

**T.C.**  
**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**NÜKLEER MADDENİN KİNETİK**  
**TEORİSİ VE TRANSPORT**  
**ÖZELLİKLERİ**

**Aslan İLİK**  
**DOKTORA TEZİ**  
**FİZİK ANABİLİM DALI**  
**Konya , 1995**

45249

T.C.  
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NÜKLEER MADDENİN KİNETİK TEORİSİ  
VE TRANSPORT ÖZELLİKLERİ

Aslan İLİK

DOKTORA TEZİ  
FİZİK ANABİLİM DALI

Bu tez 21. 4. 1995 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

Rıza OĞUL  
Doç. Dr.  
(Danışman)

Mustafa Ton  
Prof. Dr.  
(Üye)

Hüseyin Yüksel  
Prof. Dr.  
(Üye)

Rıza Oğul

Mustafa Ton

Hüseyin Yüksel

## ABSTRAKT

### Doktora Tezi NÜKLEER MADDENİN KİNETİK TEORİSİ ve TRANSPORT ÖZELLİKLERİ

Aslan İLİK  
Selçuk Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Rıza OĞUL  
1995, Sayfa: 49

Jüri: Prof. Dr. Mustafa TAN  
Prof. Dr. Hüseyin YÜKSEL

*Rıza Oğul*

*Mustafa Tan*  
*Hüseyin Yüksel*

Bu tezde, nükleer maddenin kinetik teorisi ve bu teoriye dayanan viskozluk ve ısı iletkenliği çalışılmıştır. Nükleer maddenin viskozluk ve ısı iletkenliği katsayıları yoğun akışkanlar için geçerli olan Enskog teorisine göre hesaplandı. Ayrıca bir karşılaştırma yapabilmek için Chapman - Enskog yaklaşımına göre de bu katsayıları hesapladık. Sonuçlarımızı literatürdeki sonuçlarla karşılaştırdık. Yüksek yoğunluğun ve çok cisim etkilerinin katsayılarda önemli değişikliklere neden olduğunu gözledik. Üç, dört ve beş-cisim çarpışmalarının etkilerini görmek için virial açılım katsayılarını da kullandık.

ANAHTAR KELİMELELER : Viskozluk, Isı-iletkenliği, Transport.

## **ABSTRACT**

**Doctora Thesis**

# **KINETIC THEORY AND TRANSPORT PROPERTIES OF NUCLEAR MATTER**

Aslan İLİK  
Selçuk University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Physics

Supervisor : Doç. Dr. Rıza OĞUL

1995 Page: 49

Jury:

In this thesis, kinetic theory and the coefficients of viscosity and heat conductivity of nuclear matter have been studied on the basis of the Chapman - Enskog and Enskog hard sphere approximations. Assuming the validity of Enskog theory of dense fluid, we have estimated viscosity and heat conductivity coefficients of nuclear matter at high densities. Comparison is made with the existing calculations in the literature. We observe that high densities and many-body effects produce significant changes in the coefficients. Using the virial expansion coefficients the higher order corrections due to the three-, four- and five-body interactions have been included, as well.

**KEY WORDS :** Viscosity, Heat-Conductivity, Transport.

## Ö N S Ö Z

Günümüzde Nükleer Fizik alanında yapılan araştırmalar Deneysel ve Teorik olarak ikiye ayrılmaktadır. Deneysel çalışmalar özellikle Ağır-iyon çarpışmaları adı altında hızlandırıcılarda yapılmaktadır. Ağır-iyon hızlandırıcılarında ilki Berkeley 'de BEVALAC adı altında 1974 yılında yapıldı ve burada çekirdek demetleri 50-2100 A.MeV 'lik enerjilere kadar hızlandırılabilmekeedir. Dubna 'da Synchrophasotron  $Ne^{20}$  ye kadar olan çekirdekleri 4 A.GeV, Cern 'deki CERN Sc hızlandırıcısı  $C^{12}$  ve  $Ne^{20}$  demetlerini 100 A.MeV Fransa 'da SACLAY d,  $He^3$ ,  $\alpha$  gibi parçacıkları 1 A.GeV enerjilerine kadar hızlandırılabilmektedir. Ayrıca, tez danışmanımın araştırma yaptığı Groningen 'deki KVI enstitüsünde ve Kopenhag 'daki Niels Bohr Enstitüsünde de ağır-iyon hızlandırıcıları vardır. Burada yapılan teorik ve deneysel çalışmalarla ilgili sonuçlar Fizik Bölümünün Nükleer Fizikle ilgili kitaplığında bulunabilir.

Nükleer madde atom çekirdeğinde ve supernovanın büzülmesi ve patlaması dinamiğinin açıklanmasında astrofizikçilerce araştırma konusudur. Biz bu çalışmamızda, nükleer madde içindeki momentum ve enerji taşınmalarını çeşitli yoğunluklarda ve sıcaklıklarda teorik olarak hesaplamaya çalıştık.

Bu çalışmada bilgi ve yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım Doç. Dr. Rıza OĞUL 'a , Araştırma Görevlisi Ülfet ATAV 'a bazı tercüme ve tartışmaları için, Araştırma Görevlisi Nuretdin EREN 'e şekiller ve kompozisyon için, Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü Başkanı Prof. Dr. H. YÜKSEL 'e bölümün bilgisayar sistemini kullanma imkanı verdiği için teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca teşvikleri ile bize bu çalışmada cesaret veren Prof. Dr. O. C. TEKİNŐEN 'e teşekkürlerimi borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

Sayfa No:

ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
ÖNSÖZ .....	iii

<b>BÖLÜM 1. GENEL GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
-----------------------------------	----------

## **BÖLÜM 2.KİNETİK TEORİ, BOLTZMANN DENKLEMİ VE TRANSPORT KATSAYILARI**

2.1.Giriş .....	4
2.2.Seyrek Gazların Viskozluk Ve Isı İletkenlik Katsayılarının Hesaplanması .....	8
2.3.Boltzmann Denklemi ve Chapman-Enskog Yaklaşımı .....	15
2.4.Nükleer Maddenin Viskozluk ve Isı İletkenlik Katsayısının Seyrek Gaz Limiti İçin Hesaplanması .....	22

## **BÖLÜM 3.YOĞUN NÜKLEER MADDE İÇİNDE ENERJİ VE MOMENTUM TAŞINMASI**

3.1.Giriş .....	34
3.2. Enskog Denklemi ve Yoğun Nükleer Maddenin Viskozluk ve Isı İletkenlik Katsayıları .....	34

<b>BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA .....</b>	<b>46</b>
--	-----------

<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>48</b>
------------------------	-----------

## BÖLÜM - 1

### GENEL GİRİŞ

Teorik fizikte yapılan araştırmaların temel amacı, maddenin makroskobik özelliklerinin, maddenin mikroskobik özelliklerinden türetilmesidir. Yani, nükleonlar atomlar ve moleküller arasındaki etkileşmeleri açıklayan fizik kanunlarını kullanarak maddenin gözlenen özelliklerini elde etmektir. Bizim incelediğimiz nükleer maddedir ve evrende atom çekirdeklerinde, nötron yıldızları ve kara deliklerde bulunur. Nükleer madde ağır- iyon hızlandırıcılarında yapılan ağır - iyon çarpışmaları deneyleri ile çalışılırken, astrofizikte de süpernovanın büzülmesi ve patlaması dinamiğinin araştırılmasında gözönüne alınır. Böyle bir madde yaşadığımız çevredeki maddelerden çok farklıdır. Örneğın, nükleer maddenin yoğunluğu  $10^{14} - 10^{16}$  gr/cm<sup>3</sup> gibi çok yüksek bir değere sahiptir. Bu yoğunlukta bir yıldızın kütle çekim gücünün hayal edilemez büyüklükte olduğunu görmek mümkündür.

Nükleer maddenin özellikleri, dengedeki ve dengede olmayan durumdaki özellikleri olarak sınıflandırılabilir. Dengedeki özellikleri basınç, yoğunluk ve sıcaklık arasında bir bağıntı ile verilen durum denklemleri ile açıklanır. İdeal gaz denklemi ve Van der Waals denklemi buna örnek olarak gösterilebilir. Dengede olmayan durumdaki özelliklerine de viskozluk ve ısı iletkenliğı gibi transport katsayılarının yoğunluğa ve sıcaklığa nasıl bağı olduğu örnek olarak gösterilebilir. Bu transport katsayılarını hesaplamak için, sistemin dengede olmayan durumunu doğru olarak açıklayan bir kinetik denklem gereklidir. Bu özellikleri en iyi şekilde tanımlayan bir kinetik denklem seyrek gazlar için geçerli olan Boltzmann denklemidir. Daha yoğun bir madde için bu denklem sistemin dinamik özelliklerine göre uygun bir şekilde sokulabilir.

Bugüne kadar nükleer maddenin transport özellikleri hakkında elde edilen bilgiler kesin değildir. Üstelik, nükleer maddeyi oluşturan nükleonlar arası etkileşimler, farklı modellerle farklı şekillerde açıklanabildiği için, nükleer madde içindeki enerji ve momentum taşınmaları da çok dikkatli bir şekilde ele alınmalıdır. Nükleer maddenin bir akışkan gibi ele alınıp özelliklerinin belirlendiğini ileride bahsedeceğimiz kaynaklarda görmek mümkündür [1-2]. Burada akışkan kelimesinin literatürde olduğu gibi gaz ve sıvı kelimelerinin ortak adı olduğunu belirtmekte fayda vardır. Durum denklemi ideal gazlarda olduğu gibi parçacıklar arasında etkileşme olmadığı durumlardaki  $P = n k T$  denklemi veya parçacıklar arasında etkileşmeleri içine alan Van der Waals  $( P + an^2 ) . ( 1 - bn ) = n k T$  denklemi ile verilir. Burada  $a$  uzun menzilli çekici kuvvet,  $b$  de itici sert kor terimleridir.  $a$  artarken  $P$  azalır ve  $b$  'deki bir artış  $P$  'yi artırır.  $b$  'nin anlamı parçacıkların bir hacmi yada parçacıklar arasında kısa menzilli itici kuvvetlerin var olduğudur. İkincisi dengede olmayan durumlardaki özelliklerdir. Buna örnek, ısı iletkenliği ve viskozluk gibi makroskobik özelliklerin yoğunluk  $n$  , sıcaklık  $T$  'ye nasıl bağlı olduğudur. Biz bu tezde, seyrek gaz limitinde geçerli olan Boltzmann denklemini Chapman - Enskog yaklaşımı ile çözerek nükleer maddenin viskozluk ve ısı iletkenlik katsayılarını tahmin ettik. Yoğunluk arttıkça sistemin dinamiği çok-cisim etkileşimleri, perdeleme etkisi gibi etkilerle değişir. Bu nedenle, Enskog 'un yoğun sıvılar teorisi bugüne kadarki en iyi teori olarak görünmektedir. Ayrıca, katsayıların sıcaklıkla değişimi de önemlidir. Örneğin, yüksek sıcaklıklarda nükleer madde seyrek gaz olarak gözönüne alınabilirken düşük sıcaklıklarda, nükleon - nükleon çarpışmaları işgal edilmiş alt enerji düzeylerinde Pauli ilkesi gereğince yasaklandığı için, Fermi sıvılar teorisi kullanılır. Bu durumda Boltzmann denklemi Landau



kinetik denklemine dönüşür ve dağılım fonksiyonu da Maxwell dağılım fonksiyonu yerine Fermi dağılım fonksiyonuna dönüşür [3-8].

Biz ikinci bölümde seyrek gaz limitinde katsayıları, Chapman-Enskog yaklaşımını kullanarak hesapladıktan sonra üçüncü bölümde yoğun nükleer madde için Enskog teorisini kullanarak katsayıları hesapladık. Ayrıca çok cisim çarpışmalarının katsayılarına etkisini gözlemek için virial katsayıları açılımını kullandık. Dördüncü bölümde ise sonuçları ve tartışma kısmını sunduk.



## BÖLÜM - 2

### KİNETİK TEORİ, BOLTZMANN DENKLEMİ VE TRANSPORT KATSAYILARI

#### 2.1 Giriş :

Daha önce, bir akışkanın özelliklerini dengedeki ve dengede olmayan durumdaki özellikleri şeklinde sınıflandırmıştık. Dengede olmayan sistemleri gözönüne alırken, sistemi en son denge durumuna götüren mikroskobik etkileşmeleri araştırmak gerekir. Bunun sonucu olarak dengede olmayan durumların tartışılması, denge durumundakinden çok daha zordur. Bununla birlikte tartışma, seyreltilmiş gazlar için oldukça basit olur.

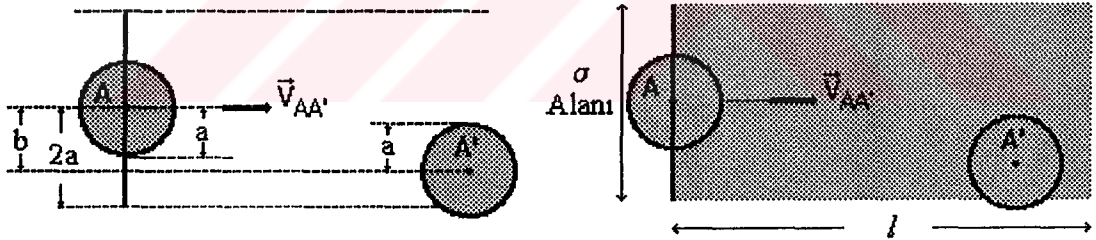
Bir gaz içindeki moleküller karşılıklı çarpışmalarla etkileşirler. Böyle bir gaz önceden dengede değilse çarpışmalar Maxwell hız dağılımının gerçekleştiği en son denge durumuna gidişi sağlarlar. Seyrek gaz limitinde aşağıdaki özellikler sağlanmalıdır. Her molekül zamanının oldukça büyük bir kesrini öteki moleküllerle etkileşmeyecek biçimde onlardan uzakta geçirir. Yani çarpışmalar arasında geçen zaman çarpışma süresinden çok büyüktür.

Üç veya daha çok molekülün aynı zamanda etkileşmek üzere yeteri kadar yakın olarak birbirine yaklaşma ihtimali, yalnız iki molekülün etkileşmek üzere yeteri kadar yakın olarak birbirine yaklaşma ihtimali yanında önemsenmeyecek kadar küçüktür. Bunun için üçlü ve daha fazla molekül çarpışmalarını ihmal ederiz. Moleküller arasındaki ortalama uzaklık bir molekülün tipik de Broglie dalga boyuna göre büyüktür. İki molekül arasındaki gerçek bir çarpışmayı anlatmak için kuantum mekaniksel bir hesap gerekli olsa bile, bu halde bir molekülün çarpışmalar arasındaki davranışını bir dalga paketinin hareketi veya klasik parçacık yörüngesi ile anlatmak uygun olur. Herhangi bir gaz molekülünün gaz içinde bir başka molekülle

çarpışmadan önce alacağı ortalama  $\ell$  uzaklığına ortalama serbest yol, bu yolun alınması için geçen  $\tau$  süresine de ortalama serbest zaman denir. Bu durumda  $\ell \approx \frac{kT}{\sqrt{2} \sigma P}$  ortalama hız  $\bar{v}$  ile gösterilirse

$$\ell = \bar{v} \cdot \tau \quad (2.1.1)$$

şeklinde bir bağıntı elde edilir. Klasik yaklaşımda her bir parçacık  $d$  çapına sahip sert küreler şeklinde göz önüne alınır. İki parçacık arasındaki kuvvetin de sert küreler arasındaki kuvvete benzediği düşünülür. Bu durum aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi merkezleri arasındaki uzaklık  $R > d$  iken birbirlerine hiçbir kuvvet uygulamadıkları  $R < d$  için (yani çarpıştıkları zaman) birbirlerine çok büyük kuvvet uyguladıkları anlamına gelir. Alttaki şekilde iki parçacığın karşılaşması görülmektedir. (Daha detaylı bilgi " Berkeley Physics Course, Vol.5, Statistical Physics " kitabında bulunabilir.)



Şekil 2.1.1  $d$  çaplı iki sert küre arasındaki çarpışma.

Parçacıkların merkezleri birbirinden  $b$  uzaklığında kalacak şekilde  $A$  parçacığının  $A'$  ye göre hızı  $\bar{v}_{AA'}$  dir.  $b > d$  için parçacıkların hiçbir zaman çarpışmayacağı fakat  $b < d$  için çarpışacakları açıktır. Bu geometrik bağıntıyı belirtmenin başka bir yolu da,  $A$  parçacığının  $d$  çaplı bir disk taşıdığını düşünmektir. Diskin merkezi parçacığın merkezi ile çakışmaktadır ve disk  $\bar{v}_{AA'}$  dik olacak şekilde yönlendirilmiştir. İki parçacık arasındaki bir çarpışma

ancak A' parçacığının merkezi A parçacığı tarafından taşınan diskin süpürdüğü hacim içinde olursa meydana gelir. Parçacığın taşıdığı hayali diskin alanı

$$\sigma = \pi d^2 \quad (2.1.2)$$

dir. Bu durumda  $\sigma = \pi d^2$  parçacık-parçacık çarpışmalarında tesir kesiti adını alır.

Gerçek parçacıklar arasındaki kuvvetler, sert küreler arasındaki kuvvetlere benzemekle birlikte gerçekte çok daha karışıktır. Sert kürelere benzerlik, gerçek iki parçacığın birbirlerine çok yaklaştıkları zaman aralarında doğan çok kuvvetli bir itme nedeniyledir. Fakat iki gerçek parçacığın arasında birbirlerinden uzakta iken zayıf bir çekme kuvveti de vardır. Biz burada yaklaşık değerlendirme yaparak zayıf çekmeleri ihmal ediyoruz. Birim hacminde n parçacık bulunan bir seyrek gaz düşünelim. Bu gazın özel bir A parçacığını gözönüne alalım. Bu parçacığın  $\bar{V}_{AA'}$  ortalama hızıyla hareket ettiğini varsayarak, A parçacığı A' parçacığına çarpıncaya kadar  $\sigma \bar{V}_{AA'} \cdot \tau$  hacmini süpürür. Yani

$$\sigma \bar{V}_{AA'} \cdot \tau \cdot n = 1 \quad (2.1.3)$$

olur. Buradan

$$\tau = \frac{1}{n \sigma \bar{V}_{AA'}} \quad (2.1.4)$$

bulunur. Bu sonuca göre verilen bir parçacığın daha fazla sayıda bir parçacıkla çarpışabilmesi için, birim hacim başına düşen parçacık sayısı artar. Parçacıkların yarıçapları (veya  $\sigma$ ) büyükse veya parçacıkların birbirlerine sık sık rastlamaları için  $\bar{V}_{AA'}$  bağıl hızları büyükse  $\tau$  ortalama zamanı küçük (çarpışma sıklığı büyük) olur. Denklem (2.1.1) 'e göre  $\ell$  ortalama serbest yolu

$$\ell = \bar{v}\tau = \bar{v} \cdot \frac{1}{n\sigma\bar{V}_{AA'}} \quad (2.1.5)$$

ile verilir. Çarpışan parçacıkların her ikisi de hareket ettiği için  $\bar{V}_{AA'}$  ortalama bağıl hızları bir tek parçacığın  $\bar{v}$  ortalama hızından az da olsa farklıdır. A 'nın A' ye göre bağıl hızı

$$\begin{aligned} \bar{V}_{AA'} &= \bar{v}_A - \bar{v}_{A'} \\ \bar{V}_{AA'}^2 &= \bar{v}_A^2 + \bar{v}_{A'}^2 - 2\bar{v}_A \bar{v}_{A'} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

şeklinde verilir.

Bu eşitliğin her iki tarafının ortalamasını aldığımızda  $\bar{v}_A$  ile  $\bar{v}_{A'}$  arasındaki açının kosinüsü rastgele doğrultularda hareket eden parçacıklar için aynı ihtimalle pozitif ve negatif olacağı için  $\overline{\bar{v}_A \cdot \bar{v}_{A'}} = 0$  olur. Buna göre (2.1.6) bağıntısı, bir karenin ortalaması ile bir ortalamanın karesi arasındaki farkı önemsemeyerek

$$\overline{V_{AA'}^2} = \overline{v_A^2} + \overline{v_{A'}^2}$$

şeklini alır.

$$\bar{V}_{AA'}^2 \approx \bar{v}_A^2 + \bar{v}_{A'}^2 \quad (2.1.7)$$

şeklinde yazabiliriz. Bütün parçacıklar seyrek gaz durumunda birbirinin aynı olduğundan  $\bar{v}_A = \bar{v}_{A'}$  dir ve (2.1.7)

$$\bar{V}_{AA'} \approx \sqrt{2} \bar{v} \quad (2.1.8)$$

olur. Buna göre (2.1.5)

$$l \approx \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma} \quad (2.1.9)$$

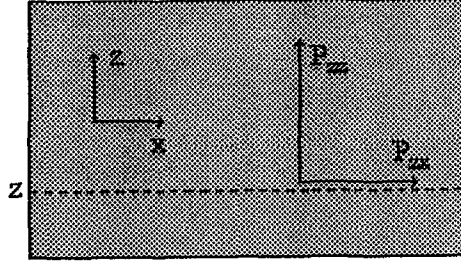
şeklini alır. Seyrek gazın hal denklemi  $\bar{P} = nkT$  den  $n$  'i çekip (2.1.9) da yerine koyarsak

$$l \approx \frac{kT}{\sqrt{2} \sigma \bar{P}} \quad (2.1.10)$$

eşitliği bulunur.

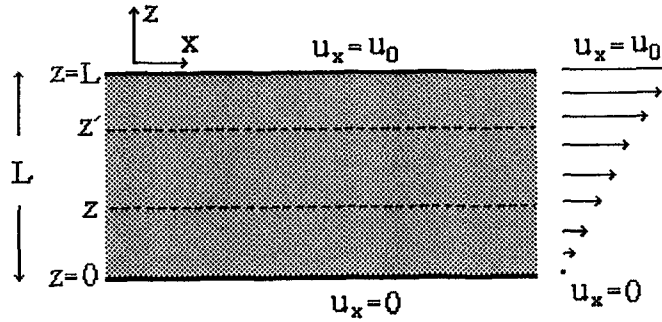
## 2.2 Seyrek Gazların Viskozluk Ve Isı İletkenlik Katsayılarının Hesaplanması

Durgun bir akışkan (sıvı veya gaz) içerisine daldırılmış bir cisme bir dış kuvvet etki etmiyorsa ve cisim dengede ise durgun haldedir. Cisim akışkan içinde hareket ediyorsa dengede değildir. Bu halde, denge durumuna ulaşılmasından sorumlu parçacıklar arası etkileşmeler, makroskobik ölçekte, hareketli cisme yavaşlatıcı net bir sürtünme kuvveti uygulayarak ortaya çıkarlar. Bu kuvvet cismin hızı ile orantılıdır. Oluşan bu kuvvet cisim durunca ortadan kalkar. Bu kuvvetin büyüklüğü akışkanın viskozluğu adı verilen bir özelliğe bağlıdır. Aynı cisim üzerine etki eden kuvvet farklı akışkanlar için farklıdır. Örneğin sıvı bal içinde cisme etki eden bu kuvvet, su içinde cisme etki eden kuvvetten daha büyüktür. Bundan dolayı bal sudan daha viskozdur denilir. Viskozluk kavramının, mikroskobik kaynağını seyrek gaz halinde aydınlatmaya çalışalım.



Şekil 2.2.1 Akışkan içinde sabit  $z$  düzlemi ve bir üstteki düzleme alttaki düzlemin uyguladığı  $P_z$  kuvveti.

Bir akışkanı ( sıvı veya gazı ) gözönüne alalım. Bu akışkanı normali  $z$  yönünde olan düzlem tabakalar olarak düşünelim. Bu düzlemin altındaki yani azalan  $z$  'ler yönündeki akışkanın üstteki akışkana birim yüzey başına  $\bar{P}_z$  kuvveti etki ettirdiği görülür. Düzlemin üzerindeki akışkan ise alttaki akışkana Newton 'un III. kanununa göre  $-\bar{P}_z$  kuvvetini uygular. Düzleme dik ortalama kuvvet,  $\bar{P}_z$  nin  $z$  bileşeni, akışkan içindeki  $\bar{P}$  ortalama basıncı ile ölçülür,  $P_{zz} = \bar{P}$  dir. Akışkan sabit hızla hareket ediyor veya duruyorsa  $P_{zx} = 0$  olur.



Şekil 2.2.2  $x$  yönündeki hızın  $z$  ile değişimi.

Akışkanın  $\bar{u}$  ortalama hızının yani makroskobik akış hızının akışkanın her yerinde aynı olmadığı basit bir dengesizlik durumunu gözönüne alalım ve akışkanın  $x$  doğrultusunda zamana bağlı olmayan ortalama bir  $u_x$  hızının

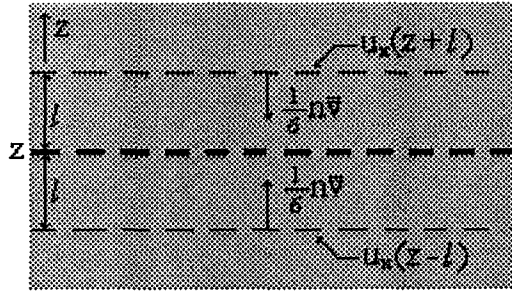
olduğunu düşünelim.  $u_x$  'in büyüklüğü  $u_x(z)$  şeklinde  $z$  'ye bağlı olsun. Bu durumda akışkanın  $L$  aralıklı iki düzlem levha arasında bulunduğu kabul edilirse  $z = 0$  'daki levhanın  $x$  yönündeki hızı  $u_x = 0$  ve  $z = L$  'deki levha ise  $u_x = u_0$  sabit hızı ile hareket edecektir. Akışkanın levhalara bitişik tabakaları da aynı hızlara sahip olacaktır. Bu düşünceye göre levhalar arasındaki akışkan tabakaları da büyüdükçe sıfır ile  $u_0$  hızları arasında değişen farklı ortalama  $u_x$  hızlarına sahip olacaktır. Bu durumda akışkan levhayı denge durumuna getirmek için harekete zıt yönlü bir  $P_{zx}$  kuvvetini uygular.  $P_{zx}$ , düzlemin altındaki akışkanın, düzlemin üstündeki akışkana birim yüzey başına uyguladığı kuvvettir. Aşağıdaki şekilde yazılır.

$$P_{zx} = -\eta \frac{\partial u_x(z)}{\partial z} \quad (2.2.1)$$

$\eta$  akışkanın viskozluk katsayısıdır. Seyrek bir gazın viskozluk katsayısını mikroskobik düşüncelere dayanarak hesaplayabiliriz. Gazın ortalama bir  $u_x$  hız bileşeni olduğunu ve  $u_x$  in  $z$  'nin bir fonksiyonu olduğunu kabul edelim. Şimdi herhangi bir  $z$  sabit düzlemini gözönüne alıp, düzlemin bir yanından öbürüne etki eden  $P_{zx}$  kuvvetinin mikroskobik kaynağını araştıralım. Şekil 2.2.3 'de gösterilen düzlemin yukarısındaki parçacıkların momentumunun  $x$  bileşeni, aşağısındaki parçacıkların momentumunun  $x$  bileşeninden büyüktür. Parçacıklar düzlemin bir tarafından öbür tarafına gidip geldikçe momentumun  $x$  bileşenini de taşırlar. Bundan dolayı düzlemin üzerindeki gaz  $x$  doğrultusunda momentum kaybederken, düzlemin altındaki gaz  $x$  doğrultusunda momentum kazanır. Newtonun II. kanunu gereğince bir sistem üzerine etki eden kuvvet  $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$  şeklindedir. Bir düzlemin yukarısındaki akışkan üzerine bunun alt tarafındaki akışkan tarafından etki ettirilen kuvvet  $P_{zx}$ , düzlemin yukarısındaki gazın momentumunun  $x$  bileşeninin, bu düzlemi



geçen parçacıkların net momentum taşınması nedeniyle birim zaman ve düzlemin birim alanı başına ortalama artmasıdır.



Şekil 2.2.3 Bir düzlemi geçen parçacıklarla momentum taşınması

Birim hacimdeki  $n$  parçacığın  $n/3$  ' ü  $z$  yönünde bu parçacıkların  $n/6$  ' sı  $+z$  yönünde  $n/6$  ' sı  $-z$  yönünde hareket eder. Şekil 2.2.3 'de  $z$  ile gösterilen düzlemin birim alanını birim zamanda aşağıdan yukarı doğru geçen  $(n/6)\bar{v}$  parçacık vardır. Benzer biçimde yukardan aşağıya doğru da geçen  $(n/6)\bar{v}$  parçacık vardır.  $\ell$  ortalama yolunun tanımı gereği düzlemi geçen parçacıklar son çarpışmalarını  $(z+\ell)$  ve  $(z-\ell)$  konumunda yapmışlardır.  $(z+\ell)$  deki parçacığın hızının  $x$  bileşeni  $u_x(z+\ell)$  dir. Düzlemi yukarı doğru geçen parçacıkların birim zaman ve birim alan başına taşıdığı momentumla aşağı doğru geçenlerin taşıdığı momentumun toplamı, düzlemin yukarisındaki gazın net momentum kazancıdır. Bu kazancı ise  $P_{zx}$  kuvvetidir.

$$P_{zx} = \left(\frac{1}{6}n\bar{v}\right)[m u_x(z-\ell)] - \left(\frac{1}{6}n\bar{v}\right)[m u_x(z+\ell)]$$

veya

$$P_{zx} = \frac{1}{6}n\bar{v}m[u_x(z-\ell) - u_x(z+\ell)] \quad (2.2.2)$$

Oratalama serbest  $\ell$  yolu ( $\frac{\partial u_x}{\partial z}$  hız gradyentinin önemli derecede değiştiği boyutlara göre) çok küçük olduğundan iyi bir yaklaşımla

$$u_x(z + \ell) = u_x(z) + \frac{\partial u_x}{\partial z} \ell$$

$$u_x(z - \ell) = u_x(z) - \frac{\partial u_x}{\partial z} \ell$$

yazabiliriz. Buradan

$$P_{zx} = -\frac{1}{6} n \bar{v} m (2 \frac{\partial u_x}{\partial z} \ell) = -\eta \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad \text{ve} \quad \eta = \frac{1}{3} n \bar{v} m \ell \quad (2.2.3)$$

bulunur. Bu ifadeyi çok basit düşünerek bulduk. Buradaki  $1/3$  çarpanı farklı olabilir. Ancak  $n$ ,  $\bar{v}$ ,  $m$ ,  $\ell$  parametrelerine bağlılık doğru olmalıdır. (2.1.9) gereğince ;

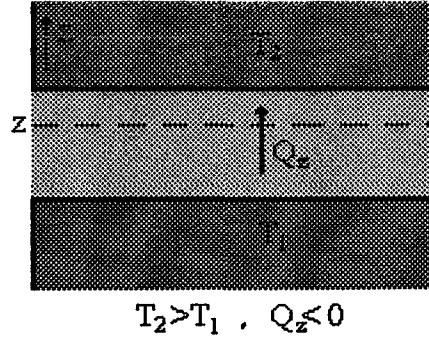
$$\eta = \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{m \bar{v}}{\sigma} \quad (2.2.4)$$

ifadesinden görüldüğü gibi seyrek gazlar için  $\eta$  katsayısı, verilen bir sıcaklıkta gazın yoğunluğuna ve basıncına bağlı değildir. Sıcaklığa bağlılığı ise hızın sıcaklığa bağlılığı gibidir. Yani  $\bar{v} = (8kT/m\pi)^{1/2}$  değerlerini denklem (2.2.4) de yerine koyarsak

$$\eta = \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{m}{\sigma} (8mkT/\pi)^{1/2} \quad (2.2.5)$$

elde edilir.

Şekil 2.2.4 'deki ara bölgede sıcaklık her yerde aynı değildir. Bu bölgede sıcaklığı  $T = T(z)$  olmak üzere  $z$  'nin bir fonksiyonu olduğunu düşünelim. Bu ara bölgedeki maddenin dengeye gelmesi için, yüksek sıcaklıktaki bölgeden alçak sıcaklıktaki bölgeye ısı akışı olacaktır.



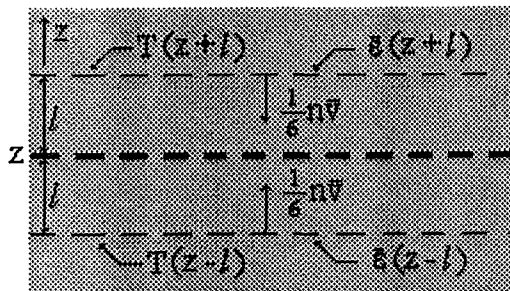
Şekil 2.2.4 Akışkan içinde sıcaklığın z'ye göre değişimi.

$Q_z \equiv +z$  yönünde birim zamanda birim alandan geçen ısıdır. Bu  $Q_z$  ısısına ısı akışı yoğunluğu denir. Sıcaklık her yerde aynı olduğunda  $Q_z = 0$  olur.

$$Q_z = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.2.6)$$

$\kappa$  sabitine ısı iletkenlik katsayısı  $\frac{\partial T}{\partial z}$  e de sıcaklık gradyenti denir.

Gaz içinde  $T = T(z)$  olduğu  $z = \text{sabit}$  düzlemini düşünelim. Yine bu düzlemi yukarıdan ve aşağıdan geçen parçacıklar ısı akışını oluşturacaklardır.  $\frac{\partial T}{\partial z} > 0$  ise yukardan aşağıya geçen parçacık, aşağıdan yukarıya geçen parçacıktan daha büyük  $\bar{\epsilon}(T)$  enerjisine sahiptir. Buna göre düzlemin yukarisından aşağıdaki bölgeye net enerji taşınması olur.



Şekil 2.2.5 Bir düzlemi geçen parçacıkların enerji taşınması.

Bir parçacığın ortalama enerjisi  $\bar{\epsilon}(T)$ ,  $T$  'ye bağlı olduğu için bir parçacığın ortalama enerjisinin onun son çarpışma konumu  $z$  'ye bağlı olduğu çıkar, yani  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(z)$  olur. Buna göre düzlemin yukarisından aşağıya geçenlerin enerjisi ile aşağıdan yukarıya geçenlerin enerji farkını alırsak net enerji

$$Q_z = \frac{1}{6} n \bar{v} \bar{\epsilon}(z - \ell) - \frac{1}{6} n \bar{v} \bar{\epsilon}(z + \ell)$$

$$= \frac{1}{6} n \bar{v} \left[ \left( \bar{\epsilon}(z) - \ell \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial z} \right) - \left( \bar{\epsilon}(z) + \ell \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial z} \right) \right]$$

veya

$$Q_z = -\frac{1}{3} n \bar{v} \ell \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.2.7)$$

$\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial T}$  molekül başına ısı sığasıdır. Denklem (2.2.6) 'yı da kullanarak

$$\kappa = \frac{1}{3} n \bar{v} c \ell \quad (2.2.8)$$

bulunur. ( 2.1.9 ) ' u ( 2.2.8 ) ' de yerine koyarsak

$$\kappa = \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{c}{\sigma} \bar{v}$$

bulunur.  $\bar{v} = (8kT/m\pi)^{1/2}$  ve  $c = 3/2$  değerleri alınarak

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sigma} \left( \frac{8kT}{m\pi} \right)^{1/2} \quad (2.2.9)$$

bulunur.

### 2.3 Boltzmann Denklemi ve Chapman - Enskog Yaklaşımı

Boltzmann denklemi türetilirken aşağıdaki kabuller yapılmıştır.

1. Parçacıklar, nokta parçacıklar olarak ele alınıp çarpışmalar arasındaki geçen sürenin çarpışma süresinden çok büyük olduğu gözönüne alınmıştır.

2. Sadece iki cisim çarpışmaları gözönüne alınmıştır.

3. Boltzmann'ın moleküler kargaşa kabulü; iki parçacık çarpışırken her defasında birbiri ile bağlantısız olarak bir araya gelirler. Çarpışmadan sonra kuvvetli bir şekilde bağlantılıdır. Bu kabullerden sonra Boltzmann denklemini yazmadan önce denklemdeki çarpışma terimi  $(\partial f/\partial t)_{\text{çarp}}$  hakkında kısa bir bilgi verelim. Faz uzayındaki  $(r, v_j)$  noktasındaki bir  $dr \cdot dv_j$  hacim elemanındaki  $j$  - parçacıkların sayısı  $f_j dr \cdot dv_j$  ile verilir. Çarpışma olmasaydı bu parçacıklar,  $dt$  süresi içinde  $(r + v_j dt, v_j + a dt)$  noktasına varacaklardı. Bu durumda  $f_j(r, v_j, t) = f_j(r + v_j dt, v_j + a dt, t + dt)$  olacaktı, yani  $(\partial f/\partial t)_{\text{çarp}} = 0$  olacaktı. Aslında parçacıklar arasında çarpışma olduğu için  $(\partial f/\partial t)_{\text{çarp}} \neq 0$  bağıntısı geçerlidir. Bu durumda Boltzmann denklemi aşağıdaki gibi yazılır[9].

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \bar{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \right) f(\bar{r}, \bar{v}, t) = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{çarp}} \quad (2.3.1)$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{çarp}} = \iiint d^3 v_1 d^3 v_1' w(\bar{v}, \bar{v}_1 | \bar{v}', \bar{v}_1') \{ f' f_1' - f f_1 \}$$

Burada  $w$  çarpışma ihtimalidir ve diferansiyel çarpışma tesir kesiti ile doğru orantılıdır. Aynı zamanda  $w$ , çarpışan parçacıkların, çarpışmadan önceki ve sonraki momentumlarına bağlıdır.  $\bar{r}$  parçacıkların koordinatlarını  $\bar{v}$  hızını ve  $\bar{a}$  da ivmesini gösterir ve dış potansiyelle aşağıdaki bağıntıyı sağlar.

$$M\bar{a} = -\frac{\partial}{\partial \bar{r}} U(\bar{r}, t) = \bar{F}(\bar{r}, t) \quad (2.3.2)$$

Böylece Boltzmann denklemi  $(\partial f/\partial t)_{\text{çarp}}$  terimi ile iki - cisim dinamiğini ve  $\bar{a} \frac{\partial f}{\partial v}$  terimi ile de tek-cisim dinamiğini içine alır. Boltzmann denklemini aşağıdaki gibi de yazabiliriz.

$$\frac{\partial f(r, v, t)}{\partial t} = -v \frac{\partial f(r, v, t)}{\partial r} - a \frac{\partial f(r, v, t)}{\partial v} + \left( \frac{\partial f(r, v, t)}{\partial t} \right)_{\text{çarp}} \quad (2.3.3)$$

Bu denklem  $d^3r.d^3v$  hacim elemanındaki  $f(r, v, t)d^3r.d^3v$  parçacık sayısının zamanla, çarpışma ve akı nedeniyle değişimini açıklar. Buradaki akı

$$S = -v \frac{\partial f}{\partial r} - a \frac{\partial f}{\partial v} \quad (2.3.4)$$

şeklinde tanımlanır ve  $f$ ' nin faz uzayındaki yerel değişimini açıklar. Aynı zamanda kütle, momentum ve kinetik enerji korunumunun sonucu olarak

$\psi(v) = 1, \bar{v}, \frac{1}{2}v^2$  büyüklükleri

$$\int d^3v \psi(v) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{çarp}} = 0 \quad (2.3.5)$$

bağıntısını sağlar. Burada  $n$  parçacık sayısı yoğunluğu olmak üzere

$$\bar{\psi}(\bar{r}, t) \equiv \frac{\int d^3v \psi f}{\int d^3v f} = \frac{1}{n} \int d^3v \psi f \quad (2.3.6)$$

tanımı yapılırsa Boltzmann denklemi kullanılarak aşağıdaki korunum denklemleri elde edilir.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho U_\alpha) = 0$$

$$\rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + U_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \right] = \rho a_i - \sum_j \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Q}{\rho} \right) + \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{Q}{\rho} \right) \right] + \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = U - \sum_{i,j} P_{ij} D_{ij} \quad (2.3.7)$$

Burada aşağıdaki gösterimler kullanılmıştır.

$n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$	Tanecik Yoğunluğu
$\rho(\vec{r}, t) = mn$	Kütle Yoğunluğu
$u_i(\vec{r}, t) = \bar{v}_i$	Ortalama Hız
$U_i = v_i - u_i$	Termal Hız
$Q(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2$	Termal Enerji Yoğunluğu
$P_{ij}(\vec{r}, t) = \rho \overline{U_i U_j}$	Basınç Tensörü
$q_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \rho \overline{U_i U^2}$	Isı Akım Yoğunluğu
$D_{ij}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$	Gerilme Tensörü

(2.3.8)

Yukardaki denklemlerde  $P_{ij}$  ve  $q_i$  büyüklüklerinin hesaplanması için bu büyüklüklerin yoğunluk ortalama hız ve sıcaklık cinsinden açıklanması gerekir. Bunun için de  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  nin çözülmesi gerekir.

Ortalama  $P_{ij}$  ve  $q_i$  değerlerini bulmak için  $f$  dağılım fonksiyonunun bilinmesi gerekmektedir. Dengeye olan yaklaşım iki safhada oluşur. Çarpışmalar nedeniyle başlangıçtaki herhangi bir dağılım çok hızlı bir şekilde (ortalama serbest zaman  $t_0 \approx \frac{\lambda}{(kT/m)^{1/2}}$  mertebesindedir.) yerel Maxwell dağılımına erişecektir. Yani Boltzmann denkleminin yerel dengedeki çözümü Maxwell dağılım fonksiyonu olacaktır.

$$f^{(0)}(\vec{r}, \vec{v}, t) = n(\vec{r}, t) \left[ \frac{m}{2\pi kT(\vec{r}, t)} \right]^{3/2} \exp \left[ -\frac{m(\vec{v} - \vec{u}(\vec{r}, t))^2}{2kT(\vec{r}, t)} \right] \quad (2.3.9)$$

Burada  $n, \vec{u}$  ve  $T$  makroskobik değişkenler  $\vec{r}$  ve  $t$ 'nin fonksiyonlarıdır. İkinci safhada makroskobik değişkenlerin denge değerine doğru olan yavaş durulma (relaxation) zamanı meydana gelir.  $P_{ij}$  ve  $q_i$  değerlerinin hesaplanması için (2.3.9) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \rho \overline{U_i U_j} = P \delta_{ij} \quad , \quad P = nkT \\ q_i &= \frac{1}{2} \rho \overline{U_i U^2} = 0 \quad , \quad Q = \frac{3}{2} P \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

sonuçları elde edilir. Bu durumda (2.3.7) eşitlikleri ideal gaz için Euler denklemlerine indirgenir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) &= 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= \rho \vec{a} - \text{grad } p \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho T^{-3/2}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Denge civarında Boltzmann denkleminin çözümü Chapman - Enskog [9] yaklaşımı ile verilir.

$$f = f^0 [1 + \phi(\vec{r}, \vec{v}, t)] \quad (2.3.12)$$

Bu eşitlik Boltzmann denklemine yerleştirilerek ve çarpışma teriminin sadece  $\phi$  ile lineer olan terimleri alınarak lineer hale getirilmiş Boltzmann denklemi,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \vec{a} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right) f^0 = f^0 C(\phi)$$



$$C(\phi) = \iiint d^3v_1 d^3v' d^3v'_1 w(vv_1|v'v'_1) f_1^0 \{ \phi' + \phi'_1 - \phi - \phi_1 \} \quad (2.3.13)$$

elde edilir.  $C(\phi)$  lineerleştirilmiş çarpışma operatörüdür. Burada  $f^0$  denge durumundaki dağılım fonksiyonudur ve (2.3.9) denklemi ile verilmiştir. (2.3.13) ' ün sol tarafının logaritmik türevi alınarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + a_\alpha \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \right) f^0 = \left\{ \frac{1}{nT^{-3/2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) nT^{-3/2} + \frac{m(v-v_\alpha)^2}{2kT^2} \right. \\ \left. \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{m}{kT} (v-v_\alpha) \left( \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{ma_\alpha}{kT} (v-v_\alpha) \right\} f^0 \quad (2.3.14)$$

(2.3.11) denklemlerinden faydalanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho T^{-3/2}) = -u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho T^{-3/2}) \\ \frac{\partial}{\partial t} = -u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} T \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} = -U_\beta \frac{\partial u_i}{\partial x_\beta} + a_i - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx_i} \quad (2.3.15)$$

Basınç için ise aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = kT \frac{\partial n}{\partial x_i} + kn \frac{\partial T}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} (nT^{-3/2}) = T^{-3/2} \frac{\partial n}{\partial x_i} - \left( \frac{3}{2} \right) nT^{-5/2} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.3.16)$$

(2.3.15) ve (2.3.16) denklemleri (2.3.14) denklemlerinde yerine konularak  $U_i = v_i - u_i$  bağıntısı kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + a_\alpha \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \right) f^0 = f^0 \left\{ \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} U_\alpha \left( \frac{mU^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \right\} + \frac{m}{kT} D_{\alpha\beta} \left( U_\alpha U_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} U^2 \right) \quad (2.3.17)$$

Denklem (2.3.13) deki  $\phi$  nin çözümü bilinirse momentum akısı  $P_{ij}$  ve ısı akısı  $q_i$  hesaplanabilir.

$$P_{ij} = P\delta_{ij} - 2\eta \left( D_{ij} - \frac{1}{3} D_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \right) \quad (2.3.18)$$

$$q_i = \kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.3.19)$$

$q_i$  ve  $P_{ij}$  değerlerini tam olarak hesaplayabilmemiz için viskozluk katsayısı  $\eta$  ve ısı iletkenlik katsayısı  $\kappa$  ayrıca hesaplanmalıdır. (2.3.18) denklemi Newton kanunu (2.3.19) denklemi Fourier kanunu olarak bilinir. Bu iki denklemin türetilişi viskozluk ve ısı iletkenlik katsayıları hesaplanırken verilecektir. Denklem (2.3.17) deki

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} U_\alpha \left( \frac{mU^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \quad \text{ve} \quad \frac{m}{kT} D_{\alpha\beta} \left( U_\alpha U_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} U^2 \right)$$

fonksiyonları denklem (2.3.13) deki  $C(\phi)$  lineerleştirme operatörünün de öz fonksiyonlarıdır. Çünkü bu iki denklemin sol tarafları aynıdır. Bu nedenle  $C(\phi)$  nin öz fonksiyonları Sonine Polinomları cinsinden aşağıdaki gibi yazılır [9].

$$\Psi_{r1m} = N_{r1m} S_{\ell+\frac{1}{2}}^{(r)}(u^2) u^\ell Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (2.3.20)$$

$S_{\ell+\frac{1}{2}}$  Sonine ( birleşik Laguerre ) polinomları,  $N_{r1m}$  de normalizasyon katsayılarıdır.  $S_n^m(x)$  aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$S_n^m(x) = \sum_{p=0}^m (-x)^p \frac{(n+m)!}{p!(m-p)!(n+p)!} \quad (2.3.21)$$

Maxwell modeline göre  $\phi$  'nin çözümü  $\Psi_{11m}$  ve  $\Psi_{02m}$  in lineer kombinezonudur. Buna göre  $\phi$  için bir deneme fonksiyonu aşağıdaki gibi alınır.

$$\phi = \frac{1}{T} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_\mu} U_\mu \left( \frac{mU^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) C_1 + \frac{m}{kT} D_{\mu\gamma} \left( U_\mu U_\gamma - \frac{1}{3} \delta_{\mu\gamma} U^2 \right) C_2 \quad (2.3.22)$$

Burada  $C_1$  ve  $C_2$  sabitleri ise Maxwell modeline [9] göre

$$C_1 = \frac{\int d^3U \exp\left(-\frac{m}{2kT} U^2\right) U_\mu U_\mu \left(\frac{m}{2kT} U^2 - \frac{5}{2}\right)^2}{\int d^3U \exp\left(-\frac{m}{2kT} U^2\right) U_\mu \left(\frac{m}{2kT} U^2 - \frac{5}{2}\right) C U_\mu \left(\frac{m}{2kT} U^2 - \frac{5}{2}\right)} \quad (2.3.23)$$

$$C_2 = \frac{\int d^3U \exp\left(-\frac{m}{2kT} U^2\right) \left(U_\mu U_\gamma - \frac{1}{3} \delta_{\mu\gamma} U^2\right) \left(U_\mu U_\gamma - \frac{1}{3} \delta_{\mu\gamma} U^2\right)}{\int d^3U \exp\left(-\frac{m}{2kT} U^2\right) \left(U_\mu U_\gamma - \frac{1}{3} \delta_{\mu\gamma} U^2\right) C \left(U_\mu U_\gamma - \frac{1}{3} \delta_{\mu\gamma} U^2\right)} \quad (2.3.24)$$

şeklinde belirlenir.

## 2.4 Nükleer Maddenin Viskozluk ve Isı İletkenlik Katsayısının Seyrek Gaz Limiti İçin Hesaplanması

$f^0$  ve  $\phi$  nin çözümleri bilindiğine göre ısı akısı aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$q_i = \frac{m}{2} \int d^3U U_i U^2 f^0 \phi$$

$$q_i = \frac{m}{2} n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{T} \frac{dT}{dx_\mu} C_1 \int d^3U U_i U_\mu U^2 \left(\alpha U^2 - \frac{5}{2}\right) e^{-\alpha u^2} \quad (2.4.1)$$

Burada  $\alpha = \frac{m}{2kT}$  alınmıştır. Denklem (2.4.1) deki integral işlemi  $U_i = U_z$  seçimi yapılarak daha kolay bir duruma getirilebilir. Buradan küresel koordinatlara geçerse  $U_x = U \cos\theta$  ve  $d^3U = U^2 \sin\theta dU d\theta d\phi$  bağıntılarını kullanarak (2.4.1) deki integral

$$I = \int d^3U U_i U_\mu U^2 \left(\alpha U^2 - \frac{5}{2}\right) e^{-\alpha u^2}$$

$$I = \int_0^\infty U^6 \left(\alpha U^2 - \frac{5}{2}\right) e^{-\alpha u^2} dU \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

şekline dönüştürülür. Birinci integrali  $\Gamma(x)$  fonksiyonundan faydalanılarak hesapladıktan sonra diğer iki integral de kolayca hesaplanır. (2.4.1) denklemini aşağıdaki şekle indirgenir.

$$q_i = \frac{5nk}{4\alpha} C_1 \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.4.2)$$

(2.3.19) ve (2.4.2) denklemlerinden ısı iletkenlik katsayısı  $\kappa$  için aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\kappa = -\frac{5nk}{4\alpha} \frac{\int d^3U e^{-\alpha u^2} U_\mu U_\mu (\alpha U^2 - \frac{5}{2})^2}{\int d^3U e^{-\alpha u^2} U_\mu (\alpha U^2 - \frac{5}{2}) C \left[ U_\mu (\alpha U^2 - \frac{5}{2}) \right]} \quad (2.4.3)$$

(2.4.3) denkleminin payındaki integral  $I_1$  ve paydasındaki integrali de  $I_2$  olsun.  $I_1$  integrali (2.4.1) denklemi içindeki  $I$  integralinin hesaplandığı gibi hesaplanırsa,

$$I_1 = \frac{15\pi^{3/2}}{4\alpha^{5/2}} \quad (2.4.4)$$

elde edilir.  $I_2$  integrali içindeki  $C$  yerine (2.3.13) denklemindeki değeri konursa,

$$I_2 = \int d^3U e^{-\alpha u^2} U_\mu (\alpha U^2 - \frac{5}{2}) n \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \int d^3U_1 e^{-\alpha u_1^2} \cdot \int d\Omega g I(\phi' + \phi'_1 - \phi - \phi_1) \cdot \left[ U_\mu (\alpha U^2 - \frac{5}{2}) \right] \quad (2.4.5)$$

elde edilir. Boltzmann H - Teoremini [9] kullanarak ve

$$\Delta[f(u)] = f(u') + f(u'_1) - f(u) - f(u_1) \quad (2.4.6)$$

tanımını yaparak (2.4.5) denklemini aşağıdaki hale getirebiliriz.

$$I_2 = -\frac{1}{4} n \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \int d^3U d^3U_1 e^{-\alpha(u^2 + u_1^2)} \cdot \int d\Omega g I(g, \theta) \Delta \left[ U_\mu (\alpha U^2 - \frac{5}{2}) \right] \Delta \left[ U_\mu (\alpha U^2 - \frac{5}{2}) \right] \quad (2.4.7)$$

burada momentumun korunum ifadesi

$$U'_m + U'_{1m} = U_m + U_{1m} \quad (2.4.8)$$

kullanılırsa

$$\Delta \left[ U_{\mu} \left( \alpha U^2 - \frac{5}{2} \right) \right] = \Delta \left[ U_{\mu} (\alpha U^2) \right] \quad (2.4.9)$$

ifadesi elde edilir. Kütle merkezinin hızı ise

$$U_C = \frac{U + U_1}{2} = \frac{U' + U'_1}{2}$$

ifadesi ile bellidir. Çarpışmadan önceki ve sonraki bağıl hızlar  $\mathbf{g} = U - U_1$  ve  $\mathbf{g}' = U' - U'_1$  şeklinde tanımlanır. Bu durumda hızlar arasında,

$$\begin{aligned} U &= U_C + \frac{1}{2} \mathbf{g} & U' &= U_C + \frac{1}{2} \mathbf{g}' \\ U_1 &= U_C - \frac{1}{2} \mathbf{g} & U'_1 &= U_C - \frac{1}{2} \mathbf{g}' \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

bağıntıları vardır. Aynı zamanda

$$U^2 + U_1^2 = 2U_C^2 + \frac{1}{2} \mathbf{g}^2 \quad (2.4.11)$$

ifadesi de yazılabilir.  $(U, U_1)$  koordinat sisteminden  $(U_C, \mathbf{g})$  sistemine Jakobi dönüşümü yapılırsa

$$\frac{dU \cdot dU_1}{dU_C \cdot d\mathbf{g}} = 1 \quad (2.4.12)$$

bağıntısı elde edilir. Artık  $\Delta(U_i, U^2)$  ifadesini  $U_C$  ve  $\mathbf{g}$  cinsinden ifade etmek gerekir. Böyle bir işlem (2.4.10) bağıntıları kullanılarak aşağıdaki gibi yerine getirilebilir.

$$\begin{aligned}
U_i &= U_{Ci} + \frac{1}{2}g_i & U'_i &= U_{Ci} + \frac{1}{2}g'_i \\
U^2 &= U_C^2 + \frac{1}{4}g^2 + U_Cg & U'^2 &= U_C^2 + \frac{1}{4}g'^2 + U_Cg'
\end{aligned}
\tag{2.4.13}$$

Benzer şekilde  $U = U_C + \frac{1}{2}g$  vektörünü bileşenleri cinsinden yazarsak

$$\begin{aligned}
U_i &= U_{Ci} + \frac{1}{2}g_i & U'_i &= U_{Ci} + \frac{1}{2}g'_i \\
U_{li} &= U_{Ci} - \frac{1}{2}g_i & U'_{li} &= U_{Ci} - \frac{1}{2}g'_i
\end{aligned}
\tag{2.4.14}$$

bağıntılarını elde ederiz. Böylece

$$\Delta(U_i U^2) = U'_i U'^2 + U'_{li} U'^2_{li} - U_i U^2 - U_{li} U^2_{li}
\tag{2.4.15}$$

yazıp (2.4.13) ve (2.4.14) deki değerler (2.4.15) denkleminde yerine konulursa,

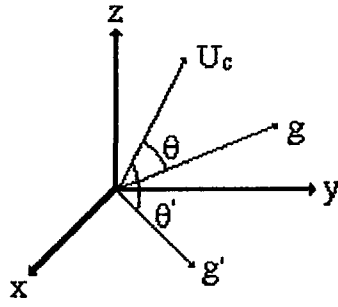
$$\Delta(U_i U^2) = (U_C g') g'_i - (U_C g) g_i
\tag{2.4.16}$$

ifadesini elde ederiz. (2.4.7) denklemindeki  $\left\{ \Delta[U_\mu(\alpha U^2)] \right\}^2$  terimi (2.4.16)

ifadesi kullanılarak

$$\left\{ \Delta[U_\mu(\alpha U^2)] \right\}^2 = \alpha^2 U_C^2 g^2 g_i^2 (\cos\theta' - \cos\theta)^2
\tag{2.4.17}$$

elde edilir. Burada  $g g_i = g' g'_i$  bağıntısı kullanıldı.  $(\cos\theta' - \cos\theta)^2$  ifadesini  $\cos\theta_{gg'}$  cinsinden ifade etmemiz gerekir.  $\theta$  ve  $\theta'$  açıları Şekil 2.4.1 'de gösterilmiştir.



Şekil 2.4.1 Hızların kartezyen koordinatlarda gösterimi.

Şimdi aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz.

$$\int d^3U = \iiint U^2 dU \sin\theta_u d\theta_u d\phi_u \iiint U^2 dU d\Omega_u \quad (2.4.18)$$

$$\int d^3U_C d^3g = \int U_C^2 dU_C \int g^2 dg \int d\Omega_u \int d\Omega_g \quad (2.4.19)$$

Herhangi iki  $i$  ve  $j$  birim vektörleri arasındaki açı için

$$\cos\theta_{ij} = i_x j_x + i_y j_y + i_z j_z$$

bağıntısı küresel koordinatlarda

$$\cos\theta_{ij} = \cos\theta_i \cos\theta_j + \sin\theta_i \sin\theta_j (\phi_i - \phi_j) \quad (2.4.20)$$

şeklinde yazılır. Şekil (2.4.1) deki  $g'$  vektörü  $z$  eksenine ile çakışacak şekilde dönme yapılarak ve (2.4.20) eşitliğinden faydalanılarak,

$$\cos\theta' = \cos\theta_{uc} \cos\theta_{g'} + \sin\theta_{uc} \sin\theta_{g'} \cos(\phi_{uc} - \phi_{g'})$$

$$\cos\theta = \cos\theta_{uc} \cos\theta_g + \sin\theta_{uc} \sin\theta_g \cos(\phi_{uc} - \phi_g) \quad (2.4.21)$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitlikler  $(\cos\theta' - \cos\theta)^2$  ifadesinde yerine konulup tekrar integral işlemine geçilirse aşağıdaki integraller elde edilirken diğer integrallerin sıfıra eşitliği görülür.



$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \text{Cos}^2 \theta_{uc} d(\text{Cos} \theta_{uc}) &= \frac{2}{3} \\
\int_{-1}^1 \text{Sin}^2 \theta_{uc} d(\text{Cos} \theta_{uc}) &= \frac{4}{3} \\
\int_{-1}^1 \text{Sin} \theta_{uc} \text{Cos} \theta_{uc} d(\text{Cos} \theta_{uc}) &= 0
\end{aligned} \tag{2.4.22}$$

Bundan sonra (2.4.22) ifadesindeki integralelerden faydalanılarak  $I_2$  integrali içindeki açısal integraller alınırsa integrallerin hepsinden,

$$I_{\alpha\phi} = \frac{8\pi}{3} (1 - \text{Cos}^2 \theta_{gg'}) \tag{2.4.23}$$

terimini elde ederiz. Yukarıda yaptığımız koordinat değişirmesi sonucu ve (2.4.23) ifadesini kullanarak (2.4.7) denkleminde,

$$I_2 = -n \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \frac{\pi^{5/2}}{2^{5/2} \alpha^{1/2}} \int dg g^7 e^{-(\alpha/2)g^2} \int d\Omega (1 - \text{Cos}^2 \theta_{gg'}) I(g, \theta_{gg'}) \tag{2.4.24}$$

bulunur.  $I_1$  ve  $I_2$  değerlerini (2.4.2) de yerine koyarak ısı iletkenlik katsayısı  $\kappa$  için

$$\kappa = \frac{5nk}{4} \frac{15 \pi^{3/2}}{4 \alpha^{5/2}} \frac{2^{5/2} \alpha^{1/2} \pi^{3/2}}{n \alpha^{3/2} \pi^{5/2} \int_0^{\infty} dg g^7 e^{-(\alpha/2)g^2} \int d\Omega (1 - \text{Cos}^2 \theta_{gg'}) I(g, \theta_{gg'})} \tag{2.4.25}$$

ifadesi elde edilir.  $G = g \left( \frac{m}{4kT} \right)$  değişken değişirmesi yapılarak

$Q(g) = 2\pi \int \text{Sin}^3 \theta I(g, \theta) d\theta$  ve  $C_v = \frac{3k}{2m}$  tanımları (2.4.25) denkleminde yerine

konulursa

$$\kappa = \frac{25}{16} C_v (\pi m k T)^{1/2} \left\{ \int dG G^7 e^{-G^2} Q(g) \right\}^{-1} \quad (2.4.26)$$

sonucu elde edilir. Isı iletkenlik katsayısının sayısal bir sonucunu elde etmek için  $Q(g)$  tesir kesitinin çarpışan parçacıkların momentumları ya da  $g$  cinsinden ifade edilmesi gerekir. Bu da çarpışan parçacıkların fiziksel özelliklerine bağlıdır.

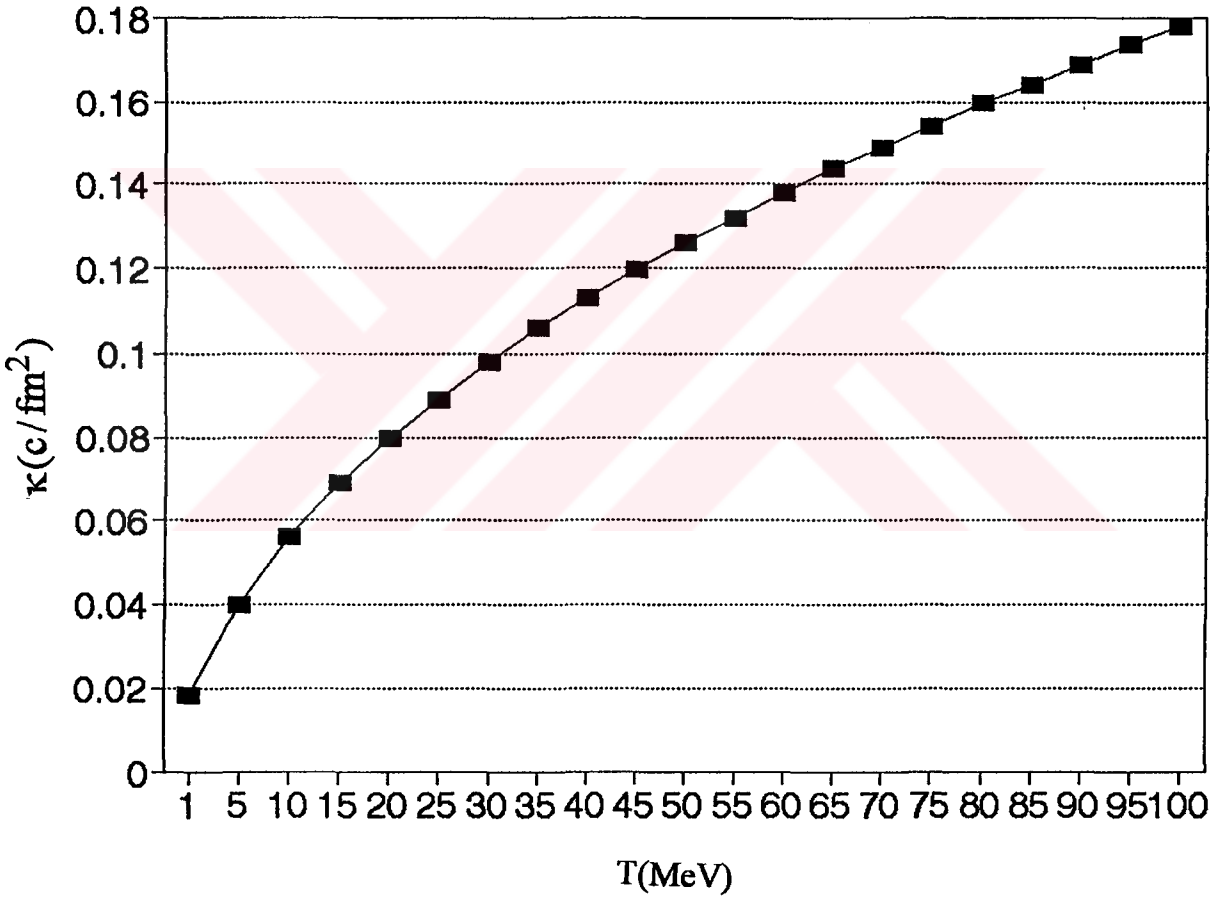
Çarpışan parçacıkların  $d$  çapında elastik sert küreler olduğu kabul edilirse (2.4.26) eşitliği aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\kappa = \frac{75}{64 \sigma_t} \left( \frac{\pi k^3 T}{m} \right)^{1/2} \quad (2.4.27)$$

$\sigma_t$  ve  $m$  nin sayısal değerleri yerine konularak bulunan değerler Şekil (2.4.2) de gösterilmiştir. Burada nükleon kütlesi 938 MeV ve nükleon-nükleon tesir kesiti için deneysel 38 mb değeri alınmıştır. Ayrıca, sayısal değerler Tablo 2.4.1 ' de gösterilmiştir.

**Tablo 2.4.1** Denklem (2.4.27) ' ye göre hesaplanan Nükleer maddenin ısı iletkenliği katsayıları.

T (MeV)	$\kappa_B$ (c/fm <sup>2</sup> )	T (MeV)	$\kappa_B$ (c/fm <sup>2</sup> )	T (MeV)	$\kappa_B$ (c/fm <sup>2</sup> )	T (MeV)	$\kappa_B$ (c/fm <sup>2</sup> )
2	0.025	28	0.094	54	0.131	80	0.160
4	0.036	30	0.098	56	0.133	82	0.161
6	0.044	32	0.101	58	0.136	84	0.163
8	0.050	34	0.104	60	0.138	86	0.165
10	0.056	36	0.107	62	0.140	88	0.167
12	0.062	38	0.110	64	0.143	90	0.169
14	0.067	40	0.113	66	0.145	92	0.171
16	0.071	42	0.116	68	0.147	94	0.173
18	0.076	44	0.118	70	0.149	96	0.175
20	0.080	46	0.121	72	0.151	98	0.177
22	0.084	48	0.124	74	0.153	100	0.178
24	0.087	50	0.126	76	0.155		
26	0.091	52	0.129	78	0.157		



**Şekil 2.4.2** Denklem (2.4.27) ' ye göre hesaplanan nükleer maddenin ısı iletkenliği katsayılarının sıcaklığa göre değişimi.

Fiziksel bir sistemin viskozluğu momentum taşınmasının bir ölçüsü olarak tanımlanır. Buna göre viskozluk katsayısının bir tanımı

$$\Psi_{\text{mom}} = -\eta \text{grad}v$$

formülü ile verilir. Burada  $\Psi_{\text{mom}}$  momentum akısı  $v$  de akışkan hızıdır. Daha ayrıntılı eşitlik (2.3.18) Newton Kanunu ile verilir.  $\eta$  viskozluk katsayısının hesaplanması için momentum akısının yazılması gerekir.

$$P_{ij} = \overline{P U_i U_j} = mn \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \int d^3U U_i U_j e^{-\alpha u^2} + mn \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \cdot$$

$$\int d^3U U_i U_j e^{-\alpha u^2} 2\alpha D_\mu D_\gamma \left( U_\mu U_\gamma - \frac{1}{3} \delta_{\mu\gamma} U^2 \right) C_2 \quad (2.4.28)$$

(2.4.28) denkleminin sağ tarafındaki birinci terimini  $i = j = z$  seçimi yapıp ( $U_i U_j = U_z^2 = U^2 \text{Cos}^2\theta$ ) küresel koordinatlara geçildikten sonra integral alınır

$$mn \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^\infty U^4 e^{-\alpha u^2} \int_0^\pi \text{Cos}^2\theta \text{Sin}\theta d\theta \int d\phi = nkT \quad (2.4.29)$$

sonucu bulunur. Burada daha önce belirttiğimiz gibi  $\alpha = \frac{m}{2kT}$  alınmıştır.

(2.4.29) denkleminin sağ tarafındaki son terim tensörel bir terimdir. Aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$mn \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \int d^3U U_i U_j e^{-\alpha u^2} 2\alpha \left( \sum_{\mu\gamma} D_{\mu\gamma} U_\mu U_\gamma - \sum_{\mu\gamma} D_{\mu\gamma} \frac{1}{3} \delta_{\mu\gamma} U^2 \right) C_2 = \quad (2.4.30)$$

$$mn \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} 2\alpha \sum_{i,j=1}^3 \left[ D_{ij} \int d^3U U_i^2 U_j^2 e^{-\alpha u^2} - D_{ij} \int d^3U U_i U_j \frac{1}{3} \delta_{ij} U^2 \right] C_2$$

Burada yine  $i = j = z$  seçilip küresel koordinatlara geçildikten sonra integral işlemi tamalanırsa, aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$P_{ij} = P\delta_{ij} + mn\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} 2\alpha \int U_z^4 e^{-\alpha u^2} d^3U \left( D_{ij} - D_{\alpha\alpha} \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) C_2 \quad (2.4.31)$$

Denklem (2.3.18) ve (2.4.31) yardımıyla viskozluk katsayısı için

$$\begin{aligned} \eta &= -mn\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \alpha \int U_z^4 e^{-\alpha u^2} d^3U C_2 \\ &= -mn\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \alpha \int U^6 e^{-\alpha u^2} dU \int \cos^4\theta \sin\theta d\theta \int d\phi C_2 \\ &= -\frac{mn}{2} \frac{\pi^{3/2}}{\alpha^{5/2}} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} C_2 \end{aligned} \quad (2.4.32)$$

ifadesi elde edilir. Isı iletkenlik katsayısı hesaplanırken kullanılan aynı yol izlenerek viskozluk katsayısı için,

$$\eta = \frac{5}{8} (mkT)^{1/2} \left\{ \int dG G^7 e^{-G^2} Q(g) \right\}^{-1} \quad (2.4.33)$$

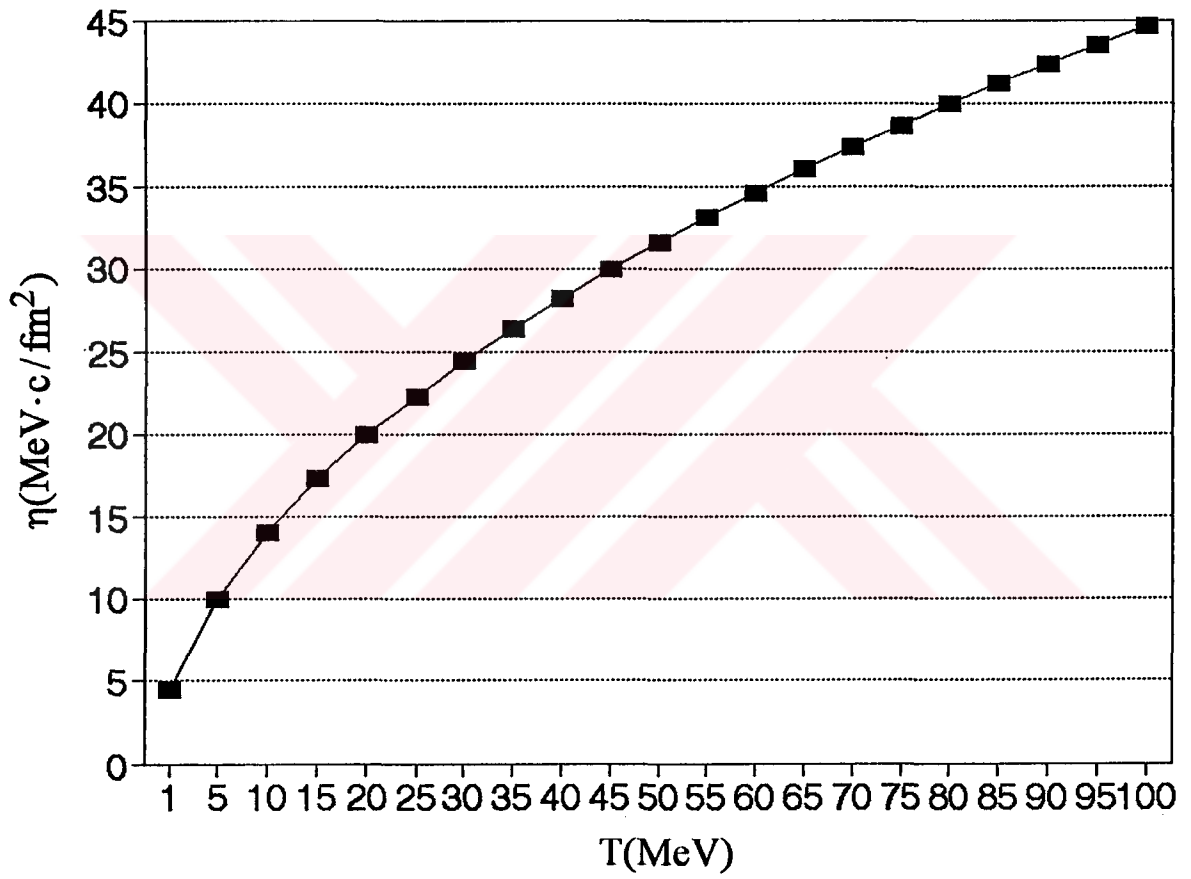
sonucu bulunur. Aynı şekilde viskozluk katsayısının sayısal bir sonucunu bulmak için  $Q(g)$  tesir kesitinin çarpışan parçacıkların momentumları yada bağıl momentum  $g$  cinsinden açıkça ifade edilmesi gerekir. Örnek olarak, çarpışan parçacıkların  $d$  çapında elastik sert küreler olduğu kabul edilirse (2.4.32) denklemi aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\eta_B = \frac{5}{16\sigma_t} (\pi mkT)^{1/2} \quad (2.4.34)$$

Tesir kesiti  $\sigma_t$  'nin ve parçacıkların kütleleri  $m$  'nin daha önce verilen sayısal değerleri yerine konulursa  $\eta$  için sayısal sonuçlar elde edilir. Bu sonuçlar Şekil 2.4.3 de gösterilmiştir. Sayısal değerler ise Tablo 2.4.2 'de gösterilmektedir. (Burada B indisi, Boltzmann terimini göstermek için kullanılmıştır.)

**Tablo 2.4.2** Denklem (2.4.34) ' e göre hesaplanan nükleer maddenin viskozluk katsayıları değerleri.

T (MeV)	$\eta_B$ (MeV.c/fm <sup>2</sup> )	T (MeV)	$\eta_B$ (MeV.c/fm <sup>2</sup> )	T (MeV)	$\eta_B$ (MeV.c/fm <sup>2</sup> )	T (MeV)	$\eta_B$ (MeV.c/fm <sup>2</sup> )
2	6.315	28	23.629	54	32.814	80	39.940
4	8.931	30	24.458	56	33.416	82	40.436
6	10.938	32	25.260	58	34.008	84	40.926
8	12.630	34	26.038	60	34.589	86	41.411
10	14.121	36	26.793	62	35.161	88	41.890
12	15.469	38	27.527	64	35.724	90	42.363
14	16.708	40	28.242	66	36.277	92	42.861
16	17.862	42	28.939	68	36.823	94	43.294
18	18.945	44	29.620	70	37.361	96	43.752
20	19.970	46	30.286	72	37.890	98	44.206
22	20.945	48	30.937	74	38.413	100	44.654
24	21.876	50	31.575	76	38.929		
26	22.769	52	32.201	78	39.438		



**Şekil 2.4.3** Denklem (2.4.34) 'e göre hesaplanan nükleer maddenin viskozluk katsayılarının sıcaklığa göre değişimi.

## B Ö L Ü M - 3

### YOĞUN NÜKLEER MADDE İÇİNDE ENERJİ VE MOMENTUM TAŞINMASI

#### 3.1. Giriş

Buraya kadar Boltzmann denkleminin seyrek gaz limitinde çok iyi sonuçlar verdiğini gördük. Yoğunluk arttıkça çok cisim çarpışmaları önemli sonuçlar getireceği için Boltzmann denklemi geçerliliğini kaybetmeye başlar. Bu durumda üç-cisim, dört-cisim ve daha çok-cisim çarpışmalarını içine alan bir teori geliştirmek gerekir. Modern çok-cisim etkileşme diyagramlarıyla geliştirilmiş teknikler vardır. Fakat bunların hiçbiri transport katsayılarının hesaplanması için elverişli değildir. Fakat Enskog sert küre yaklaşımı yaparak çok cisim etkilerini Boltzmann denklemi içine, iki cisim problemine indirgeyerek sokmayı başarmıştır.

#### 3.2. Enskog Denklemi ve Yoğun Nükleer Maddenin Viskozluk ve Isı İletkenlik Katsayıları

Yoğun madde için Boltzmann denklemi Enskog denklemine dönüştürülürken aşağıdaki yol izlenmiştir.

1. Çok cisim çarpışmaları tamamen gözardı edilerek dinamik Boltzmann denklemindeki iki-cisim dinamiği şeklinde tanımlanmıştır.

2. Parçacıkların sonlu  $d$  çapından dolayı sistemin hacmi indirgenir ve bunun sonucu olarak basınç ve çarpışma frekansı artar.





şeklinde yazılır. Daha sonra  $Y_E$  nin doğrudan veya dolaylı olarak nasıl belirlenebileceğini göstereceğiz. Bu kabullerden sonra  $d$  çaplı sert-küreler için Boltzmann denklemindeki  $(\partial f/\partial t)_{\text{çarp}}$  terimi aşağıdaki gibi düzenlenir:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{çarp}} = \iiint d\bar{v}_1 d\bar{v}' d\bar{v}'_1 w(\bar{v}\bar{v}_1|\bar{v}'\bar{v}'_1) A \quad (3.2.3)$$

burada,

$$A = Y_E \left( n(\bar{r} + \frac{1}{2} \bar{e}d, t) f(\bar{r}, \bar{v}', t) f(\bar{r} + \bar{e}d, \bar{v}, t) \right. \\ \left. - Y_E \left( n(\bar{r} - \frac{1}{2} \bar{e}d, t) f(\bar{r}, \bar{v}, t) f(\bar{r} - \bar{e}d, \bar{v}', t) \right) \right)$$

Böylece denklem (2.3.1) 'deki Boltzmann denkleminin çarpışma terimi, yoğunluğa bağlı  $Y_E$  faktörü ile değişime uğratılmış oldu.

Şimdi  $Y_E$  yi belirleyelim. Bir katı kürenin merkezinin,  $(\frac{4}{3}\pi d^3)$  hacimli herhangi bir başka katı kürenin " Etki küresi " içinde yer alamayacağını belirtelim. Böylece etkin hacim

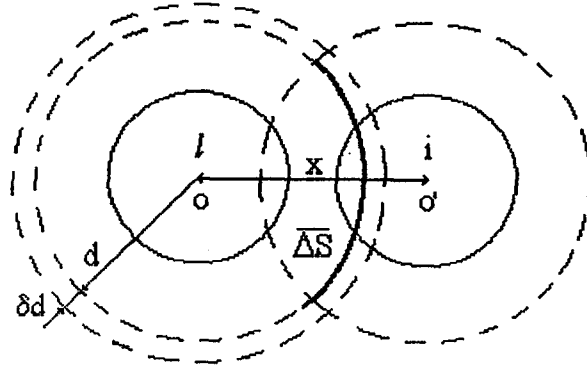
$$(1 - 2bn) \quad (3.2.4)$$

faktörüyle azalır. Burada  $b$  konvansiyonel olarak

$$b = \frac{2\pi d^3}{3} \quad (3.2.5)$$

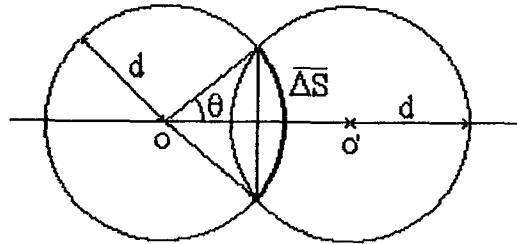
çarpanını temsil eder. Çarpışma frekansı bu sebeple  $(1 - 2bn)^{-1}$  çarpanı kadar artar.

Ancak, aynı zamanda bu frekansı azaltan bir perdeleme etkisi de vardır. Bir  $i$  molekülünün bir  $\ell$  molekülünden  $x$  kadar uzakta ( $d < x < 2d$ ) mesafesinde bulunduğunu varsayalım.



Şekil 3.2.2 Katı Küre Çarpışmasında Perdeleme Etkisi

Bu durumda  $l$  parçacığının etki küresinin bir  $\Delta S$  kısmı perdelenecektir. Yani merkezi  $\Delta S$  içinde olan bir üçüncü parçacık  $l$  ile çarpışma yapmayacaktır. Bunun anlamı; perdelenmiş yüzeyle 3. molekül bir çarpışma yapmayacaktır. Bir parçacığın bütün yüzeyi üzerinden çarpışma ihtimali (frekansı) 1 olduğuna göre bu durumda  $l$  parçacığının diğer parçacıklarla çarpışma frekansı  $\left(1 - \frac{\Delta S}{S}\right)$  çarpanı ile azalacaktır. Burada  $S = 4\pi d^2$  toplam yüzeydir ve  $\overline{\Delta S}$  aşağıdaki şekilde belirlenebilen ortalama perdelenmiş yüzeydir.  $(x, x+dx)$  bölgesinde ortalama olarak  $4\pi x^2 dx$  molekül vardır. Bunların herbiri  $2\pi d (d - x/2)$  kadar bir yüzeyi perdeler. Bu sebeple  $\overline{\Delta S}$



Şekil 3.2.3 Perdeleme etkisinin gösterimi.

$$\overline{\Delta S} = \int_d^{2d} dx 4\pi n x^2 2\pi d \left( d - \frac{x}{2} \right) = \frac{11\pi^2 n d^5}{3} \quad (3.2.6)$$

ile verilir. (3.2.4) ve (3.2.6) yi birleştirebilirsek

$$Y_E = \frac{1 - 11b \frac{n}{8}}{1 - 2bn} = 1 + 0,625b \quad (3.2.7)$$

bulunur. Burada  $b = \frac{2}{3}\pi d^3$  ve  $d$  'nin parçacık çapı olduğunu tekrar hatırlatalım.

Buradaki 0,625 çarpanı, sert küreler için geçerli olan ikinci virial katsayısı ile aynı değere sahiptir. Bu da izlenen yolun doğru olduğunu gösterir. Üç, dört, beş,... cisim çarpışmaları sonucunda ortaya çıkan daha yüksek mertebeden terimler virial açılımı ile aşağıdaki şekle dönüşür [11].

$$Y_E(n) = 1 + 0,625nb + 0,2869(nb)^2 + 0,1097(nb)^3 + 0,0386(nb)^4 + \dots \quad (3.2.8)$$

Burada 0,625 katsayısı ikinci virial katsayısı diğerleri de sırayla üçüncü, dördüncü, beşinci ... virial katsayıları olarak adlandırılır. Bu katsayıların türetilişi kaynak [11] 'de detaylı olarak açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde verilen Boltzmann denklemini kullanarak, seyrek gazlar için  $\psi_\alpha = 1, \bar{v}, \frac{v^2}{2}$  büyüklüklerinin korunum denklemleri

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dv \psi_\alpha f_1 + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \int d\bar{v} \bar{v}' \psi_\alpha f_1 = 0 \quad (3.2.9)$$

şeklinde yazılır. Yoğun madde için (3.2.3) Enskog çarpışma terimi aynı büyüklükler için yazılınca sağ tarafın sıfır etmediği görülür. Bunun nedeni parçacıkların sonlu hacmi sonucu delokalize olmasındandır. Yoğun madde için korunum denklemlerini sağlamak için çarpışma terimi açılımında zayıf uzaysal gradyentleri aşağıdaki gibi gözönüne alırız.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d\bar{v} \psi_{\alpha} f_1 + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \int d\bar{v} \bar{v} \psi_{\alpha} f_1 = \sum I_{\alpha}^{(i)} + O(\nabla^3) \quad (3.2.10)$$

burada

$$I_{\alpha}^{(i)} = \int d\bar{v} \psi_{\alpha} J_{\alpha}^{(i)} \quad (3.2.11)$$

şeklinde tanımlanır ve çarpışma değişmezleri olarak tanımlanır [9,10]. Bu durumda , (3.2.9) korunum denklemleri

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( m \int d\bar{v} \psi_{\alpha} f_1 \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} J_{\alpha} = 0 \quad (3.2.12)$$

şeklini alır. Burada

$$J_{\alpha} = J_{\alpha}^K + J_{\alpha}^V \quad (3.2.13)$$

eşitliği yazılarak  $J_{\alpha}$  yı  $J_{\alpha}^K$  kinetik ve  $J_{\alpha}^V$  potansiyel akıları cinsinden yazabiliriz. Bu durumda korunum denklemleri tekrar elde edilir. Ayrıca, basınç tensörü ve ısı akısı

$$\begin{aligned} P_{ij} &= P_{ij}^K + P_{ij}^V \\ q_i &= q_i^K + q_i^V \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

şeklinde yazılır. Burada kinetik terimler,  $P_{ij}^K$  ve  $q_i^K$  Boltzmann denklemlerinden

$$\begin{aligned} P_{ij}^K &= m \int d\bar{v} \bar{v}_i \bar{v}_j f_1 \\ q_i^K &= m \int d\bar{v} \frac{v^2}{2} \bar{v}_i f_1 \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

şeklinde hesaplanır ve potansiyel terimler ise

$$\begin{aligned}
P_{ij}^V &= 2mdY_E(n) \iiint \int dv dv_1 dv' dv'_1 w(vv_1|v'v'_1)(U_i' - U_i) \epsilon_i f f_1 \\
&+ md^2 Y_E(n) \iiint \int dv dv_1 dv' dv'_1 w(vv_1|v'v'_1)(U_i' - U_i) \epsilon_j \epsilon \left[ f f_1 \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \ln \left( \frac{f}{f_1} \right) \right] \\
q_i^V &= md Y_E(n) \iiint \int dv dv_1 dv' dv'_1 w(vv_1|v'v'_1)(U'^2 - U^2) \epsilon_i f f_1 + \\
&\frac{md^2 Y_E(n)}{2} \iiint \int dv dv_1 dv' dv'_1 w(vv_1|v'v'_1)(U'^2 - U^2) \epsilon_i \epsilon \left[ f f_1 \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \ln \left( \frac{f}{f_1} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

şeklinde elde edilir. Burada  $w(vv_1|v'v'_1)$  çarpışma frekansı  $u_i$  de termal hız olarak adlandırılır.

Viskozluk ve ısı iletkenlik katsayılarını hesaplamak için Enskog denkleminin  $f_1$  için çözülmesi gerekir. Bunun için de Bölüm - 2 de uyguladığımız Chapman - Enskog yaklaşımı aynı şekilde uygulanır. Böylece Bölüm - 2 de hesapladığımız Boltzmann katsayıları  $\eta_B$  ve  $\kappa_B$  cinsinden Enskog katsayıları  $\eta_E$  ve  $\kappa_E$  aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\eta_E = \eta_B nb \left[ \frac{1}{nb Y_E} + \frac{4}{5} + \left( \frac{4}{25} + \frac{48}{25\pi} \right) nb Y_E \right] \tag{3.2.17}$$

$$\kappa_E = \kappa_B nb \left[ \frac{1}{nb Y_E} + \frac{6}{5} + \left( \frac{9}{25} + \frac{32}{25\pi} \right) nb Y_E \right] \tag{3.2.18}$$

Bu durumda bir nükleon gazı için temel sert-küre parçacıklarının nükleonlar olduğunu tekrar hatırlatalım. Böylece, bir nükleonun  $d$  çapını belirlemek için deneysel nükleon-nükleon toplam tesir kesiti  $\sigma_t = 38$  mb değeri alınır [2]. Bu durumda sert-küre yaklaşımı için  $\sigma_t = \pi d^2$  eşitliğinden  $d = 1,1$  fm bulunur. Bunun bir türetilişini ikinci bölümde sunmuştuk.  $Y_E$  değerleri için denklem (3.2.7) 'i kullanarak Şekil 3.1.4 de  $\frac{\eta_E}{\eta_B}$  ve  $\frac{\kappa_E}{\kappa_B}$  değerlerini  $\frac{n}{n_0}$  m fonksiyonu

olarak sürekli çizgilerle gösterdik. Burada  $n_0$  normal çekirdek doyma yoğunluğudur ve ağır iyonlardan elektronun saçılması deneyleri ile  $n_0 = 0,16 \text{ fm}^{-3}$  olarak belirlenmiştir. Ayrıca çok cisim etkileşmelerinin katsayılara etkisini çeşitli yoğunluklarda gözlemek için  $Y_E$  Enskog fonksiyonu için (3.2.8) denklemini kullandık ve bulduğumuz sonuçları Şekil 3.2.4 'de kesikli çizgilerle gösterdik. Böylece yoğunluğa bağlı olarak  $\eta_E$  viskozluk ve  $\kappa_E$  ısı iletkenlik katsayılarını ikinci bölümde serbest gaz limitinde hesaplanan Boltzmann katsayıları cinsinden ifade edip istenen yoğunlukta karşılaştırmış olduk.



**Tablo 3.2.1** Şekil 3.2.4 deki sürekli çizgilerin verileri. Normal nükleer madde yoğunluğu  $n_0=0.16 \text{ fm}^{-3}$  nükleon çapı  $d=1.1 \text{ fm}$  alınmıştır.

	$n$ $\text{fm}^{-3}$	$\eta_E$ $\eta_B$	$\kappa_E$ $\kappa_B$
	0.02	1.0134106	1.0356998
	0.04	1.0343103	1.0788631
	0.06	1.0629925	1.1297809
$n_0 / 2$	0.08	1.0997760	1.1887698
	0.10	1.1450017	1.2561680
	0.12	1.1990284	1.3323320
	0.14	1.2622312	1.4176345
$n_0$	0.16	1.3349988	1.5124619
	0.18	1.4177320	1.6172123
	0.20	1.5108417	1.7322943
	0.22	1.6147481	1.8581259
	0.24	1.7298794	1.9951325
	0.26	1.8566705	2.1437469
	0.28	1.9955629	2.3044080
	0.30	2.1470032	2.4775602
$2n_0$	0.32	2.3114432	2.6636526
	0.34	2.4893388	2.8631389
	0.36	2.6811498	3.0764763
	0.38	2.8873395	3.3041259
	0.40	3.1083746	3.5465518
	0.42	3.3447238	3.8042205
	0.44	3.5968595	4.0776017
	0.46	3.8652551	4.3671666
$3n_0$	0.48	4.1503869	4.6733888
	0.50	4.4527329	4.9967443

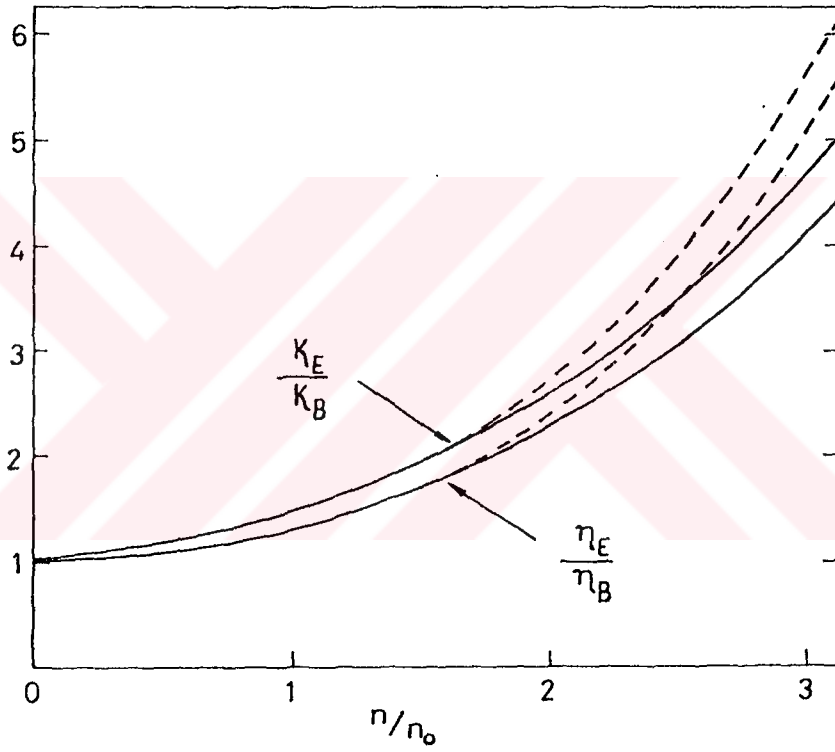


Tablo 3.2.2 Şekil 3.2.4 deki kesikli çizgilerin verileri.

	$n$ $\text{fm}^{-3}$	$\frac{\eta_E}{\eta_B}$	$\frac{\kappa_E}{\kappa_B}$
	0.02	1.0125628	1.0348520
	0.04	1.0311053	1.0756579
	0.06	1.0562261	1.1230137
	0.08	1.0885911	1.1775820
	0.10	1.1289373	1.2400964
	0.12	1.1780758	1.3113644
	0.14	1.2368969	1.3922718
$n_0$	0.16	1.3063750	1.4837885
	0.18	1.3875718	1.5869713
	0.20	1.4816426	1.7029700
	0.22	1.5898409	1.8330319
	0.24	1.7135233	1.9785074
	0.26	1.8541551	2.1408546
	0.28	2.0133158	2.3216455
	0.30	2.1927048	2.5225711
$2n_0$	0.32	2.3941466	2.7454474
	0.34	2.6195970	2.9922205
	0.36	2.8711485	3.2649729
	0.38	3.1510361	3.5659288
	0.40	3.4616444	3.8974611
	0.42	3.8055101	4.2620942
	0.44	4.1853328	4.6625146
	0.46	4.6039753	5.1015713
$3n_0$	0.48	5.0644742	5.5822861
	0.50	5.5700430	6.1078569

Tablo 3.2.3 Beş-cisim çarpımlarını içeren veriler.

	$n$ $\text{fm}^{-3}$	$\frac{\eta_E}{\eta_B}$	$\frac{\kappa_E}{\kappa_B}$
	0.02	1.0125566	1.0348457
	0.04	1.0310589	1.0756115
	0.06	1.0560828	1.1228703
	0.08	1.0882835	1.1772743
	0.10	1.1284006	1.2395595
	0.12	1.1772616	1.3105495
	0.14	1.2357876	1.3911612
$n_0$	0.16	1.3049998	1.4824108
	0.18	1.3860229	1.5854178
	0.20	1.4800931	1.7014125
	0.22	1.5885631	1.8317415
	0.24	1.7129094	1.9778741
	0.26	1.8547385	2.1414090
	0.28	2.0157940	2.3240816
	0.30	2.1979641	2.5277711
$2n_0$	0.32	2.4032886	2.7545075
	0.34	2.6339664	3.0064790
	0.36	2.8923631	3.2860399
	0.38	3.1810190	3.5957182
	0.40	3.5026571	3.9382238
	0.42	3.8601890	4.3164540
	0.44	4.2567263	4.7335055
	0.46	4.6955840	5.1926772
$3n_0$	0.48	5.1802929	5.6974827
	0.50	5.7146040	6.2516551



**Şekil 3.2.4** Nükleer maddenin yüksek yoğunluklardaki viskozluk katsayısı  $\eta_E$  'nin Boltzmann viskozluk katsayısı  $\eta_B$  'ye oranı ve ısı iletkenlik katsayısı  $\kappa_E$  'nin  $\kappa_B$  'ye oranını, kesikli çizgiler de aynı oranların denklem (3.2.8) kullanılarak çok-cisim etkileşmelerinin etkisi sonucunda elde edilen değerlerini gösteriyor.

## B Ö L Ü M - 4

### SONUÇLAR ve TARTIŞMA

İkinci bölümde Chapman - Enskog yaklaşımına göre hesaplanan ve denklem (2.4.27) ve (2.4.34) ile verilen  $\kappa_B$  ve  $\eta_B$  değerleri ile yine aynı bölümde denklem (2.2.5) ve (2.2.9) ile verilen  $\eta$  ve  $\kappa$  değerlerinin yoğunluğa bağlı olmadığını gözlemiştik. Üçüncü bölümde hesaplanan  $\eta_E$  ve  $\kappa_B$  Enskog katsayılarını ise yoğunluğun fonksiyonu olarak Şekil 3.2.4 de görüldüğü gibi hesapladık. Tablo 3.2.1 'de de verileri gösterdik. Şekilde de görüldüğü gibi yoğunluk arttıkça katsayılar artmaktadır, kesikli çizgilerin gösterdiği gibi çok-cisim çarpışmaları (üç-cisim, dört-cisim, beş-cisim çarpışmaları) katsayılarda önemli bir artış göstermektedir. Özellikle yüksek yoğunluklarda bu çok cisim etkileşimleri ihmal edilemez boyutlarda iken yoğunluk düştükçe çok-cisim çarpışmalarının katsayıları önemli ölçüde etkilemediği ve kesikli çizgilerle sürekli çizgilerin üst üste geldiği gözlenmektedir. Bu etkileri sayısal olarak görmek için Tablo 3.2.2 de dört-cisime kadar ve Tablo 3.2.3 de beş-cisime kadar olan çarpışmalarda katsayıların değerlerini verdik ve böylece beş-cisim çarpışmalarının katsayılarına etkisini çeşitli yoğunluklarda gözledik.

Katsayıların yoğunlukla artışı, enerji ve momentumun ortamda taşınmasının, sert-küreler (nükleonlar) üzerinden çarpışmalar yoluyla gerçekleşmesinden kaynaklanır. Yoğunluk arttıkça çarpışma frekansı da arttığı için katsayılar da buna bağlı olarak artmaktadır. Halbuki, seyrek gaz limitinde kullanılan nokta parçacık yaklaşımı nedeniyle momentum ve enerji ortam tarafından parçacıkların hızları değişimi ile gerçekleştirilir.

Klasik akışkanlar için Enskog yaklaşımı çok iyi bir yaklaşım olarak görünmekle beraber nükleer madde sıcaklık-yoğunluk düzlemi üzerinde çeşitli

fazlarda gözlenmektedir [12]. Bu nedenle nükleer madde her sıcaklık ve yoğunlukta klasik bir akışkan gibi davranmaz ve bu gibi durumlarda Enskog yaklaşımı kullanılmaktadır. Örneğin nükleer madde için  $n > 3n_0$  ve  $T > 100$  MeV bölgesinde kuvvetli bir pion üretimi gözlenir. Bu durumda sistemin dinamiği klasik değil kuantum etkilerini de içine alan başka yaklaşımlarla açıklanmaya çalışır [13-15]. Ayrıca  $n > 10n_0$  ve  $T > 150$  MeV bölgesinde de kuark-gluon plazmasının varlığı teorik olarak ispatlanmıştır. Bu bölgede nükleonlar artık sert-küreler değil alt yapıları olan kuarklara ayrılmıştır [12]. Bu durumda bizim yaptığımız hesapların  $30 < T < 150$  MeV aralığında ve  $3n_0$  yoğunluk değerine kadar daha geçerli olduğunu söylemek uygun olur. Ayrıca düşük sıcaklıklarda ( $T < 30$  MeV) nükleer maddenin transport katsayıları, Pauli dışarlama ilkesi gibi kuantum etkileri nedeniyle, Fermi sıvıları teorisi kullanılarak hesaplanır [16-19]. Bu bölgede viskozluk ve ısı iletkenlik katsayıları sırasıyla  $\frac{1}{T}$  ve  $\frac{1}{T^2}$  ile orantılıdır ve yoğunluğa bağlılık da dolaylı olarak yoğunlukla değişen  $\sigma_t$  toplam tesir kesiti ile değişmektedir. Ayrıca çok yüksek sıcaklıklarda rölativistik etkiler gözönüne alınmalıdır [20].

## KAYNAKLAR

- [1]. DANIELEWICZ, P. , 1984, " Transport Properties of excited nuclear matter and shock-wave profile " *Phys. Lett.* **146B**, 168-175
- [2]. MALFLIET, R., 1984, " Transport properties of Nuclear Matter at High Densities and High Temperatures " *Nucl. Phys.* **A420**, 621-635
- [3]. BAYM, G. and EBNER, C. , 1968, " Fermi- Liquid Transport Coefficients of Dilute Solutions of  $\text{He}^3$  in  $\text{He}^4$  " *Phys. Rev.***170**, 346-350
- [4]. SYKES, J. and BROOKER, G.A. , 1970 , " The Transport Coefficients of a Fermi Liquid " *Ann of Phys.* **56**, 1-39
- [5]. ABRIKOSOV, A.A. and KHALATNIKOV, I. M.,1957, " Theory of Kinetic Phenomena in Liquid  $\text{He}^3$  " *Sov. Phys. JETP* **6**, 887-893
- [6]. LANDAU, L. D., 1957, "Ossillations in a Fermi Liquid" *Sov. Phys. JETP* **5**, 101-108
- [7]. LANDAU, L. D. , 1958, " Dispersion of Sound in a Fermi Liquid " *Sov. Phys. JETP* **6**, 84-89
- [8]. LANDAU, L. D. , 1957, " The Theory of a Fermi Liquid " *Sov. Phys. JETP* **6**, 920-925
- [9]. UHLENBECK, G. E. , FORD , G. W., 1963, " Lectures in Statistical Mechanics ", American Mathematical Society, 77-117
- [10]. RESIBOIS, P., 1977, " Classical Kinetic Theory of Fluids ", " Wiley, New York.
- [11]. McQUARRY, D.A., 1976, " Stastiscial Mechanics " Harper and Row, New York.
- [12]. NEGELE, J.W., VOGT, E, 1984, " Advances in Nuclear Physics " Vol.13, New York , 201.

- [13]. OĞUL, R. , 1989, "TDHF Theory and Residual Interactions" Z. Phys. A, **333**, 149-152
- [14]. OĞUL, R. and ÖZMEN, A., 1988, " The Nucleon Self-energy in the Relativistic Brueckner- Approach" Tr. J. of Nuclear Sciences. **15**, 5-10
- [15]. TER HAAR, B. and MALFLIET, R., 1987, " Pion production, pion Absorption, and nucleon properties " Phys. Rev. **C36**, 1611-1620
- [16]. OĞUL, R. and ÖZMEN, A., 1991, "Transport properties of Nuclear Matter at Low Temperatures " Doğa-Tr. J. of Physics **15**, 43-50
- [17]. OĞUL, R. and MALFLIET, R., 1987, " Kinetic Transport Coefficients of Nuclear Matter " KVI Ann. Rep. , 63-64
- [18]. OĞUL, R. , 1988, " Non-equilibrium Properties of Nuclear Matter in the Dirac-Brueckner Approach " KVI- Rep **759**, 1-5
- [19]. OĞUL, R. and ÖZMEN, A., 1994 , " Fermi Liquid Transport Coefficients of Nuclear Matter " (Accepted by Balkan Phys. Lett.)
- [20]. GALITSKI, V.M. et al ., 1979 , " Kinetic Coefficients of Nuclear Matter" Sov. J. Nucl. Phys. **30**(3), 401-406