SELÇUK
ÜNİVERSİTESİ

FEN
BİLİMLERİ
ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kemal USLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

1996

KONYA

ÖZET

Bu tez çalışması üç kısımdan oluşmuştur. Birinci kısımda, çalışmamız için gerekli olan bilgileri verdik. Bu konuda, zayıf ve hemen hemen süreklilikler ile ilgili yapılmış çalışmaları kısaca özetledik ve bunları yorumlamaya çalıştık.

X topolojik ve Y yarı düzgün bir uzay ise, f: X $\longrightarrow$ Y fonksiyonu sürekli olduğunda, f fonksiyonuna hemen hemen sürekli fonksiyon, eğer Y düzgün uzay ve f sürekli ise, fonksiyona zayıf sürekli fonksiyon denir. Özellikle [8] de bu konu incelenmiş, zayıf sürekliliğin hemen hemen sürekliliği gerektirmesi için Y uzayının hemen hemen düzgün olduğu ispatlanmıştır.

İkinci kısımda ise Husain'in tanımlamış olduğu ve süreklilikten daha zayıf olan bir süreklilik çeşidinin Y değer uzayına bazı şartların eklenmesi ile süreklilikle nasıl çakıştığını görüp, yorumlamaya çalıştık.

Üçüncü kısımda da, gerek Frolik'in makalesinde gerekse M. Çiçeğin makalesinde olsun, fonksiyon sürekli veya semi-sürekli olduğunda, X uzayındaki Baire yapısının Y üzerine, Y uzayındaki Baire yapısının da X üzerine nasıl taşındığını, hangi şartlarda bunun gerçekleştiğini yorumlamaya çalıştık.

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİLİK ÇEŞİTLERİ

Kemal USLU
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya , 1996

Bu tez 17.01.1997 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

İmza	İmza	İmza
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL	Doç. Dr. Dursun TAŞÇI	Yrd. Doç. Eşref HATIR
(Danışman ve Jüri Başkanı)	Jürı Üyesi	Jüri Üyesi

ÖNSÖZ

Bu Tez konusu üzerindeki çalışmalarımız boyunca bana çalışma fırsatı vererek, kıymetli zamanını ve yardımlarını esirgemeyen değerli danışmanım, Prof.Dr.Şaziye Yüksel hocama teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Topolojik uzaylarda büyük önemi bulunan fonksiyonların süreklilik kavramı konusunda, günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmada, süreklilikten daha zayıf olan a.c.H. sürekliliği karşılaştırılmış ve hangi şartlarda bu iki süreklilik çeşidinin çakıştığı yorumlanmaya çalışılmıştır. Ayrıca f fonksiyonu sürekli veya semi-sürekli olduğunda, X uzayındaki Baire yapısının Y üzerine, Y uzayındaki Baire yapısının da :X üzerine nasıl ve hangi şartlarda taşındığı görülmeye çalışılıp, yorumlanmıştır.

(X, τ) topolojik uzayının alt kümesi A olsun.

$\overline{A}$: A kümesinin kapanışı

$\mathring{A}$: A kümesinin içi

A^s : A kümesinin sınırı

$\mathring{\overline{A}}$: A kümesinin kapanışının içi

$\overline{\mathring{A}}$: A kümesinin içinin kapanışı

A^t : A kümesinin tümleyeni

gösterimleri kullanılmıştır.

1. HEMEN HEMEN VE ZAYIF SÜREKLİLİKLER

Bu bölümde, N. Levine'in [1] de tanımladığı zayıf ve zayıf* (w.c. ve w*.c.) süreklilikler ile M.K. Singal-A.R. Singal [2] ve T. Husain'in tanımladıkları hemen hemen süreklilikler (a.c.S. ve a.c.H.) arasındaki ilişkileri inceledik. Önce N. Levien'in [1] de tanımladığı w.c. ve w.*c. süreklilikleri inceleyelim.

1.1. Zayıf ve Zayıf* (w.c. ve w.c.*) Süreklilikler

$f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon, X ve Y herhangi iki topolojik uzay olsun. N. Levine'in [1], f fonksiyonunun zayıf sürekliliğini şöyle tanımlamıştır.

Tanım 1.1.1.: f(x) noktasını kapsayan her $V \subset Y$ açık alt kümesi için, $f(U) \subset \overline{V}$ olacak şekilde x noktasını kapsayan bir $U \subset X$ açık kümesi varsa, $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonuna $x \in X$ noktasında zayıf süreklidir denir.

Aşağıdaki teoremin ispatı yukarıdaki tanımdan hemen görülebilir.

Teorem 1.1.1.: $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon, X ve Y herhangi iki topolojik uzay olsun. f fonksiyonunun w.c. olması için $\Leftrightarrow$ $V \subset Y$ açık kümesi için, $f^{-1}(V) \subset [f^{-1}(\overline{V})]^\circ$ olmasıdır.

İspat: Yeterliliği : $x \in X$, $f(x) \in V$ ve $x \in f^{1}(V) \subset [f^{1}(\overline{V})]^\circ$ olsun. $[f^{1}(\overline{V})]^\circ = U$ diyelim.

$f(U) = f[f^{1}(\overline{V})]^\circ \subset f(f^{1}(\overline{V})) \subset \overline{V}$ olur.

Gerekliliği; $x \in f^{1}(V)$ olsun. f fonksiyonu w.c. olduğundan, $f(U) \subset \overline{V}$ olacak şekilde x noktasını kapsayan $U \subset X$ açık kümesi vardır. Dolayısıyla, $x \in U \subset f^{1}(\overline{V})$ ve buradan sonuç olarak $x \in [f^{1}(\overline{V})]^\circ$ elde edilir.

Teorem 1.1.2. : Eğer $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu w.c. ise o takdirde her açık $V \subset Y$ kümesi için, $\overline{[f^{1}(V)]} \subset f^{1}(\overline{V}))$ dır.

İspat: $x \in [f^{-1}(V)]^{-} \setminus f^{-1}(\overline{V})$ olsun. O takdirde; $f(x) \notin \overline{V}$ olup, $W \cap V = \phi$ olacak şekilde f (x) noktasını kapsayan açık bir W kümesi vardır. V kümesi açık olduğundan, $V \cap \overline{W} = \phi$ elde edilir. Ayrıca f fonksiyonu w.c. olduğundan, $f(U) \subset \overline{W}$ olacak şekilde x noktasını kapsayan açık bir $U \subset X$ kümesi vardır. Böylece, $f(U) \cap V = \phi$ elde edilir. Öte yandan $x \in [f^{-1}(V)]^{-}$ olduğundan, $U \cap f^{-1}(V) \neq \phi$ olup, buradan $f(U) \cap V = \phi$ olur ki, bu bir çelişkidir. Böylece, $[f^{-1}(V)]^{-} \subset f^{-1}(\overline{V})$ elde edilir.

Tanım 1.1.2. : Eğer uzayın kapalı bir alt kümesi ile bu kümeye ait olmayan bir x noktası verildiğinde, kapalı küme ile x noktasının ayrık birer komşulukları varsa, uzaya düzenli (regüler) uzay denir. [13]

Sürekli olan her fonksiyonun w.c. olduğu açıktır. Fakat w.c. olan bir fonksiyon sürekli olmayabilir.

Örnek 1.1.1. S, Birim aralık üzerindeki sayılabilir tümleyen topolojisi ve $X = \{a, b\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \phi, \{a\}\}$ topolojisi verilsin. $f : S \longrightarrow X$ fonksiyonunu:

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \in Q \text{ ise} \\ b, & x \in Q' \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalam. O takdirde f sürekli değildir, çünkü $f^{-1}(\{a\})$ kümesi S uzayında açık değildir. Fakat f fonksiyonu w.c. dir.

$f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu w.c. ve Y - uzayı regüler ise f fonksiyonu süreklidir. T. Noiri, w.c. ile süreklilik arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teoremle genelleştirmiştir.

Teorem 1.1.3. Y- uzayı Regüler olmak üzere, $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonunun w.c. olması için $\Leftrightarrow$ f'nin sürekli olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: f fonksiyonu w.c. olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktası ve f (x)'i kapsayan açık bir $V \subset Y$ kümesini alalım. Y - uzayı regüler olduğundan, $f(x) \in T \subset \overline{T} \subset V$ olacak şekilde açık bir $T \subset Y$ kümesi mevcuttur. Ayrıca f fonksiyonu w.c. olduğundan, $f(U) \subset \overline{T}$ ve $x \in U$ olacak şekilde açık bir $U \subset X$ vardır. O halde, $f(U) \subset V$ olup, f fonksiyonu süreklidir.

$\Leftarrow$: f fonksiyonu sürekli olsun. O takdirde, $f(U) \subset V$ olacak şekilde,. $x \in U \subset X$ açık kümesi mevcuttur. Ayrca; $f(U) \subset V \subset \overline{V}$ olduğundan, f fonksiyonu w.c. dir.

N. Levine'nin [1] de verdiği aşağıdaki tanım, zayıf sürekliliği tamamlayıcı niteliktedir.

Tanım 1.1.2. : Her $V \subset Y$ açık kümesi için, $f^{-1}(V^s)$ kümesi X uzayında kapalı oluyorsa, $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonuna zayıf* sürkli (w.*c.) denir.

Zayıf sürekli olan bir fonksiyon, zayıf* sürekli olmayabilir.

Örnek 1.1.2. : $X = \{a, b\}$ kümesini $\tau = \{\phi, X, \{a\}$ topolojisi ve $Y = \{a^*, b^*\}$ kümesini de $\tau^* = \{\phi, Y, \{b^*\}\}$ topolojisi ile donatalım. $f : X \longrightarrow Y$, $f(a) = a^*$ şeklinde tanımlanan fonksiyon w.c. fakat, w*.c. değildir. Gerçekten; $b^* \in \{b^*\} \subset Y$ açık kümesi için, $b \in X$ açık kümesi $f(X) \subset \overline{\{b^*\}} = Y$ olacak şekilde mevcuttur. O takdirde f w.c. dir. Fakat, $\{b^*\}^s = \overline{\{b^*\}} \setminus \{b^*\}^\circ = \overline{\{b^*\}} \cap \overline{\{a^*\}} = Y \cap \{a^*\} = \{a^*\}$, $f^{-1}(\{b^*\}^s) = f^{-1}(\{a^*\}) = \{a\}$ bulunur. $\{a\}$ kümesi X uzayında kapalı olmadığından, f fonksiyonu w*.c. değildir.

Tersine, w*.c. olan bir fonksiyon da w.c. olmayabilir.

Örnek 1.1.3. : $X = \{a, b\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\phi, X\}$ topolojisi ve $Y = \{a^*, b^*\}$ kümesi üzerinde de, $\tau^* = \{\phi, Y, \{a^*\}, \{b^*\}\}$ topolojisini ele alalım. $f : X \longrightarrow Y$, $f(a) = a^*$ şeklinde tanımlanan fonksiyon w*. c., fakat w.c. değildir.

Gerçekten; $\{a^*\}^s = \overline{\{a^*\}} \setminus \{a^*\}^\circ = \phi$ ve $f^{-1}(\{a^*\}^s) = f^{-1}(\phi) = \phi$ kümesi X uzayında kapalıdır. O halde f fonksiyonu w*.c. dir. Fakat, $a^* \in \{a^*\}$ açık kümesi için, a noktasını kapsayan tek açık küme X kümesi olduğundan, $f(X) \not\subset \overline{\{a^*\}} = \{a^*\}$, zayıf süreklilik tanımı sağlanmaz.

Her sürekli fonksiyon hem w.c. hem de w*.c. dir. Fakat w.c. veya w*.c. olan bir fonksiyonun sürekli olması gerekmez.

Aşağıdaki teorem, w.c. ve w*.c.'nin birlikte sürekliligi gerektirdiklerini ifade eder.

Teorem 1.1.4. : $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon, X ve Y topolojik uzaylar olsun. f fonksiyonunun sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f'nin hem w.c. hem de w*.c. olmasıdır.

İspat: Gerekliliği; f fonksiyonu sürekli ise, hem w.c. hem de w*.c. olduğu açıktır.

Yeterliliği; $f(x) \in V \subset Y$ açık bir alt küme olsun. f fonksiyonu w.c. olduğundan, $f(U) \subset \overline{V}$ olacak şekilde $x \in U \subset X$ açık bir alt kümesi vardır. $V^s = \overline{V} \setminus V$ olduğundan, $f(x) \notin V^s$ bulunur. Dolayısıyla $x \notin f^{-1}(V^s)$ ve $x \in U \setminus f^{-1}(V^s)$ olur. Ayrıca f fonksiyonu w*.c. olduğundan, $U \setminus f^{-1}(V^s)$ kümesi açıktır. Eğer, $f(U \setminus f^{-1}(V^s)) \subset V$ olduğunu gösterebilirsek ispat tamamlanır. Bunun için, $z \in (U \setminus f^{-1}(V^s))$ olsun. $z \in U$ ve $f(z) \in \overline{V}$, fakat $z \notin f^{-1}(V^s)$ olup, $f(z) \notin V^s = \overline{V} \setminus V$ bulunur. Dolayısıyla, $f(z) \in V$ olur. Bu ise f fonksiyonunnu sürekli olmasıdır.

1.2. Hemen Hemen Süreklilikler ve Özellikleri

Bir topolojik uzaydan diğer bir topolojik uzaya tanımlı bir fonksiyonun hemen hemen sürklilik tanımları farklı bir biçimde M.K. Singal - A.R. Singal [2], T. Husain [3] ve J. Stallings [7] tarafından yapılmıştır. Bu kısımda, M.K. Singal-A.R. Singal [2] ve T,. Husain'in [3] hemen hemen sürklilik tanımlarını verip, Singal anlamında hemen hemen sürekliliğin (a.c.S.) özelliklerini inceledik. Ayrıca Singal anlamında ve Husain anlamında hemen hemen süreklilikleri ele alıp yorumlamaya çalıştık.

Tanım 1.2.1. : Bir X kopolojik uzayında $A \subset X$ alt kümesi kendi kapanışının içine eşit oluyorsa, A alt kümesine düzenli (regüler) açık küme denir. [2]

Tanım 1.2.2. : Bir X topolojik uzayında $B \subset X$ alt kümesi kendi içinin kapanışına eşit oluyorsa, B alt kümesine düzenli (regüler) kapalı küme denir. [2]

Şimdi M.K. Singal-A.R. Singal ve T. Husain tarafından verilen hemen hemen süreklilik tanımlarını ele alalım.

Tanım 1.2.3. : (X, τ) ve (Y, φ) topolojik uzaylar, $f : X \to Y$ herhangi bir fonksiyonu olsun. Eğer f (x) noktasının her V komşuluğuna karşılık, $f(U) \subset \overset{\circ}{\overline{V}}$ olacak şekilde x noktasının bir U komşuluğu varsa, f fonksiyonuna $x \in X$ noktasında Singal anlamında hemen hemen süreklidir (a.c.S.) denir.

Tanım 1.2.4. : (X, τ) ve (Y, φ) topolojik uzaylar, $f : X \to Y$ herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer f (x) noktasını kapsayan her $V \subset Y$ açık kümesi için, $\overline{f^{-1}(V)}$ kümesi x noktasının bir komşuluğu oluyorsa, f fonksiyonuna Husain anlamında hemen hemen süreklidir (a.c.H.) denir.

Tanımlardan açıkça görüleceği gibi sürekli bir fonksiyon hem a.c.S. hem de a.c.H. dır. Fakat, bu tanımlardan birini sağlayan bir fonksiyonun sürekli olması gerekmez.

Önce a.c.H. fakat, sürekli olmayan bir fonksiyonun örneğini görlim.:

Örnek 1.2.1. : $f : (R, U) \to (R, U)$

$$x \to f(x) = \begin{cases} 0, & x \in Q \\ 1, & x \in Q' \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonu a.c.H., fakat sürekli değildir. Gerçekten;

$x \in Q$ ise $f(x) = 1$, her $V =]\, 1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon\, [$ için $\overline{f^{-1}(V)} = \overline{Q} = R$ olur ki, R : x noktasının bir komşuluğudur. $x \in Q'$ ise, $f(x) = 0$, her $V =]0-\varepsilon,\ 0+\varepsilon[$ için $\overline{f^{-1}(V)} = \overline{Q'} = R$ olur ki, R : x noktasının bir komşuluğudur. O halde fonksiyon $x \in X$ noktsında a.c.H. dır.

Şimdi de a.c.S. olan fakat sürekli olmayan bir fonksiyonun örneğini görelim.

Örnek 1.2.2. : R üzerinde $\tau = \{\phi, R, B \subset R : B = A^t, A \text{ sayılabilir}\}$ topolojisini ve $X = \{a, b\}$ kümesi üzerinde de $\tau^* = \{X, \phi, \{a\}\}$ topolojisini ele alalım.

$f : (R, \tau) \longrightarrow (X, \tau^*)$

$$x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} a, & x \in Q \\ b, & x \in Q' \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon R'nin her noktasında a.c.S., fakat $x \in Q$ ise $x \in R$ noktasında sürekli değildir. Gerçekten, $x \in Q$ ise, $f(x) = a$, a noktasının komşuluğu : $\{a\}$ için $f(R) \subset \overset{\circ}{\overline{\{a\}}} = X$ olduğundan, tanım sağlanır. $x \in Q'$ ise $f(x) = b$, b noktasının komşuluğu : X için, $f(Q') \subset \overset{\circ}{\overline{X}} = X$ olacak şekilde x noktasının bir Q' komşuluğu vardır. Buradan f fonksiyonu a.c.S. dir. Fakat, $x \in Q$ ise $f(x) = a$, a noktasının komşuluğu : $\{a\}$ için, x noktasının tek komşuluğu IR kümesidir. Dolayısıyla, $f(\mathrm{IR}) \not\subset \{a\}$ olduğundan, fonksiyon $x \in \mathrm{IR}$ noktasında sürekli değildir.

a.c.S. ve a.c.H. fonksiyonları birbirinden tamamen bağımsızdır.

Örnek 1.2.3. : IR üzerinde alışılmış topoloji verilmiş olsun.

$f : \mathrm{IR} \longrightarrow \mathrm{IR}$

$$x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} x, & x \in Q \\ -x, & x \in Q' \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon a.c.H, fakat a.c.S. değildir. Gerçekten; $x \in Q$ ise $f(x) = x$, her $V =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset Y$ açık kümesi için, $\overline{f^{-1}(V)} = \overline{Q} = IR$ olur ki IR, x noktasının bir komşuluğudur. $x \in Q'$ ise $f(x) = -x$, her $V =]-x-\varepsilon, -x+\varepsilon[\subset Y$ açık kümesi için, $\overline{f^{-1}(V)} = \overline{Q'} = IR$ olur ki, IR, x noktasının bir komşuluğudur. O halde f fonksiyonu a.c.H. dır.

Şimdi de a.c.S. olan, fakat a.c.H. olmayan bir fonksiyonun örneğini görelim.

Örnek 1.2.4. : IR üzerinde $\tau = \{\phi, IR, B \subset IR : B = A^t, A \text{ sayılabilir}\}$ topolojisini ve $X = \{a, b\}$ kümesi üzerinde de $\tau^* = \{\phi, X, \{a\}\}$ topolojisini ele alalım.

$$f : (IR, \tau) \longrightarrow (X, \tau^*)$$

$$x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} a, & x \in Q \\ b, & x \in Q' \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon a.c.S. fakat a.c.H. değildir. Gerçekten; $x \in Q$ ise $f(x) = a$, a noktasının komşuluğu: $\{a\}$ için, $\overline{f^{-1}(\{a\})} = \overline{Q} = Q$ olur. $Q \notin \tau$ olduğundan x noktasının bir komşuluğu değildir. Dolayısıyla, fonksiyon a.c.H. değildir. Fonksiyonun a.c.S. olduğu yukarıdaki örnekte gösterildi.

Teorem 1.2.1. : $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki özellikler birbirlerine denktir.

a) f fonksiyonu $x \in X$ noktasında a.c.S. dir.

b) f (x) noktasının düzenli açık her M komşuluğu için, $f(N) \subset M$ olacak şekilde x noktasının bir N komşuluğu vardır.

c) x noktasına yakınsayan her $\{x_\lambda\}_{\lambda \in D}$ ağı için, $\{f(x_\lambda)\}$ ağı sonunda f (x)'i kapsayan her düzenli açık küme içindedir.

İspat: a) $\longrightarrow$ b) : f fonksiyonu $x \in X$ noktasında a.c.S. ve f (x) noktasının düzenli açık komşuluğu : M olsun. Bu takdirde x noktasının $f(N) \subset M = \overset{\circ}{\overline{M}}$ olacak şekilde bir N açık komşuluğu vardır.

b) $\longrightarrow$ c) : $\{x_\lambda\}_{\lambda \in D}$, x noktasına yakınsayan bir ağ ve f (x) noktasını kapsayan düzenli açık bir küme: U olsun. f fonksiyonu a.c.S. olduğundan, x noktasını kapsayan, $f(M) \subset U$ olacak şekilde $M \subset X$ açık kümesi vardır. M kümesi açık ve $\{x_\lambda\}_{\lambda \in D}$ ağı x noktasına yakınsadığından, $\lambda \geq \lambda_0$ için $x_\lambda \in M$ olacak şekilde bir $\lambda_0 \in D$ vardır. D kümesi "$\geq$" ile yönlendirilmiştir. Böylece her $\lambda \geq \lambda_0$ için, $f(x_\lambda) \in f(M) \subset U$ olur. Bu ise, $\{f(x_\lambda)_{\lambda \in D}\}$ ağının sonunda düzenli açık U kümesi içinde kalmasıdır.

c) $\longrightarrow$ a) : Varsayalım ki f fonksiyonu $x \in X$ noktasında a.c.S. olmasın. Bu takdirde f (x) noktasının açık bir V komşuluğunu bulabiliriz ki, x noktasının her U komşuluğu için, $f(U) \cap (Y \setminus \overline{V}) \neq \phi$ ve buradan, $U \cap f^{-1}(Y \setminus \overline{V}) \neq \phi$ olur. x noktasını kapsayan bütün $U \subset X$ açık kümelerinin ailesi: υ olsun. υ ailesinin kümelerdeki kapsama bağıntısı ile yönlendirilmiş olduğunu kabul edelim. Her $U \in \upsilon$ için, $U \cap f^{-1}(Y \setminus \overline{V})$ kümesine ait bir x_u noktasını seçelim. $\{x_u\}_{u \in \upsilon}$, X uzayında x noktasına yakınsayan bir ağdır. Öyle ki, $f(x_u)$, V kümesi içinde değildir. Bu ise bir çelişkidir. O halde f fonksiyonu a.c.S. dir.

Teorem 1.2.2. : $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir.

a) f fonksiyonu a.c.S. dir.

b) Y uzayının düzenli açık bir alt kümesinin ters görüntüsü, X uzayının açık bir alt kümesidir.

c) Y uzayının düzenli kapalı bir alt kümesinin ters görünüsü, X uzayının kapalı bir alt kümesidir.

d) Her $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasının her düzenli açık M komşuluğu için, $f(N) \subset M$ olacak şekilde x noktasının bir N komşuluğu vardır.

e) Her $A \subset Y$ açık alt kümesi için,

$f^{-1}(A) \subset \{f^{-1}(\overset{\circ}{\overline{A}})\}^{\circ}$

f) Her $B \subset Y$ kapalı alt kümesi için,

$\overline{\{f^{-1}(\overline{\overset{\circ}{B}})\}} \subset f^{-1}(B)$

g) Herhangibi $x \in X$ noktası ve bu noktaya yakınsayan bir $\{x_\lambda\}_{\lambda \in D}$ ağı için, $\{f(x_\lambda)\}$ ağı sonunda f (x) noktasını kapsayan her düzenli açık küme içinde kalır.

İspat: [2] ye bakılabilir.

P.E. Long ve D.A. Carnahan [4], a.c.S. fonksiyonunun sağladığı özellikleri aşağıdaki iki teorem halinde ifade edip, bu toremlerden, fonksiyonun açık olması halinde Sonuç 1.2.1.'i elde etmişlerdir.

Teorem 1.2.3. : $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu a.c.S. ve $V \subset Y$ açık bir alt küme olsun. Eğer $x \notin f^{-1}(V)$, fakat $x \in \overline{f^{-1}(V)}$ ise $f(x) \in \overline{V}$ olur.

İspat: $x \in X$ için, $x \notin f^{-1}(V)$, fakat $x \in \overline{f^{-1}(V)}$ olsun. Varsayalım ki, $f(x) \notin \overline{V}$ olsun. Bu takdirde $W \cap V = \phi$ ve $f(x) \in W$ olacak şekilde bir $W \subset Y$ açık kümesi mevcuttur. Buradan $\overline{W} \cap V = \phi$ ve $\overset{\circ}{\overline{W}} \cap V = \phi$ olup, f fonksiyonu a.c.S. olduğundan, $f(U) \subset \overset{\circ}{\overline{W}}$ olacak şekilde x noktasının bir U komşuluğu vardır. $f(U) \cap V = \phi$ ve $x \in \overline{f^{-1}(V)}$ olduğundan $U \cap f^{-1}(V) \neq \phi$ olup buradan, $f(U) \cap V \neq \phi$ elde edilir ki, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $f(x) \in \overline{V}$ dır.

Lemma 1.2.1. : $f: X \longrightarrow Y$ açık bir fonksiyon olsun. Bu takdirde her $B \subset Y$ için, $f^{-1}(\overline{B}) \subset [f^{-1}(B)]^{-}$ dır.

Teorem 1.2.4. : $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu a.c.S. olsun. Bu takdirde her $V \subset Y$ açık kümesi için, $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\overline{V}))$ dır.

İspat: $V \subset Y$ açık bir alt küme olsun. Teorem 1.2.3.'ten, $\overline{f(f^{-1}(V))} \subset \overline{V}$ yazılabilir. Herhangi bir f fonksiyonu için, $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\overline{f(f^{-1}(V))}$ olduğundan, $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\overline{f(f^{-1}(V)})) \subset f^{-1}(\overline{V})$ sonucu elde edilir.

Sonuç 1.2.1. : $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu açık ve a.c.S. ise her $V \subset Y$ açık kümesi için, $\overline{f^{-1}(V)} = f^{-1}(\overline{V})$ dır.

Açık ve a.c.S. olan bir fonksiyonun sürekli olması gerekmez.

Örnek 1.2.5. : $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\phi, X, \{b, c\}\}$ topolojisini alalım. Y uzayı da Sierpinski olsun. Bu takdirde, $f : X \longrightarrow Y$, $f(a) = f(b) = 0$ ve $f(c) = 1$ olarak tanımlanan fonksiyon a.c.S. ve açık bir fonksiyondur. Gerçekten; $b \in X$ için $f(b) = 0$, 0 noktasının $\{0\}$ komşuluğu için, b noktasının bir $\{b, c\}$ komşuluğu, $f(\{b, c\}) \subset \mathring{\overline{\{0\}}} = Y$ olacak şekilde vardır. O halde fonksiyon a.c.S. dir. Fakat, $b \in X$ için $f(b) = 0$, 0 noktasının $\{0\}$ komşuluğu için b noktasının komşuluğunu: $\{b, c\}$ aldığımızda, $f(\{b, c\}) \not\subset \{0\}$ bulunur. Dolayısıyla f sürekli değildir.

Tanım 1.2.4. : Topolojik bir X uzayında uzayın düzenli açık alt kümeleri bir topoloji tabanı oluşturuyorsa, uzaya yarı düzenli uzay denir. [6]

Tanım 1.2.5. : X bir topolojik uzay olsun. Eğer $x \in X$ noktasını kapsamayan, uzayın düzeli kapalı her A alt kümesi için, x noktasının ve A kümesinin ayrık birer komşulukları varsa, X uzayına nemen hemen düzenli uzay denir. [6]

Tanımlardan görüldüğü gibi; düzenli uzay, hem yarı düzenli hem de hemen hemen düzenlidir. Fakat, terslerinin her zaman doğru olması gerekmez.

Sonuç 1.2.2. : Hemen hemen düzenli bir uzay aynı zamanda yarı düzenli ise bu takdirde uzay düzenlidir.

Eğer f: $X \longrightarrow Y$ fonksiyonu a.c.S. ve Y- uzayı yarı düzenli ise f fonksiyonu süreklidir. Bu ifade [6] da şu şekilde genelleştirilmiştir.

Teorem 1.2.5. : f: $X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon, Y- yarı düzenli bir uzay olsun. f fonksiyonunun sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f fonksiyonunun a.c.S. olmasıdır.

İspat: Her sürekli fonksiyon a.c.S. olduğundan gerekliliği açıktır.

Yeterliliği: f : $X \longrightarrow Y$ fonksiyonu a.c.S. ve Y- yarı düzenli bir uzay olsun. $x \in X$ noktası için, $f(x)$ noktasının açık komşuluğu: V olsun. Y- yarı düzenli olduğundan, $f(x) \in \overset{\circ}{\bar{A}} \subset V$ olacak şekilde $f(x)$ noktasının düzenli açık komşuluğu vardır. Ayrıca, f fonksiyonu a.c.S. olduğundan, $f(x) \in f(U) \subset \overset{\circ}{\bar{A}} \subset V$ olacak şekilde $x \in U$ açık komşuluğu vardır. Böylece, $f(U) \subset V$ bulunur ki, f fonksiyonu süreklidir.

a.c.S. olan her fonksiyon zayıf süreklidir. Fakat tersi doğru değildir. Ancak Y değer uzayı hemen hemen düzenli bir uzay ise, bu iki süreklilik çeşidinin çakıştığı da [6] da aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 1.2.6. : f: $X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve Y- uzayı hemen hemen düzenli olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun a.c.S. olması için $\Leftrightarrow$ f'nin w.c. olmasıdır.

İspat: a.c.S. olan bir fonksiyon w.c. olduğundan gerekliliği açıktır.

Yeterliliği: f: $X \longrightarrow Y$ fonksiyonu w.c. ve Y- uzayı hemen hemen düzenli olsun. $x \in X$ noktası için, $f(x)$ noktasının açık bir komşuluğu: V olsun. Y uzayı hemen hemen düzenli olduğundan, $f(x) \in V \subset \bar{V} \subset \overset{\circ}{\bar{A}}$ olacak şekilde düzenli açık bir $A \subset Y$ mevcuttur. f fonksiyonu w.c. olduğundan, $f(U) \subset \bar{V}$ olacak şekilde $x \in U \subset X$ açık alt kümesi vardır. x noktası keyfi olduğundan, $x \in U$ için, $f(U) \subset \overset{\circ}{\bar{A}}$ olur ki, f fonksiyonu $x \in X$ de a.c.S. dir.

Sonuç 1.2.3. : f: X ⟶ Y bir fonksiyon, Y- düzenli bir uzay olsun. f fonksiyonunun sürekli olması için ⇔ f'nin w.c. olmasıdır.

İspat: [6] da yapılmıştır.

Sürekli iki fonksiyonun bileşkesi süreklidir. Acaba bileşke fonksiyonun a.c.S. olması için fonksiyonlarda ne gibi şartlar aranmalıdır.

Teorem 1.2.7. : Eğer f: X ⟶ Y üzerine, açık ve sürekli bir fonksiyon ve g: Y ⟶ Z içine bir fonksiyon ise (gof): bileşke fonksiyonunun a.c.S. olması için ⇔ g'nin a.c.S. olmasıdır.

İspat: Gerekliliği, (gof): fonksiyonu a.c.S. olsun. A⊂Z düzenli açık bir alt küme olmak üzere $(gof)^{-1}(A)$ açık bir kümedir. Yani; $f^{-1}(g^{-1}(A))$ açıktır. f açık bir fonksiyon olduğundan, $f(f^{-1}(g^{-1}(A)))$ açıktır. Yani; $g^{-1}(A)$ açık demektir. Sonuç olarak, g fonksiyonu a.c.S. dir.

Yeterliliği: g fonksiyonu a.c.S. ve S⊂Z düzenli açık bir alt küme olsun. $g^{-1}(S) \subset Y$ açık bir alt kümedir. f fonksiyonu sürekli oduğundan, $f^{-1}(g^{-1}(S) \subset X$ kümesi de açıktır. Yani; $(gof)^{-1}(S) \subset X$ kümesi açık olup, (gof) fonksiyonu a.c.S. dir.

Şimdi Singal anlamında sürekliliğin w.c. ve a.c.H. ile olan ilişkilerini inceleyelim.

a.c.S, olan bir fonksiyon w.c. dir; f: X ⟶ Y her V⊂Y açık alt kümesi için, $f(U) \subset \overset{\circ}{\overline{V}}$ olacak şekilde $x \in U \subset X$ açık alt kümesi mevcuttur. Ayrıca; $f(U) \subset \overset{\circ}{\overline{V}} \subset \overline{V}$ olduğundan f fonksiyonu w.c. dir. Fakat, w.c. olan bir fonksiyonun a.c.S. olması gerekmez.

Örnek 1.2.6. : IR üzerinde $\tau = \{\phi, IR, B \subset IR : B=A^t$, A sayılabilir$\}$ topolojisini, X={a, b, c} üzerinde de $\tau^* = \{\phi, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}$ topolojisini ele alalım.

$f : IR \longrightarrow X$

$$x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} a, & x \in Q \\ b, & x \in Q' \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon w.c., fakat a.c.S. değildir. Gerçekten; $x \in Q$ ise $f(x) = a$, a noktasının $\{a\}$ komşuluğu için, $f(IR) \subset \overline{\{a\}} = \{a, b\}$ dir. $x \in Q'$ ise $f(x) = b$, b noktasının komşuluğu: X için, x noktasının bir Q' komşuluğu $f(Q') \subset \overline{X} = X$ olacak şekilde vardır. O halde f w.c. dir. Fakat, $x \in Q$ ise $f(x) = a$, a noktasının komşuluğu : $\{a\}$ için, x noktasının komşuluğunu: IR olarak seçebildiğimizden, $f(R) \not\subset \overset{\circ}{\overline{\{a\}}} = \{a\}$ bulunur. Dolayısıyla fonksiyon a.c.S. değildir.

M.K. Singal ve A.R. Singal [2], w.c. olan bir fonksiyonun açık olması halinde a.c.S. olduğunu göstermişlerdir.

Teorem 1.2.8. : Eğer $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu açık ve w.c. bir fonksiyon ise f fonksiyonu a.c.S. dir.

İspat: $x \in X$ noktası için, f(x) noktasının açık bir komşuluğu: M olsun. f fonksiyonu w.c. olduğundan, $f(N) \subset \overline{M}$ olacak şekilde x noktasının açık bir N komşuluğu vardır. f açık olduğundan, $f(N) \subset Y$ alt kümesi açıktır. Dolayısıyla, $[f(N)]^{\circ} = f(N) \subset \overset{\circ}{\overline{M}}$ olur. Bu ise f fonksiyonunun a.c.S. olmasıdır.

Bu teoremden hemen şu sonuç elde edilebilir.

Sonuç 1.2.4. : Açık bir fonksiyonun a.c.S. olması için $\Leftrightarrow$ f fonksiyonunun w.c. olmasıdır.

a.c.S. olan bir fonksiyonun a.c.H olmadığını, birbirlerinden bağımsız olduklarını gördük. Bununla beraber, bazı şartlar ilave ederek Singal ve Husain'in tanımladıkları süreklilik çeşitleri eşdeğer olabilir. Bu durumu, P.E. Long ve D.A. Carnahan [4] aşağıda iki teorem halinde ifade etmişlerdir.

Teorem 1.2.9. : $f: X \longrightarrow Y$ a.c.S. ve açık bir fonksiyon ise f fonksiyonu a.c.H. dır.

İspat: $x \in X$ noktası için, $f(x)$ noktasını kapsayan açık bir küme $V \subset Y$ olsun. f fonksiyonu açık olduğundan, $f^{-1}(\bar{V}) \subset \overline{f^{-1}(V)}$ olur. $\mathring{\bar{V}}$ kümesi düzenli açık bir kümedir. f fonksiyonu a.c.S. olduğundan, $x \in f^{-1}(\mathring{\bar{V}}) \subset X$ kümesi açıktır. Dolayısıyla, $f^{-1}(\mathring{\bar{V}}) \subset f^{-1}(\bar{V}) \subset \overline{f^{-1}(V)}$ olur ki, bu ise $\overline{f^{-1}(V)}$ kümesinin x noktasının bir komşuluğu olmasıdır. O halde f fonksiyonu a.c.H. dır.

Teorem 1.2.10. : $f: X \longrightarrow Y$ a.c.H. ve açık bir fonksiyonun a.c.S. olması için $\Leftrightarrow$ Her $V \subset Y$ açık alt kümesi için, $f^{-1}(\bar{V}) = \overline{f^{-1}(V)}$ olmasıdır.

İspat: Yeterliliği: Eğer fonksiyon a.c.S. ise Sonuç 1.2.1. gereği, $f^{-1}(\bar{V}) = \overline{f^{-1}(V)}$ bulunur.

Gerekliliği: f fonksiyonu a.c.H. ve her $V \subset Y$ açık kümesi için, $f^{-1}(\bar{V}) = \overline{f^{-1}(V)}$ olsun. $x \in X$ noktası için, $f(x) \in V$ olsun. f fonksiyonu a.c.H. olduğundan, $x \in U \subset \overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\bar{V})$ olacak şekilde $x \in U \subset X$ açık alt kümesi vardır. Buradan, $f(U) \subset f(f^{-1}(\bar{V})) \subset \bar{V}$ bulunur ki, açık w.c. fonksiyon a.c.S. olduğundan ispat tamamlanır.

Husain tanımlamış olduğu a.c.H. süreklilik çeşidi ile ilgili aşağıdaki teoremi vermiş ve ispatlamıştır.

Teorem 1.2.11. : $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonunnu a.c.H. olması için $\Leftrightarrow$ Her açık $V \subset Y$ kümesi için, $f^{-1}(V) \subset [f^{-1}(V)]^{-\circ}$ olmasıdır.

İspat: Gerekliliği: f fonksiyonu a.c.H. olsun. $V \subset Y$ açık bir alt küme olmak üzere, $x \in f^{-1}(V)$ noktası verilsin. Bu takdirde, $f(x) \in V \in \upsilon_{f(x)}$ olur. f fonksiyonu a.c.H. olduğundan, $[f^{-1}(V)]^{-} \in \upsilon_{(x)}$ elde edilir. Buradan, $x \in U \subset [f^{-1}(V)]^{-}$ olup, $f^{-1}(V) \subset [f^{-1}(V)]^{-\circ}$ olur.

Yeterliliği: Her açık $V \subset Y$ kümesi için, $f^{-1}(V) \subset [f^{-1}(V)]^{-\circ}$ olsun. Herhangi $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasının herhangi bir komşuluğu: W olsun. O takdirde $f(x) \in V \subset W$ olacak şekilde açık bir $V \subset Y$ kümesi vardır. Buradan,

$x \in f^{-1}(V) \subset (f^{-1}[V])^{-\circ} \subset [f^{-1}(V)]^{-} \subset [f^{-1}(W)]^{-}$ elde edilir. Dolayısıyla, $[f^{-1}(W)]^{-} \in \upsilon_{(x)}$ olup, f fonksiyonu a.c.H. dır.

Husain anlamında hemen hemen sürekliliğin diğer özelliklerini P.E. Long ve E.E. Mc. Gehee. Jr. [5] araştırmışlar ve aşağıdaki üç teoremi elde etmişlerdir.

Teorem 1.2.12. : $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonunun $x \in X$ noktasında a.c.H. olması için $\Leftrightarrow$ $f(x)$ noktasını kapsayan her $V \subset Y$ açık kümesi için $f^{-1}(V)$ kümesinin x noktasını kapsayan bir $U \subset X$ kümesinde yoğun olmasıdır.

Teorem 1.2.13. : $f: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve D, X kümesinin yoğun bir alt kümesi olsun. Eğer $f/_D$ sürekli ise o takdirde f fonksiyonu D kümesinin her noktasında a.c.H. dır.

Teorem 1.2.13. : $f: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve D, X kümesinin yoğun bir alt kümesi olsun. Eğer $f/_D$ sürekli ise o takdirde f fonksiyonu D kümesinin her noktasında a.c.H. dır.

İspat: $x \in D$ ve $f(x)$ noktasını kapsayan açık bir küme: V olsun. $f/_D$ sürekli olduğundan, $x \in U \subset X$ açık alt kümesi vardır.

Buradan, $D \cap U \subset (f/_D)^{-1}(V) = D \cap f^{-1}(V)$ dır. Böylece $D \cap U \subset f^{-1}(V)$ bulunur. D kümesi X de yoğun olduğundan, $U \subset \overline{D \cap U}$ ve sonuç olarak $U \subset \overline{f^{-1}(V)}$ bulunur. O halde f fonksiyonu x noktasında a.c.H. dır.

a.c.H. olan bir fonksiyonun tanım kümesinin keyfi alt kümelerine kısıtlanışı a.c.H. olmayabilir.

Örnek 1.2.7. : f: R ⟶ R

$$x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \in Q' \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ve a.c.H. olan bir fonksiyonu ele alalım. M kümesi, bütün pozitif rasyonel sayılar ile bütün negatif irrasyonel sayılardan oluşsun. Bu takdirde $(f/_M)$ fonksiyonu x=0 noktasında a.c.H. değildir. Gerçekten; x=0 için f(x)=1, V=] 1-ε, 1+ε[alalım.

$$[(f/_M)^{-1}(V)]^- = (M \cap f^{-1}(V))^- = (M \cap Q)^- = \overline{Q^+} = R^+ \notin M$$

Yani; R^+, x noktasının bir komşuluğu değildir. O halde fonksiyon x=0 noktasında a.c.H. değildir.

Bununla beraber, fonksiyonun tanım kümesi açık alt kümelerine kısıtlanırsa fonksiyon a.c.H. olur.

Teorem 1.2.14. : Eğer f: X ⟶ Y fonksiyonu a.c.H. ve UCX açık bir alt küme ise, $(f/_U)$ kısıtlanmış fonksiyonu a.c.H. dır.

İspat: f fonksiyonu x∈X noktasında a.c.H. olduğundan,

Teorem 1.2.9. gereğince, her VCY kümesi için BC $\overline{f^{-1}(V)}$ olacak şekilde BCX açık alt kümesi vardır.

$$[(f/_U)^{-1}(V)]^- = [U \cap f^{-1}(V)]^- \subset U \cap [f^{-1}(V)]^- \subset \overline{U} \cap \overline{B}$$

buradan da, U∩B C $[(f/_U)^{-1}(V)]^-$ bulunur. (U∩B)C U açık ve $(f/_U)^{-1}(V)$ kümesi, (U∩B) kümesinde yoğun olduğundan $(f/_U)$ fonksiyonu a.c.H. dır.

Singal anlamında hemen hemen sürekli bir fonksiyonun her kısıtlanışı yine singal anlamında hemen hemen süreklidir.

Teorem 1.2.15. : a.c.S. olan bir fonksiyonun her kısıtlanışı yine a.c.S. dir.

İspat: f: X $\longrightarrow$ Y içine, a.c.S. olan bir fonksiyon ve $A \subset X$ olsun. Herhangi bir düzenli açık $S \subset Y$ alt kümesi için, $(f/_A)^{-1}(S) = A \cap f^{-1}(S)$ olduğundan ispatı açıktır.

Şimdi de [3] de verildiği gibi a.c.H. ile w.c. arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teoremle görelim.

Teorem 1.2.16. : Eğer f: X $\longrightarrow$ Y fonksiyonu a.c.H. ve her açık $V \subset Y$ alt kümesi için, $[f^{-1}(V)]^{\circ} \subset f^{-1}(\overline{V})$ ise bu takdirde f fonksiyonu w.c. dir.

İspat: Hipoteze göre, herhangi $x \in X$ ve f(x) noktasını kapsayan herhangi açık $V \subset Y$ kümesi için, $[f^{-1}(V)]^{\circ} \subset f^{-1}(\overline{V})$ dır. f fonksiyonu a.c.H. olduğundan, $x \in U \subset [f^{-1}(V)]^{\circ}$ olacak şekilde açık bir $U \subset X$ alt kümesi vardır. Böylece; $f(U) \subset \overline{V}$ elde edilir ki, f fonksiyonu w.c. dir.

Sonuç 1.2.5. : f: X $\longrightarrow$ Y a.c.H. fonksiyonunun w.c. olması için $\Leftrightarrow$ her açık $V \subset Y$ alt kümesi için,

$[f^{-1}(V)]^{\circ} \subset f^{-1}(\overline{V})$ olmasıdır.

İspat: Teorem 1.1.2. ve Torem 1.2.16'nın direkt sonucudur.

2. A.C.H. İLE SÜREKLİLİK ARASINDAKİ İLİŞKİ

Sürekli olan bir fonksiyonun a.c.H. olduğu açıktır. Fakat, f: $X \longrightarrow Y$ fonksiyonu a.c.H. olduğunda sürekli olmayabilir. Bu geçişi sağlayabilmek için, P.E. Long fonksiyonun üzerine, tanım ve değer uzaylarına ve fonksiyonun grafiği üzerine bazı şartlar ekleyerek bunu genelleştirmiştir. Bunun için de öncelikle Kapalı Grafikli fonksiyonlar hakkında bazı tanım ve teoremler vermiştir.

2.1. Kapalı Grafikli Fonksiyonlar

Tanım 2.1.1. X ve Y topolojik uzaylar, $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. $G(f) = \{(x, y) / y = f(x), x \in X\} \subset X x Y$ alt kümesine f fonksiyonunun grafiği denir. [7]

Sürekli olan bir fonksiyonun grafiğinin kapalı olması gerekmez.

Örnek 2.1.1. $X = \{0,1\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \phi, \{0\}\}$ topolojisi verilsin. $i : X \longrightarrow X$ birim dönüşümü süreklidir. Fakat $G(f) = \{(0,0), (1,1)\} \subset XxX$ de kapalı değildir.

Aynı şekilde grafiği kapalı olan bir fonksiyonun da sürekli olması gerekmez.

Örnek 2.1.2. $X = [0,1]$, $Y = [0, +\infty[$ topolojik uzayları verilsin.

f: $X \longrightarrow Y$ fonksiyonunu:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Açıkça görülür ki, f fonksiyonunun grafiği kapalı, fakat x=0 noktasında fonksiyon sürekli değildir.

Tanım 2.1.2. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her x, y $\in$ X ($x \neq y$) için, bu noktaların herbirinin diğerini içermeyen bir komşuluğu varsa, (X, τ) uzayına T_1- uzayı ya da Frechet uzayı denir. [9]

Tanım 2.1.3. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her x, y$\in$X ($x \neq y$) için, $U \cap V = \phi$ olacak şekilde $U \in \mathcal{U}_{(x)}$ ve $V \in \mathcal{U}_{(y)}$ varsa, (X, τ) uzayına T_2 - uzayı ya da Haussdorf uzayı denir. [9]

Eğer f: X $\longrightarrow$ Y fonksiyonu sürekli ve Y - uzayı T_2 - ise f fonksiyonunun grafiğinin kapalı olduğu J. Dugundji tarafından aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2.1.1. f: X $\longrightarrow$ Y fonksiyonu sürekli ve Y - uzayı T_2 olsun. O takdirde f fonksiyonunun grafiği kapalıdır.

İspat için [10]'a bakılabilir.

Tersine grafiği kapalı olan bir fonksiyonun da sürekli olması için, P.E. Long şu tanımlara gerek duymuştur.

Tanım 2.1.4. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her x$\in$X noktasının sayılabilir bir komşuluk tabanı varsa, X uzayına I. sayılabilir uzay (I.S.A.) denir. [9]

Tanım 2.1.5. (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer X kümesinin her açık örtüsünün, sonlu bir alt örtüsü varsa, X uzayına Kompakt uzay denir. [9]

Tanım 2.1.6. (X, τ) uzayının sayılabilir her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X uzayına Sayılabilir Kompakt uzay denir. [9]

Her kompakt uzayın Sayılabilir kompakt olduğu açıktır. Fakat bunun tersi genellikle doğru değildir.

P.E. Long, f: X $\longrightarrow$ Y grafiği kapalı olan bir fonksiyon, X - I.S.A.

sağlayan uzay, Y de Sayılabilir kompakt olduğunda, f fonksiyonunun sürekli olduğuna dair teoremi aşağıdaki şekilde vermiştir.

Teorem 2.1.2. f: X $\longrightarrow$Y grafiği kapalı olan bir fonksiyon, X uzayı I.S.A. sağlayan uzay ve Y de Sayılabilir kompakt ise f fonksiyonu süreklidir.

İspat: f fonksiyonunun sürekli olmadığını varsayalım. O takdirde açık bir V⊂Y kümesi vardır ve f^{-1}(V) kümesi X de açık değildir. Bundan dolayı, x : (X- f^{-1} (V)) kümesinin kapanış noktası olacak şekilde, f^{-1}(V) kümesi x∈X noktasını kapsar. X uzayı I.S.A. sağlandığından, $x_n \in$ (X-f^{-1}(V)) olacak şekilde x'e yakınsayan bir $\{x_n\}$ dizisi mevcuttur. Y uzayı sayılabilir kompakt olduğundan, $\{f(x_n)\}$ dizisinin yığılma noktasına y dersek, y∉V dir. O halde, (x, y) ∉ G(f) olur. Fakat (x, y), G(f)'nin bir kapanış noktasıdır. Çünkü, XxY'de (x, y)'yi kapsayan herhangi açık bir küme, (x, f(x)) şeklindeki noktaları kapsar. Bu ise G(f)'nin kapalı olmasıyla çelişir. O halde f fonksiyonu süreklidir.

P.E. Long, f: X $\longrightarrow$Y fonksiyonunun grafiğinin kapalı olmasıyla ilgili aşağıdaki lemmayı vermiş ve [7] de ispatlamıştır.

Lemma 2.1.1. f: X$\longrightarrow$Y fonksiyonu verilsin. f nin grafiğinin kapalı olması için ⇔ y ≠ f(x) olmak üzere her x∈X ve y∈Y için, f(U) ∩V = ϕ olacak şekilde x ve y'yi kapsayan açık U ve V kümelerinin var olmasıdır.

1968 yılındaki çalışmasında Füller de aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 2.1.3. f: X $\longrightarrow$Y grafiği kapalı olan bir fonksiyon olsun. M⊂Y alt kümesi kompakt ise f^{-1} (M) kümesi X de kapalıdır.

İspat için, [8]'e bakılabilir.

Bu teoremin tersi doğru değildir. Yani, M⊂Y kompakt alt kümesi için, f^{-1} (M); X de kapalı ise f: X $\longrightarrow$ Y fonksiyonunun grafiği kapalı olmaz.

Tanım 2.1.7. (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer her $x \in X$ noktası, X uzayında kompakt bir komşuluğa sahip ise X uzayına Lokal Kompakt Uzay denir. [11]

Tanım 2.1.8. (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer her $x \in X$ noktası, X uzayında kompakt-kapalı bir komşuluğa sahip ise X uzayına strong-lokal kompakt uzay denir. [11]

f: X $\longrightarrow$ Y bir fonksiyon, Her $M \subset Y$ kompakt alt kümesi için, f^{-1} (M) $\subset$X de kapalı ve Y uzayı strong lokal kompakt bir uzay ise f fonksiyonunun kapalı olduğuna dair bir genelleştirmeyi, P.E. Long ve E.E. Mchee, 1970 de vermişlerdi. [5]

Teorem 2.1.4. f: X $\longrightarrow$ Y herhangi bir fonksiyon, Y uzayı strong lokal kompakt ve T_1 - uzayı olsun. Eğer $M \subset Y$ kompakt alt kümesi için, f^{-1} (M) : X de kapalı ise f'nin grafiği kapalıdır.

İspat: Her $x \in X$ için, $(x, y) \notin G(f)$ olsun. Y uzayı T_1 olduğundan $\exists$ $y \in V$ açık kümesi öyle ki, $f(x) \notin V$ dir. Ayrıca Y uzayı strong-lokal kompakt olduğundan her noktasının kompakt-kapalı komşuluk tabanı vardır.

$y \in V_1 \subset V$ olacak şekilde V_1-kompakt kümesi vardır. Buradan Füller teoremine göre, f^{-1} (V) : X de kapalıdır. $[X - f^{-1}(V)] = U$ - açık bir küme ve $x \in U$ olur. Dolayısıyla; $f(U) \cap V = \phi$ olur ki, G(f) - kapalıdır.

2.2. A.C.H. İle Sürekliliğin Çakışması

Husain tanımlamış olduğu a.c.H. : hemen hemen süreklilik çeşidinin sürekli olması için fonksiyona, tanım ve değer uzayına bazı şartlar eklemiş ve bunu genelleştirmiştir.

Tanım 2.2.1. f: X $\longrightarrow$ Y örten bir fonksiyon olsun. Eğer her $A \subset X$

kapalı alt kümesi için, $f(A) \subset Y$ alt kümesi Y deki topolojiye göre kapalı ise f fonksiyonuna Tam Kapalı denir. [3]

Bu tanımdan açıkça görüleceği gibi, her tam kapalı dönüşüm kapalı olup, bunun tersi genelde doğru değildir.

Şimdi Husain'in [3] de vermiş olduğu önemli bir sonucu görelim.

Sonuç 2.2.1. $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu örten, a.c.H. ve tam kapalı olsun. f'nin grafiği kapalı ve Y uzayı kompakt - T_2 ise f fonksiyonu süreklidir.

İspat için, [3]'e bakınız.

Bu sonuçtan görüleceği gibi bazı şartlar konularak, a.c.H. ile Süreklilik arasında bir ilişki kurulmuştur. Bundan sonraki yıllarda yapılan bu konudaki bütün çalışmalarda bu ilişki, farklı hipotezlerle, değişik koşullarda kurulmaya çalışılmıştır.

Yine Husain'in çalışmasında, $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu birebir, a.c.H. ve kapalı grafikli ise X uzayı bir T_2 uzayıdır. Bununla ilgili şu teorem ifade edilmiştir.

Teorem 2.2.1. $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu birebir ve G(f) - kapalı olsun. Eğer f fonksiyonu a.c.H. ise Y uzayı T_2 dir.

İspat: $x \neq w \in X$ için, f birebir olduğundan $f(x) \neq f(w)$ dir. Fonksiyonun grafiği kapalı olduğundan, $f(U) \cap V = \phi$ olacak şekilde $x \in U$ ve $f(w) \in V$ açık komşulukları vardır. Buradan, $V \subset [f(U)]^t$ ise $V \subset f[U^t]$ olup, $f^{-1}(V) \subset U^t$ elde edilir. f fonksiyonu a.c.H. olduğundan, $f^{-1}(V) \in \upsilon_{(w)}$ dir. (X-U) kapalı olduğundan, $[f^{-1}(V)]^- \subset X-U$ dır. Dolayısıyla x ve w'yi kapsayan X de ayrık, açık kümeler vardır ki, bu ise X'in T_2 olmasıdır.

$f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ve Y- uzayı T_2 olduğunda, f'nin grafiğinin kapalı olduğunu görmüştük. Burada süreklilik yerine a.c.H.'ı alırsak, Y- uzayı T_2 olsa dahi f'nin grafiği kapalı olmayabilir.

Tanım 2.2.2. (X, τ) topolojik uzayı ve herhangi iki A, B⊂X alt kümesi verilsin. Eğer; $\overline{A}\cap B \neq \phi$ veya $A\cap\overline{B} \neq \phi$ ise A ve B kümelerine bağlantılı iki küme denir. Eğer $\overline{A}\cap B$ = f ve $A\cap\overline{B} = \phi$ ise A ve B'ye bağlantılı olmayan iki küme denir. [9]

Tanım 2.2.3. (X, τ) topolojik uzayı olsun. X kümesi, bağlantılı ve boş olmayan iki alt kümenin birleşimine eşit ise, X uzayına bağlantılı olmayan uzay veya bağlantısız uzay denir. Eğer X kümesi herbiri boş olmayan, bağlantılı iki kümenin birleşimine eşitse, (X, τ) uzayına bağlantılı uzay denir. [9]

Tanım 2.2.4. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ noktasının, X uzayında bağlantılı kümelerden oluşan bir komşuluk tabanı varsa, X uzayına Lokal Bağlantılı Uzay denir. [9]

f: X⟶Y fonksiyonu a.c.H., Y uzayı Lokal Bağlantılı ve T_2 olsun. f ve f^{-1} fonksiyonları bağlantılı kümeleri korursa o takdirde G (f) - kapalı olur. [7]

Teorem 2.2.2. f: X ⟶ Y fonksiyonu a.c.H. olsun. Y uzayı Lokal Bağlantılı ve f ile f^{-1} fonksiyonları bağlantılı kümeleri korursa f fonksiyonunun grafiği kapalıdır.

İspat: $x_0 \in X$ ve $y \neq f(x_0)$, Y'ye ait iki farklı nokta olsun. Y uzayı T_2 olduğundan sırasıyla y ve $f(x_0)$ noktalarını kapsayan U ve V açık kümeleri vardır. Öyle ki, $y \in U$ ve $f(x_0) \in V$ olup, $U\cap V = \phi$ dır. Ayrıca Y uzayı Lokal bağlantılı olduğundan, $f(x_0)$'ın bağlantılı-açık bir komşuluğu vardır. Buradan $f(x_0) \in W \subset V$ olacak şekilde açık, bağlantılı W kümesi mevcuttur. Böylece, $U\cap W = \phi$ olup, dolayısıyla da $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(W) = \phi$ dır. Eğer herhangi bir $x \in f^{-1}(U)$ noktası, $f^{-1}(W)$ bağlantılı kümesinin limit noktası ise

$\{x\} \cup f^{-1}(W)$ kümesi bağlantılı olur. Fakat, $f(\{x\} \cup f^{-1}(W))$ kümesi bağlantılı değildir. Çünkü, $\{x\} \cup f^{-1}(W)$ kümesi U ve W gibi iki ayrık açık kümelerin noktalarını ihtiva eder. Bu ise f'nin bağlantılı oluşu ile çelişir. Dolayısıyla, $[f^{-1}(W)]^{-} \cap f^{-1}(U) = \phi$ olup, f a.c.H. olduğundan x_0 noktasını kapsayan bir T kümesi mevcuttur. Öyle ki, $T \subset [f^{-1}(W)]^{-}$ yani, $f(T) \cap U = \phi$ olup, sonuç olarak G(f) - kapalıdır.

$f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu a.c.H., tam kapalı ve Y uzayı Kompakt - T_2 ise f süreklidir. Burada tam kapalılık şartı yerine G (f) - kapalı şartı konulursa f fonksiyonu yine sürekli olur. [7]

Teorem 2.2.5. $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu a.c.H. ve Y uzayı lokal kompakt olsun. Eğer Y uzayı Regüler ya da T_2 ve G(f)- kapalı ise f fonksiyonu süreklidir.

İspat: $x_0 \in X$ ve $V \in \upsilon_{f(x_0)}$ olsun. Hipotezden, $f(x_0)$'ın kapalı-kompakt komşuluklar ailesi $f(x_0)$'ın komşulukları için bir taban oluşturduğundan, $f(x_0)$'ın kompakt W- komşuluğu vardır. Öyle ki, $W \subset V$ olacak şekilde W- kompaktı bulunur. G(f) kapalı olduğundan, $[f^{-1}(w)]$ kapalıdır yani $[f^{-1}(W)]^{-} = f^{-1}(W)$ dir. Ayrıca f fonksiyonu a.c.H. olduğundan, $[f^{-1}(w)]^{-}$ x_0'ın bir komşuluğudur. Bu da $f^{-1}(V)$'nin x_0'ın bir komşuluğu olmasını gerektirir. Böylece sonuç olarak f fonksiyonu süreklidir.

Uyarı 2.1.1. $f: R \longrightarrow R$ fonksiyonu a.c.H. olsun. Eğer G(f) - kapalı ise f fonksiyonu süreklidir.

İspat: R uzayı T_2 ve lokal kompakt olduğundan Teorem 2.2.5. gereğince ispatı açıktır.

Yukarıdaki teoremde, Y'nin Lokal Kompakt- T_2 şartı yerine Lokal Bağlantılılık-Regüler şartı ve fonksiyonun grafiğinin kapalı olması şartı yerine de, $C \subset Y$ bağlantılı alt kümesi için, $[f^{-1}(C)]^{-} \subset f^{-1}(\overline{C})$ şartı alındığında, f'nin a.c.H. olması halinde yine f'nin sürekli olduğu aşağıdaki teoremle verilmiştir. [7]

Teorem 2.2.6. f: X $\longrightarrow$ Y fonksiyonu a.c.H., Y uzayı regüler ve lokal bağlantılı olsun. Eğer her C $\subset$ Y bağlantılı alt kümesi için, $[f^{-1}(C)]^{-} \subset f^{-1}(\overline{C})$ ise f fonksiyonu süreklidir.

İspat: $x_0 \in X$ ve V, $f(x_0)$ noktasını kapsayan herhangi açık bir küme olsun. Y uzayı regüler ve lokal bağlantılı olduğundan, $\overline{W} \subset V$ olacak şekilde, $f(x_0)$ noktasını kapsayan bağlantılı ve açık bir $W \subset V$ kümesi vardır. Hipoteze göre, W bağlantılı olduğundan, $[f^{-1}(W)]^{-} \subset f^{-1}(\overline{W})$ olur. Buradan, $[f^{-1}(W)]^{-} \subset f^{-1}(\overline{W}) \subset f^{-1}(V)$ bulunur. Ayrıca f fonksiyonu a.c.H. olduğundan, $[f^{-1}(W)]^{-}$: x_0 noktasının bir komşuluğu olup, $f^{-1}(V)$ kümesi x_0 noktasının bir komşuluğudur. Dolayısıyla f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

[12] de Jones tarafından semi bağlantılık kavramı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 2.2.5. f: X $\longrightarrow$ Y fonksiyonu verilsin. Eğer, f^{-1} : Y'nin bütün kapalı ve bağlantılı alt kümelerini korursa f fonksiyonuna semi bağlantılıdır denir. [12]

Aşağıdaki teorem, semi bağlantılı bir a.c.H. fonksiyonunun sürekli olması için koşulları belirtir. [12]

Teorem 2.2.7. Y- regüler ve lokal bağlantılı bir uzay olmak üzere f: X $\longrightarrow$ Y fonksiyonu semi bağlantılı ise bu takdirde f fonksiyonu süreklidir.

İspat: $x_0 \in X$ ve V, $f(x_0)$ noktasını kapsayan herhangi açık bir küme olsun. Y uzayı regüler ve lokal bağlantılı olduğundan, $\overline{W} \subset V$ olacak şekilde, $f(x_0)$ noktasını kapsayan bağlantılı ve açık W kümesi vardır. Buradan, $f^{-1}(W) \subset f^{-1}(\overline{W}) \subset f^{-1}(V)$ olur. f fonksiyonu semi bağlantılı olduğundan,

$f^{-1}(\overline{W})$ kümesi kapalı olup, $[f^{-1}(W)]^{-} \subset f^{-1}(\overline{W}) \subset f^{-1}(V)$ elde edilir. Ayrıca f fonksiyonu a.c.H. olduğundan, x_0 noktasını kapsayan açık bir $T \subset [f^{-1}(W)]^{-}$ alt kümesi vardır. Böylece, $f(T) \subset V$ olur ki, f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

Teorem 2.2.8. Y- lokal bağlantılı bir uzay olmak üzere, $f: R \longrightarrow Y$ bir a.c.H. fonksiyonu olsun. Eğer Y'nin her bağlantılı C alt kümesi için, $f^{-1}(C)$ kümesi bağlantılı ise bu takdirde f fonksiyonu süreklidir.

İspat: $x_0 \in X$ ve V, $f(x_0)$ noktasını kapsayan herhangi açık bir küme olsun. Y uzayı lokal bağlantılı olduğundan, V kümesini bağlantılı bir küme olarak alabiliriz. Hipoteze göre, $f^{-1}(V)$: R'nin bağlantılı bir alt kümesidir. Dolayısıyla $f^{-1}(V)$, x_0 noktasını kapsayan bir aralıktır. Buradan, $[f^{-1}(V)]^{-}$ kümesi de bir aralıktır ve f fonksiyonu a.c.H. olduğundan x_0 noktasının bir komşuluğudur. Bundan dolayı $x_0 \in [f^{-1}(V)]^{o}$ olur. Böylece f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

Sonuç 2.2.2. $f: R \longrightarrow R$ bir a.c.H. fonksiyonu olsun. Eğer R'nin her bağlantılı C alt kümesi için, $f^{-1}(C)$ kümesi de bağlantılı ise bu takdirde f fonksiyonu süreklidir.

İspat: Y = R lokal bağlantılı olduğundan, Teorem 2.2.8.'e göre ispatı açıktır.

3. BAİRE UZAYLARI ÜZERİNE

Bu bölümde, $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonunun, tanım ve değer uzaylarının üzerine getirilen şartlarla, X üzerindeki Baire Yapısının Y üzerine, Y üzerindeki Baire yapısının da X üzerine nasıl taşındığını, gerek Frolik'in gerekse M. Çiçeğin makalelerinde olsun, görüp yorumlamaya çalıştık.

3.1. Semi Süreklilik Üzerine

Tanım 3.1.1.: X topolojik bir uzay ve $A \subset X$ olsun. $O \subset A \subset \overline{O}$ olacak şekilde X'in bir O açık alt kümesi varsa, A kümesine X'in bir yarı açık alt kümesi denir. [15]

Örnek 3.1.1.: (R, U) alışılmış topolojisine göre, aşağıdaki kümeler birer yarı açıktır.

A = [0,1[, B = [0,1 [U] 1,2] , C = [1,2 [U] 2,3 [

$D = R \setminus \{ 1/n, n \in N\}$

Teorem 3.1.1. : X topolojik bir uzay ve $A \subset X$ olsun. A'nın X içinde bir yarı açık cümle olması için $\Leftrightarrow$ $A \subset \overline{\mathring{A}}$ olmasıdır. [Ref. 15]

Aynı çalışmada şu özellik de verilmiştir.

Teorem 3.1.2.: X bir topolojik uzay, A kümesi X'in bir yarı açık alt kümesi olsun. $A \subset B \subset \overline{A}$ şartını sağlayan bir $B \subset X$ alt kümesi varsa, B kümesi de bir yarı açıktır.

Teorem 3.1.2.'nin bir sonucu olarak [15] de şu önerme verilmiştir.

Önerme 3.1.1. : Topolojik bir X uzayının açık her alt kümesi bir yarı açıktır.

Bu önermenin karşıtı doğru değildir. Örneğin, (R. U) alışılmış topolojisine göre, A = [1, 2[kümesi bir yarı açık olmasına karşın açık değildir.

Önerme 3.1.2.: Topolojik bir X uzayının yarı-açık bir alt kümesinin kapanışı da yarı açıktır.

İspat: $A \subset X$ ve A yarı-açık olsun. (3.1.2.) Teoreminden dolayı, $A \subset \overline{\mathring{A}}$ veya $\bar{A} \subset \overline{\mathring{A}}$ olur. Diğer taraftan, $\mathring{A} \subset \mathring{\bar{A}}$ olduğundan, $\overline{\mathring{A}} \subset (\mathring{\bar{A}})^{-}$dır. Sonuç olarak, $\bar{A} \subset (\mathring{\bar{A}})^{-}$ elde edilir.

Uyarı 3.1.1.: Kapanışı yarı açık olan bir kümenin kendisi genellikle bir yarı açık olmayabilir.

Örneğin, R'nin alışılmış topolojisine göre, $A =]\,0,1\,[\cap Q$ kümesini gözönüne alalım. Burada Q rasyonel sayılar kümesini göstermektedir. A'nın kapanışı : $\bar{A} = [0,1]$ bir yarı açık olmasına karşın, A kümesi bir yarı açık değildir.

Teorem 3.1.3.: $A \subset Y \subset X$ olsun. Eğer Y, X'in bir alt uzayı ve A, X'de yarı açık ise o takdirde A kümesi Y de de yarı açıktır. [Ref. 15]

Teorem 3.1.4.: Eğer A, X de açık ve S de X de yarı açık ise o takdirde $(A \cap S)$, X de yarı açıktır. [Ref. 15]

Tanım 3.1.2.: $f: X \longrightarrow Y$ herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer her $U \subset X$ açık alt cümlesi için, $f(U)$: Y de yarı açık oluyorsa f fonksiyonuna yarı açık (semi açık) denir. [Ref. 15]

Tanım 3.1.3.: $f: X \longrightarrow Y$ herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer her açık $V \subset Y$ alt cümlesi için, $f^{-1}(V)$: X de yarı açık ise o takdirde f'ye yarı-sürekli (semi-sürekli) fonksiyon denir. [Ref. 15]

Teorem 3.1.5.: $f: X \longrightarrow Y$ yarı-açık fonksiyon ve $A \subset X$ açık bir alt küme olsun. O takdirde, $f/_A : A \longrightarrow f(A)$ dönüşümü : $f/_A(x) = f(x)$ her $x \in A$ için yarı açıktır.

İspat: U: A da açık olsun. A: X de açık olduğundan, U: X de açıktır.

f fonksiyonu yarı-açık olduğundan, f(U): Y de yarı açıktır. Buradan, f(U) : f (A) da yarı-açıktır.

Teorem 3.1.6.: f: X ⟶ Y fonksiyonu semi sürekli ve A, X'in açık bir alt cümlesi olsun. O takdirde, $f/_A : A \longrightarrow f(A)$, $f/_A (x) = f(x)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm her $x \in A$ için semi-süreklidir.

İspat: G : f(A) cümlesinde herhangi bir açık cümle olsun. O takdirde, $G = f(A) \cap V$ olacak şekilde açık bir $V \subset Y$ alt kümesi vardır. Açıktır ki,

$(f/_A)^{-1} (G) = A \cap f^{-1} (G) = A \cap f^{-1} [f(A) \cap V)$ dir.

Buradan, $(f/_A)^{-1} (G) = A \cap f^{-1} (V)$ bulunur. f fonksiyonu semi-sürekli olduğundan, $f^{-1} (V)$: X de semi açıktır. Dolayısıyla, $[A \cap f^{-1} (V)]$ cümlesi de semi açıktır. Bu yüzden $(f/_A)^{-1} (G) = A \cap f^{-1} (V)$ cümlesi, A da semi açıktır.

Tanım 3.1.4.: f: X ⟶ Y herhangi bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$, $x \in U \in \upsilon_{(x)}$ komşuluğu için, $f(\overline{U}) \subset \overline{V}$ olacak şekilde $x \in U \in \upsilon(x)$ komşuluğu varsa, f fonksiyonuna θ- sürekli denir.

Uyarı 3.1.2.: Her θ- sürekli fonksiyon weakly-süreklidir. Bunun tersi genellikle doğru değildir.

Tanım 3.1.5.: f: X ⟶ Y bir fonksiyon olsun. Her açık $\phi \neq V \subset Y$ alt kümesi için, $f^{-1} (V) \neq \phi$ ve $[f^{-1} (V)]^{\circ} \neq \phi$ ise f: X ⟶ Y fonksiyonuna feebly-sürekli (fb-sürekli) denir. [13]

Her açık $\phi \neq U \subset X$ alt kümesi için, $[f(U)]^{\circ} \neq \phi$ ise f: X ⟶ Y fonksiyonuna feebly-açık (fb-açık) denir. [13]

Uyarı 3.1.3. : Her semi-sürekli fonksiyon feebly-sürekli ve her semi-açık fonksiyon feebly-açık bir dönüşümdür. Fakat bunun tersleri genellikle doğru değildir.

Teorem 3.1.5.: f: $X \longrightarrow Y$ içine bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki şartlardan herhangi birisi sağlanırsa, f fonksiyonu semi-açıktır.

i) f fonksiyonu feebly açık ve w.c.

ii) f fonksiyonu feebly açık ve a.c.S.

iii) f fonksiyonu feebly açık ve θ- sürekli

İspat: ACX açık bir alt cümle ve (i) sağlansın. O takdirde f'nin semi-açık olduğunu ispat etmek için,

$f(A) \subset [f(A)]^{\circ -}$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için, $y \in f(A)$ olsun. Buradan, $y = f(x)$ olacak şekilde $x \in A$ noktası vardır. y noktasının herhangi bir açık komşuluğu V olsun. f fonksiyonu w.c. olduğundan, $f(U) \subset \overline{V}$ olacak şekilde $x \in U$ açık alt cümlesi vardır. Buradan, $x \in (U \cap A)$ olup, f fonksiyonu fb-açık olduğundan, $[f(U \cap A)]^{\circ} \neq \phi$ dır. $W = [f(U \cap A)]^{\circ}$ alalım. Sonuç olarak, $V \cap [f(A)]^{\circ} \neq \phi$ elde edilir ki, $y \in [f(A)]^{\circ -}$ dır.

Ayrıca her a.c.S. olan fonksiyon w.c. ve her θ- sürekli fonksiyon da w.c. olduğundan, (ii) ve (iii). şıklardan hareketle ispatı da açıktır.

Tanım 3.1.6.: X'in her regüler açık alt cümlesinin görüntüsü Y'nin açık bir alt cümlesi ise f: $X \longrightarrow Y$ fonksiyonuna almost-açık denir. Eğer her açık UCX alt kümesi için, $f(U) \subset [f(\overline{U})]^{\circ}$ oluyorsa, f: $X \longrightarrow Y$ fonksiyonuna weakly-açık denir. [1]

Uyarı 3.1.4.: Her açık dönüşümün weakly açık ve her almost açık dönüşüm de weakly-açıktır. Fakat bu ifadelerin tersi genellikle doğru değildir.

3.2. Baire Uzaylarının Görüntüleri Ve Ters Görüntüleri

Z. Frolik [13] 1960 yılında Baire Uzayları hakkında yapmış olduğu çalışmasında, f: X $\longrightarrow$ Y üzerine bir fonksiyon olmak üzere, X- uzayı Baire olduğunda, hangi şartlar altında Y- uzayının Baire olduğunu, tersine Y- uzayı Baire olduğunda hangi şartlar altında X- uzayının Baire olduğunu incelemiş ve ispatlamıştır.

Şimdi Baire Uzayları hakkında önemli birkaç tanımı [9] dan faydalanarak verelim.

Tanım 3.2.1. : Bir (X, τ) topolojik uzayı ve A, B$\subset$X alt kümeleri verilsin. Eğer B$\subset\overline{A}$ ise, A kümesine B içinde yoğundur denir. [9]

Tanım 3.2.2. : Bir (X, τ) topolojik uzayı ve bir A$\subset$X alt kümesi verilsin. Eğer $\overset{\circ}{\overline{A}} \neq \phi$ ise, A kümesine X içinde yoğundur denir. [9]

Tanım 3.2.3. : (X, τ) topolojik uzayı ve bir A$\subset$X alt kümesi verilsin. Eğer $\overline{A}$=X ise, A kümesine X içinde her yerde yoğun denir. [9]

Tanım 3.2.4. : (X, τ) topolojik uzayı ve bir A$\subset$X alt kümesi verilsin. Eğer $\overset{\circ}{\overline{A}} = \phi$ ise, A kümesine X içinde hiçbir yerde yoğun değil denir. [9]

Tanım 3.2.5. : (X, τ) topolojik uzayı ve bir A$\subset$X alt kümesi verilsin. Eğer A kümesi, sonlu ya da sonsuz çoklukta hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin birleşiminde ya da birleşimine eşit ise, A kümesine X de birinci kategoriden küme ya da cılız küme denir. Eğer A kümesi bu şekilde ifade edilemiyorsa, A kümesine X içinde ikinci kategoriden küme denir.

A, I. kategoridendir $\Leftrightarrow$ A$\subset \bigcup A_n \ni$ Her n$\in$N için $\overset{\circ}{\overline{A_n}} = \phi$ [9]

Tanım 3.2.6. : Bir topolojik uzayın sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa, bu uzaya ayrılabilir uzay denir. [9]

Tanım 3.2.7. : (X, τ) topolojik uzayı verilsin. X'in her yerde yoğun, açık alt kümelerinin kesişimi, X de her yerde yoğun ise X uzayına Baire uzayı denir. [9]

X Baire uzayı $\Leftrightarrow$ her $n \in N$ için $A_n \in \tau$ ve $X = \overline{A_n}$ olmak üzere $(\cap A_n)^- = X$

Önerme 3.2.1. f: $X \longrightarrow Y$ fonksiyonunun feebly-açık olması için $\Leftrightarrow$ $\overline{V} = Y$ için $[f^{-1}(V)]^- = X$ olmasıdır.

f: $X \longrightarrow Y$ fonksiyonunun fb-sürekli olması için $\Leftrightarrow$ $\overline{U}=X$ için $[f(U)]^- = Y$ olmasıdır.

Frolik Baire Uzaylarının görüntüleri hakkında aşağıdaki teoremi vermiş ve ispatlamıştır.

Teorem 3.2.1. : f : $X \longrightarrow Y$ fonksiyonunnu a.c.H. ve fb-açık olduğunu varsayalım. Eğer X bir Baire uzayı ise o takdirde Y de bir Baire uzayıdır.

İspat: Varsayalım ki, X bir Baire uzayı olsun. Bu takdirde Y'nin bir Baire uzayı olduğunu ispat etmek için, $\{V_n\}$'ler Y'nin açık yoğun alt cümlelerinin bir serisi olmak üzere, $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ 'nin Y de yoğun olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Bunun için, $U_n = [f^{-1}(V_n)]^o$ ve $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ alalım. f fonksiyonu açık fb-açık olduğundan, $[f^{-1}(V_n)]^- = X$ dir. Ayrıca f a.c.H. olduğundan, $\overline{U_n} = X$ elde edilir. X uzayı Baire uzayı olduğundan, $\overline{U}$=X'dir. f'nin fb-sürekliliğiyle birlikte, $[f(U)]^- = Y$ sonucu bulunur. Buradan da $f(U) \subset V$ olduğundan, $\overline{V} = Y$ elde edilir. Sonuç olarak Baire uzayları hakkındaki iddianın ispatı tamamlanmış olur.

f: $X \longrightarrow Y$ fonksiyonu a.c.H. ise fb-sürekli olduğu açıktır. Bunun tersi her zaman doğru değildir ama birebir fb-sürekli bir fonksiyon a.c.H. dır.

Uyarı 3.2.1. : f: X $\longrightarrow$ Y fonksiyonu birebir, fb-açık ve fb-sürekli olsun. X uzayının Baire uzayı olması için $\Leftrightarrow$ Y uzayının Baire uzayı olmasıdır. (X'in II. kategoriden olması için $\Leftrightarrow$ Y'nin II. kategoriden olmasıdır.)

Teorem 3.2.2. f: X $\longrightarrow$ Y, X- metrize edilebilir ve ayrılabilir uzayından Y üzerine örten, açık ve sürekli bir fonksiyon olsun. O takdirde Y bir Baire uzayı ve her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ noktalarının cümlesi II. kategoriden ise X de bir Baire uzayıdır.

Teoremin ispatı aşağıdaki teoremin direkt sonucudur.

Teorem 3.2.3.: f: X $\longrightarrow$ Y, X- metrize edilebilir ve ayrılabilir uzayından Y üzerine örten, açık ve sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer Y uzayı II. kategoriden ve her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ noktalarının cümlesi II. kategoriden ise o takdirde X uzayı da II. kategoridendir.

Teoremin ispatından önce aşağıdaki Lemma'yı verelim.

Lemma 3.2.1.: f: X $\longrightarrow$ Y, X- metrize edilebilir ve ayrılabilir uzayından Y üzerine örten, açık ve sürekli olsun. FCX alt cümlesi kapalı ve hiçbir yerde yoğun olmasın. $[f^{-1}(y) \cap F]^{o} \neq \phi$ olacak şekilde $y \in Y$ noktalarının cümlesine M(F) diyelim. O takdirde M(F): Y de I. kategoridendir.

İspat: $\{U_n\}$'ler X'in açık alt cümleleri olsun.

her $n \in N$ için, $M_n = \{y : y \in Y, \phi \neq f^{-1}(y) \cap U_n \subset F\}$ ve $M(F) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \}$ alalım. Buradan M_n'nin Y de hiçbir yerde yoğun olmadığını ispat etmek yeterli olacaktır. Bunun için M_n'lerin kapalı ve içlerinin boş olduğunu göstermeliyiz.

$$Y - M_n = \{y : y \in Y, f^{-1}(y) \cap U_n \cap (X-F) \neq \phi\}$$

$$Y - M_n = f[U_n \cap (X - F)]$$

dir. f açık bir dönüşüm olduğundan, $Y - M_n$ açıktır, dolayısıyla M_n- kapalıdır.

Şimdi varsayalım ki, $\overset{\circ}{V}=M_n \neq \phi$ olsun. M_n'nin tanımından, $f^{-1}(V) \cap U_n \subset F$ dir. f fonksiyonunun sürekliliğinden, $f^{-1}(V)$ açıktır. Bu ise F'nin hiçbir yerde yoğun değil olmasıyla çelişir.

Teorem 3.2.3.'ün ispatı: Her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ noktalarının cümlesi ve Y- uzayı II. kategoriden olsun. Varsayalım ki, X uzayı da I. kategoriden olsun. Bu takdirde, $X = \bigcup_{n\in N} F_n$ olacak şekilde X'in hiçbir yerde yoğun olmayan kapalıların $\{F_n\}$ dizisi vardır. Lemma'ya göre; $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M(F_n)$: Y de I. kategoridendir. $y_0 \in (Y\text{-}M)$ ve $K = f^{-1}(y_0)$ alalım. Buradan $\{F_n \cap K\}$; K'nın kapalı alt cümleleri K'yı örter. Bu yüzden $\phi \neq F_n \cap K \subset U$ olacak şekilde bir $n \in N$ vardır. Fakat M cümlesi, $[f^{-1}(y) \cap F_n]^o \neq \phi$ olacak şekiide $n \in N$ doğal sayıları için, her $y \in Y$ nin bir grubu olduğundan bu mümkün değildir. O halde X uzayı II. kategoridendir.

Mustafa Çiçek 1991 yılında yapmış olduğu çalışmasında, fonksiyona, tanım ve değer uzaylarına yeni şartlar getirerek, Frolik'in Baire Uzayları üzerine ispatlamış olduğu teoremi bir başka şekilde ele almıştır.

Teorem 3.2.4. $A \subset X$ olsun. O takdirde aşağıdaki özellikler denktirler.

i) A yarı-kapalıdır,

ii) $\overset{\circ}{\overline{A}} \subset A$ dır,

iii) (X-A) yarı açıktır.

Teorem 3.2.5. Baire uzayının her açık alt uzayı da Baire uzayıdır.

Teorem 3.2.6. Yoğun bir Baire alt uzayına sahip her uzay, Baire uzayıdır.

Teorem 3.2.4., Teorem 3.2.5. ve Teorem 3.2.6.'in ispatları [15] de verilmiştir.

Şimdi Mustafa Çiçek'in Baire Uzaylarının ters görüntüleri hakkında vermiş olduğu teoremi görelim.

Teorem 3.2.7.: f, X- metrik, ayrılabilir uzayından Y- Baire uzayı üzerine örten bir fonksiyon ve her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ noktalarını cümlesi Baire uzayı olsun. Eğer aşağıdaki ifadelerden herhangi birisi sağlanırsa, o takdirde X de bir Baire uzayıdır.

i) f, yarı açık ve yarı sürekli

ii) f, w.c. ve weakly-açık

iii) f, a.c.S. ve weakly-açık

iv) f, θ-sürekli ve weakly-açık

v) f, a.c.S. ve almost açık

Teoremin ispatını vermeden önce aşağıdaki Lemma'yı görelim.

Lemma 3.2.2.: f: X- metrik, ayrılabilir uzayından Y uzayı üzerine örten bir fonksiyon olsun. $F \subset X$ ve $\{U_n : n=1, 2, ...\} \subset X$ açık alt cümleler olsun. Eğer, $M_n=\{y \in Y / \phi \neq f^{-1}(y) \cap U_n \subset F\}$ ve $[f^{-1}(y) \cap F]^o \neq \phi$ olacak şekilde her $y \in Y$ nin bir grubu M(F) ise aşağıdakiler sağlanır.

i) $M_n = Y - f(U_n \cap (X-F))$

ii) $M(F) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$

İspat: $y \in M_n$ olsun. O takdirde, $f^{-1}(y) \cap U_n \subset F$ dir. Buradan, $(X-F) \subset (X-f^{-1}(y)) \cup (X- U_n)$ elde edilir ki, $y \in Y- f(U_n \cap (X-F))$ dir. O halde, $M_n \subset Y- f(U_n \cap (X-F))$ bulunur. Tersine, $y \in Y- f(U_n \cap (X-F))$ olsun. Buradan, $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(Y- f(U_n \cap (X-F))) \subset X- (U_n \cap (X-F))$ elde edilir.

Sonuç olarak, $f^{-1}(y) \subset (X-U_n) \cup F$ elde edilir ki, $f^{-1}(y) \cap U_n \subset F$ olup, $y \in M_n$ dir. O halde, $Y- f(U_n \cap (X-F)) \subset M_n$ bulunur ki, ispat biter.

(b)'nin ispatı: $y \in M(F)$ olsun. $M(F)$'nin tanımından, $[f^{-1}(y) \cap F]^o \neq \phi$ dır. Buradan X- metrik-ayrılabilir olduğundan II. sayılabilir olup, $\{U_n : n = 1, 2, ...\}$ açık alt cümleleri vardır. Öyle ki, $n_o \in N$ için, $\phi \neq f^{-1}(y) \cap U_{n_o} \subset f^{-1}(y) \cap F$ olacak şekilde U_{n_o} açık cümlesi vardır. Bu ise bize $y \in M_{n_o}$ olduğunu gösterir ki, $y \in \bigcup M_n$ dir. Buradan, $M(F) \subset \bigcup_{n \in N} M_n$ olur. Tersine $y \in \bigcup_{n \in N} M_n$ olsun. O takdirde $\exists\, n_o \in N \ni y \in M_{n_o}$ dır. Buradan, $\phi \neq f^{-1}(y) \cap U_{n_o} \subset F$ dir. Ayrıca M_{n_o}'ın tanımından, $[f^{-1}(y) \cap F]^o \neq \phi$ olup, $y \in M(F)$ dir. Bu ise $\bigcup_{n \in N} M_n \subset M(F)$ demektir ki, ispat biter.

Lemma 3.2.3. f: X- metrik-ayrılabilir uzayından Y üzerine örten bir fonksiyon olsun. $F \subset X$ alt cümlesi, X'in kapalı alt cümlelerinin hiçbir yerinde yoğun değil ve $\phi \neq [f^{-1}(y) \cap F]^o$ şartını sağlayan her $y \in Y$ noktalarının bir grubu $M(F)$ olsun. Eğer aşağıdaki ifadelerden herhangi birisi sağlanırsa, o takdirde $M(F)$: Y de I. kategoridendir.

i) f, yarı-açık ve yarı-sürekli

ii) f, yarı-açık ve a.c.S.

iii) f, weakly açık ve a.c.S.

ıv) f, weakly açık ve w.c.

İspat: (i) sağlansın ve $\{U_n$: n=1, 2,...$\}$'ler X'in açık alt cümleleri olsun. $M_n = \{y \in Y : \phi \neq f^{-1}(y) \cap U_n \subset F\}$ alalım. Varsayalım ki $M(F)$: Y de I. kategoriden olmasın. O takdirde $M(F)=\bigcup M_n$ dir. Buradan, $\mathring{\overline{M}}_{n_o} \neq \phi$ olacak şekilde $\exists n_o \in N$ vardır. f fonksiyonu yarı-açık olduğundan, M_{n_o}-yarı kapalıdır. Ve açıktır ki, $\mathring{\overline{M}}_{n_o} \subset \mathring{M}_{n_o}$ dir. Buradan, $M_{n_o} \neq \phi$ olup, M_{n_o}'ın tanımına göre, $\phi \neq f^{-1}(M_{n_o}) \cap U_{n_o} \subset F$ dir. f fonksiyonu yarı-sürekli olduğundan, $f^{-1}(\overset{\circ}{M}_{n_0})$-yarı-açıktır. Dolayısıyla, $[f^{-1}(\overset{\circ}{M}_{n_0}) \cap U_{n_0}]$ cümlesi yarı-açıktır. Buradan $O C f^{-1}(\overset{\circ}{M}_{n_0}) \cap U_{n_0} C \overline{O}$ olacak şekilde, $\phi \neq O C X$ açık alt cümlesi vardır. Bu ise f'nin X de hiçbir yerde yoğun olmamasıyla çelişir ki, M(F) : Y de I. kategoridendir.

Aynı şekilde (ii) sağlansın ve M(F) : Y de I. kategoriden olmasın. Yukardaki ispatta yapıldığı gibi f'nin yarı-açık olduğunu kullanarak, $\phi \neq f^{-1}(\overset{\circ}{M}_{n_0}) \cap U_{n_0} C F$ elde edilir. $\overset{\circ}{\overline{M}}_{n_0}$: regüler açık ve f a.c.S. olduğundan, $f^{-1}(\overset{\circ}{\overline{M}}_{n_0})$ cümlesi açıktır. Bu ise F'nin X de hiçbir yerde yoğun değil olmasıyla çelişir ki, M(F) : Y de I. kategoridendir. (iii) ve (ıv) den Lemmanın ispatı tıpkı (i) ve (ii) de olduğu gibi aynı yoldan yapılabilir.

Teorem 3.2.8. f: X-metrik, ayrılabilir uzayından Y uzayı üzerine örten bir fonksiyon, Y uzayı II. kategoriden ve her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ noktalarının cümlesi II. kategoriden olsun. O takdirde aşağıdaki şartlardan herhangi birisi sağlanırsa, X de II. kategoridendir.

i) f, yarı-açık ve yarı-sürekli

ii) f, yarı-açık ve a.c.S.

iii) f, weakly-açık ve a.c.S.

ıv) f, weakly-açık ve w.c.

Bu teoremin ispatı, önceki Lemmada olduğu gibi aynı düşünceyle yapılabilir. [14]

Uyarı 3.2.2. f: X- metrik, ayrılabilir uzayından Y- almost regüler uzayı üzerine örten bir fonksiyon, Y uzayı ve her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ noktalarının cümlesi II. kategoriden olsun. Eğer aşağıdakilerden birisi sağlanırsa, o takdirde X uzayı da II. kategoridendir.

i) f, weakly-açık ve w.c.

ii) f, weakly-açık ve θ-sürekli

(i)'den hareketle ispatı, Teorem 3.2.8'den (iii) şıkkına göre hemen yapılabilir. (ii)'den hareketle ispatı da (i) şıkkına göre hemen elde edilir.

Teorem 3.2.7.'nin ispatı: Varsayalım ki, (i) sağlansın. X'in Baire uzayı olduğunu göstermek yerine X'in boş olmayan açık alt cümlelerinin II. kategoriden olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bu düşünceyle, $G \subset X$ boş olmayan açık bir alt cümle alalım. f fonksiyonu yarı-açık olduğundan., f(G) : Y de yarı-açıktır. Buradan, $O \subset f(G) \subset \overline{O}$ olacak şekilde $O \subset Y$ açık alt cümlesi vardır. O halde f(G) : Y'nin Alt Baire uzayıdır. Bir başka deyişle, f(G) : Y de II. kategoridendir. $f/_G : G \longrightarrow f(G)$, $f/_G(x) = f(x)$ dönüşümünün her $x \in G$ için yarı-açık ve yarı-sürekli olduğunu biliyoruz. Her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ cümleleri Baire uzayı ve $(f/_G)^{-1}(y) = G \cap f^{-1}(y)$ olduğundan $(f/_G)^{-1}(y)$ noktalarının cümlesi de Baire uzayıdır. Bu ise, $(f/_G)^{-1}(y)$ noktalarının cümlesinin G de II. kategoriden olduğunu gösterir. O halde, G:X'in II. kategoriden bir alt uzayıdır. Sonuç olarak X uzayı da bir Baire uzayı olur.

Varsayalım ki, (ii) sağlansın ve $\phi \neq G \subset X$ açık bir alt cümle olsun. (ii) şıkkını kullanarak, f(G) : Y de açık bir alt Baire uzayı olur. Buradan, f(G) : Y de II. kategoridendir. Buradan da, (i)'nin ispatında olduğu gibi aynı operasyonları tekrarlayarak, $(f/_G)^{-1}(y)$ noktalarının cümlesi, G alt uzayında II. kategoriden olur. Açıktır ki, G : X de II. kategoridendir. O halde X bir Baire uzayıdır. (iii), (ıv) ve (v) şıkları da alınarak aynı düşünceyle X'in bir Baire uzayı olduğu gösterilebilir.

Böylece buradan bizim çıkardığımız sonuç, gerek Frolik'in makalesinde gerekse M. Çiçeğin makalesinde olsun, $f:X \longrightarrow Y$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere, fonksiyona süreklilik çeşitlerinden birisinin veya başka şartların eklenmesiyle, X uzayı bir Baire uzayı olduğunda hangi şartlarda Y uzayının da Baire uzayı olduğu ya da Y uzayı Baire uzayı olduğunda hangi şartlarda X uzayının da Baire olduğunu, bir başka deyişle X üzerindeki bir yapıyı yani Baire uzayı yapısını Y üzerine veya Y üzerindeki Baire uzayı yapısını da X üzerine, fonksiyona getirilecek çeşitli şartlarla nasıl taşınabileceğini görüp, incelemek olmuştur.

KAYNAKLAR

[1] **N. LEVİNE,** A decomposition of continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly, 68, 1961, 44-46.

[2] **M.K. SİNGAL-A.R. SİNGAL,** Almost continious mappings, Yokohama Math. J., 16 (1968), pp. 63-73

[3] **T. HUSAİN,** Almost continious mappings, Prace Math. 10, (1966), 1-7, MR 36=3322

[4] **P.E. LONG-D.A. CARNAHAN,** Comparing almost continious functions, Proceedins of the Almerican Math. Soc., Volume 38, Number 2, April 1973.

[5] **P.E. LONG-E.E. MCGEHEE,** Properties of almost continious functions, Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), pp. 175-180

[6] **TAKASHİ NOİRİ,** Between continity and weakly continiuty, (Italian Summary) Boll, Un. Mat. Ital, 9 (1974), pp. 647-654

[7] **P.E. LONG,** Almost Continous functinuous, Proceedings of the American Math. Soc., (1969)

[8] **R.V. FULLER,** Relations among continious and various non-vontinious functions, Pasific J. Math. 25 (1968) pp. 495-509

[9] **ŞAZİYE YÜKSEL,** Genel Topoloji, S.Ü. Yayınları, Konya (1995)

[10] **J. DUGUNDJİ,** Topology, pp. 135-145

[11] **LYNN A. STEEN AND J. ARTHUR SEEBACH JR.,** Counterexapmles in Topology, New York, (1970)

[12] **J. JONES, Jr.,** On semi-connected mappings of topological spaces, Proc. Amer. Math, Soc. 19 (1968), pp. 174-175.

[13] **Z. FROLİK,** On the Baire Spaces, (1960)

[14] **Mustafa ÇİÇEK,** On the Baire Spaces, (1991), Ankara Uni.

[15] **LEVİNE, N.,** Semi-Open and Semi Continuity in Topological spaces "Amer. Math. Monthly" Vol. 70 pp. 36-41 (1963)

ÖZGEÇMİŞ

1971 yılında İzmir'de doğdum. Tahsil hayatıma İzmir Barbaros İlkokulu'nda başladım. Daha sonra Vedide Baha Pars Ortaokulu'nu ve 50. Yıl Lisesi'ni bitirdim. 1987 yılında Ege Üniversitesi Fizik Bölümü'ne girip, 1989 yılında oradan Ön Lisans Diploması alarak ÖSYM sınavıyla Konya Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne girdim. Ve 1992 yılında buradan mezun oldum. Aynı yıl S.Ü. Fen-Ed. Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladım. Halen aynı fakültede görev yapmaktayım.