T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİLİĞİN AYRIŞIMI

Yusuf BECEREN
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya, 1995

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİLİĞİN AYRIŞIMI

Yusuf BECEREN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 17.11.1995 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

imza	imza	imza
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL (Danışman)	Prof. Dr. Ahmet ABDİK	Prof. Dr. Gülhan ASLIM

ÖZET

Doktora Tezi

TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİLİĞİN AYRIŞIMI

Yusuf BECEREN
Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

1995, Sayfa : 52

Bu çalışmada, β^*-süreklilik ve zayıf β^*-süreklilik kavramlarını tanımladık ve sürekliliğin yeni iki ayrışımını elde ettik: (ı) $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin α-sürekli ve β^*-sürekli olmasıdır; (ıı) $f : X \to Y$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin semi sürekli ve zayıf β^*-sürekli olmasıdır. Sürekliliğin bu yeni ayrışımları, [21], [37], [38], [39], [12], [40], [15], [13], [36], [6] daki ayrışımlardan farklıdır. Ayrıca $D(\alpha,s)$-süreklilik kavramını tanımladık ve α-sürekliğin yeni bir ayrışımını elde ettik: $f : X \to Y$ fonksiyonunun α-sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin semi sürekli ve $D(\alpha,s)$-sürekli olmasıdır.

Anahtar Kelimeler : β^*-süreklilik, zayıf β^*-süreklilik, $D(\alpha,s)$-süreklilik.

ABSTRACT

Doctora Thesis

ON DECOMPOSITION OF CONTINUITY IN TOPOLOGICAL SPACES

Yusuf BECEREN
Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
1995, Page : 52

In this study, we introduce the notions of β^*-continuity and weakly β^*-continuity in topological spaces, and obtain two new decompositions of continuity: (ı) a function $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\upsilon)$ is continuous if and only if it is both α-continuous and β^*-continuous; (ıı) a function $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\upsilon)$ is continuous if and only if it is both semi continuous and weakly β^*-continuous. New decompositions of continuity is different from decompositions in [21], [37], [38], [39], [12], [40], [15], [13], [36], [6]. Together with the notion of $D(\alpha,s)$-continuity, we obtain a new decomposition of α-continuity: a function $f : X \rightarrow Y$ is α-continuous if and only if it is both semi continuous and $D(\alpha,s)$-continuous.

Key Words : β^*-continuity, weakly β^*-continuity, $D(\alpha,s)$-continuity.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No:

TEŞEKKÜR

Araştırma konusunun belirlenmesinde ve çalışmalarımın yürütülmesinde yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL`e teşekkür ederim.

GÖSTERİMLER

A^- : A kümesinin kapanışı

A° : A kümesinin içi

A^s : A kümesinin sınırı

$\alpha(X)$: (X,τ) uzayındaki bütün α-açık kümeler ailesi

$PO(X)$: (X,τ) uzayındaki bütün α-açık kümeler ailesi

$SO(X)$: (X,τ) uzayındaki bütün α-açık kümeler ailesi

$\alpha(X,x)$: Bir $x \in X$ noktasını içeren bütün α-açık kümeler ailesi

$PO(X,x)$: Bir $x \in X$ noktasını içeren bütün α-açık kümeler ailesi

$SO(X,x)$: Bir $x \in X$ noktasını içeren bütün α-açık kümeler ailesi

$(A)_\alpha^-$: A kümesinin α-kapanışı

$(A)_p^-$: A kümesinin prekapanışı

$(A)_s^-$: A kümesinin semi kapanışı

$(A)_\alpha^\circ$: A kümesinin α-içi

$(A)_p^\circ$: A kümesinin preiçi

$(A)_s^\circ$: A kümesinin semi içi

1. GİRİŞ

Bu Tezin 2. Bölümünde; sürekliliğin ayrışımları ile ilgili şimdiye kadar yapılagelmiş çalışmalar aşağıdaki biçimde kısaca özetlenmiş, her ayrışım hakkında yorum yapılmıştır. Ayrıca 2. Bölümde; yalnızca ifadeleri verilen 2.1.2. Lemma, 2.3.8. Lemma, 2.3.12. Lemma, 2.4.9. Lemma, 2.5.8. Lemma, 2.6.4. Lemma, 2.9.3. Lemma v.b. özelliklerinin ispatları yapılmıştır:

N. Levine, [21] de sürekliliğin bir ayrışımını vermiştir: $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun zayıf sürekli ve zayıf* sürekli olmasıdır. D. A. Rose [37], lokal zayıf* sürekliliği tanımlayıp, N. Levine`nin ayrışımını genelleştirmiştir: $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f nin zayıf sürekli ve lokal zayıf* sürekli olmasıdır. [30] da, zayıf α-süreklilik incelenmiştir. D. A. Rose [38], [37] deki kendi ayrışımının bir genelleştirmesini yapmıştır: $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f nin zayıf α-sürekli ve lokal zayıf* sürekli olmasıdır. [28] de, α-açık küme kavramı verilmiştir. [22] de, semi açık küme ve semi süreklilik kavramları incelenmiştir. [27] de, α-süreklilik çalışılmış ve presüreklilik [25] kavramıyla birlikte, α-sürekliliğin bir ayrışımı elde edilmiştir: $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun α-sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f nin presürekli ve semi sürekli olmasıdır. J. Tong [39], A-küme ve A-süreklilik kavramlarını tanımlayıp, sürekliliğin bir ayrışımını elde etmiştir: $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f nin α-sürekli ve A-sürekli olmasıdır. [4] de, lokal kapalı küme kavramı verilmiştir. M. Ganster ve I. L. Reilly, [11] de LC-süreklilik kavramını tanımlayıp, [12] de sürekliliğin bir ayrışımını vermişlerdir: $f : X \rightarrow Y$ nin sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f nin presürekli ve LC-sürekli olmasıdır. [12] de, A-sürekliliğin bir ayrışımı verilmiştir: $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun A-sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f nin semi sürekli ve LC-sürekli olmasıdır. J. Tong [40], β-küme ve β-süreklilik kavramlarını tanımlayıp, sürekliliğin bir başka ayrışımını elde etmiştir: $f : X \rightarrow Y$ nin sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f nin presürekli ve β-sürekli olmasıdır. [13] de, zayıf β-küme ve zayıf β-süreklilik kavramları tanımlanıp, sürekliliğin bir ayrışımı elde edilmiştir: $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f nin presürekli ve zayıf β-sürekli olmasıdır. [15] de, C-küme ve C-süreklilik kavramları tanımlanıp, sürekliliğin bir ayrışımı daha elde edilmiştir: $f : X \rightarrow Y$ nin sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f nin α-sürekli ve C-sürekli olmasıdır. M. Przemski [36], $D(c,\alpha)$-sürekliliği tanımlayıp, sürekliliğin bir ayrışımını vermiştir: $f : X \rightarrow Y$ nin sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f nin α-sürekli ve $D(c,\alpha)$-sürekli olmasıdır. Aynı zamanda [36] da, $D(\alpha,p)$-süreklilik tanımlanıp, α-sürekliliğin ayrışımı genelleştirilmiştir: $f : X \rightarrow Y$ nin α-sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f nin presürekli ve $D(\alpha,p)$-sürekli olmasıdır. Son olarak [6] da, bağıl süreklilik tanımlanmış ve sürekliliğin farklı bir ayrışımı elde edilmiştir: $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f nin zayıf sürekli ve bağıl sürekli olmasıdır.

Bu Tezin 3. Bölümünde ise β^*-küme ve β^*-süreklilik kavramlarını tanımlayıp, sürekliliğin yeni bir ayrışımını elde ettik: " $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f nin α-sürekli ve β^*-sürekli olmasıdır " özelliğini ispatladık.

4. Bölümde, zayıf β^*-küme ve zayıf β^*-süreklilik kavramlarını tanımlayıp, sürekliliğin yeni bir ayrışımını elde ettik: " $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f nin semi sürekli ve zayıf β^*-sürekli olmasıdır " özelliğini bulduk. Ayrıca $D(\alpha,s)$-küme ve $D(\alpha,s)$-süreklilik kavramlarını tanımlayıp, α-sürekliliğin yeni bir ayrışımını elde ettik: " $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun α-sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f nin semi sürekli ve $D(\alpha,s)$-sürekli olmasıdır " sonucunu bulduk.

Bu çalışmada, uzay olarak topolojik uzayları ve $f : X \rightarrow Y$ ile de X uzayından Y uzayı içine bir fonksiyonu göstereceğiz. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin kapanışını A^-, A kümesinin içini A° ve A kümesinin sınırını A^S ile göstereceğiz. Eğer $A = A^{-\circ}$ ise A kümesine regüler açık küme; $A = A^{\circ -}$ ise A kümesine regüler kapalı küme [8] denir. Eğer $A \subset A^{\circ - \circ}$ ($A \subset A^{-\circ}$, $A \subset A^{\circ -}$) ise A kümesine α-açık [28] (preaçık [25], semi açık [22]) denir. (X,τ) uzayındaki bütün α-açık (preaçık, semi açık) kümelerin ailesini, $\alpha(X)$ ($PO(X)$, $SO(X)$) ile göstereceğiz. Bir $x \in X$ noktasını içeren bütün α-açık (preaçık, semi açık) kümelerin ailesini de $\alpha(X,x)$ ($PO(X,x)$, $SO(X,x)$) ile göstereceğiz. (X,τ) uzayındaki bir α-açık (preaçık, semi açık) kümenin tümleyenine, α-kapalı [27] (prekapalı [25], semi kapalı [3]) küme denir. A kümesini kapsayan bütün α-kapalı (prekapalı, semi kapalı) kümelerin kesişimine, A kümesinin α-kapanışı [1] (prekapanışı [9], semi kapanışı [7]) denir ve $(A)_\alpha^-$ ($(A)_p^-$, $(A)_s^-$) ile gösterilir. Bir A kümesinin kapsadığı bütün α-açık (preaçık, semi açık) kümelerin birleşimine, A kümesinin α-içi [1] (preiçi [26], semi içi [7]) denir ve $(A)_\alpha^\circ$ ($(A)_p^\circ$, $(A)_s^\circ$) ile gösterilir.

2. SÜREKLİLİĞİN AYRIŞIMLARI HAKKINDA KISA BİLGİ

Bu bölümde, sürekliliğin ayrışımını teşkil eden bilinen bütün ayrışımları inceliyeceğiz. Sürekliliğin ayrışımını ilk defa, 1961 yılında N. Levine [21] vermiştir. Önce, N. Levine`nin bu ayrışımını inceliyelim.

2.1. N. Levine Anlamında Sürekliliğin Ayrışımı

2.1.1. Tanım. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu ve herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin. $f(x)$ noktasını içeren her $V \subset Y$ açık kümesi için $f(U) \subset V^-$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi varsa, f fonksiyonuna zayıf sürekli [21] denir.

2.1.1. Lemma.[10],[21] $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde aşağıdakiler eşdeğerdir.

ı) f fonksiyonu zayıf süreklidir;

ıı) Her $V \subset Y$ açık kümesi için $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^-))^\circ$;

ııı) Her $V \subset Y$ açık kümesi için $(f^{-1}(V))^- \subset f^{-1}(V^-)$.

İspat. (ı) $\Rightarrow$ (ıı). Her $V \subset Y$ açık kümesi ve bir $x \in f^{-1}(V)$ noktası verilsin. Buradan $f(x) \in V$ olur. f fonksiyonu zayıf sürekli olduğundan, $f(U) \subset V^-$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Dolayısıyla $x \in U \subset f^{-1}(V^-)$ olur. O halde $x \in (f^{-1}(V^-))^\circ$ dır. Böylece $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^-))^\circ$ olur.

(ıı) $\Rightarrow$ (ııı). Herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi verilsin. Buradan $Y-V^-$ kümesi Y de açık kümedir. (ıı) den, $X - f^{-1}(V^-) = f^{-1}(Y-V^-) \subset (f^{-1}((Y-V^-)^-))^\circ \subset (f^{-1}((Y-V)^-))^\circ = (f^{-1}(Y-V))^\circ = X - (f^{-1}(V))^-$ elde edilir. O halde $(f^{-1}(V))^- \subset f^{-1}(V^-)$ olur.

(ııı) $\Rightarrow$ (ı). $x \in X$ noktasını alalım. $f(x)$ noktasını içeren herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi verilsin. Bu takdirde $f(x) \notin (Y-V^-)^-$ ve $x \notin f^{-1}((Y-V^-)^-)$ olur. $Y-V^-$ kümesi, Y de açık olduğundan, (ııı) den, $(f^{-1}(Y-V^-))^- \subset f^{-1}((Y-V^-)^-)$ olur. Buradan $x \notin (f^{-1}(Y-V^-))^-$ elde edilir. Kapanış noktası tanımından, $U \cap (f^{-1}(Y-V^-)) = \emptyset$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Buradan $U \cap (X - f^{-1}(V^-)) = \emptyset$ olur. Dolayısıyla $U \subset f^{-1}(V^-)$ elde edilir. Böylece $f(U) \subset V^-$ olur. O halde f fonksiyonu zayıf süreklidir.

İspatsız olarak D. A. Rose [37] tarafından verilen aşağıdaki özelliği gerçekleyelim:

2.1.2. Lemma. $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun zayıf sürekli olması için gerek ve yeter şart her $V \in \beta$ için $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^{-}))^{\circ}$ olacak şekilde Y üzerindeki topolojinin bir β açık tabanı vardır.

İspat. $\Rightarrow$. 2.1.1. Lemmadan açıktır.

$\Leftarrow$. Her $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi verilsin. $V = \bigcup_{B \in \beta} B$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $f(x) \in B$ olacak şekilde bir $B \in \beta$ açık kümesi vardır. Hipotez gereğince, $x \in f^{-1}(B) \subset (f^{-1}(B^{-}))^{\circ}$ olur. Böylece $f^{-1}(V) =$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{B \in \beta} B\Big) = \bigcup_{B \in \beta} f^{-1}(B) \subset \bigcup_{B \in \beta} (f^{-1}(B^{-}))^{\circ} \subset \Big(\bigcup_{B \in \beta} (f^{-1}(B^{-}))\Big)^{\circ} = \Big(f^{-1}\Big(\bigcup_{B \in \beta} B^{-}\Big)\Big)^{\circ} =$$

$\Big(f^{-1}\Big(\Big(\bigcup_{B \in \beta} B\Big)^{-}\Big)\Big)^{\circ} = (f^{-1}(V^{-}))^{\circ}$ elde edilir. O halde 2.1.1. Lemma (ıı) gereğince, f fonksiyonu zayıf süreklidir.

2.1.3. Lemma.[21] Her sürekli fonksiyon zayıf süreklidir.

İspat. $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\upsilon)$ fonksiyonu sürekli olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin. f fonksiyonu sürekli olduğundan, $f(x)$ noktasını içeren her $V \subset Y$ açık kümesi için, $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Buradan $f(U) \subset V \subset V^{-}$ olur. O halde f fonksiyonu zayıf süreklidir.

2.1.1. Uyarı.[21] Zayıf sürekli bir fonksiyonun sürekli olması gerekmez.

2.1.1. Örnek.[30] $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{b\},\{c\},\{b,c\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{b,c,d\}\}$ topolojisi verilsin. $f : (X,\tau) \rightarrow (X,\tau)$ fonksiyonu $f(a)=c$, $f(b)=d$, $f(c)=b$, $f(d)=a$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu zayıf süreklidir, fakat sürekli değildir.

2.1.2. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Herhangi bir $x \in X$ noktasını içeren her $V \subset X$ açık kümesi için, $W^{-} \subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $W \subset X$ açık kümesi varsa, (X,τ) uzayına regüler (düzenli) uzay [20] denir.

2.1.4. Lemma.[21] (Y,υ) uzayı bir regüler uzay olsun. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun zayıf sürekli olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. 2.1.3. Lemmadan açıktır.

$\Leftarrow$. Her $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi verilsin. Y regüler uzay olduğundan, $f(x) \in W \subset W^- \subset V$ olacak şekilde bir $W \subset Y$ açık kümesi vardır. f fonksiyonu zayıf sürekli olduğundan, $f(U) \subset W^-$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Dolayısıyla $f(U) \subset V$ olur ki f fonksiyonu süreklidir.

2.1.3. Tanım. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Y deki her V açık kümesi için $f^{-1}(V^S)$ kümesi, X de kapalı ise f fonksiyonuna zayıf* sürekli [21] denir.

N. Levine [21] tarafından ispatsız verilen özelliği kısaca gösterelim:

2.1.5. Lemma. Her sürekli fonksiyon zayıf* süreklidir.

İspat. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu sürekli olsun. Herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesini alalım. Bu durumda $V^S = V^- \cap (Y-V)^-$ kümesi, Y de bir kapalı kümedir. f fonksiyonu sürekli olduğundan $f^{-1}(V^S)$ kümesi, X de kapalıdır. O halde f fonksiyonu zayıf* süreklidir.

2.1.2. Uyarı.[21] Zayıf* sürekli bir fonksiyonun sürekli olması gerekmez. 2.1.1. Örnek ve 2.1.2. Örnekten zayıf süreklilik kavramı, zayıf* süreklilik kavramından bağımsızdır.

2.1.2. Örnek.[30] $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ ve $\upsilon=P(X)$ topolojileri verilsin. $f : (X,\tau) \to (X,\upsilon)$ birim fonksiyonu zayıf* süreklidir, fakat zayıf sürekli değildir.

2.1.1. Teorem.[21] $f : (X,\tau) \to (X,\upsilon)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun zayıf sürekli ve zayıf* sürekli olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. 2.1.3. Lemma ve 2.1.5. Lemmadan açıktır.

$\Leftarrow$. f fonksiyonu zayıf sürekli ve zayıf* sürekli olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin. $f(x)$ noktasını içeren herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesini alalım. f fonksiyonu zayıf sürekli olduğundan, $f(U) \subset V^-$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. $V^S = V^- - V$ olduğundan, $f(x) \notin V^S$ olur. Dolayısıyla $x \notin f^{-1}(V^S)$ dır. Böylece $U - f^{-1}(V^S)$ kümesi, X de açıktır ve x i içerir. Şimdi $f(U - f^{-1}(V^S)) \subset V$ olduğunu göstermeliyiz. $z \in (U - f^{-1}(V^S))$ alalım. Buradan $z \in U$ olur. f fonksiyonu zayıf sürekli olduğundan, $f(z) \in V^-$ elde edilir. $z \notin f^{-1}(V^S)$ olduğundan, $f(z) \notin V^S = V^- - V$ olur. Böylece $f(z) \in V$ olur. O halde f fonksiyonu süreklidir.

2.2. N. Levine`nin Ayrışımının Bir Genelleştirilmesi

D. A. Rose [37], zayıf* sürekliliği, lokal zayıf* süreklilik olarak zayıflatarak, N. Levine`nin ayrışımını genelleştirdi.

2.2.1. Tanım. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Her $V \in \beta$ için $f^{-1}(V^S)$ kümesi, X de kapalı olacak şekilde Y üzerindeki topolojinin bir β açık tabanı varsa, f fonksiyonuna lokal zayıf* sürekli [37] denir.

2.2.1. Lemma.[37] Her zayıf* sürekli fonksiyon lokal zayıf* süreklidir.
İspat. 2.2.1. Tanımdan açıktır.

2.2.1. Uyarı.[37] Lokal zayıf* sürekli bir fonksiyonun zayıf* sürekli olması gerekmez.

2.2.1. Örnek.[37] R reel sayılar kümesi üzerinde alışılmış topoloji verilsin. Q rasyonel sayılar kümesi ve Z tamsayılar kümesi olmak üzere bir $g : Q \to Z$ birebir-örten fonksiyonu verilsin. $f : R \to R$ fonksiyonu her $x \in Q$ için $f(x)=g(x)$ ve her $x \in R-Q$ için $f(x)=x$ şeklinde tanımlansın. Açık aralıkların alışılmış tabanına göre, f fonksiyonunun lokal zayıf* sürekli olduğu açıktır. Diğer taraftan herhangi bir $V=\cup\{(2n, 2n+1) : n \in Z\}$ kümesi, R de açıktır. Fakat $f^{-1}(V^S) = f^{-1}(Z) = Q$ kümesi R de kapalı değildir. O halde f fonksiyonu zayıf* sürekli değildir.

2.2.2. Uyarı. 2.1.1. Örnek ve 2.1.2. Örnekten zayıf süreklilik kavramı, lokal zayıf* süreklilik kavramından bağımsızdır.

2.2.1. Teorem.[37] $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun zayıf sürekli ve lokal zayıf* sürekli olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. 2.1.1. Teorem ve 2.2.1. Lemmadan açıktır.

$\Leftarrow$. f fonksiyonu zayıf sürekli ve lokal zayıf* sürekli olsun. f fonksiyonu lokal zayıf* sürekli olduğundan, her $V \in \beta$ için $f^{-1}(V^S) = f^{-1}(V^-) - f^{-1}(V)$ kümesi, X de kapalı olacak şekilde Y üzerindeki topolojinin bir β açık tabanı vardır. Buradan her $V \in \beta$ için $f^{-1}(V) = f^{-1}(V^-) \cap (X - f^{-1}(V^S))$ olur. f fonksiyonu zayıf sürekli olduğundan, 2.1.2. Lemma gereğince, $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^-))^\circ$ olur. Dolayısıyla $f^{-1}(V) = (X - f^{-1}(V^S)) \cap (f^{-1}(V^-))^\circ$ elde edilir. Böylece $f^{-1}(V)$ kümesi, X de açıktır. O halde f fonksiyonu süreklidir.

2.3. α-Sürekliliğin Bir Ayrışımı

A. S. Mashhour ve ark [27], α-sürekliliğin bir ayrışımını oluşturdular.

2.3.1. Lemma.[28] Her açık küme α-açıktır.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ açık alt kümesi verilsin. A açık olduğundan $A = A^\circ$ dır. $A^\circ \subset A^{\circ-\circ}$ olduğundan, $A \subset A^{\circ-\circ}$ olur. O halde A kümesi bir α-açık kümedir.

2.3.1. Uyarı. α-açık bir kümenin açık olması gerekmez. Ayrıca her kapalı kümenin α-kapalı olduğu açıktır. Fakat α-kapalı bir kümenin kapalı olması gerekmez.

2.3.1. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ topolojisi verilsin. Bu takdirde $\alpha(X)=\{X,\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$ olduğu açıktır. Buradan $\{a,b\}$ kümesi bir α-açık kümedir, fakat $\{a,b\}$ kümesi açık bir küme değildir. Ayrıca $\{b\}$ kümesi bir α-kapalı kümedir, ancak $\{b\}$ kümesi kapalı bir küme değildir.

2.3.2. Lemma.[28] (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde $A \in \alpha(X)$ olması için gerek ve yeter şart her $B \in SO(X)$ için $A \cap B \in SO(X)$ olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. $A \in \alpha(X)$ olsun. Her $B \in SO(X)$, $x \in A \cap B$ noktası ve bir $U \in \tau$ $(x \in U)$ kümesi verilsin. $A \in \alpha(X)$ olduğundan, $A \subset A^{\circ-\circ}$ olur. Buradan $U \cap A^{\circ-\circ}$ kümesi açık bir kümedir ve x noktasını içerir. $B \in SO(X)$ olduğundan, $B \subset B^{\circ-}$ ve $x \in B^{\circ-}$ olur. Kapanış noktası tanımından, $(U \cap A^{\circ-\circ}) \cap B^\circ \neq \varnothing$ dır. $V=(U \cap A^{\circ-\circ}) \cap B^\circ$ diyelim. $V \subset A^{\circ-}$ olduğundan, $\varnothing \neq V \cap A^\circ = U \cap (A^\circ \cap B^\circ)$ elde edilir. Buradan $x \in (A^\circ \cap B^\circ)^-$ olur. O halde $A \cap B \subset (A^\circ \cap B^\circ)^- = (A \cap B)^{\circ-}$ olur. Böylece $A \cap B \in SO(X)$ dir.

$\Leftarrow$. Her $B\in SO(X)$ için $A\cap B\in SO(X)$ olsun. Bu takdirde $A\in SO(X)$ olur. A kümesinin α-açık olduğunu göstereceğiz. Varsayalım ki A kümesi α-açık olmasın. Bu takdirde bir $x\in A\cap(X-A^{\circ-\circ})$ elemanı vardır. $B = X-A^{\circ-}$ diyelim. Buradan $x\in B^{-}$ olur. Dolayısıyla $\{x\}\cup B\in SO(X)$ olur. Böylece $A\cap(\{x\}\cup B)\in SO(X)$ elde edilir. Diğer taraftan $A\cap(\{x\}\cup B)=\{x\}$ dir. O halde $\{x\}$ kümesi açıktır. Böylece $x\in A^{\circ-}$ iken $x\in A^{\circ-\circ}$ olur. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde $A\subset A^{\circ-\circ}$ olur. Böylece A kümesi α-açıktır.

2.3.3. Lemma.[28] (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde $\alpha(X)$ ailesi, X üzerinde bir topolojik yapıdır.

İspat. a_1] $X,\varnothing\in\alpha(X)$ olduğu açıktır.

a_2] $\forall i\in I$ için $A_i\in\alpha(X)$ olsun. Bu durumda her $i\in I$ için $A_i\subset A_i^{\circ-\circ}$ olur. Buradan

$\bigcup\limits_{i\in I} A_i\subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i^{\circ-\circ}\subset(\bigcup\limits_{i\in I} A_i^{\circ})^{-\circ}\subset(\bigcup\limits_{i\in I} A_i)^{\circ-\circ}$ olur. O halde $\bigcup\limits_{i\in I} A_i\in\alpha(X)$ dir.

a_3] A_1, $A_2\in\alpha(X)$ olsun. $A_1\in\alpha(X)$ olduğundan, 2.3.2. Lemma gereğince, her $B\in SO(X)$ için $A_1\cap B\in SO(X)$ olur. $A_2\in\alpha(X)$ olduğundan, yine 2.3.2. Lemmadan, $A_1\cap A_2\cap B\in SO(X)$ elde edilir. Böylece her $B\in SO(X)$ için $(A_1\cap A_2)\cap B\in SO(X)$ olduğundan, 2.3.2. Lemmadan, $A_1\cap A_2\in\alpha(X)$ olur. O halde $\alpha(X)$ ailesi, X üzerinde bir topolojidir.

[28] de yalnızca ifadesi verilen aşağıdaki özelliği gösterelim:

2.3.4. Lemma. Her α-açık küme semi açıktır.

İspat. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Herhangi bir $A\in\alpha(X)$ kümesi verilsin. A kümesi α-açık olduğundan $A\subset A^{\circ-\circ}$ olur. Buradan $A\subset A^{\circ-}$ olur. O halde A kümesi bir semi açık kümedir.

2.3.2. Uyarı. Semi açık bir kümenin α-açık olması gerekmez.

2.3.2. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ topolojisi verilsin. Bu takdirde $\alpha(X)=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ ve $SO(X)=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$ olur. Buradan $\{a,c\}$ kümesi bir semi açık kümedir, fakat α-açık değildir.

2.3.3. Uyarı. Semi açık kümeler ailesi, genelde bir topolojik yapı oluşturmaz: 2.3.2. Örnekteki (X,τ) uzayını ele alalım. $\{a,c\},\{b,c\}\in SO(X)$ için $\{a,c\}\cap\{b,c\} = \{c\}\notin SO(X)$ dir.

2.3.1. Tanım. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her $U\in\tau$ için $U^{-}\in\tau$ ise (X,τ) uzayına extremally bağlantısız uzay [28] denir.

2.3.5. Lemma.[28],[31] (X,τ) topolojik uzayı verilsin. $SO(X)$ ailesinin X üzerinde bir topoloji olması için gerek ve yeter şart X uzayının extremally bağlantısız olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. $SO(X)$ ailesi, X üzerinde bir topolojik yapı olsun. Varsayalım ki X uzayı extremally bağlantısız uzay olmasın. Bu takdirde $A^{-}\notin\tau$ olacak şekilde bir $A\in\tau$ vardır. $x\in A^{-} - A^{-o}$ alalım. $B=\{x\}\cup A^{-o}$ ve $C=X-A^{-o}$ diyelim. $B^{o-}\supset A^{-o-}=A^{-}\supset\{x\}$ ve $C^{o-}=X-A^{-o}=C\supset\{x\}$ elde edilir. Böylece $B,C\in SO(X)$ dir. $x\in A^{-} - A^{-o}$ olduğundan, $B\cap C=\{x\}$ kümesi açık değildir. Dolayısıyla semi açık küme de değildir. O halde $SO(X)$ ailesi, X üzerinde bir topolojik yapı olamaz. Bu ise bir çelişkidir. Böylece X uzayı extremally bağlantısızdır.

$\Leftarrow$. (X,τ) uzayı extremally bağlantısız olsun. a_1]. $X,\varnothing\in SO(X)$ olduğu açıktır.

a_2] $\forall i\in I$ için $A_i\in SO(X)$ olsun. Bu takdirde her $i\in I$ için $A_i\subset A_i^{o-}$ olur. Buradan

$\bigcup_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i^{o-} \subset (\bigcup_{i\in I} A_i^{o})^{-} \subset (\bigcup_{i\in I} A_i)^{o-}$ elde edilir. O halde $\bigcup_{i\in I} A_i\in SO(X)$ dir.

a_3] $A,B\in SO(X)$ olsun. X extremally bağlantısız olduğundan, $A^{o-}\in\tau$ olur. Buradan $A\cap B\subset A^{o-}\cap B^{o-}\subset(A^{o-}\cap B^{o})^{-}\subset(A\cap B)^{o-}$ elde edilir. Böylece $A\cap B\in SO(X)$ olur. O halde $SO(X)$ ailesi, X üzerinde bir topolojidir.

2.3.6. Lemma.[29] Her α-açık küme preaçıktır.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\in\alpha(X)$ kümesi verilsin. $A\in\alpha(X)$ olduğundan $A\subset A^{o-o}$ olur. Buradan $A\subset A^{-o}$ olur. O halde A kümesi bir preaçık kümedir.

2.3.4. Uyarı.[32] Preaçık bir kümenin α-açık olması gerekmez.

2.3.3. Örnek.[32] $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a,b\}\}$ topolojisi verilsin. Bu takdirde $\alpha(X)=\{X,\varnothing,\{a,b\}\}$ ve $PO(X)=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$ olur. $\{a\}$ kümesi preaçıktır, fakat semi açık değildir.

2.3.5. Uyarı.[32] Preaçık kümeler ailesi, genelde bir topolojik yapı oluşturmaz. (X,τ) uzayı extremally bağlantısız olsa bile $PO(X)$ ailesinin, X üzerinde bir topoloji olması gerekmez. Gerçekten 2.3.3. Örnekteki (X,τ) uzayı extremally bağlantısızdır ve $\{a,c\},\{b,c\}\in PO(X)$ için $\{a,c\}\cap\{b,c\}=\{c\}\notin PO(X)$ olur. 2.3.2. Örnekteki (X,τ) uzayını alalım. $\{a,c\}$ kümesi semi açıktır, fakat preaçık değildir. O halde preaçık küme kavramı, semi açık küme kavramından bağımsızdır.

2.3.7. Lemma.[29] (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde A kümesinin α-açık olması için gerek ve yeter şart A kümesinin semi açık ve preaçık olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. A kümesi bir α-açık küme olsun. 2.3.4. Lemmadan, A kümesi semi açıktır. 2.3.6. Lemmadan, A kümesi preaçıktır.

$\Leftarrow$. A kümesi semi açık ve preaçık bir küme olsun. A kümesi semi açık olduğundan, $A\subset A^{\circ -}$ olur. Buradan $A^{-}\subset A^{\circ --} = A^{\circ -}$ ve dolayısıyla $A^{-\circ}\subset A^{\circ -\circ}$ elde edilir. A kümesi preaçık olduğundan $A\subset A^{-\circ}$ olur. O halde A kümesi α-açıktır.

2.3.2. Tanım. $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Y deki her açık kümenin ters görüntüsü, X de α-açık ise f fonksiyonuna α-sürekli [27] denir.

[27] de yalnızca ifadesi verilen aşağıdaki özellikleri ispatlayalım:

2.3.8. Lemma. $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\upsilon)$ fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir.

ı) f fonksiyonu α-süreklidir;

ıı) Her $x\in X$ noktası ve f(x) noktasını içeren her $V\subset Y$ açık kümesi için $f(U)\subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U\subset X$ α-açık kümesi vardır;

ııı) Y deki her kapalı kümenin ters görüntüsü, X de α-kapalıdır.

İspat. (ı) $\Rightarrow$ (ıı). f fonksiyonu α-sürekli ve herhangi bir $x\in X$ noktası verilsin. f(x) noktasını içeren herhangi bir $V\subset Y$ açık kümesini alalım. f fonksiyonu α-sürekli olduğundan, 2.3.2. Tanım gereğince, $f^{-1}(V)$ kümesi bir α-açık kümedir ve $x\in f^{-1}(V)$ olur. $U = f^{-1}(V)$ diyelim. Buradan $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$ olur.

(ıı) $\Rightarrow$ (ııı). Herhangi bir $F\subset Y$ kapalı kümesi verilsin. Bu durumda Y-F kümesi, Y de açıktır. Her $x\in X$ noktası ve $f(x)\in Y\text{-}F$ olsun. (ıı) den, $f(U)\subset Y\text{-}F$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U\in\alpha(X)$ kümesi vardır. Buradan $x\in U \subset f^{-1}(Y\text{-}F) = X - f^{-1}(F)$ olur. Dolayısıyla $X - f^{-1}(F)$ kümesi α-açıktır. O halde $f^{-1}(F)$ kümesi X de α-kapalıdır.

(ııı) $\Rightarrow$ (ı). Herhangi bir $V\subset Y$ açık kümesi verilsin. Buradan Y-V kümesi, Y de kapalıdır. (ııı) den, $f^{-1}(Y\text{-}V)$ kümesi, X de α-kapalıdır. Dolayısıyla $f^{-1}(V)$ kümesi, X de α-açıktır. O halde f fonksiyonu α-süreklidir.

[27] de ifadesi verilen aşağıdaki özelliği gösterelim:

2.3.9. Lemma. Her sürekli fonksiyon α-süreklidir.

İspat. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu sürekli olsun. Herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi verilsin. f fonksiyonu sürekli olduğundan $f^{-1}(V)$ kümesi, X de açıktır. Her açık küme α-açık olduğundan $f^{-1}(V)$ kümesi, α-açıktır. O halde f fonksiyonu α-süreklidir.

2.3.6. Uyarı.[27] α-sürekli bir fonksiyonun sürekli olması gerekmez. 2.1.2. Örnek ve 2.3.4. Örneklerden α-süreklilik kavramı, zayıf* süreklilik ve lokal zayıf* süreklilik kavramlarından bağımsızdır.

2.3.4. Örnek.[27] $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ topolojisi verilsin. $f : (X,\tau) \to (X,\tau)$ fonksiyonu $f(a)=f(b)=a$, $f(c)=c$ ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu α-süreklidir, fakat lokal zayıf* sürekli değildir.

2.3.10. Lemma.[30] Her α-sürekli fonksiyon zayıf süreklidir.

İspat. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu α-sürekli olsun. $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi verilsin. f fonksiyonu α-sürekli olduğundan, 2.3.2. Tanımdan, $f^{-1}(V)$ kümesi X de α-açıktır ve 2.3.8. Lemma (ııı) gereğince, $f^{-1}(V^{-})$ kümesi X de α-kapalıdır. Dolayısıyla $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V))^{\circ-\circ} \subset (f^{-1}(V^{-}))^{-\circ-} \subset f^{-1}(V^{-})$ olur. $(f^{-1}(V))^{\circ-\circ} = U$ diyelim. U açıktır ve $x \in U$ dır. Böylece $U \subset f^{-1}(V^{-})$ olur. Dolayısıyla $f(U) \subset V^{-}$ dır. O halde f fonksiyonu zayıf süreklidir.

2.3.7. Uyarı.[30] Zayıf sürekli bir fonksiyonun α-sürekli olması gerekmez. 2.1.1. Örnekteki f fonksiyonu zayıf süreklidir, fakat α-sürekli değildir.

2.3.3. Tanım. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Y deki her açık kümenin ters görüntüsü, X de semi açık ise f fonksiyonuna semi sürekli [22] denir.

2.3.11. Lemma.[27] Her α-sürekli fonksiyon semi süreklidir.

İspat. 2.3.4. Lemmadan çıkar.

2.3.8. Uyarı.[30] Semi sürekli bir fonksiyonun α-sürekli olması gerekmez. 2.1.1. Örnek, 2.1.2. Örnek, 2.3.4. Örnek ve 2.3.5. Örneklerden semi süreklilik kavramı zayıf süreklilik, zayıf* süreklilik ve lokal zayıf* süreklilik kavramlarından bağımsızdır.

2.3.5. Örnek.[30] $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\emptyset,\{a\},\{b,c\}\}$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\rightarrow(X,\upsilon)$ birim fonksiyonu semi süreklidir, fakat zayıf sürekli değildir.

2.3.4. Tanım. $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Y deki her açık kümenin ters görüntüsü, X de preaçık ise f fonksiyonuna presürekli [25] denir.

[25] de ispatsız olarak verilen aşağıdaki özelliği gösterelim:

2.3.12. Lemma. $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon)$ fonksiyonunun presürekli olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $x\in X$ noktası verildiğinde, $f(x)$ noktasını içeren her $V\subset Y$ açık kümesi için $f(U)\subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U\subset X$ preaçık kümesinin varlığıdır.

İspat. $\Rightarrow$. f fonksiyonu presürekli olsun. Herhangi bir $x\in X$ noktasını alalım. $f(x)$ noktasını içeren herhangi bir $V\subset Y$ açık kümesi verilsin. f fonksiyonu presürekli olduğundan, 2.3.4. Tanımdan gereğince, $f^{-1}(V)$ kümesi preaçıktır ve $x\in f^{-1}(V)$ olur. $U=f^{-1}(V)$ diyelim. Buradan $f(U)=f(f^{-1}(V))\subset V$ olur.

$\Leftarrow$. Herhangi bir $x\in X$ noktası verilsin. $f(x)$ noktasını içeren her $V\subset Y$ açık kümesi için $f(U)\subset V$ olacak şekilde bir $U\subset X$ preaçık kümesi var olsun. Buradan $x\in U\subset f^{-1}(V)$ olur. Dolayısıyla $f^{-1}(V)$ kümesi preaçıktır. O halde f fonksiyonu presüreklidir.

2.3.13. Lemma.[27] Her α-sürekli fonksiyon presüreklidir.

İspat. 2.3.6. Lemmadan çıkar.

2.3.9. Uyarı.[30] Presürekli bir fonksiyonun α-sürekli olması gerekmez. 2.1.1. Örnek, 2.1.2. Örnek, 2.3.4. Örnek, 2.3.5. Örnek ve 2.3.6. Örneklerden presüreklilik kavramı, zayıf süreklilik, semi süreklilik, zayıf* süreklilik ve lokal zayıf* süreklilik kavramlarından bağımsızdır.

2.3.6. Örnek.[30] $f:(R,\{R,\emptyset\})\rightarrow(R,P(R))$ birim fonksiyonu presüreklidir, fakat semi sürekli ve zayıf sürekli değildir.

2.3.5. Tanım. f : $(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu ve herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin. f(x) noktasının her $V \subset Y$ açık komşuluğu için $(f^{-1}(V))^-$ kümesi, x noktasının bir komşuluğu ise f fonksiyonuna Husain anlamında hemen hemen sürekli [14] denir.

2.3.10. Uyarı.[27] Presüreklilik ile Husain anlamında hemen hemen süreklilik çakışmaktadır.

2.3.11. Uyarı.[30] 2.3.5. Örnekten (2.3.6. Örnekten), f : $(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu semi sürekli (presürekli) ve Y regüler uzay ise f fonksiyonu sürekli değildir.

2.3.1. Sonuç.[27] f : $(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu α-sürekli ve Y regüler uzay ise f fonksiyonu süreklidir.

İspat. 2.1.4. Lemmanın sonucudur.

2.3.1. Teorem.[27] f : $(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun α-sürekli olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun semi sürekli ve presürekli olmasıdır.

İspat. 2.3.7. Lemmadan çıkar.

2.3.2. Sonuç.[34] f : $(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu semi sürekli ve presürekli ise f fonksiyonu zayıf süreklidir.

İspat. 2.3.1. Teoremin sonucudur.

2.4. N. Levine`nin Ayrışımının Diğer Bir Genelleştirilmesi

T. Noiri [30], zayıf α-sürekliliği tanımlayıp inceledi. D. A. Rose [38], bu süreklilik çeşitiyle birlikte [37] deki sürekliliğin ayrışımının bir genelleştirmesini elde etti.

2.4.1. Tanım. f : $(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu ve herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin. f(x) noktasını içeren her $V \subset Y$ açık kümesi için $f(U) \subset V^-$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ α-açık kümesi varsa f fonksiyonuna zayıf α-sürekli [30] denir.

2.4.1. Lemma.[30] $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonunun zayıf α-sürekli olması için gerek ve yeter şart $f:(X,\alpha(X))\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonunun zayıf sürekli olmasıdır.

İspat. 2.4.1. Tanımdan açıktır.

2.4.2. Lemma.[30] $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde aşağıdakiler eşdeğerdir.

ı) f fonksiyonu zayıf α-süreklidir;

ıı) Her $V\subset Y$ açık kümesi için $f^{-1}(V)\subset(f^{-1}(V^{-}))^{\circ-\circ}$;

ııı) Her $V\subset Y$ açık kümesi için $(f^{-1}(V))^{-\circ-}\subset f^{-1}(V^{-})$.

İspat. 2.4.1. Tanım ve 2.1.1. Lemmadan açıktır.

2.4.3. Lemma.[30] Her zayıf sürekli fonksiyon zayıf α-süreklidir.

İspat. 2.3.1. Lemma ve 2.4.1. Tanımdan çıkar.

2.4.1. Uyarı.[30] Zayıf α-sürekli bir fonksiyonun zayıf sürekli olması gerekmez. 2.1.2. Örnek, 2.3.5. Örnek, 2.3.6. Örnek ve 2.4.1. Örneklerden zayıf α-süreklilik kavramı, zayıf* süreklilik, lokal zayıf* süreklilik, semi süreklilik ve presüreklilik kavramlarından bağımsızdır.

2.4.1. Örnek.[30] $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{c\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\to(X,\upsilon)$ birim fonksiyonu zayıf α-süreklidir, fakat zayıf sürekli, presürekli, semi sürekli ve lokal zayıf* sürekli değildir.

2.4.4. Lemma.[30] $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu zayıf α-sürekli ve Y regüler uzay ise f fonksiyonu süreklidir.

İspat. Herhangi bir $x\in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren herhangi bir $V\subset Y$ açık kümesi verilsin. (Y,υ) regüler uzay olduğundan, $f(x)\in W\subset W^{-}\subset V$ olacak şekilde bir $W\subset Y$ açık kümesi vardır. f fonksiyonu zayıf α-sürekli olduğundan, $f(U)\subset W^{-}$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U\subset X$ α-açık kümesi vardır. Buradan $f(U)\subset V$ elde edilir. 2.3.8. Lemmadan, f fonksiyonu α-süreklidir. O halde 2.3.1. Sonuç gereğince, f fonksiyonu süreklidir.

2.4.5. Lemma.[38] $f:(X,\alpha(X))\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu takdirde $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu zayıf süreklidir.

İspat. 2.3.10. Lemma ve 2.4.1. Lemmadan açıktır.

2.4.1. Teorem.[38] $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun zayıf α-sürekli ve lokal zayıf* sürekli olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. 2.2.1. Teorem ve 2.4.3. Lemmadan çıkar.

$\Leftarrow$. f fonksiyonu zayıf α-sürekli ve lokal zayıf* sürekli olsun. f fonksiyonu lokal zayıf* sürekli olduğundan, her $V \in \beta$ için $f^{-1}(V^S)$ kümesi X de kapalı olacak şekilde Y üzerindeki topolojinin bir β açık tabanı vardır. 2.4.1. Lemmadan, $f : (X,\alpha(X)) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu zayıf sürekli ve lokal zayıf* süreklidir ve 2.2.1. Teorem gereğince, süreklidir. 2.4.5. Lemma gereğince, $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu zayıf süreklidir. O halde $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu zayıf sürekli ve lokal zayıf* sürekli olduğundan, 2.2.1. Teorem gereğince, $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu süreklidir.

2.4.6. Lemma.[30] $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu zayıf α-sürekli ve presürekli ise f fonksiyonu zayıf süreklidir.

İspat. Herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi verilsin. f fonksiyonu zayıf α-sürekli olduğundan, 2.4.2. Lemmadan $(f^{-1}(V))^{-\circ-} \subset f^{-1}(V^-)$ olur. f fonksiyonu presürekli olduğundan, $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V))^{-\circ}$ ve dolayısıyla $((f^{-1}(V))^- \subset f^{-1}(V^-)$ elde edilir. 2.1.1. Lemma (ııı) gereğince, f fonksiyonu zayıf süreklidir.

2.4.7. Lemma.[17],[19] (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde aşağıdakiler vardır:

ı) $(A)_S^\circ = A \cap A^{\circ-}$

ıı) $(A)_S^- = A \cup A^{-\circ}$

İspat. (ı). $(A)_S^\circ$ kümesi semi açık olduğundan, $(A)_S^\circ \subset ((A)_S^\circ)^{\circ-} \subset A^{\circ-}$ olur. Böylece $(A)_S^\circ \subset A \cap A^{\circ-}$ olur. Diğer taraftan, $A^\circ \subset A \cap A^{\circ-} \subset A^{\circ-}$ olduğu açıktır. Buradan $A \cap A^{\circ-}$ kümesi semi açık bir kümedir. Dolayısıyla $A \cap A^{\circ-} \subset (A)_S^\circ$ elde edilir. O halde $(A)_S^\circ = A \cap A^{\circ-}$ olur.

(ıı). $(A)_S^-$ kümesi semi kapalı olduğundan, $((A)_S^-)^{-\circ} \subset (A)_S^-$ olur. Dolayısıyla $A^{-\circ} \subset (A)_S^-$ elde edilir. Buradan $A \cup A^{-\circ} \subset (A)_S^-$ olur. Şimdi $(A)_S^- \subset A \cup A^{-\circ}$ olduğunu göstereceğiz. $A \subset A^-$ ve $A^{-\circ} \subset A^-$ olduğundan $A \cup A^{-\circ} \subset A^-$ olur. Buradan $(A \cup A^{-\circ})^{-\circ} \subset A^{-\circ} \subset A \cup A^{-\circ}$ olur. Böylece $A \cup A^{-\circ}$ kümesi semi kapalıdır. O halde $(A)_S^- \subset A \cup A^{-\circ}$ elde edilir. Böylece $(A)_S^- = A \cup A^{-\circ}$ olur.

2.4.2. Tanım. Bir X uzayının A alt kümesi verilsin. $U \subset A \subset (U)_S^-$ olacak şekilde bir U açık kümesi varsa, A kümesine feebly açık [23] denir.

2.4.8. Lemma.[17] (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin feebly açık olması için gerek ve yeter şart A nın α-açık olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. A kümesi feebly açık ise $U \subset A \subset (U)_S^-$ olacak şekilde bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. 2.4.7. Lemmadan, $(U)_S^- = U \cup U^{-\circ} = U^{-\circ}$ olur. Buradan $U \subset A \subset U^{-\circ}$ elde edilir. Dolayısıyla $A^{\circ-\circ} = U^{-\circ}$ olur. Böylece $A \subset A^{\circ-\circ}$ elde edilir. O halde A kümesi α-açıktır.

$\Leftarrow$. $A \in \alpha(X)$ ise $A^\circ \subset A \subset A^{\circ-\circ}$ olur. $U = A^\circ$ diyelim. Buradan $U \subset A \subset U^{-\circ}$ olur. 2.4.7. Lemmadan, $U \subset A \subset (U)_S^-$ elde edilir. Böylece A kümesi feebly açıktır.

[1] de yalnızca ifadesi verilen aşağıdaki özellikleri kısaca ispatlayalım:

2.4.9. Lemma. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde aşağıdakiler vardır:

ı) $(A)_\alpha^\circ = A \cap A^{\circ-\circ}$

ıı) $(A)_\alpha^- = A \cup A^{-\circ-}$

İspat. (ı). $(A)_\alpha^\circ$ kümesi α-açık olduğundan, $(A)_\alpha^\circ \subset ((A)_\alpha^\circ)^{\circ-\circ} \subset A^{\circ-\circ}$ olur. Buradan $(A)_\alpha^\circ \subset A \cap A^{\circ-\circ}$ olur. Diğer taraftan, $A^\circ \subset A \cap A^{\circ-\circ} \subset A^{\circ-\circ}$ olur. $A^\circ = U$ diyelim. Buradan $U \subset A \cap A^{\circ-\circ} \subset U^{-\circ}$ elde edilir. U açık olduğundan, 2.4.8. Lemma gereğince, $A \cap A^{\circ-\circ}$ kümesi α-açık bir kümedir. Dolayısıyla $A \cap A^{\circ-\circ} \subset (A)_\alpha^\circ$ olur. O halde $(A)_\alpha^\circ = A \cap A^{\circ-\circ}$ dir.

(ıı). $(A)_\alpha^-$ kümesi X de α-kapalı olduğundan, $((A)_\alpha^-)^{-\circ-} \subset (A)_\alpha^-$ olur. Buradan $A^{-\circ-} \subset (A)_\alpha^-$ olur. Böylece $A \cup A^{-\circ-} \subset (A)_\alpha^-$ olur. Şimdi $(A)_\alpha^- \subset A \cup A^{-\circ-}$ olduğunu göstereceğiz. $A \subset A^-$ ve $A^{-\circ-} \subset A^-$ olduğundan, $A \cup A^{-\circ-} \subset A^-$ olur. Buradan $(A \cup A^{-\circ-})^{-\circ-} \subset A^{-\circ-} \subset A \cup A^{-\circ-}$ elde edilir. Böylece $A \cup A^{-\circ-}$ kümesi X de α-kapalıdır. O halde $(A)_\alpha^- \subset A \cup A^{-\circ-}$ dır. Böylece $(A)_\alpha^- = A \cup A^{-\circ-}$ olur.

2.4.10. Lemma.[2] (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde aşağıdakiler vardır:

ı) $(A)_p^\circ = A \cap A^{-\circ}$

ıı) $(A)_p^- = A \cup A^{\circ-}$

İspat. 2.4.7. Lemma ve 2.4.9. Lemmadan çıkar.

2.4.3. Tanım. Bir $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Her $V\subset Y$ açık kümesi için $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^-))^{-\circ}$ ise f fonksiyonuna hemen hemen zayıf sürekli [16] denir.

2.4.11. Lemma.[35] $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir.

ı) f fonksiyonu hemen hemen zayıf süreklidir;

ıı) Her $V\subset Y$ açık kümesi için $(f^{-1}(V))^{\circ -} \subset f^{-1}(V^-)$;

ııı) Her $V\subset Y$ açık kümesi için $(f^{-1}(V))_p^{-} \subset f^{-1}(V^-)$;

ıv) Her $V\subset Y$ açık kümesi için $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^-))_p^{\circ}$;

v) Her $x\in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren her $V\subset Y$ açık kümesi için $f(U)\subset V^-$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U\subset X$ preaçık kümesi vardır.

İspat. (ı) $\Rightarrow$ (ıı). Herhangi bir $V\subset Y$ açık kümesi verilsin. Buradan Y-V^- kümesi, Y de açıktır. f fonksiyonu hemen hemen zayıf sürekli olduğundan, $X - f^{-1}(V^-) = f^{-1}(Y-V^-) \subset (f^{-1}((Y-V^-)^-))^{-\circ} = (f^{-1}(Y-V^{-\circ}))^{-\circ} \subset (f^{-1}(Y-V))^{-\circ} = X - (f^{-1}(V))^{\circ -}$ elde edilir. O halde $(f^{-1}(V))^{\circ -} \subset f^{-1}(V^-)$ olur.

(ıı) $\Rightarrow$ (ııı). Herhangi bir $V\subset Y$ açık kümesi verilsin. (ıı) den, 2.4.10. Lemma (ıı) gereğince, $(f^{-1}(V))_p^{-} \subset f^{-1}(V^-)$ elde edilir.

(ııı) $\Rightarrow$ (ıv). Herhangi bir $V\subset Y$ açık kümesi verilsin. Buradan Y-V^- kümesi, Y de açıktır. (ııı) den, $X - (f^{-1}(V^-))_p^{\circ} = (f^{-1}(Y-V^-))_p^{-} \subset f^{-1}((Y-V^-)^-) = f^{-1}(Y-V^{-\circ}) = X - f^{-1}(V^{-\circ}) \subset X - f^{-1}(V)$ elde edilir. Böylece $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^-))_p^{\circ}$ olur.

(ıv) $\Rightarrow$ (v). $x\in X$ noktasını alalım. $f(x)$ noktasını içeren herhangi bir $V\subset Y$ açık kümesi verilsin. (ıv) den, $x\in f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^-))_p^{\circ}$ olur. $U = (f^{-1}(V^-))_p^{\circ}$ diyelim. Buradan $U\in PO(X,x)$ ve $f^{-1}(U) \subset V^-$ elde edilir.

(v) $\Rightarrow$ (ı). Herhangi bir $V\subset Y$ açık kümesi ve bir $x\in f^{-1}(V)$ noktası verilsin. (v) den, $f(U) \subset V^-$ olacak şekilde bir $U\in PO(X,x)$ vardır. Dolayısıyla $x\in U \subset f^{-1}(V^-)$ elde edilir. Buradan $x\in (f^{-1}(V^-))^{-\circ}$ olur. Böylece $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^-))^{-\circ}$ olur. O halde f fonksiyonu hemen hemen zayıf süreklidir.

[30] da ispatsız olarak verilen aşağıdaki özelliği gösterelim:

2.4.12. Lemma. Her zayıf α-sürekli fonksiyon hemen hemen zayıf süreklidir.

İspat. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu zayıf α-sürekli olsun. 2.4.1. Tanımdan, her $x\in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren her $V\subset Y$ açık kümesi için $f(U)\subset V^-$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U\subset X$ α-açık kümesi vardır. Her α-açık küme preaçık olduğundan, U kümesi bir preaçık kümedir. O halde f fonksiyonu hemen hemen zayıf süreklidir.

2.4.2. Uyarı.[30] Hemen hemen zayıf sürekli bir fonksiyonun zayıf α-sürekli olması gerekmez. 2.3.6. Örnekteki f fonksiyonu hemen hemen zayıf süreklidir, fakat zayıf α-sürekli değildir.

[30] da yalnızca ifadesi verilen aşağıdaki özelliği ispatlayalım:

2.4.13. Lemma. Her presürekli fonksiyon hemen hemen zayıf süreklidir.

İspat. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu presürekli olsun. Her $V\subset Y$ açık kümesi için $f^{-1}(V)\subset(f^{-1}(V))^{-\circ}$ olur. $(f^{-1}(V))^{-\circ}\subset(f^{-1}(V^{-}))^{-\circ}$ olduğundan, $f^{-1}(V)\subset(f^{-1}(V^{-}))^{-\circ}$ olur. O halde f fonksiyonu hemen hemen zayıf süreklidir.

2.4.3. Uyarı.[30] Hemen hemen zayıf sürekli bir fonksiyonun presürekli olması gerekmez. 2.4.1. Örnekteki f fonksiyonu hemen hemen zayıf süreklidir, fakat presürekli değildir. 2.3.5. Örnek ve 2.4.1. Örneklerden hemen hemen zayıf süreklilik kavramı, semi süreklilik, zayıf* süreklilik ve lokal zayıf* süreklilik kavramlarından bağımsızdır.

2.4.14. Lemma.[35] (X,τ) topolojik uzayı ve $A,B\subset X$ alt kümeleri verilsin. Eğer A kümesi α-açık ve B kümesi preaçık ise $A\cap B$ kümesi preaçıktır.

İspat. Eğer $U\subset X$ alt kümesi açık bir küme ise her $A\subset X$ için $U\cap A^{-}\subset(U\cap A)^{-}$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $A\cap B\subset A^{\circ-\circ}\cap B^{-\circ}\subset(A^{\circ-}\cap B^{-\circ})^{\circ}\subset(A^{\circ}\cap B^{-})^{-\circ}\subset(A\cap B)^{-\circ}$ olur. O halde $A\cap B\in PO(X)$ dir.

2.4.15. Lemma.[35] $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu hemen hemen zayıf sürekli ve her $V\in\beta$ için $f^{-1}(V^{S})$ kümesi X de α-kapalı olacak şekilde Y üzerindeki topolojinin bir β açık tabanı varsa bu takdirde f fonksiyonu presüreklidir.

İspat. $x\in X$ noktasını alalım. f(x) noktasını içeren herhangi bir $W\subset Y$ açık kümesi verilsin. Buradan $f(x)\in V\subset W$ olacak şekilde bir $V\in\beta$ vardır. f fonksiyonu hemen hemen zayıf sürekli olduğundan, 2.4.11. Lemma (v) gereğince, $f(U)\subset V^{-}$ olacak şekilde bir $U\in PO(X,x)$ kümesi vardır. Hipotezden, $X-f^{-1}(V^{S})$ kümesi, X de bir α-açık kümedir. $U_1=U\cap(X-f^{-1}(V^{S}))$ diyelim. $f(x)\notin V^{S}$ olduğundan, 2.4.14. Lemma gereğince, $U_1 \in PO(X,x)$ olur. Buradan $f(U_1) \subset f(U) \cap (Y-V^s) \subset V^- \cap (Y-V^s) = V \subset W$ elde edilir. O halde 2.3.12. Lemmadan, f fonksiyonu presüreklidir.

2.4.1. Sonuç.[35] $f : X \to Y$ fonksiyonu hemen hemen zayıf sürekli ve lokal zayıf* sürekli ise, f fonksiyonu presüreklidir.

İspat. Her kapalı küme α-kapalı olduğundan, 2.4.15. Lemmadan çıkar.

2.4.2. Sonuç.[35] $f : X \to Y$ fonksiyonu hemen hemen zayıf sürekli ve zayıf* sürekli ise, f fonksiyonu presüreklidir.

İspat. 2.2.1. Lemma ve 2.4.1. Sonuçtan açıktır.

2.5. J. Tong Anlamında Sürekliliğin Ayrışımı

1986 yılında J. Tong [39], A-küme ve A-süreklilik kavramlarını tanımlayıp, sürekliliğin farklı bir ayrışımını ortaya koymuştur.

2.5.1. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. U açık küme ve V regüler açık küme olmak üzere $A = U - V$ ise A kümesine, A-küme [39] denir. (X,τ) uzayındaki bütün A-kümelerin ailesi $A(X)$ ile gösterilir.

2.5.1. Lemma.[39] (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin bir A-küme olması için gerek ve yeter şart U açık küme ve V regüler kapalı küme olmak üzere $A = U \cap V$ olmasıdır.

İspat. 2.5.1. Tanımdan çıkar.

2.5.2. Lemma.[39] Her açık küme bir A-kümedir.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer A kümesi açık ise, $A = A \cap X$ ve $X^{-\circ} = X^\circ = X$ olduğundan, A kümesi bir A-kümedir.

2.5.3. Lemma.[39] Her A-küme bir semi açık kümedir.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. $A \in A(X)$ ise 2.5.1. Lemmadan, U açık küme ve V regüler kapalı küme olmak üzere $A = U \cap V$ olur. Buradan $U \cap V^\circ \subset A^\circ$ olur. Diğer taraftan, $A^\circ \subset A \subset V$ olduğundan, $A^\circ = A^{\circ\circ} \subset V^\circ$ olur. $A^\circ \subset A \subset U$ olduğundan, $A^\circ \subset U \cap V^\circ$ elde edilir. O halde $A^\circ = U \cap V^\circ$ dır. Şimdi $A \subset A^{\circ -}$

olduğunu göstermeliyiz. $V=V^{\circ-}$ olduğundan, $A = U\cap V = U\cap V^{\circ-} \subset (U\cap V^{\circ})^{-} = A^{\circ-}$ olur. Böylece A kümesi bir semi açık kümedir.

2.5.1. Uyarı.[39] Semi açık bir kümenin A-küme olması gerekmez ve bir A-kümenin de açık bir küme olması gerekmez. A-küme kavramı, α-açık ve preaçık küme kavramlarından bağımsızdır.

2.5.1. Örnek.[39] $X=\{a,b,c\}$ üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ topolojisi olsun. $\{a,b\}$ kümesi, α-açıktır. Fakat $\{a,b\}$ kümesi bir A-küme değildir, çünkü $\{a,b\} \neq X$, $\{a,b\} \neq \{a\}$, $\{a,b\} \neq \varnothing$ ve $\{a,b\} \neq X-\{a\}$ dır.

2.5.2. Örnek. $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ topolojisi verilsin. $\{a,d\} = X - \{b,c\}$ ve $\{b,c\}$ kümesi regüler açık olduğundan, $\{a,d\}$ kümesi bir A-kümedir. Fakat $\{a,d\}$ kümesi preaçık değildir.

2.5.4. Lemma.[39] (X,τ) uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde A kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart A kümesinin α-açık ve A-küme olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. A kümesi açık olsun. 2.3.1. Lemmadan, A kümesi α-açıktır. 2.5.2. Lemmadan, A kümesi bir A-kümedir.

$\Leftarrow$. A kümesi hem α-açık hem de bir A-küme olsun. Bu takdirde U açık küme ve V regüler kapalı küme olmak üzere $A = U\cap V$ olur. Buradan A kümesi α-açık olduğundan, $U\cap V \subset (U\cap V)^{\circ-\circ} = (U^{\circ}\cap V^{\circ})^{-\circ} = (U\cap V^{\circ})^{-\circ} \subset (U^{-}\cap V^{\circ-})^{\circ} = (U^{-}\cap V)^{\circ} = U^{-\circ}\cap V^{\circ}$ elde edilir. $U\subset U^{-\circ}$ olduğundan, $U\cap V = (U\cap V)\cap U \subset U^{-\circ}\cap V^{\circ}\cap U = U\cap V^{\circ}$ olur. Diğer taraftan, $U\cap V^{\circ} \subset U\cap V$ olduğundan, $U\cap V = U\cap V^{\circ}$ olur. O halde $A = U\cap V$ kümesi açıktır.

2.5.2. Tanım. $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Y deki her açık kümenin ters görüntüsü, X de bir A-küme ise f fonksiyonuna A-sürekli [39] denir.

2.5.5. Lemma.[39] Her sürekli fonksiyon A-süreklidir.

İspat. 2.5.2. Lemmadan açıktır.

2.5.6. Lemma.[39] Her A-sürekli fonksiyon semi süreklidir.

İspat. 2.5.3. Lemmadan çıkar.

2.5.2. Uyarı. Semi sürekli bir fonksiyonun A-sürekli olması gerekmez. A-sürekli bir fonksiyonun da sürekli olması gerekmez. 2.1.2. Örnek, 2.3.4. Örnek, 2.5.3. Örnek ve 2.5.4. Örneklerden A-süreklilik kavramı, α-süreklilik, presüreklilik, zayıf süreklilik, zayıf α-sürekli, hemen hemen zayıf süreklilik, zayıf* süreklilik ve lokal zayıf* süreklilik kavramlarından bağımsızdır.

2.5.3. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\to(X,\upsilon)$ fonksiyonu $f(a)=a$, $f(b)=f(c)=c$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu A-süreklidir, fakat hemen hemen zayıf sürekli değildir.

2.5.4. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\emptyset,\{c\}\}$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\to(X,\upsilon)$ fonksiyonu $f(a)=a$, $f(b)=f(c)=c$ ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu A-süreklidir, fakat lokal zayıf* sürekli değildir.

2.5.1. Teorem.[39] $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin α-sürekli ve A-sürekli olmasıdır.

İspat. 2.5.4. Lemmadan çıkar.

2.5.7. Lemma.[39] $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu A-sürekli, birebir ve örten olsun. Eğer Y uzayı T_0-uzayı ise X uzayı da bir T_0-uzayıdır.

İspat. $x,y\in X$ $(x\neq y)$ olsun. f fonksiyonu birebir olduğundan, $f(x)\neq f(y)\in Y$ olur. (Y,υ) uzayı T_0-uzayı olduğundan, $\exists V\in\upsilon$ $(f(x)\in V)$ $\ni$ $f(y)\notin V$ dir. $A=f^{-1}(V)$ diyelim. f fonksiyonu A-sürekli olduğundan, $A=U\cap F$ $\ni$ U açık bir küme, F regüler kapalı bir küme ve $x\in A$, $y\notin A$ olur. $y\notin A$ için iki durum vardır; ya $y\notin U$ ya da $y\notin F$ dir. Eğer $y\notin U$ ise $x\in U$ olur. Eğer $y\notin F$ ise $y\in X-F$ ve $x\in F$ olur. Buradan X-F açıktır ve $x\notin X-F$ olur. Dolayısıyla X uzayı bir T_0-uzayıdır.

[12] de yalnızca ifadesi verilen aşağıdaki özelliği gösterelim:

2.5.8. Lemma. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart A nın preaçık ve A-küme olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. A kümesi açık olsun. 2.3.1. Lemma ve 2.3.6. Lemmadan, A kümesi preaçıktır. Diğer taraftan, 2.5.2. Lemmadan, A açık kümesi bir A-kümedir.

$\Leftarrow$. A kümesi, preaçık ve A-küme olsun. Her A-küme bir semi açık küme olduğundan, 2.5.3. Lemma gereğince, A kümesi bir semi açık kümedir. A preaçık olduğundan, 2.3.7. Lemmadan, A kümesi α-açıktır. A kümesi α-açık olduğundan, 2.5.4 Lemma gereğince, A kümesi açıktır.

2.5.2. Teorem.[12] $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin presürekli ve A-sürekli olmasıdır.

İspat. 2.5.8. Lemmadan çıkar.

2.6. M. Ganster ve I. L. Reilly`nin Ayrışımları

N. Bourbaki [4], lokal kapalı küme kavramını verdi. M. Ganster ve I. L. Reilly, [11] de LC-sürekliliği tanımlayıp, [12] de A-sürekliliğin bir ayrışımını verdiler ve J. Tong`un ayrışımını genelleştirdiler.

2.6.1. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. U açık küme ve V kapalı küme olmak üzere $A = U \cap V$ ise A kümesine, lokal kapalı küme [4] denir. (X,τ) uzayındaki bütün lokal kapalı kümelerin ailesi LC(X) ile gösterilir [11].

2.6.1. Lemma.[4] (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin lokal kapalı olması için gerek ve yeter şart $A = U \cap A^-$ olacak şekilde bir $U \subset X$ açık kümesi vardır.

İspat. $\Rightarrow$. A kümesi X de lokal kapalı olsun. Bu durumda $A=U \cap V \ni$ U açık ve V kapalıdır. $A \subset V$ olduğundan, $A^- \subset V^- = V$ olur. Dolayısıyla $A \subset U \cap A^- \subset U \cap V = A$ elde edilir. Böylece $A = U \cap A^-$ olur.

$\Leftarrow$. $A = U \cap A^- \ni$ U açık olsun. A^- kapalı bir küme olduğundan, A kümesi bir lokal kapalı kümedir.

2.6.2. Lemma.[12] Her A-küme bir lokal kapalı kümedir.

İspat. (X,τ) uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi bir A-küme olsun. Bu takdirde U açık küme ve V regüler kapalı küme olmak üzere $A=U \cap V$ dir. Her regüler kapalı küme bir kapalı küme olduğundan, A kümesi lokal kapalıdır.

2.6.1. Uyarı. Lokal kapalı bir kümeninin A-küme olması gerekmez. Ayrıca lokal kapalı küme kavramı, α-açık, semi açık ve preaçık küme kavramlarından bağımsızdır.

2.6.1. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ topolojisi verilsin. $\{b,c\}$ kümesi lokal kapalıdır, çünkü $\{b,c\}=\{b,c\}\cap X$ ve $\{b,c\}^{-} = \{b,c\}$ dir. Fakat $\{b,c\}$ kümesi preaçık ve semi açık değildir. Diğer taraftan, $\{a,c\}$ kümesi bir α-açıktır, çünkü $\{a,c\}\subset\{a,c\}^{\circ-\circ} = \{a\}^{-\circ} = X^{\circ} = X$ dir. Fakat $\{a,c\}$ kümesi lokal kapalı değildir, çünkü $\{a,c\}^{-} = X \neq \{a,c\}$ dır.

2.6.3. Lemma.[18] Her regüler açık küme lokal kapalıdır.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer A kümesi regüler açık bir küme ise $A = A^{-\circ}$ olur. $A = A\cap A^{-}$ olduğundan, $U = A^{-\circ}$ olmak üzere $A = A^{-\circ}\cap A^{-} = U\cap A^{-}$ olur. Böylece A kümesi lokal kapalıdır.

2.6.2. Uyarı.[18] Lokal kapalı bir kümenin regüler açık olması gerekmez.

2.6.2. Örnek.[18] $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\}\}$ topolojisi verilsin. $\{c\}$ kümesi lokal kapalıdır, fakat $\{c\}$ kümesi regüler açık değildir, çünkü $\{c\}^{-\circ} = \{c\}^{\circ} = \varnothing \neq \{c\}$ dir.

[18] de ispatsız olarak verilen aşağıdaki özelliği gösterelim:

2.6.4. Lemma. A lokal kapalı küme ve B açık (kapalı) küme ise $A\cap B$ kümesi lokal kapalıdır.

İspat. (X,τ) uzayı ve $A,B\subset X$ alt kümeleri verilsin. $A\in LC(X)$ ve B açık olsun. A kümesi lokal kapalı olduğundan, $U\subset X$ alt kümesi açık ve $V\subset X$ alt kümesi kapalı olmak üzere $A = U\cap V$ dir. B kümesi X de açık olduğundan, $A\cap B = U\cap V\cap B = U\cap B\cap V$ olur. $U\cap B$ kümesi X de açık olduğundan, $A\cap B$ kümesi lokal kapalıdır. Benzer şekilde B kümesi X de kapalı ise, $V\cap B$ kümesi X de kapalı olduğundan, $A\cap B$ kümesi lokal kapalıdır.

2.6.5. Lemma.[12] (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin bir A-küme olması için gerek ve yeter şart A nın semi açık ve lokal kapalı olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. A kümesi bir A-küme olsun. 2.6.2. Lemmadan, A kümesi lokal kapalıdır. A kümesi bir A-küme olduğundan, U açık ve V regüler kapalı olmak üzere $A = U \cap V$ dir. Buradan $A^\circ = U \cap V^\circ$ olur. Dolayısıyla $A = U \cap V = U \cap V^{\circ -} \subset (U \cap V^\circ)^- = A^{\circ -}$ olur ki A kümesi bir semi açık kümedir.

$\Leftarrow$. A kümesi semi açık ve lokal kapalı olsun. A kümesi semi açık olduğundan $A \subset A^{\circ -}$ olur. A kümesi lokal kapalı olduğundan, U açık olmak üzere $A = U \cap A^-$ olur. Dolayısıyla $A^- = A^{\circ -}$ kümesi, regüler kapalıdır. Böylece A kümesi, bir A-kümedir.

2.6.6. Lemma.[12] (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde aşağıdakiler eşdeğerdir.

ı) A kümesi açıktır;

ıı) A α-açık ve lokal kapalıdır;

ııı) A preaçık ve lokal kapalıdır.

İspat. (ı) $\Rightarrow$ (ıı) ve (ıı) $\Rightarrow$ (ııı) açıktır.

(ııı) $\Rightarrow$ (ı). A preaçık ve lokal kapalı olsun. Bu takdirde $A \subset A^{-\circ}$ ve U açık olmak üzere $A = U \cap A^-$ dır. Buradan $A \subset U \cap A^{-\circ} = (U \cap A^-)^\circ = A^\circ$ olur ki A kümesi açıktır.

2.6.7. Lemma.[12] (X,τ) topolojik uzayı için, aşağıdakiler eşdeğerdir.

ı) $A(X) = \tau$;

ıı) $A(X)$, X üzerinde bir topolojidir;

ııı) X deki herhangi iki A-kümenin kesişimi de bir A-kümedir;

ıv) $SO(X)$, X üzerinde bir topolojidir;

v) (X,τ) extremally bağlantısızdır.

İspat. (ı) $\Rightarrow$ (ıı) ve (ıı) $\Rightarrow$ (ııı) açıktır.

(ııı) $\Rightarrow$ (ıv). $A, B \in SO(X)$ olsun. Bu takdirde $A \cap B \in SO(X)$ olduğunu göstermeliyiz. $x \notin (A \cap B)^{\circ -}$ olacak şekilde bir $x \in A \cap B$ noktası olsun. Buradan $U \cap A^\circ \cap B^\circ = \varnothing$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Buradan $U \cap A^- \cap B^\circ = \varnothing$ olur. Böylece $U \cap A^{-\circ} \cap B^- = \varnothing$ elde edilir. Dolayısıyla $U \cap (A^- \cap B^-)^\circ = \varnothing$ olur. Buradan $x \notin (A^- \cap B^-)^{\circ -}$ elde edilir. Diğer taraftan A^- ve B^- kümeleri, regüler kapalıdır. Dolayısıyla A^-, $B^- \in A(X) \subset SO(X)$ olur. Buradan $x \in A^- \cap B^-$ olması $x \in (A^- \cap B^-)^{\circ -}$ olmasını gerektirir ki bu bir çelişkidir. O halde böyle bir x noktası yoktur. Böylece $A \cap B \in SO(X)$ dir.

(ıv) $\Rightarrow$ (v). 2.3.5. Lemmadan açıktır.

(v) $\Rightarrow$ (ı). A kümesi bir A-küme ise U açık ve V regüler kapalı olmak üzere $A=U\cap V$ dir. (X,τ) extremally bağlantısız olduğundan, V kümesi açıktır. Böylece A kümesi bir açık kümedir.

2.6.8. Lemma.[12] (X,τ) topolojik uzayı için aşağıdakiler vardır:

ı) $A(X) = SO(X)\cap LC(X)$.

ıı) $\tau = \alpha(X)\cap LC(X)$.

ııı) $\tau = PO(X)\cap LC(X)$.

İspat. 2.6.5. Lemma ve 2.6.6. Lemmadan çıkar.

2.6.2. Tanım. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Y deki her açık kümenin ters görüntüsü, X de lokal kapalı küme ise f fonksiyonuna LC-sürekli [11] denir.

2.6.9. Lemma.[12] Her A-sürekli fonksiyon LC-süreklidir.

İspat. 2.6.2. Lemmadan çıkar.

2.6.3. Uyarı. LC-sürekli bir fonksiyonun A-sürekli olması gerekmez. 2.1.2. Örnek, 2.3.4. Örnek, 2.5.4. Örnek ve 2.6.3. Örneklerden LC-süreklilik kavramı, α-süreklilik, presüreklilik, semi süreklilik, zayıf süreklilik, zayıf α-süreklilik, hemen hemen zayıf süreklilik, zayıf* süreklilik, lokal zayıf* süreklilik kavramlarından bağımsızdır.

2.6.3. Örnek.[40] $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ topolojisi ve $Y=\{a,b\}$ kümesi üzerinde $\upsilon=P(Y)$ topolojisi verilsin. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu $f(a)=a$, $f(b)=f(c)=b$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu LC-süreklidir, fakat ne semi sürekli ne de hemen hemen zayıf süreklidir.

2.6.1. Teorem.[12] $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde

ı) f fonksiyonunun A-sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin semi sürekli ve LC-sürekli olmasıdır.

ıı) f fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin α-sürekli ve LC-sürekli olmasıdır.

ııı) f fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin presürekli ve LC-sürekli olmasıdır.

İspat. 2.6.8. Lemmadan açıktır.

2.7. J. Tong`un Ayrışımının Bir Genelleştirilmesi

J. Tong [40], β-küme ve β-süreklilik kavramlarını tanımlayıp, [39] daki sürekliliğin ayrışımını genelleştirdi.

2.7.1. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. $A^{-\circ} = A^{\circ}$ ise A kümesine t-küme [40] denir.

2.7.1. Lemma.[40] Her kapalı küme bir t-kümedir.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer A kümesi kapalı ise $A^{-} = A$ dır. Buradan $A^{-\circ} = A^{\circ}$ olur. O halde A kümesi bir t-kümedir.

2.7.1. Uyarı.[40] t-kümenin bir kapalı küme olması gerekmez.

2.7.2. Lemma.[40] Her regüler açık küme bir t-kümedir.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer A kümesi regüler açık ise $A^{-\circ} = A$ olur. Buradan $A^{-\circ} = A^{\circ}$ olur. O halde A kümesi bir t-kümedir.

2.7.2. Uyarı.[40] t-kümenin bir regüler açık küme olması gerekmez. t-küme kavramı, açık, α-açık, preaçık, semi açık ve A-küme kavramlarından bağımsızdır.

2.7.1. Örnek.[40] $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{a,b\}\}$ topolojisi verilsin. $\{b\}$ kümesi bir t-kümedir, çünkü $\{b\}^{-\circ} = \{b,c\}^{\circ} = \varnothing = \{b\}^{\circ}$ dir. Fakat $\{b\}$ kümesi ne açık ne de kapalıdır. $\{b\}^{-\circ} = \varnothing$ olduğundan $\{b\}$ kümesi regüler açık değildir. $\{b\} \not\subset \{b\}^{-\circ} = \varnothing$ olduğundan $\{b\}$ kümesi preaçık değildir. $\{b\} \not\subset \{b\}^{\circ-} = \varnothing$ olduğundan $\{b\}$ kümesi semi açık değildir. Ancak $\{a\}$ açık kümesi bir t-küme değildir, çünkü $\{a\}$ açık kümesi için $\{a\}^{-\circ} = X^{\circ} = X \neq \{a\} = \{a\}^{\circ}$ dır.

2.7.3. Lemma.[40] A ve B kümeleri t-küme ise $A\cap B$ kümesi de t-kümedir.

İspat. $(A\cap B)^{\circ} \subset (A\cap B)^{-\circ} \subset (A^{-}\cap B^{-})^{\circ} = A^{-\circ}\cap B^{-\circ} = A^{\circ}\cap B^{\circ} = (A\cap B)^{\circ}$ olur.

2.7.4. Lemma.[40] (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde A kümesinin regüler açık olması için gerek ve yeter şart A nın t-küme ve preaçık küme olmasıdır.

İspat. $A^{\circ} \subset A \subset A^{-\circ} = A^{\circ}$ olur.

2.7.2. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. $U \subset X$ alt kümesi açık ve $V \subset X$ alt kümesi de bir t-küme olmak üzere $A = U \cap V$ ise A kümesine β-küme [40] denir.

2.7.5. Lemma.[40] Her t-küme bir β-kümedir.

İspat. (X,τ) uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi bir t-küme olsun. Buradan $A = X \cap A$ olduğundan, A kümesi bir β-kümedir.

2.7.6. Lemma. Her lokal kapalı küme bir β-kümedir.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi bir lokal kapalı küme olsun. Bu takdirde U açık küme ve V kapalı küme olmak üzere $A = U \cap V$ olur. 2.7.1. Lemma gereğince, V kümesi bir t-kümedir. O halde 2.7.2. Tanımdan, A kümesi β-kümedir.

2.7.1. Sonuç.[40] Her A-küme bir β-kümedir.

İspat. 2.6.2. Lemma ve 2.7.6. Lemmadan çıkar.

2.7.2. Sonuç.[40] Her açık küme bir β-kümedir.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi bir açık küme olsun. Buradan $A = A \cap X$ ve $X^{-\circ} = X^{\circ} = X$ olduğundan, A kümesi β-kümedir.

2.7.3. Sonuç.[40] Her kapalı küme bir β-kümedir.

İspat. 2.7.1. Lemma ve 2.7.5. Lemmadan çıkar.

2.7.3. Uyarı.[40] β-kümenin bir lokal kapalı küme olması gerekmez. β-küme kavramı, α-açık, preaçık ve semi açık küme kavramlarından bağımsızdır.

2.7.2. Örnek.[40] $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{a\}\}$ topolojisi verilsin. $\{a,b\}$ kümesi bir α-açık kümedir, çünkü $\{a,b\} \subset \{a,b\}^{\circ-\circ} = \{a\}^{-\circ} = X^{\circ} = X$ dir. Fakat $\{a,b\}$ kümesi bir β-küme değildir, çünkü $\{a,b\} = X \cap \{a,b\}$ ve $\{a,b\}^{-\circ} = X^{\circ} = X \neq \{a\} = \{a,b\}^{\circ}$ dır. Diğer taraftan, $\{b\}$ kümesi bir β-kümedir, ne lokal kapalı ne preaçık ne semi açık ne de kapalıdır. Ayrıca $\{a\}$ kümesi bir β-kümedir, fakat bir t-küme değildir.

2.7.7. Lemma.[40] (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde A kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart A nın preaçık ve β-küme olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. A kümesi açık olsun. 2.5.8. Lemmadan, A kümesi preaçıktır. 2.7.2. Sonuçtan, A açık kümesi β-kümedir.

$\Leftarrow$. A kümesi hem preaçık küme hem de bir β-küme olsun. A kümesi β-küme olduğundan, U açık ve $V^{-\circ} = V^{\circ}$ olmak üzere $A = U \cap V$ olur. A kümesi preaçık olduğundan, $A \subset A^{-\circ} = (U \cap V)^{-\circ} \subset (U^{-} \cap V^{-})^{\circ} = U^{-\circ} \cap V^{-\circ} = U^{-\circ} \cap V^{\circ}$ elde edilir. Dolayısıyla $A = U \cap V = (U \cap V) \cap U \subset (U^{-\circ} \cap V^{\circ}) \cap U = (U^{-\circ} \cap U) \cap V^{\circ} = U \cap V^{\circ}$ olur. Böylece $A = U \cap V \supset U \cap V^{\circ}$ olduğundan, $A = U \cap V^{\circ}$ olur. O halde A kümesi açıktır.

2.7.3. Tanım. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Y deki her açık kümenin ters görüntüsü, X de β-küme ise f fonksiyonuna β-sürekli [40] denir.

2.7.8. Lemma. Her LC-sürekli fonksiyon β-süreklidir.

İspat. 2.7.6. Lemmadan açıktır.

2.7.4. Sonuç.[40] Her A-sürekli fonksiyon β-süreklidir.

İspat. 2.7.1. Sonuçtan açıktır.

2.7.5. Uyarı.[40] β-sürekli bir fonksiyonun LC-sürekli olması gerekmez. 2.6.3. Örnekteki, Y uzayı regüler uzaydır, ancak f fonksiyonu sürekli değildir. 2.7.3. Örnek, 2.7.4. Örnek, 2.7.5. Örnek ve 2.7.6. Örneklerden β-süreklilik kavramı, α-süreklilik, presüreklilik, semi süreklilik, zayıf süreklilik, zayıf α-süreklilik, hemen hemen zayıf süreklilik, zayıf* süreklilik ve lokal zayıf* süreklilik kavramlarından bağımsızdır.

2.7.3. Örnek.[39] $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{b\},\{c,d\},\{b,c,d\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ topolojileri verilsin. $f : (X,\tau) \to (X,\upsilon)$ fonksiyonu $f(a)=f(b)=a$, $f(c)=c$, $f(d)=d$ ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu β-süreklidir, fakat ne presürekli ne de lokal zayıf* sürekli değildir.

2.7.4. Örnek.[40] $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ topolojisi ve $Y=\{a,b\}$ kümesi üzerinde $\upsilon=P(Y)$ topolojisi verilsin. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$

fonksiyonu f(a)=f(c)=a, f(b)=b ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu β-süreklidir, fakat ne semi sürekli ne de hemen hemen zayıf süreklidir.

2.7.5. Örnek.[40] X={a,b,c} kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\varnothing,\{a\},\{a,b\}\}$ topolojileri verilsin. f : $(X,\tau) \to (X,\upsilon)$ birim fonksiyonu α-süreklidir, fakat β-sürekli değildir.

2.7.6. Örnek.[40] X={a,b,c} kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ topolojisi ve Y={a,b} kümesi üzerinde υ=P(Y) topolojisi verilsin. f : $(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu f(a)=f(b)=a, f(c)=b ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu zayıf* süreklidir, fakat β-sürekli değildir.

2.7.7. Örnek. X={a,b,c} kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\varnothing,\{c\}\}$ topolojileri verilsin. f : $(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu f(a)=f(b)=a, f(c)=c ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu β-süreklidir, fakat LC-sürekli değildir.

2.7.1. Teorem.[40] f : $(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin presürekli ve β-sürekli olmasıdır.

İspat. 2.7.7. Lemmadan açıktır.

2.8. E. Hatır ve Arkadaşlarının Bir Ayrışımı

[15] de, J. Tong [40] anlamında sürekliliğin ayrışımı genelleştirilmiştir.

2.8.1. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. U açık küme ve $V^{\circ} = V^{\circ-\circ}$ olmak üzere $A = U\cap V$ ise A kümesine C-küme [15] denir.

2.8.1. Lemma.[15] Her β-küme bir C-kümedir.

İspat. (X,τ) uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi bir β-küme olsun. Buradan $A = U\cap V \ni$ U açık ve $V^{\circ} = V^{-\circ}$ dır. Dolayısıyla $V^{\circ} \subset V^{\circ-\circ} \subset V^{-\circ} = V^{\circ}$ olur. Böylece $V^{\circ-\circ} = V^{\circ}$ dir. O halde A kümesi bir C-kümedir.

2.8.1. Uyarı.[15] C-kümenin bir β-küme olması gerekmez. C-küme kavramı, α-açık, preaçık, semi açık küme kavramlarından bağımsızdır. 2.7.2. Örnekteki (X,τ) uzayını alalım. {a,b} kümesi α-açıktır, fakat bir C-küme değildir.

2.8.1. Örnek.[15] X={a,b,c,d} kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{d\},\{b,c\},\{b,c,d\}\}$ topolojisi verilsin. {a,b} kümesi bir C-kümedir, fakat ne β-küme ne preaçık ne de semi açıktır.

2.8.2. Lemma.[15] (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart A nın α-açık ve C-küme olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. A açık küme olsun. Buradan $A=A\cap X \ni X^{o-o} = X^{o} = X$ olduğundan, A kümesi bir C-kümedir. Ayrıca 2.3.1. Lemmadan, A kümesi α-açıktır.

$\Leftarrow$. A kümesi α-açık ve C-küme olsun. Bu takdirde U açık küme ve $V^{o}=V^{o-o}$ olmak üzere $A=U\cap V$ dır. $A\in\alpha(X)$ olduğundan, $A \subset A^{o-o} = (U\cap V)^{o-o} = (U^{o}\cap V^{o})^{-o} = (U\cap V^{o})^{-o} \subset (U^{-}\cap V^{o-})^{o} = U^{-o}\cap V^{o-o} = U^{-o}\cap V^{o}$ olur. $U\subset U^{-o}$ olduğundan, $A = U\cap V = (U\cap V)\cap U \subset (U^{-o}\cap V^{o})\cap U = U\cap V^{o}$ elde edilir. Ayrıca $A = U\cap V \supset U\cap V^{o}$ olduğundan, $A = U\cap V^{o}$ olur. Böylece A kümesi açıktır.

2.8.2. Tanım. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Y deki her açık kümenin ters görüntüsü, X de C-küme ise f fonksiyonuna C-sürekli [15] denir.

2.8.3. Lemma.[15] Her β-sürekli fonksiyon C-süreklidir.

İspat. 2.8.1. Lemmadan açıktır.

2.8.2. Uyarı. C-sürekli bir fonksiyonun β-sürekli olması gerekmez. 2.7.4. Örnek, 2.7.5. Örnek, 2.7.6. Örnek ve 2.8.2. Örneklerden C-süreklilik kavramı, α-süreklilik, presüreklilik, semi süreklilik, zayıf süreklilik, zayıf α-süreklilik, hemen hemen zayıf süreklilik, zayıf* süreklilik, lokal zayıf* süreklilik kavramlarından bağımsızdır.

2.8.2. Örnek.[15] X={a,b,c,d} kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{d\},\{b,c\},\{b,c,d\}\}$ topolojisi ve Y={a,b} kümesi üzerinde $\upsilon=\{Y,\varnothing,\{a\}\}$ topolojisi verilsin. $f : X \to Y$ fonksiyonu f(a)=f(b)=a, f(c)=f(d)=b şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu C-süreklidir, fakat ne β-sürekli ne semi sürekli ne de lokal zayıf* süreklidir.

2.8.1. Teorem.[15] $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin α-sürekli ve C-sürekli olmasıdır.

İspat. 2.8.2. Lemmadan çıkar.

2.9. M. Ganster ve Arkadaşlarının Bir Ayrışımı

[13] de, J. Tong [40] anlamında sürekliliğin ayrışımı genelleştirildi.

2.9.1. Tanım. (X,τ) uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $A^{\circ} = (A)_p{}^{\circ}$ ise A kümesine zayıf β-küme [13] denir. (X,τ) uzayındaki bütün zayıf β-kümelerin ailesi D(c,p) ile gösterilir [36].

2.9.1. Lemma.[29] (X,τ) uzayı ve $A,B\subset X$ alt kümeleri verilsin. Eğer A kümesi semi açık veya B kümesi semi açık ise, $(A\cap B)^{-\circ} = A^{-\circ}\cap B^{-\circ}$ dir.

İspat. Genel olarak, $(A\cap B)^{-\circ} \subset A^{-\circ}\cap B^{-\circ}$ olduğu açıktır. $A\in SO(X)$ olsun. Bu takdirde $A \subset A^{\circ -}$ dır. Dolayısıyla $A^{-} \subset A^{\circ -}$ olur. Diğer taraftan, $A^{\circ} \subset A$ olduğundan, $A^{\circ -} \subset A^{-}$ olur. Böylece $A^{-} = A^{\circ -}$ elde edilir. Dolayısıyla $A^{-\circ}\cap B^{-\circ} = (A^{-\circ}\cap B^{-\circ})^{-\circ} \subset (A^{-}\cap B^{-\circ})^{-\circ} = (A^{\circ -}\cap B^{-\circ})^{-\circ} \subset (A^{\circ}\cap B^{-})^{-\circ} \subset (A^{\circ}\cap B)^{-\circ} \subset (A\cap B)^{-\circ}$ elde edilir. Böylece $(A\cap B)^{-\circ} = A^{-\circ}\cap B^{-\circ}$ olur.

2.9.2. Lemma. Her β-küme zayıf β-kümedir.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi bir β-küme olsun. Buradan U açık küme ve $V^{-\circ} = V^{\circ}$ olmak üzere $A = U\cap V$ dir. 2.9.1. Lemmadan, $A^{-\circ} = (U\cap V)^{-\circ} = U^{-\circ}\cap V^{-\circ} = U^{-\circ}\cap V^{\circ}$ elde edilir. Dolayısıyla $(A)_p{}^{\circ} = A\cap A^{-\circ} = (U\cap V)\cap U^{-\circ}\cap V^{\circ} = U\cap V^{\circ} = A^{\circ}$ olur. O halde A kümesi zayıf β-kümedir.

2.9.1. Uyarı. Zayıf β-kümenin bir β-küme olması gerekmez. Zayıf β-küme kavramı, α-açık, preaçık, semi açık, C-küme kavramlarından bağımsızdır.

2.9.1. Örnek. $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{c\},\{d\},\{c,d\},\{a,c\},\{a,c,d\}\}$ topolojisi verilsin. $\{b,c\}$ kümesi zayıf β-kümedir, fakat ne C-küme ne β-küme ne de preaçık kümedir. $\{a,d\}$ kümesi de zayıf β-kümedir, fakat semi açık değildir. Diğer taraftan, $\{b,c,d\}$ kümesi α-açıktır, fakat zayıf β-küme değildir. 2.8.1. Örnekteki (X,τ) uzayını alalım. $\{a,b,d\}$ kümesi bir C-kümedir, fakat zayıf β-küme değildir.

2.9.1. Sonuç.[36] Her A-küme zayıf β-kümedir.

İspat. 2.7.1. Sonuç ve 2.9.2. Lemmadan çıkar.

[36] da yalnızca ifadesi verilen aşağıdaki özelliği ispatlayalım:

2.9.3. Lemma. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart A nın preaçık ve zayıf β-küme olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. A kümesi açık olsun. 2.7.7. Lemmadan, A kümesi preaçıktır. Buradan $A = (A)_p{}^{\circ}$ olur. A kümesi açık olduğundan $A = A^{\circ}$ dir. Dolayısıyla $A^{\circ} = (A)_p{}^{\circ}$ olur. O halde A kümesi zayıf β-kümedir.

$\Leftarrow$. A kümesi preaçık ve zayıf β-küme olsun. Buradan $A = (A)_p{}^{\circ}$ ve $A^{\circ} = (A)_p{}^{\circ}$ olur. Dolayısıyla $A = A^{\circ}$ elde edilir. O halde A kümesi açıktır.

2.9.2. Tanım. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Y deki her açık kümenin ters görüntüsü, X de zayıf β-küme ise f fonksiyonuna zayıf β-sürekli [13] denir.

2.9.4. Lemma. Her β-sürekli fonksiyon zayıf β-süreklidir.

İspat. 2.9.2. Lemmadan açıktır.

2.9.2. Uyarı. Zayıf β-sürekli bir fonksiyonun β-sürekli olması gerekmez. 2.7.4. Örnek, 2.7.5. Örnek, 2.7.6. Örnek, 2.8.2. Örnek ve 2.9.2. Örneklerden zayıf β-süreklilik kavramı, α-süreklilik, presüreklilik, semi süreklilik, C-süreklilik, zayıf süreklilik, zayıf α-süreklilik, hemen hemen zayıf süreklilik, zayıf* süreklilik, lokal zayıf* süreklilik kavramlarından bağımsızdır.

2.9.2. Örnek. $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\varnothing,\{c\},\{d\},\{c,d\}\}$ topolojileri verilsin. $f : (X,\tau) \to (X,\upsilon)$ fonksiyonu $f(a)=f(d)=d$, $f(b)=f(c)=a$ ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu zayıf β-süreklidir, fakat ne β-sürekli ne C-sürekli ne de lokal zayıf* süreklidir.

2.9.1. Teorem.[13] $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin presürekli ve zayıf β-sürekli olmasıdır.

İspat. 2.9.3. Lemmadan çıkar.

2.10. M. Przemski Anlamında Sürekliliğin ve α-Sürekliliğin Ayrışımları

M. Przemski [36], sürekliliğin ve α-sürekliliğin birer ayrışımını elde etmiştir.

2.10.1. Tanım. (X,τ) uzayı ve bir $A\subset X$ kümesi verilsin. Eğer $A^\circ = (A)_\alpha{}^\circ$ ise A kümesine $D(c,\alpha)$-küme [36] denir.

2.10.1. Lemma.[15] Her C-küme bir $D(c,\alpha)$-kümedir.

İspat. (X,τ) uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi bir C-küme olsun. Buradan $A = U\cap V \ni U$ açık ve $V^\circ = V^{\circ-\circ}$ dır. 2.9.1. Lemmadan, $A^{\circ-\circ} = (U\cap V)^{\circ-\circ} = (U\cap V^\circ)^{-\circ} = U^{-\circ}\cap V^{\circ-\circ} = U^{-\circ}\cap V^\circ$ elde edilir. Dolayısıyla $(A)_\alpha{}^\circ = A\cap A^{\circ-\circ} = (U\cap V)\cap U^{-\circ}\cap V^\circ = U\cap V^\circ = A^\circ$ olur. O halde A kümesi bir $D(c,\alpha)$-kümedir.

[36] da ispatsız olarak verilen aşağıdaki özelliği gösterelim:

2.10.2. Lemma. Her zayıf β-küme bir $D(c,\alpha)$-kümedir.

İspat. (X,τ) uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi bir zayıf β-küme olsun. Bu takdirde $A^\circ = (A)_p{}^\circ$ olur. $A^\circ \subset (A)_\alpha{}^\circ \subset (A)_p{}^\circ = A^\circ$ olduğundan, $A^\circ = (A)_\alpha{}^\circ$ olur. O halde A kümesi bir $D(c,\alpha)$-kümedir.

2.10.1. Uyarı. $D(c,\alpha)$-kümenin zayıf β-küme ve C-küme olması gerekmez. $D(c,\alpha)$-küme kavramı, α-açık, preaçık ve semi açık küme kavramlarından bağımsızdır. 2.8.1. Örnekteki (X,τ) uzayını alalım. $\{a,b,d\}$ kümesi bir $D(c,\alpha)$-kümedir, fakat zayıf β-küme değildir. 2.9.1. Örnekteki (X,τ) uzayını alalım. $\{b,c\}$ kümesi $D(c,\alpha)$-kümedir, fakat ne C-küme ne de preaçık bir kümedir. $\{a,d\}$ kümesi de bir $D(c,\alpha)$-kümedir, fakat semi açık değildir. Diğer taraftan, $\{b,c,d\}$ kümesi α-açıktır, fakat $D(c,\alpha)$-küme değildir.

2.10.1. Sonuç. Her β-küme bir $D(c,\alpha)$-kümedir.

İspat. 2.9.2. Lemma ve 2.10.2. Lemmadan açıktır.

2.10.3. Lemma.[36] (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart A nın α-açık ve $D(c,\alpha)$-küme olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. A kümesi açık olsun. 2.3.1. Lemmadan A kümesi α-açıktır. A kümesi α-açık olduğundan, $A = (A)_\alpha{}^\circ$ olur. A kümesi açık olduğundan, $A = A^\circ$ dir. Böylece $A^\circ = (A)_\alpha{}^\circ$ olur. O halde A kümesi bir $D(c,\alpha)$-kümedir.

$\Leftarrow$. A kümesi α-açık ve $D(c,\alpha)$-küme olsun. Buradan $A = (A)_\alpha{}^\circ$ ve $A^\circ = (A)_\alpha{}^\circ$ olur. Dolayısıyla $A = A^\circ$ olur. Böylece A kümesi açıktır.

2.10.2. Tanım. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Y deki her açık kümenin ters görüntüsü, X de $D(c,\alpha)$-küme ise f fonksiyonuna $D(c,\alpha)$-sürekli [36] denir.

2.10.4. Lemma.[36] Her C-sürekli fonksiyon $D(c,\alpha)$-süreklidir.
İspat. 2.10.1. Lemmadan çıkar.

2.10.5. Lemma.[36] Her zayıf β-sürekli fonksiyon $D(c,\alpha)$-süreklidir.
İspat. 2.10.2. Lemmadan çıkar.

2.10.3. Uyarı. $D(c,\alpha)$-sürekli bir fonksiyon ne zayıf β-sürekli ne de C-süreklidir. 2.7.4. Örnek, 2.7.5. Örnek, 2.7.6. Örnek, 2.8.2. Örnek ve 2.9.2. Örneklerden $D(c,\alpha)$-süreklilik kavramı, α-süreklilik, presüreklilik, semi süreklilik, zayıf süreklilik, zayıf α-süreklilik, hemen hemen zayıf süreklilik, zayıf* süreklilik ve lokal zayıf* süreklilik kavramlarından bağımsızdır.

2.10.1. Teorem.[36] $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin α-sürekli ve $D(c,\alpha)$-sürekli olmasıdır.
İspat. 2.10.3. Lemmadan çıkar.

2.10.3. Tanım. (X,τ) uzayı ve bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer $(A)_\alpha{}^\circ = (A)_p{}^\circ$ ise A kümesine $D(\alpha,p)$-küme [36] denir.

2.10.6. Lemma.[36] (X,τ) uzayı verilsin. $D(c,p) = D(c,\alpha) \cap D(\alpha,p)$ dır.
İspat. 2.10.2. Lemma ve 2.10.3. Tanımdan çıkar.

2.10.7. Lemma.[36] Her α-açık küme bir $D(\alpha,p)$-kümedir.
İspat. (X,τ) uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi α-açık olsun. Bu takdirde $A = (A)_\alpha{}^\circ$ olur. $A = (A)_\alpha{}^\circ \subset (A)_p{}^\circ \subset A$ olduğundan, $A = (A)_p{}^\circ$ olur. Böylece $(A)_\alpha{}^\circ = (A)_p{}^\circ$ elde edilir. O halde A kümesi bir $D(\alpha,p)$-kümedir.

2.10.4. Uyarı. $D(\alpha,p)$-kümenin ne zayıf β-küme ne de α-açık küme olması gerekmez. Ayrıca $D(\alpha,p)$-küme kavramı, C-küme, $D(c,\alpha)$-küme ve preaçık küme kavramlarından bağımsızdır. Gerçekten, $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{a\}\}$ topolojisi verilsin. $\{a,b\}$ kümesi $D(\alpha,p)$-kümedir, fakat $D(c,\alpha)$-küme değildir. $\{b\}$ kümesi de $D(\alpha,p)$-kümedir, fakat ne preaçık ne de semi açıktır. Diğer taraftan, 2.8.1. Örnekteki (X,τ) uzayını alalım. $\{a,b,d\}$ kümesi preaçık ve C-kümedir, fakat $D(\alpha,p)$-küme değildir.

2.10.8. Lemma.[36] (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin α-açık olması için gerek ve yeter şart A nın preaçık ve $D(\alpha,p)$-küme olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. 2.3.6. Lemma ve 2.10.7. Lemmadan çıkar.

$\Leftarrow$. A kümesi hem preaçık hem de $D(\alpha,p)$-küme olsun. A preaçık olduğundan $A = (A)_p{}^\circ$ olur. A kümesi $D(\alpha,p)$-küme olduğundan, $(A)_\alpha{}^\circ = (A)_p{}^\circ$ olur. Böylece $A = (A)_\alpha{}^\circ$ olur. O halde A kümesi α-açıktır.

2.10.4. Tanım. $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Y deki her açık kümenin ters görüntüsü, X de $D(\alpha,p)$-küme ise f fonksiyonuna $D(\alpha,p)$-sürekli [P] denir.

2.10.9. Lemma.[36] $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\sigma)$ fonksiyonunun zayıf β-sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin $D(c,\alpha)$-sürekli ve $D(\alpha,p)$-sürekli olmasıdır.

İspat. 2.10.6. Lemmadan açıktır.

2.10.10. Lemma.[36] Her α-sürekli fonksiyon $D(\alpha,p)$-süreklidir.

İspat. 2.10.7. Lemmadan çıkar.

2.10.5. Uyarı. $D(\alpha,p)$-sürekli bir fonksiyonun zayıf β-sürekli ve α-sürekli olması gerekmez. 2.3.6. Örnek, 2.7.4. Örnek, 2.7.5. Örnek ve 2.8.2. Örneklerden $D(\alpha,p)$-süreklilik kavramı, C-süreklilik, $D(c,\alpha)$-süreklilik, presüreklilik, zayıf süreklilik, zayıf α-süreklilik, hemen hemen zayıf süreklilik, zayıf* süreklilik ve lokal zayıf* süreklilik kavramlarından bağımsızdır.

2.10.2. Teorem.[36] $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\sigma)$ fonksiyonunun α-sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin presürekli ve $D(\alpha,p)$-sürekli olmasıdır.

İspat. 2.10.8. Lemmadan çıkar.

2.10.2. Sonuç.[36] $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu presürekli ve A-sürekli ise, f fonksiyonu α-süreklidir.

İspat. 2.5.2. Teoremin sonucudur.

2.10.3. Sonuç.[36] (Y,σ) regüler uzay olsun. Bu takdirde $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin presürekli ve $D(\alpha,p)$-sürekli olmasıdır.

İspat. 2.3.1. Sonuç ve 2.10.2. Teoremden çıkar.

2.11. Singal Anlamında Hemen Hemen Sürekliliğin Bir Ayrışımı

[33] de, Singal [41] anlamında hemen hemen sürekliliğin bir ayrışımı verilmiştir.

2.11.1. Tanım. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu ve herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin. $f(x)$ noktasını içeren her $V \subset Y$ açık kümesi için, $f(U) \subset V^{-o}$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi varsa, f fonksiyonuna Singal anlamında hemen hemen sürekli [41] denir.

2.11.2. Tanım. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Y deki her regüler açık kümenin ters görüntüsü, X de bir A-küme ise f fonksiyonuna hemen hemen A-sürekli [33] denir.

2.11.1. Lemma.[33] Singal anlamında hemen hemen sürekli her fonksiyon hemen hemen A-süreklidir.

İspat. Her açık küme A-küme olduğundan çıkar.

2.11.1. Uyarı.[33] Hemen hemen A-sürekli bir fonksiyonun Singal anlamında hemen hemen sürekli olması gerekmez. 2.3.5. Örnekteki f fonksiyonu hemen hemen A-süreklidir, fakat Singal anlamında hemen hemen sürekli değildir.

2.11.3. Tanım. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Y deki her regüler açık kümenin ters görüntüsü, X de feebly açık ise f fonksiyonuna hemen hemen feebly sürekli [24] denir.

2.11.2. Lemma.[33] Singal anlamında hemen hemen sürekli her fonksiyon hemen hemen feebly süreklidir.

İspat. Her açık küme α-açık olduğundan çıkar.

2.11.2. Uyarı. Hemen hemen feebly sürekli bir fonksiyonun Singal anlamında hemen hemen sürekli olması gerekmez. 2.3.5. Örnek ve 2.11.1. Örneklerden, hemen hemen feebly süreklilik kavramıyla hemen hemen A-süreklilik kavramı birbirinden bağımsızdır.

2.11.1. Örnek.[30] $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{c\},\{d\},\{a,c\},\{c,d\},\{a,c,d\}\}$ topolojisi ve $Y=\{a,b,c\}$ üzerinde $\upsilon=\{Y,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ topolojisi verilsin. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu $f(a)=c$, $f(b)=f(c)=f(d)=b$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f hemen hemen feebly süreklidir, fakat ne hemen hemen A-sürekli ne de Singal anlamında hemen hemen süreklidir.

2.11.1. Teorem.[33] $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonunun Singal anlamında hemen hemen sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin hemen hemen feebly sürekli ve hemen hemen A-sürekli olmasıdır.

İspat. 2.11.1. Lemma, 2.11.2. Lemma ve 2.5.4. Lemmadan açıktır.

2.12. Sürekliliğin Bir Diğer Ayrışımı

[6] da, N. Levine [21] anlamında sürekliliğin ayrışımından farklı bir ayrışım elde edilmiştir.

2.12.1. Tanım. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu ve herhangi bir $x\in X$ noktası verilsin. f(x) noktasını içeren her $V\subset Y$ açık kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesi, $f^{-1}(V^{-})$ alt uzayında bir açık küme ise, f fonksiyonuna bağıl (relatively) sürekli [6] denir.

2.12.1. Lemma.[6] Her sürekli fonksiyon bağıl süreklidir.

İspat. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu takdirde her $V\subset Y$ açık kümesi için $f^{-1}(V)$ kümesi, X de açıktır. $f^{-1}(V)\subset f^{-1}(V^{-})$ olduğundan, $f^{-1}(V)$ kümesi, $f^{-1}(V^{-})$ alt uzayında bir açık kümedir. O halde f fonksiyonu bağıl süreklidir.

2.12.1. Uyarı. Bağıl sürekli bir fonksiyonun sürekli olması gerekmez. 2.3.6. Örnek, 2.7.3. Örnek, 2.7.5. Örnek, 2.12.1. Örnek ve 2.12.2. Örneklerden bağıl süreklilik kavramı, α-süreklilik, zayıf süreklilik, zayıf α-süreklilik, hemen hemen zayıf süreklilik, presüreklilik, zayıf* süreklilik, lokal zayıf* süreklilik, A-süreklilik, semi süreklilik, D(α,p)-süreklilik, LC-süreklilik, β-süreklilik, zayıf β-süreklilik, C-süreklilik, D(c,α)-süreklilik kavramlarından bağımsızdır.

2.12.1. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{c\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ topolojileri verilsin. $f : (X,\tau) \to (X,\upsilon)$ fonksiyonu $f(a)=f(b)=a$, $f(c)=b$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu bağıl süreklidir, fakat hemen hemen zayıf sürekli, lokal zayıf* sürekli, semi sürekli, D(c,α)-sürekli değildir.

2.12.2. Örnek.[6] $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{c\},\{c,d\},\{a,b,c\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\varnothing,\{b\},\{d\},\{b,d\},\{a,b\},\{a,b,d\},\{b,c,d\}\}$ topolojileri verilsin. $f : (X,\tau) \to (X,\upsilon)$ birim fonksiyonu zayıf süreklidir, çünkü $\{a,b\}^-=\{a,b,c\}=\{b\}^-$, $\{b,c,d\}^-=X$, $\{d\}^-=\{c,d\}$. Fakat f fonksiyonu bağıl sürekli değildir, çünkü $\{b\} = f^{-1}(\{b\}) = f^{-1}(\{b\}^-)\cap W = \{a,b,c\}\cap W$ olacak şekilde bir $W\in\tau$ açık kümesi yoktur.

2.12.1. Teorem.[6] $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun zayıf sürekli ve bağıl sürekli olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. 2.1.3. Lemma ve 2.12.1. Lemmadan açıktır.

$\Leftarrow$. f fonksiyonu zayıf sürekli ve bağıl sürekli olsun. Herhangi bir $V\subset Y$ açık kümesi verilsin. f fonksiyonu bağıl sürekli olduğundan, W kümesi X de bir açık küme olmak üzere $f^{-1}(V) = f^{-1}(V^-)\cap W$ olur. $f^{-1}(V)$ kümesinin X de açık olduğunu göstermek için, herhangi bir $x\in f^{-1}(V)$ alalım. Buradan $f(x)\in V$ ve $x\in W$ olur. f fonksiyonu zayıf sürekli olduğundan, $f(U)\subset V^-$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U\subset X$ açık kümesi vardır. Böylece $U \subset f^{-1}(V^-)$ olur. W, x noktasını içeren bir açık küme olduğundan, $U \subset W$ alabiliriz. Dolayısıyla $x\in U \subset f^{-1}(V^-)\cap W = f^{-1}(V)$ elde edilir. Böylece her $x\in f^{-1}(V)$ noktası bir iç nokta olduğundan, $f^{-1}(V)$ kümesi X de açık bir kümedir. O halde f fonksiyonu süreklidir.

3. SÜREKLİLİĞİN AYRIŞIMI

Bu bölümde; J. Tong [39] anlamında sürekliliğin ayrışımına benzer olarak sürekliliğin yeni bir ayrışımını elde ettik.

3.1. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer U açık küme ve $V^{\circ -} = V^{\circ}$ olmak üzere $A = U\cap V$ ise A kümesine β^*-küme denir.

3.1. Lemma. Her β^*-küme bir C-kümedir.

İspat. (X,τ) uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi bir β^*-küme olsun. Buradan $A = U\cap V \ni$ U açık ve $V^{\circ} = V^{\circ -}$ dır. Dolayısıyla $V^{\circ} \subset V^{\circ -\circ} \subset V^{\circ -} = V^{\circ}$ olur. Böylece $V^{\circ -\circ} = V^{\circ}$ dir. O halde A kümesi bir C-kümedir.

3.2. Uyarı. C-kümenin bir β^*-küme olması gerekmez.

3.1. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ topolojisi verilsin. $\{b,c\}$ kümesi A-kümedir ve dolayısıyla bir C-kümedir, fakat β^*-küme değildir.

3.1. Uyarı. 3.1. Örnek, 3.2. Örnek, 3.3. Örnek ve 3.4. Örneklerden β^*-küme kavramı, A-küme, lokal kapalı küme, β-küme, zayıf β-küme, α-açık, preaçık, semi açık ve $D(\alpha,p)$-küme kavramlarından bağımsızdır.

3.2. Örnek. $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a,b\},\{c,d\}\}$ topolojisi verilsin. $\{a,b,c\}$ kümesi bir β^*-kümedir, fakat $D(\alpha,p)$-küme değildir.

3.3. Örnek. $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ topolojisi verilsin. $\{c,d\}$ kümesi bir β^*-kümedir, fakat preaçık küme değildir.

3.4. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ topolojisi verilsin. $\{a,b\}$ kümesi bir α-açık kümedir, fakat β^*-küme değildir.

3.2. Lemma. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart A nın α-açık ve β^*-küme olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. A küme açık olsun. Buradan $A=A\cap X \ni X^{\circ -} = X^{\circ} = X$ olduğundan, A kümesi bir β^*-kümedir. 2.3.1. Lemmadan, A kümesi α-açıktır.

$\Leftarrow$. A kümesi α-açık ve β^*-küme olsun. Bu takdirde U açık küme ve $V^{\circ}=V^{\circ -}$ olmak üzere $A=U\cap V$ dır. $A\in\alpha(X)$ olduğundan, $A \subset A^{\circ - \circ} = (U\cap V)^{\circ - \circ} = (U^{\circ}\cap V^{\circ})^{-\circ} = (U\cap V^{\circ})^{-\circ} \subset (U^{-}\cap V^{\circ -})^{\circ} = (U^{-}\cap V^{\circ})^{\circ} = U^{-\circ}\cap V^{\circ\circ} = U^{-\circ}\cap V^{\circ}$ olur. $U\subset U^{-\circ}$ olduğundan, $A = U\cap V = (U\cap V)\cap U \subset (U^{-\circ}\cap V^{\circ})\cap U = U\cap V^{\circ}$ olur. Ayrıca $A = U\cap V \supset U\cap V^{\circ}$ olduğundan, $A = U\cap V^{\circ}$ elde edilir. O halde A kümesi açıktır.

3.2. Tanım. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Y deki her açık kümenin ters görüntüsü, X de β^*-küme ise f fonksiyonuna β^*-sürekli denir.

3.3. Lemma. Her β^*-sürekli fonksiyon C-süreklidir.

İspat. 3.1. Lemmadan açıktır.

3.3. Uyarı. C-sürekli bir fonksiyonun β^*-sürekli olması gerekmez.

3.5. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ ve $\upsilon=P(X)$ topolojileri verilsin. $f : (X,\tau) \to (X,\upsilon)$ fonksiyonu $f(a)=a$, $f(b)=f(c)=c$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu A-süreklidir ve dolayısıyla C-süreklidir. Ayrıca f fonksiyonu zayıf* sürekli ve bağıl süreklidir, fakat β^*-sürekli değildir.

3.4. Uyarı. 3.5. Örnek, 3.6. Örnek, 3.7. Örnek ve 3.8. Örneklerden görüleceği gibi β^*-süreklilik kavramı, A-süreklilik, LC-süreklilik, β-süreklilik, zayıf β-süreklilik, $D(\alpha,p)$-süreklilik, α-süreklilik, presüreklilik, semi süreklilik, zayıf süreklilik, zayıf α-süreklilik, hemen hemen zayıf süreklilik, zayıf* süreklilik, lokal zayıf* süreklilik ve bağıl süreklilik kavramlarından bağımsızdır.

3.6. Örnek. $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a,b\},\{c,d\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\varnothing,\{a,b,c\}\}$ topolojileri verilsin. $f : (X,\tau) \to (X,\upsilon)$ birim fonksiyonu β^*-süreklidir, fakat ne $D(\alpha,p)$-sürekli ne lokal zayıf* sürekli ne de bağıl süreklidir.

3.7. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ topolojisi ve $Y=\{a,b\}$ kümesi üzerinde $\upsilon=\{Y,\varnothing,\{a\}\}$ topolojisi verilsin. $f : (X,\tau) \to (X,\upsilon)$ fonksiyonu $f(a)=f(b)=a$, $f(c)=b$ ile tanımlansın. Bu takdirde f α-süreklidir, fakat β^*-sürekli değildir.

3.8. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ ve $\upsilon=P(X)$ topolojileri verilsin. $f : (X,\tau) \to (X,\upsilon)$ fonksiyonu, $f(a)=a$ ve $f(b)=f(c)=b$ ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu β^*-süreklidir, fakat hemen hemen zayıf sürekli değildir.

3.1. Teorem. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin α-sürekli ve β^*-sürekli olmasıdır.

İspat. 3.2. Lemmadan çıkar.

4. SÜREKLİLİĞİN VE α-SÜREKLİLİĞİN AYRIŞIMLARI

4.1. Sürekliliğin Bir Ayrışımı

Bu kesimde; β^*-süreklilik kavramını zayıf β^*-süreklilik olarak genelleştirip, sürekliliğin yeni bir ayrışımını elde ettik.

4.1.1. Tanım. (X,τ) uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $A^\circ = (A)_S{}^\circ$ ise A kümesine zayıf β^*-küme denir. X uzayındaki bütün zayıf β^*-kümelerin ailesini D(c,s) ile gösterelim.

4.1.1. Lemma. Her β^*-küme bir zayıf β^*-kümedir.

İspat. (X,τ) uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi bir β^*-küme olsun. Bu takdirde $A = U\cap V \ni U$ açık ve $V^{\circ-} = V^\circ$ dır. Buradan, $A^{\circ-} = (U\cap V^\circ)^- = U\cap V^{\circ-} = U\cap V^\circ = A^\circ$ olduğundan, $(A)_S{}^\circ = A\cap A^{\circ-} = A\cap A^\circ = A^\circ$ olur. O halde A kümesi bir zayıf β^*-kümedir.

4.1.1. Uyarı. Zayıf β^*-kümenin bir β^*-küme olması gerekmez.

4.1.1. Örnek. $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{c\},\{a,c\},\{b,d\},\{b,c,d\}\}$ topolojisi verilsin. $\{c,d\}$ kümesi zayıf β^*-kümedir, fakat β^*-küme değildir. Ayrıca $\{a,b\}$ kümesi zayıf β^*-kümedir, fakat preaçık küme değildir. Aynı zamanda $\{b,c\}$ kümesi zayıf β^*-kümedir, fakat C-küme değildir.

4.1.2. Lemma. Her zayıf β^*-küme bir $D(c,\alpha)$-kümedir.

İspat. (X,τ) uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi bir zayıf β^*-küme olsun. Bu takdirde $A^\circ = (A)_S{}^\circ$ olur. $A^\circ \subset (A)_\alpha{}^\circ \subset (A)_S{}^\circ = A^\circ$ olduğundan $A^\circ = (A)_\alpha{}^\circ$ olur. O halde A kümesi bir $D(c,\alpha)$-kümedir.

4.1.2. Uyarı. $D(c,\alpha)$-kümenin bir zayıf β^*-küme olması gerekmez.

4.1.2. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ topolojisi verilsin. $\{a,c\}$ kümesi bir A-kümedir, fakat zayıf β^*-küme değildir.

4.1.3. Uyarı. 4.1.1. Örnek, 4.1.2. Örnek, 4.1.3. Örnek ve 4.1.4. Örneklerden zayıf β^*-küme kavramı, A-küme, lokal kapalı küme, β-küme, C-küme, zayıf β-küme, $D(\alpha,p)$-küme, α-açık, preaçık ve semi açık küme kavramlarından bağımsızdır.

4.1.3. Örnek. $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{a,c\},\{b,d\}\}$ topolojisi verilsin. $\{a,b,c\}$ kümesi zayıf β^*-kümedir, fakat $D(\alpha,p)$-küme değildir.

4.1.4. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{c\}\}$ topolojisi verilsin. $\{b,c\}$ kümesi α-açık bir kümedir, fakat zayıf β^*-küme değildir.

4.1.3. Lemma. (X,τ) uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart A nın semi açık ve zayıf β^*-küme olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. A kümesi açık bir küme olsun. Buradan $A = A^\circ$ dır. $A^\circ \subset (A)_\alpha{}^\circ \subset (A)_S{}^\circ \subset A$ olduğundan, $A = A^\circ = (A)_S{}^\circ$ olur. O halde A kümesi hem semi açık hem de zayıf β^*-kümedir.

$\Leftarrow$. A kümesi semi açık ve zayıf β^*-küme olsun. Buradan $A = (A)_S{}^\circ$ ve $A^\circ = (A)_S{}^\circ$ olur. Böylece $A = A^\circ$ elde edilir. O halde A kümesi açıktır.

4.1.2. Tanım. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Y deki her açık kümenin ters görüntüsü, X de zayıf β^*-küme ise f fonksiyonuna zayıf β^*-sürekli denir.

4.1.4. Lemma. Her β^*-sürekli fonksiyon zayıf β^*-süreklidir.

İspat. 4.1.1. Lemmadan açıktır.

4.1.4. Uyarı. Zayıf β^*-sürekli bir fonksiyonun β^*-sürekli olması gerekmez.

4.1.5. Örnek. Bir $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\emptyset,\{a\}\}$ topolojileri verilsin. $f : (X,\tau) \to (X,\upsilon)$ fonksiyonu $f(a)=f(d)=a$, $f(b)=f(c)=b$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu zayıf β^*-süreklidir, fakat ne β^*-sürekli ne bağıl sürekli ne de $D(\alpha,p)$-süreklidir.

4.1.5. Lemma. Her zayıf β^*-sürekli fonksiyon $D(c,\alpha)$-süreklidir.

İspat. 4.1.2. Lemmadan açıktır.

4.1.5. Uyarı. D(c,α)-sürekli bir fonksiyonun zayıf β^*-sürekli olması gerekmez. 4.1.5. Örnek, 4.1.6. Örnek, 4.1.7. Örnek, 4.1.8. Örnek, 4.1.9. Örnek, 4.1.10. Örnek ve 4.1.11. Örneklerden zayıf β^*-süreklilik kavramı, A-süreklilik, semi süreklilik, LC-süreklilik, β-süreklilik, C-süreklilik, zayıf β-süreklilik, D(α,p)-süreklilik, α-süreklilik, zayıf süreklilik, zayıf α-süreklilik, presüreklilik, hemen hemen zayıf süreklilik, bağıl süreklilik, zayıf* süreklilik ve lokal zayıf* süreklilik kavramlarından bağımsızdır.

4.1.6. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\varnothing,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\rightarrow(X,\upsilon)$ fonksiyonu, f(a)=a ve f(b)=f(c)=c şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu zayıf β^*-süreklidir, fakat hemen hemen zayıf sürekli değildir.

4.1.7. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{b,c\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\varnothing,\{a,c\}\}$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\rightarrow(X,\upsilon)$ birim fonksiyonu zayıf β^*-süreklidir, fakat lokal zayıf* sürekli değildir.

4.1.8. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\varnothing,\{b\}\}$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\rightarrow(X,\upsilon)$ fonksiyonu f(a)=a, f(b)=f(c)=b ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu A-süreklidir, fakat zayıf β^*-sürekli değildir.

4.1.9. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{c\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\rightarrow(X,\upsilon)$ fonksiyonu f(a)=c, f(b)=f(c)=a ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu α-süreklidir, fakat zayıf β^*-sürekli değildir.

4.1.10. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ ve $\upsilon=P(X)$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\rightarrow(X,\upsilon)$ fonksiyonu f(a)=a, f(b)=f(c)=c ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu zayıf* sürekli ve bağıl süreklidir, fakat zayıf β^*-sürekli değildir.

4.1.11. Örnek. $X=\{a,b,c,d\}$ üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{c\},\{a,c\},\{b,d\},\{b,c,d\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\varnothing,\{c\}\}$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\rightarrow(X,\upsilon)$ fonksiyonu f(a)=f(d)=a, f(b)=f(c)=c ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu zayıf β^*-süreklidir, fakat C-sürekli değildir.

4.1.1. Teorem. $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin semi sürekli ve zayıf β^*-sürekli olmasıdır.

İspat. 4.1.3. Lemmadan elde edilir.

4.2. α-Sürekliliğin Bir Ayrışımı

Bu kesimde; zayıf β^*-süreklilik kavramını D(α,s)-süreklilik olarak genelleştirip, α-sürekliliğin yeni bir ayrışımını elde ettik.

4.2.1. Tanım. (X,τ) uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $(A)_\alpha{}^\circ = (A)_S{}^\circ$ ise A kümesine D(α,s)-küme denir.

4.2.1. Lemma. Her zayıf β^*-küme D(α,s)-kümedir.

İspat. (X,τ) uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi zayıf β^*-küme olsun. Buradan $A^\circ = (A)_S{}^\circ$ olur. $(A)_S{}^\circ = A^\circ \subset (A)_\alpha{}^\circ \subset (A)_S{}^\circ$ olduğundan, $(A)_\alpha{}^\circ = (A)_S{}^\circ$ olur. Böylece A kümesi bir D(α,s)-kümedir.

4.2.2. Lemma. Her α-açık küme D(α,s)-kümedir.

İspat. (X,τ) uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi α-açık olsun. Bu takdirde $A = (A)_\alpha{}^\circ$ olur. $A = (A)_\alpha{}^\circ \subset (A)_S{}^\circ \subset A$ olduğundan, $A = (A)_S{}^\circ$ olur. Böylece $(A)_\alpha{}^\circ = (A)_S{}^\circ$ elde edilir. O halde A kümesi bir D(α,s)-kümedir.

4.2.1. Uyarı. D(α,s)-kümenin ne zayıf β^*-küme ne de α-açık küme olması gerekmez. 4.2.1. Örnek, 4.2.2. Örnek ve 4.2.3. Örneklerden D(α,s)-küme kavramı, A-küme, lokal kapalı küme, β-küme, C-küme, zayıf β-küme, D(c,α)-küme, D(α,p)-küme, preaçık ve semi açık küme kavramlarından bağımsızdır.

4.2.1. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{a\}\}$ topolojisi verilsin. $\{a,b\}$ kümesi D(α,s)-kümedir, fakat D(c,α)-küme değildir. Aynı zamanda $\{b,c\}$ kümesi D(α,s)-kümedir, fakat preaçık değildir.

4.2.2. Örnek. $X=\{a,b,c,d\}$ üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\}\}$ topolojisi verilsin. $\{a,b,d\}$ kümesi preaçıktır, fakat D(α,s)-küme değildir. Ayrıca $\{a,b\}$ kümesi A-kümedir, fakat D(α,s)-küme değildir.

4.2.3. Örnek. $X=\{a,b\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset\}$ topolojisi verilsin. $\{a\}$ kümesi bir D(α,s)-kümedir, fakat D(α,p)-küme değildir.

4.2.3. Lemma. (X,τ) uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin α-açık olması için gerek ve yeter şart A nın semi açık ve $D(\alpha,s)$-küme olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. 2.3.4. Lemma ve 4.2.2. Lemmadan açıktır.

$\Leftarrow$. A kümesi semi açık ve $D(\alpha,s)$-küme olsun. Buradan $A = (A)_S{}^{\circ}$ ve $(A)_\alpha{}^{\circ} = (A)_S{}^{\circ}$ olur. Böylece $A = (A)_\alpha{}^{\circ}$ olur. O halde A kümesi α-açıktır.

4.2.2. Tanım. $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Y deki her açık kümenin ters görüntüsü, X de $D(\alpha,s)$-küme ise f fonksiyonuna $D(\alpha,s)$-sürekli denir.

4.2.4. Lemma. Her zayıf β^*-sürekli fonksiyon $D(\alpha,s)$-süreklidir.

İspat. 4.2.1. Lemmadan açıktır.

4.2.5. Lemma. Her α-sürekli fonksiyon $D(\alpha,s)$-süreklidir.

İspat. 4.2.2. Lemmadan açıktır.

4.2.2. Uyarı. $D(\alpha,s)$-süreklilik ne zayıf β^*-sürekli ne de α-sürekliliği gerekmez. 4.2.4. Örnek, 4.2.5. Örnek, 4.2.6. Örnek, 4.2.7. Örnek, 4.2.8. Örnek ve 4.2.9. Örneklerden $D(\alpha,s)$-süreklilik kavramı, A-süreklilik, semi süreklilik, LC-süreklilik, β-süreklilik, C-süreklilik, zayıf β-süreklilik, $D(c,\alpha)$-süreklilik, $D(\alpha,p)$-süreklilik, zayıf süreklilik, zayıf α-süreklilik, presürekli, hemen hemen zayıf süreklilik, zayıf* süreklilik, lokal zayıf* süreklilik ve bağıl süreklilik kavramlarından bağımsızdır.

4.2.4. Örnek. $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{a\}\}$ topolojisi verilsin. $f : (X,\tau) \rightarrow (X,\tau)$ fonksiyonu $f(a)=f(b)=a$, $f(c)=f(d)=b$ ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu $D(\alpha,s)$-süreklidir, fakat $D(c,\alpha)$-sürekli, bağıl sürekli ve lokal zayıf* sürekli değildir.

4.2.5. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{a\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ topolojileri verilsin. $f : (X,\tau) \rightarrow (X,\upsilon)$ fonksiyonu, $f(a)=a$ ve $f(b)=f(c)=b$ ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu $D(\alpha,s)$-süreklidir, fakat hemen hemen zayıf sürekli değildir.

4.2.6. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{a\},\{b,c\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\emptyset,\{a,b\}\}$ topolojileri verilsin. $f : (X,\tau) \rightarrow (X,\upsilon)$ birim fonksiyonu $D(\alpha,s)$-süreklidir, fakat $D(\alpha,p)$-sürekli değildir.

4.2.7. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\to(X,\upsilon)$ fonksiyonu $f(a)=f(c)=a$, $f(b)=b$ ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu zayıf süreklidir, fakat $D(\alpha,s)$-sürekli değildir.

4.2.8. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ ve $\upsilon=P(X)$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\to(X,\upsilon)$ fonksiyonu $f(a)=a$, $f(b)=f(c)=b$ ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu A-sürekli, zayıf* sürekli ve bağıl süreklidir, fakat $D(\alpha,s)$-sürekli değildir.

4.2.9. Örnek. $X=\{a,b,c,d\}$ üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\to(X,\upsilon)$ fonksiyonu $f(a)=f(b)=f(d)=a$, $f(c)=c$ ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu presüreklidir, fakat $D(\alpha,s)$-sürekli değildir.

4.2.1. Teorem. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonunun α-sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin semi sürekli ve $D(\alpha,s)$-sürekli olmasıdır.

İspat. 4.2.3. Lemmadan çıkar.

4.3. Bu Tez Boyunca Ele Alınan Sürekliliklerin Karşılaştırılması

Diagram

Lokal zayıf* süreklilik
$\Uparrow$
Zayıf* süreklilik   Zayıf süreklilik $\Rightarrow$ Zayıf α-süreklilik
$\Uparrow$ $\Uparrow$ $\Downarrow$
Bağıl süreklilik $\Leftarrow$ Süreklilik $\Rightarrow$ α-süreklilik $\Rightarrow$ Presüreklilik $\Rightarrow$ Hemen hemen zayıf süreklilik
$\Downarrow$ $\Downarrow$
A-süreklilik $\Rightarrow$ semi süreklilik
$\Downarrow$
LC-süreklilik   D(α,p) - süreklilik
$\Downarrow$ $\Uparrow$
β-süreklilik $\Rightarrow$ zayıf β-süreklilik
$\Downarrow$ $\Downarrow$
C-süreklilik $\Rightarrow$ D(c,α)-süreklilik
$\Uparrow$ $\Uparrow$
β^*- süreklilik $\Rightarrow$ Zayıf β^*-süreklilik $\Rightarrow$ D(α,s) - süreklilik

4.3.1. Uyarı. 2.2.1. Örnek, 2.3.5. Örnek, 2.3.6. Örnek, 2.4.1. Örnek, 2.7.3. Örnek, 2.7.5. Örnek, 2.8.2. Örnek, 2.12.1. Örnek, 3.6. Örnek, 3.8. Örnek, 4.1.5. Örnek, 4.1.11. Örnek, 4.2.7. Örnek, 4.2.8. Örnek, 4.2.9. Örnek, 4.3.1. Örnek, 4.3.2. Örnek, 4.3.3. Örnek, 4.3.4. Örnek, 4.3.5. Örnek ve 4.3.6. Örneklerden diagramdaki gerektirmelerin tersleri doğru değildir.

4.3.1. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{c\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\emptyset,\{a\}\}$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\to(X,\upsilon)$ fonksiyonu $f(a)=b$, $f(b)=f(c)=a$ ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu α-süreklidir, fakat D(c,α)-sürekli değildir.

4.3.2. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{a\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\emptyset,\{b\}\}$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\to(X,\upsilon)$ fonksiyonu $f(a)=a$, $f(b)=f(c)=b$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu β^*-sürekli ve LC-süreklidir, fakat semi sürekli değildir.

4.3.3. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ ve $\upsilon=P(X)$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\to(X,\upsilon)$ fonksiyonu $f(a)=a$, $f(b)=f(c)=c$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu A-süreklidir, fakat D(α,s)-sürekli değildir.

4.3.4. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{b\},\{a,c\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\emptyset,\{b,c\}\}$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\to(X,\upsilon)$ birim fonksiyonu β^*-süreklidir, fakat zayıf β-sürekli değildir.

4.3.5. Örnek. $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\emptyset,\{d\}\}$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\to(X,\upsilon)$ fonksiyonu $f(a)=f(d)=d$, $f(b)=f(c)=a$ ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu zayıf β-süreklidir, fakat β-sürekli değildir.

4.3.6. Örnek. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{c\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\emptyset,\{a\}\}$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu $f(a)=a$, $f(b)=f(c)=c$ ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu β-süreklidir, fakat LC-sürekli ve semi sürekli değildir.

KAYNAKLAR

[1] ANDRIJEVIC, D., 1984, Some properties of the topology of α-sets, Mat. Vesnik 36, 1-10.

[2] ANDRIJEVIC, D., 1986, Semipreopen sets, Mat. Vesnik 38, no.1, 24-32 ; MR 87j:54002.

[3] BISWAS, N., PICONE, M., 1970, On characterizations of semi-continuous functions, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., (8) 48, 399-402.

[4] BOURBAKI, N., 1966, General Topology, Part 1, Addison-Wesley Publ. Co. Reading, Mass.

[5] CHATTOPADHYAY, C., BANDYOPADHYAY, C., 1991, On structure of δ-sets, Bull. Calcutta Math. Soc. 83, 281-290.

[6] CHEW, J., TONG, J., 1991, Some remarks on weak continuity, Amer. Math. Monthly 98, no.10, 931-934; MR 92m:54029.

[7] CROSSLEY, S. G., HILDEBRANT, S. K., 1971, Semi-closure, Texas J. Sci. 22, no.2-3, 99-112.

[8] DUGUNDJI, J., 1966, Topology, Allyn and Bacon, Inc., Boston.

[9] EL-DEEB, S. N., HASANEIN, I. A., MASHHOUR, A. S., NOIRI, T., 1983, On P-regular spaces, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie 27(75), 311-315.

[10] ESPELIE, M. S., JOSEPH, J. E., 1982, Remarks on two weak forms of continuity, Canad. Math. Bull. 25, no.1, 59-63; MR 83h:54010.

[11] GANSTER, M., REILLY, I. L., 1989, Locally closed sets and LC-continuous functions, Internat. J. Math. Math. Sci., 12, no.3, 317-424; MR 91f:54008.

[12] GANSTER, M., REILLY, I. L., 1990, A decomposition of continuity, Acta Math. Hungar. 56, no.3-4, 299-301; MR 92b:54022.

[13] GANSTER, M., GRESSL, F., REILLY, I. L., 1989, On a decomposition of continuity, General topology and applications (Staten Island, NY, 1989), 67-72, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 134, Dekker, New York, 1991; MR 93b:54012.

[14] HUSAIN, T., 1966, Almost continuous mappings, Prace Mat. 10, 1-7.

[15] HATIR, E., NOIRI, T., YÜKSEL, Ş., 1996, A decomposition of continuity, Acta Math. Hungar. 70, no.1-2 (Basımda).

[16] JANKOVIC, D. S., 1985, θ-regular spaces, Internat. J. Math. Math. Sci. 8, 615-619; MR 87h:54030.

[17] JANKOVİC, D. S., REILLY, I. L., 1985, On semi separation properties, Indian J. Pure Appl. Math. 16, no.9, 957-964.
[18] JELİC, M., 1991, On pairwise LC-continuous mappings, Indian J. Pure Appl. Math. 22, no.1, 55-59.
[19] KAR, A., 1989, Properties of weakly semi-continuous functions, Soochow J. Math. 15, no.1, 65-77.
[20] KELLEY, J. L., 1955, General Topology, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey.
[21] LEVINE, N., 1961, A decomposition of continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly 68, 44-46.
[22] LEVINE, N., 1963, Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly 70, 36-41.
[23] MAHESHWARI, S. N., JAIN, P. C., 1982, Some new mappings, Mathematica (Cluj) 24 (47), no.1-2, 53-55; MR 84k:54009.
[24] MAHESHWARI, S. N., CHAE, G. I., JAIN, P. C., 1982, Almost feebly continuous functions, Ulsan Inst. Tech. Rep. 13, no.1, 195-197; MR 83h:54014.
[25] MASHHOUR, A. S., ABD EL-MONSEF, M. E., EL-DEEB, S. N., 1982, On precontinuous and weak precontinuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt 53, 47-53; MR 87c:54002.
[26] MASHHOUR, A. S., ABD EL-MONSEF, M. E., HASANEIN, I. A., 1984, On pretopological spaces, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie 28 (76), 39-45.
[27] MASHHOUR, A. S., HASANEİN, I. A., EL-DEEB, S. N., 1983, α-continuity and α-open mappings, Acta Math. Hungar. 41, no.3-4, 213-218.
[28] NJÅSTAD, O., 1965, On some classes of nearly open sets, Pacific J. Math. 15, no.3, 961-970.
[29] NOIRI, T., 1984, On α-continuous functions, Casopis Pest. Mat. 109, no.2, 118-126.
[30] NOIRI, T., 1987, Weakly α-continuous functions, Internat. J. Math. Math. Sci. 10, no.3, 483-490.
[31] NOIRI, T., 1991, Characterizations of S-closed Hausdorff spaces, J. Austral. Math. Soc. Ser.A, 51, 300-304.
[32] NOIRI, T., 1988, Characterizations of extremally disconnected spaces, Indian J. Pure Appl. Math. 19, no.4, 325-329.
[33] POPA, V., 1990, Some properties of almost feebly continuous functions, Demonstratio Math. 23, no.4, 985-991; MR 920h:54018.

[34] POPA, V., 1978, On the decomposition of the quasicontinuities in topological spaces (Romanian), Stud. Cerc. Mat. 30, 31-35.
[35] POPA, V., NOIRI, T., 1992, Almost weakly continuous functions, Demonstratio Math. 25, no.1-2, 241-251; MR 93f:54020.
[36] PRZEMSKI, M., 1993, A decomposition of continuity and α-continuity, Acta Math. Hungar. 61, no.1-2, 93-98.
[37] ROSE, D. A., 1978, On Levine`s decomposition of continuity, Canad. Math. Bull. 21, no.4, 477-481.
[38] ROSE, D. A., 1990, A note on Levine`s decomposition of continuity, Indian J. Pure Appl. Math. 21, no.11, 985-987.
[39] TONG, J., 1986, A decomposition of continuity, Acta Math. Hungar. 48, no.1-2, 11-15.
[40] TONG, J., 1989, On decomposition of continuity in topological spaces, Acta Math. Hungar. 54, no.1-2, 51-55.
[41] SINGAL, M. K., SINGAL, A. R., 1968, Almost-continuous functions, Yokohama Math J. 16, 63-73.
[42] STEEN, L. A., SEEBACH, J. A., 1970, Counterexamples in topology, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.
[43] YÜKSEL, Ş., 1995, Genel Topoloji, Selçuk Üniv. Fen-Edebiyat Fak. Yay. no.14, Konya.