T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK UZAYLARDA cD-SÜREKLİLİK ve ÖZELLİKLERİ

Aynur KESKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya, 1999

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

84606

TOPOLOJİK UZAYLARDA cD-SÜREKLİLİK ve ÖZELLİKLERİ

Aynur KESKİN

84606

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 08/09/1999 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Eşref HATIR (Danışman)	Doç. Dr. Halil ARDAHAN (Üye)	Doç. Dr. Durmuş BOZKURT (Üye)

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Eşref HATIR önderliğinde yapılmış ve Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Bu konuyu bana veren ve çalışma boyunca, değerli katkılarıyla yardımını esirgemeyen hocam Doç. Dr. Eşref HATIR Bey'e ayrıca tezin yazımında emeği geçen mesai arkadaşlarım Naim TUĞLU, Ramazan TÜRKMEN ve Aynur YALÇINER'e teşekkür ederim.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TOPOLOJİK UZAYLARDA cD-SÜREKLİLİK ve ÖZELLİKLERİ

Aynur KESKİN

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman : Doç. Dr. Eşref HATIR
1999, 43 sayfa
Jüri : Doç. Dr. Eşref HATIR

Bu çalışma, iki bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde, çalışmamız için gerekli bilgi ve kavramları verdik. Bu konuda, C-süreklilikle ilgili yapılagelmiş çalışmaları kısaca özetledik ve bunları yorumlamaya çalıştık.

İkinci bölümde; E. Hatır, T. Noiri ve Ş. Yüksel'in [7] tanımladıkları C-süreklilik kavramından yararlanarak cD-süreklilik olarak adlandırdığımız yeni bir süreklilik çeşidi elde ettik. cD-sürekli bir fonksiyonun sağlayıp sağlamadığı özellikleri araştırdık. Ayrıca; E. Hatır, T. Noiri ve Ş. Yüksel'in [7] tanımladıkları C-kümenin, X uzayının C-T_2 uzayı olması durumunda cD-küme ile çakıştığını ispatladık. Bundan başka; S. Jafari'nin [10] tanımladığı strongly C-kapalılık kavramından yararlanarak strongly cD-kapalılık olarak adlandırdığımız bir kapalılık kavramı elde ettik.

ANAHTAR KELİMELER: cD-küme, cD-kapalı küme, cD-süreklilik, cD-kapanış noktası. C-D_0 uzayı, C-D_1 uzayı, C-D_2 uzayı, cD-yakınsaklık.

ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

cD-CONTINUITY AND IT'S PROPERTIES

IN TOPOLOGICAL SPACES

Aynur KESKİN

Selcuk University
Graduate School of Natural and Applied Science
Deparment of Mathematics
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Eşref HATIR
1999, 43 page
Jury : Assoc. Prof. Dr. Eşref HATIR

This study consists of two sections. In the first section, it is given necessary data and concepts for our study. We tried to summarize and comment on whole studies C-continuity in brief which have been done about this topic.

In the second section; after utility of E. Hatır, T. Noiri and Ş. Yüksel's [7] definition related with concept of C-continuity, we also obtain a new kind of continuity named as cD-continuity. After utility we has investigated, ıf cD-continuity has been got up properties. In addition, we have proved that definition of E. Hatır, T. Noiri and Ş. Yüksel's [7] related with C-set has been contrasted with cD-set on condition that X is C-T_2 space. Furthermore, utility of S. Jafari's [10] definition related with concept of strongly C-closed, we also obtained a new concept of closed named as strongly cD-closed.

KEYWORDS: cD-set, cD-closed set, cD-continuity, cD-cluster point, C-D_0 space, C-D_1 space, C-D_2 space, cD-convergent.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER

$\overset{\circ}{A}$	A kümesinin içi.
$\bar{A}$	A kümesinin kapanışı.
$\alpha(X,\tau)$	(X,τ) topolojik uzayındaki tüm α-kümelerin oluşturduğu aile.
$\alpha^*(X,\tau)$	(X,τ) topolojik uzayındaki tüm α^*-kümelerin oluşturduğu aile.
$C(X,\tau)$	(X,τ) topolojik uzayındaki tüm C-kümelerin oluşturduğu aile.
$\in$	Elemanıdır.
$\notin$	Elemanı değildir.
$\exists$	En az bir.
$=$	Eşittir.
$\neq$	Eşit değildir.
$\Rightarrow$	Gerek şart.
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter şart.
$\forall$	Her.
$\ni$	Öyle ki.
$P.O.(X,\tau)$	(X,τ) topolojik uzayındaki tüm preaçık kümelerin oluşturduğu aile.
$S.O.(X,\tau)$	(X,τ) topolojik uzayındaki tüm semiaçık kümelerin oluşturduğu aile.
$\vartheta_{(x)}$	x noktasını kapsayan komşuluklar ailesi.
$\Leftarrow$	Yeter şart.

1. C-SÜREKLİ VE C-IRRESOLUTE FONKSİYONLAR

C-süreklilik tanımına geçmeden önce, gerekli bazı küme tanımları ile bu kümelerle ilgili çeşitli özellikleri ve aralarındaki karşılaştırmaları inceleyelim.

1.1. C-Küme ve Özellikleri

Bu kısımda; E.Hatır, T.Noiri ve Ş.Yüksel'in [7] tanımlayıp, inceledikleri C-küme kavramını ele aldık. Ayrıca; C-küme ile açık küme ve α^*-kümenin arakesitinin C-küme olduğunu ispatladık.

Tanım 1.1.1: (X,τ) topolojik uzayı ile bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer,

a) $A\subset \overline{\mathring{A}}$ ise; A kümesine semi açık küme ([12]),

b) $A\subset \mathring{\overline{\mathring{A}}}$ ise; A kümesine α-küme ([17]),

c) $\mathring{A} = \mathring{\overline{\mathring{A}}}$ ise; A kümesine α^* -küme ([7]),

d) $O\in\tau$ ve $F\in\alpha^*(X,\tau)$ olmak üzere; $A=O\cap F$ ise, A kümesine C- küme ([7])

denir .

Uyarı 1.1.1: Bir topolojik uzaydaki α^*-kümelerin arakesiti, yine bir α^*-kümedir([1], Teorem 2.11). Ancak; α^*-kümelerin birleşiminin α^*-küme olması gerekmez([7, Uyarı 3.2).

Örnek 1.1.1: $X=\{a,b,c,d\}$ ve $\tau=\{X,\varnothing,\{d\},\{b,c\},\{b,c,d\}\}$ olmak üzere; (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Bu durumda $\{c\},\{b,d\}\in\alpha^*(X,\tau)$ olmasına rağmen; $\{c\}\cup\{b,d\}=\{b,c,d\}\notin\alpha^*(X,\tau)$ olur.

Uyarı 1.1.1.'de verilen ifadelerin benzerlerini, C-kümeler için aşağıdaki gibi verdik.

Uyarı 1.1.2: Bir topolojik uzaydaki C-kümelerin arakesiti, yine bir C-kümedir. Tanım 1.1.1. d) ile Uyarı 1.1.1. gereği, bu iddia elde edilir.

Uyarı 1.1.3: C-kümelerin birleşiminin C-küme olması gerekmez.

Örnek 1.1.2: $X=\{a,b,c,d\}$ ve $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{a,d\},\{a,b,d\},\{a,c,d\}\}$ olmak üzere; (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde; $\{a\},\{b\}\in C(X,\tau)$ olmasına rağmen, $\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}\notin C(X,\tau)$ olur.

α^*-küme ile C-küme ve açık küme ile C-küme kavramlarının karşılaştırmaları, aşağıdaki gibidir([7], Önerme3.3).

Önerme 1.1.1: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde;

a) $\alpha^*(X,\tau)\subset C(X,\tau)$

ve

b) $\tau\subset C(X,\tau)$

olur.

İspat: $X\in \tau\cap\alpha^*(X,\tau)$ olduğundan; a) ve b) şıklarında verilen iddialar açıktır.

Önerme 1.1.1.'de verilen iddiaların terslerinin genelde doğru olmadığı [7], 3.1.Örnek'te şöyle gösterilmiştir.

Örnek 1.1.3: (X,τ) topolojik uzayı, Örnek 1.1.1.'de verilen topolojik uzay olsun. Bu takdirde; $\{b,c,d\}\in C(X,\tau)$ olmasına rağmen, $\{b,c,d\}\notin\alpha^*(X,\tau)$ ve $\{a,b\}\in C(X,\tau)$ olmasına rağmen, $\{a,b\}\notin\tau$ olur.

Önerme 1.1.1. b) şıkkında verilen ifadenin tersinin ne zaman geçerli olduğu;

[7], 3.5.Önerme'de verilmiştir. Bu önermeye geçmeden önce, [19]'da verilen aşağıdaki lemmayı inceleyelim.

Lemma 1.1.1: (X,τ) topolojik uzayı ile $A,B\subset X$ alt kümeleri verilsin. Eğer A ya da B , semi açık bir küme ise; bu takdirde $\overset{\circ}{\overline{(A\cap B)}} = \overset{\circ}{\bar{A}} \cap \overset{\circ}{\bar{B}}$'dir.

Önerme 1.1.2: (X,τ) topolojik uzayındaki $A\subset X$ alt kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart, A'nın α-küme ve C-küme olmasıdır([7], Önerme 3.5).

İspat ($\Rightarrow$):Önerme 1.1.1.'e göre; her açık küme, α-küme ve C-küme olduğundan; iddia açıktır.

($\Leftarrow$): A, α-küme ve C-küme olsun. $A\in C(X,\tau)$ olduğundan; Tanım 1.1.1. d) şıkkına göre, $A=O\cap F$ olacak şekilde $A\in\tau$ ve $F\in\alpha^*(X,\tau)$ kümeleri vardır. $A\in\alpha(X,\tau)$ olduğundan; Lemma 1.1.1. kullanılarak

$$A\subset \overset{\circ}{\overline{\mathring{A}}} = \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{(O\cap F)}}} = \overset{\circ}{\bar{O}} \cap \overset{\circ}{\overline{\mathring{F}}} = \overset{\circ}{\bar{O}} \cap \mathring{F}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca;

$$A=O\cap A\subset O\cap(\overset{\circ}{\bar{O}}\cap \mathring{F}) = O\cap \mathring{F} \subset O\cap F=A$$

olduğundan; Tanım 1.1.1. d) gereği, $A=\dot{F}$ olur. Buradan; $A\in\tau$ elde edilir.

Yukarıdaki önermede geçen α-küme ile C-küme kavramları arasındaki karşılaştırma [7], 3.4. Uyarı'da aşağıdaki gibi verilmiştir.

Uyarı 1.1.4: α-küme kavramı ile C-küme kavramı, birbirinden bağımsız iki kavramdır. [7], 3.1.Örnek ve 3.3.Örnek ile verilen bu karşılaştırmaları, aşağıda inceleyelim.

Örnek 1.1.4: (X,τ) topolojik uzayı, Örnek 1.1.1.'de tanımlanan topolojik uzay olsun. Buradan; $\{a,b\}\in C(X,\tau)$ olmasına rağmen, $\{a.b\}\notin\alpha(X,\tau)$ olur([7], Örnek 3.1).

Örnek 1.1.5: $X=\{a,b,c\}$ ve $\tau=\{\emptyset,X,\{a\}\}$ olmak üzere; (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde; $\{a,b\}\in\alpha(X,\tau)$ olmasına rağmen; $\{a,b\}\notin C(X,\tau)$ olur([7], Örnek 3.3).

"Bir topolojik uzaydaki bir C-kümenin hangi kümelerle arakesiti, yine bir C-kümedir?" sorusunu, aşağıda cevaplamaya çalıştık.

Önerme 1.1.3: (X,τ) topolojik uzayı ile herhangi bir $C\in C(X,\tau)$ kümesi verilsin. Bu takdirde; her $A_1\in\tau$ açık kümesi için, $A_1\cap C\in C(X,\tau)$ olur.

İspat: $C\in C(X,\tau)$ olduğundan; Tanım 1.1.1. d) gereği, $C=O\cap F$ olacak şekilde $O\in\tau$ ve $F\in\alpha^*(X,\tau)$ kümeleri vardır. Buradan; her $A_1\in\tau$ açık kümesi için, $A_1\cap C=A_1\cap(O\cap F)=(A_1\cap O)\cap F=A_2\cap F=C_1\in C(X,\tau)$ olur.

Önerme 1.1.4: (X,τ) topolojik uzayı ile herhangi bir $C\in C(X,\tau)$ kümesi verilsin. Bu takdirde; her $F_1\in\alpha^*(X,\tau)$ kümesi için, $C\cap F_1\in C(X,\tau)$ olur.

İspat : $C\in C(X,\tau)$ olduğundan; Tanım 1.1.1. d) gereği, $C=O\cap F$ olacak şekilde $O\in\tau$ ve $F\in\alpha^*(X,\tau)$ kümeleri vardır. Buradan; her $F_1\in\alpha^*(X,\tau)$ kümesi için, $C\cap F_1=(O\cap F)\cap F_1=O\cap(F\cap F_1)$ olur. Uyarı 1.1.1.'e göre, α^*-kümelerin arakesiti, yine bir α^*-kümedir. O halde; $F\cap F_1=F_2$ olur. Bu durumda; $C\cap F_1=O\cap F_2=C_2\in C(X,\tau)$ olur.

1.2.C-Sürekli Fonksiyon ve Özellikleri

Bu kısımda; önce, [7]'de tanımlanan C-süreklilik kavramını ele aldık. Sonra; C-sürekliliğin [8] ve [10]'da verilen çeşitli özelliklerini özetleyip, bunları yorumlamaya çalıştık. Ayrıca; ispatsız olarak verilen [10], Teorem 2.1.'i ispatladık. Bundan başka; [10], Tanım 2.4.'de verilen strongly C-kapalılık kavramı için, bir karakterizasyon elde ettik. Üstelik, C-süreklilik kavramı ile strongly C-kapalılık kavramını karşılaştırdık.

Tanım 1.2.1: (X,τ) ve (Y,φ) topolojik uzaylar olmak üzere; $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V\in\varphi$ açık kümesi için, $f^{-1}(V)\in C(X,\tau)$ ise; bu takdirde f fonksiyonuna, X üzerinde C-süreklidir denir ([7], Tanım 4.1).

Uyarı 1.2.1: Her sürekli fonksiyon, C-süreklidir.

İspat: İspat, Önerme 1.1.1. b)'den açıktır.

Uyarı 1.2.2: C-sürekli bir fonksiyonun sürekli olması gerekmez.

Örnek 1.2.1: (X,τ) topolojik uzayı, Örnek 1.1.1.'e verilen topolojik uzay olsun. Yani; $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi ile bu küme üzerinde $\tau=\{X,\varnothing\ \{d\},\{b,c\},\{b,c,d\}\}$ topolojisi verilsin. Ayrıca; $Y=\{x,y\}$ kümesi ile bu küme üzerinde $\varphi=\{Y,\varnothing,\{x\}\}$ topolojisi verilsin. $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu, $f(a)=f(b)=x$ ve $f(c)=f(d)=y$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde; f fonksiyonu, C-süreklidir([7], Örnek 4.2.). Ancak, sürekli değildir. Gerçekten;

1) $x\in Y$ noktasını kapsayan $\{x\},Y$ açık kümeleri için $f^{-1}(\{x\})=\{a,b\}\in C(X,\tau)$, $f^{1}(Y)=X\in C(X,\tau)$

ve

2) $y\in Y$ noktasını kapsayan Y açık kümesi için, $f^{-1}(Y)=X\in C(X,\tau)$ olduğundan; Tanım 1.2.1.'e göre, f fonksiyonu C-süreklidir. Ancak; $x\in Y$ noktasını kapsayan $\{x\}$ açık kümesi için, $f^{-1}(\{x\})=\{a,b\}\notin\tau$ olduğundan; f fonksiyonu sürekli değildir.

Çalışmamız için gerekli olan bazı tanımları inceleyelim.

Tanım 1.1.2: (X,τ) topolojik uzayı ile bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer, $A=\overset{\circ}{\overline{A}}$ ise; A kümesine düzenli (regüler) açık ve $A=\overline{\overset{\circ}{A}}$ ise; A kümesine düzenli (regüler) kapalı küme denir([21]).

Tanım 1.2.3: (X,τ) topolojik uzayı ile bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer,

a) $A\subset\overset{\circ}{\overline{A}}$ ise; A kümesine preaçık küme([15]),

b) $\overset{\circ}{A}=\overset{\circ}{\overline{A}}$ ise; A kümesine t-küme ([23]),

c) $U\in\tau$ ve R, regüler kapalı bir küme olmak üzere; $A=U\cap R$ ise, A kümesine **A**-küme ([22]),

d) U açık ve F kapalı bir küme olmak üzere; $A=U\cap F$ ise, A kümesine lokal kapalı küme ([3]),

e) $U\in\tau$ ve T, bir t-küme olmak üzere; $A=U\cap T$ ise, A kümesine **B**-küme ([23]),

f) $D(c,\alpha)=\{A\subset X \mid \overset{\circ}{A}=\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}\cap A\}$ ise; A kümesine $D(c,\alpha)$-küme ([20]) denir.

Bu kümelerden yararlanarak, aşağıdaki genelleştirilmiş süreklilik çeşitleri elde edilmiştir.

Tanım 1.2.4: $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonuna, eğer her $V\in\varphi$ için,

a) $f^{-1}(V)\in S.O.(X,\tau)$ ise; semi sürekli([12]),

b) $f^{-1}(V)\in\alpha(X,\tau)$ ise; α- sürekli([16]),

c) $f^{-1}(V)\in P.O.(X,\tau)$ ise; presürekli ([15]),

d) $f^{-1}(V)$, bir A-küme ise; A- sürekli([20]),

e) $f^{-1}(V)$, bir lokal kapalı küme ise; LC- sürekli([6]),

f) $f^{-1}(V)$, bir **B**-küme ise; **B**- sürekli([23]),

g) $f^{-1}(V)$, bir $D(c,\alpha)$küme ise; $D(c,\alpha)$ sürekli([20]) denir.

Bu genelleştirilmiş süreklilik çeşitlerinden yararlanarak, süreklilik kavramının bir çok dağılımı elde edilmiştir.

Teorem 1.2.1: $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu için, aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktirler.

a) f fonksiyonu, süreklidir,

b) f fonksiyonu, α- sürekli ve **A**-süreklidir([22]).

c) f fonksiyonu, α- sürekli ve LC-süreklidir([6]).

d) f fonksiyonu, presürekli ve LC-süreklidir([6]).

e) f fonksiyonu, presürekli ve **B**-süreklidir([23]).

f) f fonksiyonu, α- sürekli ve $D(c,\alpha)$ süreklidir([20]).

Yukarıdaki teoremle verilen sürekliliğin dağılımlarına benzer şekilde [7]'de; α-süreklilik ve C-süreklilik kavramları kullanılarak, sürekliliğin yeni bir dağılımı elde edilmiştir.

Teorem 1.2.2: $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart, fonksiyonun α-sürekli ve C-sürekli olmasıdır([7], Teorem 4.1).

İspat: İspat, Önerme 1.1.1. ve Önerme 1.1.2.'den elde edilir.

[10]'da S. Jafari, C-sürekli fonksiyon kavramını aşağıdaki gibi tanımlamıştır. Bu tanım, Tanım 1.2.1.'in f altındaki ters görüntüsü alınarak kolayca elde edilebilir.

Tanım 1.2.5: $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f(x)\in Y$ noktasını kapsayan her $V\subset Y$ açık kümesi için, $f(U)\subset V$ olacak şekilde x'i kapsayan bir $U\in C(X,\tau)$ kümesi varsa; bu takdirde f'ye $x\in X$ noktasında C-süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu, her $x\in X$ noktasında C-sürekli ise; bu takdirde f fonksiyonuna, X üzerinde C-süreklidir denir([10], Tanım 1.1).

[10]'da C-süreklilik için, yukarıda verdiği tanımdan başka, bu süreklilik çeşidinin sağladığı bazı özellikleri de vermiştir. Bunları şöyle özetledik.

Tanım 1.2.6: (X,τ) topolojik uzayı ile bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer x noktasını kapsayan her $C\in C(X,\tau)$ kümesi için, $A\cap C\neq\emptyset$ ise; bu takdirde $x\in X$ noktasına, $A\subset X$ alt kümesinin bir C-kapanış noktası denir. A'nın bütün C-kapanış noktalarından oluşan kümeye, A'nın C-kapanış kümesi denir ve $[A]_c$ ile gösterilir. A kümesinin C-kapalı olması için gerek ve yeter şart, $A=[A]_c$ olmasıdır([10], Tanım 2.1).

Aşağıda, [10]'da C-sürekliliğin ispatsız olarak verilen karakterizasyonunu ve ispatını verdik.

Teorem 1.2.3: $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonu için, aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktirler.

a) f fonksiyonu, C-süreklidir.

b) Her $A\subset X$ alt kümesi için, $f([A]_c)\subset\overline{[f(A)]}$

c) Her $B\subset Y$ alt kümesi için, $[f^{-1}(B)]_c\subset f^{-1}(\bar{B})$

İspat: a)⇒b): $x\in[A]_c$ ve $f(x)\in Y$ noktasını kapsayan herhangi bir $V\subset Y$ açık kümesi verilsin. f, C-sürekli bir fonksiyon olduğundan; Tanım 1.2.1.'e göre, $f^{-1}(V)\subset X$ $x\in X$ noktasını kapsayan bir C-kümedir. Bu durumda; $x\in[A]_c$ olduğundan, Tanım 1.2.6.'ya göre, $A\cap f^{-1}(V)\neq\emptyset$ olur. Buradan, $f(A)\cap V\neq\emptyset$ elde edilir. Dolayısıyla $f(x)\in[f(\bar{A})]$ olur.

b)⇒c): $A=f^{-1}(B)$ olsun. O halde b)'den,

$f([f^{-1}(B)]_c)\subset\overline{(f[f^{-1}(B)])}\subset\overline{B}$ elde edilir. $f([f^{-1}(B)]_c)\subset\overline{B}$ ifadesinden $[f^{-1}(B)]_c\subset f^{-1}(\overline{B})$ elde edilir.

c)⇒a): Herhangi bir $F\subset Y$ kapalı alt kümesi verilsin. c)'den $f^{-1}(F)]_c\subset f^{-1}(\overline{F})=f^{-1}(F)$ olur. Böylece; $f^{-1}(F)$, X'de C-kapalı bir küme olur. Dolayısıyla f fonksiyonu, C-süreklidir.

Topolojik uzaylarda bir süzgeç tabanının yakınsama tanımı şöyledir:

Tanım 1.2.7: β, (X,τ) topolojik uzayındaki bir süzgeç tabanı ve $x \in X$ olsun. β'nın her B kümesi, $\upsilon_{(x)}$ 'in bir V kümesi tarafından ihtiva ediliyor ise; β süzgeç tabanı, $x \in X$ noktasına yakınsıyor denilir([2], Tanım10.6.7.).

S. Jafari[10], "Bir süzgeç tabanının C-yakınsaması" tanımını aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım 1.2.8: (X,τ) topolojik uzayı ile bir β süzgeç tabanı verilsin. $x \in X$ noktasını kapsayan her $A \subset X$ C-kümesi için, $B_1 \subset A$ olacak şekilde bir $B_1 \in \beta$ varsa; bu takdirde β süzgeç tabanı, $x \in X$ noktasına C-yakınsaktır denir ([10], Tanım 2.2).

Bu tanımdan yararlanarak C-sürekliliğin önemli bir karakterizasyonunu S. Jafari ([10], Teorem 2.2.) şöyle vermiştir.

Teorem 1.2.4: $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ fonksiyonunun C-sürekli olması için gerek ve yeter şart; her $x \in X$ noktası ve x'e C-yakınsayan her β süzgeç tabanı için, $f(\beta)$ süzgeç tabanının f(x)'e yakınsamasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$): $x \in X$ ve β, x'e C-yakınsayan herhangi bir süzgeç tabanı olsun. f, C-sürekli bir fonksiyon olduğundan; Tanım 1.2.5. gereği, f(x)'i kapsayan her $V \subset Y$ açık kümesi için, $f(U) \subset V$ olacak şekilde x'i kapsayan bir $U \subset X$ C-kümesi vardır. β, x'e C-yakınsak olduğundan; Tanım 1.2.8. gereği, $B_1 \subset U$olacak şekilde bir $B_1 \in \beta$ vardır. Bu ise; $f(B_1) \subset V$ olmasını gerektirir. Buradan, Tanım 1.2.7.'ye göre $f(\beta)$'nın f(x)'e yakınsak olduğu elde edilir.

($\Leftarrow$): $x \in X$ ve V, f(x)'i kapsayan herhangi bir açık küme olsun. β'nın, x'i kapsayan bütün $U \subset X$ C-kümelerinin kümesi olduğu varsayılsın. Buradan, β süzgeç tabanının x'e C-yakınsak olduğu elde edilir. Böylece; $f(U) \subset V$ olacak şekilde β'da bir $U \subset X$ C-kümesi vardır. Buradan; f(x)'i kapsayan her $V \subset Y$ açık kümesi için, $f(U) \subset V$ olacak şekilde bir $U \in \beta$ C-kümesi elde edilir. Bu ise. f'nin C-sürekli bir fonksiyon olduğunu gösterir.

Topolojik uzaylarda bilinen T_0-, T_1-, T_2- ayırma aksiyomlarına benzer şekilde C-kümelerden yararlanılarak elde edilen C-T_0; C-T_1, C-T_2 uzayları olarak adlandırılan yeni ayırma aksiyomları, E. Hatır ve T. Noiri [8] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 1.2.9: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer her $x,y \in X$ ($x \neq y$) için, $x \in C_1$ ($\ni y \notin C_1$) ya da $y \in C_2$ ($\ni x \notin C_2$) olacak şekilde $C_1 \in C(X,\tau)$ veya $C_2 \in C(X,\tau)$ kümesi varsa; bu takdirde X uzayına C-T_0 uzayı denir ([8], Tanım 3.2.).

Tanım 1.2.10: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer her $x,y \in X$ ($x \neq y$) için, $x \in C_1$ ($\ni y \notin C_1$) ve $y \in C_2$ ($\ni x \notin C_2$) olacak şekilde $C_1,C_2 \in C(X,\tau)$ kümeleri varsa; bu takdirde X uzayına C-T_1 uzayı denir ([8], Tanım 3.2.).

Tanım 1.2.11: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer her $x,y \in X$ ($x \neq y$) için, $x \in C_1$, $y \in C_2$ ve $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ olacak şekilde $C_1,C_2 \in C(X,\tau)$ kümeleri varsa; bu takdirde X uzayına C-T_2 uzayı denir ([8], Tanım 3.3.).

Süreklilik için, " $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ fonksiyonu birebir, sürekli ve Y, T_2-uzayı ise; bu takdirde (X,τ) uzayı da T_2-uzayıdır." şeklinde [25]'de verilen teorem, Tanım 1.2.11.'den faydalanılarak [10]'da aşağıdaki gibi genelleştirilmiştir.

Teorem 1.2.5: Eğer $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ fonksiyonu birebir, C-sürekli ve Y, T_2- uzayı ise; bu takdirde (X,τ) uzayı, C-T_2 uzayıdır([10], Teorem 2.3).

İspat: f fonksiyonu birebir olduğundan; $x,y \in X$ ($x \neq y$) noktaları için, $f(x) \neq f(y)$ olur. Y, T_2-uzay olduğundan; $f(x) \in V$, $f(y) \in W$ ve $V \cap W = \emptyset$ olacak şekilde V ve W açık kümeleri vardır. f fonksiyonu C-sürekli olduğundan; Tanım 1.2.5. gereği, $f(U_1) \subset V$ ve $f(U_2) \subset W$ olacak şekilde sırasıyla x ve y'yi kapsayan $U_1,U_2 \in C(X,\tau)$ kümeleri vardır. $f(U_1 \cap U_2) \subset f(U_1) \cap f(U_2) \subset V \cap W = \emptyset$ olduğundan; $f(U_1 \cap U_2) = \emptyset$ olur. Burada eşitliğin her iki tarafının f altında ters görüntüsü alınırsa;

$U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ifadesi elde edilir. Dolayısıyla X uzayı, Tanım 1.2.11. gereği bir C-T_2 uzayıdır.

Literatürde "$f,g:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ sürekli fonksiyonlar ve (Y,φ), T_2-uzayı ise; bu takdirde $A=\{x\in X|\ f(x)=g(x)\}$ kümesi, X'de kapalıdır." şeklinde verilen teorem, C-süreklilik için [10], Teorem 2.4.'de aşağıdaki gibi genelleştirilmiştir.

Teorem 1.2.6: Eğer $f,g:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ C-sürekli fonksiyonlar ve (Y,φ), T_2-uzayı ise; bu takdirde $A=\{x\in X|\ f(x)=g(x)\}$ kümesi, X'de C-kapalıdır.

İspat: $x\in(X-A)$ olsun. Buradan $f(x)\neq g(x)$'dir. Y, T_2-uzayı olduğundan; $f(x)\in V$, $g(x)\in W$ ve $V\cap W=\emptyset$ olacak şekilde Y'de V,W açık kümeleri vardır. f ve g, C-sürekli fonksiyon olduklarından, Tanım 1.2.5.'e göre, $f(U_1)\subset V$ ve $g(U_2)\subset W$ olacak şekilde x'i kapsayan $U_1,U_2\in C(X,\tau)$ kümeleri vardır. $U=U_1\cap U_2$ alınırsa; Uyarı1.1.2. gereği, $U\in C(X,\tau)$ ve $x\in U$ olur. Dolayısıyla $f(U)\cap g(U)\subset f(U_1)\cap g(U_2)\subset V\cap W=\emptyset$ elde edilir. $f(U)\cap g(U)=\emptyset$ olduğundan; $x\notin[A]_c$ olur. Böylece, $[A]_c\subset A$ elde edilir ki, buradan A kümesi X'de C-kapalı olur.

Bir fonksiyonun grafiği; "$f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonu verildiğinde; $G_f=\{(x,y)|\ y=f(x),\ x\in X\}$ kümesine, f'nin grafiği denir." şeklinde [12]'de tanımlanmıştır. Literatürde grafiğin kapalılığı, "$f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonu ile f'nin G_f grafiği verilsin. G_f'nin kapalı olması için gerek ve yeter şart, her $(x,y)\in[(X\times Y)-G_f]$ için, $(U\times V)\cap G_f=\emptyset$ olacak şekilde x ve y'yi kapsayan U ve V açık kümelerinin var olmasıdır." şeklinde ifade edilmiştir. Grafiğin kapalılığı kavramı; C-kümeler için, [10], Tanım 2.4.'de aşağıdaki şekilde genelleştirilmiştir.

Tanım 1.2.12: $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonu ile f'nin $G_f=\{(x,y)|\ y=f(x),\ x\in X\}$ grafiği verilsin. Eğer, her $(x,y)\in[(X\times Y)-G_f]$ için, $(U\times V)\cap G_f=\emptyset$ olacak şekilde x'i kapsayan bir $U\subset X$ C-kümesi ile y'yi kapsayan bir $V\subset Y$ açık kümesi varsa; bu takdirde f fonksiyonunun G_f grafiğine. strongly C-kapalıdır denir.

Tanım 1.2.12. ile incelenen strongly C-kapalılık kavramı için, aşağıdaki karakterizasyonu verdik.

Lemma 1.2.1: $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonunun G_f grafiğinin strongly C-kapalı olması için gerek ve yeter şart; her $(x,y)\notin G_f$ için, $f(U)\cap V=\varnothing$ olacak şekilde x'i kapsayan bir $U\subset X$ C-kümesi ve y'yi kapsayan bir $V\subset Y$ açık kümesinin varolmasıdır.

Uyarı 1.2.3: Bir fonksiyonun grafiği kapalı ise; strongly C-kapalıdır.

İspat: İspat, Önerme 1.1.1. b) ve Tanım 1.2.12 'den elde edilir.

Uyarı 1.2.4: Bir fonksiyonun grafiğinin strongly C-kapalı olması; kapalı olmasını gerektirmez.

Örnek 1.2.2: (X,τ) topolojik uzayı, Örnek 1.1.2.'de tanımlanan uzay olsun. $Y=\{x,y,z\}$ kümesi ile bu küme üzerinde φ en ince topoloji verilsin. $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu; $f(a)=f(b)=x$, $f(c)=y$ ve $f(d)=z$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde; G_f , strongly C-kapalıdır. Gerçekten; $G_f=\{(a,x),(b,x),(c,y),(d,z)\}$ ise, $[(X\times Y)-G_f]=\{(a,y),(a,z),(b,y),(b,z),(c,x),(c,z),(d,x),(d,y)\}$ olur. Buradan;

1) $(a,y)\notin G_f$ için, $a\in X$ noktasını kapsayan $\{a\}\in C(X,\tau)$ ile $y\in Y$ noktasını kapsayan $\{y\}\in\varphi$ kümesi vardır. $f(\{a\})\cap\{y\}=\{x\}\cap\{y\}=\varnothing$ olur.
2) $(a,z)\notin G_f$ için, $a\in X$ noktasını kapsayan $\{a\}\in C(X,\tau)$ ile $z\in Y$ noktasını kapsayan $\{z\}\in\varphi$ kümesi vardır. $f(\{a\})\cap\{z\}=\{x\}\cap\{z\}=\varnothing$ olur.
3) $(b,y)\notin G_f$ için, $b\in X$ noktasını kapsayan $\{b\}\in C(X,\tau)$ ile $y\in Y$ noktasını kapsayan $\{y\}\in\varphi$ kümesi vardır. $f(\{b\})\cap\{y\}=\{x\}\cap\{y\}=\varnothing$ olur.
4) $(b,z)\notin G_f$ için, $b\in X$ noktasını kapsayan $\{b\}\in C(X,\tau)$ ile $z\in Y$ noktasını kapsayan $\{z\}\in\varphi$ kümesi vardır. $f(\{b\})\cap\{z\}=\{x\}\cap\{z\}=\varnothing$ olur.
5) $(c,x)\notin G_f$ için, $c\in X$ noktasını kapsayan $\{c\}\in C(X,\tau)$ ile $x\in Y$ noktasını kapsayan $\{x\}\in\varphi$ kümesi vardır. $f(\{c\})\cap\{x\}=\{y\}\cap\{x\}=\varnothing$ olur.
6) $(c,z)\notin G_f$ için, $c\in X$ noktasını kapsayan $\{c\}\in C(X,\tau)$ ile $z\in Y$ noktasını kapsayan $\{z\}\in\varphi$ kümesi vardır. $f(\{c\})\cap\{z\}=\{y\}\cap\{z\}=\varnothing$ olur.

7) $(d,x)\notin G_f$ için, $d\in X$ noktasını kapsayan $\{d\}\in C(X,\tau)$ ile $x\in Y$ noktasını kapsayan $\{x\}\in\varphi$ kümesi vardır. $f(\{d\})\cap\{x\}=\{z\}\cap\{x\}=\emptyset$ olur.

8) $(d,y)\notin G_f$ için, $d\in X$ noktasını kapsayan $\{d\}\in C(X,\tau)$ ile $y\in Y$ noktasını kapsayan $\{y\}\in\varphi$ kümesi vardır. $f(\{d\})\cap\{y\}=\{z\}\cap\{y\}=\emptyset$ olur. Böylece; $\forall(x,y)\notin G_f$ için, $f(U)\cap V=\emptyset$ olacak şekilde x'i kapsayan bir $U\subset X$ C-kümesi ve y'yi kapsayan bir $V\subset Y$ açık kümesi vardır. Lemma 1.2.1. gereği, G_f strongly C-kapalıdır. Ancak G_f , kapalı değildir. Gerçekten; $(b,z)\notin G_f$ için, $b\in X$ noktasını kapsayan $\{a,b,d\}\in\vartheta_{(b)}$ ile $z\in Y$ noktasını kapsayan $\{z\}\in\vartheta_{(z)}$ kümeleri için, $f(\{a,b,d\})\cap\{z\}=\{x,z\}\cap\{z\}=\{z\}\neq\emptyset$ olur.

[12]'de; bir fonksiyonun sürekli olması ile bu fonksiyonun grafiğinin kapalı olması kavramları " Bir fonksiyonun sürekli olması, bu fonksiyonun grafiğinin kapalı olmasını gerektirmez([12], Örnek 1.). Tersine; bir fonksiyonun grafiğinin kapalı olması, fonksiyonun sürekli olmasını gerektirmez([12], Örnek 2.)." şeklinde karşılaştırılmıştır. Aşağıda, bir fonksiyonun C-sürekli olması ile bu fonksiyonun grafiğinin strongly C-kapalı olması kavramlarını karşılaştırdık.

Uyarı 1.2.5: Bir fonksiyonun C-sürekli olması, bu fonksiyonun grafiğinin strongly C-kapalı olmasını gerektirmez(Örnek1.2.3.). Tersine; bir fonksiyonun grafiğinin strongly C-kapalı olması, bu fonksiyonun C-sürekli olmasını gerektirmez (Örnek 1.2.4.).

Örnek 1.2.3: Örnek 1.2.1.'de verilen f fonksiyonu C-süreklidir. Ancak; $G_f=\{(a,x),(b,x),(c,y),(d,y)\}$ kümesi, strongly C-kapalı değildir. $(a,y)\notin G_f$ için, $a\in X$ noktasını kapsayan $\{a,b\}\in C(X,\tau)$ kümesi ve $y\in Y$ noktasını kapsayan $Y\subset Y$ açık kümesi vardır. $f(\{a,b\})=\{x\}$ olup, bu durumda $f(\{a,b\})\cap Y=\{x\}\cap Y=\{x\}\neq\emptyset$ elde edilir. Bu da, Tanım 1.2.12. gereği G_f 'nin strongly C-kapalı olmadığını gösterir.

Örnek 1.2.4:. f fonksiyonu, Örnek 1.2.2.'de tanımlanan fonksiyon olsun. O halde Örnek 1.2.2. 'de f'nin G_f grafiği, strongly C-kapalıdır. Ancak f fonksiyonu, C-sürekli değildir. Gerçekten: $x\in Y$ noktasını kapsayan $\{x\}\in\varphi$ kümesi için,

$f^{-1}(\{x\})=\{a,b\}\notin C(X,\tau)$ olur. Bu da; Tanım 1.2.1.'e göre, f'nin C-sürekli bir fonksiyon olmadığını gösterir.

Değer uzayının T_2-uzayı olması durumunda sürekli bir fonksiyonun G_f grafiğinin kapalı olduğu [12]'de verilmiştir. Benzer bir teorem; C-süreklilik ve strongly C-kapalılık kavramları için [10], Teorem 2.5.'de şöyle verilmiştir.

Teorem 1.2.7: $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonu C-sürekli ve (Y,φ) T_2-uzayı ise; bu takdirde G_f, strongly C-kapalıdır.

İspat: $(x,y)\in[(X\times Y)-G_f]$ olsun. Buradan, $y\neq f(x)$'dir. Y, T_2-uzayı olduğundan; $V\cap W=\varnothing$ olacak şekilde Y'de sırasıyla y ve f(x)'i kapsayan V ve W açık kümeleri vardır. f fonksiyonu C-sürekli olduğundan; Tanım 1.2.5.'e göre, $f(U)\subset W$ olacak şekilde $x\in X$ noktasını kapsayan bir $U\in C(X,\tau)$ kümesi vardır. $V\cap W=\varnothing$ ve $f(U)\subset W$ olduğundan; $f(U)\cap V=\varnothing$ olur. Bu ise; Tanım 1.2.12.'ye göre, G_f'nin $X\times Y$'de strongly C-kapalı olduğunu gösterir.

Sürekli iki fonksiyonun bileşkesi, sürekli olduğu halde; bu durum C-süreklilik için geçerli değildir.

Uyarı 1.2.6: C-sürekli iki fonksiyonun bileşkesinin C-sürekli olması gerekmez.

Örnek 1.2.5: (X,τ) topolojik uzayı, Örnek 1.1.1.'de verilen topolojik uzay olmak üzere; $f:(X,\tau)\rightarrow(X,\tau)$ birim fonksiyonu verilsin. g fonksiyonu ise; Örnek 1.2.1.'de verilen f fonksiyonu olsun. f fonksiyonu, birim fonksiyon olduğundan; süreklidir. Ayrıca; Uyarı 1.2.1.'e göre f, C-süreklidir. g fonksiyonunun C-sürekli olduğunu, Örnek 1.2.1.'e inceledik. Buradan; $gof:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonunun C-sürekli olup olmadığına bakalım. g fonksiyonu C-sürekli olduğundan; Tanım 1.2.1.'e göre, $x\in Y$ noktasını kapsayan $\{x\}\subset Y$ açık kümesi için, $g^{-1}(\{x\})=\{a,b\}\in C(X,\tau)$ olur. Ancak; $\{a,b\}\notin\tau$ olduğundan; Tanım 1.2.1.'e göre, gof bileşke fonksiyonunun C-sürekli olmadığını elde ederiz.

[8]'de C-sürekliliğin yeni bir kuvvetli tipi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 1.2.13: $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer, her $A\subset Y$ C-kümesi için, $f^{-1}(A)\subset X$ C-küme ise; bu takdirde f fonksiyonuna, C-irresolute fonksiyon denir.

Yukarıdaki tanımdan faydalanıp, aşağıdaki iki teoremi elde ettik.

Teorem 1.2.8: $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ C-irresolute bir fonksiyon ve $g:(Y,\varphi)\rightarrow(Z,\sigma)$ C-sürekli bir fonksiyon ise; $gof:(X,\tau)\rightarrow(Z,\sigma)$ bileşke fonksiyonu, C-süreklidir.

İspat: Tanım 1.2.1.'e göre; $\forall V\in\sigma$ için, $(gof)^{-1}(V)\in C(X,\tau)$ olduğunu göstermeliyiz. g fonksiyonunun C-sürekliliğinden; $\forall V\in\sigma$ için, $g^{-1}(V)\in C(Y,\varphi)$ olur. Bu takdirde; f, C-irresolute bir fonksiyon olduğundan; Tanım 1.2.13.'e göre, $(gof)^{-1}(V)=f^{-1}(g^{-1}(V))\subset X$, X'de bir C-kümedir. Böylece gof bileşke fonksiyonu, C-süreklidir.

Teorem 1.2.9: $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ C-sürekli bir fonksiyon ve $g: (Y,\varphi)\rightarrow(Z,\sigma)$ sürekli bir fonksiyon ise; bu takdirde $gof:(X,\tau)\rightarrow(Z,\sigma)$ bileşke fonksiyonu, C-süreklidir.

İspat: Tanım 1.2.1.'e göre; $\forall V\in\sigma$ için, $(gof)^{-1}(V)\in C(X,\tau)$ olduğunu göstermeliyiz. g fonksiyonunun sürekliliğinden; $\forall V\in\sigma$ için, $g^{-1}(V)\in\varphi$ olur. Bu takdirde; f C-sürekli bir fonksiyon olduğundan; Tanım 1.2.1.'e göre, $(gof)^{-1}(V)=f^{-1}(g^{-1}(V))\subset X$, X'de bir C-kümedir. Böylece; gof bileşke fonksiyonu, C-süreklidir.

Tanım 1.2.14: $f:X\rightarrow Y$ fonksiyonu ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde; $\forall x\in A$ için $f|_A(x)=f(x)$ şeklinde tanımlanan $f|_A: A\rightarrow Y$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun A'ya kısıtlanmış fonksiyonu denir([25]).

Sürekli bir fonksiyonun kısıtlanmış fonksiyonu sürekli olduğu halde; bu durum, C-süreklilik için geçerli değildir.

Uyarı 1.2.7: C-sürekli bir fonksiyonun kısıtlanmış fonksiyonunun C-sürekli olması gerekmez.

Örnek 1.2.6: $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi ile bu küme üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{b\},\{c,d\},\{b,c,d\}\}$topolojisi ve $Y=\{x,y\}$ kümesi ile bu küme üzerinde $\varphi=\{Y,\emptyset,\{x\}\}$ topolojisi verilsin. $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu, $f(a)=f(b)=f(d)=x$ ve $f(c)=y$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu, C-süreklidir. Ancak; $A=\{a,b,c\}\subset X$ alt kümesi için, $f|_A:(A,\tau_A)\to(Y,\varphi)$ kısıtlanmış fonksiyonu, C-sürekli değildir. Gerçekten; $A=\{a,b,c\}\subset X$ alt kümesi için, $\tau_A=\{A,\emptyset,\{b\},\{c\},\{b,c\}\}$ olur. $f|_A:(A,\tau_A)\to(Y,\varphi)$ kısıtlanmış fonksiyonunun, C-sürekli olduğunu göstermek için, Tanım 1.2.1.'e göre; $\forall V\in\varphi$ için, $(f|_A)^{-1}(V)\in C(A,\tau_A)$ olduğunu göstermeliyiz. $x\in Y$ noktasını kapsayan $\{x\}\subset Y$ açık kümesini alalım. $(f|_A)^{-1}(\{x\})=\{a,b,d\}\notin C(A,\tau_A)$ olduğundan; $A=\{a,b,c\}\subset X$ alt kümesi için, $f|_A:(A,\tau_A)\to(Y,\varphi)$ kısıtlanmış fonksiyonu, C-sürekli değildir.

Önerme 1.1.3. ve Önerme 1.1.4. gereği, aşağıdaki sonucu verdik.

Sonuç 1.2.1: C-sürekli fonksiyonun açık küme ve α*- kümeye kısıtlanışı C-süreklidir.

Literatürde örtü kavramı şöyle verilmiştir.

Tanım 1.2.15: (X,τ) topolojik uzayı ile X'in alt kümelerinden oluşan bir $(A_i)_{i\in I}$ ailesi verilsin. Eğer,

a) $X=\bigcup_{i\in I} A_i$ ise; $(A_i)_{i\in I}$ ailesine X kümesinin bir örtüsü,

b) Her $i\in I$ için, $A_i\in\tau$ ve $X=\bigcup_{i\in I} A_i$ ise; $(A_i)_{i\in I}$ ailesine X kümesinin bir açık örtüsü,

c) $J \subset I$ sonlu ve $X = \bigcup_{i \in J} A_i$ ise; $(A_i)_{i \in J}$ ailesine X kümesinin sonlu bir örtüsü,

d) $J \subset I$ için, $X = \bigcup_{j \in J} A_j$ ise; $(A_j)_{j \in J}$ ailesine X kümesinin bir alt örtüsü denir.

Kompaktlık kavramı,topolojiye analizin temel teoremlerinden olan Borel-Lebesgue Örtme teoremi ve Bolzano-Weierstrass teoremi ile girmiştir. Ancak, her iki teoremde de sınırlılık koşulu olduğundan; bu iki teoremin herhangi bir topolojik uzayda ifadesinin aynı olamayacağı aşikardır ([25]). Bahsedilen bu teoremleri, aşağıda inceledik.

Heine-Borel Teoremi: R'nin kapalı ve sınırlı bir alt kümesinin her açık örtüsünden sonlu bir alt örtü çıkarılabilir([2]).

Bolzano-Weierstrass Teoremi: R'nin sınırlı ve sonsuz bir A alt kümesinin, bu uzayda hiç olmazsa bir yığılma noktası vardır([2]).

Tanım 1.2.16: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer, X kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa; X uzayına, kompakt uzay denir ([25], 6.1.3.Tanım).

Bu tanım; [10], Tanım 2.5.'de C-kümeler için aşağıdaki gibi geliştirilmiştir.

Tanım 1.2.16: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer, X'in C-kümelerden oluşan her örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa; X uzayına, C-kompakt uzay denir.

"$f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer X, kompakt ise; f(X) görüntüsü de kompakttır." şeklinde [25], 6.2.1.Teorem'de verilen bu ifadede, kompaktlık kavramının sürekli fonksiyonlarla korunduğu gösterilmiştir. "C-kompaktlık kavramı, C-sürekli fonksiyonlarla korunur mu?" sorusuna cevap; [10], Teorem 2.6. ile aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 1.2.10: Eğer $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ C-sürekli bir fonksiyon ise; bu takdirde $K\subset X$ C-kompakt kümesinin görüntüsü kompakttır.

İspat: γ, f(K)'nın bir açık örtüsü ve $E=\{V| V\cap f(K)\neq\emptyset\}$ olsun. O halde E, f(K)'nın bir açık örtüsüdür. Dolayısıyla her $k\in K$ için, $f(k)\in V_k$ olacak şekilde bazı $V_k\in E$ kümeleri vardır. f, C-sürekli bir fonksiyon olduğundan; Tanım 1.2.5.'e göre, $f(U_k)\subset V_k$ olacak şekilde k'yı kapsayan bir $U_k\subset X$ C-kümesi vardır. F, K'nın sonlu bir alt kümesi olmak üzere; $\{ U_k \}_{k\in F}$ sonlu bir alt ailedir. Dolayısıyla; $\{ U_k \}_{k\in F}$, K'nın bir C-örtüsüdür. V_k, f(K)'yı örttüğünden; $f(K)\subset Y$ kompakt bir kümedir.

Bu teoremden, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 1.2.2: C-kompaktlık kavramı, C-sürekli fonksiyonlarla korunmaz.

Geometri, analiz ve cebirsel topolojide önemli uygulamaları olan bağlantılı uzay kavramı ile, verilen topolojiye göre; bu uzayın tek parçadan oluştuğu anlatılmıştır. Ancak bahsedilen "tek parça olma" deyimi, tamamen topolojik bir kavram olarak incelenmiştir ([25]). Literatürde bağlantılı uzay kavramı, bağlantılı iki küme kavramına bağlı olarak tanımlanmıştır. Bu iki kavramı aşağıda inceledik.

Tanım 1.2.18: (X,τ) topolojik uzayı ile $A,B\subset X$ alt kümeleri verilsin. Eğer $\overline{A}\cap B\neq\emptyset$ (ya da $A\cap\overline{B}\neq\emptyset$) ise; A ve B kümelerine bağlantılı iki küme denir ([25],7.1.1.Tanım).

Tanım 1.2.19: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer X kümesi, her biri boş olmayan, bağlantılı iki kümenin birleşimine eşitse; (X,τ) uzayına bağlantılı uzay denir ([25],7.2.1.Tanım).

S. Jafari[10], bağlantılı uzay kavramını C-kümeler için aşağıdaki gibi geliştirmiştir.

Tanım 1.2.20: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer X kümesi, her biri boş olmayan, iki C-kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa; (X,τ) uzayına, C-bağlantılı uzay denir ([10], Tanım 2.6).

" Bağlantılı uzayın sürekli bir fonksiyon altında görüntüsü bağlantılıdır." şeklinde [25], 7.2.7.Teorem ile verilen bu ifadede, bağlantılılık kavramının sürekli fonksiyonlarla korunduğu gösterilmiştir. "C-bağlantılılık kavramı, C-sürekli fonksiyonlarla korunur mu?" sorusunun cevabı; [10], Teorem 2.6. ile aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 1.2.11: $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonu C-sürekli, örten ve X, C-bağlantılı bir uzay ise; bu takdirde Y, bağlantılı bir uzaydır.

İspat: Varsayalım ki; Y uzayı bağlantılı olmasın. Bu takdirde; $V\cap W=\varnothing$ ve $V\cup W=Y$ olacak şekilde her biri boş olmayan V ve W açık kümeleri vardır. f, C-sürekli bir fonksiyon olduğundan; Tanım 1.2.1.'e göre $f^{-1}(V),f^{-1}(W)\in C(X,\tau)$ olur. f, örten bir fonksiyon olduğundan; $f^{-1}(V)\neq\varnothing\neq f^{-1}(W)$ olur. Ayrıca; $f^{-1}(V)\cap f^{-1}(W)=\varnothing$ ve $f^{-1}(V)\cup f^{-1}(W)=X$ ifadeleri elde edilir. Bu ise; X'in C-bağlantılı uzay olmasıyla çelişir. O halde; Y uzayı bağlantılıdır.

Bu teoremden, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.3: C-bağlantılılık kavramı, C-sürekli fonksiyonlarla korunmaz.

2. cD-SÜREKLİ VE cD-IRRESOLUTE FONKSİYONLAR

2.1. cD-Küme ve Özellikleri

Bu kısımda; önce çalışmamızın temelini teşkil eden C-küme, açık küme ve semi-açık küme tanımları ile ilgili olan cD-küme ([8]), D küme ([24]) ve semi D-küme ([4]) tanımlarını inceledik. Sonra; cD-küme tanımından faydalanıp, cD-kapalı küme tanımını verdik. Ardından; C-küme ile cD-küme kavramlarını karşılaştırdık. Ayrıca; cD-küme ile açık küme ve α^*-kümenin arakesitinin cD-küme olduğunu gösterdik.

Tanım 2.1.1: (X,τ) topolojik uzayı ile bir $S\subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer, $O_1 \neq X$ ve $S=O_1 \backslash O_2$ olacak şekilde

a) O_1, $O_2 \in C(X,\tau)$ kümeleri varsa; S kümesine cD-küme ([8]),

b) O_1, $O_2 \in \tau$ kümeleri varsa; S kümesine D-küme ([24]),

c) O_1, $O_2 \in S.O(X,\tau)$kümeleri varsa; S kümesine semi D-küme ([4]) denir.

(X,τ) topolojik uzayındaki bütün cD-kümelerin oluşturduğu aileyi $cD(X,\tau)$ ile gösterdik. cD-kümenin tümleyenine, cD-kapalı küme denir. Karışıklığa neden olmamak için, çalışma boyunca [8]'de tanımlanan cD-küme kavramı yerine, cD-açık küme kavramı kullanılmıştır. Ayrıca; (X,τ) topolojik uzayındaki bütün cD-kapalı kümelerin oluşturduğu aileyı, $cD'(X,\tau)$ ile gösterdik.

Uyarı 2.1.1: Bir topolojik uzaydaki herhangi iki cD-kümenin birleşiminin cD-küme olması gerekmez.

Örnek 2.1.1: (X,τ) topolojik uzayı, Örnek 1.1.2.'de tanımlanan topolojik uzay olsun. Bu takdirde; $\{a,b\},\{c\}\in cD(X,\tau)$ olmasına rağmen, $\{a,b\}\cup\{c\}=\{a,b,c\}\subset X$ kümesi. X'de bir cD-küme değildir.

Uyarı 2.1.2: cD-kapalı kümelerin kesişiminin cD-kapalı olması gerekmez.

Örnek 2.1.2: (X,τ) topolojik uzayı, Örnek 1.1.2.'de tanımlanan topolojik uzay olsun. Bu takdirde $\{a,d\},\{b,c\}\in cD'(X,\tau)$ olmasına rağmen; $\{a,d\}\cap\{b,c\}=\varnothing$, X'de bir cD-kapalı küme değildir.

Uyarı 2.1.3: Her C-küme, cD-kümedir. Fakat, tersi genelde doğru değildir. Örneğin; (X,τ) topolojik uzayı, Örnek 2.1.2.'de tanımlanan topolojik uzay olsun. Bu takdirde; $\{a,b\}\in cD(X,\tau)$ olmasına rağmen, $\{a,b\}\notin C(X,\tau)$ olur. Gerçekten; $X\neq\{a,b,d\},\{d\}\in C\ (X,\tau)$ için, $\{a,b\}=\{a,b,d\}\setminus\{d\}\in cD(X,\tau)$ elde edilir([8], Örnek 3).

Uyarı 2.1.4: Her açık küme, cD-açık kümedir. Fakat, tersi genelde doğru değildir. Örneğin (X,τ) topolojik uzayı, Örnek 1.1.2.'de tanımlanan topolojik uzay olsun. Bu takdirde; $\{a, b\}\in cD(X,\tau)$ olmasına rağmen, $\{a, b\}\notin\tau$ olur.

Uyarı 2.1.5: Her kapalı küme, cD-kapalı kümedir. Fakat tersi genelde doğru değildir. Örneğin, (X,τ) topolojik uzayı, Örnek 1.1.2.'de tanımlanan topolojik uzay olsun. Bu takdirde; $\{a,d\}\in cD'(X,\tau)$ olmasına rağmen, $\{a,d\}\subset X$ kümesi kapalı küme değildir.

"Bir topolojik uzaydaki bir cD-kümenin hangi kümelerle arakesiti, yine bir cD kümedir?" sorusunu aşağıda cevaplamaya çalıştık.

Önerme 2.1.1: (X,τ) topolojik uzayı ile herhangi bir $S\in cD(X,\tau)$ kümesi verilsin. Bu takdirde; her $A_1\in\tau$ açık kümesi için, $(A_1\cap S)\in cD(X,\tau)$ olur.

İspat: $S\in cD(X,\tau)$ kümesi verilsin. Bu takdirde; Tanım 2.1.1. a) şıkkına göre, $C_1\neq X$ ve $S=C_1\setminus C_2$ olacak şekilde $C_1,C_2\in C(X,\tau)$ kümeleri vardır. Bu durumda; $(A_1\cap S)=[A_1\cap(C_1\setminus C_2)]=[(A_1\cap C_1)\setminus(A_1\cap C_2)]$ elde edilir. Önerme 1.1.3. gereği, $(A_1\cap C_1)$, $(A_1\cap C_2)\in C(X,\tau)$ olur. O halde; Tanım 2.1.1. a)'ya göre, $(A_1\cap S)\in cD(X,\tau)$ olur.

Önerme 2.1.2: (X,τ) topolojik uzayı ile herhangi bir $S\in cD(X,\tau)$ kümesi verilsin. Bu takdirde; her $F_1\in \alpha^*(X,\tau)$ kümesi için, $S\cap F_1\in cD(X,\tau)$ olur.

İspat: $S\in cD(X,\tau)$ kümesi verilsin. Bu takdirde; Tanım 2.1.1. a) şıkkına göre, $C_1\neq X$ ve $S=C_1\backslash C_2$ olacak şekilde $C_1,C_2\in C(X,\tau)$ kümeleri vardır. Bu durumda; $S\cap F_1=(C_1\backslash C_2)\cap F_1=(C_1\cap F_1)\backslash(C_2\cap F_1)$ elde edilir. Önerme 1.1.4.'e göre, $(C_1\cap F_1),(C_2\cap F_1)\in C(X,\tau)$ olur. Dolayısıyla Tanım 2.1.1. a)'ya göre, $S\cap F_1\in cD(X,\tau)$ olur.

2.2. cD-Süreklilik ve Özellikleri

Bu kısımda önce; C-süreklilik kavramından yararlanarak elde ettiğimiz ve cD-süreklilik olarak adlandırdığımız yeni bir genelleştirilmiş süreklilik çeşidini tanımladık. Sonra; söz konusu olan bu iki süreklilik çeşidini karşılaştırdık. Ayrıca; cD-sürekli bir fonksiyonun sağladığı bazı özellikleri elde ettik.

Tanım 2.2.1: $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f(x)\in Y$ noktasını kapsayan her $V\subset Y$ açık kümesi için, $f(U)\subset V$ olacak şekilde x'i kapsayan bir $U\in cD(X,\tau)$ kümesi varsa; bu takdirde f'ye $x\in X$ noktasında cD-süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu her $x\in X$ noktasında cD-sürekli ise; bu takdirde f fonksiyonuna, X üzerinde cD-süreklidir veya kısaca cD-süreklidir denir.

Uyarı 2.2.1: Her C-sürekli fonksiyon, cD-süreklidir. Ancak; tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.2.1: (X,τ) topolojik uzayı, Örnek 1.1.2.'de tanımlanan topolojik uzay olsun. $Y=\{x,y,z\}$ kümesi ile bu küme üzerinde $\varphi=\{Y,\varnothing,\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$ topolojisi verilsin. Ayrıca; f fonksiyonu $f(a)=f(c)=x$, $f(b)=y$ ve $f(d)=z$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu cD-süreklidir. Gerçekten Tanım 2.2.1.'e göre $\forall V\in\varphi$ için $f(U)\subset V$ olacak şekilde bir $U\in cD(X,\tau)$ kümesinin varolduğunu göstermeliyiz.

$f(\{a,b,c\})\subset Y$, $f(\emptyset)=\emptyset\subset\emptyset$, $f(\{a,b,\})=\{x\}\subset\{x\}$, $f(\{b\})=\{y\}\subset\{y\}$, $f(\{a,b,c\})=\{x,y\}\subset\{x,y\}$ olup, burada $\emptyset$, $\{b\}$, $\{a,b\}$,. $\{a,b,c\}\subset X$ alt kümeleri X'de bir cD-kümedir. O halde f fonksiyonu cD-süreklidir ancak; C-sürekli değildir. Gerçekten; $x\in Y$ noktasını kapsayan $\{x\}\subset Y$ açık kümesi için, $f^{1}(\{x\})=\{a,b\}\notin C(X,\tau)$ olduğundan; f fonksiyonu C-sürekli değildir.

cD-sürekliliğin karektarizasyonları olarak aşağıdaki iki teoremi elde ettik.

Teorem 2.2.1: $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonu için, aşağıdaki ifadeler birbirine denktirler:

a) f fonksiyonu, cD-süreklidir.

b) Her $V\subset Y$ açık kümesi için, $f^{-1}(V)\subset X$ bir cD-açık kümedir.

c) Her $F\subset Y$ kapalı kümesi için, $f^{-1}(F)\subset X$ bir cD-kapalı kümedir.

İspat: a)⇒ b): İspatı Tanım 2.2.1.'den açıktır.

b) ⇒c) : Tümleme ile istenen elde edilir.

c) ⇒ a): Herhangi bir $f(x)\in Y$ noktası ile f(x) noktasını kapsayan herhangi bir $V\subset Y$ açık kümesi verilsin. $V\subset Y$ açık kümesi ise; $f(x)\notin(Y-V)\subset Y$ kapalı kümedir. Bu durumda c)'den $f^{-1}(Y-V)\subset X$, bir cD-kapalı kümedir. $f^{-1}(Y-V)=(X-f^{-1}(V))$ eşitliğinden; $(X-f^{-1}(V))\subset X$ cD-kapalı küme olur. Dolayısıyla $x\in f^{-1}(V)\subset X$ cD-açık olur. $U=f^{-1}(V)$ alırsak; $f(U)\subset V$ elde edilir ki, bu ise f fonksiyonunun cD-sürekli olması tanımıdır.

Tanım 2.2.2: (X,τ) topolojik uzayı, bir $A\subset X$ alt kümesi ve bir $x\in X$ noktası verilsin. Eğer x noktasını kapsayan her $S\in cD(X,\tau)$ kümesi için, $A\cap S\neq\emptyset$ ise bu takdirde $x\in X$ noktasına, A kümesinin bir cD-kapanış noktası denir. A kümesinin bütün cD-kapanış noktalarının oluşturduğu kümeye, A'nın cD-kapanış kümesi denir ve $[A]_{cD}$ ile gösterilir. Ayrıca; A'nın cD-kapalı bir küme olması için gerek ve yeter şart $A=[A]_{cD}$ olmasıdır.

Teorem 2.2.2: $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu için, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

a) f fonksiyonu, cD-süreklidir.

b) Her $A\subset X$ için, $f([A]_{cD})\subset f(\overline{A})$

c) Her $B\subset Y$ için, $[f^{-1}(B)]_{cD}\subset f^{-1}(\overline{B})$

İspat: İspat, Teorem 1.2.3.'ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Tanım 2.2.3: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer $x,y\in X$ $(x\neq y)$ için, $x\in S_1$ $(\ni y\notin S_1)$ ya da $y\in S_2$ $(\ni x\notin S_2)$ olacak şekilde S_1 ya da S_2 cD-kümeleri varsa; bu takdirde (X,τ) uzayına $C-D_0$ uzayı denir ([8], Tanım 3.2.).

Tanım 2.2.4: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer $x,y\in X$ $(x\neq y)$ için, $x\in S_1$ $(\ni y\notin S_1)$ ve $y\in S_2$ $(\ni x\notin S_2)$ olacak şekilde $S_1,S_2\in cD(X,\tau)$ kümeleri varsa; bu takdirde (X,τ) uzayına $C-D_1$ uzayı denir ([8], Tanım 3.2.).

Tanım 2.2.5: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer $x,y\in X$ $(x\neq y)$ için, $x\in S_1$, $y\in S_2$ ve $S_1\cap S_2=\varnothing$ olacak şekilde $S_1,S_2\in cD(X,\tau)$ kümeleri varsa; bu takdirde (X,τ) uzayına $C-D_2$ uzayı denir ([8], Tanım 3.3).

Uyarı 2.2.2: a) i=0,1,2 için, eğer X, T_i ise; bu takdirde X, $C-T_i$'dir.

b) i=0,1,2 için, eğer X, $C-T_i$ ise; bu takdirde X, $C-D_i$'dir.

c) i=0,1,2 için, eğer X, $C-D_i$ ise; bu takdirde X, $C-D_{i-1}$'dir.

d) i=0,1,2 için, eğer X, $C-T_i$ ise; bu takdirde X, $C-T_{i-1}$'dir.

Bu uyarıdan yararlanarak [10], Teorem 2.3. şöyle geliştirilebilir.

Sonuç 2.2.1: Eğer $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu C-sürekli, birebir ve Y, T_2- uzayı ise, bu takdirde (X,τ) uzayı, $C-D_2$ uzayıdır.

Bu sonucu cD-süreklilik için, aşağıdaki gibi geliştirdik.

Teorem 2.2.3: Eğer $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu cD-sürekli, birebir ve Y, T_2- uzayı ise, bu takdirde (X,τ) uzayı, $C-D_2$ uzayıdır.

İspat: $x_1,x_2\in X\ (x_1\neq x_2)$ olsun. f fonksiyonu birebir olduğundan; $f(x_1)\neq f(x_2)\in Y$ olur. Aynı zamanda; Y, T_2-uzayı olduğundan; $\exists V_1\in\varphi(f(x_1)\in V_1)$, $\exists V_2\in\varphi(f(x_2)\in V_2)\ni V_1\cap V_2=\varnothing$ olur. f, cD-sürekli bir fonksiyon olduğundan; Tanım 2.2.1.'e göre $f^{-1}(V_1)$ ve $f^{-1}(V_2)$, sırasıyla x_1 ve x_2 noktalarını kapsayan X'deki cD-kümelerdir. Ayrıca; $V_1\cap V_2=\varnothing$ eşitliğinin f altında ters görüntüsü alınırsa; $f^{-1}(V_1\cap V_2)=f^{-1}(V_1)\cap f^{-1}(V_2)=\varnothing$ elde edilir. Dolayısıyla Tanım 2.2.5.'e göre; (X,τ), $C-D_2$ uzayı olur.

Teorem 2.2.4: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde;

a) X'in C-D_0 uzay olması için $\Leftrightarrow$ C-T_0 uzay olmasıdır.

b) X'in C-D_1 uzay olması için $\Leftrightarrow$ C-D_2 uzay olmasıdır([8]).

İspat: a) ($\Leftarrow$): Uyarı 2.2.2. b)'den açıktır.

($\Rightarrow$): X, C-D_0 uzayı olsun. Bu takdirde; Tanım 2.2.3.'e göre, $x,y\in X$ $(x\neq y)$ için x ve y'den en az birini kapsayan bir $S\in cD(X,\tau)$ kümesi vardır. Varsayalım ki; $x\in S$ $(\ni y\notin S)$ olsun. $S\in cD(X,\tau)$ olduğundan; Tanım 2.1.1. a)'ya göre, $C_1\neq X$ ve $S=C_1\setminus C_2$ olacak şekilde C_1, $C_2\in C(X,\tau)$ kümeleri vardır. $x\in S$ olduğundan; $x\in C_1$ olur. $y\notin S$ için, iki durum söz konusudur:

1-$y\notin C_1$,

2- $y\in C_1$ ve $y\in C_2$,

1'de $x\in C_1$ olmasına rağmen; $y\notin C_1$'dir.

2'de $y\in C_2$ olmasına rağmen; $x\notin C_2$'dir. Buradan X, bir C-T_0 uzayıdır.

b) ($\Leftarrow$): Uyarı 2.2.2. c)'den açıktır.

(⇒): X, C-D_1 uzayı olsun. Bu takdirde; Tanım 2.2.4.'e göre, x,y∈X (x≠y) için x∈S_1 (∋ y∉S_1) ve y∈S_2 (∋ x∉S_2) olacak şekilde S_1, S_2∈cD(X,τ) kümeleri vardır. S_1,S_2∈cD(X,τ)olduğundan; C_1≠X, S_1= C_1\$C_2$ ve C_3≠X, S_2=C_3\$C_4$ olacak şekilde C_1, C_2, C_3, C_4∈C(X,τ) kümeleri vardır. x∉S_2 olduğundan; ya x∉C_3 ya da x∈C_3 ve x∈C_4 şeklinde iki durum vardır:

1- x∉C_3 olsun. y∉S_1 olduğundan; burada iki alt durum vardır:

(a) y∉C_1'dir. x∈S_1=C_1\$C_2$ olduğundan; x∈C_1\(C_2∪C_3) olur. Ayrıca; y∈S_2=C_3\$C_4$ olduğundan; y∈C_3\(C_1∪C_4) olur. Buradan; [C_1\(C_2∪C_3)]∩[C_3\(C_1∪C_4)]=∅ elde edilir.

(b) y∈C_1 ve y∈C_2'dir. x∈S_1=C_1\$C_2$ ve y∈C_2 olduğundan; (C_1\$C_2$)∩$C_2$=∅ olur.

2- x∈C_3 ve x∈C_4 olsun. Bu durumda; y∈S_2=C_3\$C_4$ ve x∈C_4 olduğundan; (C_3\$C_4$)∩$C_4$=∅ olur. Böylece; X'in C-D_2 uzayı olduğu elde edilir.

Teorem 2.2.5: Eğer X, C-D_1 uzayı ise; bu takdirde X, C-T_0 uzayıdır ([8],Teorem 3.2.).

Uyarı 2.1.3.'de her C-kümenin cD-küme olduğu, ancak tersinin genelde doğru olmadığı verilmişti. "Acaba bu önermenin tersi ne zaman doğrudur? Aşağıdaki teoremde bu durumu inceledik.

Teorem 2.2.6: (X,τ), C-T_2 uzayı olsun. Bu takdirde; X uzayındaki her cD-açık küme, C-kümedir.

İspat: Herhangi bir S∈cD(X,τ) kümesi verilsin. Bu takdirde; Tanım 2.1.1. a)'ya göre C_1≠X ve S=C_1\C_2 olacak şekilde C_1,C_2∈C(X,τ) kümeleri vardır. X, C-T_2 uzayı olduğundan; x,y∈X (x≠y) için, x∈C_1, y∈C_2 ve C_1∩C_2=∅ olacak şekilde C_1,C_2∈C(X,τ) kümeleri vardır. C_1∩C_2=∅ olduğundan; C_1⊂(X-C_2) olur.

$S=C_1 \setminus C_2 = C_1 \cap (X-C_2)$ ve $C_1 \subset (X-C_2)$ olduğundan; $S=C_1$ olur. Bu ise; $C \in cD(X,\tau)$ olduğunu gösterir.

Teorem 2.2.7: Eğer $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ semi sürekli, örten bir dönüşüm ve $S\subset Y$ bir D-küme ise, bu takdirde $f^{-1}(S) \subset X$, bir semi-D kümedir ([8], Teorem 3.3).

İspat: $S\subset Y$, bir D-küme olsun. O halde Tanım 2.1.1. b)'de verilen D-küme tanımına göre; $C_1 \neq Y$ ve $S=C_1 \setminus C_2$ olacak şekilde $C_1, C_2 \in \varphi$ açık kümeleri vardır. f, semi sürekli bir fonksiyon olduğundan; Tanım 1.2.4. a)'ya göre, $f^{-1}(C_1)$, $f^{-1}(C_2) \subset X$ alt kümeleri birer semi-açık kümelerdir. $C_1 \neq Y$ ve f fonksiyonu, örten olduğundan; $f^{-1}(C_1) \neq X$ olur. O halde Tanım 2.1.1. c)'ye göre; S, X'de bir semi-D kümedir.

Teorem 2.2.8: Eğer (Y,φ) bir D_1-uzayı ve $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ semi-sürekli, birebir, örten bir fonksiyon ise; bu takdirde X, bir semi-D_1 uzayıdır ([8],Teorem 3.4).

İspat: (Y,φ), bir D_1-uzayı olsun. Herhangi bir $x,y \in X$ $(x\neq y)$ nokta çifti verilsin. f, birebir bir fonksiyon ve (Y,φ), D_1-uzayı olduğundan;

$$f(x)\in S_x\,(\ni f(y)\notin S_x) \text{ ve } f(y)\in S_y\,(\ni f(x)\notin S_y)$$

olacak şekilde S_x, $S_y \subset X$ D-kümeleri vardır. Teorem 2.2.7.'ye göre;

$$x\in f^{-1}(S_x),\ (\ni y\notin f^{-1}(S_x)) \text{ ve } y\in f^{-1}(S_y)\ (\ni x\notin f^{-1}(S_y))$$

olacak şekilde $f^{-1}(S_x)$, $f^{-1}(S_y) \subset X$ semi-D-kümeleri vardır. Buradan X, bir semi-D_1 uzayı olur.

Teorem 2.2.7. ve Teorem 2.2.8.'i C-sürekli fonksiyonlar için şöyle düzenledik.

Teorem 2.2.9: $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ C-sürekli, örten bir fonksiyon ve $S\subset Y$ bir D-küme ise; bu takdirde $f^{-1}(S) \in cD(X,\tau)$ olur.

İspat: $S \subset Y$, D-kümesi verilsin. O halde Tanım 2.1.1. b)'ye göre; $C_1 \neq Y$ ve $S = C_1 \setminus C_2$ olacak şekilde $C_1, C_2 \in \varphi$ açık kümeleri vardır. f, C-sürekli bir fonksiyon olduğundan; $f^{-1}(C_1), f^{-1}(C_2) \in C(X,\tau)$ olur. Ayrıca f, örten bir fonksiyon olduğundan; $C_1 \neq Y$ ise; $f^{-1}(C_1) \neq X$ olur. Buradan; $f^{-1}(S) = f^{-1}(C_1 \setminus C_2) = f^{-1}(C_1) \setminus f^{-1}(C_2) \subset X$, bir cD-küme olur.

Teorem 2.2.10: Eğer (Y,φ) D_1-uzayı ve $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ C-sürekli, birebir ve örten bir fonksiyon ise; bu takdirde (X,τ), C-D_1 uzayıdır.

İspat: Varsalım ki; (Y,φ), D_1-uzay ve $x, y \in X$ $(x \neq y)$ olsun. f fonksiyonu, birebir ve (Y,φ), D_1-uzay olduğundan;

$$f(x) \in S_x \;(\ni f(y) \notin S_x) \text{ ve } f(y) \in S_y \;(\ni f(x) \notin S_y)$$

olacak şekilde $S_x, S_y \subset X$ D-kümeleri vardır. Teorem 2.2.9.'a göre;

$$x \in f^{-1}(S_x) \;(\ni y \notin f^{-1}(S_x)) \text{ ve } y \in f^{-1}(S_y) \;(\ni x \notin f^{-1}(S_y))$$

olacak şekilde $f^{-1}(S_x), f^{-1}(S_y) \in cD(X,\tau)$ kümeleri vardır. Dolayısıyla Tanım 2.2.4.'e göre (X,τ), C-D_1 uzayı olur.

Süzgeç tabanının yakınsama kavramı, cD-kümeler ve D-kümeler yardımıyla [8]'de aşağıdaki gibi geliştirilmiştir.

Tanım 2.2.6: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. $x \in X$ noktasını kapsayan her $A \subset X$ cD-kümesi için, $B_1 \subset A$ olacak şekilde bir $B_1 \in \beta$ varsa; bu takdirde β süzgeç tabanına $x \in X$ noktasında cD-yakınsaktır.

Tanım 2.2.7: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. $x \in X$ noktasını kapsayan her $A \subset X$ D-kümesi için, $B_1 \subset A$ olacak şekilde bir $B_1 \in \beta$ varsa; bu takdirde β süzgeç tabanına $x \in X$ noktasında D-yakınsaktır.

"cD-yakınsaklık kavamı, C-sürekli fonksiyonlarla korunur mu?" şeklindeki soru [8], Teorem 3.7. ile cevaplanmıştır.

Teorem 2.2.11: Eğer $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonu, C-sürekli ve örten ise; bu takdirde her $x\in X$ noktası ve x'e cD-yakınsayan X'deki her β süzgeç tabanı için $f(\beta)$ süzgeç tabanı f(x)'e D-yakınsaktır.

İspat: $x\in X$ ve β, x'e cD-yakınsayan herhangi bir süzgeç tabanı olsun. f, C-sürekli ve örten olduğundan; Teorem 2.2.9.'a göre, $f(x)\in Y$ noktasını kapsayan her $V\subset Y$ D-kümesi için, $f^{-1}(V)\subset X$ bir cD-açık kümedir. Ayrıca β x'e cD-yakınsak olduğundan; Tanım 2.2.6.'ya göre, $B_1\subset f^{-1}(V)$ ve dolayısıyla $f(B_1)\subset V$ olacak şekilde bir $B_1\in\beta$ vardır. Buradan Tanım 2.2.7.'ye göre; $f(\beta)$ süzgeç tabanı, $f(x)\in Y$ noktasına D-yakınsak olur.

1.2.4.Teorem'de verilen C-sürekliliğin C-yakınsaklık ile ilgili karakterizasyonunu, cD-süreklilik için aşağıdaki gibi genelleştirdik.

Teorem 2.2.12: $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonunun cD-sürekli olması için gerek ve yeter şart, her $x\in X$ noktası ve x'e cD-yakınsayan her $\beta\subset X$ süzgeç tabanı için, $f(\beta)$ süzgeç tabanının, f(x)'e yakınsamasıdır.

İspat: İspat, Teorem 1.2.4.'ün ispatına benzer şekilde yapılır.

"C-irresolute fonksiyon" altında cD-kümenin ters görüntüsünün nasıl bir küme olduğu [8], Teorem 3.5.'de aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 2.2.13: Eğer $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ C-irresolute, örten bir fonksiyon ve $S\subset Y$ bir cD-küme ise; bu takdirde $f^{-1}(S)\subset X$ bir cD-kümedir.

İspat: Herhangi bir $S\subset Y$ cD-kümesi verilsin. O halde; Tanım 2.1.1. a) şıkkına göre, $C_1\neq Y$ ve $S=C_1\setminus C_2$ olacak şekilde $C_1,C_2\in C(Y,\varphi)$ kümeleri vardır. f, C-irresolute bir fonksiyon olduğundan; Tanım 1.2.12.'ye göre $f^{-1}(C_1)$, $f^{-1}(C_2)\in C(X,\tau)$ olur. Ayrıca f fonksiyonu, örten olduğundan; $C_1\neq Y$ ise, $f^{-1}(C_1)\neq X$ olur. Buradan;

$f^{-1}(S)=f^{-1}(C_1\setminus C_2)= f^{-1}(C_1)\setminus f^{-1}(C_2)\subset X$ alt kümesi, Tanım 2.2.1. a) şıkkına göre bir cD-kümedir.

Süzgeç tabanının yakınsaması kavramı, sürekli fonksiyonlarla korunur([2]). cD-yakınsaklık kavramının, C-irresolute fonksiyonlarla korunduğu E. Hatır ve T. Noiri[8] tarafından gösterilmiştir. [8], Sonuç 3.1.'de verilen bu ifade, aşağıdaki gibidir.

Sonuç 2.2.3: Eğer $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ C-irresolute ve örten bir fonksiyon ise; bu takdirde her $x\in X$ noktası ve x'e cD-yakınsayan her $\beta\subset X$ süzgeç tabanı için, $f(\beta)\subset Y$ süzgeç tabanı f(x)'e cD-yakınsar.

"C-D_1 uzay olma özelliği, C-irresolute fonksiyonlarla korunur mu?" sorusu [8]'de şöyle cevaplandırılmıştır.

Teorem 2.2.14: (X,τ) uzayının C-D_1 uzayı olması için gerek ve yeter şart, her $x,y\in X(x\neq y)$ nokta çifti için, $f(x)\neq f(y)$ olacak şekilde (X,τ) topolojik uzayından (Y,φ) C-D_1 uzayı üzerine tanımlanan C-irresolute ve örten bir f fonksiyonunun var olmasıdır.

İspat :($\Rightarrow$): $i:(X,\tau)\rightarrow(X,\tau)$ birim fonksiyonunu almak yeterlidir.

($\Leftarrow$): $x,y\in X(x\neq y)$ olsun. Hipotezlere göre; $f(x)\neq f(y)$ olacak şekilde X'den C-D_1 uzayı olan Y üzerine tanımlanan C-irresolute, örten bir f fonksiyonu vardır. Y, C-D_1 uzayı olduğundan; Tanım 2.2.4.'e göre,

$$f(x)\in S_x\ (\ni f(y)\notin S_x) \text{ ve } f(y)\in S_y\ (\ni f(x)\notin S_y)$$

olacak şekilde $S_x,S_y\in cD(Y,\varphi)$ kümeleri vardır. f, C-irresolute ve örten bir fonksiyon olduğundan; Teorem 2.2.13.'e göre,

$$x\in f^{-1}(S_x))\ (\ni y\notin f^{-1}(S_x)) \text{ ve } y\in f^{-1}(S_y)\ (\ni x\notin f^{-1}(S_y))$$

olacak şekilde $f^{-1}(S_x)$, $f^{-1}(S_y)\in cD(X,\tau)$ kümeleri vardır. Bu ise; Tanım 2.2.4.'e göre, X uzayının C-D_1 uzayı olduğunu gösterir.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.4: C-D_1-uzay olma özelliği, C- irresolute fonksiyonlarla korunur.

"C-D_1 uzay olma özelliğinden daha kuvvetli olan C-D_2 uzay olma özelliği, hangi şartlar altında C-irresolute fonksiyonlarla korunur?" şeklindeki soruyu, aşağıda cevaplamaya çalıştık.

Teorem 2.2.15 :(X,τ) uzayının C-D_2 uzayı olması için gerek ve yeter şart, her $x,y\in X$ $(x\neq y)$ nokta çifti için $f(x)\neq f(y)$ olacak şekilde (X,τ) topolojik uzayından (Y,φ) C-D_2 uzayı üzerine tanımlanan C-irresolute, örten bir f fonksiyonun var olmasıdır.

İspat : (⇒): $i:(X,\tau)\rightarrow(X,\tau)$ birim fonksiyonunu almak yeterlidir.

(⇐): $(x,y)\in X(x\neq y)$ olsun. Hipotezlerden; $f(x)\neq f(y)$ olacak şekilde X'den C-D_2 uzayı olan Y üzerine tanımlanan C-irresolute ve örten bir f fonksiyonu vardır. Y, C-D_2 uzayı olduğundan; Tanım 2.2.5.'e göre, $f(x)\in S_x$, $f(y)\in S_y$ ve $S_x\cap S_y=\varnothing$ olacak şekilde $S_x,S_y\in cD(Y,\varphi)$ kümeleri vardır. f, C-irresolute ve örten bir fonksiyon olduğundan; Teorem 2.2.13.'e göre,

$$x\in f^{-1}(S_x),\ y\in f^{-1}(S_y) \text{ ve } f^{-1}(S_x\cap S_y)= f^{-1}(S_x)\cap f^{-1}(S_y)=\varnothing$$

olacak şekilde $f^{-1}(S_x)$, $f^{-1}(S_y)\in cD(X,\tau)$ kümeleri vardır. Bu da, Tanım 2.2.5.'e göre, X uzayının C-D_2 uzayı olduğunu gösterir.

Bu teoremden aşağıdaki sonucu elde ettik.

Sonuç 2.2.5: C-D_2-uzayı olma özelliği, C-irresolute fonksiyonlarla korunur

"$f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer. her $F\subset X$ kapalı kümesi için, $f(F)\subset Y$ kapalı küme ise; bu takdirde f fonksiyonuna, kapalı fonksiyon denir([25], 2.3.1.Tanım). "$f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonunun sürekli ve kapalı olması için gerek ve yeter şart, her $A\subset X$ kümesi için $f(\overline{A})=\overline{[f(A)]}$ olmasıdır.([25], 2.3.4.Teorem)" şeklindeki teoremi, cD-sürekli ve kapalı fonksiyon için aşağıdaki gibi verdik.

Teorem 2.2.16: $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonu cD-sürekli ve kapalı ise; bu takdirde her $A\subset X$ kapalı alt kümesi için, $f([A]_{cD})=\overline{[f(A)]}$ 'dır.

İspat: f, kapalı ve cD-sürekli bir fonksiyon olsun.f fonksiyonu, cD-sürekli olduğundan; Teorem 2.2.2. b) şıkkına göre, $f([A]_{cD})\subset\overline{[f(A)]}$ olur. Ayrıca f, kapalı bir fonksiyon olduğundan; her $A\subset X$ kapalı kümesi için, $f(A)\subset Y$ kapalıdır. O halde; $f([A]_{cD})\subset\overline{[f(A)]}=f(A)$ olur. $A\subset[A]_{cD}$ bağıntısından $\overline{[f(A)]}\subset f([A]_{cD})$ ifadesi elde edilir.

Grafiğin kapalılığı kavramı; S. Jafari[10] tarafından C-kümeler için, Tanım 1.2.12'de incelediğimiz üzere; grafiğin strongly C-kapalı olması şeklinde genelleştirilmişti. cD-kümeler için, grafiğin kapalı olması tanımını aşağıdaki gibi verdik.

Tanım 2.2.6: $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonu ile f'nin G_f grafiği verilsin. Eğer her $(x,y)\in[(X\times Y)-G_f]$ için, $(U\times V)\cap G_f=\varnothing$ olacak şekilde x'i kapsayan bir U cD-kümesi ve y'yi kapsayan bir V açık kümesi varsa; bu takdirde f fonksiyonunun G_f grafiğine strongly cD-kapalı denir.

Bir fonksiyonun grafiğinin strongly cD-kapalı olması ile ilgili aşağıdaki karakterizasyonu verelim.

Lemma 2.2.1: $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonunun G_f grafiğinin strongly cD-kapalı olması için gerek ve yeter şart, her $(x,y)\notin G_f$ için $f(U)\cap V=\varnothing$ olacak şekilde x'i kapsayan bir U cD-kümesi ve y'yi kapsayan bir V açık kümesinin var olmasıdır.

cD-süreklilik ve strongly cD-kapalılık kavramlarını aşağıdaki gibi karşılaştırdık.

Uyarı 2.2.2: Bir fonksiyonun cD-sürekli olması, grafiğinin strongly cD-kapalı olmasını gerektirmez.

Örnek 2.2.2: f fonksiyonu Örnek 1.2.1.'de verilen fonksiyon olsun. Aynı örnek'te bu fonksiyonun C-sürekli olduğunu incelemiştik. Uyarı 2.1.3.'e gereği, f fonksiyonu cD-süreklidir. Ancak; $G_f=\{(a,x),(b,x),(c,y),(d,y)\}\subset X\times Y$ kümesi, strongly cD-kapalı değildir. Gerçekten; $(a,y)\notin G_f$ için, $a\in X$ noktasını kapsayan $\{a,b\}\in cD(X,\tau)$ kümesi ile $y\in Y$ noktasını kapsayan $Y\subset Y$ açık kümesi vardır. $f(\{a,b\})=\{x\}$ olup, bu durumda $f(\{a,b\})\cap Y=\{x\}\cap Y=\{x\}\neq\varnothing$ elde edilir. Bu ise; Teorem 2.2.6.'ya göre G_f'nin strongly cD-kapalı olmadığını gösterir.

Uyarı 2.2.3: Bir fonksiyonun grafiğinin strongly cD-kapalı olması, fonksiyonun cD-sürekli olmasını gerektirmez.

Örnek 2.2.3: f fonksiyonu, Örnek 1.2.2.'de tanımlanan fonksiyon olsun. f'nin G_f grafiği strongly cD-kapalı olmasına rağmen; f fonksiyonu cD-sürekli değildir. Gerçekten;

1- $(a,y)\notin G_f$ için, $a\in X$ noktasını kapsayan $\{a\}\in cD(X,\tau)$ kümesi ile $y\in Y$ noktasını kapsayan $\{y\}\in\varphi$ kümesi vardır. Bu durumda; $f(\{a\})\cap\{y\}=\{x\}\cap\{y\}=\varnothing$ olur.

2- $(a,z)\notin G_f$ için, $a\in X$ noktasını kapsayan $\{a\}\in cD(X,\tau)$ kümesi ile $z\in Y$ noktasını kapsayan $\{z\}\in\varphi$ kümesi vardır. Bu durumda; $f(\{a\})\cap\{z\}=\{x\}\cap\{z\}=\varnothing$ olur.

3- $(b,y)\notin G_f$ için, $b\in X$ noktasını kapsayan $\{b\}\in cD(X,\tau)$ kümesi ile $y\in Y$ noktasını kapsayan $\{y\}\in\varphi$ kümesi vardır. Bu durumda; $f(\{b\})\cap\{y\}=\{x\}\cap\{y\}=\varnothing$ olur.

4- $(b,z)\notin G_f$ için, $b\in X$ noktasını kapsayan $\{b\}\in cD(X,\tau)$ kümesi ile $z\in Y$ noktasını kapsayan $\{z\}\in\varphi$ kümesi vardır. Bu durumda; $f(\{b\})\cap\{z\}=\{x\}\cap\{z\}=\varnothing$ olur.

5- $(c,x)\notin G_f$ için, $c\in X$ noktasını kapsayan $\{c\}\in cD(X,\tau)$ kümesi ile $x\in Y$ noktasını kapsayan $\{x\}\in\varphi$ kümesi vardır. Bu durumda; $f(\{c\})\cap\{x\}=\{y\}\cap\{x\}=\varnothing$ olur.

6- $(c,z)\notin G_f$ için, $c\in X$ noktasını kapsayan $\{c\}\in cD(X,\tau)$ kümesi ile $z\in Y$ noktasını kapsayan $\{z\}\in\varphi$ kümesi vardır. Bu durumda; $f(\{c\})\cap\{z\}=\{y\}\cap\{z\}=\varnothing$ olur.

7- $(d,x)\notin G_f$ için, $d\in X$ noktasını kapsayan $\{d\}\in cD(X,\tau)$ kümesi ile $x\in Y$ noktasını kapsayan $\{x\}\in\varphi$ kümesi vardır. Bu durumda; $f(\{d\})\cap\{x\}=\{z\}\cap\{x\}=\varnothing$ olur.

8- $(d,y)\notin G_f$ için, $d\in X$ noktasını kapsayan $\{d\}\in cD(X,\tau)$ kümesi ile $y\in Y$ noktasını kapsayan $\{y\}\in\varphi$ kümesi vardır. Bu durumda; $f(\{d\})\cap\{y\}=\{z\}\cap\{y\}=\varnothing$ olur.

Böylece G_f , strongly cD-kapalıdır. Ancak; $x,y \in Y$ noktalarını kapsayan $\{x,y\} \subset Y$ açık kümesi için $f^{-1}(\{x,y\})=\{a,b,c\} \notin cD(X,\tau)$ olur. Bu ise; f'nin a,b ve c noktalarında cD-sürekli olmadığını gösterir. Dolayısıyla; f fonksiyonu, cD-sürekli değildir.

[12], Teorem 1.'de; (Y,φ) değer uzayının T_2-uzay olması durumunda f fonksiyonunun sürekliliğinin G_f grafiğinin kapalılığını gerektirdiği verilmiştir. cD-süreklilik ve strongly cD-kapalılık kavramları için, aşağıdaki teoremi verdik.

Teorem 2.2.17: $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu cD-sürekli ve (Y,φ), T_2-uzayı ise; bu takdirde G_f, strongly cD-kapalıdır.

İspat: $(x,y)\in[(X\times Y)- G_f]$ olsun. Buradan $y\neq f(x)$ 'dir. Y, T_2-uzayı olduğundan; $V\cap W=\varnothing$ olacak şekilde Y'de sırasıyla y ve f(x)'i kapsayan V ve W açık kümeleri vardır. f, cD-sürekli olduğundan; Tanım 2.2.1.'e göre; $f(U)\subset W$ olacak şekilde $x\in X$'i kapsayan bir $U\in cD(X,\tau)$ kümesi vardır. $V\cap W=\varnothing$ ve $f(U)\subset W$ olduğundan ; $f(U)\cap V=\varnothing$ olur. Bu ise; Lemma 2.2.1.'e göre, G_f'nin $X\times Y$'de strongly cD-kapalı olması demektir.

Uyarı 2.2.4: cD-sürekli iki fonksiyonun bileşkesinin cD-sürekli olması gerekmez.

Örnek 2.2.4: f, Örnek 1.2.5.'te tanımlanan f fonksiyonu ve g; Örnek 1.2.1.'de tanımlanan f fonksiyonu olsun. f, birim fonksiyon olduğundan süreklidir. Uyarı 1.2.1. ve Uyarı 2.2.1. gereği f fonksiyonu, cD-süreklidir. Diğer taraftan; g fonksiyonunun C-sürekli olduğunu Örnek 1.2.1.'de incelemiştik. O halde; Uyarı 2.2.1. gereği g fonksiyonu, cD-süreklidir. Buradan; $gof:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonunun cD-sürekli olup olmadığına bakalım. g fonksiyonu, cD-sürekli olduğundan; Tanım 2.2.1.'e göre $x\in Y$ noktasını kapsayan $\{x\}\subset Y$ açık kümesi için, $g^{-1}(\{x\})=\{a,b\}\in cD(X,\tau)$ ifadesini yazarız. Ancak; $\{a,b\}\notin\tau$ olduğundan; Tanım 2.2.1.'e göre gof bileşke fonksiyonunun cD-sürekli olmadığını elde ederiz.

"Acaba cD-sürekli fonksiyonun hangi genelleştirilmiş sürekli fonksiyon ile bileşkesi cD-süreklidir?" Bunun için aşağıdaki tanımı verelim:

Tanım 2.2.7: $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer, her $A\subset Y$ cD-kümesi için, $f^{-1}(A)\subset X$ cD-küme ise; bu takdirde f fonksiyonuna , cD-irresolute denir.

Teorem 2.2.18: $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$, cD-irresolute bir fonksiyon ve $g:(Y,\varphi)\to(Z,\sigma)$ cD-sürekli bir fonksiyon ise; $gof:(X,\tau)\to(Z,\sigma)$ bileşke fonksiyonu cD-süreklidir.

İspat: Tanım 2.2.1.'in eşdeğeri olarak; $\forall V\in\sigma$ için $(gof)^{-1}(V)\in cD(X,\tau)$ olduğunu göstermeliyiz. g fonksiyonunun cD-sürekliliğinden; $\forall V\in\sigma$ için, $g^{-1}(V)\in cD(X,\tau)$ olur. Bu takdirde; $(gof)^{-1}(V)=f^{-1}(g^{-1}(V))$, f'nin cD-irresolute bir fonksiyon olmasından ; Tanım 2.2.6.'ya göre, X'de bir cD-kümedir. Böylece gof bileşke fonksiyonu , cD-süreklidir.

Teorem 2.2.19: $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$, cD-sürekli bir fonksiyon ve $g:(Y,\varphi)\to(Z,\sigma)$ sürekli bir fonksiyon ise ; bu takdirde $gof:(X,\tau)\to(Z,\sigma)$ bileşke fonksiyonu cD-süreklidir.

İspat: Tanım 2.2.1.'in eşdeğeri olarak; $\forall V\in\sigma$ için $(gof)^{-1}(V)\in cD(X,\tau)$ olduğunu göstermeliyiz. g fonksiyonunun sürekliliğinden; $\forall V\in\sigma$ için, $g^{-1}(V)\in\varphi$ olur. Bu takdirde f, cD-sürekli bir fonksiyon olduğundan Tanım 2.2.1.'e göre, $(gof)^{-1}(V)=f^{-1}(g^{-1}(V))$, X'de bir cD-kümedir. Böylece gof bileşke fonksiyonu cD-süreklidir.

"(Y,φ) topolojik uzay olmak üzere; $f:Y\to X_1\times X_2$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart, π_1 ve π_2 izdüşüm fonksiyonları için $\pi_1 of:Y\to X_1$

ve $\pi_2 of : Y \to X_2$ fonksiyonlarının sürekli olmasıdır." teoremini cD-süreklilik için aşağıdaki gibi geliştirdik.

Teorem 2.2.20: (Y,φ) topolojik uzay olmak üzere; $f : Y \to X_1 \times X_2$ fonksiyonunun cD-sürekli olması için gerek ve yeter şart π_1 ve π_2 izdüşüm fonksiyonları için, $\pi_1 of : Y \to X_1$ ve $\pi_2 of : Y \to X_2$ fonksiyonlarının cD-sürekli olmasıdır.

İspat: **($\Rightarrow$):** f, cD-sürekli bir fonksiyon olsun. $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ ve $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ izdüşüm fonksiyonları daima sürekli olduğundan; Uyarı 1.2.1. ve Uyarı 2.1.1.'e göre $\pi_1 of$ ve $\pi_2 of$ fonksiyonları cD-sürekli olur.

($\Leftarrow$): $\pi_1 of$ ve $\pi_2 of$ bileşke fonksiyonları cD-sürekli olsunlar. O halde; $\forall T_1 \subset X_1$ açık kümesi için, $(\pi_1 of)^{-1}(T_1) = f^{-1}(\pi_1^{-1}(T_1)) \subset Y_1$ cD-kümedir. Ayrıca; π_1 izdüşüm fonksiyonu sürekli olduğundan; $\forall T_1 \subset X_1$ açık kümesi için, $\pi_1^{-1}(T_1) \subset X_1 \times X_2$ açık kümedir. $\forall T_1 \subset X_1$ açık kümesi için, $\pi_1^{-1}(T_1) \subset X_1 \times X_2$ açık küme ve $f^{-1}(\pi_1^{-1}(T_1)) \subset Y$ cD-küme olduğundan; Tanım 2.2.1.'in eşdeğer tanımından f cD-sürekli olur. Benzer şekilde; $\forall T_2 \subset X_2$ açık kümesi için, $(\pi_2 of)^{-1}(T_2) = f^{-1}(\pi_2^{-1}(T_2)) \subset Y$, bir cD-kümedir. Yine π_2 izdüşüm fonksiyonu sürekli olduğundan; $\forall T_2 \subset X_2$ açık kümesi için; $\pi_2^{-1}(T_2) \subset X_1 \times X_2$ açık kümedir ve $f^{-1}(\pi_2^{-1}(T_2)) \subset Y$ cD-küme olduğundan; Tanım 2.2.1.'e göre f, cD-sürekli olur.

Kompakt uzay tanımı; [10], Tanım 2.5.'te C-kümeler için, C-kompakt uzay olarak genelleştirilmiştir. cD-kümeler ve D-kümeler için, cD-kompakt uzay ve D-kompakt uzay kavramları [8], Tanım 3.5. ile aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 2.2.8: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer X'in cD-kümelerden oluşan her örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa; bu takdirde X'e cD-kompakt uzay denir.

Tanım 2.2.9: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer X'in D-kümelerden oluşan her örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa; bu takdirde X'e D-kompakt uzay denir.

"cD-kompakt uzay kavramı, C-sürekli fonksiyonlarla korunur mu?" sorusu [8], Teorem 3.8.'de aşağıdaki gibi cevaplanmıştır.

Teorem 2.2.21: $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ C-sürekli ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer X cD-kompakt uzay ise ; bu takdirde f(X) D-kompakttır.

İspat: γ, V'nin D-kümelerden oluşan bir örtüsü olsun. f, C-sürekli ve örten bir fonksiyon olduğundan; $f^{-1}(\gamma)=\{f^{-1}(V)\,|\,V\in\gamma\}$, X'in cD-kümelerden oluşan bir örtüsüdür. X, cD-kompakt uzay olduğundan; Tanım 2.2.8.'e göre X'in bir $\{f^{-1}(V_1),...,f^{-1}(V_n)\}$ alt örtüsü vardır. Dolayısıyla $\{V_1,...,V_n\}$ Y'nin D-kümelerden oluşan sonlu bir alt örtüsüdür. Böylece f(X), Tanım 2.2.9.'a göre D-kompakttır.

Sonuç 2.2.6: cD-kompaktlık kavramı, C-sürekli fonksiyonlarla korunmaz.

Teorem 2.2.21.'i cD-sürekli fonksiyonlardan yararlanarak aşağıdaki gibi geliştirdik.

Teorem 2.2.22: $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ cD-sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer X cD-kompakt uzay ise, bu takdirde f(X) görüntüsü kompakt uzaydır.

İspat: γ, Y'nin açık kümelerden oluşan herhangi bir örtüsü olsun. f, cD-sürekli olduğundan; her $i\in I$ için, $f^{-1}(A_i)\in cD(X,\tau)$ olur. Ayrıca

$$X\subset f^{-1}(f(X))\subset f^{-1}(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(A_i)$$

olur. Böylece $\{f^{-1}(A_i)\subset X\,|\,i\in I\}$ ailesi, X uzayının cD-kümelerden oluşan bir örtüsüdür. X, bir cD-kompakt uzay olduğundan $X=\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(A_i)$ olur. Buradan her

$i \in \{1, \ldots, n\}$ için. $f(f^{-1}(A_i)) \subset A_i$ olduğundan $f(X) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ olur. O halde f(X) kümesi Y'de kompakttır.

Sonuç 2.2.8: $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ C-irresolute, örten bir fonksiyon olsun. Eğer X uzayı cD-kompakt ise; bu takdirde Y uzayı da cD-kompakttır ([8], Sonuç 3.2.).

Bağlantılı uzay kavramı; S. Jafari[10] tarafından C-kümeler için, C-bağlantılı uzay şeklinde geliştirilmiştir. Söz konusu kavram cD-kümeler ve D-kümeler için, E. Hatır ve T. Noiri[8] tarafından aşağıdaki gibi geliştirilmiştir.

Tanım 2.2.8: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer X, boş olmayan iki cD-kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa; bu takdirde X uzayına cD-bağlantılıdır denir ([8], Tanım 3.6.).

Tanım 2.2.9: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer X, boş olmayan iki D-kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa; bu takdirde X uzayına D-bağlantılıdır denir ([8], Tanım 3.6.).

Bağlantılılık kavramının sürekli fonksiyonlarla korunduğu [25], 7.2.7.Teorem'de verilmiştir. "cD-bağlantılı uzay kavramı, cD-sürekli fonksiyonlarla korunur mu?" şeklindeki soruyu aşağıda cevaplamaya çalıştık.

Teorem 2.2.23: $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonu cD-sürekli, örten ve X, cD-bağlantılı bir uzay ise; bu takdirde Y uzayı, bağlantılıdır.

İspat: Varsayalım ki; Y uzayı, bağlantılı olmasın. Bu takdirde; $V\cap W=\varnothing$ ve $V\cup W=Y$ olacak şekilde her biri boş olmayan, V ve W açık kümeleri vardır. Burada, f altında ters görüntü alırsak; $f^{-1}(V)\cap f^{-1}(W)=\varnothing$ ve $f^{-1}(V)\cup f^{-1}(W)=X$ ifadelerini elde ederiz. f fonksiyonu, örten olduğundan; $f^{-1}(V)\neq\varnothing\neq f^{-1}(W)$ olur. Ayrıca; f fonksiyonu, cD-sürekli bir fonksiyon olduğundan; Tanım 2.2.1.'in eşdeğer tanımına göre; $f^{-1}(V)$, $f^{-1}(W)\in cD(X,\tau)$ olur. Bu ise; X'in cD-bağlantılı uzay olmasıyla çelişir. O halde; Y uzayı, bağlantılıdır.

Bu teoremden faydalanıp, aşağıdaki sonucu verdik.

Sonuç 2.2.9: cD-bağlantılılık kavramı, cD-sürekli fonksiyonlarla korunmaz.

cD-bağlantılı uzayın C-sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsünün hangi çeşit bağlantılı uzay olduğu, [8]'de aşağıdaki gibi verilmiştir. İspatsız olarak verilen bu teoremin ispatını, aşağıda yapmaya çalıştık.

Teorem 2.2.24: $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonu C-sürekli, örten ve X, cD-bağlantılı bir uzay ise; bu takdirde Y uzayı, D-bağlantılıdır.

İspat: Varsayalım ki; Y uzayı D-bağlantılı olmasın. Bu takdirde; Tanım 2.2.11.'e göre Y, her biri boş olmayan iki D-kümenin birleşimi olarak yazılır. Tanım 1.2.1., Tanım 2.1.1. a) ve b) gereği; D-kümenin C-sürekli bir fonksiyon altında ters görüntüsünün cD-küme olduğu açıktır. f fonksiyonu, C-sürekli ve örten olduğundan; X, her biri boş olmayan iki cD-kümenin birleşimi olarak yazılır. Bu ise X uzayının cD-bağlantılı olmasıyla çelişir. O halde; Y uzayı, bağlantılıdır.

Bu teoremden faydalanıp, aşağıdaki sonucu elde ettik.

Sonuç 2.2.10: cD-bağlantılılık kavramı, C-sürekli fonksiyonlarla korunmaz.

"cD-bağlantılılık kavramı hangi çeşit fonksiyonlarla korunur?" şeklindeki soru, [8], Sonuç 3.3.'te aşağıdaki gibi cevaplanmıştır.

Sonuç 2.2.11: Eğer $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ fonksiyonu C-irresolute, örten ve X uzayı, cD-bağlantılı ise; bu takdirde Y uzayı, cD-bağlantılıdır.

İspat: Varsayalım ki; Y uzayı, cD-bağlantılı olmasın. Bu takdirde; Tanım 2.2.10.'un tümleyenini almakla, Y uzayı boş olmayan iki cD-kümenin birleşimi olarak yazılır. Yani; $Y=S_1\cup S_2 \ni S_1\neq\emptyset\neq S_2$'dir. f fonksiyonu, C-irresolute bir fonksiyon olduğundan; Tanım 1.2.12.'ye göre, $f^{-1}(Y)= f^{-1}(S_1\cup S_2)= f^{-1}(S_1)\cup f^{-1}(S_2)$ ifadesindeki $f^{-1}(S_1)$ ve

$f^{-1}(S_2)$ kümeleri, X uzayında birer cD-küme olur. Ayrıca; f fonksiyonu, örten olduğundan; $f^{-1}(Y)=X$ ve $f^{-1}(S_1)\neq\emptyset\neq f^{-1}(S_2)$ olur. Bu ise; X uzayının cD-bağlantılı olmasıyla çelişir. O halde; Y uzayı, cD-bağlantılıdır.

"cD-sürekli fonksiyonun kısıtlanmış fonksiyonu, acaba cD-sürekli midir?" sorusunu, aşağıdaki gibi cevaplamaya çalıştık.

Uyarı 2.2.5: $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer f fonksiyonu cD-sürekli ise; $f|_A:(A,\tau_A)\to(Y,\varphi)$ kısıtlanmış fonksiyonunun cD-sürekli olması gerekmez.

Örnek 2.2.5: f fonksiyonu, Örnek 1.2.6.'da verilen fonksiyon olsun. O halde f, C-süreklidir. Uyarı 2.2.1. gereği bu fonksiyon cD-süreklidir. Ancak; $A=\{a,b,c\}\subset X$ alt kümesi için $f|_A:(A,\tau_A)\to(Y,\varphi)$ kısıtlanmış fonksiyonu cD-sürekli değildir. Gerçekten; $A=\{a,b,c\}\subset X$ için $\tau_A=\{A,\emptyset,\{b\},\{c\},\{b,c\}\}$ olur. $x\in Y$ noktasını kapsayan $\{x\}\subset Y$ açık kümesi için $f^{-1}|_A(\{x\})=\{a,b,d\}\notin cD(A,\tau_A)$ elde edilir. O halde; Tanım 2.2.1.'e göre f fonksiyonunun $A=\{a,b,c\}\subset X$ alt kümesine kısıtlanışı cD-sürekli değildir.

Önerme 2.1.1. ve Önerme 2.1.2. gereği, aşağıdaki sonuçları elde ettik.

Sonuç 2.2.8: cD-sürekli bir fonksiyonun açık küme ve α^*-kümeye kısıtlanışı cD-süreklidir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma sonunda; E. Hatır, T. Noiri ve Ş. Yüksel'in [7] sürekliliğin bir ayrışımı, E.Hatır ve T.Noiri'nin [8] C-D_1 ayırma aksiyomu ve S.Jafari'nin [10] C-süreklilik adlı makalelerinden yararlanarak C-süreklilikten daha zayıf olan cD-süreklilik adlı bir süreklilik çeşidi tanımladık. Bu süreklilik çeşidinin sağladığı bazı özellikleri inceledik ve bazı sonuçlar elde ettik. Bu çalışmada incelemediğimiz fakat topolojik uzaylarda bilinen genel sürekliliğin sağladığı pek çok özelliğin cD-süreklilik için sağlanıp sağlanmadığı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1]. Andrijevic, D., 1986, Semi-preopen sets, Mat. Vesnik, 38,24-32.

[2]. Aslım, G. Genel Topoloji, 1988, Ege Üniv. Fen Fak. Yay. no:109, İzmir.

[3]. Bourbaki, N. General Topology, 1996, Part I, Addison-Wesley (Reading, Mass.).

[4]. Coldas, M., 1997, A seperation axiom between Semi-T_0 and Semi-T_1, mem. Fac. Sci. Kochi Univ. (Math.) 18, 37-42.

[5]. Fomin, S., 1941, Extensions of topological spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 32, pp.114-116.

[6]. Ganster, M. and Reilly, I. L., 1990, A decomposition of continuity, Acta Math. Hungar., 56, 299-301.

[7]. Hatır, E. Noiri T. and Yüksel, Ş., 1996, A decomposition of continuity, Acta Math. Hungar., 70(1-2), 145-150.

[8]. Hatır E. and Noiri, 1998, T. On Seperation Axiom C-D_1, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A_1 V.47, pp. 105-110.

[9]. Husain, T., 1996, Almost Continuous Mappinngs, Prace Math. 10, MR 36=3322.

[10]. Jafari, S., On C-continuous functions (manuscript).

[11]. Levine, N., 1961, A decomposition of continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly, 68, 44-46.

[12]. Levine, N., 1963, Semi-open and semi-continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly, 70, 36-41.

[13]. Long, P. E., 1969, Functions with closed graphs, University of Arkansas.

[14]. Maheshwari, S. N. and Prasad, R., 1975, Some new seperation axioms, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 89, 395-402.

[15]. Mashhour, A. S., Abd-El Monsef, M. E. and El-Deeb, S. N., 1982, On precontinuous and weak precontinuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 53, 47-53.

[16]. Mashhour, A. S., Hasenein, I. A. and El-Deeb, S. N., 1983, α-continuous and α-open mappings, Acta Math. Hungar., 41, 213-218.

[17]. Nijastad, O., 1965, On some classes of nearly open sets, Pacific J. Math., 15, 961-970.

[18]. Noiri, T., 1980, On δ-continuous functions, Korean Math. Soc. J.,16, no: 2,161-166.

[19]. Noiri, T., 1984, On α-continuous functions, Casapis Pest. Mat., 109, 118-126.

[20]. Prezemski, M., 1993, A decomposition of continuity, Acta Math. Hungar., 61, 93-98.

[21]. Singal, M. K. and Singal, A. R, 1968, Almost continuous mappings, Yokohama Math. J., 16, pp. 63-73.

[22]. Tong, J., 1986, A decomposition of continuity in topological spaces, Acta Math. Hungar., 48, 11-15.

[23]. Tong, J., 1989, On decomposition of continuity in topological spaces, Acta Math. Hungar., 54, 51-55.

[24]. Tong, J., 1982, A seperation axiom between T_0 and T_1, Ann. Soc. Sci. Bruxelles 96, 85-90.

[25]. Yüksel, Ş., 1988, Genel Topoloji, S. Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Konya .