

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**HOMOJEN OLMAYAN HASAR OLUŞUMLARINA DAYALI
KESİKLİ ZAMANLI RİSK MODELİ**

Altan TUNÇEL

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2013**

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Altan TUNÇEL tarafından hazırlanan " **Homojen Olmayan Hasar Oluşumlarına Dayalı Kesikli Zamanlı Risk Modeli** " adlı tez çalışması 05/07/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği/oy çokluğu** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: *Doç.Dr. Fatih TANK*

Jüri Üyeleri:

Başkan: *Prof.Dr. Ayşen APAYDIN*
Ankara Üniversitesi, İstatistik Anabilim Dalı

Üye: *Prof.Dr. Serkan ERYILMAZ*
Atılım Üniversitesi , Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı

Üye: *Doç.Dr. Fatih TANK*
Ankara Üniversitesi, İstatistik Anabilim Dalı

Üye: *Doç.Dr. Sevil Bacanlı*
Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Anabilim Dalı

Üye: *Doç.Dr. Mehmet Yılmaz*
Ankara Üniversitesi, İstatistik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim DEMİR
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

HOMOJEN OLMAYAN HASAR OLUŞUMLARINA DAYALI KESİKLİ ZAMANLI RİSK MODELİ

Altan TUNÇEL

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Fatih TANK

Bu çalışmada; homojen olmayan hasar oluşumlarına dayalı kesikli zamanlı risk modelinde, bir sigorta şirketinin belirli bir zamandan sonra iflas etmemesi (yaşam) olasılığı üzerinde çalışılmıştır.

Bir sigorta şirketinin iflası rezerv seviyesine bağlıdır. Bu amaçla Bileşik Binomial risk modeli varsayımı altında ilgili zaman periyodlarında hasar oluşum olasılıkları homojen değil iken sonlu zamanlı yaşam ve toplam hasar sayısı olasılıkları için yinelemeli formüller elde edilmiştir.

Ayrıca hasar oluşum olasılıkları homojen değil iken Bileşik Binomial risk modelinde rezervin minimum ve maksimum seviyelerinin dağılımı elde edilip, çeşitli karakteristikleri verilmiştir.

2013 , 74 sayfa

Anahtar Kelimeler: Yaşam analizi, Kesikli zamanlı risk modeli, Bileşik Binomial risk model, İflas olasılıkları, Yaşam olasılıkları, İflas zamanı, Stokastik süreçler, Rezerv süreci

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

DISCRETE TIME RISK MODELS BASED ON NON-HOMOGENEOUS CLAIM OCCURRENCES

Altan TUNÇEL

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Fatih TANK

In this study; non-ruin (survival) probability after a definite time period of an insurance company is studied in a discrete time model based on non-homogenous claim occurrences.

Ruin of an insurance company is up to the level of the surplus. In this regard, recursive formulae for probability of survival and aggregate claim numbers in finite time where the claim occurrence probabilities are non-homogenous in related time periods are obtained under compound Binomial risk model.

Furthermore, distributions of the minimum and maximum levels of surplus in compound binomial risk model with non-homogeneous claim occurrences are obtained and some of its characteristics are given.

2013 , 74 pages

Key Words: Survival analysis, Discrete time risk model, Compound Binomial risk model, Ruin probability, Survival probability, Ruin time, Stochastic process, Surplus process

TEŞEKKÜR

Beni bu konuda çalışmaya yönlendiren ve çalışmamın her aşamasında yardımını esirgemeyen danışmanım Sayın Doç.Dr. Fatih TANK (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü)'a,

Tez çalışması sürecinde samimiyetiyle çözüm önerilerini ileten ve aynı zamanda tez izleme komitesi üyesi olan Sayın Prof.Dr. Serkan ERYILMAZ (Atılım Üniversitesi Endüstri Mühendisliği Bölümü)'a

Tez izleme komitesi üyesi olan ve desteğini her an hissettiğim Sayın Prof.Dr. Ayşen APAYDIN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü)'a

Değerli vakitlerini ayırarak doktora tezimi kısa bir zamanda okuyup değerlendiren Sayın jüri üyelerine,

Çalışmakta olduğum Kırıkkale Üniversitesi İstatistik Bölümü'ndeki akademik personel arkadaşlarıma ve özellikle Dr. Abdullah YILMAZ'a

Varlıklarını her zaman yanımda hissettiğim annem Güllü TUNÇEL, kardeşim Serkan TUNÇEL ve merhum babam Mahli TUNÇEL'e

Teşekkürlerimi sunarım.

Altan TUNÇEL
Ankara, Temmuz 2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER DİZİNİ	vii
1 GİRİŞ	1
2 RİSK ANALİZİNDE KULLANILAN SÜREÇLER VE MODELLER	
5	
2.1 Klasik Risk Süreçleri	5
2.2 Klasik Risk Modeli	9
2.3 Sparre-Andersen Risk Modeli	10
3 İFLAS TEORİSİ	12
3.1 İflas Olasılıkları	13
3.2 Klasik Risk Modeli için İflas Olasılıkları	13
3.2.1 İflas olasılıkları için sınırlar	15
3.2.2 Düzeltme katsayısı	15
3.2.3 Lundberg eşitsizliği	15
3.3 Sparre-Andersen Risk Modeli için İflas Olasılıkları	16
4 KESİKLİ ZAMANLI RİSK MODELİ	18
4.1 Bileşik Binomial Risk Modeli	20
4.2 Kesikli Zamanlı Sparre-Andersen Risk Modeli	24
5 KESİKLİ ZAMANLI RİSK MODELİNDE HOMOJEN OLMAYAN HASAR OLUŞUMLARI	25
5.1 Homojen Olmayan Durum için Sayısal Hesaplamalar	35
5.1.1 Sonlu zamanlı yaşam olasılıkları	35
5.1.2 Toplam hasar sayısının koşullu beklenen değeri	52
6 RİSK REZERV SÜREÇLERİNİN UÇ DEĞERLERİ	54
6.1 Uç Değerlerin Dağılımları	55
6.2 Homojen Olmayan Durumda Rezervin Uç Değerleri için Sayısal Hesaplamalar	61
7 SONUÇ VE TARTIŞMA	69
KAYNAKLAR	70
ÖZGEÇMİŞ	74

ŞEKİLLER DİZİNİ

3.1	Risk Rezerv Süreci Simülasyon Sonuçları Gösterimi	14
5.1	$u = 2$ ve $\alpha = 1/5$ iken Durum1 ve Durum2 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.	38
5.2	$u = 2$ ve $\alpha = 2/5$ iken Durum1 ve Durum2 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.	38
5.3	$u = 2$ ve $\alpha = 3/5$ iken Durum3 ve Durum4 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.	40
5.4	$u = 2$ ve $\alpha = 4/5$ iken Durum3 ve Durum4 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.	40
5.5	$u = 4$ ve $\alpha = 3/5$ iken Durum1 ve Durum2 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.	42
5.6	$u = 4$ ve $\alpha = 4/5$ iken Durum1 ve Durum2 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.	42
5.7	$u = 6$ ve $\alpha = 3/5$ iken Durum3 ve Durum4 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.	44
5.8	$u = 6$ ve $\alpha = 4/5$ iken Durum3 ve Durum4 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.	44
5.9	$u = 8$ ve $\alpha = 3/5$ iken Durum3 ve Durum4 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.	46
5.10	$u = 8$ ve $\alpha = 4/5$ iken Durum3 ve Durum4 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.	46
5.11	Durum1 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları ve kontur gösterimi.	47
5.12	Durum2 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları ve kontur gösterimi.	47
5.13	Durum3 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları ve kontur gösterimi.	48
5.14	Durum4 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları ve kontur gösterimi.	48
6.1	Sürecin basit bir gerçekleşmesi	55
6.2	$\alpha = 1/5$ iken Durum1 ve Durum3 için $T > n$ verildiğinde M_n 'in birikimli dağılım fonksiyonu	63
6.3	$\alpha = 1/5$ iken Durum2 ve Durum4 için $T > n$ verildiğinde K_n 'in birikimli dağılım fonksiyonu	63
6.4	$\alpha = 3/5$ iken Durum1 ve Durum3 için $T > n$ verildiğinde M_n 'in birikimli dağılım fonksiyonu	65
6.5	$\alpha = 3/5$ iken Durum2 ve Durum4 için $T > n$ verildiğinde K_n 'in birikimli dağılım fonksiyonu	65
6.6	$\alpha = 4/5$ iken Durum1 ve Durum3 için $T > n$ verildiğinde M_n 'in birikimli dağılım fonksiyonu	67
6.7	$\alpha = 4/5$ iken Durum2 ve Durum4 için $T > n$ verildiğinde K_n 'in birikimli dağılım fonksiyonu	67

ÇİZELGELER DİZİNİ

5.1	$u = 2$ iken $\alpha = 1/5$ ve $\alpha = 2/5$ için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları . . .	37
5.2	$u = 2$ iken $\alpha = 3/5$ ve $\alpha = 4/5$ için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları . . .	39
5.3	$u = 4$ iken $\alpha = 3/5$ ve $\alpha = 4/5$ için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları . . .	41
5.4	$u = 6$ iken $\alpha = 3/5$ ve $\alpha = 4/5$ için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları . . .	43
5.5	$u = 8$ iken $\alpha = 3/5$ ve $\alpha = 4/5$ için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları . . .	45
5.6	Farklı α değerleri ve farklı u değerleri için $E(N_n T > n)$	53
6.1	$\alpha = 1/5$ iken M_n ve K_n 'nin Beklenen değer ve Varyans değerleri	62
6.2	$\alpha = 3/5$ iken M_n ve K_n 'nin Beklenen değer ve Varyans değerleri	64
6.3	$\alpha = 4/5$ iken M_n ve K_n 'nin Beklenen değer ve Varyans değerleri	66

SİMGELER DİZİNİ

r.d	Rasgele değişken
m.ç.f	Moment çıkararı fonksiyon
$F(x)$	Dağılım fonksiyonu
$P(X = x)$	Olasılık fonksiyonu
F^{*n}	n-katlı konvolüsyon
$\{N_t, t > 0\}$	Sayma süreci
$M(t)$	Yenileme fonksiyonu
θ	Güvenlik yüklemesi
$\{S_t, t > 0\}$	Toplam hasar miktarı süreci
$U_0 = u$	Başlangıç rezervi
N_n	Toplam hasar sayısı
U_t	Rezerv süreci
c	Prim getirisi
T	İflas zamanı
$\psi(u)$	Nihai iflas olasılığı
$\phi(u)$	Yaşam olasılığı
$\psi(u, t)$	Sonlu zamanlı iflas olasılığı
$\phi(u, t)$	Sonlu zamanlı yaşam olasılığı
$\lfloor x \rfloor$	En büyük tamsayı $\leq x$

1. GİRİŞ

20. yy başlarında Filip Lundberg tarafından önerilmiş ve temelinde olasılık teorisi, istatistik teorisi, stokastik süreçler, fonksiyonel analiz ve optimizasyon yöntemleri yatan risk teorisi, özellikle bir sigorta şirketinde meydana gelen hasarların çeşitli karakteristiklerini incelemesiyle aktüeryal bilimlerin temelini oluşturmaktadır.

Risk teorisinin en önemli konularından bir tanesi iflas teorisidir. İflas teorisi; herhangi bir dönemde bir sigorta şirketinin elindeki rezervin belirli bir seviyenin altına düşüp düşmediğini incelemektedir. Eğer sigorta şirketinin elindeki rezerv belirli bir seviyenin altına düşerse mali açıdan bu sigorta şirketinin iflas ettiği düşünülebilir.

Literatürde iflas teorisi için çeşitli risk modelleri bulunmaktadır. Bu modeller stokastik süreçlerin uygulamalarının iflas teorisine bir uyarlaması biçimindedir. En çok kullanılan iki model; Klasik risk modeli ve Sparre-Andersen risk modelidir. Bu iki modelde de zamanın sürekli olması durumunda, çeşitli çalışmalar yapılmış olmasına rağmen zamanın kesikli olması durumu üzerinde getirdiği zorluklar sebebiyle yeteri kadar çalışılmamıştır. Aslında kesikli zamanlı risk modeli bir takım kullanışlı özelliklere sahip olmasının yanı sıra gerçek durumu sürekli zamanlı risk modellerine göre daha iyi yansıtmaktadır. Öyle ki kesikli zamanlı risk modelinde iflas olasılıkları için elde edilen yinelemeli formüller sürekli zamanlı risk modellerine göre daha kolay yorumlanabildiği gibi bilgisayarda hesaplamaların yapılabilmesi için daha kolay programlanabilmektedir.

Modern risk teorisi ile ilgili ilk çalışmaları Filip Lundberg (1903) tarafından önerilmiştir. Lundberg, bir sigorta şirketinin portföyünde oluşabilecek hasarların ilk geliş zamanı problemini çözmek için Poisson sürecini önermiştir. Daha sonra Herald Cramer (1930) tarafından Lundberg'in bu çalışmalarını bir sigorta şirketinin iflas problemini modellemek için genişletilebileceğini göstermiştir. Bu çalışmalarından dolayı literatürde Klasik risk modeli, Cramer-Lundberg modeli olarak adlandırılmaktadır (Boland, 2006).

Andersen (1957)'de klasik risk modelindeki N_t hasar sayısı sürecini yenileme süreci

olarak ele alarak rezerv sürecine daha genel bir bakış sağlamıştır. Andersen'in önerdiği bu modele literatürde yenileme risk modeli ya da Sparre-Andersen risk modeli olarak adlandırılmaktadır.

Seal (1969)'da kesikli zamamlı risk modeli için sonlu zamanlı yaşam olasılığı ya da iflas etmeme olasılığını elde etmiştir. Seal (1978)'de farklı toplam hasar miktarı dağılımları için iflas olasılıklarını elde etmiştir.

Gerber (1988)'de kesikli zamanlı risk modelinde Bileşik Binomial dağılımı temel olarak, sürekli zamanlı klasik risk süreçlerine benzer şekilde bir sigorta şirketinin rezerv süreci için Bileşik Binomial risk modelini bulmuş ve bu modelde nihai iflas olasılıklarını elde etmiştir. Bileşik Binomial risk modelini Shiu (1989) ve Willmot (1993) genişletmişlerdir.

De Vylder ve Goovaerts (1988)'de klasik risk modelini temel olarak kesikli zamanlı risk modelinde sonlu zamanlı iflas ve yaşam olasılıkları için budama tekniğini kullanarak yinelemeli formüller elde etmişlerdir.

Dickson ve Waters (1991)'de, De Vylder ve Goovaerts (1988)'deki çalışmalarını temel olarak sonlu zamanlı yaşam olasılıkları ve nihai yaşam olasılıkları için sonuçlar elde etmişlerdir.

Dickson (1994)'de Bileşik Binomial risk modelinden sürekli zaman klasik risk modeline bazı yaklaştırma yöntemleri kullanarak, nihai iflas olasılıklarını özel dağılımlar için sayısal sonuçlar elde etmiştir.

Malinovskii (1998)'de hasar büyüklüğü $r.d$ 'ni Üstel dağılıma sahip iken, sonlu zamanlı yaşam olasılıklarının Laplace dönüşümünü elde etmiştir.

Wang ve Liu (2002)'de bu sonuçları hasar büyüklüğü $r.d$ 'ni ağırlandırılmış iki parametrelili Üstel dağılıma sahip iken Laplace dönüşümünü elde ederek genişletmişlerdir.

Cheng vd. (2000)'de Bileşik Binomial risk modelinde iflas olasılıklarının bazı karakteristikleri için sonuçlar elde etmişlerdir.

Yuen ve Guo (2001)'de Bileşik Binomial risk modelinde zamanla ilişkili hasarlar için iflas olasılıklarını elde etmişlerdir.

Picard ve Lefevre (2003)'de kesikli zamanlı risk modeli için toplam hasar miktarının dağılımını elde edip, sonlu zamanlı yaşam olasılığı (iflas etmeme) elde etmişlerdir.

Cossette vd. (2003)'de Gerber (1988) tarafından önerilen Bileşik Binomial risk modelinde I_1, I_2, \dots rasgele gösterge fonksiyonlarını durum uzayı $\{0, 1\}$ olan Markov zincirleri ile ifade edip, nihai ve sonlu iflas olasılıkları için Bileşik Binomial Markov modelini önermişlerdir.

Rulliere ve Loisel (2004)'de Seal (1969) ile Picard ve Lefevre (2003)'de farklı yöntemler kullanılarak elde edilmiş olan iki farklı tip yaşam olasılıklarının etkinliğini karşılaştırmışlardır.

Cossette vd. (2004)'de Markov Binomial modelde bazı özel dağılımların, iflas olasılıkları için üst sınırlar elde etmişlerdir.

Pavlova ve Willmot (2004)'de kesikli zamanlı Sparre-Andersen (yenileme) risk modelini Gerber (1988)'in Bileşik Binomial risk modelini temel alarak genişletmişlerdir.

Xiao ve Guo (2005)'de Bileşik Binomial risk modelinde zamanla ilişkili hasarlar için Lundberg eşitsizliği yardımıyla, iflas olasılıklarının üst sınırlarını elde etmişlerdir.

Cossette vd. (2006)'da Bileşik Binomial risk modelini, kesikli zaman yenileme risk modeline genişletmişlerdir.

Liu ve Zhao (2007)'de Bileşik Binomial risk modelinde yenileme yoğunluk fonksiyonunu kullanarak, iflas zamanı ve iflasla ilgili bazı karakteristiklerin dağılımlarını elde etmişlerdir.

Zhang vd. (2008)'de iki Bileşik Binomial süreç içeren risk modelinde hasarların ve prim girdilerin Bileşik Binomial süreç olduğu durumda iflas olasılıklarını elde etmişlerdir.

Eryılmaz vd. (2012)'de Bileşik Binomial risk modelinde, rezervin uç değerlerinin dağılım özelliklerini incelemişler ve sayısal hesaplamalar elde etmişlerdir.

Eryılmaz (2012)'de Bileşik Binomial risk modelinde, tekrarların dağılımları üzerine sayısal hesaplamalar ve teorik sonuçlar elde etmiştir.

Çalışmanın İkinci Bölümünde; risk analizinde kullanılan temel kavramlar, risk teorisinde sıklıkla karşılaşılan süreçler hakkında bilgi verilerek, literatürde tanımlı risk modelleri ve süreçlerinin genel yapısı tanıtılacaktır.

Üçüncü Bölümünde; genel olarak iflas teorisinin tanıtılmasından sonra sürekli zamanlı risk modelleri ile ilgili iflas olasılıkları ve iflas olasılıkları ile ilgili nicelikler hakkında bilgi verilecektir.

Dördüncü Bölümde; kesikli zamanlı risk modelinde Bileşik Binomial risk modeli ve Sparre-Andersen risk modeli ve bu modellerde iflas kavramı hakkında bilgi verilerek, literatürde bulunan çalışmalar tanıtılacaktır.

Çalışmanın özgün yanını, Beşinci ve Altıncı Bölüm oluşturmaktadır. Beşinci Bölümde; kesikli zamanlı risk modelinin özel bir hali olan Bileşik Binomial risk modelinde homojen olmayan hasar oluşum olasılıkları tanıtılıp, bu durum için sonlu zamanlı yaşam (iflas etmeme) olasılıkları ile ilgili yinelemeli bir formül elde edilip, hasar sayısı rasgele değişkeninin dağılımı üzerinde durulacaktır. Altıncı Bölümde; beşinci bölümde elde edilen yinelemeli formül yardımıyla, risk rezerv süreçlerinin uç değerlerinin dağılımları ve bazı karakteristikleri elde edilecektir.

Yedinci Bölümde; elde edilen tüm sonuçların karşılaştırması yapılarak bu konuda yapılabilecek yeni çalışmalarla ilgili öneriler sunulacaktır.

2. RISK ANALİZİNDE KULLANILAN SÜREÇLER VE MODELLER

İstenmeyen sonuçlar içeren durumlar için risk tanımlamaları yapılabilir. Risk, herhangi bir varlık veya olaya ait oluşumlar dinamiği içerisinde olasılık kapsamındaki zarar durumudur. Bu zarar durumları; sigortacılıkta hasar, sistem mühendisliğinde sistemin çökmesi, finansal işlemlerde parasal kayıplar şeklinde ortaya çıkabilir.

Sigortacılıkta risk, $[0, t)$ zaman aralığında sigortalılardan toplanan primler ve aynı zaman aralığında sigortalılara yapılan ödemeler ile belirtilebilir. Genellikle ilgili zaman periyodunda, sigortalılardan toplanan prim değişimlerden bağımsız olarak düşünülürken, sigortalılara yapılan ödemeler stokastik olarak düşünülür. Pratikte sigortalılardan toplanan prim ile sigortalılara yapılan ödemeler arasındaki ilişkinin tanımlanması gerekmektedir. Bunun için aşağıdaki değişkenlerin ve bunlara bağlı olarak stokastik süreçlerin özellikle de sayma süreçlerinin tanıtılmasına ihtiyaç vardır.

2.1 Klasik Risk Süreçleri

Risk süreçleri, hasar sayısı ve hasar miktarı süreçlerinden oluşur. Zaman aralığı, $[t_0, t_k)$ incelenen toplam zaman aralığı olarak tanımlanır. Burada $[t_0, t_k) = [t_0, t_1) \cup [t_1, t_2) \cup \dots \cup [t_{k-1}, t_k)$ şeklinde olup, $[t_{i-1}, t_i)$ aralıkları $\forall i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) için eşit uzunluklu, kesişmeyen ve ara kesiti boş olan aralıklardır (Tank 2002).

Tanım 2.1 $\{Y_{t_i}\}$, $[t_{i-1}, t_i)$ *i.zaman aralığında görülen Hasar Sayısı Süreci* olarak tanımlanır. Burada Y_{t_i} , kesikli rasgele değişkendir (Tank 2002).

Tanım 2.2 $\{X_{t_i}\}$, $[t_{i-1}, t_i)$ *i.zaman aralığında görülen Hasar Miktarı Süreci* olarak tanımlanır. Burada X_{t_i} , kesikli veya sürekli rasgele değişken olabilmektedir ve X_i biçiminde gösterilir (Tank 2002).

Tanım 2.3 $N_t = N_{t_i} = \sum_{j=0}^j Y_{t_j}$, $[t_0, t_k) = [t_0, t_1) \cup [t_1, t_2) \cup \dots \cup [t_{k-1}, t_k)$ aralıklarının bileşimlerinde ortaya çıkan toplam hasar sayısıdır. N_t , t zamanına kadar meydana gelen hasarların sayısını gösterdiğinde; $\{N_t, t \in T\}$, stokastik süreci *Toplam Hasar Sayısı Süreci* olarak tanımlanır.

Tanım 2.4 $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_{t_i}$, t zamanına kadar ortaya çıkan Toplam Hasar Miktarı olarak tanımlanır. Burada X_{t_i} , i . poliçe sahibinin $(0, t]$ zaman aralığındaki hasarını göstermektedir.

Tanım 2.5 $\{N_t, t \in T\}$ süreci;

i. $N_t \geq 0$,

ii. N_t her zaman tamsayı değerleri alır,

iii. $s < t$ ise, $N_s \leq N_t$,

özelliklerini sağladığında bir Sayma Süreci olarak tanımlanır (Gupta, vd. 2010).

Tanım 2.6 S_t , t zamanına kadar meydana gelen toplam hasar miktarı olmak üzere çoğu zaman $\{N_t, t \in T\}$ ile X_1, X_2, \dots, X_{N_t} 'nin birbirinden bağımsız olduğu varsayılmaktadır. Bu durumda toplam hasar miktarı dağılımı

$$P(S_t \leq x) = P\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i \leq x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N_t = n)F^{*n}(x) \quad (2.1)$$

biçiminde elde edilir. Burada $F^{*n}(x) = P(\sum_{i=1}^n X_i \leq x)$ biçiminde F dağılım fonksiyonunun n katlı konvolüsyonunu ifade etmektedir. Özel olarak $n = 0$ için

$$F^{*0}(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

biçimindedir (Gupta, vd. 2010).

S_t 'nin dağılımı, N_t r d'nin dağılımına göre ifade edilmektedir. Yani N_t r d'nin dağılımı; Poisson dağılımına sahip ise, S_t r.d'ni Bileşik Poisson dağılımına sahip olmaktadır. Benzer olarak N_t r.d'nin dağılımı; sırasıyla Binom ya da Negatif Binom dağılımı ise o zaman S_t r.d'nin dağılımı, sırasıyla Bileşik Binom dağılımına ya da Bileşik Negatif Binom dağılımına sahip olmaktadır.

Tanım 2.7 Bileşik yapıya sahip bir sürecin beklenen değer ve varyansı sırasıyla

$$E(S_t) = E(X)E(N_t) \quad (2.3)$$

ve

$$\text{Var}(S_t) = E(X^2) \text{Var}(N_t) + \text{Var}(X) E(N_t) \quad (2.4)$$

biçimindedir (Dickson 2005).

Tanım 2.8 $\{N_t, t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun. Ayrık zaman aralıklarında gerçekleşen olayların sayısı yani $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ için, $N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_3} - N_{t_2}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ r.d'leri bağımsız ise, $\{N_t, t \in T\}$ sürecine bağımsız artışıdır denir (Gupta, vd. 2010).

Tanım 2.9 $\{N_t, t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun. Herhangi bir zaman aralığında meydana gelen olayların sayısının dağılımı zaman aralığının uzunluğuna bağlı ise yani $h > 0$ ve $t_1 < t_2$ için $N_{t_2+h} - N_{t_1+h}$ ile $N_{t_2} - N_{t_1}$ r.d'lerinin dağılımı aynı ise $\{N_t, t \geq 0\}$ sayma sürecine durağan artışıdır denir (Gupta vd. 2010).

Tanım 2.10 $\{N_t, t \geq 0\}$ sayma süreci;

i. $N_0 = 0,$

ii. Süreç bağımsız artışı ve durağan artışı,

iii. $P(N_h = 1) = \lambda h + o(h),$

iv. $P(N_h \geq 2) = o(h),$

şartlarını sağladığında bu sürece λ ($\lambda > 0$) oranlı Poisson süreci denir (Kao 1997).

Teorem 2.1 $W_n, (n - 1)$. hasar ile n . hasar arasında geçen zamanı göstermek üzere, W_1, W_2, \dots rd'leri bağımsız olup $\frac{1}{\lambda}$ ortalamalı Üstel dağılıma sahiptir (Kao 1997).

Tanım 2.11 $\{N_t, t \geq 0\}$ sayma süreci;

i. $N_0 = 0,$

ii. Süreç bağımsız artışı,

iii. $P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda(t)h + o(h),$

iv. $P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h)$,

şartlarını sağladığında bu sürece $\{\lambda(t), t > 0\}$ şiddet fonksiyonuna sahip homojen olmayan ya da durağan olmayan Poisson süreci denir. Burada şiddet yoğunluğu $\lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ biçiminde gösterilir. Ayrıca, özel olarak $\lambda(t) = \lambda$ seçilirse homojen Poisson süreci elde edilir. $\forall s, t > 0$ için

$$P(N_{t+s} - N_t = n) = e^{-[\lambda(t+s) - \lambda(t)]} \frac{[\lambda(t+s) - \lambda(t)]^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.5)$$

biçimindedir (Kao 1997).

Tanım 2.12 $\{N_t, t \geq 0\}$ süreci λ oranlı bir Poisson süreci, $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ bağımsız ve aynı $F(x)$ dağılımına sahip r.d.lerin dizisi olmak üzere

$$S_t = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N_t} X_i & , N_t \geq 1 \\ 0 & , N_t = 0 \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ bağımsız r.d.'lerin dizisi ile N_t r.d. birbirlerinden bağımsız iken $\{S_t, t \geq 0\}$ sürecine λt parametrelili Bileşik Poisson süreci olup beklenen değeri ve varyansı (2.3) ve (2.4) eşitlikleri yardımıyla sırasıyla

$$E(S_t) = \lambda t E(X) \quad (2.6)$$

ve

$$Var(S_t) = \lambda t (E(X^2) + Var(X)) \quad (2.7)$$

biçiminde elde edilir (Klugman vd. 2004).

Tanım 2.13 $\{N_t, t \geq 0\}$ bir sayma sürecinde olaylar (yenilemeler) arasında geçen zaman süresi ve $\{W_i, i \in \mathbb{N}^+\}$ dizisi bağımsız aynı $F(\cdot)$ dağılımlı r.d.'lerin bir dizisi ise $\{N_t, t \geq 0\}$ sürecine yenileme süreci adı verilir. Eğer W_1 r.d.'nin dağılımı ile W_2, W_3, \dots r.d.'nin dağılımı aynı değilse, $\{N_t, t \geq 0\}$ sürecine gecikmeli yenileme süreci adı verilir (Gupta vd. 2010).

Tanım 2.14 I_1, I_2, \dots bağımsız Bernoulli dağılımlı r.d.'lerin bir dizisi ve $i \geq 1$ için $P(I_i = 1) = p$ ve $P(I_i = 0) = q$ olmak üzere, $\{I_i, i \geq 1\}$, sürecine durum uzayı $\{0, 1\}$ olan Bernoulli süreci adı verilir.

Tanım 2.15 $\{I_i, i \geq 1\}$, p başarı olasılığı ile bir Bernoulli süreci iken

$$N_n = \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ I_1 + \dots + I_n & , n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

ile verilen $\{N_n, n = 0, 1, \dots\}$ sürecine, durum uzayı $\{0, 1, \dots\}$ olan başarı sayıları süreci adı verilir (Cossette vd. 2003).

Tanım 2.16 W_k $r.d'$ ni k .başarının gerçekleşme zamanı ve $W_0 = 0$ iken, $\{W_k, k \geq 0\}$ sürecine Bernoulli süreci ile ilgili başarı zamanları süreci denir. Bu durumda Bernoulli sürecinde k .başarı elde edilmiş ise $(k + 1)$. başarı elde edilinceye kadar geçen zaman süresinin dağılımı Geometrik dağılıma sahiptir (Egido Dos Reis 2004).

Tanım 2.17 Klasik risk süreçlerinde, sabit bir $t > 0$ zamanında bir portföyün rezerv miktarı üç nicelik; yardımıyla belirlenir. Bu üç nicelik başlangıç rezervi (u), t zamanına kadar alınan primler (c) ve t zamanına kadar gerçekleşen hasar ödemeleri S_t biçiminde ifade edilir. N_t ve S_t 'ye bağlı olarak

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i, t \geq 0 \quad (2.8)$$

ile tanımlanan sürece Risk Rezervi Süreci denir (Embrechts 1997).

Risk rezervi sürecinde N_t 'nin dağılımı Poisson dağılımına sahip iken (2.8) ile verilen rezerv süreci klasik risk modeli olarak adlandırılırken, N_t 'nin dağılımının Poisson olmadığı durumlar için genelleştirilmesi de Sparre-Andersen modeli olarak adlandırılmaktadır.

2.2 Klasik Risk Modeli

$t \geq 0$ için S_t 'nin dağılımının λt parametrelili Bileşik Poisson dağılımına sahip iken, (2.8) ile verilen rezerv sürecine klasik risk modeli ya da Cramer-Lundberg risk modeli denir.

Hasarların geliş zamanı dağılımı, λ parametrelili Üstel dağılıma sahipse $\{N_t, t \geq 0\}$ süreci Poisson sürecidir ve bu durumda

$$P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, n \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

biçimindedir (Klugman vd. 2004).

Tanım 2.18 *Klasik risk modelinde hasar miktarlarının beklenen değeri $E(X) = \mu$ ve başlangıç rezervi $U_0 = u$ iken t zamanında (2.8) ifadesinin beklenen değeri*

$$E[U_t] = u + ct - E(S_t) = u + ct - \lambda t \mu \quad (2.10)$$

biçimindedir. $(0, t]$ zaman periyodunda $E[U_t] > 0$ olması için

$$c > \lambda \mu \quad (2.11)$$

olması gerekmektedir. Bu ifade net karlılık koşulu olarak ifade edilir (Gray ve Pitts 2012).

Tanım 2.19 λ ve μ verildiğinde, net karlılık koşulu olan (2.11) ifadesinin sağlanması için c katsayının belirmesi gerekmektedir. Klasik risk modelinde $c - \lambda \mu$ birim zamandaki net gelirin beklenen değeri olup

$$\theta = \frac{c - \lambda \mu}{\lambda \mu} \quad (2.12)$$

ile güvenlik yüklemesi tanımlanır. Böylece (2.11) ifadesinin sağlanması için c katsayısı

$$c = (1 + \theta) \lambda \mu$$

biçiminde ifade edilir (Dickson 2005).

2.3 Sparre-Andersen Risk Modeli

Andersen (1957), Klasik risk modelindeki N_t hasar sayısı sürecini yenileme süreci olarak ele alarak rezerv sürecine daha genel bir bakış sağlamıştır. Andersen'in önerdiği bu modele literatürde yenilemeli risk modeli ya da Sparre-Andersen risk modeli olarak adlandırılmaktadır. Sparre-Andersen rezerv sürecinde, (2.8) eşitliğindeki N_t hariç tüm parametrelerin tanımı Klasik risk modelindeki tanımlar ile aynıdır.

Bağımsız aynı dağılımlı W_i 'ler i . hasarın meydana geliş zamanlarını gösterirken $\tau_n = \sum_{i=1}^n W_i$ olsun. $\{N_t, t \geq 0\}$ hasar sayısı süreci

$$N_t = \max \{n \geq 0; \tau_n \leq t\}, t > 0 \quad (2.13)$$

biçiminde ifade edilebilir. $N_t \geq n \Leftrightarrow \tau_n \leq t$ olacağı açıktır. Buradan N_t r.d'nin dağılımı $F^{*0} = 1$ iken

$$P(N_t = n) = F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.14)$$

biçimindedir.

N_t r.d'nin beklenen değeri yenileme teorisinde önemlidir. $t \geq 0$ için $E[N_t] = M(t)$ olmak üzere, $M(t)$ fonksiyonuna yenileme fonksiyonu adı verilir ve

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(N_t = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n [F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nF^{*n}(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

biçiminde elde edilir.

Yenileme denklemi, (2.15) eşitliği ile verilen yenileme fonksiyonu yardımıyla $t \geq 0$ için

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)dF(x) \quad (2.16)$$

biçiminde elde edilen integral denkleminin çözümüdür (Kao 1997, Cossette vd. 2006, Liu ve Zhao 2007).

Teorem 2.2 $\{N_t, t \geq 0\}$ bir yenileme süreci ve $\mu < \infty$ iken

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N_t]}{t} = \frac{1}{\mu}$$

biçimindedir (Kao 1997).

Sparre-Andersen rezerv sürecinde, $E[N_t] = M(t)$ olduğundan $n \geq 1$ için $W_n \sim \ddot{U}stel(\lambda)$ olduğu durum hariç $E[N_t] \neq \lambda t$ olacağı açıktır. Tanım (2.18) ile verilen net karlılık koşullarının Sparre-Andersen rezerv sürecinin sağlaması için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[U_t - u]}{t} = c - \lambda\mu \quad (2.17)$$

olması gerekmektedir. Böylece, $c - \lambda\mu > 0$ olacağından Sparre-Andersen risk modelinde güvenlik yüklemesi ve net karlılık koşulları

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0 \quad (2.18)$$

ile sağlanmaktadır (Asmussen ve Albrecher 2010).

3. İFLAS TEORİSİ

Bu bölümde, iflas teorisi kavramı ve iflas ile ilgili bazı karakteristikler tanıtılacaktır. İflas teorisinde hem sürekli zamanlı hem de kesikli zamanlı risk modelleri için U_t rezerv sürecinin zaman içerisindeki olası davranışları ile ilgilenilmektedir. Kısaca iflas kavramı herhangi bir zamanda bir sigorta şirketinin rezerv miktarının belirli bir seviyenin altına düşmesi olarak da ifade edilebilir. $U_t < 0$ ise bir sigorta şirketinin iflas ettiği düşünülür. İflas durumun ilk gerçekleşme zamanı

$$T = \inf\{U_t < 0, t \geq 0\} \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanır ve T r.d'ni iflas zamanı olarak adlandırılır. $\forall t \geq 0$ için $U_t \geq 0$ ise $T = \infty$ olmaktadır. Bu durumda iflasın hiçbir zaman gerçekleşmediği söylenebilir. $U_0 = u$ başlangıç rezervi verildiğinde nihai iflas olasılığı

$$\psi(u) = P(T < \infty | U_0 = u) = P\left\{\bigcup_{t < \infty} [U_t < 0] | U_0 = u\right\}, u \geq 0,$$

biçimindedir. $U_0 = u$ başlangıç rezervi verildiğinde sabit bir t zamanında ya da daha önce iflasın gerçekleşmesi olasılığı yani sonlu zamanlı iflas olasılığı,

$$\psi(u, t) = P(T < t | U_0 = u) = P\left\{\bigcup_{s \leq t} [U_s < 0] | U_0 = u\right\}, u, t \geq 0,$$

biçiminde gösterilir (Klugman vd. 2004, Asmussen ve Albrecher 2010). $(0, t]$ zaman aralığındaki iflas olasılığını gösteren $\psi(u, t)$ 'nin hesaplanması çoğu zaman kolay değildir. Ancak $\psi(u)$ daha kolay hesaplanabilir. Bu durumda $U_0 = u$ iken sigorta şirketinin iflas etmemesi olasılığı ya da yaşam olasılığı $\phi(u) = 1 - \psi(u)$ biçiminde ifade ediliyor iken benzer biçimde sonlu zamanlı iflas etmeme olasılığı ya da sonlu zamanda yaşam olasılığı $\phi(u, t) = 1 - \psi(u, t)$ biçiminde ifade edilebilir. Bir sigorta şirketinin rezerv süreci düşünüldüğünde $u \rightarrow \infty$ iken, $\psi(u) \rightarrow 0$ yani $\phi(u) \rightarrow 1$ ve $t \rightarrow \infty$ iken $\psi(u, t) \rightarrow \psi(u)$ yani $\phi(u, t) \rightarrow \phi(u)$ ve ayrıca $u \geq 0$ olmak üzere

- $0 \leq u_1 \leq u_2$ için

$$\psi(u_1) \geq \psi(u_2) \quad (3.2)$$

- $0 \leq u_1 \leq u_2$ ve $t_0 \geq 0$ için (3.2) ifadesi

$$\psi(u_1, t_0) \geq \psi(u_2, t_0) \quad (3.3)$$

- $0 < t_1 \leq t_2$ için

$$\psi(u, t_1) \leq \psi(u, t_2) \leq \psi(u) \quad (3.4)$$

benzer biçiminde sonlu zamanlı yaşam olasılıkları

$$\phi(u, t_1) \geq \phi(u, t_2) \geq \phi(u) \quad (3.5)$$

biçimindedir (Klugman vd. 2004, Gray ve Pitts 2012).

3.1 İflas Olasılıkları

Bu kısımda, $\{N_t, t \geq 0\}$ hasar sayısı sürecinin hem Poisson süreci hem de yenileme süreci olduğu durumlardaki iflas olasılıkları tanıtılacaktır.

3.2 Klasik Risk Modeli için İflas Olasılıkları

Klasik risk modellerinde, hasar sayısı sürecinin Poisson süreci olduğunda Teorem 2.1'de de belirtildiği gibi hasarların gelişleri arasındaki bekleme zamanı dağılımı Üstel dağılıma sahip olduğundan Klasik risk modeline sürekli zamanlı risk modeli de denilmektedir.

Teorem 3.1 *Klasik risk modelinde, $\theta > 0$, $c > 0$ ve hasar miktarı dağılımı $F(x)$ iken*

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-x)dF(x) , u \geq 0 \quad (3.6)$$

biçimindedir. Benzer olarak

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u-x)dF(x) - \frac{\lambda}{c}\bar{F}(u) , u \geq 0 \quad (3.7)$$

biçiminde elde edilir (Gray ve Pitts 2012).

Teorem 3.2 *Klasik risk modelinde, $\theta > 0$, $c > 0$ ve hasar büyüklüğü (miktarı) dağılımı $F(x)$ iken, Teorem 3.1 kullanılarak yaşam olasılığı*

$$\phi(u) = \phi(0) + \int_0^u \phi(u-x) [1-F(x)] dx \quad (3.8)$$

biçimindedir. Benzer olarak nihai iflas olasılığı

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty [1-F(x)] dx - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u-x) [1-F(x)] dx \quad (3.9)$$

biçiminde elde edilir (Gray ve Pitts 2012).

Teorem 3.3 *Klasik risk modelinde, $\theta > 0$, $c > 0$, $U_0 = 0$ ve hasar büyüklüğü (miktarı) dağılımı ortalaması μ iken, yaşam olasılığı*

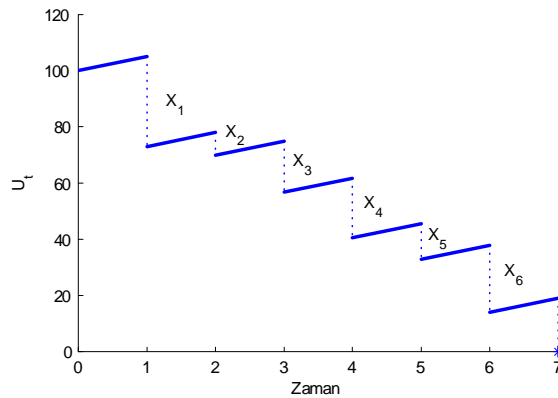
$$\phi(0) = \frac{\theta}{1+\theta} = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} \quad (3.10)$$

biçimindedir. Benzer olarak nihai iflas olasılığı

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta} = \frac{\lambda\mu}{c} \quad (3.11)$$

biçiminde elde edilir (Dickson 2005).

Klasik risk modelinde $u = 100$, $c = 5$ ve $\lambda = 8$ olduğunda rezervi süreci için simülasyon çalışması yapılmış ve gösterimi Şekil (3.1)'de verilmiştir.



Şekil 3.1: Risk Rezerv Süreci Simülasyon Sonuçları Gösterimi

Şekil 3.1 incelendiğinde, Klasik risk modelinde bir sigorta şirketinin elindeki rezervin zamana göre değişimi gözlenmektedir.

3.2.1 İflas olasılıkları için sınırlar

Genellikle iflas olasılıkları için yukarıdaki gibi açık formlar bulmak çok zordur. Ancak uygun şartlar altında iflas olasılıklarının yaklaşık değerleri elde edilebilir. Gerber (1979)'da, $\psi(u)$ 'nin hesaplanması için Martingale yaklaşımı yöntemini kullanmıştır. Bu yöntem sayesinde, iflas olasılıkları için üst sınır değerler elde edilebilmektedir.

3.2.2 Düzeltme katsayısı

Düzeltme katsayısı risk teorisinde sıklıkla kullanılan bir risk ölçüsü olup küçük değerlere sahip olması durumunda sigorta şirketinin iflas olasılığının büyük olması anlamına gelmektedir. Hasarların aynı dağılımlı olduğu varsayımı altında, Klasik risk modelinde hasar büyüklüğü (miktarı) dağılımının m.ç.f 'nu $M_X(t)$ ve prim getirisinin c olduğu durumda, Düzeltme katsayısı R

$$\lambda M_X(r) = \lambda + cr$$

denkleminin pozitif kökü olmaktadır (Boland 2006).

3.2.3 Lundberg eşitsizliği

R düzeltme katsayısı ise, başlangıç rezervi $u \geq 0$ Lundberg eşitsizliği

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \quad (3.12)$$

biçimindedir. Bu eşitsizlik yardımıyla Klasik risk modelinde, $\psi(u)$ için üst sınırlar elde edilebilmektedir (Dickson 2005, Boland 2006).

Örnek 3.1 *Klasik risk modelinde, hasar büyüklüğü $r.d$ 'nin dağılımı Üstel dağılıma sahip iken $M_X(r) = (1 - \mu r)^{-1}$ olmak üzere*

$$R = \frac{\theta}{(1 + \theta)\mu} = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}$$

biçiminde elde edilmektedir. (3.12) eşitsizliği yardımıyla iflas olasılıkları ile ilgili üst sınır değerleri

$$\psi(u) \leq \exp\left(-\frac{\theta}{(1 + \theta)\mu}u\right)$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 3.4 Eğer $R > 0$ değeri varsa $u \geq 0$ için

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T)}|T < \infty)} \quad (3.13)$$

biçiminde elde edilir (Dickson 2005).

Düzeltilme katsayısını, m.ç.f.'nu var olmayan hasar büyüklüğü dağılımları için elde etmek mümkün olmamaktadır. Ancak düzeltilme katsayısının elde edilmesi mümkün olmayan durumlar için literatürde çeşitli yaklaşımlar bulunmaktadır. Böyle durumlar için, literatürde De Vylder ve Goovaerts (1984) tarafından aşağıdaki iflas olasılığı sınırı $F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(x) dx$ iken

$$\psi(u) \geq \frac{\bar{F}_I(u)}{\theta + \bar{F}(u)}, \quad u \geq 0 \quad (3.14)$$

biçiminde elde etmişlerdir.

Panjer ve Willmot (1992) tarafından iflas olasılıklarına, X hasar büyüklüğü r 'nin, m.ç.f 'nu $M_X(t)$ ve düzeltilme katsayısı $R > 0$ iken,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{Ru} \psi(u) = \frac{\theta \mu}{M'_X(R) - \mu(1 + \theta)} \quad (3.15)$$

biçiminde bir yaklaşım yöntemi elde etmişlerdir.

3.3 Sparre-Andersen Risk Modeli için İflas Olasılıkları

Gerber (1979)'da yenileme denklemini kullanarak $u \geq 0$ için iflas olasılıklarını

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} \int_0^u \psi(u - y) dF_I(x) + \frac{\bar{F}_I(u)}{1 + \theta} \quad (3.16)$$

biçiminde elde etmiştir.

Beekman (1974)' de Bileşik Geometrik dağılımın kuyruk dağılımı $F_I(x)$ ve $u \geq 0$ iken iflas olasılıklarını

$$\psi(u) = \frac{\theta}{1 + \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^n \bar{F}_I(u) \quad (3.17)$$

biçiminde elde etmiştir.

Dickson ve Hipp (1998)'de Bileşik Geometrik dağılımın kuyruk dağılımı $F_I(x)$ ve $u \geq 0$ iken yaşam olasılıklarını

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n F_I(u) \\ &= \phi(0) \sum_{n=1}^{\infty} (\psi(0))^n F_I(u)\end{aligned}\tag{3.18}$$

biçiminde elde etmişlerdir.

Malinovskii (1998) tarafından hasar büyüklüğü r.d'nin dağılımı μ parametrelili Üstel dağılıma sahip iken, sonlu zamanlı yaşam olasılıklarının Laplace dönüşümünü elde etmiştir.

Wang ve Liu (2002)'de bu sonuçları hasar büyüklüğü r.d'ni μ_1 ve μ_2 parametrelili $0 < \xi < 1$ iken, ξ ve $(1 - \xi)$ göre ağırlandırılmış iki parametrelili Üstel dağılımı

$$f(t) = \xi\mu_1 e^{-\mu_1 t} + (1 - \xi)e^{-\mu_2 t}, t > 0\tag{3.19}$$

biçiminde ifade ederek, $\phi(u, t)$ 'nin Laplace dönüşümünü elde etmişlerdir.

4. KESİKLİ ZAMANLI RİSK MODELİ

Bu bölümde kesikli zamanlı risk modeli ve bu model için iflas olasılıkları kavramı tanıtılacaktır. Kesikli zamanlı risk modeli, sürekli zamanlı risk modelinde olduğu gibi farklı yöntemlerle açıklanabilmektedir. Ancak kesikli zamanlı risk modeli belirlenmiş eşit uzunluklu bir zaman periyodunun sonunda (örneğin 1 yıl veya 12 ay) rezervin ve bu rezervi oluşturan niceliklerin incelenmesi esasına göre çalışmaktadır.

Kesikli zamanlı risk modelinde bir sigorta şirketinin rezerv süreci, her bir dönemdeki prim getirisi 1 birim ve başlangıç rezervi $U_0 = u$ iken,

$$U_n = u + n - \sum_{i=1}^n X_i, n = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Kesikli zamanlı risk modelinde iflas zamanı, (3.1)'de verilen sürekli zamanlı risk modelindekinden farklı olarak

$$T = \min(U_n \leq 0, n = 1, \dots) \quad (4.2)$$

biçiminde ifade edilebilir. Farklı zaman periyotlarında meydana gelebilecek hasar büyüklüğünün olasılık fonksiyonu

$$f_j = P(X_1 = j), j = 0, 1, \dots$$

ve dağılım fonksiyonu

$$F(x) = P(X_1 \leq x) = \sum_{j=0}^{[x]} f_j$$

biçiminde verilsin. Bu durumda $\psi(u) = P(T < \infty | U_0 = u)$ iken nihai iflas olasılığı için genel bir form, toplam hasar miktarının hasar gelme ya da gelmeme durumuna göre değişimi düşütülerek elde edilebilir.

İlk zaman periyodunda ($t = 1$) gelen hasar büyüklüğü X_1 r.d'ni ise, $X_1 > u$ olması durumunda $U_1 \leq 0$ olacağından iflas olayı gerçekleşmiş olur. Ancak $j = 0, 1, 2, \dots, u$ için $X_1 = j$ ise ilk zaman periyodunda rezerv $u + 1 - j$ olacağından yeni rezerv

seviyesinde nihai iflas olasılığı $\psi(u + 1 - j)$ olur ve hasar büyüklüğü r 'lerinin bağımsız aynı dağılımlı olması koşulu altında nihai iflas olasılığı

$$\psi(u) = 1 - F(u) + \sum_{j=0}^u f_j \psi(u + 1 - j) \quad (4.3)$$

ya da

$$\psi(u) = \sum_{r=0}^{u-1} [1 - F(r)] \psi(u - j) + \sum_{r=u}^{\infty} [1 - F(r)] \quad (4.4)$$

biçiminde elde edilir (Dickson 2005).

Benzer olarak sonlu zamanlı iflas olasılığı $\psi(u, t) = P(T \leq t | U_0 = u)$ ise, yinelemeli formül yardımıyla $\psi(u, t)$ 'nin mümkün olabilmektedir. De Vylder ve Goovaerts (1988)'de klasik risk modelindeki zaman ölçeğini $t \geq 0$ yerine $t = 0, 1, 2, \dots$ biçiminde ele alıp kesikli zamanlı risk modelinde sonlu zamanlı iflas olasılıkları ve yaşam olasılıkları için yaklaştırmalı yinelemeli formüller elde etmişlerdir. Özellikle yeterince büyük kontrol zamanı için bu yaklaştırmalı formüller çok iyi sonuçlar vermektedir. Bu durumda ilk hasarın geliş zamanı için hasar büyüklüğü $X_1 > u$ ise, iflas gerçekleşmiş olacağından

$$\psi(u, 1) = \sum_{j=u+1}^{\infty} f_j = 1 - F(u) \quad (4.5)$$

biçiminde iken

$$\psi(u, t) = \psi(u, 1) + \sum_{j=0}^u f_j \psi(u + 1 - j, t - 1), \quad t = 2, 3, \dots \quad (4.6)$$

biçiminde elde edilir. Benzer olarak (4.2)'den $\phi(u, t) = P(U_n > 0, n = 1, 2, \dots, t)$ biçiminde de ifade edilebilir. Bu durumda $\phi(u, 0) = 1$ olduğundan

$$\phi(u, t) = \sum_{j=0}^u f_j(1) \phi(u + 1 - j, t - 1), \quad t = 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

biçiminde zaman periyodu t 'ye göre yinelemeli bir formül elde etmişlerdir.

Dickson ve Waters (1991), tarafından De Vylder ve Goovaerts (1988)'deki çalışmalarını temel alarak $j = 0$ durumunu ihmal ederek, sonlu zamanlı yaşam olasılıklarını $\phi(u - 1, t)$ için (4.7) eşitliğini $u = 1, 2, \dots$ için

$$\phi(u, t) = \frac{1}{f_0(1)} \left[\phi(u - 1, t + 1) - \sum_{j=1}^{u-1} f_j(1) \phi(u - j, t) \right] \quad (4.8)$$

biçiminde u 'ya göre yinelemeli bir formül elde etmişlerdir.

Genellikle sonlu zamanlı yaşam olasılıkları için açık bir form bulmak mümkün değildir.

Ancak Seal (1969) tarafından $u > 0$ için $P(T > t) = \phi(u, t)$ sonlu zamanlı yaşam (iflas etmeme) olasılığı olmak üzere, $n = 0, 1, \dots$ için $f_n(t) = P(S_t = n)$ iken

$$\phi(0, t) = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\lfloor t \rfloor} (t - n) f_n(t) \quad (4.9)$$

ve

$$\phi(u, t) = \sum_{j=0}^{u+\lfloor t \rfloor} f_j(t) - \sum_{j=1}^{u+\lfloor t \rfloor} f_{u+j}(j) \phi(0, t - j) \quad (4.10)$$

biçiminde elde etmiştir.

Picard ve Lefevre (2003), tarafından (4.9) ifadesini kullanarak $u > 0$ için ve $t < 0$ iken $P(S_t = n) = \tilde{f}_n(t)$ ise

$$\phi(u, t) = \sum_{j=0}^u \left(f_j(t) + \tilde{f}_n(j - u) \sum_{n=u+1}^{u+\lfloor t \rfloor} \frac{u + t - n}{u + t - j} f_{n-j}(u + t - j) \right) \quad (4.11)$$

biçiminde elde etmişlerdir. Rulliere ve Loisel (2004)'de bu iki farklı yaşam olasılığının etkinliğini karşılaştırmışlardır.

4.1 Bileşik Binomial Risk Modeli

Kesikli zamanlı risk modelinde, Bileşik Binomial dağılımı temel alarak sürekli zamanlı klasik risk modeline benzer şekilde bir sigorta şirketinin rezerv süreci için nihai iflas olasılıkları ilk kez Gerber (1988) tarafından önerilmiştir.

Bileşik Binomial risk modelinde zaman kesikli olarak düşünülür. Bu durumda bir sigorta şirketinin rezerv süreci

$$U_t = u + t - \sum_{i=1}^t Y_i, \quad t = 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

biçiminde tanımlanabilir. Burada $U_0 = u$ başlangıç rezervi, periyodik prim getirisi 1 ve Y_i , i . periyottaki hasar miktarıdır. I_i , $i \geq 1$ için i . periyotta hasar meydana gelmiş ise 1, gelmemiş ise 0 değerlerini alan bir r.d olarak düşünüldüğünde

$$Y_i = \begin{cases} X_i & , I_i = 1 \\ 0 & , I_i = 0 \end{cases}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada X_i bireysel hasar miktarı ya da hasar büyüklüğü r.d 'ni olarak adlandırılmaktadır. $\{X_i, i \geq 1\}$ olasılık fonksiyonu $f(x) = P(X_i = x)$ olan negatif değerler almayan bağımsız aynı dağılımlı r.d.'lerin bir dizisi ise ve N_t, t zamanına kadar meydana gelen hasarların sayısı iken (4.12) eşitliği,

$$U_t = u + t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i, n = 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

biçiminde de ifade edilebilir. $I_1, I_2, ..$ bağımsız ve $i \geq 1$ için $P(I_i = 1) = p, P(I_i = 0) = 1 - p = q$ olsun. Bu durumda N_n rasgele değişkenin dağılımı

$$P(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n \quad (4.14)$$

biçiminde klasik Binom dağılımıdır. Dolayısıyla (4.13) eşitliği ile verilen risk rezerv modeli bir Bileşik Binomal risk modelidir (Eryılmaz 2012). Bileşik Binomial risk modelinde $n \geq 1$ için bağımsız aynı dağılımlı W_n r.d'leri $(n - 1)$.hasar ile n .hasar arasında geçen zaman olmak üzere,

$$P(W_n = t) = P(I_1 = 0, \dots, I_{t-1} = 0, I_t = 1) = pq^{t-1}, t = 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

biçimindedir (Liu ve Zhao 2007).

(4.13) modeli için net karlılık koşulları, Tanım 2.19'den $E(X) = \mu$ ve pozitif güvenlik yüklemesi varsayımı altında $p\mu < 1$ biçiminde ifade edilebilir. Birim zamandaki prim getirisi sabit olduğundan ($c = 1$), primler pozitif bir güvenlik yüklemesini içerecektir. Dolayısıyla net karlılık koşulları üzerine yapılan bu varsayım (4.13)'de verilen risk rezerv modeli için her zaman sağlaması gerekmemektedir. Bu tez çalışmasında sigorta şirketinin periyodik prim getirisinin değişmediği varsayılmıştır.

Bileşik Binomial risk modelinde iflas zamanı üzerine farklı iki tanım kullanılmaktadır. T iflas zamanı r.d'ni olmak üzere, Gerber (1988)' de iflas zamanını

$$T = \inf\{U_t \leq 0, t = 1, 2, \dots\} \quad (4.16)$$

biçiminde ifade etmişken, Shiu (1989)'da

$$T = \inf\{U_t < 0, t = 1, 2, \dots\} \quad (4.17)$$

biçiminde ifade etmiştir. Ancak her iki iflas zamanı tanımlaması için nihai iflas olasılığı $\psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u)$ benzer olarak yaşam (iflas etmeme) olasılığı ise $\phi(u) = 1 - \psi(u)$ iken, sonlu zamanlı iflas olasılığı $\psi(u, n) = P(T \leq n | U(0) = u)$ olacaktır. Dolayısıyla sonlu zamanlı yaşam olasılığı $\phi(u, n) = P(T > n | U(0) = u)$ olacaktır. Ancak rezerv üzerinden bu tanımlamalar (4.16)'dan

$$\psi(u, n) = P(U_t \leq 0, t = 1, 2, \dots, n) \quad (4.18)$$

$$\phi(u, n) = P(U_t > 0, t = 1, 2, \dots, n) \quad (4.19)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Gerber (1988)'de iflas olasılığını (4.16)'den $p\mu < 1$ ve $U_0 = u$ iken

$$\psi(u) = q\psi(u+1) + p \sum_{x=1}^u \psi(u+1-x)f(x) + p \sum_{x=u+1}^{\infty} f(x), u = 1, 2, \dots \quad (4.20)$$

biçiminde elde etmiştir. Ayrıca $u = 0$ iken $\psi(0) = p\mu$ olmaktadır. Shui (1989)'da I_1, I_2, \dots bağımsız aynı dağılımlı r.d.'ler yardımıyla $i \geq 1$ için, $P(I_i = 1) = q$ ve $P(I_i = 0) = 1 - q$ biçiminde tanımlayıp, $q\mu < 1$ için, yaşam olasılığını (4.17) ile verilen iflas zamanını dikkate alarak

$$\phi(u) = (1 - q)\phi(u+1) + qE[\phi(u+1-X)], u = 0, 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

biçiminde ifade ederek, $u = 1, 2, 3, \dots$ için

$$(1 - q)\phi(u) = \phi(u-1) - q \sum_{x=1}^n \phi(u-x)f(x) \quad (4.22)$$

biçiminde yinelemeli bir formül ile elde etmiştir. Ayrıca $u = 0$ iken $\phi(0) = \frac{1-q\mu}{1-q}$ olmaktadır. Benzer olarak sonlu zamanlı yaşam olasılıklarını ise, $u = 0, 1, 2, \dots$ ve $n = 1, 2, \dots$ için $\phi(u, 0) = 1$ iken

$$\phi(u, n) = (1 - q)\phi(u+1, n-1) + q \sum_{x=1}^{u+1} \phi(u+1-x, n-1)f(x) \quad (4.23)$$

biçiminde elde etmiştir.

Bileşik Binomial risk modelinde meydana gelen hasarlar arasındaki bekleme zamanı dağılımı, (4.15) ile verilen Geometrik dağılıma sahiptir. Bu varsayımlar altında

(4.16)'de verilen iflas zamanı kullanılarak T r.d'nin yaşam fonksiyonu aşağıdaki yinelemeli formül yardımıyla hesaplanabilir.

$$\phi(u, n) = P_u(T > n) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \sum_{t=1}^n \sum_{x=1}^{u+t-1} f(x)\phi(u+t-x, n-t)pq^{t-1} + q^n & , n > 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

(Egido Dos Reis 2004).

Willmot (1993)'de Bileşik Binomial risk modelinde yaşam olasılığını iflas zamanını (4.17) kabul ederek $n \geq 1$ için, hasar büyüklüğü r.d'lerinin o.f f_n ve $m \geq 0$ için $g_m(k) = P(S_t = m)$ alarak $\phi(u, n) = P(U_t \geq 0, t = 0, 1, \dots, n)$ biçiminde ifade etmiştir. İfade ettiği bu sonlu zamanlı yaşam olasılığını Lagrange açılımı ve olasılık üreten fonksiyon yardımıyla

$$\phi(0, n) = \frac{\sum_{k=0}^n (n-k+1)g_k(n+1)}{1-q(n+1)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.25)$$

biçiminde ifade ederek $u = 0, 1, \dots$ ve $n = 1, 2, \dots$ için,

$$\phi(u, n) = G_{u+n}(n) - (1-q) \sum_{k=0}^{n-1} \phi(0, n-1-k)g_{k+u+1}(k) \quad (4.26)$$

biçiminde genelleştirilmiş halini vermiştir.

Dickson (1994)'de yaklaştırma yöntemleri kullanarak, Bileşik Binomial risk modelindeki iflas olasılıkları yardımıyla sürekli zamanlı Klasik risk modelindeki iflas olasılıklarına geçişleri incelemiştir. Cheng vd. (2000), Bileşik Binomial risk modelinde iflas olasılıklarının bazı karakteristikleri için sonuçlar elde etmişlerdir.

Li ve Garrido (2002)'de kesikli zamanlı risk modelinde $\phi(0, n)$ için genel bir form elde etmiş ve Bileşik Binomial risk modeli için (4.24) eşitliği ile benzer sonuçların bulunabileceğini göstermiştir. Bu durumda sonlu zamanlı yaşam olasılığını

$$\phi(0, 1) = q \quad (4.27)$$

$$\phi(0, 2) = q^2 + pqf(1) \quad (4.28)$$

iken

$$\phi(0, n) = q^n + \sum_{t=1}^{n-2} pq^t \sum_{x=1}^t f(x)\phi(t+1-x; n-1-t), \quad n = 3, 4, \dots \quad (4.29)$$

biçiminde elde etmişlerdir (Egido Dos Reis 2004).

4.2 Kesikli Zamanlı Sparre-Andersen Risk Modeli

Pavlova ve Willmot (2004)'de, Gerber (1988)'in önerdiği Bileşik Binomial risk modelini kullanarak kesikli zamanlı Sparre-Andersen risk modeli üzerinde ilk çalışmaları yapmışlardır. Cosette vd. (2006) toplam hasar miktarının dağılımı, nihai iflas olasılıkları ve sonlu zamanlı iflas olasılıkları için açık formüller elde etmişlerdir. Li (2005)'de hasarların bekleme zamanının kesikli K_m sınıfı dağılımına sahip olduğu (olasılık üreten fonksiyonu ile dağılım fonksiyonu orantılı) Sparre-Andersen risk modelinde iflas karakteristiklerinin genel formlarını elde etmiştir. Liu ve Zhao (2007)'de Bileşik Binomial risk modelinde yenileme yoğunluk fonksiyonunu kullanarak, iflas zamani ve iflasla ilgili bazı karakteristikleri dağılımlarını elde etmişlerdir. Eryılmaz (2012)'de Bileşik Binomial risk modelinde sonlu zamanlı yaşam olasılıklarını yenileme denklemi biçiminde ifade edip, tekrarların dağılımları üzerine nümerik hesaplamalar ve teorik sonuçlar elde etmiştir.

Kesikli zamanlı Sparre-Andersen risk modeli $u > 0$ başlangıç rezervi, X_i i . hasarın büyüklüğünü göstermek üzere, bir sigorta şirketinin rezerv süreci

$$U_t = u + n - \sum_{i=1}^{N_n} X_i \quad (4.30)$$

biçiminde ifade edilebilir. $x \geq 1$ için $f(x) = P(X_i = x)$ dağılımına sahip olup $\{N_n, n \in \mathbb{N}\}$ sayma süreci n . zamana kadar meydana gelen hasarların sayısını göstermektedir ve W_i 'ler bağımsız aynı dağılımlı hasar bekleme zamani iken $N_n = \max\{k : W_1 + W_2 + \dots + W_k \leq n\}$ biçimindedir. Ayrıca burada hasar bekleme zamani ile hasar büyüklükleri birbirinden bağımsızdır (Li 2005).

Teorem 4.1 *İflas zamani olarak (4.17) düşünüldüğünde $n = 1, 2, \dots, u \in \mathbb{N}$ ve $c = 1$ ise sonlu zamanlı yaşam olasılıkları için*

$$\phi(u, n) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \sum_{t=1}^n f_W(t) \sum_{x=1}^{u+t} f(x) \phi(u+t-x, n-t) + \bar{F}_W(n) & , n > 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

biçiminde yinelemeli formülü elde edilir (Cosette vd. 2006).

Teorem 4.1'de Gerber (1988)'de verilen iflas zamani tanımının kullanılmasıyla (4.24) ifadesi elde edilir.

5. KESİKLİ ZAMANLI RİSK MODELİNDE HOMOJEN OLMAYAN HASAR OLUŞUMLARI

Bu tez çalışmasında kesikli zamanlı risk modelinde I_1, I_2, \dots r.d'lerinin birbirinden bağımsız ancak farklı dağılıma sahip olmaları koşulu altında, yani $i \geq 1$ için $P(I_i = 1) = p_i$ ve $P(I_i = 0) = 1 - p_i = q_i$ olduğu durum üzerinde çalışılacaktır. Bu varsayım altında periyotlarda hasar oluşum olasılıkları birbirinden farklı olabilmektedir. Bu durumda N_n rasgele değişkeninin dağılımı

$$P(N_n = k) = \begin{cases} p_n P(N_{n-1} = k-1) + q_n P(N_{n-1} = k) & , 1 \leq k \leq n-1 \\ \prod_{i=1}^n q_i & , k = 0 \\ \prod_{i=1}^n p_i & , k = n \end{cases} \quad (5.1)$$

yinelemeli formülü yardımıyla elde edilebilmektedir.

(5.1) eşitliğini aşağıdaki şekilde elde etmek mümkündür.

$k = 0$ için

$$\begin{aligned} P(N_n = 0) &= P(I_1 = 0, \dots, I_n = 0) \\ &= q_1 \dots q_n \\ &= \prod_{i=1}^n q_i \end{aligned} \quad (5.2)$$

ve $k = n$ için

$$\begin{aligned} P(N_n = 1) &= P(I_1 = 1, \dots, I_n = 1) \\ &= p_1 \dots p_n \\ &= \prod_{i=1}^n p_i \end{aligned} \quad (5.3)$$

olduğu açıktır. $1 \leq k \leq n-1$ için son hasar üzerinden koşullandırma yapıldığında

$$\begin{aligned} P(N_n = k) &= P(N_n = k | I_n = 1)P(I_n = 1) + P(N_n = k | I_n = 0)P(I_n = 0) \\ &= P(N_{n-1} = k-1)P(I_n = 1) + P(N_{n-1} = k)P(I_n = 0) \\ &= p_n P(N_{n-1} = k-1) + q_n P(N_{n-1} = k) \end{aligned} \quad (5.4)$$

biçiminde elde edilir.

Aşağıdaki teorem hasar oluşum olasılıklarının birbirinden farklı olması durumunda T r.d.'nin yaşam fonksiyonu Gerber (1988) tarafından önerilen

$$T = \inf\{U_t \leq 0, t = 1, 2, \dots\} \quad (5.5)$$

biçiminde ifade edilen iflas zamanı kullanılarak elde edilmiştir.

Teorem 5.1 I_1, I_2, \dots birbirinden bağımsız r.d.'ler, $i \geq 1$ için, $P(I_i = 1) = p_i$ ve $P(I_i = 0) = q_i$ olmak üzere, T r.d.'nin yaşam fonksiyonu

$$P_u(T > n) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \sum_{t=1}^n p_t \prod_{i=1}^{t-1} q_i \sum_{x=1}^{u+t-1} f(x) P_{u+t-x}(T^{(t+1,n)} > n-t) & , n > 0 \\ + \left(1 - \sum_{t=1}^n p_t \prod_{i=1}^{t-1} q_i\right) & \end{cases} \quad (5.6)$$

biçimindedir. Burada $T^{(t+1,n)}$, t . periyoddan sonra tanımlı iflas zamanını göstermektedir.

İspat. W_1 r.d.'ni ilk hasarın gerçekleşme zamanı olmak üzere, hasar oluşum olasılıklarının birbirinden farklı ya da homojen olmayan hasar oluşumlarıyla Bileşik Binomial risk modeli varsayımı altında, W_1 r.d.'nin olasılık fonksiyonu

$$\begin{aligned} P(W_1 = t) &= P(I_1 = 0, \dots, I_{t-1} = 0, I_t = 1) \\ &= q_1 \dots q_{t-1} p_t \\ &= p_t \prod_{i=1}^{t-1} q_i \end{aligned}$$

biçimindedir. İlk hasar gerçekleşinceye kadar geçen zaman ve hasarın büyüklüğü üzerinden koşullandırma yapıldığında

$$\begin{aligned} P_u(T > n) &= \sum_{t=1}^{\infty} P_u(T > n | W_1 = t) P(W_1 = t) \\ &= \sum_{t=1}^n P_u(T > n | W_1 = t) P(W_1 = t) + \sum_{t=n+1}^{\infty} P_u(T > n | W_1 = t) P(W_1 = t) \\ &= \sum_{t=1}^n P_u(T > n | W_1 = t) p_t \prod_{i=1}^{t-1} q_i + \sum_{t=n+1}^{\infty} P(W_1 = t) \end{aligned} \quad (5.7)$$

olmaktadır. (5.7) eşitliğinde eşitliğin sağ tarafındaki $\sum_{t=n+1}^{\infty} P(W_1 = t)$ ifadesi

$$\begin{aligned} \sum_{t=n+1}^{\infty} P(W_1 = t) &= P(W_1 > n) = 1 - P(W_1 \leq n) \\ &= 1 - \sum_{t=1}^n P(W_1 = t) \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. $P_u(T > n | W_1 = t)$ olasılığının

$$\begin{aligned} P_u(T > n | W_1 = t) &= \sum_{x=1}^{\infty} P_{u+t-x}(u+t-X > 0, X=x, T^{(t+1,n)} > n-t) \\ &= \sum_{x=1}^{u+t-1} f(x) P_{u+t-x}(T^{(t+1,n)} > n-t) \end{aligned} \quad (5.8)$$

biçiminde yazılmasıyla

$$\begin{aligned} P_u(T > n) &= \sum_{t=1}^{\infty} P_u(T > n | W_1 = t) P(W_1 = t) \\ &= \sum_{t=1}^n p_t \prod_{i=1}^{t-1} q_i \sum_{x=1}^{u+t-1} f(x) P_{u+t-x}(T^{(t+1,n)} > n-t) \\ &\quad + \left(1 - \sum_{t=1}^n p_t \prod_{i=1}^{t-1} q_i \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

genel formu elde edilir. ■

Aşağıda $n = 1, 2, 3$ değerleri için $P_u(T > n)$ olasılıkları Teorem 5.1'den yararlanılarak hesaplanmıştır.

$P_u(T > 0) = 1$ olup $n = 1$ için $X_1 = x$ ve $W_1 = t$ üzerinden koşullandırma yapıldığında

$$\begin{aligned} P_u(T > 1) &= \sum_{t=1}^1 P_u(T > 1 | W_1 = t) P(W_1 = t) + \left(1 - \sum_{t=1}^1 P(W_1 = t) \right) \\ &= P_u(T > 1 | W_1 = 1) p_1 + q_1 \end{aligned} \quad (5.10)$$

biçiminde elde edilir. (5.10) eşitliğinin sağ tarafındaki $P_u(T > 1 | W = 1)$ olasılığı (5.8) eşitliğinden

$$P_u(T > 1 | W_1 = 1) = \sum_{x=1}^u f(x) P_u(T^{(2,1)} > 0)$$

olur. $P_u(T^{(2,1)} > 0) = 1$ olduğundan

$$P_u(T > 1) = \sum_{x=1}^u f(x) p_1 + q_1 \quad (5.11)$$

olup $\sum_{x=1}^u f(x) = P(X \leq u) = F(u)$ olduğundan (5.11)'e denk olarak

$$\begin{aligned} P_u(T > 1) &= P(X \leq u) p_1 + q_1 \\ &= F(u) p_1 + q_1 \end{aligned} \quad (5.12)$$

biçiminde de yazılabilir.

$n = 2$ için $X_1 = x$, $X_2 = y$ ve $W_1 = t$ üzerinden koşullandırma yapıldığında

$$\begin{aligned} P_u(T > 2) &= \sum_{t=1}^2 P_u(T > 2 | W_1 = t) P(W_1 = t) + \left(1 - \sum_{t=1}^2 P(W_1 = t)\right) \\ &= P_u(T > 2 | W_1 = 1) p_1 + P_u(T > 2 | W_1 = 2) q_1 p_2 \\ &\quad + q_1 - q_1 p_2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

biçiminde elde edilir. (5.13) eşitliğinin sağ tarafında $q_1 - q_1 p_2 = q_1 q_2$ olmak üzere $P_u(T > 2 | W_1 = 1)$ olasılığı

$$P_u(T > 2 | W_1 = 1) = \sum_{x=1}^u P_{u+1-x}(T^{(1,1)} > 1) f(x) \quad (5.14)$$

ve benzer biçimde $P_u(T > 2 | W_1 = 2)$ olasılığı

$$\begin{aligned} P_u(T > 2 | W_1 = 2) &= \sum_{x=1}^{u+1} P_{u+2-x}(T^{(3,2)} > 0) f(x) \\ &= P(X \leq u+1) \\ &= F(u+1) \end{aligned} \quad (5.15)$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda (5.13) eşitliği

$$\begin{aligned} P_u(T > 2) &= \sum_{t=1}^2 \sum_{x=1}^{u+t-1} f(x) P_{u+t-x}(T^{(2,2)} > 1) P(W_1 = t) + \left(1 - \sum_{t=1}^2 P(W_1 = t)\right) \\ &= \sum_{x=1}^u f(x) P_{u+1-x}(T^{(2,2)} > 1) p_1 \\ &\quad + \sum_{x=1}^{u+1} f(x) P_{u+2-x}(T^{(3,2)} > 0) q_1 p_2 + q_1 q_2 \end{aligned} \quad (5.16)$$

biçiminde elde edilir. (5.12) eşitliğindeki $P_u(T > 1)$ olasılığı $P_u(T^{(2,2)} > 1)$ olasılığına göre yeniden düzenlenip, $(t+1, n)$ aralığı t . periyoddan sonra ilk hasarın geliş zamanı

W_1^a r.d olsun. Bu durumda W_1^a r.d'ni $P(W_1^a = t) = p_t$ biçiminde ifade edilir.

$$\begin{aligned}
P_{u+1-x}(T^{(2,2)} > 1) &= \sum_{x=1}^{u+1-x} f(x)P_{u+2-x}(T^{(3,2)} > 0)P(W_1^a = 2) + 1 - P(W_1^a = 2) \\
&= \sum_{x=1}^{u+1-x} f(x)p_2 + q_2 \\
&= P(X \leq u+1-x)p_2 + q_2 \\
&= F(u+1-x)p_2 + q_2
\end{aligned} \tag{5.17}$$

biçiminde yazılabilir. Burada rezervin değişimi dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
P_u(T > 2) &= \sum_{x=1}^u f(x)[P(X \leq u+1-x)p_2 + q_2]p_1 \\
&\quad + \sum_{x=1}^{u+1} f(x) + q_1p_2 + q_1q_2 \\
&= F(u)[F(u+1-x)p_2 + q_2]p_1 \\
&\quad + F(u+1)q_1p_2 + q_1q_2 \\
&= p_1p_2F(u)F(u+1-x) + p_1q_2F(u) \\
&\quad + F(u+1)q_1p_2 + q_1q_2
\end{aligned} \tag{5.18}$$

olur.

$n = 3$ için, $X_1 = x$, $X_2 = y$, $X_3 = z$ ve $W_1 = t$ üzerinden koşullandırma yapıldığında

$$P_u(T > n) = \sum_{t=1}^n P_u(T > n|W_1 = t)P(W_1 = t) + 1 - \sum_{t=1}^n P(W_1 = t) \tag{5.19}$$

olmak üzere

$$P_u(T > 3) = \sum_{t=1}^3 P_u(T > 3|W_1 = t)P(W_1 = t) + 1 - \sum_{t=1}^n P(W_1 = t) \tag{5.20}$$

biçimindedir. (5.20) eşitliğinin sağ tarafındaki $\sum_{t=1}^3 P_u(T > 3|W_1 = t)$ ifadesi farklı değerler için

$$\begin{aligned}
P_u(T > 3|W_1 = 1)P(W_1 = 1) &= \sum_{x=1}^{u+t-1} f(x)P_{u+1-x}(T^{(2,3)} > 2)p_1 \\
&= \sum_{x=1}^u f(x)P_{u+1-x}(T^{(2,3)} > 2)p_1
\end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
P_u(T > 3 | W_1 = 2) P(W_1 = 2) &= \sum_{x=1}^{u+t-1} f(x) P_{u+2-x}(T^{(3,3)} > 1) q_1 p_2 \\
&= \sum_{x=1}^{u+1} f(x) P_{u+2-x}(T^{(3,3)} > 1) q_1 p_2 \quad (5.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_u(T > 3 | W_1 = 3) P(W_1 = 3) &= \sum_{x=1}^{u+t-1} f(x) P_{u+3-x}(T^{(4,3)} > 0) q_1 q_2 p_3 \\
&= \sum_{x=1}^{u+2} f(x) q_1 q_2 p_3 \quad (5.23)
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. (5.23) eşitliğinin sağ tarafındaki ifade

$$\begin{aligned}
1 - \sum_{t=1}^3 P(W_1 = t) &= 1 - [p_1 + q_1 p_2 + q_1 q_2 p_3] \\
&= 1 - [p_1 + p_2 + p_3 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3] \\
&= q_1 q_2 q_3 \quad (5.24)
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda (5.20) eşitliği yeniden düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
P_u(T > 3) &= \sum_{x=1}^u f(x) P_{u+1-x}(T^{(2,3)} > 2) p_1 + \sum_{x=1}^{u+1} f(x) P_{u+2-x}(T^{(3,3)} > 1) q_1 p_2 \\
&\quad + \sum_{x=1}^{u+2} f(x) q_1 q_2 p_3 + q_1 q_2 q_3 \quad (5.25)
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. (5.21) eşitliğindeki $P_{u+1-x}(T^{(2,3)} > 2)$ olasılığı $P_u(T > 2)$ olasılığında elde edilen sonuçlar için tekrar düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
P_{u+1-x}(T^{(2,3)} > 2) &= \sum_{y=1}^{u+1-x} f(y) [P(X \leq u+2-x-y) p_3 + q_3] P(W_1^a = 2) \\
&\quad + \sum_{x=1}^{u+2-x} f(x) P(W_1^a = 3) + 1 - \sum_{t=2}^3 p_t \prod_{i=2}^{t-1} q_i \\
&= \sum_{x=1}^{u+1-x} f(y) [P(X \leq u+2-x-y) p_3 + q_3] p_2 \\
&\quad + \sum_{x=1}^{u+2-x} f(x) q_2 p_3 + q_2 q_3 \quad (5.26)
\end{aligned}$$

olur. Burada $1 - \sum_{t=2}^3 p_t \prod_{i=2}^{t-1} q_i = 1 - [p_2 + q_2 p_3] = 1 - p_2 - p_3 + p_2 p_3 = q_2 q_3$ olarak yazılabilir. (5.22) eşitliğindeki $P_{u+2-x}(T^{(3,3)} > 1)$ olasılığı, $P_u(T^{(2,2)} > 1)$ olasılığına göre yeniden düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} P_{u+2-x}(T^{(3,3)} > 1) &= P(X \leq u+2-x) P(W_1^a = 3) + 1 - P(W_1^a = 3) \\ &= P(X \leq u+2-x) p_3 + q_3 \end{aligned} \quad (5.27)$$

biçiminde elde edilir. Böylece $P_u(T > 3)$ olasılığı

$$\begin{aligned} P_u(T > 3) &= \sum_{x=1}^u f(x) \left[\sum_{y=m_1}^{u+1-x} f(y) (P(X \leq u+2-x-y) p_3 + q_3) p_2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{x=1}^{u+2-x} f(x) q_2 p_3 + q_2 q_3 \right] p_1 \\ &\quad + \sum_{x=1}^{u+1} f(x) [P(X \leq u+2-x) p_3 + q_3] q_1 p_2 \\ &\quad + \sum_{x=1}^{u+2} f(x) q_1 q_2 p_3 + q_1 q_2 q_3 \\ &= F(u) [F(u+1-x) [F(u+2-x-y) p_3 + q_3] p_2 \\ &\quad + F(u+2-x) q_2 p_3 + q_2 q_3] p_1 \\ &\quad + F(u+1) [F(u+2-x) p_3 + q_3] q_1 p_2 \\ &\quad + F(u+2) q_1 q_2 p_3 + q_1 q_2 q_3 \end{aligned} \quad (5.28)$$

biçiminde elde edilir.

T r.d'ni bir sigorta şirketinin rezervinin iflas zamanı olduğu (4.16)'de verilmişti. Bu durumda sonlu zamanlı yaşam olasılığı ya da iflas etmeme olasılığı, kısaca Teorem 5.1 kullanılarak

$$\phi^{(1,n)}(u) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \sum_{t=1}^n p_t \prod_{i=1}^{t-1} q_i \sum_{x=1}^{u+t-1} f(x) \phi^{(t+1,n-t)}(u+t-x) + \prod_{i=1}^n q_i & , n > 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

biçiminde de ifade edilebilir.

Yukarıda (5.6) eşitliği ile hesaplanmış olan $P_u(T > n)$, $n = 1, 2, 3$ olasılıkları $\phi^{(1,n)}(u)$ gösterimi altında da elde edilebilir. Bu durumda (5.29)'den

$n = 1$ için $X_1 = x$ ve $W_1 = t$ üzerinden koşullandırma yapıldığında

$$\begin{aligned}\phi^{(1,1)}(u) &= p_1 \sum_{x=1}^u f(x) \phi^{(2,0)}(u+1-x) + q_1 \\ &= p_1 \sum_{x=1}^u f(x) + q_1\end{aligned}\quad (5.30)$$

biçimindedir.

$n = 2$ için $X_1 = x$, $X_2 = y$ ve $W_1 = t$ üzerinden koşullandırma yapıldığında

$$\begin{aligned}\phi^{(1,2)}(u) &= p_1 \sum_{x=1}^u f(x) \phi^{(2,1)}(u+1-x) + q_1 p_2 \sum_{x=1}^{u+1} f(x) \phi^{(3,0)}(u+2-x) + q_1 q_2 \\ &= p_1 \sum_{x=1}^u f(x) \left[p_2 \sum_{y=1}^{u+1-x} f(y) + q_2 \right] + q_1 p_2 \sum_{x=1}^{u+1} f(x) + q_1 q_2\end{aligned}\quad (5.31)$$

biçimindedir. Burada, $\phi^{(2,1)}(u+1-x)$ olasılığı (5.30) eşitliği kullanılarak elde edilmiştir.

$n = 3$ için, $X_1 = x$, $X_2 = y$, $X_3 = z$ ve $W_1 = t$ üzerinden koşullandırma yapıldığında

$$\begin{aligned}\phi^{(1,3)}(u) &= p_1 \sum_{x=1}^u f(x) \phi^{(2,2)}(u+1-x) + q_1 p_2 \sum_{x=1}^{u+1} f(x) \phi^{(3,1)}(u+2-x) \\ &\quad + q_1 q_2 p_2 \sum_{x=1}^{u+2} f(x) \phi^{(4,0)}(u+3-x) + q_1 q_2 q_3 \\ &= p_1 \sum_{x=1}^u f(x) \left[p_2 \sum_{y=1}^{u+1-x} f(y) p_3 \sum_{z=1}^{u+2-x-y} f(z) + p_2 q_3 \sum_{y=1}^{u+1-x} f(y) \right. \\ &\quad \left. + q_2 p_3 \sum_{y=1}^{u+2-x} f(y) + q_2 q_3 \right] + q_1 p_2 \sum_{x=1}^{u+1} f(x) \left[p_3 \sum_{y=1}^{u+2-x} f(y) + q_3 \right] \\ &\quad + q_1 q_2 p_3 \sum_{x=1}^{u+2} f(x) + q_1 q_2 q_3\end{aligned}\quad (5.32)$$

biçimindedir. Burada $\phi^{(2,2)}(u+1-x)$ olasılığı (5.31) eşitliğinden, $\phi^{(3,1)}(u+2-x)$ olasılığı ise, (5.30) eşitliği kullanılarak elde edilmiştir. Daha büyük n değerleri içinde benzer şekilde yukarıdaki sonuçlar elde edilebilir.

Aşağıda (5.6) eşitliği ile hesaplanmış olan $P_u(T > n)$, $n = 1, 2, 3$ olasılıklarının doğruluğunu ve yinelemeli ilişkiyi kontrol etmek için $P_u(T > 1)$, $P_u(T > 2)$ ve

$P_u(T > 3)$ olasılıkları, hasar büyüklüğü (miktarı) r.d'ni $\{X_i, i \geq 1\}$ olasılık fonksiyonu $f(x) = P(X = x)$ olan negatif değerler almayan bağımsız aynı dağılımlı r.d.'lerin bir dizisi olması koşulu altında Teorem 5.1'i kullanmadan rezervin değişimi dikkate alınarak hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned} P_u(T > 1) &= P(I_1 = 1, X_1 \leq u) + P(I_1 = 0) \\ &= p_1 F(u) + q_1 \end{aligned} \quad (5.33)$$

biçiminde elde edilir. Böylece (5.11) ifadesi ile aynı sonuca ulaşılmış olur.

$$\begin{aligned} P_u(T > 2) &= P(I_1 = 0, I_2 = 0) \\ &\quad + P(I_1 = 0, I_2 = 1, X_1 \leq u + 1) \\ &\quad + P(I_1 = 1, I_2 = 0, X_1 \leq u) \\ &\quad + P(I_1 = 1, I_2 = 1, X_1 \leq u, X_1 + X_2 \leq u + 1) \end{aligned} \quad (5.34)$$

(5.34) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} P_u(T > 2) &= q_1 q_2 + q_1 p_2 P(X_1 \leq u + 1) + p_1 q_2 P(X_1 \leq u) \\ &\quad + p_1 p_2 P(X_1 \leq u, X_1 + X_2 \leq u + 1) \end{aligned} \quad (5.35)$$

biçiminde elde edilir. (5.35) eşitliğinin sağ tarafındaki $p_1 p_2 P(X_1 \leq u, X_1 + X_2 \leq u + 1)$ ifadesinde $X_1 = x$ üzerinden koşullandırma yapıldığında

$$p_1 p_2 P(X_1 \leq u, X_1 + X_2 \leq u + 1) = p_1 p_2 \sum_{x=1}^u f(x) P(X_2 \leq u + 1 - x)$$

biçiminde elde edilir.

$$\begin{aligned} P_u(T > 2) &= q_1 q_2 + q_1 p_2 P(X_1 \leq u + 1) + p_1 q_2 P(X_1 \leq u) \\ &\quad + p_1 p_2 \sum_{x=1}^u f(x) P(X_2 \leq u + 1 - x) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Böylece (5.18) eşitliği ile aynı sonuca ulaşılmış olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
P_u(T > 3) &= P(I_1 = 0, I_2 = 0, I_3 = 0) \\
&+ P(I_1 = 0, I_2 = 0, I_3 = 1, X_1 \leq u + 2) \\
&+ P(I_1 = 0, I_2 = 1, I_3 = 0, X_1 \leq u + 1) \\
&+ P(I_1 = 1, I_2 = 0, I_3 = 0, X_1 \leq u) \\
&+ P(I_1 = 0, I_2 = 1, I_3 = 1, X_1 \leq u + 1, X_1 + X_2 \leq u + 2) \\
&+ P(I_1 = 1, I_2 = 0, I_3 = 1, X_1 \leq u, X_1 + X_2 \leq u + 2) \\
&+ P(I_1 = 1, I_2 = 1, I_3 = 0, X_1 \leq u, X_1 + X_2 \leq u + 1) \\
&+ P(I_1 = 1, I_2 = 1, I_3 = 1, X_1 \leq u, X_1 + X_2 \leq u + 1, \\
&X_1 + X_2 + X_3 \leq u + 2)
\end{aligned} \tag{5.37}$$

(5.37) eşitliğinde gerekli düzenlemelerin yapıldığında

$$\begin{aligned}
P_u(T > 3) &= q_1q_2q_3 + q_1q_2p_3P(X_1 \leq u + 2) \\
&+ q_1p_2q_3P(X_1 \leq u + 1) + p_1q_2q_3P(X_1 \leq u + 2) \\
&+ q_1p_2p_3P(X_1 \leq u + 1, X_1 + X_2 \leq u + 2) \\
&+ p_1q_2p_3P(X_1 \leq u, X_1 + X_2 \leq u + 2) \\
&+ p_1p_2q_3P(X_1 \leq u, X_1 + X_2 \leq u + 1) \\
&+ p_1p_2p_3P(X_1 \leq u, X_1 + X_2 \leq u + 1, X_1 + X_2 + X_3 \leq u + 2)
\end{aligned} \tag{5.38}$$

(5.38) eşitliğinde $X_1 = x$ üzerinden koşullandırma yapıldığında

$$q_1p_2p_3P(X_1 \leq u + 1, X_1 + X_2 \leq u + 2) = q_1p_2p_3 \sum_{x=1}^{u+1} P(X_2 \leq u + 2 - x)f(x) \tag{5.39}$$

$$p_1q_2p_3P(X_1 \leq u, X_1 + X_2 \leq u + 2) = p_1q_2p_3 \sum_{x=1}^u P(X_2 \leq u + 2 - x)f(x) \tag{5.40}$$

$$p_1p_2q_3P(X_1 \leq u, X_1 + X_2 \leq u + 1) = p_1p_2q_3 \sum_{x=1}^u P(X_2 \leq u + 1 - x)f(x) \tag{5.41}$$

biçimindedir.

Benzer olarak $p_1p_2p_3P(X_1 \leq u, X_1 + X_2 \leq u + 1, X_1 + X_2 + X_3 \leq u + 2)$ ifadesinde

$X_1 = x, X_2 = y$ üzerinden koşullandırma yapıldığında

$$P(X_1 \leq u, X_1 + X_2 \leq u + 1, X_1 + X_2 + X_3 \leq u + 2) = \sum_{x=1}^u \sum_{y=1}^{u+1-x} [f(x)f(y)P(X_3 \leq u + 2 - x - y)]$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} P_u(T > 3) &= q_1q_2q_3 + q_1q_2p_3P(X_1 \leq u + 2) \\ &+ q_1p_2q_3P(X_1 \leq u + 1) + p_1q_2q_3P(X_1 \leq u + 2) \\ &+ q_1p_2p_3 \sum_{x=1}^{u+1} P(X_2 \leq u + 2 - x)f(x) \\ &+ p_1q_2p_3 \sum_{x=1}^u P(X_2 \leq u + 2 - x)f(x) \\ &+ p_1p_2q_3 \sum_{x=1}^u P(X_2 \leq u + 1 - x)f(x) \\ &+ p_1p_2p_3 \sum_{x=1}^u \sum_{y=1}^{u+1-x} P(X_3 \leq u + 2 - x - y)f(x)f(y) \end{aligned} \quad (5.42)$$

biçiminde elde edilir. Böylece (5.28) ile aynı sonuçlara ulaşılmış olur.

5.1 Homojen Olmayan Durum için Sayısal Hesaplamalar

5.1.1 Sonlu zamanlı yaşam olasılıkları

Hasar büyüklüğü r.d.'nin dağılımının Geometrik dağılıma sahip olduğu varsayalım.

Bu durumda X r.d.'nin olasılık ve dağılım fonksiyonları sırasıyla

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - \alpha)\alpha^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots \\ F(x) &= 1 - \alpha^x, \quad x = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

olmaktadır. Ayrıca

$$E(X) = \frac{1}{1 - \alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

biçimindedir.

Bir sigorta şirketinin bir yıl içerisindeki tüm aylarda hasar oluşum olasılıklarının homojen olmadığı durumların ele alındığı düşünölsün. Bu amaçla farklı α ve u

değerleri için sonlu zamanlı yaşam olasılıklarını hesaplamada birbirinden farklı 4 durum üzerinde durulmuştur. Bu durumlara ilişkin sonlu zamanlı yaşam olasılıkları $(\phi^{(1,n)}(u))$ aşağıdaki çizelgelerde ve şekillerde verilmiştir.

$i = 1, \dots, 12$ için $P(I_i = 1) = p_i$ olmak üzere

Durum1 (D1) :

$$p_i = 0.01 * i, i = 1, \dots, 12$$

Durum2 (D2) :

$$p_i = 0.01 * (12 - i + 1), i = 1, \dots, 12$$

Durum3 (D3) :

$$p_i = \begin{cases} 0.1 & ,i = 1, \dots, 6 \\ 0.2 & ,i = 7, \dots, 12 \end{cases}$$

Durum4 (D4) :

$$p_i = \begin{cases} 0.2 & ,i = 1, \dots, 6 \\ 0.1 & ,i = 7, \dots, 12 \end{cases}$$

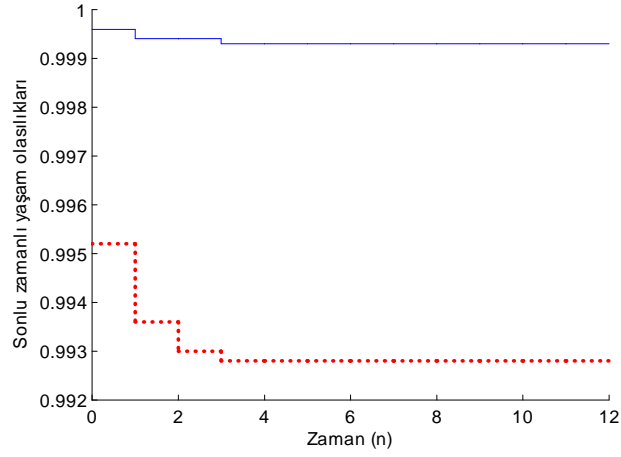
biçiminde tanımlansın.

Çizelge 5.1: $u = 2$ iken $\alpha = 1/5$ ve $\alpha = 2/5$ için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları

Durum	$\alpha = 1/5$				$\alpha = 2/5$			
	D1	D2	D3	D4	D1	D2	D3	D4
n	$u = 2$				$u = 2$			
1	0.9996	0.9952	0.9960	0.9920	0.9984	0.9808	0.9840	0.9680
2	0.9994	0.9936	0.9946	0.9882	0.9971	0.9721	0.9763	0.9501
3	0.9994	0.9930	0.9941	0.9863	0.9963	0.9679	0.9723	0.9393
4	0.9993	0.9928	0.9940	0.9854	0.9957	0.9659	0.9702	0.9324
5	0.9993	0.9928	0.9939	0.9849	0.9954	0.9649	0.9689	0.9279
6	0.9993	0.9928	0.9938	0.9847	0.9952	0.9644	0.9682	0.9248
7	0.9993	0.9928	0.9938	0.9846	0.9951	0.9642	0.9674	0.9237
8	0.9993	0.9928	0.9938	0.9846	0.9950	0.9641	0.9666	0.9231
9	0.9993	0.9928	0.9938	0.9846	0.9950	0.9640	0.9661	0.9227
10	0.9993	0.9928	0.9938	0.9846	0.9949	0.9640	0.9657	0.9225
11	0.9993	0.9928	0.9938	0.9846	0.9949	0.9640	0.9653	0.9224
12	0.9993	0.9928	0.9938	0.9846	0.9949	0.9640	0.9651	0.9223

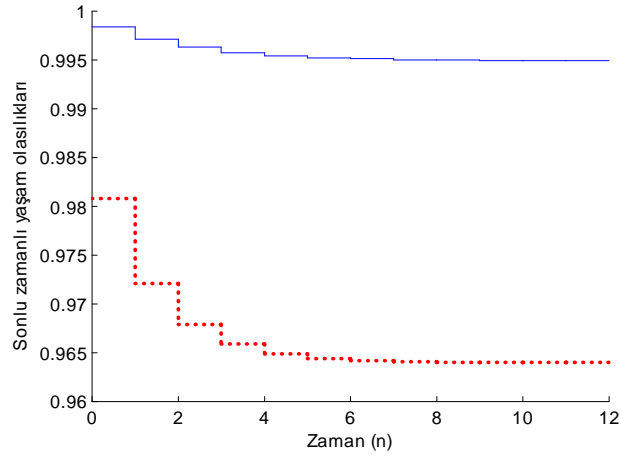
$u = 2$ ve hasar büyüklüğü α parametrelili Geometrik dağılıma sahip iken, seçilen α parametrelerine karşılık önceden belirlenen farklı 4 durum için rezerv süreci (4.12)'de tanımlandığı gibi düşünüldüğünde, yaşam (iflas etmeme) olasılıkları elde edilerek Çizelge 5.1 oluşturulmuştur. Buna göre $\alpha = 1/5$ iken her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum1'deki gibi düşünüldüğünde, $n = 2$ zamanında sigorta şirketinin yaşam olasılığı 0.9994 iken bu olasılığın her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum2'deki gibi düşünüldüğünde 0.9936 olduğu görülmektedir. Benzer olasılıklar $\alpha = 2/5$ iken Durum1 için 0.9971, Durum2 için 0.9721 olarak hesaplanmıştır. Ayrıca $\alpha = 1/5$ iken her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum3'deki gibi düşünüldüğünde, $n = 2$ zamanında sigorta şirketinin yaşam olasılığı 0.9946 iken bu olasılığın her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum4'deki gibi düşünüldüğünde 0.9882 olduğu görülmektedir. Benzer olasılıklar $\alpha = 2/5$ iken Durum3 için 0.9763, Durum4 için 0.9501 olarak hesaplanmıştır.

Farklı zaman periyotlarındaki sonlu zamanlı yaşam olasılıkları α parametreleri ile, Şekil 5.1 ile Şekil 5.2'de Durum1 (mavi renkli düzgün çizgi) ve Durum2 (kırmızı renkli noktalı çizgi) için gösterilmiştir.



Şekil 5.1: $u = 2$ ve $\alpha = 1/5$ iken Durum1 ve Durum2 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.

Şekil 5.1’de Durum1’in sonlu zamanlı yaşam olasılıkları Durum2’ye göre daha büyüktür. Her iki durum için de belirli bir periyotdan sonra bu olasılıkların sabit kaldığı görülmektedir.



Şekil 5.2: $u = 2$ ve $\alpha = 2/5$ iken Durum1 ve Durum2 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.

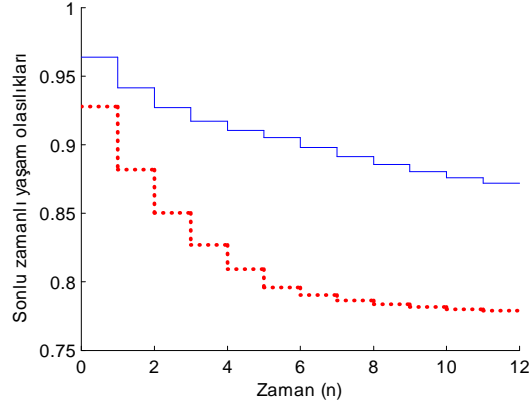
Şekil 5.2’de Durum1’in sonlu zamanlı yaşam olasılıkları, Durum2’ye göre daha büyüktür. α parametresinin artması ile sonlu zamanlı yaşam olasılıklarının hem Durum1’de hem de Durum2’de azaldığı görülmektedir.

Çizelge 5.2: $u = 2$ iken $\alpha = 3/5$ ve $\alpha = 4/5$ için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları

Durum	$\alpha = 3/5$				$\alpha = 4/5$			
	D1	D2	D3	D4	D1	D2	D3	D4
n	$u = 2$				$u = 2$			
1	0.9964	0.9568	0.9640	0.9280	0.9936	0.9232	0.9360	0.8720
2	0.9921	0.9321	0.9417	0.8819	0.9834	0.8703	0.8874	0.7798
3	0.9881	0.9174	0.9271	0.8501	0.9712	0.8329	0.8495	0.7104
4	0.9848	0.9084	0.9172	0.8270	0.9583	0.8062	0.8194	0.6561
5	0.9820	0.9029	0.9103	0.8094	0.9452	0.7870	0.7949	0.6123
6	0.9798	0.8995	0.9053	0.7958	0.9323	0.7732	0.7748	0.5761
7	0.9780	0.8975	0.8979	0.7903	0.9199	0.7634	0.7410	0.5609
8	0.9765	0.8963	0.8913	0.7864	0.9079	0.7566	0.7107	0.5482
9	0.9752	0.8957	0.8855	0.7836	0.8963	0.7521	0.6835	0.5376
10	0.9740	0.8954	0.8804	0.7816	0.8850	0.7493	0.6590	0.5285
11	0.9730	0.8952	0.8760	0.7800	0.8740	0.7477	0.6368	0.5207
12	0.9721	0.8952	0.8721	0.7788	0.8632	0.7471	0.6166	0.5139

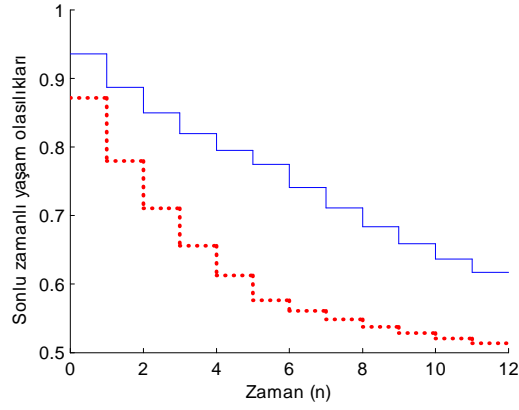
$u = 2$ ve hasar büyüklüğü α parametrelili Geometrik dağılıma sahip iken, seçilen α parametrelerine karşılık önceden belirlenen farklı 4 durum için rezerv süreci (4.12)'de tanımlandığı gibi düşünüldüğünde, yaşam (iflas etmeme) olasılıkları elde edilerek Çizelge 5.2 oluşturulmuştur. Buna göre $\alpha = 3/5$ iken her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum1'deki gibi düşünüldüğünde, $n = 2$ zamanında sigorta şirketinin yaşam olasılığı 0.9921 iken bu olasılığın her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum2'deki gibi düşünüldüğünde 0.9321 olduğu görülmektedir. Benzer olasılıklar $\alpha = 4/5$ iken Durum1 için 0.9834, Durum2 için 0.8703 olarak hesaplanmıştır. Ayrıca $\alpha = 3/5$ iken her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum3'deki gibi düşünüldüğünde, $n = 2$ zamanında sigorta şirketinin yaşam olasılığı 0.9417 iken bu olasılığın her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum4'deki gibi düşünüldüğünde 0.8819 olduğu görülmektedir. Benzer olasılıklar $\alpha = 4/5$ iken Durum3 için 0.8874, Durum4 için 0.7149 olarak hesaplanmıştır.

Farklı zaman periyotlarındaki sonlu zamanlı yaşam olasılıkları α parametreleri ile, Şekil 5.3 ile Şekil 5.4'de Durum3 (mavi renkli düzgün çizgi) ve Durum4 (kırmızı renkli noktalı çizgi) için gösterilmiştir.



Şekil 5.3: $u = 2$ ve $\alpha = 3/5$ iken Durum3 ve Durum4 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.

Şekil 5.3'de Durum3'ün sonlu zamanlı yaşam olasılıkları Durum4'e göre daha büyüktür.



Şekil 5.4: $u = 2$ ve $\alpha = 4/5$ iken Durum3 ve Durum4 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.

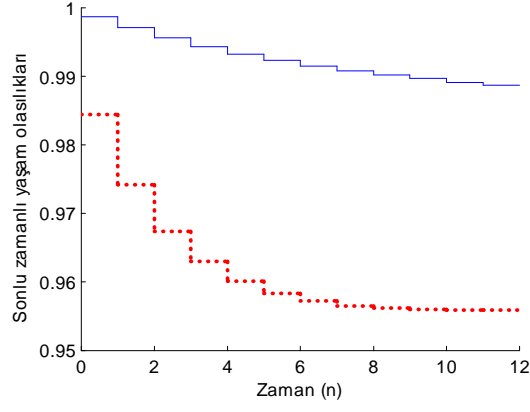
Şekil 5.4'de Durum3'in sonlu zamanlı yaşam olasılıkları Durum4'e göre daha büyüktür. α parametresinin artması ile sonlu zamanlı yaşam olasılıklarının hem Durum3'de hem de Durum4'de azaldığı görülmektedir.

Çizelge 5.3: $u = 4$ iken $\alpha = 3/5$ ve $\alpha = 4/5$ için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları

Durum	$\alpha = 3/5$				$\alpha = 4/5$			
	D1	D2	D3	D4	D1	D2	D3	D4
n	$u = 4$				$u = 4$			
1	0.9987	0.9844	0.9870	0.9741	0.9959	0.9508	0.9590	0.9181
2	0.9971	0.9742	0.9780	0.9533	0.9894	0.9148	0.9263	0.8525
3	0.9956	0.9674	0.9715	0.9368	0.9814	0.8881	0.8996	0.7988
4	0.9943	0.9630	0.9667	0.9234	0.9729	0.8682	0.8774	0.7538
5	0.9932	0.9601	0.9632	0.9124	0.9641	0.8534	0.8588	0.7155
6	0.9923	0.9583	0.9605	0.9033	0.9553	0.8426	0.8430	0.6824
7	0.9915	0.9572	0.9564	0.8995	0.9466	0.8347	0.8158	0.6679
8	0.9908	0.9565	0.9525	0.8968	0.9380	0.8292	0.7903	0.6557
9	0.9902	0.9562	0.9490	0.8948	0.9294	0.8255	0.7665	0.6453
10	0.9897	0.9560	0.9457	0.8932	0.9209	0.8231	0.7444	0.6363
11	0.9891	0.9559	0.9429	0.8920	0.9124	0.8218	0.7240	0.6285
12	0.9887	0.9559	0.9403	0.8911	0.9039	0.8213	0.7050	0.6216

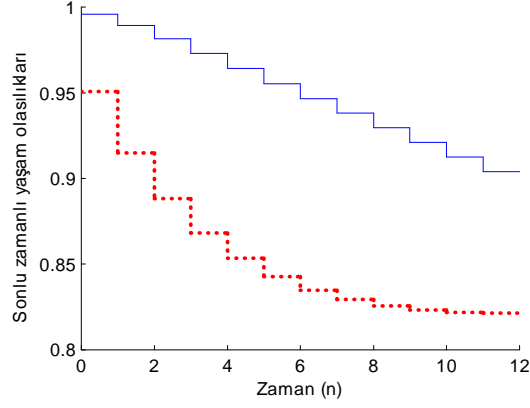
$u = 4$ ve hasar büyüklüğü α parametrelili Geometrik dağılıma sahip iken, seçilen α parametrelerine karşılık önceden belirlenen farklı 4 durum için rezerv süreci (4.12)'de tanımlandığı gibi düşünüldüğünde, yaşam (iflas etmeme) olasılıkları elde edilerek Çizelge 5.3 oluşturulmuştur. Buna göre $\alpha = 3/5$ iken her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum1'deki gibi düşünüldüğünde, $n = 2$ zamanında sigorta şirketinin yaşam olasılığı 0.9971 iken bu olasılığın her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum2'deki gibi düşünüldüğünde 0.9742 olduğu görülmektedir. Benzer olasılıklar $\alpha = 4/5$ iken Durum1 için 0.9894, Durum2 için 0.9148 olarak hesaplanmıştır. Ayrıca $\alpha = 3/5$ iken her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum3'deki gibi düşünüldüğünde, $n = 2$ zamanında sigorta şirketinin yaşam olasılığı 0.9780 iken bu olasılığın her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum4'deki gibi düşünüldüğünde 0.9533 olduğu görülmektedir. Benzer olasılıklar $\alpha = 4/5$ iken Durum3 için 0.9263, Durum4 için 0.8525 olarak hesaplanmıştır.

Farklı zaman periyotlarındaki sonlu zamanlı yaşam olasılıkları α parametreleri ile, Şekil 5.5 ile Şekil 5.6'da Durum1 (mavi renkli düzgün çizgi) ve Durum2 (kırmızı renkli noktalı çizgi) için gösterilmiştir.



Şekil 5.5: $u = 4$ ve $\alpha = 3/5$ iken Durum1 ve Durum2 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.

Şekil 5.5’de Durum1’in sonlu zamanlı yaşam olasılıkları Durum2’e göre daha büyüktür.



Şekil 5.6: $u = 4$ ve $\alpha = 4/5$ iken Durum1 ve Durum2 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.

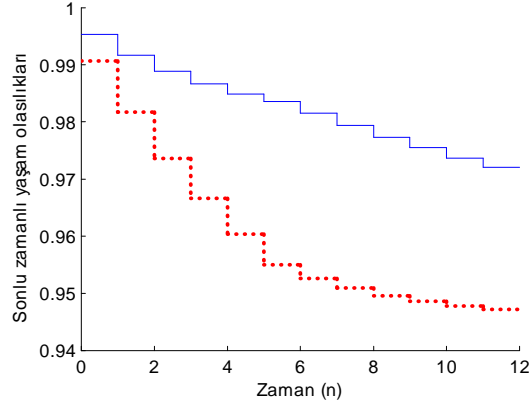
Şekil 5.6’da Durum1’in sonlu zamanlı yaşam olasılıkları Durum2’ye göre daha büyüktür. α parametresinin artması ile sonlu zamanlı yaşam olasılıklarının hem Durum1’de hem de Durum2’de azaldığı görülmektedir.

Çizelge 5.4: $u = 6$ iken $\alpha = 3/5$ ve $\alpha = 4/5$ için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları

Durum	$\alpha = 3/5$				$\alpha = 4/5$			
	D1	D2	D3	D4	D1	D2	D3	D4
n	$u = 6$				$u = 6$			
1	0.9995	0.9944	0.9953	0.9907	0.9974	0.9685	0.9738	0.9476
2	0.9990	0.9902	0.9917	0.9817	0.9932	0.9441	0.9518	0.9014
3	0.9984	0.9872	0.9889	0.9736	0.9880	0.9251	0.9330	0.8607
4	0.9979	0.9851	0.9867	0.9666	0.9824	0.9105	0.9170	0.8247
5	0.9975	0.9837	0.9849	0.9604	0.9765	0.8994	0.9030	0.7926
6	0.9971	0.9828	0.9836	0.9550	0.9705	0.8910	0.8908	0.7637
7	0.9967	0.9822	0.9815	0.9526	0.9644	0.8848	0.8694	0.7507
8	0.9964	0.9819	0.9794	0.9509	0.9582	0.8804	0.8485	0.7396
9	0.9961	0.9817	0.9773	0.9496	0.9520	0.8774	0.8258	0.7300
10	0.9959	0.9816	0.9755	0.9486	0.9457	0.8755	0.8094	0.7217
11	0.9956	0.9815	0.9737	0.9478	0.9392	0.8745	0.7913	0.7143
12	0.9954	0.9815	0.9721	0.9472	0.9326	0.8740	0.7742	0.7077

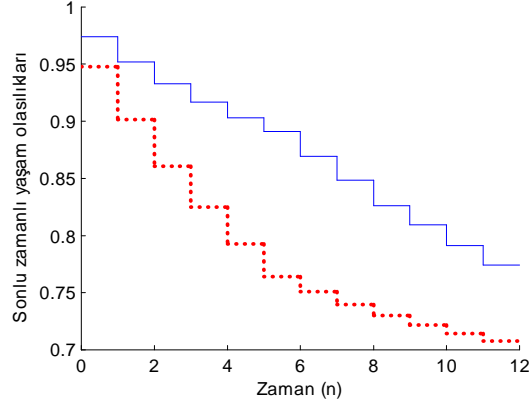
$u = 6$ ve hasar büyüklüğü α parametrelili Geometrik dağılıma sahip iken, seçilen α parametrelerine karşılık önceden belirlenen farklı 4 durum için rezerv süreci (4.12)'de tanımlandığı gibi düşünüldüğünde, yaşam (iflas etmeme) olasılıkları elde edilerek Çizelge 5.4 oluşturulmuştur. Buna göre $\alpha = 3/5$ iken her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum1'deki gibi düşünüldüğünde, $n = 2$ zamanında sigorta şirketinin yaşam olasılığı 0.9990 iken bu olasılığın her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum2'deki gibi düşünüldüğünde 0.9902 olduğu görülmektedir. Benzer olasılıklar $\alpha = 4/5$ iken Durum1 için 0.9932, Durum2 için 0.9441 olarak hesaplanmıştır. Ayrıca $\alpha = 3/5$ iken her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum3'deki gibi düşünüldüğünde, $n = 2$ zamanında sigorta şirketinin yaşam olasılığı 0.9917 iken bu olasılığın her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum4'deki gibi düşünüldüğünde 0.9817 olduğu görülmektedir. Benzer olasılıklar $\alpha = 4/5$ iken Durum3 için 0.9515, Durum4 için 0.9014 olarak hesaplanmıştır.

Farklı zaman periyotlarındaki sonlu zamanlı yaşam olasılıkları α parametreleri ile, Şekil 5.7 ile Şekil 5.8'de Durum3 (mavi renkli düzgün çizgi) ve Durum4 (kırmızı renkli noktalı çizgi) için gösterilmiştir.



Şekil 5.7: $u = 6$ ve $\alpha = 3/5$ iken Durum3 ve Durum4 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.

Şekil 5.7'de Durum3'in sonlu zamanlı yaşam olasılıkları Durum4'e göre daha büyüktür.



Şekil 5.8: $u = 6$ ve $\alpha = 4/5$ iken Durum3 ve Durum4 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.

Şekil 5.8'de Durum3'in sonlu zamanlı yaşam olasılıkları Durum4'e göre daha büyüktür. α parametresinin artması ile sonlu zamanlı yaşam olasılıklarının hem Durum3'de hem de Durum4'de azaldığı görülmektedir.

Çizelge 5.5: $u = 8$ iken $\alpha = 3/5$ ve $\alpha = 4/5$ için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları

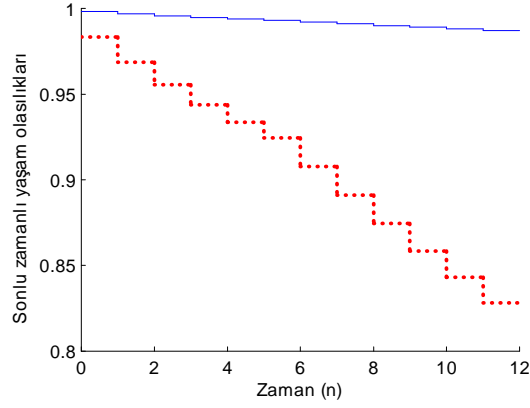
Durum	$\alpha = 3/5$				$\alpha = 4/5$			
	D1	D2	D3	D4	D1	D2	D3	D4
n	$u = 8$				$u = 8$			
1	0.9998	0.9980	0.9983	0.9832	0.9983	0.9799	0.9966	0.9664
2	0.9996	0.9963	0.9969	0.9685	0.9956	0.9633	0.9929	0.9342
3	0.9994	0.9950	0.9957	0.9554	0.9923	0.9500	0.9891	0.9040
4	0.9992	0.9941	0.9947	0.9438	0.9886	0.9393	0.9856	0.8758
5	0.9990	0.9934	0.9939	0.9335	0.9846	0.9310	0.9823	0.8496
6	0.9989	0.9929	0.9932	0.9243	0.9805	0.9247	0.9793	0.8254
7	0.9987	0.9927	0.9922	0.9077	0.9763	0.9199	0.9780	0.8141
8	0.9986	0.9925	0.9911	0.8909	0.9719	0.9165	0.9770	0.8044
9	0.9985	0.9924	0.9900	0.8745	0.9674	0.9141	0.9762	0.7959
10	0.9984	0.9923	0.9889	0.8584	0.9627	0.9126	0.9756	0.7884
11	0.9982	0.9923	0.9880	0.8429	0.9579	0.9118	0.9751	0.7818
12	0.9981	0.9923	0.9870	0.8280	0.9529	0.9114	0.9747	0.7758

$u = 8$ ve hasar büyüklüğü α parametrelili Geometrik dağılıma sahip iken, seçilen α parametrelerine karşılık önceden belirlenen farklı 4 durum için rezerv süreci (4.12)'de tanımlandığı gibi düşünüldüğünde, yaşam (iflas etmeme) olasılıkları elde edilerek Çizelge 5.5 oluşturulmuştur. Buna göre $\alpha = 3/5$ iken her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum1'deki gibi düşünüldüğünde, $n = 2$ zamanında sigorta şirketinin yaşam olasılığı 0.9996 iken bu olasılığın her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum2'deki gibi düşünüldüğünde 0.9963 olduğu görülmektedir. Benzer olasılıklar $\alpha = 4/5$ iken Durum1 için 0.9956, Durum2 için 0.9633 olarak hesaplanmıştır. Ayrıca $\alpha = 3/5$ iken her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum3'deki gibi düşünüldüğünde, $n = 2$ zamanında sigorta şirketinin yaşam olasılığı 0.9969 iken bu olasılığın her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum4'deki gibi düşünüldüğünde 0.9685 olduğu görülmektedir. Benzer olasılıklar $\alpha = 4/5$ iken Durum3 için 0.9929, Durum4 için 0.9342 olarak hesaplanmıştır.

Burada her bir durum için Çizelge 5.1-Çizelge 5.5'de elde edilmiş olan olasılıkların (3.5) eşitliğini sağladığı yani zaman ilerledikçe sigorta şirketinin yaşam olasılığının azaldığı görülmektedir. Ayrıca Çizelge 5.1-Çizelge 5.5 sonuçları incelendiğinde aynı

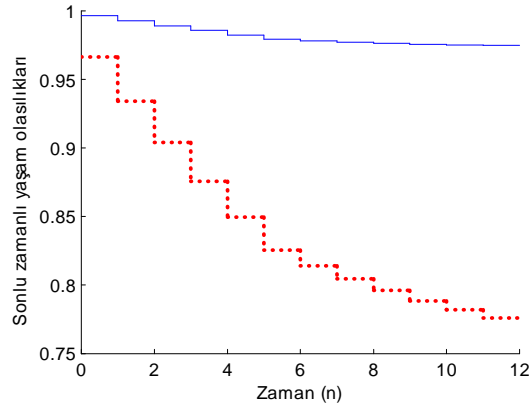
α parametresi ve aynı dönem altında, u arttıkça yaşam olasılığının arttığı yani sigorta şirketinin iflas etmesi olasılığının azaldığı gözlenmektedir.

Farklı zaman periyotlarındaki sonlu zamanlı yaşam olasılıkları α parametreleri ile, Şekil 5.9 ile Şekil 5.10'da Durum3 (mavi renkli düzgün çizgi) ve Durum4 (kırmızı renkli noktalı çizgi) için gösterilmiştir.



Şekil 5.9: $u = 8$ ve $\alpha = 3/5$ iken Durum3 ve Durum4 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.

Şekil 5.9'da Durum3'in sonlu zamanlı yaşam olasılıkları Durum4'e göre daha büyüktür.

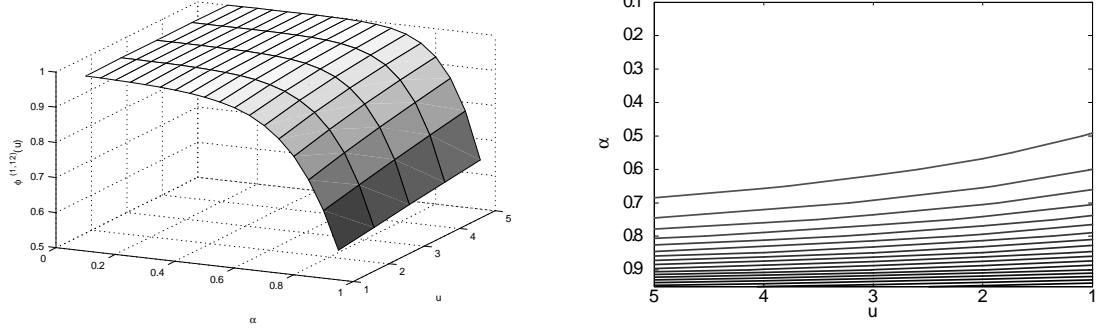


Şekil 5.10: $u = 8$ ve $\alpha = 4/5$ iken Durum3 ve Durum4 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları.

Şekil 5.10'da Durum3'in sonlu zamanlı yaşam olasılıkları Durum4'e göre daha büyüktür. α parametresinin artması ile sonlu zamanlı yaşam olasılıklarının hem Du-

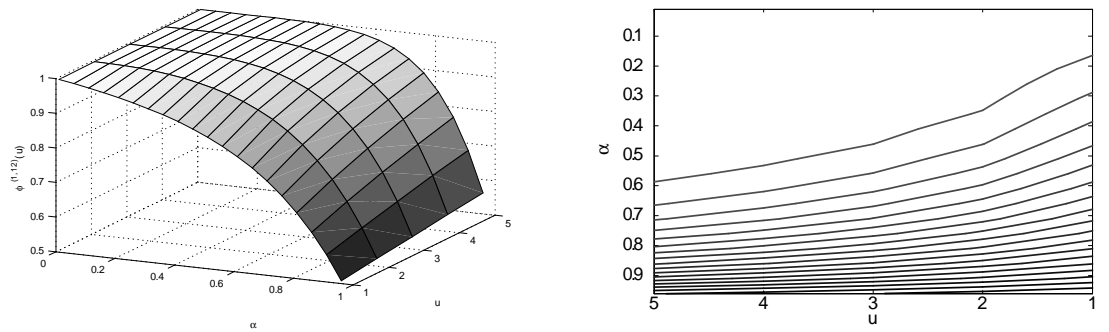
rum3'de hem de Durum4'de azaldığı görülmektedir.

Aşağıda u ve α 'nın belirli bir aralıktaki değişimi için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları $(\phi^{(1,n)}(u))$ Şekil 5.11-Şekil 5.14'de verilmiştir.



Şekil 5.11: Durum1 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları ve kontur gösterimi.

Durum1 düşünüldüğünde, u ve α 'nın belirli bir aralıktaki değişimi için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları ve bu yaşam olasılıklarının kontur gösterimi Şekil 5.11 verilmiştir. u sabit olarak düşünüldüğünde, Şekil 5.11'de α değeri arttıkça yaşam olasılığının azaldığı görülmektedir. Benzer biçimde α sabit olarak düşünüldüğünde, Şekil 5.11'de u değeri azaldıkça yaşam olasılığının da azaldığı görülmektedir.

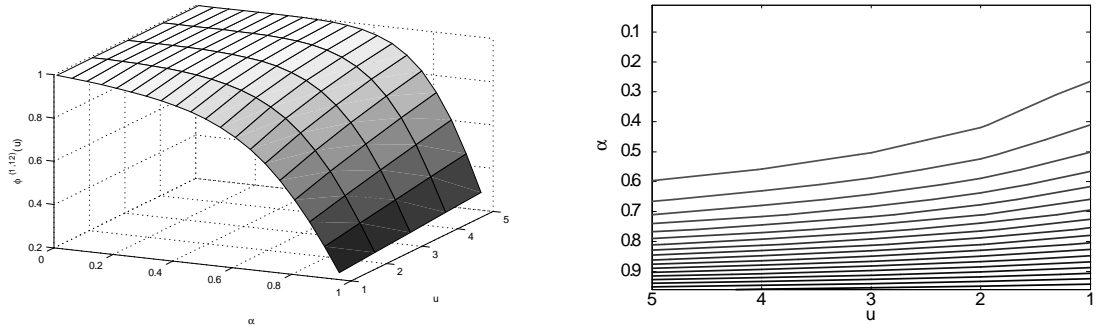


Şekil 5.12: Durum2 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları ve kontur gösterimi.

Durum2 düşünüldüğünde, u ve α 'nın belirli bir aralıktaki değişimi için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları ve bu yaşam olasılıklarının kontur gösterimi Şekil 5.12 verilmiştir.

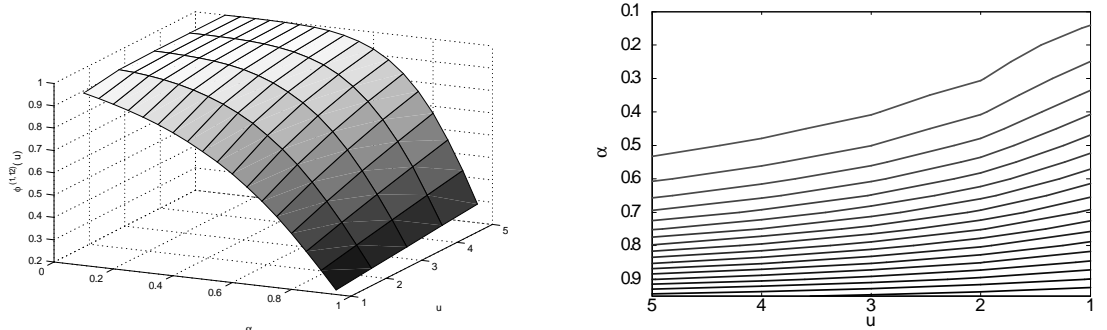
u sabit olarak düşünülürken, Şekil 5.12’de α değeri arttıkça yaşam olasılığının azaldığı görülmektedir. Benzer biçimde α sabit olarak düşünülürken, Şekil 5.12’de u değeri azaldıkça yaşam olasılığının da azaldığı görülmektedir.

Hasar oluşum olasılıklarının yapısı dikkate alındığında her u ve her α için Durum1’deki sonlu zamanlı yaşam olasılıklarının Durum2’deki sonlu zamanlı yaşam olasılıklarından daha büyük olduğu görülmektedir.



Şekil 5.13: Durum3 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları ve kontur gösterimi.

Durum3 düşünülürken, u ve α ’nın belirli bir aralıktaki değişimi için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları ve bu yaşam olasılıklarının kontur gösterimi Şekil 5.13 verilmiştir. u sabit olarak düşünülürken, Şekil 5.13’de α değeri arttıkça yaşam olasılığının azaldığı görülmektedir. Benzer biçimde α sabit olarak düşünülürken, Şekil 5.13’de u değeri azaldıkça yaşam olasılığının da azaldığı görülmektedir.



Şekil 5.14: Durum4 için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları ve kontur gösterimi.

Durum4 düşünöldüğünde, u ve α 'nın belirli bir aralıktaki değışimini için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları ve bu yaşam olasılıklarının kontur gösterimi Şekil 5.14 verilmiştir. u sabit olarak düşünöldüğünde, Şekil 5.14'de α değeri arttıkça yaşam olasılığının azaldığı görölmektedir. Benzer biçimde α sabit olarak düşünöldüğünde, Şekil 5.14'de u değeri azaldıkça yaşam olasılığının da azaldığı görölmektedir.

Hasar oluşum olasılıklarının yapısı dikkate alındığında her u ve her α için Durum3'deki sonlu zamanlı yaşam olasılıklarının Durum4'deki sonlu zamanlı yaşam olasılıklarından daha büyük olduğu görölmektedir.

N_n ve T r.d.'lerinin ortak dağılımı için Eryılmaz (2012)'de yinelemeli bir formöl elde etmiştir. Bu durumda

Teorem 5.2 $u = 1, 2, \dots$ ve $n \geq 0$ ise, $\beta(u; n, k) = P_u(N_n = k, T > n)$ olmak üzere

$$\beta(u; n, k) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \text{ ve } k = 0 \\ q^n & , n \geq k \text{ ve } k = 0 \\ \sum_{t=1}^n pq^{t-1} \sum_{x=1}^{u+1-x} f(x)\beta(u+t-x; n-t, k-1) & , n \geq k \text{ ve } k > 0 \end{cases} \quad (5.43)$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca $k = 0, 1, 2, \dots, n$ için (4.24) ve (5.43) ifadelerinden

$$P_u(N_n = k | T > n) = \frac{\beta(u; n, k)}{\phi(u, n)} \quad (5.44)$$

biçimindedir (Eryılmaz 2012).

Benzer olarak homojen olmayan hasar oluşumları için N_n ve T r.d.'lerinin ortak dağılımı için yinelemeli bir formöl elde edilebilir.

Teorem 5.3 $u = 1, 2, \dots$ ve $n \geq 0$ iken, $\beta^{(1,n)}(u; k) = P_u(N_n = k, T > n)$ olmak üzere

$$\beta^{(1,n)}(u; k) = \begin{cases} 1 & , n = 0, k = 0 \\ \prod_{i=1}^n q_i & , n \geq k, k = 0 \\ \sum_{t=1}^n p_t \prod_{i=1}^{t-1} q_i \sum_{x=1}^{u+t-1} f(x)\beta^{(t+1,n-t)}(u+t-x; k-1) & , n \geq k, k > 0 \end{cases} \quad (5.45)$$

biçimindedir. Ayrıca $k = 0, 1, 2, \dots, n$ için (4.24) ve (5.43) ifadelerinden

$$P_u(N_n = k | T > n) = \frac{\beta^{(1,n)}(u; k)}{\phi^{(1,n)}(u)} \quad (5.46)$$

biçiminde elde edilir.

İspat. $n = 0$ ve $k = 0$ için ispat açıktır. $n \geq k$ ve $k = 0$ için (5.1) eşitliğinden $P(I_1 = 0, \dots, I_n = 0) = \prod_{i=1}^n q_i$ elde edilir. $n \geq k$ ve $k > 0$ için, $t > n$ ve $k > 0$ iken $P_u(N_n = k, T > n | W_1 = t) = 0$ olmaktadır. n . zamandan sonra iflas meydana geldiğinden ve ilk hasarın geliş zamanı ve büyüklüğü üzerinden koşullandırma yapıldığında, $t \leq n$ için ilk hasar t zamanında geldiği için yani $(W_1 = t)$ rezerv $U_t > 0$ olduğu açıktır.

$$\begin{aligned}
P_u(N_n = k, T > n | W_1 = t) &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{x=1}^{\infty} (P_{u+t-x} u + t - X > 0, X = x, \\
&\quad N_{n-t}^{(t+1,n)} = k - 1, T^{(t+1,n)} > n - t) P(W_1 = t) \\
&= \sum_{t=1}^n \sum_{x=1}^{u+t-1} f(x) (P_{u+t-x}(N_{n-t}^{(t+1,n)} = k - 1, \\
&\quad T^{(t+1,n)} > n - t) P(W_1 = t) \tag{5.47}
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda

$$\beta^{(1,n)}(u; k) = \sum_{t=1}^n p_t \prod_{i=1}^{t-1} q_i \sum_{x=1}^{u+t-1} f(x) \beta^{(t+1,n-t)}(u+t-x; k-1) \tag{5.48}$$

elde edilir. ■

Teorem (5.3)' de verilen yinelemeli formül $n = 1, 2, 3$ için aşağıda hesaplanmıştır. $n = 0$ ve $k = 0, 1, 2, \dots$ $\beta^{(1,0)}(u; k) = 1$, $\beta^{(2,0)}(u; k) = 1$, $\beta^{(3,0)}(u; k) = 1$, $\beta^{(4,0)}(u; k) = 1$ olmaktadır.

$n = 1$ ve $k = 0$ için

$$\beta^{(1,1)}(u, 0) = q_1 \tag{5.49}$$

olmak üzere,

$n = 1$ ve $k = 1$ için

$$\begin{aligned}
\beta^{(1,1)}(u, 1) &= p_1 \sum_{x=1}^u f(x) \beta^{(2,0)}(u+1-x; k) \\
&= p_1 \sum_{x=1}^u f(x) \tag{5.50}
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

$n = 2$ ve $k = 0$ için

$$\beta^{(1,2)}(u, 0) = q_1 q_2 \quad (5.51)$$

$n = 2$ ve $k = 1$ için

$$\begin{aligned} \beta^{(1,2)}(u, 1) &= p_1 \sum_{x=1}^u f(x) \beta^{(2,1)}(u+1-x; 0) + q_1 p_2 \sum_{x=1}^{u+1} f(x) \beta^{(3,0)}(u+2-x; 0) \\ &= p_1 \sum_{x=1}^u f(x) [q_2] + q_1 p_2 \sum_{x=1}^{u+1} f(x) \end{aligned} \quad (5.52)$$

ve $n = 2, k = 2$ için

$$\begin{aligned} \beta^{(1,2)}(u, 1) &= p_1 \sum_{x=1}^u f(x) \beta^{(2,1)}(u+1-x; 1) + q_1 p_2 \sum_{x=1}^{u+1} f(x) \beta^{(3,0)}(u+2-x; 1) \\ &= p_1 \sum_{x=1}^u f(x) \left[p_2 \sum_{y=1}^{u+1-x} f(y) \right] + q_1 p_2 \sum_{x=1}^{u+1} f(x) \end{aligned} \quad (5.53)$$

biçiminde elde edilir.

$n = 3$ ve $k = 0$ için

$$\beta^{(1,3)}(u, 0) = q_1 q_2 q_3 \quad (5.54)$$

$n = 3$ ve $k = 1$ için

$$\begin{aligned} \beta^{(1,3)}(u, 1) &= p_1 \sum_{x=1}^u f(x) \beta^{(2,2)}(u+1-x; 0) + q_1 p_2 \sum_{x=1}^{u+1} f(x) \beta^{(3,1)}(u+2-x; 0) \\ &\quad + q_1 q_2 p_3 \sum_{x=1}^{u+2} f(x) \beta^{(4,0)}(u+3-x; 0) \\ &= p_1 \sum_{x=1}^u f(x) [q_2 q_3] + q_1 p_2 \sum_{x=1}^{u+1} f(x) [q_3] + q_1 q_2 p_3 \sum_{x=1}^{u+2} f(x) \end{aligned} \quad (5.55)$$

$n = 3$ ve $k = 2$ için

$$\begin{aligned} \beta^{(1,3)}(u, 2) &= p_1 \sum_{x=1}^u f(x) \beta^{(2,2)}(u+1-x; 1) + q_1 p_2 \sum_{x=1}^{u+1} f(x) \beta^{(3,1)}(u+2-x; 1) \\ &\quad + q_1 q_2 p_3 \sum_{x=1}^{u+2} f(x) \beta^{(4,0)}(u+3-x; 1) \\ &= p_1 \sum_{x=1}^u f(x) \left[p_2 q_3 \sum_{y=1}^{u+1-x} f(y) + q_2 p_3 \sum_{y=1}^{u+2-x} f(y) \right] \\ &\quad + q_1 p_2 \sum_{x=1}^{u+1} f(x) \left[p_3 \sum_{y=1}^{u+2-x} f(y) \right] + q_1 q_2 p_3 \sum_{x=1}^{u+2} f(x) \end{aligned} \quad (5.56)$$

$n = 3$ ve $k = 3$ iken, $\beta^{(3,1)}(u + 2 - x; 2) = 0$ olacağından

$$\begin{aligned}
\beta^{(1,3)}(u, 3) &= p_1 \sum_{x=1}^u f(x) \beta^{(2,2)}(u + 1 - x; 2) + q_1 p_2 \sum_{x=1}^{u+1} f(x) \beta^{(3,1)}(u + 2 - x; 2) \\
&\quad + q_1 q_2 p_3 \sum_{x=1}^{u+2} f(x) \beta^{(4,0)}(u + 3 - x; 2) \\
&= p_1 \sum_{x=1}^u f(x) \left[p_2 p_3 \sum_{y=1}^{u+1-x} f(y) \sum_{z=1}^{u+2-x-y} f(z) + q_2 p_3 \sum_{y=1}^{u+2-x} f(y) \right] \\
&\quad + q_1 q_2 p_3 \sum_{x=1}^{u+2} f(x) \tag{5.57}
\end{aligned}$$

biçimindedir.

5.1.2 Toplam hasar sayısının koşullu beklenen değeri

Hasar büyüklüğü $r.d$ 'nin dağılımının Geometrik dağılıma sahip olduğu varsayalım.

Bu durumda X $r.d$ 'nin olasılık ve dağılım fonksiyonları sırasıyla

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1 - \alpha) \alpha^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots \\
F(x) &= 1 - \alpha^x, \quad x = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

olmaktadır. Ayrıca

$$E(X) = \frac{1}{1 - \alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

biçimindedir. Bu durumda n zamanına kadar meydana gelen hasar sayısı N_n $r.d$ 'nin $T > n$ verildiğinde koşullu beklenen değeri tanımlanan 4 farklı durum ve farklı α parametreleri için aşağıda Çizelge 5.6'da verilmiştir.

Çizelge 5.6: Farklı α değerleri ve farklı u değerleri için $E(N_n|T > n)$

u	Durumlar	$\alpha = 1/5$	$\alpha = 3/5$	$\alpha = 4/5$
2	Durum1	0.7777	0.7463	0.6191
	Durum2	0.7708	0.6642	0.4925
	Durum3	1.7912	1.6399	1.2836
	Durum4	1.7855	1.5294	1.1404
4	Durum1	0.7773	0.7670	0.6674
	Durum2	0.7796	0.7320	0.5756
	Durum3	1.8067	1.7110	1.4019
	Durum4	1.7990	1.6581	1.3028
8	Durum1	0.7761	0.7730	0.7198
	Durum2	0.7788	0.7712	0.6767
	Durum3	1.7941	1.7687	1.5525
	Durum4	1.7937	1.7594	1.4956

Çizelge 5.6'da elde edilen beklenen değerler, bir sigorta şirketi için iflasın n zamanından sonra olduğu bilindiğinde n .periyodun sonunda ortalama kaç hasar ile karşılaşacağı hakkında bilgi vermektedir. Çizelge 5.6 incelendiğinde, tanımlanan 4 farklı durum için α parametresi artıktıkça belirlenen periyodun sonunda ortalama karşılaşılabilecek hasar sayısının azaldığı görülmektedir. u değeri artıktıkça ortalama karşılaşılabilecek hasar sayısının değerinin birbirine çok yakın olduğu görülmektedir. Hasar oluşum olasılıklarının farklı olduğu varsayımı altında, Durum1 ile Durum2 karşılaştırıldığında, n .periyodun sonunda ortalama karşılaşılabilecek hasar sayısının birbirine yakın olduğu ancak α parametresi artırıldıkça hasar oluşum olasılıklarının yapısından dolayı ortalama karşılaşılabilecek hasar sayısının Durum2'de daha fazla azaldığı görülmektedir. Benzer yorumlar Durum3 ve Durum4 için de yapılabilir. Bu durumda bir sigorta şirketi elde edilen bu beklenen değerler yardımıyla gelecekteki portföyünün yapısı hakkında fikir sahibi olabilecektir.

6. RISK REZERV SÜREÇLERİNİN UÇ DEĞERLERİ

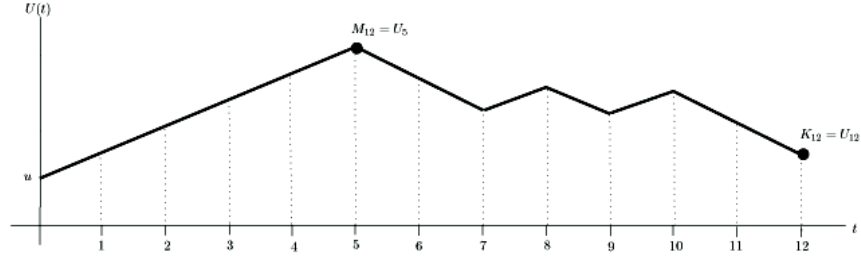
Önceki bölümde, hasar oluşum olasılıklarının homojen olmadığı durumda, iflas etmeme (yaşam) olasılığı için yinelemeli bir formül elde edilmiştir. Bu bölümde iflası etkileyen rezervin ulaştığı maksimum ve minimum seviyelerinin dağılımı ve dağılım özellikleri hasar oluşum olasılıklarının homojen olduğu durum için tanımlandıktan sonra homojen olmayan durumlar için incelenmiş ve sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

Aktüeryal risk teorisinde her sigorta şirketi kesikli ya da sürekli zamanlarda bir rezerv politikasına sahiptir. Bu rezerv politikasını modelleyebilmek için stokastik süreçler kullanılır ve buna rezerv süreci adı verilir. Bu rezerv süreci ile ilgili bazı risklerin minimum ve maksimum seviyeleri daima önemli olmuştur. Bileşik Binomial risk modelinde, rezervin maksimum ve minimum seviyeleri üzerinde durulmuş ve herhangi bir n zamanında bir sigorta şirketinin iflas etmediği varsayımı altında n zamana kadar rezerv sürecinde gerçekleşen uç seviyeleri dağılımları için sonuçlar elde edilmiştir. Belirtilen uç seviyeleri aşağıdaki gibi ifade edilmesiyle

$$M_n = \max_{1 \leq t \leq n} (U_t), K_n = \min_{1 \leq t \leq n} (U_t)$$

tanımlanan bu rasgele nicelikler herhangi bir sigorta şirketinin rezerv politikasını belirlenmiş herhangi bir n zaman diliminde davranışlarını inceleyebilmek için kullanışlıdır. Bir sigorta şirketinin rezerv sürecinin değeri sıfırın altına düştüğünde iflası gerçekleşmesine rağmen, pozitif bir eşik (threshold) değeriyle bu sigorta şirketinin belirli (özel) bir stratejisi için rezerv seviyesine bir bariyer konulabilir. Açıkcası bir sigorta şirketi rezerv politikası açısından belirli bir zaman dilimine kadar sabit bir k eşik altına rezervinin asla düşmemesini yani yaşaması olasılığını her zaman bilmek ister.

Rezerv seviyesinin dağılımı üzerine Dufrense ve Gerber (1988), Dickson (1992), Gerber ve Shiu (1997), Cheng ve Tang (2003), Dickson ve Drekić (2004) ve Eryılmaz vd. (2012) çalışmalar yayımlanmıştır.



Şekil 6.1: Sürecin basit bir gerçekleşmesi

6.1 Uç Değerlerin Dağılımları

Bir sigorta şirketinin rezerv süreci için Bileşik Binomial modelinde uç değerlerin dağılımı Eryılmaz vd. (2012) tarafından aşağıdaki gibi ifade etmişlerdir. $u = 1, 2, \dots$ ve $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned}\phi(u, n) &= P_u(T > n) \\ \theta(u; n, k) &= P_u(M_n \leq k, T > n) \\ \gamma(u; n, k) &= P_u(K_n \geq k, T > n)\end{aligned}$$

olmak üzere, ilk hasarın miktarı ve geliş zamanı üzerine koşullandırma yapıldığında

$$\phi(u, n) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \sum_{t=1}^n pq^{t-1} \sum_{x=1}^{u+t-1} f(x)\phi(u+t-x, n-t) + q^n & , n > 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

yinelemeli formül elde edilir (Egido Dos Reis 2004).

Teorem 6.1 $u = 1, 2, \dots$ için

$$P_u(M_n \leq k | T > n) = \frac{\theta(u; n, k)}{\phi(u; n)}$$

olmak üzere

- (a) $k \geq u + n$ ve $n \geq 0$ ise, $\theta(u; n, k) = \phi(u; n)$,
- (b) $u \leq k < u + n$ ve $n \geq 0$ iken,

$$\theta(u; n, k) = \sum_{t=1}^{k-u+1} pq^{t-1} \sum_{x=\max(1, u+t-k)}^{u+t-1} f(x)\theta(u+t-x; n-t, k) \quad (6.2)$$

Teorem 6.2 $u = 1, 2, \dots$ için

$$P_u(K_n \geq k | T > n) = \frac{\gamma(u; n, k)}{\phi(u; n)} \quad (6.3)$$

olmak üzere

(a) $k \leq n$ ve $n = 0$ ise, $\gamma(u; n, k) = 1$,

(b) $k \leq u + 1$ ve $n \geq 0$ iken,

$$\gamma(u; n, k) = \sum_{t=\max(1, u+t-k)}^n pq^{t-1} \sum_{x=1}^{u+t-k} f(x) \gamma(u+t-x; n-t, k) + q^n \quad (6.4)$$

Bu tez çalışmasında; uç değerlerin dağılımlarını belirlemede homojen olmayan hasar oluşumları durumunda Bileşik Binomial risk modelinde rezervin maksimum ve minimum seviyelerinin dağılımları için aşağıdaki teoremler elde edilmiştir. $u = 1, 2, \dots$ ve $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned} \phi^{(1,n)}(u) &= P_u(T > n) \\ \theta^{(1,n)}(u; k) &= P_u(M_n \leq k, T > n) \\ \gamma^{(1,n)}(u; k) &= P_u(K_n \geq k, T > n) \end{aligned}$$

Teorem 6.3 $u = 1, 2, \dots$ için

$$P_u(M_n \leq k | T > n) = \frac{\theta^{(1,n)}(u; k)}{\phi^{(1,n)}(u)} \quad (6.5)$$

olmak üzere

(a) $k \geq u + n$ ve $n \geq 0$ ise, $\theta^{(1,n)}(u; k) = \phi^{(1,n)}(u)$,

(b) $u \leq k < u + n$ ve $n \geq 0$ iken,

$$\theta^{(1,n)}(u; k) = \sum_{t=1}^{k-u+1} p_t \prod_{i=1}^{t-1} q_i \sum_{x=\max(1, u+t-k)}^{u+t-1} f(x) \theta^{(t+1, n-t)}(u+t-x; k) \quad (6.6)$$

biçimindedir.

İspat. $k \geq u + n$ için $P_u(M_n \leq k | T > n) = 1$ olacağı açıktır. Dolayısıyla $\theta^{(1,n)}(u; k) = \phi^{(1,n)}(u)$ kolayca elde edilebilir. Eğer $u \leq k < u + n$ ve $n \geq 0$ ise ilk hasarın geliş zamanı üzerinden koşullandırma yapıldığında, burada $P(W_1 = t) = \prod_{i=1}^{t-1} q_i p_t$ iken

$$P_u(M_n \leq k, T > n) = \sum_{t=1}^{\infty} P_u(U_1 \leq k, \dots, U_n \leq k | W_1 = t) P(W_1 = t) \quad (6.7)$$

$t \leq n$ ise yani ilk hasar t zamanında ya da daha önce gelmesi durumunda rezervin alabileceği değerler $P_u(U_1 = u + 1, \dots, U_{t-1} = u + t - 1) = 1$ biçiminde elde edilir. Bu durumda ilk hasarın geliş zamanı üzerinden koşullandırma yapıldığında

$$P_u(U_1 \leq k, \dots, U_n \leq k | W_1 = t) = P_u(U_t \leq k, \dots, U_n \leq k, T > n - t) \quad (6.8)$$

$t \leq k - u + 1$ ise n . zamandan sonra iflas olayı gerçekleşeceği için $t \leq n$ olması durumunda $U_t > 0$ olacağı açıktır. Bu durumda ilk hasarın geliş zamanı ve büyüklüğü üzerinden koşullandırma yapıldığında

$$\begin{aligned} P_u(U_t \leq k, \dots, U_n \leq k, T > n - t | W_1 = t) &= \sum_{x=1}^{\infty} P_u(u + t - X > 0, X = x, \\ &M_{n-t}^{(t+1,n)} \leq k, T^{(t+1,n)} > n - t) \\ &= \sum_{x=\max(1, u+t-k)}^{u+t-1} f(x) P_u\left(M_{n-t}^{(t+1,n)} \leq k, \right. \\ &\left. T^{(t+1,n)} > n - t\right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

elde edilir. Böylece $t \leq n$ için $u + t - k \leq 1$ olur. Bu durumda $x = 1 \Rightarrow u + t - k \leq 1$ olacağı açıktır. Dolayısıyla alt sınır $\max(1, u + t - k)$ biçiminde ifade edilir. $t > n$ için $P(M_n = u + n) = 1$ olacağından $P(M_n \leq k, T > n) = 0$ biçimindedir. Böylece (6.8) ve (6.9) eşitliklerinden

$$\theta^{(1,n)}(u; k) = \sum_{t=1}^{k-u+1} p_t \prod_{i=1}^{t-1} q_i \sum_{x=\max(1, u+t-k)}^{u+t-1} f(x) \theta^{(t+1, n-t)}(u + t - x; k) \quad (6.10)$$

elde edilir. ■

Teorem 6.3'de verilen yenilemeli formül $n = 1, 2, 3$ zaman periyotları için aşağıda hesaplanmıştır.

$n = 1$ ve $u \leq k < u + 1$ için

$$\theta^{(1,1)}(u; k) = \frac{p_1 \sum_{x=u+1-k}^u f(x)}{\phi^{(1,1)}(u)} \quad (6.11)$$

$n = 2$ ve $u \leq k < u + 2$ için

$$\theta^{(1,2)}(u; k) = \begin{cases} \frac{1}{\phi^{(1,2)}(u)} [A_1] & , u = k \\ \frac{1}{\phi^{(1,2)}(u)} [A_2] & , u + 1 \leq k \end{cases} \quad (6.12)$$

Eşitlik (6.12)'de verilen A_1 ve A_2 ifadelerinin açık hali aşağıda belirtilmiştir.

$$\begin{aligned}
A_1 &= p_1 p_2 \sum_{x=\max(1, u+1-k)}^u f(x) \sum_{y=\max(1, u+2-k-x)}^{u+1-x} f(y) + p_1 q_2 \sum_{x=\max(1, u+2-k)}^u f(x). \\
A_2 &= p_1 p_2 \sum_{x=\max(1, u+1-k)}^u f(x) \sum_{y=\max(1, u+2-k-x)}^{u+1-x} f(y) \\
&\quad + p_1 q_2 \sum_{x=\max(1, u+2-k)}^u f(x) + q_1 p_2 \sum_{x=\max(1, u+2-k)}^{u+1} f(x).
\end{aligned}$$

$n = 3$ ve $u \leq k < u + 3$ için

$$\theta^{(1,3)}(u; k) = \begin{cases} \frac{1}{\phi^{(1,3)}(u)} [A_3] & , u = k \\ \frac{1}{\phi^{(1,3)}(u)} [A_4] & , k \leq u + 1 \\ \frac{1}{\phi^{(1,3)}(u)} [A_5] & , k \leq u + 2 \end{cases} \quad (6.13)$$

(6.13)'de verilen A_3 ifadesi

$$\begin{aligned}
A_3 &= p_1 p_2 p_3 \sum_{x=\max(1, u+1-k)}^u f(x) \sum_{y=\max(1, u+2-k-x)}^{u+1-x} f(y) \sum_{z=\max(1, u+3-k-x-y)}^{u+2-x-y} f(z) \\
&\quad + p_1 p_2 q_3 \sum_{x=\max(1, u+1-k)}^u f(x) \sum_{y=\max(1, u+3-k-x)}^{u+1-x} f(y) \\
&\quad + p_1 q_2 p_3 \sum_{x=\max(1, u+2-k)}^u f(x) \sum_{y=\max(1, u+2-k-x)}^{u+2-x} f(y) \\
&\quad + p_1 q_2 q_3 \sum_{x=\max(1, u+3-k)}^u f(x).
\end{aligned}$$

biçiminde iken A_4 ifadesi

$$\begin{aligned}
A_4 &= p_1 p_2 p_3 \sum_{x=\max(1, u+1-k)}^u f(x) \sum_{y=\max(1, u+2-k-x)}^{u+1-x} f(y) \sum_{z=\max(1, u+3-k-x-y)}^{u+2-x-y} f(z) \\
&\quad + p_1 p_2 q_3 \sum_{x=\max(1, u+1-k)}^u f(x) \sum_{y=\max(1, u+3-k-x)}^{u+1-x} f(y) \\
&\quad + p_1 q_2 q_3 \sum_{x=\max(1, u+3-k)}^u f(x) + q_1 p_2 q_3 \sum_{x=\max(1, u+3-k)}^{u+1} f(x) \\
&\quad + p_1 q_2 p_3 \sum_{x=\max(1, u+2-k)}^u f(x) \sum_{y=\max(1, u+2-k-x)}^{u+2-x} f(y) \\
&\quad + q_1 p_2 p_3 \sum_{x=\max(1, u+2-k)}^{u+1} f(x) \sum_{y=\max(1, u+3-k-x)}^{u+2-x} f(y).
\end{aligned}$$

biçiminde ve A_5 ifadesi ise

$$\begin{aligned}
A_5 = & p_1 p_2 p_3 \sum_{x=\max(1, u+1-k)}^u f(x) \sum_{y=\max(1, u+2-k-x)}^{u+1-x} f(y) \sum_{z=\max(1, u+3-k-x-y)}^{u+2-x-y} f(z) \\
& + p_1 q_2 q_3 \sum_{x=\max(1, u+3-k)}^u f(x) + q_1 p_2 q_3 \sum_{x=\max(1, u+2-k)}^{u+2} f(x) \\
& + p_1 q_2 p_3 \sum_{x=\max(1, u+2-k)}^u f(x) \sum_{y=\max(1, u+2-k-x)}^{u+2-x} f(y) \\
& + q_1 p_2 p_3 \sum_{x=\max(1, u+2-k)}^{u+1} f(x) \sum_{y=\max(1, u+3-k-x)}^{u+2-x} f(y) \\
& + p_1 p_2 q_3 \sum_{x=\max(1, u+1-k)}^u f(x) \sum_{y=\max(1, u+3-k-x)}^{u+1-x} f(y).
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 6.4 $u = 1, 2, \dots$ için

$$P_u(K_n \geq k \mid T > n) = \frac{\gamma^{(1,n)}(u; k)}{\phi^{(1,n)}(u)} \quad (6.14)$$

olmak üzere

(a) $k \leq n$ ve $n = 0$ ise, $\gamma^{(1,n)}(u; k) = 1$,

(b) $k \leq u + 1$ ve $n \geq 0$ iken,

$$\begin{aligned}
\gamma^{(1,n)}(u; k) = & \sum_{t=1}^{u+t-k} p_t \prod_{i=1}^{t-1} q_i \sum_{x=\max(1, k-u+1)}^n f(x) \gamma^{(t+1, n-t)}(u+t-x; k) \\
& + \sum_{t=n+1}^{\infty} p_t \prod_{i=1}^{t-1} q_i
\end{aligned} \quad (6.15)$$

biçimindedir.

İspat. $k \leq n$ ve $n = 0$ için ispat açıktır. $k \leq u + 1$ ise ilk hasarın geliş zamanı üzerinden koşullandırma yapıldığında $P(W_1 = t) = \prod_{i=1}^{t-1} q_i p_t$ olmak üzere

$$P_u(K_n \geq k \mid T > n) = \sum_{t=1}^{\infty} P_u(U_1 \geq k, \dots, U_n \geq k \mid W_1 = t) P(W_1 = t) \quad (6.16)$$

$t \leq n$ ve $k \leq u + 1$ ise

$$P_u(U_1 \geq k, \dots, U_{t-1} \geq k \mid W_1 = t) = 1 \quad (6.17)$$

ve $P_u(U_1 \geq k, \dots, U_{t-1} \geq k, T > n \mid W_1 = t) = P_u(U_t \geq k, \dots, U_n \geq k, T > n - t \mid W_1 = t)$ biçiminde ifade edilebilir. Eğer $t > n$ ve $k \leq u + 1$ için

$$P_u(U_1 \geq k, \dots, U_n \geq k \mid W_1 = t) = 1 \quad (6.18)$$

olacağı açıktır. $t \leq n$ ve $k \leq u + 1$ için ilk hasarın geliş zamanı üzerinden koşullandırma yapıldığında

$$P_u(U_t \geq k, \dots, U_n \geq k, T > n - t | W_1 = t) = \sum_{x=1}^{u+t-k} P_u \left(K_{n-t}^{(t+1,n)} \geq k, T^{(t+1,n)} > n - t \right) \quad (6.19)$$

Bu durumda (6.17),(6.18),(6.19) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \gamma^{(1,n)}(u; k) &= \sum_{t=1}^{u+t-k} p_t \prod_{i=1}^{t-1} q_i \sum_{x=\max(1, k-u+1)}^n f(x) \gamma^{(t+1, n-t)}(u+t-x; k) \\ &+ \sum_{t=n+1}^{\infty} p_t \prod_{i=1}^{t-1} q_i \end{aligned} \quad (6.20)$$

elde edilir. ■

Teorem 6.4'de verilen yinelemeli formül $n = 1, 2, 3$ zaman periyotları için aşağıda hesaplanmıştır.

$n = 1$ için

$$\gamma^{(1,1)}(u; k) = \begin{cases} 1 & , k = u + 1 \\ \frac{1}{\phi^{(1,1)}(u)} [a_1] & , k < u + 1 \end{cases} \quad (6.21)$$

(6.21)'de verilen a_1 ifadesi

$$a_1 = p_1 \sum_{x=1}^{u+1-k} f(x) + q_1$$

$n = 2$ için

$$\gamma^{(1,2)}(u; k) = \begin{cases} \frac{1}{\phi^{(1,2)}(u)} [a_2] & , k = u + 1 \\ \frac{1}{\phi^{(1,2)}(u)} [a_3] & , k < u + 1 \end{cases} \quad (6.22)$$

(6.22)'de verilen a_2 ifadesi

$$a_2 = q_1 p_2 \sum_{x=1}^{u+2-k} f(x) + q_1 q_2.$$

biçiminde iken a_3 ifadesi

$$a_3 = p_1 p_2 \sum_{x=1}^{u+1-k} f(x) \sum_{y=1}^{u+2-x-k} f(y) + p_1 q_2 \sum_{x=1}^{u+1-k} f(x) + q_1 p_2 \sum_{x=1}^{u+2-k} f(x) + q_1 q_2.$$

biçiminde elde edilebilir.

$n = 3$ için

$$\gamma^{(1,3)}(u; k) = \begin{cases} \frac{1}{\phi^{(1,3)}(u)} [a_4] & , k = u + 1 \\ \frac{1}{\phi^{(1,3)}(u)} [a_5] & , k < u + 1 \end{cases} \quad (6.23)$$

(6.23)'de verilen a_4 ifadesi

$$a_4 = q_1 q_2 p_3 \sum_{y=1}^{u+3-k-x} f(y) + q_1 p_2 p_3 \sum_{x=1}^{u+2-k} f(x) \sum_{y=1}^{u+3-k-x} f(y) \\ + q_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 \sum_{y=1}^{u+2-k} f(y).$$

biçiminde iken a_5 ifadesi

$$a_5 = p_1 p_2 p_3 \sum_{x=1}^{u+1-k} f(x) \sum_{y=1}^{u+2-k-x} f(y) \sum_{z=1}^{u+3-k-x-y} f(z) \\ + p_1 q_2 q_3 \sum_{x=1}^{u+1-k} f(x) + p_1 q_2 p_3 \sum_{x=1}^{u+1-k} f(x) \sum_{y=1}^{u+3-k-x} f(y) \\ + p_1 p_2 q_3 \sum_{x=1}^{u+1-k} f(x) \sum_{y=1}^{u+2-k-x} f(y) + q_1 q_2 p_3 \sum_{y=1}^{u+3-k} f(y) \\ + q_1 p_2 q_3 \sum_{x=1}^{u+2-k} f(x) + q_1 p_2 p_3 \sum_{x=1}^{u+2-k} f(x) \sum_{y=1}^{u+3-k-x} f(y) \\ + q_1 q_2 q_3.$$

biçiminde elde edilebilir.

6.2 Homojen Olmayan Durumda Rezervin Uç Değerleri için Sayısal Hesaplamalar

Hasar büyüklüğü r.d'nin dağılımının Geometrik dağılıma sahip olduğu varsayalım.

Bu durumda X r.d'nin olasılık ve dağılım fonksiyonları sırasıyla

$$f(x) = (1 - \alpha)\alpha^{x-1} \quad , x = 1, 2, \dots \\ F(x) = 1 - \alpha^x \quad , x = 1, 2, \dots$$

olmaktadır. Ayrıca

$$E(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \quad , 0 < \alpha < 1$$

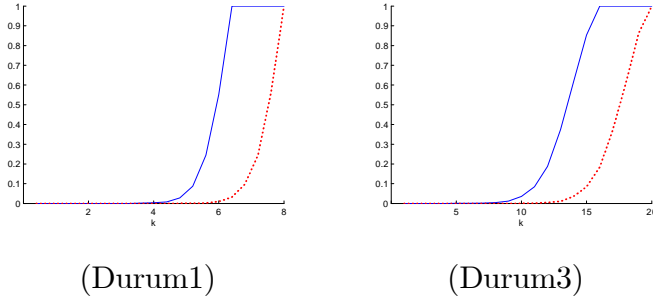
biçimindedir. M_n ve K_n r.d'lerinin farklı α değerleri ve tanımlanan 4 farklı durum için koşullu beklenen değerleri ve koşullu varyansları aşağıdaki çizelgelerde verilmiştir. $\mu_1 = E(M_n|T > n)$, $\sigma_1^2 = Var(M_n|T > n)$, $\mu_2 = E(K_n|T > n)$, $\sigma_2^2 = Var(K_n|T > n)$ ve $n = 12$.

M_n ve K_n r.d'lerinin farklı α değerleri ve farklı durumlar için aşağıda birikimli dağılım fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Tüm grafiklerde düz çizgili (Mavi) ile $u = 4$, kesikli çizgili (Kırmızı) ile $u = 8$ başlangıç rezervleri ele alınmıştır.

Çizelge 6.1: $\alpha = 1/5$ iken M_n ve K_n 'nin Beklenen değer ve Varyans değerleri

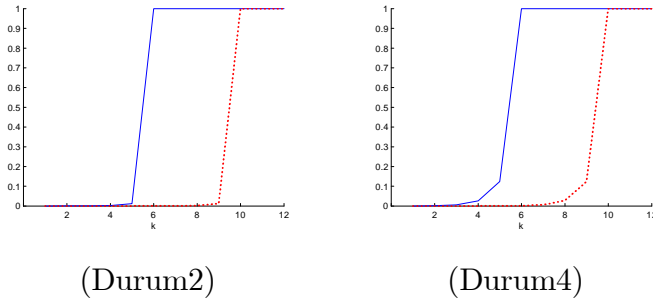
u	Durumlar	μ_1	σ_1^2	μ_2	σ_2^2
4	Durum1	15.0645	1.1997	4.9845	0.0224
	Durum2	15.0330	1.3289	4.9846	0.0225
	Durum3	13.8277	2.5608	4.8412	0.2180
	Durum4	13.7895	2.7325	4.8409	0.2185
8	Durum1	19.0685	1.1925	8.9943	0.0233
	Durum2	19.0310	1.3353	8.9842	0.0232
	Durum3	17.8338	2.5555	8.8389	0.2283
	Durum4	17.7841	2.7568	8.8406	0.2244

$u = 4$ ve $u = 8$ için hasar büyüklüğü α parametrelili Geometrik dağılıma sahip iken, seçilen α parametresine karşılık önceden belirlenen farklı 4 durum için rezerv süreci (4.12)'deki gibi düşünülürken, rezerv seviyesinin uç değerlerinin Beklenen değer ve Varyansı hesaplanarak Çizelge 6.1 oluşturulmuştur. Buna göre $\alpha = 1/5$ iken her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum1'deki gibi düşünülürken, $u = 4$ iken $\mu_1 = 15.0645$, $\sigma_1^2 = 1.1997$, $\mu_2 = 4.9845$, $\sigma_2^2 = 0.0224$ olarak hesaplanırken $u = 8$ için $\mu_1 = 19.0685$, $\sigma_1^2 = 1.1925$, $\mu_2 = 8.9943$, $\sigma_2^2 = 0.0233$ olmaktadır. Bu durumda $\alpha = 1/5$ iken rezervin uç seviyelerinin Beklenen değer ve Varyans değerlerinin Durum1'deki gibi hasar oluşumları düşünülürken, başlangıç rezervi (u) arttıkça hesaplanan değerlerin arttığı gözlenmektedir. Benzer yorumlar diğer durumlar için de yapılabilir.



Şekil 6.2: $\alpha = 1/5$ iken Durum1 ve Durum3 için $T > n$ verildiğinde M_n 'in birikimli dağılım fonksiyonu

Şekil 6.2'de $T > n$ verildiğinde M_n r.d'lerinin $\alpha = 1/5$ iken Durum1 ve Durum3 için birikimli dağılım fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Düz çizgili (Mavi) ile $u = 4$, kesikli çizgili (Kırmızı) ile $u = 8$ başlangıç rezervleri ele alınarak grafikler oluşturulmuştur.



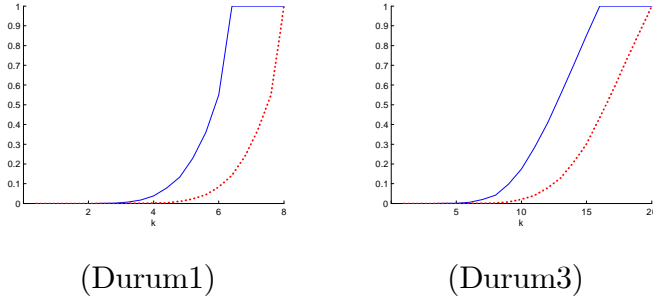
Şekil 6.3: $\alpha = 1/5$ iken Durum2 ve Durum4 için $T > n$ verildiğinde K_n 'in birikimli dağılım fonksiyonu

Şekil 6.3'de $T > n$ verildiğinde K_n r.d'lerinin $\alpha = 1/5$ iken Durum2 ve Durum4 için birikimli dağılım fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Düz çizgili (Mavi) ile $u = 4$, kesikli çizgili (Kırmızı) ile $u = 8$ başlangıç rezervleri ele alınarak grafikler oluşturulmuştur.

Çizelge 6.2: $\alpha = 3/5$ iken M_n ve K_n 'nin Beklenen değer ve Varyans değerleri

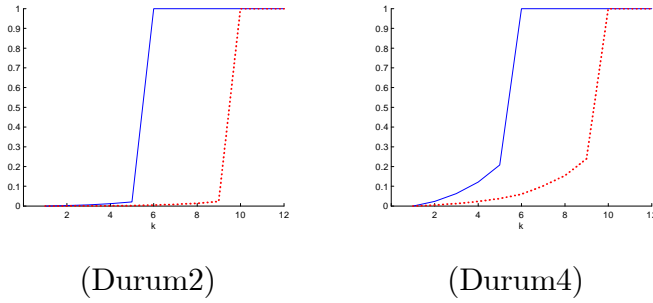
u	Durumlar	μ_1	σ_1^2	μ_2	σ_2^2
4	Durum1	14.5800	3.1814	4.9586	0.0994
	Durum2	14.4732	3.8472	4.9588	0.0987
	Durum3	12.8765	5.5644	4.5876	0.8871
	Durum4	12.7588	6.3035	4.5831	0.8899
8	Durum1	18.5219	3.5360	8.9403	0.2077
	Durum2	18.2375	5.2603	8.9411	0.2038
	Durum3	16.6304	6.8058	8.3714	2.0373
	Durum4	16.2703	8.7238	8.3705	2.0378

$u = 4$ ve $u = 8$ için hasar büyüklüğü α parametrelili Geometrik dağılıma sahip iken, seçilen α parametresine karşılık önceden belirlenen farklı 4 durum için rezerv süreci (4.12)'deki gibi düşünülendiğinde, rezerv seviyesinin uç değerlerinin Beklenen değer ve Varyansı hesaplanarak Çizelge 6.2 oluşturulmuştur. Buna göre $\alpha = 3/5$ iken her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum1'deki gibi düşünülendiğinde, $u = 4$ iken $\mu_1 = 14.5800$, $\sigma_1^2 = 3.1814$, $\mu_2 = 4.9586$, $\sigma_2^2 = 0.0994$ olarak hesaplanırken $u = 8$ için $\mu_1 = 18.5219$, $\sigma_1^2 = 3.5360$, $\mu_2 = 8.9403$, $\sigma_2^2 = 0.2077$ olmaktadır. Bu durumda $\alpha = 3/5$ iken rezervin uç seviyelerinin Beklenen değer Varyans değerlerinin Durum1'deki gibi hasar oluşumları düşünülendiğinde, başlangıç rezervi (u) arttıkça hesaplanan değerlerin arttığı gözlenmektedir. Benzer yorumlar diğer durumlar için de yapılabilir.



Şekil 6.4: $\alpha = 3/5$ iken Durum1 ve Durum3 için $T > n$ verildiğinde M_n 'in birikimli dağılım fonksiyonu

Şekil 6.4'de $T > n$ verildiğinde M_n r.d'lerinin $\alpha = 3/5$ iken Durum1 ve Durum3 için birikimli dağılım fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Düz çizgili (Mavi) ile $u = 4$, kesikli çizgili (Kırmızı) ile $u = 8$ başlangıç rezervleri ele alınarak grafikler oluşturulmuştur.



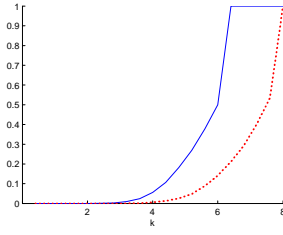
Şekil 6.5: $\alpha = 3/5$ iken Durum2 ve Durum4 için $T > n$ verildiğinde K_n 'in birikimli dağılım fonksiyonu

Şekil 6.5'de $T > n$ verildiğinde M_n r.d'lerinin $\alpha = 3/5$ iken Durum2 ve Durum4 için birikimli dağılım fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Düz çizgili (Mavi) ile $u = 4$, kesikli çizgili (Kırmızı) ile $u = 8$ başlangıç rezervleri ele alınarak grafikler oluşturulmuştur.

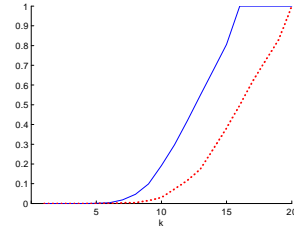
Çizelge 6.3: $\alpha = 4/5$ iken M_n ve K_n 'nin Beklenen değer ve Varyans değerleri

u	Durumlar	μ_1	σ_1^2	μ_2	σ_2^2
4	Durum1	14.4605	4.0251	4.9394	0.1647
	Durum2	14.4218	4.8037	4.9396	0.1640
	Durum3	12.9006	6.0185	4.4423	1.2766
	Durum4	12.8067	7.1019	4.4491	1.2596
8	Durum1	18.2113	5.2758	8.8705	0.5979
	Durum2	17.8063	8.1536	8.8708	0.5945
	Durum3	16.2392	8.4067	7.7815	4.6474
	Durum4	15.7435	11.0184	7.7872	4.6236

$u = 4$ ve $u = 8$ için hasar büyüklüğü α parametrelili Geometrik dağılıma sahip iken, seçilen α parametresine karşılık önceden belirlenen farklı 4 durum için rezerv süreci (4.12)'deki gibi düşünülürken, rezerv seviyesinin uç değerlerinin Beklenen değer ve Varyansı hesaplanarak Çizelge 6.3 oluşturulmuştur. Buna göre $\alpha = 4/5$ iken her dönemde hasar oluşum olasılıkları Durum1'deki gibi düşünülürken, $u = 4$ iken $\mu_1 = 14.4605$, $\sigma_1^2 = 4.0251$, $\mu_2 = 4.9394$, $\sigma_2^2 = 0.1647$ olarak hesaplanırken $u = 8$ için $\mu_1 = 18.2113$, $\sigma_1^2 = 5.2758$, $\mu_2 = 8.8705$, $\sigma_2^2 = 0.5979$ olmaktadır. Bu durumda $\alpha = 4/5$ iken rezervin uç seviyelerinin Beklenen değer ve Varyans değerlerinin Durum1'deki gibi hasar oluşumları düşünülürken, başlangıç rezervi (u) arttıkça hesaplanan değerlerin arttığı gözlenmektedir. Benzer yorumlar diğer durumlar içinde yapılabilir.



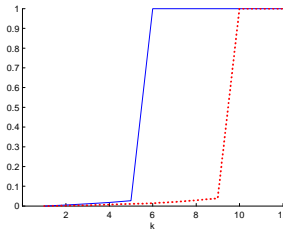
(Durum1)



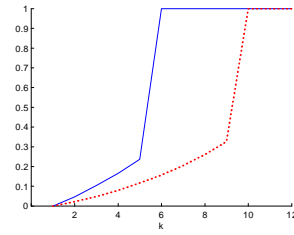
(Durum3)

Şekil 6.6: $\alpha = 4/5$ iken Durum1 ve Durum3 için $T > n$ verildiğinde M_n 'in birikimli dağılım fonksiyonu

Şekil 6.6'da $T > n$ verildiğinde M_n r.d'lerinin $\alpha = 4/5$ iken Durum1 ve Durum3 için birikimli dağılım fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Düz çizgili (Mavi) ile $u = 4$, kesikli çizgili (Kırmızı) ile $u = 8$ başlangıç rezervleri ele alınarak grafikler oluşturulmuştur.



(Durum2)



(Durum4)

Şekil 6.7: $\alpha = 4/5$ iken Durum2 ve Durum4 için $T > n$ verildiğinde K_n 'in birikimli dağılım fonksiyonu

Şekil 6.7'de $T > n$ verildiğinde M_n r.d'lerinin $\alpha = 4/5$ iken Durum2 ve Durum4 için birikimli dağılım fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Düz çizgili (Mavi) ile $u = 4$, kesikli çizgili (Kırmızı) ile $u = 8$ başlangıç rezervleri ele alınarak grafikler oluşturulmuştur.

Çizelge 6.1, Çizelge 6.2 ve Çizelge 6.3'de n zamanında iflasın gerçekleşeceği koşulu altında, rezervin ulaşabileceği maksimum ve minimum seviyelerinin Beklenen değer ve Varyansı önceden belirlenen 4 farklı durum için hesaplanmıştır. Bu değerler sigorta şirketinin mali durumunu incelemesi için elindeki rezerv ile karşılaştırma yapmasını olanak sağlamaktadır.

Şekil 6.2, Şekil 6.4 ve Şekil 6.6'da farklı α parametreleri ve farklı u değerleri için belirli bir n zamanından sonra iflasın gerçekleştiği bilindiğinde n zamanında rezervin maksimum seviyesinin k eşliğinin altında kalmasının birikimli dağılım fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Şekil 6.3, Şekil 6.5 ve Şekil 6.7'de farklı α parametreleri ve farklı u değerleri için belirli bir n zamanından sonra iflasın gerçekleştiği bilindiğinde n zamanında rezervin minimum seviyesinin k eşliğinin üzerinde kalmasının birikimli dağılım fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

7. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bir sigorta şirketinin yaşamasını sürdürmesi her bir dönem elinde bulunan rezervine bağlıdır. Sigorta şirketi bu sebepten dolayı elindeki rezervi çeşitli yatırım araçları yardımıyla artırmaya çalışmaktadır. Sigorta şirketinin rezerv seviyesi hem şirketin sigorta işine başlamadan önceki başlangıç rezervine hem müşterilerinden toplamış olduğu prime hem de müşterilerine yapmış olduğu ödemelere bağlıdır. Başlangıç rezervinin ve topladığı primlerin sabit olduğu varsayımı altında rezerv seviyesini etkileyen en önemli faktör müşterilerine yapmış olduğu hasar ödemeleri olmaktadır.

Genellikle sigorta şirketinin portföyündeki risklerin sigorta şirketine hasar gelmesi olasılıkları yani hasar oluşum olasılıkları her bir dönem için aynı olduğu varsayılmaktadır. Ancak bu çok da gerçekçi bir yaklaşım olmamaktadır. Örneğin araçların mevsimlere göre hasar yapması farklı olasılıklar ile meydana gelmektedir. Böyle bir durumda kasko sigortası satan sigorta şirketinin, mevsimlere göre hasar oluşum olasılıklarını sabit olarak düşünmesi rezervini finansal olarak iyi yönetememesine sebep olmaktadır. Dolayısıyla sigorta şirketinin iflas etmesi veya buna bağlı olarak yaşamını sürdürmesi olasılığı doğru bir şekilde hesaplanamamaktadır.

Bu çalışmada; kesikli zamanlı risk modelinin özel hali olan Bileşik Binomial risk modelinde, homojen olmayan hasar oluşum olasılıkları ile farklı başlangıç rezervleri ile sabit prim getirisi varsayımı altında sonlu zamanlı yaşam olasılıkları için yinelemeli bir formül elde edilmiştir. Elde edilen bu yinelemeli formül yardımıyla, homojen olmayan hasar oluşum olasılıklarının olduğu dört farklı durum için sonlu zamanlı yaşam olasılıkları çizelgelerde verilerek, sigorta şirketinin finansal durumunu değerlendirmesi için çeşitli imkanlar sağlanmıştır. Ayrıca kesikli zamanlı risk modelinin özel hali olan Bileşik Binomial risk modelinde, homojen olmayan hasar oluşum olasılıkları için sigorta şirketinin rezerv seviyesinin uç değerlerinin dağılımı ve bu dağılımların çeşitli karakteristikleri elde edilmiştir.

Bundan sonra yapılacak olan çalışmalarda, toplanan primlerden elde edilecek olan getirinin stokastik olarak ele alınıp Bileşik Binomial risk modelinde, homojen olmayan hasar oluşum olasılıkları incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Andersen, E.S. 1957. On the collective theory of risk in case of contagion between claims. Transactions XV International Congress of Actuaries, Vol. 2, no.6, pp. 219-229.
- Asmussen, S. Albrecher, H. 2010. Second Edition. Ruin Probabilities. World Scientific, 602 s., Singapore.
- Beekman, J.A. 1974. Two Stochastic Processes. Almqvist and Wilsell International, 176 s., Stocholm.
- Boland, J.P. 2006. Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science. Chapman and Hall, 352 s., New York.
- Bühlman, H. 1970. Mathematical Methods in Risk Theory. Springer-Verlang, 210 s., New York.
- Cheng, S., Gerber, H.U., Shiu, E.S.W. 2000. Discounted probabilities and ruin theory in the compound Binomial model. Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 26, no. 2-3, pp. 239-250.
- Cheng, S., and Tang, Q. 2003. Moments of surplus before ruin and deficit at ruin in the Erlang(2) risk process. North American Actuarial Journal, Vol. 7, no. 1, pp. 1-12.
- Cordoso, R.M.R. and Egido Dos Reis, A.D. 2001. Recursive calculation of time to ruin distribution. Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 30, no. 2, pp. 219-230.
- Cossette, H., Landriault, D., Marceau, E. 2003. Ruin probabilities in the compound Markov Binomial model. Scandinavian Actuarial Journal, Vol. 4. 301-323.
- Cossette, H., Landriault, D., Marceau, E. 2004. The compound Binomial model defined in a markovian environment. Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 35, no. 2, pp. 425-443.
- Cossette, H., Landriault, D., Marceau, E. 2006. Ruin probabilities in the discrete-time renewal risk model. Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 38, no. 2, pp 309-323.
- Cossette, H. and Marceau, E., 2000. The discrete-time risk model with correlated classes of business. Insurance: Mathematics and Economics, Vol 26, no. 2, pp. 133-149.
- De Vylder, F. and Goovaerts, M.J. 1984. Bounds for classical ruin probabilities. Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 3, no. 2, pp. 121-131.
- De Vylder, F. and Goovaerts, M.J. 1988. Recursive calculation of finite time ruin probabilities. Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 7, no. 1, pp. 1-7.

- De Vylder, F. and Marceau, E. 1996. Classical numerical ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal. Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 2, pp. 109-123.
- Dickson, D.C.M. and Waters, H.R. 1991. Recursive calculation of survival probability. *Astin Bulletin*, Vol. 21, no. 2, pp. 199-221.
- Dickson, D.C.M. 1992. On the distribution of the surplus prior to ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 11, no. 3, pp. 191–207.
- Dickson, D.C.M. 1994. Some comments on the compound Binomial model. *Astin Bulletin*, Vol. 24, pp. 33-35.
- Dickson, D.C.M. and Hipp, C. 1998. Ruin probabilities for Erlang(2) risk processes. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 22, pp. 251-262.
- Dickson, D.C.M. 1998. On a class of renewal risk process. *North American Actuarial Journal*, Vol. 2, pp. 109-123.
- Dickson, D.C.M., and Drekić, S. 2004. The joint distribution of the surplus prior to ruin and deficit at ruin in some Sparre-Andersen models. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 34, pp. 97–107.
- Dickson, D.C.M. 2005. *Insurance Risk and Ruin*. Cambridge University Press, 229 s., Cambridge.
- Dufresne, F. & Gerber, H.U. (1988). The surpluses immediately before and at ruin and the amount of the claim causing ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 7, no. 3, pp. 193-199.
- Egido Dos Reis, A.D. 2004. The compound Binomial model revisited. *Astin Colloquia*, Bergen Norway. <http://www.actuaries.org>. Erişim Tarihi: 10.07.2013
- Embrechts, P., Kluppelberg, C. and Mikosch, T. 1997. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, 644 s., Berlin.
- Eryılmaz, S. 2012. On distributions of runs in the compound Binomial risk model. *Methodology and Computing in Applied Probability*, DOI: 10.1007/s11009-012-9303-x.
- Eryılmaz, S., Tunçel, A., Tank, F. 2012. On the extremes of surplus process in compound Binomial model. *Selcuk Journal of Applied Mathematics*, Vol. 13, no 2, pp. 69-78.
- Gerber, H.U. 1979. *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. In: S.S. Huebner Foundation Monographs, 229 s., Pennsylvania.
- Gerber, H.U. 1988. Mathematical fun with the compound Binomial process. *Astin Bulletin*, Vol. 18, pp. 161-168.

- Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W. 1997. The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin and the deficit at ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 21, no. 2, pp. 129-137.
- Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W. 1998. On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, Vol. 2, no. 1, pp. 48-72.
- Gray, R.J. and Pitts, M.S. 2012. *Risk Modelling in General Insurance*. Cambridge University Press, 393 s., Cambridge.
- Gupta K.A., Zeng, W., Wu Y. 2010. *Probability and Statistical Models*. Springer, 267 s., London.
- Kao P. C. E. 1997. *An Introduction to Stochastic Processes*. Wadworth publishing Company, 438 s., California.
- Klugman, S.A., Panjer, H.H., Willmot, G.E. 2004. Second Edition. *Loss Model: From Data to Decisions*. John Wiley and Son, 688 s., New Jersey.
- Li, S. and Garrido, J. 2002. On the time value of ruin in the discrete time risk model. Working paper, pp. 2-18, Business Economics, University Carlos of Madrid.
- Li, S. 2005. On a class of discrete time renewal risk models. *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 4, pp. 241-260.
- Liu, G. and ve Zhao, J. 2007. Joint distributions of some actuarial random vectors in the compound Binomial model. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 40, no. 1, pp. 95-103.
- Malinovskii, V.K. 1998. Non-Poissonian claims arrivals and calculation of the probability of ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 22, no. 2, pp. 123-138.
- Panjer, H. and Willmot, G.E. 1992. *Insurance Risk Models*. Society Actuaries, 442s., Schaumburg.
- Pavlova, K., Willmot, G.E. 2004. The discrete stationary renewal risk model and the Gerber Shiu discounted penalty function. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 35, pp. 267-277.
- Picard, P. and Lefevre, C. 2003. The discrete-time risk model with eventual ruin probabilities. *Journal of Applied Probability*, Vol. 40, pp. 543-556.
- Rulliere, D. and Loisel, S. 2004. Another look at the Picard-Lefevre formula for finite-time ruin probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 35, no. 2, pp. 187-203.
- Seal, H.L. 1969. *The stochastic theory of a risk business*. Wiley and Sons, 210 s. New York.
- Seal, H.L. 1978. From aggregate claims distribution to probability of ruin. *Astin Bulletin*, Vol. 10, pp. 47-53.

- Shiu, E.S.W. 1989. The probability of eventual ruin in the compound Binomial model. *Astin Bulletin*, Vol. 19, no.2, pp. 179-190.
- Tank F. 2002. Sigortacılıkta Bağımlı Riskler: İki Değişkenli durum için yaklaşımlar. Doktora Tezi (basılmamış) Ankara Üniversitesi, 82 s., Ankara.
- Wang, R. and Liu, H. 2002. On the ruin probability under a class of risk processes. *Astin Bulletin*, Vol. 32, no. 1, pp. 81-90.
- Willmot, G.E., 1993. Ruin probabilities in the compound Binomial model. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 12, no.2, pp. 133-142.
- Xiao, Y. and Guo, J. 2007. Compound Binomial risk model with time-correlated claims. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 41, no.2, pp. 124-133.
- Yuen, K.C. and Guo, J. 2001. Ruin probabilities for time-correlated claims in compound Binomial model. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 29, no. 1, pp. 47-57.
- Zhang, M.J., Nan, X.J. and Wang, S. 2008. Ruin probabilities the risk model with two compound Binomial processes. *J. Appl. Math. and Informatics*, Vol. 26, no 1-2, pp. 191-201.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Altan TUNÇEL

Doğum Yeri: Ankara

Doğum Tarihi: 15/03/1979

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: M.R.Uzel Kimya Meslek Lisesi

Lisans: Kırıkkale Üniversitesi, İstatistik Bölümü

Yüksek Lisans: Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Kırıkkale Üniversitesi (2002-)

Yayımları:

- 1.Tank, F., **Tuncel, A.** 2007. Sosyal Sigortalar Kurumu'nda 2000 ve 2001 yıllarında 3. dönemde sektörler ve cinsiyete göre prim ödeyen kişi sayıları üzerine bir çalışma. Sigorta Araştırmaları Dergisi, Vol. 3, pp. 181-186.
- 2.Eryılmaz, S., **Tuncel, A.**, Tank, F. 2012. On the extremes of surplus process in compound Binomial model. Selcuk Journal of Applied Mathematics, Vol. 13, no. 2, pp. 69-78.