D(50,3,3),D44(50),D55(50),ZT(50,20),QT(50,20,3,3),
1 DK4(50,20),DK5(50,20),HT(50,20)
DIMENSION W(45),GAUSS(4,4),FTIX(20),FTIY(20),FTIXY(20),
1 DNX(50),DNY(50),H(50),HDX(50),HDY(50),EP1(20)
DIMENSION EPIAX(20),EPIAY(20),EPIXY(20),EPIXZ(20),EPIYZ(20),
1 EPS1(20),EPS2(20),C(50),E1(20)
DIMENSION SGIAX(20),SGIAY(20),SGIXY(20),SGIXZ(20),
1 SGIYZ(20),SG1(20),SG2(20),F(10,50)
DIMENSION PMIAX(20),PMIAY(20),PMIXY(20),PTIXZ(20),PTIYZ(20)
DIMENSION PMDAX(20),PMDAY(20),PMDXY(20),PTDXZ(20),PTDYZ(20)
DATA GAUSS/4*0.0D0,-.57735027D0,.57735027D0,2*0.0D0,-.77459667D0,
1 0.0D0,.77459667D0,0.0D0,-.86113631D0,-.33998104D0,.33998104D0,
2 .86113631D0/
DATA GAUSS/-1,-1,1,-1,-1,1,1,1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,1/

DATA WT/2.0D0,3*0.0D0,2*1.0D0,2*0.0D0,.55555555D0,.88888888D0,
1 .55555555D0,0.0D0,.34785485D0,2*.65214515D0,.34785485D0/

```

```

TET=0
NGP=IEL
IF (IEL.EQ.1) THEN
NGP=IEL+1
ENDIF

```



```
DO 40 NI=1,NGP
DO 40 NJ=1,NGP
XI=GAUSS(NI,NGP)
ETA=GAUSS(NJ,NGP)
```

```
CALL SHAPE(NPE,XI,ETA,DET)
CNST=DET*WT(NI,NGP)*WT(NJ,NGP)
```

```
SIX=0.0
SIY=0.0
DWX=0.0
DWY=0.0
DSXY=0.0
DSYX=0.0
DSXX=0.0
DSYY=0.0
```

```
X=0.0
Y=0.0
```

```
DO 10 I=1,NPE
```

```
L=(I-1)*NDF+1
```

```
X=X+SF(I)*ELXY(I,1)
```

```
Y=Y+SF(I)*ELXY(I,2)
```

```
DWX=DWX+GDSF(1,I)*W(L)
```

```
DWY=DWY+GDSF(2,I)*W(L)
```

```
SIX=SIX+SF(I)*W(L+1)
```

```
SIY=SIY+SF(I)*W(L+2)
```

```
DSXX=DSXX+GDSF(1,I)*W(L+1)
```

```
DSXY=DSXY+GDSF(2,I)*W(L+1)
```

```
DSYX=DSYX+GDSF(1,I)*W(L+2)
```

```
10 DSYY=DSYY+GDSF(2,I)*W(L+2)
```

Tabaka hesaplari:

```
TEK1=0
```

```
TEK2=0
```

```
TEK3=0
```

```
TEK4=0
```

```
CS=0
```

```
IT=0
```

```
EPMAX=0
```

```
EPMAX=0
```

```
EPMXY=0
```

```
EPMXZ=0
```

```
EPMYZ=0
```

```
DO 12 K=1,NT
```

```
EPIAX(K)=0
```

```
EPIAY(K)=0
```

```
EPIXY(K)=0
```

```
EPIXZ(K)=0
```

```
12 EPIYZ(K)=0
```

```
IF (NA.EQ.1) THEN
```

```
TET=TET+1
```

```
IF (TET.EQ.1) THEN
```

```
DNX(N)=.3*H(N)
```

```
DNY(N)=.3*H(N)
```

```
ENDIF
```

```
ENDIF
```

```
21 WRITE(*,*)'*****'
```

```
WRITE(*,*)'X ve Y eksenindeki egrilik ve max. deformasyonlar:'
```

```
IT=IT+1
```

```
EPMAX=DSXX*DNX(N)
```

```
EPMAY=DSYY*DNY(N)
```

```

EPMXY=(DSXY+DSYX)*.5*H(N)
EPMXZ=DWX+SIX
EPMYZ=DWY+SIY
EPM1=(EPMAX+EPMAY)*0.5+SQRT((EPMAX-EPMAY)**2/4+EPMXY**2)
EPM2=(EPMAX+EPMAY)*0.5-SQRT((EPMAX-EPMAY)**2/4+EPMXY**2)
CM=(EPM1+EPM2)**2/(EPM2+3.65*EPM1)
EPS0=2*GK/(FT*B)
WRITE(*,22)DSXX,DSYY,EPMAX,EPMAX,EPMXY,EPMXZ,EPMYZ
22 FORMAT (8(1X,D12.3))
WRITE(*,*)'Max. Asal sekil degistirmeler ve kirilma sarti'
WRITE(*,22) EPM1,EPM2,CM
WRITE(*,*)'X ve Y eksenindeki max. gerilmeler:'
SGMAX=(D(N,1,1)*DSXX+D(N,1,2)*DSYY)*6.0/(H(N)**2)
SGMAY=(D(N,1,2)*DSXX+D(N,2,2)*DSYY)*6.0/(H(N)**2)
SGMXY=D(N,3,3)*(DSXY+DSYX)*6.0/(H(N)**2)
SGMXZ=D44(N)*(DWX+SIX)/H(N)
SGMYZ=D55(N)*(DWY+SIY)/H(N)
SGM1=(SGMAX+SGMAY)*0.5+SQRT((SGMAX-SGMAY)**2/4+SGMXY**2)
SGM2=(SGMAX+SGMAY)*0.5-SQRT((SGMAX-SGMAY)**2/4+SGMXY**2)
FM=(SGM1+SGM2)**2/(SGM2+3.65*SGM1)
EM1=FM/EC1
WRITE(*,22)SGMAX,SGMAY,SGMXY,SGMXZ,SGMYZ
WRITE(*,*)'Max. Asal Gerilmeler ve akma sarti,esdeger deform.'
WRITE(*,22) SGM1,SGM2,FM,EM1
DO 23 K=1,NT
FTIX(K)=0
FTIY(K)=0
FTIXY(K)=0
PMIAX(K)=0
PMIAY(K)=0
PMIXY(K)=0
PTIXZ(K)=0
PMTX=0
PMTY=0
PMTXY=0
PTXZ=0
PTYZ=0
23 PTIYZ(K)=0
FTX=0
FTY=0
FTY=0
WRITE (*,*)'Iterasyon No=',IT

DO 30 K=1,NT
WRITE(*,*)'Tabaka No=',K
*****
Sekil degistirmelerin hesabi
EPIAX(K)=DSXX*(-DNX(N)+.5*H(N)+ZT(N,K))
EPIAY(K)=DSYY*(-DNY(N)+.5*H(N)+ZT(N,K))
EPIXY(K)=(DSXY+DSYX)*(-.5*H(N)+.5*H(N)+ZT(N,K))
EPIXZ(K)=DWX+SIX
EPIYZ(K)=DWY+SIY
IF (EPIAX(K).NE.0 .OR. EPIAY(K).NE.0) THEN
EPS1(K)=(EPIAX(K)+EPIAY(K))*0.5+SQRT((EPIAX(K)-EPIAY(K))**2/4+
1 EPIXY(K)**2)
EPS2(K)=(EPIAX(K)+EPIAY(K))*0.5-SQRT((EPIAX(K)-EPIAY(K))**2/4+
1 EPIXY(K)**2)
C(K)=(EPS1(K)+EPS2(K))**2/(EPS2(K)+3.65*EPS1(K))
ENDIF
WRITE(*,*)'C=',C(K)

```

```

WRITE(*,*)'ECTU=',ECTU
IF (EPIAX(K).EQ.0 .AND. EPIAY(K).EQ.0) THEN
EPS1(K)=0
EPS2(K)=0
C(K)=0
ENDIF
IF (EPIAX(K).GE.ECTU) THEN
EPIAX(K)=0
ENDIF
IF (EPIAY(K).GE.ECTU) THEN
EPIAY(K)=0
ENDIF
IF (EPIAX(K).GE.ECTU .AND. EPIAY(K).GE.ECTU) THEN
EPIAX(K)=0
EPIAY(K)=0
ENDIF
IF (K.EQ.N1) THEN
EPIAX(N1)=0
EPIAY(N1)=DSYY*(HDY(N)-DNY(N))
EPIXY(N1)=0
EPIXZ(N1)=0
EPIYZ(N1)=0
ENDIF
IF (K.EQ.N2) THEN
EPIAX(N2)=DSXX*(HDX(N)-DNX(N))
EPIAY(N2)=0
EPIXY(N2)=0
EPIXZ(N2)=0
EPIYZ(N2)=0
ENDIF
Tabaka gerilmelerinin hesabi
SGIAX(K)=(QT(N,K,1,1)*EPIAX(K)+QT(N,K,1,2)*
1      EPIAY(K))
SGIAY(K)=(QT(N,K,1,2)* EPIAX(K)+QT(N,K,2,2)*
1      EPIAY(K))
SGIXY(K)=QT(N,K,3,3)*EPIXY(K)
SGIXZ(K)=DK4(N,K)*EPIXZ(K)
SGIYZ(K)=DK5(N,K)*EPIYZ(K)
IF (SGIAX(K).NE.0 .OR. SGIAY(K).NE.0) THEN
SG1(K)=(SGIAX(K)+SGIAY(K))*0.5+SQRT((SGIAX(K)-
1      SGIAY(K))**2/4+SGIXY(K)**2)
SG2(K)=(SGIAX(K)+SGIAY(K))*0.5-SQRT((SGIAX(K)-
1      SGIAY(K))**2/4+SGIXY(K)**2)
F(NA,K)=F(NA-1,K)+(SG1(K)+SG2(K))**2/(SG2(K)+3.65*SG1(K))
EP1(K)=F(NA,K)/E1(K)
ENDIF
IF (F(NA,K).LE.-FC) THEN
STOP'PLAK KIRILDI'
ENDIF
IF (SGIAX(K).EQ.0 .AND. SGIAY(K).EQ.0) THEN
SG1(K)=0
SG2(K)=0
F(NA,K)=0
ENDIF
WRITE(*,*)'F=',F(NA,K)
WRITE(*,*)'EP1=',EP1(K)
EPCA=.6*FC/EC1
EPSA=FY/ES1
EPC1=.6*FC/EC1
EC12=(FC-.6*FC)/(EC-EPC1)

```

```

GC1=EC12/(2*(1+ANUC12))
GAMA1=.4*.6*FC/GC12
IF (F(NA,K).LE.(-.4*FC)) THEN
SGIAX(K)=EC1*EPCA+EC12*(EPIAX(K)-EPCA)
SGIAY(K)=EC1*EPCA+EC12*(EPIAY(K)-EPCA)
SGIXY(K)=GC12*GAMA1+GC1*(EPIXY(K)-GAMA1)
IF (SGIAX(K).NE.0 .OR. SGIAY(K).NE.0) THEN
SG1(K)=(SGIAX(K)+SGIAY(K))*0.5+SQRT((SGIAX(K)-
1 SGIAY(K))**2/4+SGIXY(K)**2)
SG2(K)=(SGIAX(K)+SGIAY(K))*0.5-SQRT((SGIAX(K)-
1 SGIAY(K))**2/4+SGIXY(K)**2)
F(NA,K)=F(NA-1,K)+(SG1(K)+SG2(K))**2/(SG2(K)+3.65*SG1(K))
EP1(K)=F(NA,K)/E1(K)
ENDIF
ENDIF
IF (SGIAX(K).EQ.0 .AND. SGIAY(K).EQ.0) THEN
SG1(K)=0
SG2(K)=0
F(NA,K)=0
ENDIF
WRITE(*,*)'SGIAX ve SGIAY degerleri'
WRITE(*,180) SGIAX(K),SGIAY(K)
TG : beton catladiktan sonraki adim sayisi
IF (SGIAX(K).GE.FT .OR. SGIAY(K).GE.FT) THEN
TG1=TG1+1
IF (TG1.EQ.1) THEN
GC12=.4*GC12*(1-ANUC12)/2/(1-ANUC12**2)
GC13=.4*GC13*(1-ANUC12)/2/(1-ANUC12**2)
GC23=.4*GC23*(1-ANUC12)/2/(1-ANUC12**2)
ENDIF
ENDIF
TE : Degistirilen birinci elastisite modulu icin adim sayisi
IF (F(NA,K).LE.(-.20*FC)) THEN
TE=TE+1
IF (TE.EQ.1) THEN
EC1=EC12
EC2=EC12
ENDIF
ENDIF
TE3 : Degistirilen ikinci elastisite modulu icin adim sayisi
IF (F(NA,K).LE.(-FC)) THEN
TE1=TE1+1
IF (TE1.EQ.1) THEN
EC12=3800
EC1=EC12
EC2=EC12
ENDIF
ENDIF
IF (SGIAX(K).GE.FT) THEN
SGIAX(K)=0
ENDIF
IF (SGIAY(K).GE.FT) THEN
SGIAY(K)=0
ENDIF
IF (SGIAX(K).GE.FT .AND. SGIAY(K).GE.FT) THEN
SGIAX(K)=0
SGIAY(K)=0
ENDIF
IF (K.EQ.N1) THEN
SGIAX(N1)=0

```

```

SGIAY(N1)=ES1*EPIAY(N1)
SGIXY(N1)=0
SGIXZ(N1)=0
SGIYZ(N1)=0
ENDIF
IF(K.EQ.N2) THEN
SGIAX(N2)=ES1*EPIAX(N2)
SGIAY(N2)=0
SGIXY(N2)=0
SGIXZ(N2)=0
SGIYZ(N2)=0
ENDIF
FS1=SGIAY(N1)
FS2=SGIAX(N2)
IF (SGIAY(N1).GE.FY) THEN
ES1=.01*ES1
SGIAY(N1)=FY+ES1*(EPIAY(N1)-EPSA)
ENDIF
IF (SGIAX(N2).GE.FY) THEN
ES1=.01*ES1
SGIAX(N2)=FY+ES1*(EPIAX(N2)-EPSA)
ENDIF
ic kuvvetlerin hesabi
FTIX(K)=SGIAX(K)*HT(N,K)
FTIY(K)=SGIAY(K)*HT(N,K)
FTIXY(K)=SGIXY(K)*HT(N,K)
IF (SGIAX(K).GE.FT) THEN
FTIX(K)=0
ENDIF
IF (SGIAY(K).GE.FT) THEN
FTIY(K)=0
ENDIF
WRITE(*,*) 'ASX=',ASX
WRITE(*,*) 'ASY=',ASY
IF (K.EQ.N2) THEN
FTIX(N2)=SGIAX(N2)*HT(N,N2)*VXS
ENDIF
IF (K.EQ.N1) THEN
FTIY(N1)=SGIAY(N1)*HT(N,N1)*VSY
ENDIF
Toplam ic kuvvetlerin hesabi
FTX=FTX+FTIX(K)
FTY=FTY+FTIY(K)
FTXY=FTXY+FTIXY(K)
Dis Momentlerin hesabi
PMDAX(N)=D(N,1,1)*DSXX+D(N,1,2)*DSYY
PMDAY(N)=D(N,2,1)*DSXX+D(N,2,2)*DSYY
PMDXY(N)=D(N,3,3)*(DSXY+DSYX)
PTDXZ(N)=D44(N)*(DWX+SIX)
PTDYZ(N)=D55(N)*(DWY+SIY)
Ic Momentlerin hesabi
PMIAX(K)=FTIX(K)*ZT(N,K)
PMIAY(K)=FTIY(K)*ZT(N,K)
PMIXY(K)=FTIXY(K)*ZT(N,K)
PTIXZ(K)=SGIXZ(K)*HT(N,K)
PTIYZ(K)=SGIYZ(K)*HT(N,K)
IF (K.EQ.N1) THEN
PMIAX(N1)=0
PMIAY(N1)=FTIY(N1)*(HDY(N)-.5*H(N))
PMIXY(N1)=0

```

```

PTIXZ(N1)=0
PTIYZ(N1)=0
ENDIF
IF (K.EQ.N2) THEN
PMIAX(N2)=FTIX(N2)*(HDX(N)-.5*H(N))
PMIAY(N2)=0
PMIXY(N2)=0
PTIXZ(N2)=0
PTIYZ(N2)=0
ENDIF

```

Toplam ic momentlerin hesabi

```

PMTX=PMTX+PMIAX(K)
PMTY=PMTY+PMIAY(K)
PMTXY=PMTXY+PMIXY(K)
PTXZ=PTXZ+PTIXZ(K)
PTYZ=PTYZ+PTIYZ(K)

```

```

36 WRITE(*,*)'X ve Y eksenlerindeki sekil degistirmeler:'
WRITE(2,*)'X ve Y eksenlerindeki sekil degistirmeler:'
WRITE (*,50)
WRITE (2,50)
WRITE (*,60) X,Y,EPIAX(K),EPIAY(K),EPIXY(K),EPIXZ(K),EPIYZ(K)
WRITE(2,60) X,Y,EPIAX(K),EPIAY(K),EPIXY(K),EPIXZ(K),EPIYZ(K)
WRITE(*,*)'Asal sekil degistirmeler, kirilma ve catlama sarti:'
WRITE(2,*)'Asal sekil degistirmeler, kirilma ve catlama sarti:'
WRITE (*,65)
WRITE (2,65)
WRITE(*,70) X,Y,EPS1(K),EPS2(K),C(K),EPS0
WRITE(2,70) X,Y,EPS1(K),EPS2(K),C(K),EPS0
WRITE(*,*)'X ve Y eksenlerindeki Gerilmeler :'
WRITE(2,*)'X ve Y eksenlerindeki Gerilmeler :'
WRITE (*,80)
WRITE (2,80)
WRITE(*,90) X,Y,SGIAX(K),SGIAY(K),SGIXY(K),SGIXZ(K),
1 SGIYZ(K)
WRITE(2,90) X,Y,SGIAX(K),SGIAY(K),SGIXY(K),SGIXZ(K),
1 SGIYZ(K)
WRITE(*,*)'Asal gerilmeler ve akma sarti:'
WRITE(2,*)'Asal gerilmeler ve akma sarti:'
WRITE (*,100)
WRITE (2,100)
WRITE(*,110) X,Y,SG1(K),SG2(K),F(NA,K)
WRITE(2,110) X,Y,SG1(K),SG2(K),F(NA,K)
WRITE(*,*)'X ve Y eksenlerindeki dis momentler :'
WRITE(2,*)'X ve Y eksenlerindeki dis momentler :'
WRITE (*,120)
WRITE (2,120)
WRITE(*,130) X,Y,PMDAX(N),PMDAY(N),PMDXY(N),PTDXZ(N),PTDYZ(N)
WRITE(2,130) X,Y,PMDAX(N),PMDAY(N),PMDXY(N),PTDXZ(N),PTDYZ(N)
WRITE(*,*)'X ve Y eksenlerindeki ic momentler :'
WRITE(2,*)'X ve Y eksenlerindeki ic momentler :'
WRITE (*,140)
WRITE (2,140)
WRITE(*,150) X,Y,PMTX,PMTY,PMTXY,PTXZ,PTYZ
WRITE(2,150) X,Y,PMTX,PMTY,PMTXY,PTXZ,PTYZ
WRITE(*,*)'X ve Y eksenlerindeki toplam F ic kuvvetleri:'
WRITE(2,*)'X ve Y eksenlerindeki toplam F ic kuvvetleri:'
WRITE (*,160)
WRITE (2,160)
WRITE(*,170) X,Y,FTX,FTY,DNX(N),DNY(N)

```

```

WRITE(2,170) X,Y,FTX,FTY,DX(N),DNY(N)
WRITE(*,*)'Beton malzeme sabitleri (E1,E2,G12,G13,G23) : '
WRITE(*,180) EC1,EC2,GC12,GC13,GC23
WRITE(*,*)'X ve Y eksenlerindeki tabaka F ic kuvvetleri:'
WRITE(2,*)'X ve Y eksenlerindeki tabaka F ic kuvvetleri:'
WRITE (*,190)
WRITE (2,190)
WRITE(*,200) X,Y,FTIX(K),FTIY(K),FTIXY(K)
WRITE(2,200) X,Y,FTIX(K),FTIY(K),FTIXY(K)
30 CONTINUE
GOTO 40
IF (FTX.GT.30.0 .OR. FTY.GT.30.0) THEN
WRITE(*,*)'FTX ve FTY degerleri'
WRITE(*,180) FTX,FTY
WRITE(*,*)'Tarafsiz eksenin DNX ve DNY degerleri=?'
READ(*,*) DNX(N),DNY(N)
GOTO 21
ENDIF
IF (FTX.LT.-30.0 .OR. FTY.LT.-30.0) THEN
WRITE(*,*)'FTX ve FTY degerleri'
WRITE(*,180) FTX,FTY
WRITE(*,*)'Tarafsiz eksenin DNX ve DNY degerleri=?'
READ(*,*) DNX(N),DNY(N)
GOTO 21
ENDIF
40 CONTINUE
RETURN
50 FORMAT (3X,'X-koor',4X,'Y-koor',3X,'Epsx ',3X,'Epsy ',3X,
1 'Gamaxy ',3X,'Gamaxz ',4X,'Gamayz ')
60 FORMAT (1X,F7.3,3X,F7.3,10D10.3)
65 FORMAT (3X,'X-koor',4X,'Y-koor',3X,'Eps1 ',3X,'Eps2 ',3X,
1 'Cokmesarti',3X,'Eps0 ')
70 FORMAT (1X,F7.3,3X,F7.3,10D10.3)
80 FORMAT (3X,'X-koor',4X,'Y-koor',3X,'Sigmax',3X,'Sigmay',3X,
1 'Sigmaxy',3X,'Sigmaxz',4X,'Sigmayz')
90 FORMAT (1X,F7.3,3X,F7.3,10D10.3)
100 FORMAT (3X,'X-koor',4X,'Y-koor',3X,'Sigma1',3X,'Sigma2',3X,
1 'Akmasarti')
110 FORMAT (1X,F7.3,3X,F7.3,10D10.3)
120 FORMAT (3X,'X-koor',4X,'Y-koor',3X,'Mdmx ',3X,'Mdmay ',3X,
1 'Mdmxy ',3X,'Tdxz ',3X,'Tdyz ')
130 FORMAT (1X,F7.3,3X,F7.3,10D10.3)
140 FORMAT (3X,'X-koor',4X,'Y-koor',3X,'Mimax ',3X,'Mimay ',3X,
1 'Mimxy ',3X,'Tixz ',3X,'Tiyz ')
150 FORMAT (1X,F7.3,3X,F7.3,10D10.3)
160 FORMAT (3X,'X-koor',4X,'Y-koor',3X,'FTX ',3X,'FTY ',3X,
1 'DNX ',3X,'DNY ')
170 FORMAT (1X,F7.3,3X,F7.3,10D10.3)
180 FORMAT (2X,10D10.3)
190 FORMAT (3X,'X-koor',4X,'Y-koor',3X,'FTIX ',3X,'FTIY ',3X,
1 'FTIXY ')
200 FORMAT (1X,F7.3,3X,F7.3,10D10.3)
END

```

SUBROUTINE SHAPE(NNPE,XI,ETA,DET)

.....
Bu alt-program interpolasyon fonksiyonlari (SF(I)) ve yerel koordinatlara gore turevlerini (DSF(I,J)), ayrıca sistem koordinatlarına göre turevlerini (GDSF(I,J)) hesaplar.

4, 8 ve 9 izoparametrik dörtgen eleman göz önüne alınabilmektedir.

SF(I).....Elemanın I düğümü için interpolasyon fonksiyonu
 DSF(I,J).....SF(J) 'nin XI 'ya göre türevi (I=1 ise),
 ETA 'ya göre türevi (I=2 ise)
 GDSF(I,J)...SF(J)'nin X'e göre türevi (I=1 ise),
 Y'ye göre türevi (I=2 ise)
 XNODE(I,J)..Elemanın I. düğümünün J.inci koordinatı
 NP(I).....Eleman düğümleri dizini (SF ve DSF nin tarifi için)
 GJ(I,J).....Jacobiyen matrisi
 GJINV(I,J)..Jacobiyen matrisinin tersi

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

DIMENSION XNODE(9,2),NP(9),DSF(2,9),GJ(2,2),GJINV(2,2)

COMMON/SKL/SF(9),GDSF(2,9),ELXY(9,2)

DATA XNODE/-1.0D0,2*1.0D0,-1.0D0,0.0D0,1.0D0,0.0D0,-1.0D0,0.0D0,
 1 2*-1.0D0,2*1.0D0,-1.0D0,0.0D0,1.0D0,2*0.0D0/
 DATA NP/1,2,3,4,5,7,6,8,9/

FNK(A,B)=A*B

IF(NNPE-8) 60,10,80

Kuadratik interpolasyon fonksiyonları (8 düğümlü)

10 DO 40 I=1,NNPE
 NI=NP(I)
 XP=XNODE(NI,1)
 YP=XNODE(NI,2)
 XI0=1.0+XI*XP
 ETA0=1.0+ETA*YP
 XI1=1.0-XI*XI
 ETA1=1.0-ETA*ETA
 IF(I.GT.4)GOTO 20
 SF(NI)=0.25*FNK(XI0,ETA0)*(XI*XP+ETA*YP-1.0)
 DSF(1,NI)=0.25*FNK(ETA0,XP)*(2.0*XI*XP+ETA*YP)
 DSF(2,NI)=0.25*FNK(XI0,YP)*(2.0*ETA*YP+XI*XP)
 GOTO 40
 20 IF(I.GT.6)GOTO 30
 SF(NI)=0.5*FNK(XI1,ETA0)
 DSF(1,NI)=-FNK(XI,ETA0)
 DSF(2,NI)=0.5*FNK(YP,XI1)
 GOTO 40
 30 SF(NI)=0.5*FNK(ETA1,XI0)
 DSF(1,NI)=0.5*FNK(XP,ETA1)
 DSF(2,NI)=-FNK(ETA,XI0)
 40 CONTINUE
 GOTO 130

Lineer interpolasyon fonksiyonları (4 düğümlü eleman)

60 DO 70 I=1,NNPE
 XP=XNODE(I,1)
 YP=XNODE(I,2)
 XI0=1.0+XI*XP
 ETA0=1.0+ETA*YP
 SF(I)=0.25*FNK(XI0,ETA0)
 DSF(1,I)=0.25*FNK(XP,ETA0)
 70 DSF(2,I)=0.25*FNK(YP,XI0)
 GOTO 130

Kuadratik interpolasyon fonksiyonlari (9 dugumlu eleman)

```

80 DO 120 I=1,NNPE
  NI=NP(I)
  XP=XNODE(NI,1)
  YP=XNODE(NI,2)
  XI0=1.0+XI*XP
  ETA0=1.0+ETA*YP
  XI1=1.0-XI*XI
  ETA1=1.0-ETA*ETA
  XI2=XP*XI
  ETA2=YP*ETA
  IF(I.GT.4)GOTO 90
  SF(NI)=0.25*FNK(XI0,ETA0)*XI2*ETA2
  DSF(1,NI)=0.25*XP*FNK(ETA2,ETA0)*(1.0+2.0*XI2)
  DSF(2,NI)=0.25*YP*FNK(XI2,XI0)*(1.0+2.0*ETA2)
  GOTO 120
90 IF(I.GT.6)GOTO 100
  SF(NI)=0.5*FNK(XI1,ETA0)*ETA2
  DSF(1,NI)=-XI*FNK(ETA2,ETA0)
  DSF(2,NI)=0.5*FNK(XI1,YP)*(1.0+2.0*ETA2)
  GOTO 120
100 IF(I.GT.8)GOTO 110
  SF(NI)=0.5*FNK(ETA1,XI0)*XI2
  DSF(2,NI)=-ETA*FNK(XI2,XI0)
  DSF(1,NI)=0.5*FNK(ETA1,XP)*(1.0+2.0*XI2)
  GOTO 120
110 SF(NI)=FNK(XI1,ETA1)
  DSF(1,NI)=-2.0*XI*ETA1
  DSF(2,NI)=-2.0*ETA*XI1
120 CONTINUE
130 DO 140 I=1,2
  DO 140 J=1,2
  GJ(I,J)=0.0
  DO 140 K=1,NNPE
140 GJ(I,J)=GJ(I,J)+DSF(I,K)*ELXY(K,J)

  DET=GJ(1,1)*GJ(2,2)-GJ(1,2)*GJ(2,1)

  GJINV(1,1)=GJ(2,2)/DET
  GJINV(2,2)=GJ(1,1)/DET
  GJINV(1,2)=-GJ(1,2)/DET
  GJINV(2,1)=-GJ(2,1)/DET
  DO 150 I=1,2
  DO 150 J=1,NNPE
  GDSF(I,J)=0.0
  DO 150 K=1,2
150 GDSF(I,J)=GDSF(I,J)+GJINV(I,K)*DSF(K,J)
  RETURN
  END

```

SUBROUTINE MESH(IEL, NX, NY, NPE, NNM, NEM)

.....
 Bu alt-program eleman dugumlerini NOD(I,J), koordinatlarini X(I), Y(I), ve ag ile ilgili (NNM,NEM,NPE) degerleri hesaplar. Dikdortgen bolge lineer ucgen elemanlar ve dortgen elemanlara ayrilmaktadir. X ve Y dogrultularinda NX ve NY sayida bolme yapiliyor.

```

.....
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
COMMON/MSH/NOD(200,9),X(225),Y(225),DX(25),DY(25)
IF(IEL.GT.0)GOTO 100

```

Ucgen eleman agi

```

NEM=2*NX*NY
NX1=NX+1
NY1=NY+1
NXX1=2*NX
NYY1=2*NY
NNM=NX1*NY1
NOD(1,1)=1
NOD(1,2)=2
NOD(1,3)=NX1+2
NOD(2,1)=1
NOD(2,2)=NX1+2
NOD(2,3)=NX1+1
K=3
DO 60 IY=1, NY
L=IY*NXX1
M=(IY-1)*NXX1
IF(NX.EQ.1)GOTO 40
DO 30 N=K,L,2
DO 20 I=1,NPE
NOD(N,I)=NOD(N-2,I)+1
20 NOD(N+1,I)=NOD(N-1,I)+1
30 CONTINUE
40 IF(NY.EQ.1)GOTO 60
DO 50 I=1,NPE
NOD(L+1,I)=NOD(M+1,I)+NX1
50 NOD(L+2,I)=NOD(M+2,I)+NX1
60 K=L+3
70 L=0
YC=0.0
DO 90 J=1,NY1
XC=0.0
DO 80 I=1,NX1
L=L+1
X(L)=XC
Y(L)=YC
80 XC=XC+DX(I)
90 YC=YC+DY(J)
RETURN

```

4, 8 ve 9 dugumlu kuadratik dortgen eleman agi teskil ediliyor.

```

100 NEX1=NX+1
NEY1=NY+1
NXX=IEL*NX
NYY=IEL*NY
NXX1=NXX+1
NYY1=NYY+1
NEM=NX*NY
NNM=NXX1*NYY1-(IEL-1)*NX*NY
IF(NPE.EQ.9)NNM=NXX1*NYY1
K0=0
IF(NPE.EQ.9) K0=1

```

Dugum numaralari dizini NOD(I,J) teskil ediliyor.

```
NOD(1,1)=1
NOD(1,2)=IEL+1
NOD(1,3)=NXX1+(IEL-1)*NEX1+IEL+1
IF(NPE.EQ.9)NOD(1,3)=4*NX+5
NOD(1,4)=NOD(1,3)-IEL
IF(NPE.EQ.4)GOTO 200
```

```
NOD(1,5)=2
NOD(1,6)=NXX1+(NPE-6)
NOD(1,7)=NOD(1,3)-1
NOD(1,8)=NXX1+1
IF(NPE.EQ.9)NOD(1,9)=NXX1+2
```

```
200 IF(NY.EQ.1)GOTO 230
M=1
DO 220 N=2,NY
L=(N-1)*NX+1
DO 210 I=1,NPE
```

```
210 NOD(L,I)=NOD(M,I)+NXX1+(IEL-1)*NEX1+K0*NX
220 M=L
```

```
230 IF(NX.EQ.1)GOTO 270
DO 260 NI=2,NX
DO 240 I=1,NPE
K1=IEL
IF(I.EQ.6 .OR. I.EQ.8)K1=K0+1
```

```
240 NOD(NI,I)=NOD(NI-1,I)+K1
M=NI
DO 260 NJ=2,NY
L=(NJ-1)*NX+NI
DO 250 J=1,NPE
```

```
250 NOD(L,J)=NOD(M,J)+NXX1+(IEL-1)*NEX1+K0*NX
260 M=L
```

X(I) ve Y(I) koordinatlari hesaplaniyor.

```
270 YC=0.0
IF(NPE.EQ.9)GOTO 310
DO 300 NI=1,NEY1
I=(NXX1+(IEL-1)*NEX1)*(NI-1)+1
J=(NI-1)*IEL+1
X(I)=0.0
Y(I)=YC
DO 280 NJ=1,NXX
I=I+1
X(I)=X(I-1)+DX(NJ)
280 Y(I)=YC
IF(NI.GT.NY .OR. IEL.EQ.1)GOTO 300
J=J+1
YC=YC+DY(J-1)
I=I+1
X(I)=0.0
Y(I)=YC
DO 290 II=1,NX
K=2*II-1
I=I+1
X(I)=X(I-1)+DX(K)+DX(K+1)
290 Y(I)=YC
300 YC=YC+DY(J)
RETURN
```

```

310 DO 330 NI=1, NYY1
      I=NXX1*(NI-1)
      XC=0.0
      DO 320 NJ=1, NXX1
        I=I+1
        X(I)=XC
        Y(I)=YC
320  XC=XC+DX(NJ)
330  YC=YC+DY(NI)
      RETURN
      END

```

SUBROUTINE BNDY(NRMAX, NCMAX, NEQ, NHBW, S, SL, NBDY, IBDY, VBDY)

.....
Bu alt-programda sinir sartlari denkleme sokuluyor.
.....

```

IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)
DIMENSION S(283, 93), SL(93)
DIMENSION IBDY(NBDY), VBDY(NBDY)
DO 300 NB=1, NBDY
  IE=IBDY(NB)
  SVAL=VBDY(NB)
  IT=NHBW-1
  I=IE-NHBW
  DO 100 II=1, IT
    I=I+1
    IF(I.LT.1)GOTO 100
    J=IE-I+1
    SL(I)=SL(I)-S(I, J)*SVAL
    S(I, J)=0.0
100  CONTINUE
    S(IE, 1)=1.0
    SL(IE)=SVAL
    I=IE
    DO 200 II=2, NHBW
      I=I+1
      IF(I.GT.NEQ)GOTO 200
      SL(I)=SL(I)-S(IE, II)*SVAL
      S(IE, II)=0.0
200  CONTINUE
300  CONTINUE
      RETURN
      END

```

SUBROUTINE SOLVE(NRM, NCM, NEQNS, NBW, BAND, RHS, IRES)

.....
Bant tipi simetrik denklem takimi cozuluyor.
IRES>0 ise sag taraf eliminasyonu yapilmayacak.
.....

```

IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)
DIMENSION BAND(283, 93), RHS(283)
MEQNS=NEQNS-1
IF(IRES.GT.0)GOTO 90
DO 500 NPIV=1, MEQNS
  NPIVOT=NPIV+1

```

```

LSTSUB=NPIV+NBW-1
IF(LSTSUB.GT.NEQNS) LSTSUB=NEQNS
DO 400 NROW=NPIVOT,LSTSUB

```

```

NCOL=NROW-NPIV+1
FACTOR=BAND(NPIV,NCOL)/BAND(NPIV,1)
DO 200 NCOL=NROW,LSTSUB
ICOL=NCOL-NROW+1
JCOL=NCOL-NPIV+1

```

```

200 BAND(NROW,ICOL)=BAND(NROW,ICOL)-FACTOR*BAND(NPIV,JCOL)
400 RHS(NROW)=RHS(NROW)-FACTOR*RHS(NPIV)
500 CONTINUE
GOTO 101

```

```

90 DO 100 NPIV=1,MEQNS
NPIVOT=NPIV+1
LSTSUB=NPIV+NBW-1
IF(LSTSUB.GT.NEQNS) LSTSUB=NEQNS
DO 110 NROW=NPIVOT,LSTSUB

```

```

NCOL=NROW-NPIV+1
FACTOR=BAND(NPIV,NCOL)/BAND(NPIV,1)
110 RHS(NROW)=RHS(NROW)-FACTOR*RHS(NPIV)
100 CONTINUE

```

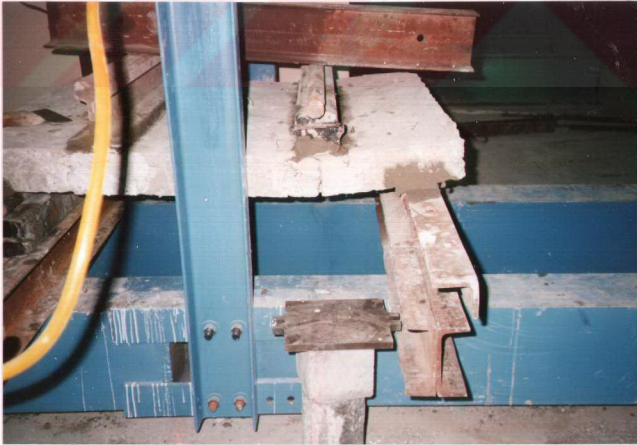
Geriden cozum islemi

```

101 DO 800 IJK=2,NEQNS
NPIV=NEQNS-IJK+2
RHS(NPIV)=RHS(NPIV)/BAND(NPIV,1)
LSTSUB=NPIV-NBW+1
IF(LSTSUB.LT.1) LSTSUB=1
NPIVOT=NPIV-1
DO 700 JKI=LSTSUB,NPIVOT
NROW=NPIVOT-JKI+LSTSUB
NCOL=NPIV-NROW+1
FACTOR=BAND(NROW,NCOL)
700 RHS(NROW)=RHS(NROW)-FACTOR*RHS(NPIV)
800 CONTINUE
RHS(1)=RHS(1)/BAND(1,1)
RETURN
END

```

EK-4 DENEYLE İLGİLİ FOTOĞRAFLAR



EK-5 ÖRNEK 8.1 İÇİN DATA DOSYASI

ORNEK 8.1 TEKİL YUKLE YUKLU DORT KOSESINDEN MESNETLİ KARE PLAK

2,8,1,0

3,3

76.25,76.25,76.25,76.25,76.25,76.25

76.25,76.25,76.25,76.25,76.25,76.25

3.00E4,3.00E4,.1290E5,.1290E5,.1290E5,.167,38.0,.0035,.002,.72E-4,2.16,
.09,76.25

2.0E5,2.0E5,.7690E5,.7690E5,.7690E5,.30,276.0,.010,.002

1

44.45

33.3

33.3

8,6,7

.0085,.0085

-19.45,-13.89,-8.33,-2.77,3.31,11.07,11.07,18.88

5.56,5.56,5.56,5.56,6.62,4.45,4.45,6.71

0,675.0

0,0,0,0,0,0,0,0,0

15

2,3,6,9,12,15,18,21,23,35,56,68,89,101,118

5

1

1

675.0

ÖZGEÇMİŞ

1961 yılında Erzurum'un İspir ilçesinde doğdu. İlk ve orta okulu İspir'de Liseyi Rize öğretmen lisesinde 1978 yılında tamamladı. 1980 yılında Selçuk Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık fakültesi İnşaat Mühendisliği bölümüne girdi ve 1985 yılı güz döneminde mezun oldu ve bir yıl bir mühendislik bürosunda proje mühendisi olarak çalıştı. 1985 yılında S.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Anabilim dalı Yapı programında yüksek lisansa başladı ve 1987 yılında mezun oldu. 1986 yılında S.Ü. Müh. Mim. Fak. İnşaat Mühendisliği bölümü Geoteknik Anabilim dalına uzman olarak atandı ve 2 yıl çalıştı. 1988 yılında aynı bölümün Yapı Anabilim dalına Araştırma Görevlisi olarak atandı ve 4 yıl bu görevde çalıştı. 1988 yılında S.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Anabilim dalı Yapı programında doktora öğrenimine başladı. 1989 yılında Y.T.Ü. ve İ.T.Ü.'de doktora derslerini tamamladı ve 1991 yılında O.D.T.Ü.'de yeterlilik sınavını verdi. 1992 yılında aynı bölümün mekanik anabilim dalına öğretim görevlisi olarak atandı ve halen bu görevine devam etmektedir.