57116

T. C

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CAUCHY -TOEPLITZ MATRİSİNİN -
ℓ_p NORMLARI İÇİN SINIRLAR

HARUN TEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

1996 - KONYA

CAUCHY - TOEPLITZ MATRİSİNİN
ℓ_p NORMLARI İÇİN SINIRLAR

HARUN TEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
KONYA - 1996

T.C
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CAUCHY-TOEPLITZ MATRİSİNİN
ℓ_p NORMLARI İÇİN SINIRLAR

HARUN TEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 19. 07.1996 tarihinde jüri tarafından kabul edimiştir.

İmza	İmza	İmza
Prof. Dr. Hasan ŞENAY	Doç. Dr. Dursun TAŞCI	Yrd. Doç. Dr. Durmuş BOZKURT

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CAUCHY - TOEPLITZ MATRİSİNİN ℓ_p NORMLARI İÇİN SINIRLAR

HARUN TEKİN

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Durmuş Bozkurt

Jüri: Prof.Dr. Hasan ŞENAY
Doç. Dr. Dursun TAŞCI
Yrd. Doç Dr. Durmuş BOZKURT

Cauchy-Toeplitz matrislerinin singüler değerleriyle G. Szegö ilgilenmiş ve bir problem ortaya koymuştur. Bu problem daha sonra C. Moler tarafından deneysel olarak, Fakat anlitik olarak S. V. Parter (1986) tarafından çözülmüştür. Bu problem bahsedilen matrisin singüler değerlerine bir üst sınır bulma problemi idi E.E. Tyrhtshnikov (1991) bu matrisin singüler değerlerine bir alt sınır buldu. Ancak bu hesaplamalar hep özel durumlar ($g=1/2$, $h=1$) için yapılmıştır. D. Bozkurt (1996), Bu matrisin genel halinin Euclide normu için bir alt ve üst sınır tayin etti.

Biz bu çalışmada, $g/h \notin Z$ ve $0< g/h < 1$ şartı altında genel T_n , Cauchy-Toeplitz matrisinin ℓ_p normları için bir alt ve üst sınır tespit ettik. Bu alt ve üst sınırın p'ye göre bir irdelemesini verdik. Ayrıca $g/h\neq0$ ve $g/h\notin Z$ genel hali için ℓ_p normlarının hesaplanabilmesi problemine bir çözüm önerdik.

ANAHTAR KELİMELER : Vektör normu, Matris normu, Cauchy-Toeplitz matrisinin ℓ_p normunun alt ve üst sınırı

ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

THE BOUNDS FOR THE NORMS ℓ_p OF CAUCHY - TOEPLITZ MATRICES

HARUN TEKİN

Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Supervisor : Yrd. Doç. Dr. Durmuş Bozkurt

Jury : Prof. Dr. Hasan ŞENAY

Doç. Dr. Dursun TAŞCI

Yrd. Doç. Dr. Durmuş BOZKURT

G. Szegö interested in the singular values of Cauchy - Toeplitz matrix and put forward a proplem. Later, this proplem has been solved experimentally by C. Moler. But it has been solved analitically by S.V. Parter (1986). This proplem was a proplem to find an upper bound for the singular values of the matrices which is the subject of the talk.

E. E. Tyrhtshnikov (1991) found a lower bound to the singular values of this matrix. However, these calculations like these. (g= 1/2 , h=1)

D. Bozkurt (1996), determinened a lower and upper bound for the general conditions of Euclide norm of this matrix.

In this study, we determined a lower and upper bound for the norms of the general T_n Cauchy - Toeplitz matrix under the conditions of $g/h \notin Z$ and $0 < g/h < 1$. We gave the disputation of this lower and upper bound according to p.

In addition, We suggested a solution for the proplem of the calculation of the ℓ_p norms for the general conditions of $g/h \notin Z$ and $g/h \neq 0$.

KEY WORDS : Norms for Vectors and Matrices, Cauchy - Toeplitz Matrix, The Lower and Upper Bounds of ℓ_p Norm

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi, Yrd. Doç. Dr. Durmuş BOZKURT yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

Tezimi yöneten ve bütün çalışmalarım boyunca her türlü yardımı esirgemiyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Durmuş Bozkurt'a en içten saygı ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

$h \neq 0$ ve $g/h \notin Z$ olmak üzere

$$T_n = \left[\frac{1}{g + (i-j)h} \right]_{i,j=1}^{n}$$

şeklindeki bir Cauchy - Toeplitz matrisinde $g=1/2$ ve $h=1$ seçimiyle özel tipteki Cauchy-Toeplitz matrisini gözönüne alalım. Bu matrisler üzerinde ilk duran C. Moler'dir. C. Moler, bunların singüler değerlerini π' ye yaklaştığını deneysel olarak gösterdi. S. Parter [11] ise bunun ispatını yaptı.

E.E Tyrtyshnikov[13] $h=1$ ve $g=1/2$ özel durumu için bu matrisin spektral yarıçapına bir alt sınır tayin etmiştir. Ayrıca, bu matrisin tersinin normu için de bir sınır vermiştir.

D. Bozkurt[4] genel T_n matrisinin öklid normu için bir alt ve üst sınır tespit etmiştir. Aynı çalışmada, bu matrisin tersinin öklid normu için de bir alt ve üst sınır tespit edilmiştir.

Bu çalışmada Cauchy-Toeplitz matrisinin $g/h \notin Z$ ve $0 < g/h < 1$ şartı altında genel bir Cauchy-Toeplitz matrisinin ℓ_p normu için bir alt sınır ve üst sınır tespit edilmiştir. Bulduğumuz bu alt ve üst sınırını p'ye göre irdelemesi yapılmıştır.

1.1. Matris Kavramı

Herhangi bir K cismi üzerinde tanımlanmış sonlu boyutlu bir vektör uzayı verilmiş olsun. Bu uzayın $e_1, e_2, \ldots, e_n$ gibi bir tabanı verildiğine göre herhangi bir A vektörü;

$$A = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n \tag{1.1}$$

şeklinde yazılabileceğini biliyoruz. Burada $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tabanını yazmaksızın A vektörünü sadece

$$a_1 ,a_2 , ...,a_n$$

bileşenlerinin sıralanmasından elde edilen bir cümle olarak düşünürsek, bunu

$$A = [\, a_1 ,a_2 , ... , a_n \,] \qquad] \, (1.2)$$

veya

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix} \qquad (1.3)$$

şeklinde iki türlü yazabiliriz. Bu durumda da (1.2)' de A vektörü satır matrisiyle, (1.3) de ise A vektörü bir sütun matrisiyle gösterilmiş olur. Her ikisinde de K cisminin n tane sıralanmış elemanı vardır. Birisinde elemanlar yatay olarak, ikincisinde düşey olarak sıralanmış olup, (1.2) ve (1.3) ün her ikisinde de bu elemanlar ya ( ) , ya [ ] , yada ‖ ‖ gibi gösterilmektedir. Şimdi A gibi tek bir vektör değilde $A_1 ,A_2 ,..., A_p$ gibi aynı , n boyutlu uzayın p vektörünü düşünelim. Yani

$$A_1 = (a_{11},a_{12} , ... , a_{1n}) , A_2 = (a_{21} ,a_{22}, ... , a_{2n}) , ... , A_p = (a_{p1} ,a_{p2} , ...,a_{pn})$$

verilmiş olsun. Bu p tane satır vektöründen ibaret sistemin belli olması için pxn tane bileşenin belli olması lazımdır. İşte burada p satırı alt alta yazarsak aşağıdaki p satı n sütundan ibaret diktörtgen şeklinde a_{ij} elemanlarının bir şemasını bulabiliriz. Buna, verilen vektör sisteminin matrisi veya pxn tipinde bir matris denir ve

$$A=[\,A_1\,,A_2\,,\dots,\,A_p\,]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & . & . & . & a_{pn} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

şeklinde gösterilir.

Bu sayılar şemasında, her sütundaki p tane bileşen, birer sütun vektör belirtirler ki bunların sayıları n tanedir. Bu vektörlere, verilen matrisin sütun vektörleri denir.

1.2. Özel Tipteki Matrisler.

Tanım1.1. Satır ve sütun sayıları aynı olan matrislere (yani p = n olan matrislere) kare matris denir ve

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2. Esas köşegen üzerindeki elemanlar dışında bütün elemanları sıfır olan kare matrise köşegen matris denir ve

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{köş}\,(a_{11}\,,a_{22},\,\dots\,,\,a_{nn}) \tag{1.5}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.3. A ve B n- kare matris olsun. j-i ≥ 1 için her $a_{ij} = 0$ ise A' ya alt üçgen matris; B matrisinde i-j ≥ 1 için her $a_{ij} = 0$ ise B'ye üst üçgen matris denir. Bunlar sırasıyla,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilirler.

Tanım 1.4. Özel olarak (1.5)' deki köşegen matriste köşegen üzerindeki her eleman 1'e eşitse, bu matrise birim matris denir ve

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.5. Bir köşegen matriste esas köşegen üzerindeki bütün elemanlar birbirine eşit ise yani

$$a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = \lambda$$

ise böyle bir matrise skaler matris denir ve

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} = \lambda E_n$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.6. Bir mxn tipindeki $A=[\ a_{ij}\ ]$ matrisinde satırları sütun (dolayısıyla sütunları da satır) yapmak suretiyle elde edilen yeni matrise A matrisinin transpozu denir ve $A^t = [\ a_{ji}\ ]$ veya $A^T = [\ a_{ji}\ ]$ sembollerinden birisiyle gösterilir.

Tanım 1.7. Bir $A=[\ a_{ij}\ ]$ matrisinde $A^t = A$ ise, yani $a_{ij} = a_{ji}$ ise, A matrisine simetrik matris denir.

Tanım 1.8. Bir A reel matrisi için $A^t = -A$ ise A matrisine terssimetrik matris denir.

Tanım 1.9. $A=(\ a_{ij}\ )$ n-kare matris olsun. A' nın i- inci satır, j-inci sütun elemanlarının atılmasıyla elde edilen matrisin determinant değerine A matrisinin a_{ij} elemanının minörü denir ve A_{ij} ile gösterilir. Eğer i+j çift sayı ise A_{ij} pozitif, tek sayı ise A_{ij} negatif alınsın. Bu takdirde, A_{ij}'ye A matrisinin a_{ij} elemanına ait işaretli minörü denir.

Tanım 1.10. Bir A kare matrisinde a_{ij} elemanları yerine bu kare matrisin determinantında a_{ij} lere tekabül eden A_{ij} Kofaktörleri (işaretli minörleri) konulduğunda elde edilen matrisin transpozesine, verilen matrisin ek matrisi denir ve A^* ile gösterilir.

1.3. Matrisler Üzerinde İşlemler

i)İki matrisin toplam ve farkı

$$A = \left[a_{ij}\right]_{pxn} \quad \text{ve} \quad B = \left[b_{ij}\right]_{pxn}$$

gibi iki matris olduğuna göre toplama ve çıkarma

$$A \mp B = \left[a_{ij}\right]_{pxn} \mp \left[b_{ij}\right]_{pxn} = \left[a_{ij} \mp b_{ij}\right]_{pxn} = C$$

olarak tanımlanır.

ii) Bir matrisin skalerle çarpımı

$A = [\ a_{ij}\ ]$ ve λ skaleri verildiğine göre

$$\lambda A = \lambda\,[\ a_{ij}\ ] = [\ \lambda\, a_{ij}\ ]$$

olarak tanımlanır.

iii) İki Matrisin Çarpımı

İki matrisin çarpılabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı ile ikinci matrisin satır sayısının birbirine eşit olması gerekir. Yani S, mxn tipinde bir matris ve T'de nxp tipinde bir matris olsun. O zaman

$$ST = [s_{ik}][t_{kj}] = \left[\sum_{k}^{n} s_{ik}t_{kj}\right]$$

$$1 \le i \le m, 1 \le k \le n, \quad 1 \le j \le p$$

biçiminde, veya

$$S.T = \begin{bmatrix} (s_{11}t_{11}+...+s_{1n}t_{n1}) & ... & (s_{11}t_{1p}+...+s_{1m}t_{mp}) \\ .... & ... & .... \\ (s_{m1}t_{11}+...+s_{mn}t_{n1}) & ... & (s_{m1}t_{1p}+...+s_{mn}t_{np}) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

2. İÇ ÇARPIM VE VEKTÖR NORMLARININ ÖZELLİKLERİ

V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Buna göre

$$I:V\text{x}V \rightarrow F$$

dönüşümü,

I_1) $\forall x \in V$ için $(x,x) \geq 0$, $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$

I_2) $\forall \alpha \in F$, $\forall x,y \in V$ için $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$

I_3) $\forall x,y \in V$ için $(x,y) = (y,x)$, $(x,ay) = a(x,y)$

I_4) $\forall x,y,z \in V$ için $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

şartlarını sağlıyorsa buna bir iç çarpım denir.

F cismi komleks sayılar cismi ise $(x,\alpha y)=\overline{\alpha}(x,y)$ dir.

Bir vektör uzayı üzerinde iç çarpım tanımlanmışsa bu uzaya iç çarpım uzayı denir.

Tanım 2.1. V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$N:V \rightarrow R^{+}$$

dönüşümü

N_1) $\forall x \in V$ için $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pozitiflik)

N_2) $\forall \alpha \in F$, $\forall x \in V$ için $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ (homojenlik)

N_3) $\forall x,y \in V$ için $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

aksiyomlarını sağlıyorsa bu dönüşüme norm denir.

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in R^n$ olmak üzere x vektörünün

a) $\|x\|_\infty = \max|x_i|$ Maksimum normu

b) $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}$ Euclidean normu

c) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ Toplam normu

şeklinde normları tanımlanabilir. (b) ve (c) deki normlar genel olarak $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} \tag{2.1}$$

Hölder (ℓ_p) normu olarakta verilebilir.

Yukarıda verilen norm tanımlarını gözönünde bulundurarak aşağıdaki bağıntıları verebiliriz:

a) $\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \sqrt{n}\|x\|_2$

b) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$

c) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$

eşitsizliğini sağlayan $n > 0$ sayısı vardır.

Teorem 2.1.*(Cauchy-Schwarz)* V, F cismi üzerinde tanımlı bir iç çarpım uzayı ve $\forall x,y \in V$ olmak üzere

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ olmak üzere

$$\left|\langle x,y\rangle\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.|y_i|$$

$$\left|\langle x,y\rangle\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.|y_i| \leq \|x\|.\|y\|$$

dir. Her hangi iki a ve b sayısı için

$$\begin{aligned}(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow \quad & a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\ & \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab\end{aligned}$$

olduğundan

$$a = \frac{|x_i|}{\|x\|}, b = \frac{|y_i|}{\|y\|}$$

seçersek

$$2\frac{|x_i|}{\|x\|}\frac{|y_i|}{\|y\|} \leq \frac{|x_i|^2}{\|x\|^2} + \frac{|y_i|^2}{\|y\|^2}$$

olur. Her iki tarafın i üzerinden toplamını alırsak

$$\begin{aligned}2\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|}{\|x\|}\frac{|y_i|}{\|y\|} &\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|x_i|^2}{\|x\|^2} + \frac{|y_i|^2}{\|y\|^2}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|^2}{\|x\|^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{|y_i|^2}{\|y\|^2}\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan

$$2\frac{1}{\|x\|.\|y\|}\sum_{i=1}^{n}|x_i|.|y_i| \leq 2$$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|.|y_i| \leq \|x\|.\|y\| \Rightarrow |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$$

olur. ■

Teorem 2.2. F cismi üzerinde normlu bir uzay olmak üzere $\forall x,y \in V$ için

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

dir.

İspat. $\forall$ x ,y$\in$V için

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$
$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$$
$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$
$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$$
$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

olur.

Örnek 2.1. Bir üçgende herhangi iki kenarın uzunlukları toplamı üçüncü kenarın uzunluğundan büyük veya eşittir.

Çözüm.

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle$$
$$\|x + y\|^2 = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\langle x,y\rangle$$

elde edilir. Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$$
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y\rangle|$$

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|.\|y\|,$$

$$\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$
$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

elde edilir.

Sonuç 2.1. $Y \in C^n$ bir vektör olsun ve C^n üzerinde ki vektör normu $\|\,.\,\|$ olsun. Bu takdirde

a) $\forall\ x \in C^n$ için $|(y_0)^* x| \leq \|x\|$

ve (2.2)

b) $(y_0)^* y = \|y\|$

olacak şekilde bir $y_0 \in C^n$ vektörü vardır ve y_0 vektörünün tek olması gerekmez.

2.1. Matris Normları

M_n , nxn tipinde matrislerin oluşturduğu bir uzay olsun. C^{nxn} üzerinde herhangi bir vektör normunu kullanarak matrisin büyüklüğünü ölçebiliriz. Bununla birlikte, M_n büyük boyutlu vektör uzayı değildir. M_n , doğal çarpma operasyonuna sahiptir. A ve B nin normu ile AB nin normu arasında bazı bağıntıların olduğunu göreceğiz.

$$\|\cdot\| : M_n \rightarrow R$$

şeklinde tanımlanmış fonksiyon her $A,B \in M_n$ için

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \|A\| \geq 0 \\
(1a) & \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \\
(2) & \|cA\| = |c|\|A\| \\
(3) & \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \\
(4) & \|AB\| \leq \|A\|.\|B\|
\end{array}
\qquad (2.3)
$$

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona bir matris normu denir.

(1)-(3) özellikleri, vektör normları için verilen aksiyomlar ile aynıdır. (1)-(3) özelliklerini sağlayan bir A matrisi üzerindeki bir fonksiyon için (4) gerekli değildir. Genel matris normları olarak adlandıracağımız, bir matris üzerinde yarı norm notasyonlarını ve (1.a) aksiyomunu ihmal ederek genelleştirilmiş matris yarı normlarını tanımlayabiliriz. Herhangi bir matris normu için

$$\|A^2\| = \|AA\| \leq \|A\|.\|A\| = \|A\|^2$$

dır. $A^2 = A$ ve $A = I$, özellikle $\|I\| \geq 1$ için $\|\cdot\|$ herhangi bir matris normu ise $I = A.A^{-1}$ olduğundan

$$\|I\| = \|A.A^{-1}\| \leq \|A\| \, \|A^{-1}\|$$

dir. Böylece $\|\cdot\|$ matris normu için

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{\|I\|}{\|A\|}$$

dır.

Tanım 2.2. $A \in M_n$ için

$$\|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$$

ile tanımlı matris normuna ℓ_1 normu denir.

Tanım 2.3. $A \in M_n$ için

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

ile tanımlı norma ℓ_2 normu veya Euclidean (Frobenius) normu bazen Schur normu bazen de Hilbert-Schmidt normu denir.

$a_i \in C^n$ sütun vektörlerinden oluşan $A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ matrisi M_n 'in bir elemanı ise (e_i , $(1 \le i \le n)$ C^n 'in standart bazıdır) her i için $\|e_i\| = 1$ olduğundan

$$\|A\|_E^2 = \|a_1 e_1\|_E^2 + \|a_2 e_2\|_E^2 + \ldots + \|a_n e_n\|_E^2$$

$$\|A\|_E^2 = \|a_1\|_E^2 + \ldots + \|a_n\|_E^2$$

elde ederiz. C^n üzerindeki ℓ_2 normu, tek değişkenli değildir. Bu yüzden önemlidir. $A \in M_n$ ve $A^* = A^t$; $U,V \in M_n$ üniter matrisler olmak üzere

$$\|Ua\|_E^2 = \|Ua_1\|_E^2 + \ldots + \|Ua_n\|_E^2 = \|a_1\|_E^2 + \ldots + \|a_n\|_E^2$$

olur. Her $A \in M_n$ için $\|A^*\|_E = \|A\|_E$ olduğundan,

$$\|UAV\|_E = \|AV\|_E = \left\| V^* A^* \right\|_E = \|A^*\|_E = \|A\|_E$$

dir. Böylece M_n üzerinde ℓ_2 normu, matris normudur.

Örnek 2.2. $A \in M_n$ için

$$\|A\|_\infty \equiv \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|$$

şeklinde tanımlanan ℓ_∞ normu M_n vektör uzayında bir normdur. Fakat bir matris normu değildir. Çünkü

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2$$

matrisini gözönüne alalım.

$$J^2 = 2J\ ,\ \|J\|_\infty = 1\ ,\ \|J^2\| = \|2J\|_\infty = 2\|J\|_\infty = 2$$

dir.

$$\|J^2\|_\infty \le \|J\|_\infty^2$$

olmasına rağmen $\|.\|_\infty$ bir alt çarpımsal norm değildir. Bununla beraber $A \in M_n$ için

$$|||A||| \equiv n\|A\|_\infty$$

olarak tanımlanırsa

$$|||AB||| = n \max_{1\le i,j\le n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right| \le n \max_{1\le i,j\le n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik} b_{kj}|$$

$$\le n \max_{1\le i,j\le n} \sum_{k=1}^{n} \|A\|_\infty \|B\|_\infty = n\|A\|_\infty n\|B\|_\infty$$
$$= |||A|||\ |||B|||$$

dir. Dolayısıyla bir matris normudur.

Tanım 2.4. C^n üzerinde bir vektör normu $\|\cdot\|$ olsun. M_n üzerinde $|||\cdot|||$ şeklindeki norm

$$|||A||| = \max_{|x|=1} \|Ax\|$$

olarak tanımlanırsa bu norma A matrisinin spektral normu denir.

Tanım 2.4'. Bu norm aynı zamanda, şu şekilde de tanımlanabilir: M_n üzerinde $|||A|||_2 \equiv \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda,\ A^*A\text{ ' nın özdeğeri}\}$ şeklinde belirtilen $|||.|||_2$ ifadesine A' nın Spektral normu denir. Eğer $x \neq 0$ ve $A^*A = \lambda x$ ise bu takdirde $\lambda \geq 0$ *ve* $\sqrt{\lambda}$, reel ve negatif olmadığından

$$x^*A^*Ax = \|Ax\|_2^2 = \lambda\|x\|_2^2$$

olur.

Teorem 2.3. $\|.\|_\infty$ herhangi bir vektör normu olmak üzere $|||\cdot|||$ ile tanımlı fonksiyon M_n üzerinde matris normu olsun. $\forall\ A \in M_n$ ve $\forall x \in C^n$ için

$$\|Ax\| \leq |||A|||.\|x\| \quad \text{ve} \quad |||I||| = 1$$

dir.

İspat. Bu bölümün başlangıcındaki aksiyom (1) den $|||A|||$, negatif değere sahip olmayan bir fonksiyonun maximumu idi ((1.a) dan) A=0 olduğunda her x için Ax=0 dır. Aksiyom (2) den

$$|||cA||| = \max\|cAx\| = \max|c|\|Ax\| = |c|\max\|Ax\| = |c||||A|||$$

olur. Üçgen eşitsizliğinden

$$\|A+B\| = \max\|(A+B)x\| = \max\|Ax+Bx\| \le \max\left(\|Ax\|+\|Bx\|\right)$$
$$\|A+B\| \le \max\|Ax\| + \max\|Bx\| = \|A\| + \|B\|$$

olur. Aksiyom (4) den de

$$\|AB\| = \max\frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \max\frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}\frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$
$$\|AB\| \le \max\frac{\|Ay\|}{\|y\|}\max\frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\|.\|B\|$$

olur ki $\|\,.\,\|$ bir matris normudur. $x \neq 0$ ise

$$\left\|\frac{Ax}{\|x\|}\right\| \le \|A\|$$

dir. Çünkü bu maksimum norm tanımı gibidir. Vektör normunun homojenliğinden

$$\|Ax\| \le \|A\|.\|x\|$$

elde ederiz. Sonuç olarak

$$\|I\| = \max_{\|x\|=1}\|Ix\| = \max_{\|x\|=1}\|x\| = 1$$

olur. ■

Tanım 2.5. $A \in M_n$ için $\|.\|_1$ normu

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

ile tanımlanan matris normuna maksimum sütun toplam normu denir.

$A \in M_n$ için A'yı $A=(a_1,\ldots,a_n)$ şeklinde yazabiliriz. Eğer $x = (x_i)$ ise

$$|||A|||_1 = \max_{1\le i\le n}\|a_i\|_1$$

dir. Ayrıca

$$\|Ax\|_1 = \|x_1a_1+\ldots+x_na_n\|_1 \le \sum_{i=1}^{n}\|x_ia_i\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|\|a_i\|_1$$

$$\|Ax\|_1 \le \sum_{i=1}^{n}|x_i|\left(\max_{1\le k\le n}\|a_k\|_1\right) = \sum_{i=1}^{n}|x_i|.|||A|||_1$$

$$\|Ax\|_1 = \|x\|_1|||A|||_1$$

dir. Böylece

$$\max_{\|x\|=1}\|Ax\|_1 \le |||A|||_1$$

dir. ($k=1,2,\ldots,n$ için) $x = e_k$ seçersek (k-ıncı birim vektör tabanı)

$$\max_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_1 \ge \|1a_k\|_1 = \|a_k\|_1$$

olur. Buradan

$$\max_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_1 \ge \max_{1\le k\le n}\|a_k\|_1 = |||A|||_1$$

elde ederiz. Böylece , ℓ_1 vektör normu ile türetilen matris normu gösterilmiş olur. Bu ise $|||A|||_1$ üzerinde hem üst sınır hemde alt sınırdır.

Tanım 2.6. $A \in M_n$ için $|||A|||_\infty = \max_{1\le j\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ şeklinde tanımlanan matris normuna maxsimum satır normu. denir.

$|||.|||_\infty$ normunu ℓ_∞ normu ile göstermiştik. Bunun da matris normu olması gerekir. Bunun ispatı maksimum sütun toplam normunun ispatı ile aynıdır. Yani

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}x_j\right| \le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\|x\|_\infty$$

$$\|Ax\|_\infty = |||A|||_\infty \|x\|_\infty$$

ve

$$\max_{\|x\|_\infty=1}\|Ax\|_\infty \le |||A|||_\infty$$

olur. A=0 ise ispat açıktır. O halde A≠0 kabul edelim (A'nın k'inci satırını sıfırdan farklı kabul edelim) ve z=$[z_i] \in C^n$ ile vektörünü

$$z_i = \frac{\overline{a_{ki}}}{|a_{ki}|}, \quad a_{ki} \ne 0$$

$$z_i = 1 \quad , \quad a_{ki} = 0$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde

$$\|z\|_\infty = 1, \quad a_{kj}z_j = |a_{kj}| \quad , \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

için

$$\max_{\|x\|_\infty}\|Ax\|_\infty \ge \|Az\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{kj}z_j\right| \ge \left|\sum_{j=1}^{n} a_{kj}z_j\right| = \sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|$$

olur. Böylece

$$\max_{\|x\|_\infty=1}\|Ax\|_\infty \ge \max_{1\le k\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}| = |||A|||_\infty$$

elde ederiz.

Teorem 2.4. $\|\,.\,\|$, M_n üzerinde matris normu, $A,\ S\in M_n$ ve S singüler değilse bu takdirde

$$\forall A \in M_n \text{ için } \quad \|A\|_s = \|S^{-1}AS\|$$

bir matris normudur.

İspat. $\|.\|_S$, (1) , (1a) , (2) ve (3)'üncü aksiyomlarının sağlandığı açıktır. $\|.\|_S$' nın matris normlarının (4) aksiyomundan

$$\|AB\|_s = \|S^{-1}ABS\| = \|(S^{-1}AS)(S^{-1}BS)\| \le \|S^{-1}AS\|.\|S^{-1}BS\|$$
$$\|AB\|_s = \|A\|_s\|B\|_s$$

olur ki iddia doğrudur. ■

Tanım 2.7. $A\in M_n$ için

$$\rho(A)\equiv \max\{|\lambda|:\ \lambda,\ \ A\text{ ' nın } \quad \text{özdeğeridir}\}$$

şeklinde tanımlanan $\rho(A)$'ya A matrisinin spektral yarıçapı denir.

A'nın herhangi bir özdeğeri λ ise bu takdirde $|\lambda|\le\rho(A)$ olur. Bununla birlikte $|\lambda|=\rho(A)$ olacak şekilde enaz bir λ öz değeri vardır. Eğer $x \neq 0$, $Ax=\lambda x$ ve $|\lambda|=\rho(A)$ ise sütunları x öz vektörlerinden oluşan $X\in M_n$ matrisini gözönüne alırsak $AX = \lambda X$ olur. $\|\,.\,\|$ herhangi bir matris normu ise

$$|\lambda|.\|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| \le \|A\|.\|X\|$$

olur. Böylece

$$|\lambda| = \rho(A) \leq |||A|||$$

bulunur. Bu ise aşağıdaki teoremin ispatıdır.

Teorem 2.5. $A \in M_n$ ve $|||\,.\,|||$ herhangi bir matris normu ise bu takdirde

$$\rho(A) \leq |||A|||$$

dır.

Örnek 2.3. $A \in M_n$ matrisi üzerinde $\|\,.\,\|$ vektör normu ise

$$\|A\| < \rho(A)$$

olur.

Lemma 2.1. $A \in M_n$ ve $\varepsilon > 0$ olarak verilsin.

$$\rho(A) \leq |||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon \tag{2.4}$$

olacak şekilde $\|\,.\,\|$ bir matris normu vardır.

İspat. Schur üçgenleştirme teoreminden ([7] sayfa 192, Teorem 7.1.2.) U üniter matris ve Δ üst üçgen matris olsun. Bu takdirde $A = U^{*}\,\Delta\, U$ olarak yazılabilir. $D_t \equiv \mathrm{diag}(t, t^2, t^3, \ldots, t^n)$ olarak alırsak

$$D_t \Delta D_t^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & t^{-1}d_{12} & t^{-2}d_{13} & .. & t^{-n+1}d_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & t^{-1}d_{23} & \ldots & t^{-n+1}d_{2,n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & t^{-n+3}d_{3,n} \\ \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t^{-1}d_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

elde edilir. t > 0 için $D_t \Delta D_t^{-1}$' in esas köşegeni dışındaki elemanlarının mutlak değerlerinin toplamı ε'dan daha küçüktür. Özel olarak, genelliği bozmadan, yeteri kadar büyük t ler için

$$|||D_t \Delta D_t^{-1}|||_1 \leq \rho(A) + \varepsilon$$

dur. $B \in M_n$ için $|||\,.\,|||$ matris normunu

$$|||B||| = |||D_t U^* B U D_t^{-1}|||_1 = |||(UD_t^{-1})B(UD_t^{-1})|||_1$$

olarak tanımlayalım. t'yi yeterince büyük seçersek

$$|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon \qquad \text{ve} \qquad \rho(A) \leq |||A|||$$

olur. O halde (2.4) eşitsizliğini sağlayan bir matris normu vardır.

■

Lemma 2.2. $A \in M_n$ matrisi verilsin. Eğer $\|A\| < 1$ olacak şekilde $\|.\|$ bir matris normu var ise

$$\lim_{k \to \infty} A^k = 0$$

dır. Yani $k \to \infty$ için A^k' nın bütün elemanları sıfıra gider.

İspat. Eğer $\|A\| < 1$ ise bu takdirde $k \to \infty$ için

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k \to 0$$

olur. O halde $|||\,.\,|||$ normuna göre $A^k \to 0$ dır. Fakat nxn boyutlu M_n uzayı üzerindeki bütün vektörlerin normları denktir. Bu durumda $\|.\|_\infty$ vektör normuna göre $A^k \to 0$ olmak zorundadır. ■

$A \in M_n$ matrisi için

$$\lim_{k\to\infty} A^k = 0$$

ise $A \in M_n$ matrisine yakınsaktır denir ve bu özellik uygulamalarda önemlidir. Örneğin böyle ardışık yöntemler analizde sıkca kullanılır. Böylece yakınsak matrislerin bu şekilde karekterizasyonun önemi anlaşılmış olur.

Teorem 2.6. $A \in M_n$ olsun. $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$ olması için gerek ve yeter şart

$$\rho(A) < 1$$

olmasıdır.

İspat. $A^k \to 0$ ve x , $Ax=\lambda x$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir vektör ise sadece $|\lambda|<1$ için $A^k x = \lambda^k x \to 0$ olur. Bu eşitsizlik A'nın herbir özdeğeri için sağlanacağından, $\rho(A)<1$ elde edilir. Tersine olarak, $\rho(A) < 1$ ise Lemma 2.1.' den $\rho(A) \le |||A||| \le \rho(A) + \varepsilon$ olması gerekir. Buradan da $\|A\| <$ olacak şekilde $|||\,.\,|||$ bir matris normu vardır. Böylece $k \to \infty$ için $\rho(A)<1$ sonucuna varırız. Böylece lemma (2.2)'den $k \to \infty$ için $A^k \to 0$ dır. ■

Sonuç 2.2. $A \in M_n$ matrisi verilsin ve $\varepsilon > 0$ olsun. Her $k=1,2,3,...$ ve $i,j=1,2,3,...,n$ için

$$\left|\left(A^k\right)_{i,j}\right| \le C(\rho(A)+\varepsilon)^k$$

olacak şekilde bir $C = C(A, \varepsilon)$ sabiti vardır.

İspat. $\tilde{A} \equiv [\rho(A)+\varepsilon]^{-1} A$ matrisinin spectral yarıçapı 1'den küçük olduğundan A yakınsaktır ve böylece $k \to \infty$ için $\tilde{A}^k \to 0$ olur. Özel olarak, her i,j=1,2,3,...,n ve k=1,2,3,... olmak üzere $\{\tilde{A}^k\}$ dizisinin elemanları sınırlıdır. O halde

$$\left|\left(\tilde{A}^k\right)_{i,j}\right| \leq C$$

olacak şekilde sonlu bir $C > 0$ sayısı vardır. ■

Sonuç 2.3. $|||\cdot|||$,M_n üzerinde bir matris normu olsun. Bu takdirde her $A \in M_n$ için

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} |||A^k|||^{1/k}$$

dır.

İspat. $\rho(A)^k = \rho(A^k) \leq |||A^k|||$ olduğundan her k=1,2,... için

$$\rho(A) \leq |||A^k|||^{1/k}$$

dır. $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\tilde{A} \equiv [\rho(A)+\varepsilon]^{-1} A$ matrisi için spectral yarıçap 1'den küçük olduğundan yakınsaktır. Böylece $k \to \infty$ için $|||\tilde{A}^k||| \to 0$ olduğu açıktır. Her $k \geq N$ için $|||\tilde{A}^k||| < 1$ olacak şekilde N=N(ε,A) vardır. O halde her $k \geq N$ için $|||A^k||| \leq [\rho(A)+\varepsilon]^k$ olur. Yada k≥N için $|||A^k|||^{1/k} \leq \rho(A)+\varepsilon$ dur. Her k ve $\varepsilon > 0$ için $\rho(A) \leq |||A^k|||^{1/k}$ olduğundan $\lim_{k\to\infty} |||A^k|||^{1/k}$ vardır ve

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} |||A^k|||^{1/k}$$

eşitliği gerçeklenir. ■

Teorem 2.7. $A \in M_n$ ve M_n üzerinde $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \, |||A_k|||^k$ yakınsak olacak şekilde $|||.|||$ matris normu varsa veya bu serinin kısmi toplamları sınırlı ise bu takdirde $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ serisi yakınsaktır.

Sonuç 2.4. Eğer $|||I - A||| < 1$ olacak şekilde $|||.|||$ matris normu var ise $A \in M_n$ matrisinin tersi alınabilirdir. Eğer bu şart sağlanırsa

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k$$

olur.

İspat. $|||I - A||| < 1$ ise, $\sum z^k$ serisinin yakınsaklık yarıçapı 1 olduğundan, $\sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k$ serisi bazı C matrisleri için yakınsaktır. $N \to \infty$ için

$$A \sum_{k=0}^{N} (I - A)^k = [I - (I - A)] \sum_{k=0}^{N} (I - A)^k = I - (I - A)^{N+1} \to I$$

olduğundan, $C = A^{-1}$ olduğu sonucuna varılır. ■

Teorem 2.8. C^n üzerinde verilen vektör normları $\|.\|_\alpha$ *ve* $\|.\|_\beta$ olsun. M_n üzerindeki $|||.|||_\alpha$ *ve* $|||.|||_\beta$ matris normlarını

$$|||A|||_\alpha \equiv \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} \text{ ve } \quad |||A|||_\beta \equiv \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\beta}{\|x\|_\beta} \tag{24.a}$$

olarak tanımlayalım. Ayrıca

$$R_{\alpha\beta} \equiv \max_{x \neq 0} \frac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\beta} \text{ ve } \quad R_{\beta\alpha} \equiv \max_{x \neq 0} \frac{\|x\|_\beta}{\|x\|_\alpha} \tag{2.5}$$

olarak alalım. Bu takdirde

$$\max_{A\neq 0}\frac{|||A|||_{\alpha}}{|||A|||_{\beta}} = R_{\alpha\beta}R_{\beta\alpha} \tag{2.6}$$

olur. Özel olarak

$$\max_{A\neq 0}\frac{|||A|||_{\alpha}}{|||A|||_{\beta}} = \max_{A\neq 0}\frac{|||A|||_{\beta}}{|||A|||_{\alpha}} = R_{\alpha\beta}R_{\beta\alpha} \tag{2.7}$$

dır.

İspat: $x \in C^n$ ve $A \in M_n$ olarak verilsin. $x \neq 0$ ve $Ax \neq 0$ kabul edelim Bu takdirde

$$\frac{\|Ax\|_{\alpha}}{\|A\|_{\alpha}} = \frac{\|Ax\|_{\alpha}}{\|Ax\|_{\beta}}.\frac{\|Ax\|_{\beta}}{\|x\|_{\beta}}.\frac{\|x\|_{\beta}}{\|x\|_{\alpha}} \leq R_{\alpha\beta}\frac{\|Ax\|_{\beta}}{\|x\|_{\beta}}R_{\beta\alpha}$$

olur ki burada $Ax = 0$ olduğunda da eşitsizlik sağlanır. Böylece

$$|||A|||_{\alpha} \equiv \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_{\alpha}}{\|x\|_{\alpha}} \leq R_{\alpha\beta}\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_{\beta}}{\|x\|_{\beta}}R_{\beta\alpha} \equiv R_{\alpha\beta}R_{\beta\alpha}|||A|||_{\beta}$$

olur ve buradan da sıfırdan farklı her $A \in M_n$ için

$$\frac{|||A|||_{\alpha}}{|||A|||_{\beta}} \leq R_{\alpha\beta}R_{\beta\alpha} \tag{2.8}$$

dir.

(2.5)'deki iki ifade de sıfırdan farklı bir vektör için gerçeklenir. Böylece,

$$\|y\|_2 = \|z\|_2 = 1\ ,\ \|y\|_{\alpha} = R_{\alpha\beta}\|y\|_{\beta} \text{ ve } \|z\|_{\beta} = R_{\beta\alpha}\|z\|_{\alpha}$$

olacak şekilde $y,z\in C^n$ vektörleri vardır. Ayrıca sonuç (2.1)' den

$$\text{(a)}\quad |z_0^* x| \le \|x\|_\beta \quad x\in C^n$$

$$\text{(b)}\quad z_0^* z = \|z\|_\beta$$

olacak şekilde $z_0 \in C^n$ vektörü vardır. $A_0 \equiv yz_0^*$ matrisini gözönüne alırsak (b)' den

$$\frac{\|A_0 z\|_\alpha}{\|z\|_\alpha} = \frac{\|yz_0^* z\|_\alpha}{\|z\|_\alpha} = \frac{\|y\|_\alpha |z_0^* z|}{\|z\|_\alpha} = \frac{\|y\|_\alpha \|z\|_\beta}{\|z\|_\alpha}$$

olur. Buradan

$$|||A_0|||_\alpha \ge \frac{\|y\|_\alpha \|z\|_\beta}{\|z\|_\alpha} = R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} \|y\|_\beta$$

alt sınırını elde ederiz. Diğer yandan

$$|||A_0|||_\beta \le \|y\|_\beta$$

dir. Bu iki sınırı birleştirirsek

$$\frac{|||A_0|||_\alpha}{|||A_0|||_\beta} \ge \frac{R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} \|y\|_\beta}{\|y\|_\beta} = R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha}$$

$$\frac{|||A|||_\alpha}{|||A|||_\beta} \le R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha}$$

elde edilir ki bu eşitsizlik (2.8)'deki eşitsizliğin varlığını, dolayısıyla (2.6)'deki eşitsizliğin de varlığını gösterir. (2.6) eşitsizliğinin sağ yanı α ve β'ya göre simetrik olduğundan (2.7) eşitsizliği de mevcuttur. ■

Sonuç 2.5. C^n üzerinde verilen vektör normları $\|.\|_\alpha$, $\|.\|_\beta$ ve M_n üzerinde matris normları da $|||.|||_\alpha$ *ve* $|||.|||_\beta$ olsun. Her $A \in M_n$ olmak üzere $|||A|||_\alpha = |||A|||_\beta$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in C^n$ için $\|x\|_\alpha = c\|x\|_\beta$ olacak şekilde c pozitif sabit sayısının var olmasıdır.

İspat. $$R_{\alpha\beta} = \max_{\|x\|=1} \frac{\|x\|_\beta}{|x|_1} = \left[\min_{\|x\|=1} \frac{\|x\|_\alpha}{|x|_1}\right]^{-1} \geq \left[\max_{\|x\|=1} \frac{\|x\|_\alpha}{|x|_1}\right]^{-1} = \frac{1}{R_{\beta\alpha}}$$

olduğundan $R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} \geq 1$ genel eşitsizliği vardır. Burada eşitliğin var olması için gerek ve yeter şart

$$\min_{x\neq 0} \frac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\beta} = \max_{x\neq 0} \frac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\beta}$$

olmasıdır. Bunun da var olması için gerek ve yeter şart her $x\neq 0$ için

$$\frac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\beta} = c$$

olmasıdır. Dolayısıyla $\|x\|_\alpha = c\|x\|_\beta$ olur. Eğer $\|x\|_\alpha = c\|x\|_\beta$ ise her $A \in M_n$ için (2.7)'den $R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} = 1$ ve $|||A|||_\alpha \leq |||A|||_\beta$ ve $|||A|||_\beta \leq |||A|||_\alpha$ olurki iki matris normu özdeş olarak eşittir. Tersine olarak, (2.6)' dan $R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} = 1$ yazabiliriz. Bununla birlikte $R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} \geq 1$ olduğundan $\|x\|_\alpha / \|x\|_\beta$ oranı bir önceki argümandan sabittir ■

Sonuç 2.6. C^n üzerinde verilen vektör normları $\|.\|_\alpha$, $\|.\|_\beta$ ve M_n üzerinde $|||.|||_\alpha$ *ve* $|||.|||_\beta$ matris normları (24.a)'daki gibi olsunlar. Bu takdirde her $A \in M_n$ verildiğinde $|||A|||_\alpha \leq |||A|||_\beta$ olması için gerek ve yeter şart

$$|||A|||_{\alpha} = |||A|||_{\beta}$$

dır

İspat. Her $A \in M_n$ için $|||A|||_{\alpha} \le |||A|||_{\beta}$ ise $R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} \le 1$ dir. Ayrıca $R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} \ge 1$ olduğundan $R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} = 1$ bulunur. yine (2.7) mevcut olduğundan her $A \in M_n$ için

$$|||A|||_{\alpha} \le |||A|||_{\beta} \text{ ve } |||A|||_{\beta} \le |||A|||_{\alpha}$$

yazabiliriz. Dolayısı ile

$$|||A|||_{\alpha} = |||A|||_{\beta}$$

dir. ■

2.2 Matris Normları Arasındaki Bağıntılar

A, mxn tipinde herhangi bir matris olsun Bu takdirde bu matrisin normları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

1) $\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\|A\|_2$

2) $\|A\|_\Delta \le \|A\|_2 \le \sqrt{mn}\|A\|_\Delta \quad (\|A\|_\Delta = \max|a_{ij}|)$

3) $\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1 . \|A\|_\infty}$

4) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}\|A\|_\infty$

5) $\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_1$

Frobenius normu ve spektral normun en önemli özelliği ortaganal dönüşümlere göre invaryant olmalarıdır.

3. TOEPLITZ FORMLARI

$$f(x) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3.1}$$

Fourier serisini gözönüne alalım. $a_0, a_1, b_1, a_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ katsayıları reel olmak üzere bu seri kutupsal koordinatlarda bir harmonik fonksiyonun açılımıdır. Buradan

$$c_n = a_n - ib_n$$

ise

$$c_{-n} = \bar{c}_n = a_n + ib_n \quad (n = 0,1,2\ldots.. \, ; \, b_0 = 0\,)$$

olur. Böylece, yukardaki elemanlardan faydalanarak $[(c_{\mu-\nu})]$ gibi bir hermitian matris tanımlayabiliriz. Burada $\mu,\nu = 0,1,2..$dır. Şimdi

$$T_n = \sum c_{\mu-\nu} u_\mu \bar{u}_\nu \ , \ (\mu, \nu = 0,1,2..\, n) \tag{3.2}$$

formunu göz önüne alalım.

Tanım 3.1. Harmonik fonksiyon ile uyuşan (3.2) formuna Toeplitz formu denir.

f(x), reel değerli fonksiyon olmak üzere

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)dx; \ (c_{-n} = \bar{c}_n) \tag{3.3}$$

olarak tanımlayalım. Buradan

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

yazabiliriz. Bu durumda (3.2)'ye hermtian Toeplitz formu denir ve

$$T_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|u_0 + u_1 e^{ix} + u_2 e^{2ix} + ... + u_n e^{nix}\right|^2 f(x)\, dx$$

şeklinde ifade edilebilir. $[-\pi , \pi]$ aralığında tanımlı $\alpha(x)$ bir dağılım fonksiyonu ile onların Fourier-Steieltjes katsayılarını göz önüne alırsak,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} d\alpha(x) \quad (c_{-n} = \bar{c}_n) \qquad (3.4)$$

olur. $\alpha(x)$ dağılım fonksiyonu ile uyuşan Toeplitz formları, (3.2) Hermitian formuna getirilir. Yani

$$T_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|u_0 + u_1 e^{ix} + u_2 e^{2ix} + ... + u_n e^{nix}\right|^2 d\alpha(x) \qquad (3.5)$$

olur. (3.4)'deki $\alpha(x)=x$ veya (3.3)'deki $f(x)=1$ veya (3.1)'deki $a_0=1$ alınması durumunda $c_0=1$ ve $n\neq 0$ için $c_n= 0$ olup

$$T_n = |u_0|^2 + |u_1|^2 + ... + |u_n|^2$$

olur.

3.1. Cauchy Matrislerinin Genel Özellikleri

Tanım 3.1 .Bütün i ve j'ler için $x_i \neq y_j$ olmak üzere

$$A_n = \left[\frac{1}{x_i - y_j}\right]_{i,j=1}^{n} \qquad (3.5a)$$

şeklindeki matrise Cauchy matrisi denir.

A_n'deki en son satırı önceki satırların her birinden çıkaralım. Sütunlar için de aynı şeyi yapalım. Bunu yaptıktan sonra (n-1). mertebeden A_{n-1} alt matrisini sağdan ve soldan köşegen elemanlarıyla çarpalım. Buradan A_n'in determinantını hesaplayacak olursak

$$\det A_n = \det A_{n-1} \frac{1}{x_n - y_n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(x_i - x_n)(y_n - y_i)}{(x_i - y_n)(x_n - y_i)} \tag{3.6}$$

elde ederiz. Netice olarak

$$\det A_n = \frac{\prod\limits_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j) \prod\limits_{1 \le i < j \le n} (y_j - y_i)}{\prod\limits_{1 \le i, j \le n} (x_i - y_j)} \tag{3.7}$$

buluruz. Böylece $x_i \neq y_j$ ve $y_i \neq y_j$ ise A_n singüler değildir.

$$z = [z_1, \ldots, z_n]^T \quad b = [b_1, \ldots, b_n]^T$$

olmak üzere

$$A_n z = b$$

lineer cebirsel sistemini gözönüne alalım. Bu sistemi Cramer kuralı ile çözersek (3.7)'ye benzer

$$z_\ell = (-1)^\ell \frac{1}{\det A_n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k b_k \frac{\prod\limits_{\substack{1 \le i < j \le n \\ i,j \ne k}} (x_i - x_j) \prod\limits_{\substack{1 \le i < j \le n \\ i,j \ne \ell}} (y_j - y_i)}{\prod\limits_{\substack{1 \le i < j \le n \\ i \ne k, j \ne \ell}} (x_i - y_j)} \tag{3.8}$$

ifadesini elde ederiz. (3.6)'deki $\det A_n$ değeri, (3.8) de yerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$u_\ell = \frac{\prod_{i=1}^{n}(x_i - y_\ell)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq\ell}}^{n}(y_i - y_\ell)}, \ (\ell = 1,\ldots,n) \tag{3.9}$$

$$v_k = \frac{\prod_{j=1}^{n}(x_k - y_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq\ell}}^{n}(x_k - x_j)}, \ (k = 1,\ldots,n) \tag{3.10}$$

olmak üzere

$$z_\ell = u_\ell \sum_{k=1}^{n} \frac{v_k b_k}{x_k - y_\ell}, \ (\ell = 1,\ldots,n)$$

elde edilir.

Teorem 3.1. [13] A_n , n. mertebeden singüler olmayan Cauchy matrisi olsun.Bu takdirde A_n'nin tersi olan matris

$$A_n^{-1} = U_n A_n^T V_n \tag{3.11}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$U_n = \mathrm{diag}(u_1,\ldots,u_n), \quad V_n = \mathrm{diag}(v_1,\ldots,v_n) \tag{3.12}$$

ve $u_1,\ldots u_n$, $v_1,\ldots,v_n$

$$A_n[u_1,\ldots,u_n]^T = [1,\ldots,1]^T$$

$$[v_1,\ldots,v_n]A_n = [1,\ldots,1]$$

lineer sistemlerinin çözümleri olup (3.9) ve (3.10) formülleri ile verilirler.

3.2. Cauchy-Toeplitz Matrisleri Ve Singüler Değerleri

Tanım 3.2.[13] $h \neq 0$ ve $g/h \notin Z$ (Z tam sayılar cümlesi) olmak üzere

$$T_n = \left[\frac{1}{g+(i-j)h}\right]_{i,j=1}^{n} \tag{3.13}$$

şeklindeki bir matrise Cauchy - Toeplitz Matrisi denir.

$g=1/2$ ve $h=1$ özel durumunu göz önüne alarak (3.9) ve (3.10) formullerini bu duruma uyarlayalım. (3.5a) formulünde $x_i = i+1/2$, $y_j=j$ alırsak T_n matrisi

$$T_n = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+i-j}\right]_{i,j=1}^{n}$$

şekline dönüşür. Şimdi yukardaki A_n için elde ettiğimiz sonuçları T_n için yeniden düzenlersek

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i - y_\ell) = \prod_{i=1}^{n}\left[i+\frac{1}{2}-\ell\right] = \frac{(-1)^{\ell-1}}{2}\prod_{i=1}^{\ell-1}\left(i-\frac{1}{2}\right)\prod_{i=1}^{n-\ell}\left(i+\frac{1}{2}\right) \tag{3.14}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(x_k - y_i) = \prod_{i=1}^{n}\left[k+\frac{1}{2}-i\right] = \frac{(-1)^{n-k}}{2}\prod_{i=1}^{k-1}\left(i+\frac{1}{2}\right)\prod_{i=1}^{n-k}\left(i-\frac{1}{2}\right) \tag{3.15}$$

$$\prod_{\substack{i=1\\ i\neq \ell}}^{n}(y_\ell - y_i) = (-1)^{\ell-1}(\ell-1)!(n-\ell)$$

$$\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(x_k - x_i) = (-1)^{n-k}(k-1)!(n-k)!$$

ve

$$u_\ell = \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{\ell-1}\left(1-\frac{1}{2i}\right)\prod_{i=1}^{n-\ell}\left(1+\frac{1}{2i}\right) \quad \ell=1,2,\ldots,n \tag{3.16}$$

$$v_k = \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{k-1}\left(1+\frac{1}{2i}\right)\prod_{i=1}^{n-k}\left(1-\frac{1}{2i}\right) \quad k=1,2,\ldots,n \tag{3.17}$$

olur.

Teorem 3.2. [13] Herhangi bir n için $\alpha_n>0$, $\alpha_n=0(1/n)$ olmak üzere

$$\pi-\alpha_n \leq \|\,.\,\|_2 \leq \pi$$

dır. Burada $\|.\|_2$, matrisin spektral normudur.

İspat. Üst sınırın π olduğu Parter [4] tarafından gösterildi. Şimdi

$$\tilde{T}_n = \begin{bmatrix} 0 & T_n^T \\ T_n & 0 \end{bmatrix}$$

simetrik matrisini göz önüne alalım. $\rho_{1n},\ldots,\rho_{nn}$ yukarıdaki matrisin özdeğerleridir. $\tilde{T}_n$ matrisi 2. mertebeden blok matrislerden oluşan $\hat{T}_n$ matrisinin permütasyon benzerdir. O halde $\hat{T}_n$ blok Toeplitz (fakat bu matris Toeplitz değildir.) matrisini

$$\hat{T}_n = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2/3 & 0 & 2/5 & . & . & . \\ 2 & 0 & -2 & 0 & -2/3 & 0 & . & . & . \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 2/3 & . & . & . \\ 2/3 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

olarak yazarız. Bu matrisin tek numaralı satırlarını imajiner i ve çift numaralı satırlarını imajiner -i ile çarparsak

$$\alpha_m = \begin{cases} 0 & , \text{ m çift} \\ i(2/m), & \text{m tek} \end{cases}$$

olmak üzere $A = \left[\alpha_{i-j}\right]_{i,j=0}^{2n-1}$ şeklinde hermitian Toeplitz matrisini elde ederiz.O halde

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi \le x \le 0 \\ \pi, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

olmak üzere

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} \, f(x)\,dx$$

yazarız. $w=[w_0,\ldots,w_{2n-1}]^T$ olsun. (3.5)'den

$$(Aw, w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| w_0 + w_1 e^{ix} + \ldots + w_{2n-1} e^{i(2n-1)x} \right|^2 f(x)dx$$

$$(w, w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| w_0 + w_1 e^{ix} + \ldots + w_{2n-1} e^{i(2n-1)x} \right|^2 dx$$

elde edilir. f(x)'in bu şeklini kullanarak

$$\|T_n\|_2 = \|A\|_2 = \max_{w \neq 0} \left| \frac{(Aw, w)}{(w, w)} \right| \leq \pi$$

bulunur.

e_j , birim matrisin j sütununu göstermek üzere $\|T_n e_j\|_2 \leq \|T_n\|_2$ eşitsizliğini kullanır ve j=[n/2] alırsak ([.] tam değer)

$$\|T_n e_j\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k - j + 1/2)^2}$$
$$= 4\left(\sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{n-j} \frac{1}{(2k+1)^2} \right)$$

olur.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ve $n \to \infty$ için $\|T_n e_{[n/2]}\|_2^2 \to \pi^2$ olduğundan,

$$\alpha_n = 4\left(\sum_{k=[n/2]-1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=n-[n/2]+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \right)$$

yazabiliriz. Bu takdirde $\alpha_n = O(1/n)$ ve $\alpha_n \leq \pi$ olmak üzere

$$\pi - \alpha_n \leq \sqrt{\pi^2 - \alpha_n} \leq \|T_n\|_2$$

olur.

Teorem 3.3.[13]. $0<\varepsilon<\pi$, ve ρ_{jn}, T_n' in singüler değerleri olsun. γ_n $\rho_{jn}<\pi-\varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan singüler değerlerinin sayısı ise $\gamma_n = o(n)$ ($n\to\infty$ için $o(n)/n\to 0$) dır.

İspat. Keyfi $\delta>0$ olsun.

$$\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{(2k+1)^2}\geq\frac{\pi^2}{8}-\delta$$

sağlanacak şekilde $m_\delta+2\leq j\leq n-m_\delta$ ise $j\geq m_\delta$ sayısı vardır.

$$\|T_n e_j\|^2\geq\pi^2-8\delta$$

yazarız. O halde

$$(\pi^2-8\delta)(n-2m_\delta-1)/n\leq\sum_{j=1}^{2}\|T_n e_j\|_2^2/n\leq\pi^2$$

olur. Sol taraftaki ifadede $n\to\infty$ için limit alırsak $\pi^2-8\delta$ olur.

$$\sum_{j=1}^{n}\rho_{jn}^2=\sum_{j=1}^{n}\|T_n e_j\|_2^2\ (=\mathrm{tr}T_n^T T)$$

ve δ keyfi olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\rho_{1n}^2+\ldots+\rho_{nn}^2}{n}=\pi^2 \qquad (3.18)$$

olur. Ayrıca

$$\frac{\rho_{1n}^2+\ldots+\rho_{nn}^2}{n} < \frac{\gamma_n}{n}(\pi-\varepsilon)^2 + \frac{n-\gamma_n}{n}\pi^2$$

ve (3.18)'in neticesinde $\gamma_n = o(n)$ olur. Bu da ispatı tamamlar. ■

Şimdi (3.14) ve (3.15) deki formulleri genel hal için yeniden düzenlersek

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i - y_i) = \prod_{i=1}^{n}[g+(i-m)h] = (-1)^{m-1} g \prod_{i=1}^{m-1}(ih-g)\prod_{i=1}^{n-m}(ih+g),$$

$$\prod_{i=1}^{n}(x_k - y_i) = \prod_{i=1}^{n}[g+(k-i)h] = (-1)^{n-k} g \prod_{i=1}^{k-1}(g+ih)\prod_{i=1}^{n-k}(ih-g),$$

$$\prod_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n}(y_m - y_i) = (-1)^{m-1}h^{n-1}(m-1)!(n-m)!$$

ve

$$\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(x_k - x_i) = (-1)^{n-k}h^{n-1}(k-1)!(n-k)!\ .$$

elde ederiz. Benzer şekilde (3.16) ve (3.17)' de

$$u_m = \frac{\prod_{i=1}^{n}[g+(i-m)h]}{h^{n-1}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n}(i-m)}, \quad m = 1,2,3,\ldots,n$$

ve

$$v_k = \frac{\prod_{i=1}^{n}[g+(k-j)h]}{h^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(k-j)}, \quad k = 1,2,3,\ldots,n$$

den

$$u_m = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!(n-m)!} gh^{n-1} \prod_{i=1}^{m-1}\left(\frac{g}{h}-i\right)\prod_{i=1}^{n-m}\left(\frac{g}{h}+i\right)$$

ve

$$v_k = \frac{(-1)^{n-k}}{(k-1)!(n-k)!} gh^{n-1} \prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{g}{h}+i\right)\prod_{i=1}^{n-k}\left(\frac{g}{h}-i\right)$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.4.[4] T_n , (3.13) deki gibi bir genel Cauchy-Toeplitz matrisi olsun. Bu takdirde $s_n > 0$ ve $s_n = O(1/n)$ olmak üzere

$$\frac{\sqrt{n\pi}}{|h|} - s_n \leq \|T_n\|_E \leq \frac{\sqrt{n\pi}}{|h|}$$

olur. Burada $\| \,.\, \|_E$ Euclidian normudur.

İspat. (3.13)' deki T_n matrisini açık yazarsak

$$T_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{g} & \frac{1}{g-h} & \cdots & \frac{1}{g-(n-1)h} \\ \frac{1}{g+h} & \frac{1}{g} & \cdots & \frac{1}{g-(n-2)h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{g+(n-1)h} & \frac{1}{g+(n-2)h} & \cdots & \frac{1}{g} \end{pmatrix}$$

olur. T_n , matrisinde h'ı , parentez dışına alırsak

$$T_n = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\dfrac{g}{h}} & \dfrac{1}{\dfrac{g}{h}-1} & \cdots & \dfrac{1}{\dfrac{g}{h}-(n-1)} \\ \dfrac{1}{\dfrac{g}{h}+1} & \dfrac{1}{\dfrac{g}{h}} & \cdots & \dfrac{1}{\dfrac{g}{h}-(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{1}{\dfrac{g}{h}+(n-1)} & \dfrac{1}{\dfrac{g}{h}+(n-2)} & \cdots & \dfrac{1}{\dfrac{g}{h}} \end{pmatrix}$$

elde ederiz. $\|\,.\,\|_E$ Euclidean normu olmak üzere

$$\|T_n\|_E^2 = \frac{1}{h^2}\left[\frac{n}{\left(\frac{g}{h}\right)^2} + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\left(\frac{1}{\left(\frac{g}{h}+k\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{g}{h}-k\right)^2}\right)\right] \tag{3.19}$$

yazarız. (3.19)'u n ortak parentezine alırsak

$$\|T_n\|_E^2 = \frac{n}{h^2}\left[\frac{1}{\left(\frac{g}{h}\right)^2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k)}{n}\left(\frac{1}{\left(\frac{g}{h}+k\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{g}{h}-k\right)^2}\right)\right]$$

olur.

$$\left[\frac{1}{\left(\frac{g}{h}\right)^2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k)}{n}\left(\frac{1}{\left(\frac{g}{h}+k\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{g}{h}-k\right)^2}\right)\right] \le \pi^2$$

olduğundan,

$$\|T_n\|_E \le \frac{\sqrt{n}\pi}{|h|}$$

elde edilir.

$$\|T_n e_i\|_E \le \|T_n\|_E$$

eşitsizliğini kullanırsak $\|T_n\|_E$ için alt sınırı elde etmiş oluruz. Buradaki e_i birim matrisin i'inci sütununu göstermektedir. $i=[n/2]$ alırsak;

$$\|T_n e_i\|_E^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{[g+(k-i)h]^2} \quad ,$$

$$\|T_n e_i\|_E^2 = \frac{4}{h^2}\left(\sum_{k=0}^{\left[i-\frac{g}{h}-\frac{3}{2}\right]} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{\left[n+\frac{g}{h}-\frac{1}{2}-1\right]} \frac{1}{(2k+1)^2} \right).$$

elde ederiz.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

olduğundan $n \to \infty$ için $\|T_n e_{[n/2]}\|_E^2 \to \frac{\pi^2}{8}$ sonucu elde edilir.

$$s_n = \frac{4}{h^2}\left(\sum_{k=\left[\frac{n}{2}-\frac{g}{h}-\frac{1}{2}\right]}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{\left[\frac{n}{2}-\frac{g}{h}+\frac{1}{2}\right]}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \right)$$

olarak alalım. $s_n \le \frac{\pi}{|h|}$ olduğundan ,

$$\frac{\sqrt{n}\pi}{|h|}-s_n \leq \frac{\sqrt{n}\pi^2}{h^2}-s_n \leq \|T_n\|_E$$

olur bu da istenen ispattır. ■

Teorem 3.5.[4] s, $0<s<\frac{\pi}{|h|}$ aralığında sabit bir sayı ve j=1,2,3,...,n için ρ_{jn} ,T_n Cauchy-Toeplitz matrisinin singular değerleri olsun. $\propto_n$,T_n 'in $\delta_{jn}<\frac{\pi}{|h|}$-s şartını sağlayan singüler değerlerinin sayısı ise Bu takdirde

$$\alpha_n = o(n) \ \ (\text{yani } n \to \infty \ \text{iç in } \frac{o(n)}{n} \to 0)$$

dir.

İspat. δ >0 olsun.

$$\sum_{k=0}^{i}\frac{1}{(2k+1)^2} \geq \frac{\pi^2}{8h^2}-\delta$$

olacak şekilde bir i> m_δ sayısı vardır. $m_\delta + 2 \leq i \leq n - m_\delta$ ise

$$\|T_n e_i\|_E^2 \geq \pi^2 - 8h^2\delta$$

dır. O halde

$$\frac{(\pi^2-8h^2\delta)(n-2m_\delta)}{n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}\|T_n e_i\|_E^2}{n} \leq \frac{\pi^2}{|n|} \leq \frac{\pi^2}{h^2}$$

olur. (3.20) ifadesinin sol tarafı $n \to \infty$ iç in $\pi^2 - 8h^2\delta$ olur.

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_{jn}^2 = \sum_{i=1}^{n} \|T_n e_i\|_E^2 \ (= trT_n^T T_n)$$

olduğundan, ve δ keyfi sabiti için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho_{1n}^2 + \rho_{2n}^2 + \ldots + \rho_{nn}^2}{n} = \frac{\pi^2}{h^2} \tag{3.21}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\frac{\rho_{1n}^2 + \rho_{2n}^2 + \ldots + \rho_{nn}^2}{n} < \frac{\alpha_n(\frac{\pi}{|h|} - s)^2}{n} + \frac{\pi^2(n - \alpha_n)}{nh^2} \tag{3.22}$$

elde ederiz. (3.21) ve (3.22)' den $\alpha_n = o(n)$ elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar. ■

Teorem 3.6. [4] T_n , (3.13) deki gibi bir matris olsun. Bu takdirde

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n^{-1}\|_E = \infty \tag{3.23}$$

ve

$$\|T_n^{-1}\|_E = \frac{\sqrt{n}\pi}{|h|} O\left(\left(\frac{2g}{h}\right)^{n-1}\right)$$

dir.

İspat. $\omega = (1,1,\ldots,1)^T$ olsun. $n \to \infty$ için

$$\frac{\|T_n^{-1}\|_E}{\|\omega\|_E} \to \infty$$

olduğunu göstermeliyiz U_m , (3.12) formulüyle verildiğinden

$$T_n^{-1}\omega = (u_1,\dots,u_n)^T$$

dir. $\frac{g}{2h} \geq 2$ olsun. Gamma-fonksiyon teorisinden

$$\prod_{i=1}^{m-1}\left(\frac{g}{h}-i\right) = \frac{g^{m-1}}{h^{m-1}}\prod_{k=1}^{[g/2h]}\left(1-\frac{1}{2k}\right)$$

ve

$$\prod_{i=1}^{n-m}\left(\frac{g}{h}+i\right) = \frac{g^{n-m}}{h^{n-m}}\prod_{k=1}^{[g/2h]}\left(1+\frac{1}{2k}\right)$$

yazılır. (3.16)'den

$$U_m = \frac{(-1)^{n-1}}{(m-1)!(n-m)!}gh^{n-1}\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{g}{h}\right)^{n-1} + O\left(\frac{(g/h)^{n-1}}{[g/2h]}\right) + O\left(\frac{1}{[g/2h]^2}\right)\right]$$

elde edilir. O halde

$$U_m^2 = \frac{g^2h^{2n-2}}{[(m-1)!(n-m)!]^2}\left[\frac{4}{\pi}\left(\frac{g}{h}\right)^{2n-2} + O\left(\frac{(g/h)^{2n-2}}{[g/2h]}\right) + O\left(\frac{(g/h)^n-1}{[g/2h]^2}\right)\right]$$

olduğundan,

$$U_m^2 \geq \frac{1}{[(m-1)!(n-m)!]^2}\left(\frac{4g^{2n}}{\pi^2} - C_1\frac{g^2n}{[g/2h]} - C_2\frac{g^n+1}{h^{n-1}[g/2h]}\right)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. c_1 ve c_2 'ler pozitif sabit sayılar olmak üzere her iki tarafın m'ye göre toplamını alırsak

$$\sum_{m=1}^{n} U_m^2 \geq \left(\frac{4g^{2n}}{\pi^2} - c_1 \frac{g^2 n}{\left[\frac{g}{2h}\right]} - c_2 \frac{g^n + 1}{h^{n-1}\left[\frac{g}{2h}\right]} \right) \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\left[(m-1)!(n-m)!\right]^2} \tag{3.24}$$

olur.

$$h \leq 1,\ h \neq 0 \text{ ve } \frac{g}{2h} \geq 2 \text{ iç in}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{4g^{2n}}{\pi^2} - c_1 \frac{g^2 n}{\left[\frac{g}{2h}\right]} - c_2 \frac{g^n + 1}{h^{n-1}\left[\frac{g}{2h}\right]} \right) \frac{1}{\left[(m-1)!(n-m)!\right]^2} \to \infty$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$\frac{\left\| T_n^{-1} \omega \right\|_E}{\left\| \omega \right\|_E} \leq \left\| T_n^{-1} \right\|_E$$

olur. Böylece (3.23) ispatı tamamlandı. (3.11) den

$$T_n^{-1} = U_n T_n^T V_n$$

yazarız. O halde

$$\left\| T_n^{-1} \right\|_E = \left\| U_n T_n^T V_n \right\|_E \leq \left\| U_n \right\|_E \left\| T_n^T \right\|_E \left\| V_n \right\|_E$$

olur. Teorem 3.6' dan

$$\left\| T_n^{-1} \right\|_E \leq \frac{\sqrt{n}\pi}{|h|} \left\| U_n \right\|_E \left\| V_n \right\|_E \tag{3.25}$$

yazarız. U_m ve V_k tanımlarından

$$\|U_n\|_E = o\left(\left(\frac{2g}{h}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right),\ \|V_n\|_E = o\left(\left(\frac{2g}{h}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right) \tag{3.26}$$

olur. (3.26)'yı (3.25)'de yerine yazarsak

$$\|T_n^{-1}\|_E \le \frac{\sqrt{n}\pi}{h} o\left(\left(\frac{2g}{h}\right)^{n-1}\right)$$

elde ederiz ki ispat tamamlanır. □

Tanım 3.3 $a \in R$ ve $1 \le i, j \le n$ olmak üzere

$$A_n = \begin{cases} a & , i = j \\ \dfrac{1}{i-j} & , i \ne j \end{cases} \tag{3.27}$$

matrisine almost Cauchy-Toeplitz matrisi denir.

Teorem 3.7. (3.27) deki gibi bir A_n matrisi , $\zeta(p)$ Riemann zeta fonksiyonu, $\alpha_n > 0$, $\alpha_n = O(1/n)$ ve $p > 2$ olmak üzere

$$\sqrt[p]{|a|^p - \alpha_n} \le n^{-1/p}\|A_n\|_p \le \sqrt[p]{|a|^p + 2\zeta(p)}$$

dir.

İspat. Her i $(1 \le i \le n)$ için e_i , R^n' nin standart bazı olmak üzere

$$\|A_n\|_p = \left[\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^p\right]^{1/p} = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(|a_{1i}|^p\|e_i\|^p + |a_{2i}|^p\|e_i\|^p + \ldots + |a_{ni}|^p\|e_i\|^p\right)\right]^{1/p}$$

(2.1)'den yazabiliriz. O halde

$$\|A_n\|_p = \left\{ n|a|^p + 2\left[(n-1) + (n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^p + (n-3)\left(\frac{1}{3}\right)^p + \ldots + \left(\frac{1}{n-1}\right)^p \right] \right\}^{1/p}$$

$$= \left(n|a|^p + 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{k^p} \right)^{1/p} \tag{3.28}$$

olur. (3.28)' in her iki yanını $n^{-1/p}$ ile çarparsak

$$n^{-1/p}\|A_n\|_p = \left(|a|^p + 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} - \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{p-1}} \right)^{1/p} \tag{3.29}$$

dır. Her iki tarafın $n \to \infty$ için limitini alırsak

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/p}\|A_n\|_p = \lim_{n\to\infty}\left(|a|^p + 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} - \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{p-1}} \right)^{1/p}$$

olur. Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \zeta(p) \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{p-1}} = 0,$$

olduğundan

$$n^{-1/p}\|A_n\|_p \le \sqrt[p]{|a|^p + 2\zeta(p)}$$

elde edilir. Böylece $\|A_n\|_p$ için üst sınırı bulmuş oluruz.

Alt sınırı bulmak için (3.29)'un sağındaki ilk toplamı ihmal edersek

$$n^{-1/p}\|A_n\|_p \geq \left(|a|^p - \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{p-1}}\right)^{1/p} \qquad (3.30)$$

$$\alpha_n = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{p-1}}$$

olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{1/n} \leq 2\xi(p-1)$$

olacağından $\alpha_n = O(1/n)$ dir. Bu takdirde

$$n^{-1/p}\|A_n\|_p \geq \sqrt[p]{|a|^p - \alpha_n}$$

bulunur ki bu da teoremin ispatıdır. ■

Teorem 3.8. [6] A_n Almost Cauchy-Toeplitz matrisi olsun. O halde

$$|a| + o(n) \leq n^{-1}\|A_n\|_p \leq |a| + \gamma + \log n + O(1/n), \ (p = 1)$$

$$|a| \leq n^{-1/p}\|A_n\|_p \leq \sqrt[p]{|a|^p + \frac{2^p}{2^{p-1}-1}}, \ (1 < P \leq 2)$$

$$\sqrt[p]{|a|^p + \xi(p)} \leq n^{-1/p}\|A_n\|_p \leq \sqrt[p]{|a|^p + 2\xi(p)} \qquad (3.31)$$

olur. Burada γ, Euler sabitidir.

(3.31)'deki alt sınır, Teorem 3.4' deki alt sınırdan daha iyidir.

İspat. İspatı üç adımda yapalım.

1. Adım: (3.29)'den p=1 için

$$\left.\begin{aligned} n^{-1}\|A_n\|_1 &= |a| + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{2(n-1)}{n} \\ &= |a| + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - 2 + \frac{2}{n} \\ &= |a| + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{2}{n} \end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

bulunur. Yeterince büyük n'ler için

$$\frac{2}{n} \to 0 \text{ ve } \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \gamma + \log n + O(1/n)$$

olup

$$n^{-1}\|A_n\|_1 \leq |a| + \gamma + \log n + O(1/n) \tag{3.33}$$

elde edilir. Alt sınır için (3.32)'deki son eşitlikte 2/n'i ihmal eder ve toplamlı ifadeyi de 2'ye bölersek

$$n^{-1}\|A_n\|_1 \geq |a| + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \tag{3.34}$$

bulunur. (3.34) ifadesindeki toplamlı ifadeye

$$\alpha_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k},$$

dersek

$\alpha_n = o(n)$ (yani $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n} = 0$) o halde olur.

$$n^{-1}\|A_n\|_p \geq |a| + o(n) \tag{3.35}$$

elde edilir.

2.Adım. $1 < p \leq 2$ olsun. (3.29)' den

$$n^{-1/p}\|A_n\|_p \leq \left(|a|^p + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^p}\right)^{1/p}$$

elde edilir. Buna seriler için p-testini uygularsak

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p} \leq \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}$$

olup

$$n^{-1/p}\|A_n\|_p \leq \sqrt[p]{|a|^p + \frac{2^p}{2^{p-1}-1}} \tag{3.36}$$

elde ederiz. (3.30)' u tekrar gözönüne alıp bu ifadenin $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{p-1}} = 0,$$

olacağından

$$n^{-1/p}\|A_n\|_p \geq |a| \tag{3.37}$$

elde edilir.

3.Adım. $p > 2$ için (3.31)' deki eşitsizliğinin sağ yanının ispatı Teorem 3.4 de yapıldı. Şimdi (3.31)' deki eşitsizliğinin sol tarafını ispatlayacağız. Bunun için

$$2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^p} - \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{p-1}} \geq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^p}$$

alabiliriz. O halde (3.29)' dan

$$n^{-1/p}\|A_n\|_p \geq \left(|a|^p + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^p}\right)^{1/p}$$

elde ederiz. n→ ∞ için bu ifade

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}=\zeta(p)$$

olduğundan

$$n^{-1/p}\|A_n\|_p \geq \sqrt[p]{|a|^p+\zeta(p)} \tag{3.38}$$

olur. Böylece (3.33) , (3.35) , (3.36) ,(3.37) ve (3.38)' den teoremin ispatı tamamlanmış olur. ■

3.3. Cauchy -Toeplitz Matrisinin ℓ_p Normları İçin Sınırlar

$\frac{g}{h} \notin Z$ ($h \neq 0$) olmak üzere, genel bir Cauchy - Toeplitz matrisinin

$$T_n=\left[\frac{1}{g+(i-j)h}\right]_{i,j=1}^{n}$$

şeklinde verildiğini (3.13)'den biliyoruz. Bu matrisi açık şekilde yazarsak

$$T_n \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{g} & \frac{1}{g-h} & \frac{1}{g-2h} & \cdots & \frac{1}{g-(n-1)h} \\ \frac{1}{g+h} & \frac{1}{g} & \frac{1}{g-h} & \cdots & \frac{1}{g-(n-2)h} \\ \frac{1}{g+2h} & \frac{1}{g+h} & \frac{1}{g} & \cdots & \frac{1}{g-(n-3)h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{g+(n-1)h} & \frac{1}{g+(n-2)h} & \frac{1}{g+(n-3)h} & \cdots & \frac{1}{g} \end{bmatrix}$$

olur.

Teorem 3.9. $0 < g/h < 1$ ve $(1 \le p < \infty)$ olmak üzere 3.13'de ki genel Cauchy-Toeplitz matrisinin ℓ_p normu için alt ve üst sınırlar

$$\|T_n\| \ge \frac{1}{|h|}\begin{cases}\left[-\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p\,,\,-\frac{g}{h}\right)\right]^{1/p} & ,\ p \text{ tek ise}\\ \left[\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p\,,\,-\frac{g}{h}\right)\right]^{1/p} & ,\ p \text{ çift ise}\end{cases}$$

$$\|T_n\| \le \frac{1}{|h|}\begin{cases}\left[-\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p\,,\,-\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p\,,\,\frac{g}{h}\right)\right]^{1/p} & ,\ p \text{ tek ise}\\ \left[\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p\,,\,-\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p\,,\,\frac{g}{h}\right)\right]^{1/p} & ,\ p \text{ çift ise}\end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. Herhangi bir matrisin ℓ_p normunun (2.1)'den

$$\|A_n\|_p = \left[\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^p\right]^{1/p}$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Bu teoremin ispatı boyunca g/h ifadesi daima $0<g/h<1$ aralığında alınacaktır. T_n matrisinin ℓ_p normunu

$$\|T_n\|_p = \left[\sum_{i,j=1}^{n} |t_{ij}|^p\right]^{1/p}$$

yazarsak

$$\|T_n\|_p = \left\{ n\frac{1}{g} + \frac{n-1}{|g-h|^p} + \frac{n-2}{|g-2h|^p} + \frac{n-3}{|g-3h|^p} + \ldots + \frac{1}{|g-(n-1)h|^p} + \right.$$

$$\left. \frac{n-1}{|g+h|^p} + \frac{n-2}{|g+2h|^p} + \ldots + \frac{1}{|g+(n-1)h|^p} \right\}^{1/p}$$

elde ederiz. Bunu da toplam sembolüyle gösterirsek

$$\|T_n\|_p^p = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{|g-kh|^p} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{|g+kh|^p} \right\}$$

olur. Bu toplamı

$$\|T_n\|_p^p = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{|g-kh|^p} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{|g-kh|^p} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{|g+kh|^p} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{|g+kh|^p} \right\}$$

$$= n\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{|g-kh|^p} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|g+kh|^p} \right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{|g-kh|^p} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{|g+kh|^p} \right)$$

şeklinde ayırabiliriz. Bu ifadenin sağ yanını h parentezine alırsak

$$\|T_n\|_p = \frac{1}{|h|} \left\{ n\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left|\frac{g}{h}-k\right|^p} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\left|\frac{g}{h}+k\right|^p} \right] - \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\left|\frac{g}{h}-k\right|^p} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{\left|\frac{g}{h}+k\right|^p} \right] \right\}^{1/p} \qquad (3.39)$$

olur. (3.39) ifadesinin her iki yanını n^{-p} ile çarparsak

$$\frac{1}{n^{p}}\left\|T_{n}\right\|_{p}=\frac{1}{|h|^{p}}\left\{\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{g}{h}-k\right|^{p}}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{g}{h}+k\right|^{p}}\right]-\frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{\left|\frac{g}{h}-k\right|^{p}}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{\left|\frac{g}{h}+k\right|^{p}}\right]\right\}^{1/p} \tag{3.40}$$

elde ederiz. (3.40)’ın sağ yanındaki 1/n’li ifadenin $n\to\infty$ için limiti alınırsa, ifade sıfır olur. Yani

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{\left|\frac{g}{h}-k\right|^{p}}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{\left|\frac{g}{h}+k\right|^{p}}\right]=0 \tag{3.41}$$

olur. $0< g/h < 1$ olduğundan diğer toplamlar

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left|k-\frac{g}{h}\right|^{p}}=\left|-\frac{h}{g}\right|^{p}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-\frac{g}{h})^{p}} \tag{3.42}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left|k+\frac{g}{h}\right|^{p}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(k+\frac{g}{h}\right)^{p}}$$

olarak yazılabilir Riemann-Zeta (veya Hurwitz-Zeta) fonksiyonu tanımından

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(k-\frac{g}{h}\right)^{p}}\leq\zeta(p\,,-g/h) \tag{3.43}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{g}{h}+k\right)^{p}}=\zeta\left(p\ ,\ \frac{g}{h}\right) \tag{3.44}$$

olur. O halde (3.41) , (3.43) ve (3.44)' den

$$n^{-1/p}\|T_n\|_p \le \frac{1}{|h|}\left(\left|-\frac{h}{g}\right|^{p}+\zeta\left(p,-\frac{g}{h}\right)+\zeta\left(p,\frac{g}{h}\right)\right)^{1/p}$$

elde edilir. Buda istenen üst sınırdır.

Alt sınırı bulmak için (3.42) deki ilk iki toplamdan ikincisi ihmal edilirse

$$\frac{1}{|h|}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(k-\frac{g}{h}\right)^{p}}\right)^{1/p} \le n^{-1/p}\|T_n\|_p$$

elde edilir. (3.39)'dan

$$\frac{1}{|h|}\left(\left(-\frac{h}{g}\right)^{p}+\zeta\left(p,-\frac{g}{h}\right)\right)^{1/p} \le n^{-1/p}\|T_n\|_p$$

bulunur. Böylece alt sınırı da tayin etmiş oluruz.

Bu alt ve üst sınırları p'ye göre irdelersek

$$\|T_n\| \ge \frac{1}{|h|}\begin{cases}\left[-\left(\frac{h}{g}\right)^{p}+\zeta\left(p\ ,\ -\frac{g}{h}\right)\right]^{1/p} & ,\ \ p\ \text{tek ise}\\[2ex] \left[\left(\frac{h}{g}\right)^{p}\ +\ \zeta\left(p\ ,\ -\frac{g}{h}\right)\ \right]^{1/p} & ,\ \ p\ \text{çift ise}\end{cases}$$

$$\|T_n\| \le \frac{1}{|h|}\begin{cases}\left[-\left(\dfrac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p\,,\ -\dfrac{g}{h}\right) + \zeta\left(p\,,\ \dfrac{g}{h}\right)\right]^{1/p} & ,\ \text{p tek ise} \\ \left[\left(\dfrac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p\,,\ -\dfrac{g}{h}\right) + \zeta\left(p\,,\ \dfrac{g}{h}\right)\right]^{1/p} & ,\ \text{p ç ift ise}\end{cases}$$

Bu da teoremin ispatıdır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, genel bir Cauchy - Toeplitz matrisinin ℓ_p normları için bir alt ve üst sınır elde edildi. Ancak bu sınırları 0 < g/h <1 aralığı için yaptık. Bu ise proplemi zayıflattı. Proplemin daha kuvvetli olması için bu matrisin ℓ_p normunun $g/h \notin Z$ ve $h \neq 0$ genel durumu için de hesaplanması gerekir. Fakat bu durum şu anda biraz zor görünmektedir.

Bu hesapların yapılmasındaki zorluk toplamların önünde elde edilen ifadelerin mutlak değerlerinden kaynaklanmaktadır. Belki polygamma fonksiyonları kullanılarak bir çözüme gidilebilir. Bunun üzerinde çalışmalarımız devam edcektir.

5. KAYNAKLAR

1. BARTON, T., FRIEDMAN, Y. and RUSSO, B., 1995. Hilbertian Seminorm and Local Order JB^*- Tribless. Qart . J. Math. Oxford(2). 257-278.

2. BEJOY, K, C., 1995. The Riemann Zeta-Function and Its Derivatives. Proc. R. Soc. London A 450, 477-499.

3. BINI, D. and PAN, V., 1993. Improved Parallel Computations With Toeplitz-Like and Hankel-Like Matrices. Lineer Algebra and Its Appl. 188-189: 3.29

4. BOZKURT, D., 1995. On the of Cauchy-Toeplitz Matrices. To appear Siberian Journal of Differential. Volume:3, No:2, pp. 39-46.

5. BOZKURT, D., 1995. Almost Cauchy-Toeplitz Matrislerinin ℓ_p Normları Üzerine. 8. Ulusal Matematik Sempozyumu.

6. BOZKURT, D., 1995. On the ℓ_p norm of Almost Cauchy-Toeplitz matrices to appear Turkish Journal of math.

7. GOLUP, G. H. And VAN, L., 1983. Matrix Computations. The Johns Hopkins University Press.

8. GUDMUNDSSON, T. , KENNEY, C. S. and LAMB, A. J., 1995. Small- Sample Statistical Estimates for Matrix Norms. Siam J. Matrix Anal. Appl. Vol. 16, No: 3 pp. 776-792

9. HIEININGANT, G., ROST, K., 1984. Algebraic Methods For Toeplitz - Like Matrices and Operators. Akademie-Verlag, Berlin,

10. NAKAZI, T., 1991. Absulote Values of Toeplitz Operators and Hankel Operatırs. Canadian Math. Bul. Vol. 34(2) . 249-253

11. PARTER, S. V., 1986. On the Distribution of the Singular Values of Toeplitz Matrices. Linear Algebra and Its Appl. 80: 115-130.

12. SZEGÖ, G. and GRENANDER, U., 1958. Toeplitz Forms and Their Applications. University of California Press.

13. TYRTSHNIKOV, E. E., 1991. Cauchy-Toeplitz matrices and some applications. Linear Algebra and Its Applications , v. 149, pp. 115-130.

6. EKLER

6.1. Simgeler

$\|x\|_1$ x vektörünün maksimum normu

$\|x\|_2$ x vektörünün Euclidean normu

$\|x\|_3$ x vektörünün toplam normu

$\|x\|_p$ x vektörünün ℓ_p normu

$\|A\|_1$ A matrisinin ℓ_1 normu

$\|A\|_E$ A matrisinin ℓ_2 normu veya Euclidean normu

$\|A\|_2$ A matrisinin spektral normu

$\rho(A)$ A matrisinin spektral yarıçapı

γ Euler sabiti

$\zeta(n)$ Hurwitz-Zeta fonksiyonu