

846 15

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER HİPERBOLİK
DENKLEMLER ÜZERİNE BAZI KARIŞIK
PROBLEMLER

OZAN ÖZKAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya, 1999

TC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER HİPERBOLİK
DENKLEMLER ÜZERİNE BAZI KARIŞIK
PROBLEMLER

Ozan ÖZKAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya, 1999


T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

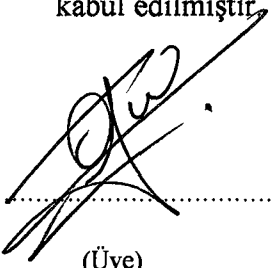
İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER HİPERBOLİK DENKLEMLER
ÜZERİNE BAZI KARIŞIK PROBLEMLER

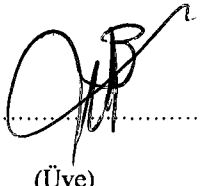
Ozan ÖZKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 30/07/1999 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.


.....
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
(Danışman)


.....
(Üye)
Yrd. Doç. Dr. Galip OTURANÇ


.....
(Üye)
Doç. A. Hilmi BERKSOY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEERHİPERBOLİK DENKLEMLER ÜZERİNE BAZI KARIŞIK PROBLEMLER

Ozan ÖZKAN

Selçuk üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
1999, 30 Sayfa

Juri : Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

Yrd. Doç. Dr Galip OTURANÇ

Doç.A. Hilmi BERKSOY

Bu çalışmada; bir sınıf titreşim denklemleri için ortaya konulmuş başlangıç-sınır değer problemi Fourier yöntemi ve uzaklığa bağlı sonlu farklar yöntemi ile incelenmiştir.

Fourier yöntemi ile yapılan çözümde seri formunda bir analitik çözüm bulunmuştur. Bu çözümün katsayılara bağlı olarak davranışı incelenmiştir.

Uzaklığa bağlı sonlu farklar yöntemi kullanılarak yine aynı problemin çözümü bulunmuş ve bu çözümün de katsayılara bağlı olarak davranışı incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Diferensiyel denklemler, hiperbolik tip denklemler, sonlu farklar yöntemi, Fourier serisi, matrisler teorisi, spectral analiz, çözümün garantiliği

ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

ON THE SOME MIXED PROBLEM FOR LINEAR SECOND-ORDER HYPERBOLIC EQUATION

Ozan ÖZKAN

Selçuk Üniversty
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
1999, 30 page

Jury : Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
Ass. Doç. Dr Galip OTURANÇ
Doç.A. Hilmi BERKSOY

This paper is devoted to the analysis of the problem of the initial-boundary value problem which is defined for some group of wave equations with the Fourier and finite difference methods.

The result obtained by Fourier method gives an analytic solution in series form. And we studied the behavior of this solution with regarding coefficients and data.

The solution of the same problem is found by using the method of finite differences. And we studied the behavior of this solution with regarding coefficients and data.

KEYWORDS: Differential equation, hyperbolic equation, the method of finite differences, Fourier series, matrix theory, spectral analysis, stabilite

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi, Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Yapılan çalışmada bir sınıf titreşim denklemleri için ortaya konulmuş başlangıç-sınır değer problemi, Fourier ve Uzaklığa bağlı sonlu farklar yöntemi ile incelenmiştir.

Sonuç olarak elde edilen bu çözümlerin, problemdeki verilen katsayılarla bağlı olarak nasıl davrandığı incelenmiştir.

Yüksek Lisans tezi olarak böyle bir çalışma yapmam için beni yönlendiren ve çalışmalarım esnasında yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL' e, Tübitak BAYG programı çerçevesinde üniversitemizde görev yapan; bilgi, emek ve tecrübelerini benden esirgemeyen Prof. Dr. Kemal SOLTANAOV ile Doç. Dr. A. Kh. KHANMAMEDOV ve Doç. A. Hilmi BERKSOY' a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım

Ozan ÖZKAN

Konya, 1999

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
1 GİRİŞ.....	1
2 İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER HİPERBOLİK DENKLEMİN FOURIER YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ.....	3
2.1 HOMOJEN DENKLEM ÜZERİNE	3
2.2 HOMOJEN OLMAYAN DENKLEM ÜZERİNE	9
3 BİR TİP n . MERTEBEDEN MATRİSİN ÖZDEĞERLERİNİN İNCELENMESİ.....	11
4 (2.1)-(2.3) KARIŞIK PROBLEMİNİN SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ.....	22
5 SONUÇ.....	27
6 KAYNAKLAR.....	28

1 § GİRİŞ

Bu çalışma, bir sınıf hiperbolik denklemler için karışık problemlerin birkaç yöntemle incelenmesi ve elde edilen sonuçların karşılaştırılmasını içermektedir. Burada göz önüne alınan genel denklem, $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a(t, x) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b(t, x) \frac{\partial U}{\partial t} = h(x, t)$ formunda olup denklemdaki $a(t, x)$, $b(t, x)$ herhangi katsayı ($a(t, x)$, pozitif olmak üzere) fonksiyonlarıdır. Bu denklem ile ortaya konulmuş problemi incelemek için Fourier yöntemi [6], [7], [8], [20], [22], [23], [24] ve fark yöntemi [2], [5], [6], [8], [10], [12], [16], [23] kullanılmıştır. Bu yöntemlerin özelliklerini daha iyi anlamak bakımından ve hesabı basitleştirmek için katsayıları sabit kabul ederek işlem yaptık

Burada amacımız lineer titreşim denklemlerinin çözümlerinin sayısal incelenmesi olduğundan, sabit katsayılı denklemleri göz önüne almanın yeterli olacağını düşündük. Sonlu farklar yöntemi kullanırken amacımız, göz önüne alınan problemi ordinary denklem sistemine indirgemek ve bu ordinary diferensiyel denklem sistemini incelemektir. Ordinary diferensiyel denklem sisteminin özelliklerini incelendikten sonra bunların sayısal çözümlerini yazmakta zorluk olmadığından [2], [3], [5], [8], [9], [10], [11], [12] (Bu soru fazla sayıda literatürde incelenmiştir.) bu kısma çalışma yer vermedik.

Çalışmanın ilk bölümünde homojen denklem için yazılmış olan karışık problem Fourier yöntemi ile incelenmiş, daha sonrada buradan elde edilen sonuçları kullanarak homojen olmayan denklemler için de aynı problem incelenmiştir [1], [6], [13], [15], [18], [19]. Biliniyor ki bu yöntemi kullanırken spectral problemi incelemek gereklidir. Bu yüzden bu bölümde ikinci mertebeden olan adi diferensiyel denklem için spectral problem de incelenmiştir. Bütün bunlar kullanılarak analitik çözüm bulunmuştur.

İkinci bölümde, bir tür n . mertebeden matrisin özdeğer ve özvektörlerinin incelenmesi yapılmıştır ki burada alınan sonuçlar üçüncü bölümde alınan ordinary denklemler sistemini incelemek için gereklidir ve bu denklemler sisteminin katsayılarına bağlı olarak çözümün nasıl davrandığını irdelemeye imkan verir.

Üçüncü bölümde ise, (2.1)-(2.3) problemini farklar yöntemiyle inceledik. Buradaki fark problemini uzaklığa bağlı fark problemi olarak düzenledik. Bu ise sistemi adi diferensiyel denklemler sistemine dönüştürdü. Bu yüzden adi diferensiyel denklem sistemi incelendi. Sonuç olarak, bu bölümde ikinci mertebeden ordinary denklemler sistemi için spectral problemin özelliklerinden faydalanılarak, göz önüne alınan problemin çözümü bulunmuştur.

Bu çalışmanın önemi: Elde edilen sonuçların mühendislik bilimlerinde bazı problemlerin çözümlerinde kullanılabilir ve bu tür problemlerin incelenmesini kolaylaştırmasından kaynaklanmaktadır. Bu bakımdan ikinci bölümde elde edilen sonuçlar; tüm veriler ile özdeğerleri arasındaki bağıntıyı daha iyi açıklıyor. Bu ise pratik kullanımı kolaylaştırır. Burada bulunmuş olan sonuçların bir kısmı I. Türk Matematik Dünyası Sempozyumunda da sunulmuştur [16].



2 § İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER HİPERBOLİK DENKLEMİN FOURIER METODUYLA ÇÖZÜMÜ

2.1 HOMOJEN DENKLEM ÜZERİNE

İkinci mertebeden lineer hiperbolik denklem için aşağıdaki gibi [1], [6], [23] verilen başlangıç değer ve sınır değer problemini göz önüne alalım.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad (t, x) \in Q = R_+ \times [0, \ell] \quad (2.1)$$

$$U(t, 0) = U(t, \ell) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.2)$$

$$U(0, x) = f(x) \quad U_t(0, x) = g(x), \quad x \in [0, \ell] \quad (2.3)$$

Burada; $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlar, a, b katsayıları ise reel sayı, $\ell > 0$ olarak göz önüne alınacaktır.

Şimdi bütün bu veriler ışığında (2.1)-(2.3) probleminin çözümünün aşağıdaki (2.4) eşitliği ile verilen şekilde olup olamayacağını, eğer olursa; çözümün nasıl olacağını irdeleyelim.

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) \quad (2.4)$$

(2.1) denklem formundan görünür ki bağımsız değişkenlere bağlı olarak aranan

$U(t, x)$ fonksiyonunu bu değişkenlere bağlı olarak ayrılabilir. Yani çözümü (2.4) formunda aramanın anlamı vardır. İstenen herhangi bir n değeri için t ve x değişkenleri lineer bağımsız değişkenler olduklarından (2.4) ün (2.1) de yerine yazılması sonucu elde edilen eşitlikten $X_n(x)$ ifadesinin değeri aşağıdaki gibi bulunur.

Öncelikle her bir $X_n(x)$ için;

$$\begin{cases} X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0 & ; \lambda_n \in \mathbb{R}_+ \\ X_n(0) = X_n(\ell) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

problemine ulaşılır ki; bu (2.5) probleminin genel çözümü ;

$$X_n(x) = a_n \cos \sqrt{\lambda_n} x + b_n \sin \sqrt{\lambda_n} x$$

biçimindedir [11]. Bulunan bu genel çözümün verilen

$$X_n(0) = 0 \text{ şartını sağlayan çözüm olmasından}$$

$$a_n = 0$$

bulunur.

$$X_n(\ell) = 0 \text{ şartını sağlamamasından ise}$$

$$\sqrt{\lambda_n} \ell = \pi n \Rightarrow \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{\ell} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

bulunur.

Bu koşullar göz önüne alındığı taktirde aranan çözüm;

$$X_n(x) = b_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x$$

olarak bulunur.

Şimdi; daha sonra kullanmak üzere [7], [19], [23], [24]aşağıdaki lemma' yı verelim

2.1 Lemma:

Keyfi $\ell \neq 0$ için $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right\}$ ailesi $L_2(0, \ell)$ uzayında tam, ortonormal baz ve

aynı zamanda keyfi $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları için (Bu fonksiyonlar $L_2(0, \ell)$ ' de tanımlı fonksiyonlardır) aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

olmak üzere F_n ve G_n katsayıları aşağıdaki formül ile bulunur.

$$F_n = \sqrt{\frac{\ell}{2}} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \, dx$$

$$G_n = \sqrt{\frac{\ell}{2}} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \, dx \quad \therefore$$

Şimdi tekrar problemin çözümüne geri dönersek;

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (2.6)$$

olmak üzere (2.4) eşitliğini (2.1)-(2.3) de kullanırsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) + b T_n'(t) \right) X_n(x) = 0 \quad (2.7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n(x) = f(x) \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) X_n(x) = g(x) \quad (2.8)$$

(2.7) ve (2.8) ile gösterdiğimiz eşitlikleri, 2.1 Lemma.' da göz önünde tutularak problemimiz aşağıdaki hale indirgenecektir. Yani;

$$T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) + T_n'(t) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

$$T_n(0) = F_n \quad , \quad T_n'(0) = G_n \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

problemine ulaşılır. Şimdi bu problemi çözümlayelim; bunun için öncelikle (2.9) denkleminin karakteristik denklemini yazalım:

$$r_n^2 + b r_n + \lambda_n a^2 = 0$$

$$\Delta_n = b^2 - 4\lambda_n a^2$$

$$r_n^{(1)} = \frac{-b + \sqrt{\Delta_n}}{2} \quad r_n^{(2)} = \frac{-b - \sqrt{\Delta_n}}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dir.

Aşağıdaki işlemlerde kullanmak üzere $n_0 = \left\lceil \frac{|b|\ell}{2|a|\pi} \right\rceil$ olarak seçelim. ve bu n_0 '

in alacağı değerlere göre problemin çözümünün nasıl olacağını irdeleyelim.

I.DURUM:

Eğer $\left\lceil \frac{|b|\ell}{2|a|\pi} \right\rceil \notin N$ ise bu taktirde;

$$n \leq n_0$$

şartını sağlayan n değerleri için $\Delta_n > 0$ olup buradan $r_n^{(1)} \neq r_n^{(2)}$ ($\exists r_n^{(1)}, r_n^{(2)} \in R$) olur.

Bu şartlar altında (2.9)' un genel çözümü

$$T_n(t) = A_n e^{r_n^{(1)}t} + B_n e^{r_n^{(2)}t} \quad (n \leq n_0)$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu çözümden (2.10) daki şartlara uyan çözümler ailesini bulmak için de (2.10)' nu yukarıda kullanırsak;

$$\begin{cases} A_n + B_n = F_n \\ r_n^{(1)} A_n + r_n^{(2)} B_n = G_n \end{cases} \quad (2.11)$$

sistemi elde edilir bu (2.11) sisteminin çözümünden A_n ve B_n kasayıları

$$A_n = \frac{r_n^{(2)} F_n - G_n}{r_n^{(2)} - r_n^{(1)}} \quad \text{ile} \quad B_n = \frac{G_n - r_n^{(1)} F_n}{r_n^{(2)} - r_n^{(1)}} \quad (2.12)$$

olarak bulunur. Bu taktirde aranan genel çözüm,

$$T_n(t) = \frac{\left[-\ell b - (\ell^2 b^2 - 4n^2 \pi^2 a^2)^{\frac{1}{2}} \right] F_n - 2\ell G_n}{2(\ell^2 b^2 - 4n^2 \pi^2 a^2)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{-\ell b + (\ell^2 b^2 - 4n^2 \pi^2 a^2)^{\frac{1}{2}}}{2\ell} t} + \frac{2\ell G_n - \left[-\ell b + (\ell^2 b^2 - 4n^2 \pi^2 a^2)^{\frac{1}{2}} \right] F_n}{2(\ell^2 b^2 - 4n^2 \pi^2 a^2)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{-\ell b - (\ell^2 b^2 - 4n^2 \pi^2 a^2)^{\frac{1}{2}}}{2\ell} t} \quad (n \leq n_0) \quad (2.13)$$

dır.

$n > n_0$ için $\Delta_n < 0$ olup bu aranan $r_n^{(1)}$, $r_n^{(2)}$ köklerinin kompleks olması demektir. Bu durumda (2.9) un genel çözümü;

$$T_n(t) = e^{\frac{-bt}{2}} (A_n \cos \delta_n t + B_n \sin \delta_n t)$$

olarak düzenlenebilir (burada; $\delta_n = \sqrt{-\Delta_n}$ olarak alınmıştır.)

Bu son eşitlikte de (2.10) şartı göz önüne alınırsa ;

$$\begin{cases} A_n = F_n \\ -\frac{b}{2} A_n + \delta_n B_n = G_n \end{cases} \quad (2.14)$$

sistemi elde edilir ki, (2.14) sisteminin çözümünden

$$A_n = F_n$$

$$B_n = F_n \frac{2G_n + bF_n}{2\delta_n}$$

eşitlikleri bulunur. Bulunan bu katsayılar sistemde yerine yazıldığı takdirde aranan genel çözüm;

$$T_n(t) = e^{\frac{-bt}{2}} \left(F_n \cos \delta_n t + \frac{2G_n + bF_n}{2\delta_n} \sin \delta_n t \right) \quad n > n_0 \quad (2.15)$$

olur.

II.DURUM:

Eğer $\left[\frac{|b|\ell}{2|a|\pi} \right] \in N$ ise, bu taktirde $n \neq n_0$ için (2.9) un genel çözümü

yukarıdaki gibi bulunur. $n = n_0$ olması durumunda ise (2.9) un aranan çözümü;

$$T_{n_0}(t) = (A + Bt) e^{-\frac{bt}{2}}$$

şeklinde gösterilir. A ve B katsayıları ise (2.10) şartından

$$\begin{cases} A = F_{n_0} \\ B - \frac{b}{2}A = G_{n_0} \end{cases}$$

sistemini sağlayan katsayılar olduklarından bu sistemin çözümünden de

$$A = F_{n_0}$$

$$B = \frac{2G_{n_0} + bF_{n_0}}{2}$$

olarak bulunur. Bu taktirde aranan genel çözüm:

$$T_{n_0}(t) = \left(F_{n_0} + \frac{2G_{n_0} + bF_{n_0}}{2} t \right) e^{-\frac{bt}{2}} \quad (2.16)$$

dır.

2.2 Teorem:

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlar, α, b katsayıları reel sayı ve $\ell > 0$ olarak göz önüne alındığında (2.1)-(2.3) probleminin

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) \quad (2.17)$$

gibi tek bir çözümü vardır.

İspat:

Burada $X_n(x)$, (2.6) formülü, $T_n(t)$ ise (2.13), (2.15), (2.16) fomüllerindeki gibi elde edilir. \therefore

2.2 HOMOJEN OLMAYAN DENKLEM ÜZERİNE

İlk başta (2.1) ile gösterdiğimiz problemde eşitliğin sağ tarafına baktığımızda denklemin homojen bir denklem olduğu görülecektir. Şimdi ise eşitliğin sağ tarafında sadece x' in bir fonksiyonu olması durumunda ve (2.1) -(2.3) problemindeki yine $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlar, a , b katsayıları ise reel sayı, $\ell > 0$ olması koşullarının aynen geçerli olması durumunda homojen olmayan ikinci mertebeden lineer hiperbolik denklem için başlangıç değer ve sınır değer problemini çözümlerim.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b \frac{\partial V}{\partial t} = h(x), \quad (t, x) \in Q \equiv R_+ \times [0, \ell] \quad (2.18)$$

$$V(t, 0) = V(t, \ell) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.19)$$

$$V(0, x) = f(x), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad x \in [0, \ell] \quad (2.20)$$

(2.18)-(2.20) probleminin çözümünü aşağıdaki toplam biçiminde arayalım.

$$V(t, x) = U(t, x) + y(x)$$

Yukarıdaki eşitlikteki gibi bir çözüm arandığı takdirde toplamdaki $U(t, x)$ nin çözümü yukarıda 2.2 Teorem' de bulmuş olduğumuz (2.1)-(2.3) probleminin çözümü ile eşdeğer kabul edersek bu çözümle tekrar uğraşmayıp yukarıdaki problemin çözümünü referans olarak alıp sadece $y(x)$ ' in çözümü ile uğraşacağız.

$V(t, x) = U(t, x) + y(x)$ çözümünü (2.18)-(2.20)' de yerine yazdığımız takdirde $y(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki gibi bir problemin çözümü olduğu görülür.

$$\begin{cases} -a^2 y'' = h(x) \\ y(0) = y(\ell) = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Şimdi bu (2.21) problemini çözümlayelim;

$$-a^2 y'' = h(x) \Rightarrow$$

$$y(x)' = -\frac{1}{a^2} \int_0^x h(t) dt + c_1 \Rightarrow$$

$$y(x) = -\frac{1}{a^2} \int_0^x \left[\int_0^t h(s) ds \right] dt + c_1 x + c_2 \quad (2.22)$$

bulmuş olduğumuz bu (2.22) eşitliğinde (2.21)₂ şartlarını kullanırsak c_1 ve c_2 sabitleri;

$$c_2 = 0$$

$$c_1 = \frac{1}{\ell a^2} \int_0^\ell \left[\int_0^t h(s) ds \right] dt$$

biçiminde bulunur ki böylelikle (2.21) in genel çözümü:

$$y(x) = -\frac{1}{a^2} \int_0^x \left[\int_0^t h(s) ds \right] dt + \left[\frac{1}{\ell a^2} \int_0^\ell \left[\int_0^t h(s) ds \right] dt \right] x \quad (2.23)$$

olur. Böylelikle aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

2.3 Teorem

$f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlar, a , b katsayıları ise reel sayı, $\ell > 0$ olmak üzere (2.18)-(2.20) probleminin

$$V(t, x) = U(t, x) + y(x)$$

biçiminde tek bir çözümü vardır. Buradaki $U(t, x)$ fonksiyonu 2.2 Teorem' de gibi, $y(x)$ ise (2.23) deki gibi elde edilir. ∴

3 BİR TİP n. MERTEBEDEN MATRİSİN ÖZDEĞERLERİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde aşağıdaki n. mertebeden matris incelenecektir.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Çalışmanın son bölümünde görülecek ki, gözönüne alınan (2.1)-(2.3) problemine sonlu farklar yöntemi uygulanması ile bulunan matrisin incelenmesi için bu A matrisinin incelenmesi yeterlidir. Bunun için önce bu matrisi inceleyeceğiz.

Biliniyorki [2], [4], [21] keyfi A matrisinin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulmak için

$$A \varphi = \lambda \varphi$$

denklemler sisteminden faydalanılır. Bu sistem homojen sistem olduğundan bilindiği gibi sıfırdan farklı çözümünün olması için $A - \lambda E$ matrisinin determinantının sıfıra eşit olması lazımdır. Bunun için aşağıdaki formda tanımlanmış $P_n(\lambda)$ polinomunu incelemek yeterlidir:

$$P_n(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & -2-\lambda & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

3.1 Lemma:

$\forall n \geq 3$ için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$P_n(\lambda) = (-2 - \lambda) P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda) \quad (3.2)$$

İspat: Yukarıdaki (3.1) determinantının sonucunu birinci satırı kullanarak hesap edersek

$$P_n(\lambda) = (-2 - \lambda) (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2-\lambda & \dots \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} +$$

$$1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2-\lambda & \dots \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

Elde edilen yukarıdaki eşitlikteki toplamın birinci determinantı $P_{n-1}(\lambda)$ ' ya eşittir, toplamın ikinci determinantının değeri ise buradaki birinci sütundan istifade edilerek hesap edilirse bunun $P_{n-2}(\lambda)$ ' ya eşit olduğunu görürüz. Böylelikle (3.2) bağıntısının geçerli olduğu görülür.

3.2 Sonuç:

$$\forall n \geq 1 \text{ için } P_n(-4 - \lambda) = (-1)^n P_n(\lambda) \text{ dir.} \quad (3.3)$$

İspat :

İspatı matematiksel indüksiyon metoduyla yapalım.

$$P_1(\lambda) = -2-\lambda, \quad P_2(\lambda) = (2 + \lambda)^2 - 1$$

eşitlikleri kolaylıkla bulunabilir bunları induksiyon metodunun ilk aşaması olarak (3.3)' ün doğruluğunu kontrol için kullanırsak;

$$P_1(-4-\lambda) = -2-(-4-\lambda) = 2+\lambda = -P(\lambda)$$

$$P_2(-4-\lambda) = (2+\lambda)^2-1 = (-1)^2 P_2(\lambda)$$

eşitlikleri bulunur ki bu $n = 1$ ve $n = 2$ için (3.3) ün doğru olduğunu gösterir.

İkinci aşama olarak varsayalım ki; $n = k-1$ ve $n = k$ için (3.3) eşitliği doğru olsun, $n = k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. (3.2) rekürans formülüne göre

$$\begin{aligned} P_{k+1}(-4-\lambda) &= (2+\lambda) P_k(-4-\lambda) - P_{k-1}(-4-\lambda) \\ &= (2+\lambda) (-1) P_k(\lambda) - (-1)^{k-1} P_{k-1}(\lambda) \\ &= (-1)^{k+1} [(-2-\lambda) P_k(\lambda) - P_{k-1}(\lambda)] = (-1)^{k+1} P_{k+1}(\lambda) \end{aligned}$$

bulunur ki bu $\forall n \geq 1$ için (3.3) eşitliğinin doğru olduğunu gösterir.

3.3 Sonuç:

$\forall n \geq 1$ için aşağıdaki eşitlikler doğrudur

$$P_n(0) = (-1)^n (n+1) \quad (3.4)$$

$$P_n(-4) = n+1 \quad (3.5)$$

İspat:

(3.5) eşitliğinin doğruluğu (3.3) ve (3.4) den kolayca görülebilir. Bunun için bizim sadece (3.4) eşitliğinin doğru olduğunu ispatlamamız yeterlidir. Burada yine matematiksel induksiyon metodunu kullanalım,

$n = 1$ ve $n = 2$ için;

$$P_1(0) = -2, P_2(0) = 3$$

olduğuna göre şimdi (3.4) eşitliğini $n = k-1$ ve $n = k$ için doğru olduğunu kabul ederek

$n = k+1$ için doğruluğunu ispatlayalım. (3.2) den dolayı ;

$$\begin{aligned} P_{k+1}(0) &= -2P_k(0) - P_{k-1}(0) = (-2)(-1)^k(k+1) - (-1)^{k-1}k \\ &= (-1)^{k+1}(2k+2-k) \\ &= (-1)^{k+1}((k+1)+1) \end{aligned}$$

Böylelikle 3.3 Sonuç' un ispatı yapılmış olur.

3.4 Teorem:

$P_n(\lambda)$ ve $P_{n-1}(\lambda)$ polinomunun kökleri aşağıdaki formda sıralanmıştır.

$$-4 < \lambda_1^{(n)} < \lambda_1^{(n-1)} < \dots < \lambda_{n-i}^{(n-1)} < \lambda_n^{(n)} < 0 \quad i = \overline{1, n}$$

$$n=2k+1, \forall k \geq 0 \text{ için}$$

$$P_n(-2) = 0$$

ve kökler $\lambda = -2$ noktasına göre simetriktir.

İspat: Köklerin $\lambda = -2$ noktasına göre simetrikliği 3.2 Sonuç'dan görülebilir.

3.1 Lemma' daki (3.2) eşitliğinden

$$P_n(-2) = -P_{n-2}(-2)$$

dir, buradan her $k \geq 1$ için

$$P_{2k-1}(-2) = -P_{2k-3}(-2) = \dots = (-1)^{k-1}P_1(-2) = 0$$

Şimdi teoremin esas hükmünü ispatlamak için matematiksel induksiyon metodunu kullanalım:

$n = 1$ ve $n = 2$ için;

$$P_1(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2$$

$$P_2(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad (-2 - \lambda)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1$$

Şimdi; $P_{k-1}(\lambda)$ ve $P_k(\lambda)$ için teoremin hükmünün doğru olduğunu varsayalım. Yani, bu polinomların sırasıyla $(k-1)$ ve (k) sayıda negatif, aynı zamanda $\lambda=-2$ noktasına göre simetrik olan kökleri mevcut olsun ve $P_{k-1}(\lambda)$ nin kökleri $P_k(\lambda)$ nin kökleri arasına girsin. Köklerin negatif ve $\lambda = -2$ ' ye göre simetrikliğinden anlaşılıyor ki kökler

$(-4, 0)$ aralığında tanımlıdır. Bu kökleri yine sırasına uygun olarak $\lambda_i^{(k-1)}$ $i = \overline{1, k-1}$,

$\lambda_i^{(k)}$ $i = \overline{1, k}$ şeklinde gösterirsek, bunlar

$$-4 < \lambda_i^{(k)} < \lambda_i^{(k-1)} < \dots < \lambda_{k-i}^{(k-1)} < \lambda_k^{(k)} < 0$$

olup. Buradan ;

$$\begin{aligned} \lambda_i^{(k)} &= -4 - \lambda_{k+1-i}^{(k)} & (i = \overline{1, k}) \\ \lambda_i^{(k-1)} &= -4 - \lambda_{k-i}^{(k-1)} & (i = \overline{1, k-1}) \end{aligned}$$

Şimdi gösterelim ki $P_{k+1}(\lambda)$ için teoremin hükmü doğrudur. Kökler simetrik olduğundan onları $(-4, -2)$ veya $(-2, 0)$ aralıklarından birinde bulmak yeterli olacaktır. Öncelikle $P_k(\lambda)$ ve $P_{k-1}(\lambda)$ polinomlarını çarpanlarına ayırıp

$$\left. \begin{aligned} P_{k-1}(\lambda) &= (-1)^{k-1} (\lambda - \lambda_1^{k-1}) (\lambda - \lambda_2^{k-1}) \dots (\lambda - \lambda_{k-1}^{k-1}) \\ P_k(\lambda) &= (-1)^k (\lambda - \lambda_1^k) (\lambda - \lambda_2^k) \dots (\lambda - \lambda_k^k) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

$[-4, -2]$ aralığında $P_{k+1}(\lambda) = 0$ denkleminin köklerini bulalım:

$[-4, -\lambda_1^{(k)}]$ aralığının uçlarında $P_{k+1}(\lambda)$ 'nin işaretini inceleyelim.

$$P_{k+1}(-4) \stackrel{(3.5)}{=} k + 2 > 0$$

(3.2) rekürans formülünden ;

$$P_{k+1}(\lambda_1^{(k)}) = (-2 - \lambda_1^{(k)}) P_k(\lambda_1^{(k)}) - P_{k-1}(\lambda_1^{(k)})$$

burada (3.6) 'yı kullanırsak;

$$P_k(\lambda_1^{(k)}) = 0 \text{ ve } P_{k-1}(\lambda_1^{(k)}) > 0$$

olur ki, bu

$$P_{k+1}(\lambda_1^{(k)}) < 0$$

olmasını gerektirir.

Biliyoruz ki Cauchy teoreminden; $\exists \lambda_1^{(k+1)} \in (-4, \lambda_1^{(k)}) \ni P_{k+1}(\lambda_1^{(k+1)}) = 0$

olur.

Şimdi de $[\lambda_i^{(k-1)}, \lambda_{i+1}^{(k)}]$ $i = 1, 2, \dots, \left[\frac{k-1}{2} \right]$ parçalarının uçlarında

$P_{k+1}(\lambda_1)$ nin işaretlerini inceleyelim.

(3.2) rekürans formülünden;

$$P_{k+1}(\lambda_i^{(k-1)}) = (-2 - \lambda_i^{(k-1)})P_k(\lambda_i^{(k-1)}) - P_{k-1}(\lambda_i^{(k-1)}) = 0$$

dır.

(3.6)₁ den dolayı ;

$$P_{k+1}(\lambda_i^{(k-1)}) = (-2 - \lambda_i^{(k-1)})P_k(\lambda_i^{(k-1)}) \quad (3.7)$$

(3.6)₂ ye göre $P_k(\lambda_i^{(k-1)})$ nin işareti , $(-1)^k \cdot (-1)^{k-i} = (-1)^i$ olur. Bu sonucu ve $\lambda_i^{(k-1)} \in (-4, -2)$ olduğunu (3.7) de göz önüne alırsak ;

$$P_{k+1}(\lambda_i^{(k-1)}) \text{ nin işareti } (-1)^i$$

olur.

(3.6)₂ ve (3.2) ye göre

$$P_{k+1}(\lambda_{i+1}^{(k)}) = -P_{k-1}(\lambda_{i+1}^{(k)}) \quad (3.8)$$

dır.

(3.6)₁ 'e göre de $P_{k-1}(\lambda_{i+1}^{(k)})$ nın işareti

$$(-1)^{k-1}(-1)^{i-1-i} = (-1)^i$$

olur. Bunu (3.8) 'da göz önüne alırsak;

$$P_{k+1}(\lambda_{i+1}^{(k)}) \text{ nın işareti } (-1)^{i+1}$$

olur.

Burada yine Cauchy teoremin' den; $\exists \lambda_{i+1}^{(k+1)} \in (\lambda_i^{(k-1)}, \lambda_{i+1}^{(k)}) \quad i = 1, 2, \dots, \left[\frac{k-1}{2} \right]$

$\exists P_{k+1}(\lambda_{i+1}^{(k+1)}) = 0$ olur.

Böylelikle $(-4, -2)$ aralığında $P_{k+1}(\lambda)$ nın toplam olarak $\left[\frac{k+1}{2} \right] + 1$ tane kökü olduğunu bulmuş oluruz.

Şimdi k 'nın tek veya çift sayı oluşuna göre köklerin sayısını irdeleyelim:

Eğer k tek ise; $(-4, -2)$ aralığında $P_{k+1}(\lambda)$ nın köklerinin sayısı $\frac{k+1}{2}$ olur.

Simetri özelliğinden $(-4, 0)$ aralığında köklerin toplam sayısı $(k+1)$ dir. Eğer k çift olursa, $(-4, -2)$ aralığında $P_{k+1}(\lambda)$ nın köklerinin sayısı $\frac{k}{2}$ olur. Yine simetri olma

özelliğinden $(-2, 0)$ aralığındaki köklerin sayısı $\frac{k}{2}$ olur. Ve $\lambda = -2$ $P_{k+1}(\lambda)$ nın kökü

olduğundan $(-4, 0)$ aralığında köklerin toplam sayısı $(k+1)$ bulunur. Teoremin ispatından anlaşılır ki $P_n(\lambda)$ nın kökleri $P_{k+1}(\lambda)$ nın kökleri arasına yerleşir.

3.5 TEOREM

$p_n(\lambda)$ polinomunun kökleri için aşağıdaki limitler doğrudur:

$$\lambda_1^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -4$$

$$\lambda_n^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Bu teoremin ispatı aşağıda ispatı yapılan lemmalardan bulunur. Ayrıca bu lemmalarda 3.5 Teorem de söylenen limitlerin yakınsama hızları da incelenir.

İlk olarak; $\lambda_n^{(n)}$ nin sıfıra yakınsama hızına bakalım.

Öncelikle genel terimleri ; $\mu_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$ ve $\chi_n = \frac{2n}{2n-1}$ şeklinde olan dizileri göz önüne alalım $\exists m_0 > 1$ seçelim ki $\forall \lambda \in [-4, -4 + \mu_{m_0}]$ için

$$\frac{(3 + \lambda)(1 + \lambda)}{(-2 - \lambda)} > \chi_{m_0} \quad (3.9)$$

olsun. Bu m_0 'ların varlığı aşağıdaki limitlerden açıktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1 + \mu_n)(-3 + \mu_n)}{(2 - \mu_n)} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n = 1$$

3.6 Lemma:

$$\forall \lambda \in [-4, -4 + \mu_{n+m_0-1}]$$

için,

$$P_{n+1}(\lambda) > \chi_{n+m_0-1} P_n(\lambda)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: İspatı matematiksel induksiyon metoduyla yapalım:

$n=1$ için,

$$P_1(\lambda) = -2 - \lambda \quad P_2(\lambda) = (2 + \lambda)^2 - 1$$

(3.9) eşitsizliğinden $\forall \lambda \in [-4, -4 + \mu_{m_0}]$ için

$$p_2(\lambda) > x_{m_0} p_1(\lambda)$$

olur. Lemmanın hükmünün doğruluğunu $n=k$ için kabul edip, $n=k+1$ için ispatı yapalım.

$\forall \lambda \in [-4, -4 + \mu_{k+m_0-1}]$ için,

$$P_{k+1}(\lambda) > x_{k+m_0-1} P_k(\lambda) \quad (3.10)$$

Şimdi;

$\forall \lambda \in [-4, -4 + \mu_{k+m_0}]$

için (3.2) formülünden

$$P_{k+2}(\lambda) = (-2 - \lambda)P_{k+1} - P_k(\lambda) \quad (3.11)$$

$\mu_n > \mu_{n+1}$ olduğundan (3.10)-(3.11) den

$$\begin{aligned} P_{k+2}(\lambda) &> \left(-2 - \lambda - \frac{1}{x_{k+m_0-1}} \right) P_{k+1}(\lambda) \geq \\ &\geq \left(2 - \mu_{k+m_0-1} - \frac{1}{x_{k+m_0-1}} \right) P_{k+1}(\lambda) = \\ &= \left(2 - \frac{1}{2(k+m_0-1)} + \frac{1}{2(k+m_0-1)+1} - \frac{2(k+m_0-1)-1}{2(k+m_0-1)} \right) P_{k+1}(\lambda) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2(k+m_0-1)+1} \right) P_{k+1}(\lambda) = \frac{2(k+m_0)}{2(k+m_0)-1} P_{k+1}(\lambda) = x_{k+m_0} P_{k+1}(\lambda) \end{aligned}$$

dır.

3.7 Lemma:

Aşağıdaki limit doğrudur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n^{(n)} n^2) \leq -\frac{1}{4}$$

İspat:

$$\forall \lambda \in [-4, -4 + \mu_{n+m_0-2}]$$

için

$$P_1(\lambda) = -2 - \lambda \geq 2 - \mu_{n+m_0-2} = 2 - \frac{1}{2(n+m_0-2)} + \frac{1}{2(n+m_0-2)+1} > 0$$

ve

$$\chi_n > 1$$

olduğundan 3.6 Lemma' ya göre

$$p_n(\lambda) > p_{n-1}(\lambda) > \dots > p_1(\lambda) > 0$$

olur. Buradan anlaşılıyor ki $[-4, -4 + \mu_{n+m_0-2}]$ aralığında $P_n(\lambda)$ nın kökü yoktur.

3.2 Sonuç' tan anlaşılır ki $[-\mu_{n+m_0-2}, 0]$ parçasında da $P_n(\lambda)$ nın kökü yoktur.

Buradan da

$$\lambda_n^{(n)} < -\mu_{n+m_0-2}$$

elde edilir. Böylelikle

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n^{(n)} n^2) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-\mu_{n+m_0-2} n^2) = -\frac{1}{4}$$

olur \therefore

TEOREM 2 İÇİN İSPAT:

Teorem 1'e göre

$$\lambda_1^{(n)} > \lambda_1^{(n+1)} > \lambda_1^{(n+2)} > \dots > -4$$

yani;

$\{\lambda_1^{(n)}\}$ dizisi monoton azalan ve alttan sınırlı olduğundan bir noktaya yakınsar. Yani;

$$\lambda_1^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \geq -4,$$

Benzer olarak

$$\lambda_{n-1}^{(n-1)} < \lambda_n^{(n)} < \lambda_{n+1}^{(n+1)} < \dots < 0$$

yani; $\{\lambda_n^{(n)}\}$ dizisi monoton artan ve üstten sınırlı olduğundan bir noktaya yakınsar.

Başka bir deyişle

$$\lambda_n^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta \leq 0,$$

olur. Ancak 3.7 Lemma'dan bulunur ki $\beta = 0$ dır. Aynı zamanda $\lambda_n^{(n)} = -4 - \lambda_1^{(n)}$ olduğundan $\alpha = -4$ dır. Böylelikle sadece teoremin ispatı yapılmakla kalmayıp, köklerin yakınsama hızları da bulunmuş olur. Yani $\{\lambda_1^{(n)}\}$ ve $\{\lambda_n^{(n)}\}$ dizilerinin kendi limitlerine hangi hızla yaklaştığı görülür. ∴

4 (2.1)-(2.3) KARIŞIK PROBLEMİNİN SONLU FARKLAR YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

(2.1)-(2.3) Problemine uzaklığa bağlı olarak sonlu farklar yöntemini uygulayalım [2], [6]. Bunun için şimdi yeterli kadar büyük n doğal sayısı için $[0, \ell]$ aralığındaki noktaları belirleyip bu problemi sonlu farklar problemine dönüştürelim.

Dolayısıyla $x_j = j \frac{\ell}{n+1}$ $j = \overline{0, n+1}$ olmak üzere (2.1)-(2.3) problemine uygun sonlu farklar yöntemiyle oluşturulmuş problem

$$U''(t, x_i) + bU'(t, x_i) - \frac{(n+1)^2 a^2}{\ell^2} (U(t, x_{i+1}) - 2U(t, x_i) + U(t, x_{i-1})) = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (4.1)$$

$$U(t, x_0) = U(t, x_{n+1}) = 0 \quad (4.2)$$

$$U(0, x_i) = f(x_i), \quad U'(0, x_i) = g(x_i) \quad i = \overline{1, n} \quad (4.3)$$

Yukarıda her bir i değeri için n tane denklemden elde edilen sistem ile;

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} U(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U(x_n) \end{pmatrix}, \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_n) \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \bar{g} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g(x_n) \end{pmatrix}$$

eşitlikleri ile $1 \times n$ boyutlu vektörleri

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ile de $n \times n$ boyutlu matrisi gösterirsek (4.1)-(4.3) probleminden [1], [17], [19] aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\bar{U}'' + b \bar{U}' - \frac{(n+1)^2 a^2}{\ell^2} A \bar{U} = 0 \quad (4.4)$$

$$\bar{U}(0) = \bar{f} \quad , \quad \bar{U}'(0) = \bar{g} \quad (4.5)$$

Şimdi $\bar{V} = \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{U}' \end{pmatrix}$ ve $\bar{F} = \begin{pmatrix} \bar{f} \\ \bar{g} \end{pmatrix}$ ile $1 \times 2n$ boyutlu vektörleri, E $n \times n$ boyutlu

birim matris,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ \frac{(n+1)^2 a^2}{\ell^2} A & -bE \end{pmatrix}$$

$(2n \times 2n)$ boyutlu matrisi göstermek üzere (4.4)-(4.5) sistemi ile gösterilen problem biçimi, yukarıdaki vektörlerin ve matrislerin yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\bar{V}' = \tilde{A} \bar{V} \quad (4.6)$$

$$\bar{V}(0) = \bar{F} \quad (4.7)$$

Bilindiği gibi (4.6)-(4.7) problemini çözmek için öncelikle \tilde{A} matrisinin özdeğerlerinin ve özvektörlerinin bulunması gerekmektedir. [2], [4], [14] Bunun için;

$$\eta = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \neq 0 \text{ olmak üzere (burada } \phi \text{ ve } \psi \text{ (} 1 \times n \text{) boyutlu vektörler olarak}$$

gözönüne alınacaktır.)

$$\tilde{A} \eta = \mu \eta$$

dır.

Buradan,

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ \frac{(n+1)^2 a^2}{\ell^2} A & -bE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = \mu \varphi \\ \frac{(n+1)^2 a^2}{\ell^2} A \varphi - b \psi = \mu \psi \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\Rightarrow A \varphi = \frac{\ell^2}{(n+1)^2 a^2} \mu (\mu + b) \varphi$$

olur. Buradan da

$$\lambda = \frac{\ell^2}{(n+1)^2 a^2} \mu (\mu + b)$$

olarak alınır.

Böylelikle \tilde{A} matrisinin incelenmesi $A \varphi = \lambda \varphi$ problemine yani A matrisinin incelenmesine dönüştürülmüş olur.

3.4 Teorem' den anlaşılıyor ki , A matrisinin $(-4,0)$ aralığında tanımlı ve $(\lambda = -2)$ noktasına göre simetrik olan n sayıda farklı öz değeri vardır. Bu değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, ile bunlara uygun öz vektörler $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ile gösterelim. Biliyoruz ki A matrisi simetrik olduğundan bu öz vektörler ortogondirler [4], [14], [21].

Şimdi de

$$\frac{\ell^2}{(n+1)^2 a^2} \mu_i (\mu_i + b) = \lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.9)$$

sistemini çözelim

$$\mu_i^2 + \mu_i b - \frac{(n+1)^2 a^2}{\ell^2} \lambda_i = 0$$

Bu sistemi çözmekle biz \tilde{A} matrisinin özdeğerlerini bulmuş oluruz (Burada tek bir i indisi için çözüm bulmak yeterlidir) Buradan görünür ki tek bir λ_i değeri için denklemi çözmek yeterlidir. Bu denklem ikinci mertebeden denklem olduğundan bu denklemin köklerinin incelenmesi için

$$\Delta = b^2 + \frac{4(n+1)^2 a^2}{\ell^2} \lambda_i \quad i = \overline{1, n}$$

diskriminantının incelenmesi gereklidir. Yani eğer bu diskriminant

$$\Delta < 0$$

ise bu taktirde μ_i köklerinin hepsi kompleks olacak, eğer

$$\Delta \geq 0$$

ise bu taktirde μ_i köklerinin hepsi reel olur.

4.1 Önerme:

Eğer a, b katsayıları ve ℓ uzaklığı

$$\frac{b^2 \ell^2}{a^2} < 1 \quad (*)$$

şartını sağlarsa bu taktirde $\Delta < 0$ olur. Dolayısı ile (4.9) denklemler sisteminin tüm kökleri kompleks olur.

Buradan görünür ki eğer; bu önermenin şartları sağlanır ve n yeterince büyük seçilirse

$$\mu_j^{(1)} = \frac{-b - i\delta_j}{2}, \quad \mu_j^{(2)} = \frac{-b + i\delta_j}{2} \quad j = \overline{1, n}$$

olur.

$$\delta_i = \sqrt{\left(b^2 + \frac{4(n+1)^2 a^2}{\ell^2} \lambda_i \right)}$$

olmak üzere A matrisinin $\mu_i^{(1)}, \mu_i^{(2)}$ $i = \overline{1, n}$ gibi farklı kompleks öz değerleri vardır. Eğer bu önermenin şartları sağlanmaz ise bu taktirde bu köklerin bir kısmı kompleks, bir kısmı reel veya hepsi reel olabilir fakat biz bu durumları göz önüne almayacağız.

$\mu_i^{(k)}$ 'ya uygun özvektör $\begin{pmatrix} \varphi_i \\ \mu_i^{(k)} \varphi_i \end{pmatrix}$; $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, 2}$

Sonuçta (4.6) nın bağımsız çözümleri

$$e^{\mu_i^{(k)} t} \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \mu_i^{(k)} \varphi_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, 2}$$

buradan ise (4.4) 'ün bağımsız çözümleri genel olarak

$$e^{\mu_i^{(k)} t} \varphi_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, 2}$$

olur. Lakin biz (4.4) 'ün reel çözümlerini aradığımızdan , bağımsız çözümler

$$e^{-\frac{b}{2}t} \cos \frac{\delta_i t}{2} \varphi_i \text{ ve } e^{-\frac{b}{2}t} \sin \frac{\delta_i t}{2} \varphi_i \quad i = \overline{1, n}$$

O halde (4.4) 'ün genel çözümü;

$$\bar{u}(t) = e^{-\frac{b}{2}t} \sum_{i=1}^n (c_i^{(1)} \cos \frac{\delta_i t}{2} + c_i^{(2)} \sin \frac{\delta_i t}{2}) \varphi_i \quad (3.9)$$

olur. Buradan $c_i^{(1)}$ ve $c_i^{(2)}$ katsayıları (4.5) şartından bulunur. Böylelikle aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

4.2 Teorem:

(2.1)-(2.3) probleminin verileri için (*) şartı sağlanırsa (4.1)-(4.3) probleminin genel çözümü (4.10) formülü formunda olacaktır. ∴

5 Sonuç:

Bir sınıf titreşim denklemleri için ortaya konulmuş olan başlangıç-sınır değer problemi bir kaç yöntemle incelenmiştir. Bu yöntemlerden Fourier metoduyla yapılan çözümde seri formunda bir analitik çözüm bulunmuş olup, aynı problem uzaklığa bağlı sonlu farklar metodu ile de çözümlenmiştir. Elde edilen her iki çözümde de çözümün katsayılarla bağlı olarak nasıl davrandığı irdelenmiştir.



6 KAYNAKLAR

- [1] A. B. Aliev and A. Kh. Khanmamedov, 1996, Energy Estimates for Solutions of the Mixed Problem for Linear second-order Hyperbolic Equations, *Mathematical Notes*, vol. 59, No.4
- [2] Alan Jeffrey, 1993, *Linear Algebra and Ordinary Differential Equations* CRC press, Inc., Boca Raton Ann Arbor. London, Tokyo
- [3] Ralph P. Agnew, 1960, *Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York
- [4] A. Kurosh, 1975, *Higher Algebra*, Mir Publishers, Moscow
- [5] Eugene Butkov, 1973 *Mathematical Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, California
- [6] Courant-Hilbert, 1953, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience Publishers, Inc., New York
- [7] Ruel V. Churchill, 1963, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-hill book company, New York
- [8] J. Dunning-Davies, 1982, *Mathematical Methods for Mathematicians Physical Scientists and Engineers*, J. Dunning-Davis/ Ellis Harwood Limited, Englan
- [9] L. Elsgolts, 1977, *Differential Equations and the Calculus of Variations*, Mir Publishers, Moscow
- [10] L. Fox and D. F. Mayers, 1987, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations* Printed in Great Britain by J. W. Arrowsmith Ltd., Bristol

- [11] D.Gilbarg, N.S. Trudinger, 1983, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, Berlin.Heidelberg,
- [12] Eıner Hille, 1969, Ordinary Differentral Equations, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts.
- [13] L. Hörmander, 1963, Linear Partial Differential Equations, Springer-Verlag
- [14] G. Hemberg, 1975, Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space, Nort-Holland publishing Co., Amsterdam.
- [15] K. N. Soltanov, Jürgen Sprekels, 1998, Nonlinear equatins in non-reflexive Banach spaces and strongly nonlinear differentialequations, Weierstrab-Institut für angewandte Analysis und Stochastik, im Forschungsverbund Berlin e. V.
- [16] K. N. Soltanov, A. Kh. Khanmamedov, O. Özkan, 1999, Bir Sınıf İkinci Mertebeden denklem için Karışık Problem Üzerine I.st Turkish World Mathematics Symposium, Elazığ, 29 Haziran – 2 Temmuz
- [17] S. G. Krein, 1969, Linear Differential equations in Banach spaces (Russian). Ed. Nauka, Moscow
- [18] J.-L.Lions, 1969, Quelques Methodes de Resolution des problems aux limites nonlineaires Dunod, Paris
- [19] J.-L. Lions, E. Magenes, 1968, Problemes aux limites nonhomogenes et applications, vol.1, Dunod, Paris
- [20] M. J. Lighthill, 1960, Fourier Analysis and Generalized Functions, Cambridge Universty Press
- [21] John T. Moore, 1968, Elements of Linear Algebra and Matrix Theory, New York
- [22] Robert K. Ritt, 1970 Fourier Series, McGraw-Hill Inc.,New York St.Louis San Francisco

- [23] S. L. Sobolev, 1964, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Pergamon Press, Oxford
- [24] L. Schwarz, 1966, *Mathematics for the Physical Sciences*, Herman, Boulevard Saint-Germain, Paris

