JORDAN KANONİK FORMUNUN BİR UYGULAMASI

E.Tuğba AKYÜZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA, 1999

84576

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

JORDAN KANONİK FORMUNUN BİR UYGULAMASI

E.Tuğba AKYÜZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 01/10/1999 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr.Ali SİNAN	Prof.Dr.Haydar BULGAK	Yrd.Doç.Dr.Kemal AYDIN

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

JORDAN KANONİK FORMUNUN BİR UYGULAMASI

E.Tuğba AKYÜZ
Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof.Dr.Ali SİNAN

Bu çalışmada bir lineer homojen olmayan sabit katsayılı diferansiyel denklem sisteminin çözümünün Jordan kanonik formu ve matris kalemleri yardımı ile nasıl yapılabileceği üzerinde durulmuştur. Bu uygulamayı yapabilmek için Jordan kanonik formunun yapısı,elde edilişi,özellikleri, diferensiyel denklem sistemlerinin çözümü ve regüler matris kalemleri hakkında bazı bilgilere ihtiyaç duyulduğundan, öncelikle bu bilgilere yer verilmiştir. Daha sonra ele alınan denklem sistemine uygulanacak çözüm yöntemi adım adım sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler : Diferensiyel Denklem Sistemleri, Jordan Kanonik Formu, Matris Kalemleri

ABSTRACT

MSc Thesis

AN APPLICATION OF THE JORDAN CANONİCAL FORM

E.Tuğba AKYÜZ
Selçuk University
The Institute of The Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof.Dr.Ali SİNAN

The purpose of this paper to show how to solve inhomogeneous linear differential equations with constant coefficients by the help of Jordan canonical form and the matrix pencil. Since we'll need the structure of Jordan canonical form , its supplying and its specialties and some information about the matrix pencil to make this application , preceding this information is mentioned. Later the solution method which will be applied to the equation system is submitted step by step.

Key Words : Systems of Differential Equations, Jordan Canonical Form, Matrix Pencils

ÖNSÖZ

Bugüne kadar diferensiyel denklemlerinin çözümleri ile ilgili pek çok araştırma yapılmıştır ve bugün diferensiyel denklemin tipine, mertebesine ve özelliklerine bağlı olarak bilinen pek çok çözüm yöntemi vardır. Aynı şeyi diferensiyel denklemlerden oluşan denklem sistemleri için de söyleyebiliriz.

Bu çözüm yöntemlerinde sonuca daha kolay ulaşabilmek için matrislerden yararlanmak da bir alternatiftir. Hatta verilen sistemi matris formunda ifade ettikten sonra bu matrislerin veya matris kalemlerinin köşegen formlarını (Bu çalışmada Jordan kanonik formu)kullanarak işlem kalabalığını veya adım fazlalığını bir parça azaltmak mümkündür. Bu çalışmada böyle bir çözüm yöntemi, sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemleri için ele alınmıştır.

1.bölümde matrislerle ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiş,2.bölümde köşegenleştirme, $e^{A.t}$ fonksiyonu ve Jordan kanonik formu incelenerek başlangıç şartları bilinen bir lineer homojen diferensiyel denklem sisteminin çözümünde kullanılışı teoremlerle sunulmuş, 3.bölümde lineer diferensiyel denklemlerin ve diferensiyel denklem sistemlerinin mertebelerini indirgeyerek, bu indirgenmiş halinin matris denklemi şeklinde yazılışı anlatılmış, sabit katsayılı sistemlerin çözüm formülleri verilmiştir. 4. bölümde de matris kalemleri tanımlanarak regüler matris kalemlerine genel olarak değinilmiştir. İlk bölümlerde verilen ön bilgilerin ardından 5.bölümde ise sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem sisteminin çözümü verilmiş ve bu çözümde kullanılacak matrislerin elde edilişi anlatılmıştır.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak bu konuyu seçmemde ve yüksek lisansımın gerek ders gerekse tez aşamasında yol gösteren, bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen değerli danışman hocam Prof.Dr.Ali SİNAN'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca yüksek lisansım sırasında dersleri takip edebilmem ve tezimi yürütebilmem için zaman ve teknik imkanlardan yararlanmam konusunda anlayış gösteren, görev yaptığım Taşkent M.Y.O. Müdürü Yrd.Doç.Dr.Mithat DİREK'e, yine bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım hocalarım Doç.Dr.Dursun TAŞÇI'ya ve Yrd.Doç.Dr.Cevdet ÇETİN'e teşekkürlerimi sunuyorum.

1.BÖLÜM

GENEL TANIMLAR VE TEOREMLER

1.1 Tanımlar

Tanım 1.1.1 : V, F cismi üzerinde tanımlanan n-boyutlu bir vektör uzayı , f, bu vektör uzayını kendisine dönüştüren bir lineer operatör ve A da nxn tipinde bir matris olsun. Yani;

$$f : V \longrightarrow V$$
$$X \longrightarrow f(X)=A.X$$

olsun. Buna göre $\lambda \in K$ olmak üzere

$$f(X)=A.X=\lambda.X \tag{1.1}$$

eşitliğini sağlayan ve sıfırdan farklı olan X vektörlerine A matrisinin *"özvektörleri (karakteristik vektörleri)"*, λ değerlerine de A'nın *"özdeğerleri (karakteristik değerleri)"* denir.

Tanım 1.1.2 : E, nxn boyutlu birim matris, V n-boyutlu vektör uzayı ve $X \in V$ vektörü veriliyor. Tanım 1.1.1'den dolayı X=E.X dir. Bu durumda (1.1) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$A.X=\lambda.X \Rightarrow A.X=\lambda.E.X$$
$$\Rightarrow (\lambda E-A).X=0 \tag{1.2}$$

Buradaki $C(\lambda)=\lambda E-A$ matrisine A'nın *"karakteristik matrisi"* ve

$$C(\lambda).X=0 \tag{1.3}$$

ifadesine de A'nın *"karakteristik denklemi"* denir. X, n-boyutlu bir vektör olduğuna göre $C(\lambda).X=0$ ifadesi n bilinmeyenli n tane denklemden oluşan bir homojen denklem sistemidir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümlerinin olabilmesi için $C(\lambda)$ katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots\cdots & -a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots\cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = 0 \tag{1.4}$$

Bu $\Delta(\lambda)$ polinomuna A' nın *"karakteristik polinomu"* denir. Karakteristik polinomun kökleri bize bu matrisin özdeğerlerini verir.

Tanım 1.1.3 : $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ şeklinde verilen polinomda x yerine A matrisi yazıldığında f(A)= 0 oluyorsa f(x)'e A matrisinin *"sıfırlayan polinomu (yok eden polinomu)"* denir.

Tanım 1.1.4 :Bir A kare matrisinin sıfırlayan polinomlarından en küçük derecelisine bu matrisin *"minimal polinomu"* denir.

Tanım 1.1.5 : $A=[a_{ij}]$ tipinde bir matris olsun. A ' nın $m \leq p$ ve $m \leq n$ olacak şekilde alt kare matrisleri mevcuttur. Bu alt matrislerden determinantı sıfır olmayan en büyük mertebeli olanın mertebesine A ' nın *"rankı"* denir. Başka bir ifadeyle A ' nın lineer bağımsız satır veya sütun vektörlerinin sayısı rankı verir.

Tanım 1.1.6 : A, pxn tipinde bir dikdörtgen matris olsun. A ' nın $r \leq p$ ve $r \leq n$ olmak üzere p-r satırı n-r sütunu silindiğinde rxr tipinde bir kare matris elde edilir. Bu matrisin determinantına A ' nın *"r-yinci mertebeden minörü"* denir.

Tanım 1.1.7 : Rankı r olan pxn tipinde bir A matrisi verilsin. A 'nın r 'den büyük mertebeli minörleri sıfır, r 'den küçük mertebeli minörleri de aşağıdaki şekilde olsun

$d_r(\lambda)$	r. mertebeden minörlerin en büyük ortak böleni
$d_{r-1}(\lambda)$	(r-1) " " " " " "
....	
$d_1(\lambda)$	1. " " " " " "
$d_0(\lambda) \equiv 1$	

olsun. Bu durumda :

$$B_1(\lambda) = \frac{d_1(\lambda)}{d_0(\lambda)} \quad , \quad B_2(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)} \quad , ..., B_r(\lambda) = \frac{d_r(\lambda)}{d_{r-1}(\lambda)} \tag{1.5}$$

eşitlikleriyle tanımlı polinomlara A ' nın *"invaryant bölenleri"* denir.

Tanım 1.1.8 : A matrisinin invaryant bölenlerini oluşturan, indirgenemeyen her bir çarpana A'nın *"elemanter böleni"* denir.

Tanım 1.1.9 : A ve B gibi iki matris verilsin. C, ters çevrilebilir (düzgün) bir matris olmak üzere

$$A=C^{-1}.B.C \tag{1.6}$$

ise A ve B'ye *"benzer matrisler"* denir ve $A \sim B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.10 : A bir kare matris ve $m \in Z^{+}$ olmak üzere

$$A^{m}=O$$

Bağıntısı sağlanıyorsa A'ya *"m-yinci mertebeden nilpotent matris"* denir. Buradaki m sayısına da bu nilpotentin *"indeksi"* denir.

Tanım 1.1.11 : A bir kare matris olsun. Eğer

det $A\neq0$ ise A'ya *"regüler (düzgün) matris"* ,

det $A=0$ ise A'ya *"singüler (tekil) matris"* denir.

Tanım 1.1.12 : Bir veya daha fazla değişkenlerin bir fonksiyonu ile bu fonksiyonun bağımsız değişkenlere göre türevleri arasında verilmiş bağıntıya *"diferensiyel denklem" denir.* x bağımsız değişkeni ve $y=f(x)$ bilinmeyen fonksiyonu için bir diferensiyel denklem sembolik olarak

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0$$

veya (1.7)

$$F(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n})=0$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.13 : Bilinmeyen y fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevine göre lineer olan

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{1.8}$$

şeklindeki denkleme *"birinci mertebeden lineer diferensiyel denklem"* denir. Bu denklem aynı zamanda *"lineer homojen olmayan (ikinci taraflı) diferensiyel denklem"* dir. Özel olarak $Q(x)=0$ alınırsa denkleme *"lineer homojen (ikinci tarafsız) diferensiyel denklem"* denir.

Tanım 1.1.14 : $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}$ sabit sayılar olmak üzere n-yinci mertebeden

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \tag{1.9}$$

şeklindeki denkleme "*sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferensiyel denklem*" denir. Eğer f(x)=0 ise denkleme "*sabit katsayılı lineer homojen diferensiyel denklem*" denir.

Tanım 1.1.15 :

$$\begin{aligned} x_1' + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= f_1(t) \\ x_2' + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= f_2(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= f_n(t) \end{aligned} \tag{1.10}$$

şeklindeki sisteme "*sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferensiyel denklem sistemi*" denir. Eğer $f_1(t)=f_2(t)= \ldots =f_n(t)= 0$ ise sisteme "*sabit katsayılı lineer homojen diferensiyel denklem sistemi*" denir. (1.10) sisteminin matris formunda ifadesi

BX'+AX= f(t)

şeklindedir. Buradaki B.birim matristir. A. katsayılar matrisi. X' matrisi ve $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ lerin oluşturduğu f(t) sütun matrisi aşağıdaki gibidir :

$$X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_n' \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \ldots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

1.2 Teoremler

Teorem 1.2.1 : $A(\lambda)$ nxn tipinde, rankı n olan bir matris ve $A(\lambda)$ ' nın determinantı $|A(\lambda)|=\Delta(\lambda)$ ise

$$d_n(\lambda)=\Delta(\lambda)=a_1(\lambda).a_2(\lambda).\ \dots\ .a_n(\lambda)$$

$$B_n(\lambda)=\frac{d_n(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)}=\frac{\Delta(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)} \tag{1.12}$$

dir.

Teorem 1.2.2 : Bir A matrisinin $C(\lambda)=\lambda E-A$ karakteristik matrisinin invaryant bölenleri $B_0(\lambda),B_1(\lambda),\dots,B_n(\lambda)$ ise $B_n(\lambda)$ polinomu, yani derecesi en yüksek olan invaryant bölen A'nın minimal polinomuna eşittir.

$$B_n(\lambda)=m(\lambda) \tag{1.13}$$

Teorem 1.2.3 : A ve B gibi iki kare matrisin benzer olabilmesi için gerek ve yeter şart A ve B' nin karakteristik matrislerinin aynı invaryant bölenlerinin olmasıdır.

Teorem 1.2.4 : A gibi bir kare matrisin her sıfırlayan polinomu bunun minimal polinomunu kalansız olarak böler, yani minimal polinom, sıfırlayan polinomların bir bölenidir.

Teorem 1.2.5 : Karakteristik denklemin bütün kökleri yani katlı kökü yoksa, karakteristik polinom ile minimal polinom birbirinin aynıdır.

Teorem 1.2.6 : Benzer iki matrisin büyün sıfırlayanları ve minimal polinomları birbirinin aynıdır.

2.BÖLÜM

JORDAN KANONİK FORMU

2.1 Köşegenleştirilebilir Matrisler

Tanım 2.1.1 : Elemanları K cisminde bulunan bir A kare matrisi köşegen bir matrise benzer ise A'ya *"köşegenleştirilebilir"* denir.

Özellik 1 : $B=[b_1\ b_2\ \ldots\ b_n]$ bir nxn matris olsun. Burada b_j 'ler $j=1,2,\ldots,n$ olmak üzere B'nin sütun vektörleridir. Bu durumda A bir nxn kare matris olmak üzere A.B aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$A.B=A.[b_1\ \ b_2\ \ldots\ b_n]=[Ab_1\ \ Ab_2\ \ldots\ Ab_n] \tag{2.1}$$

Özellik 2 : B yukarıda verildiği gibi ve $\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_n$ sabitler olmak üzere

$$[\lambda_1 b_1\ \ \lambda_2 b_2\ \ldots\ \lambda_n b_n]=[b_1\ \ b_2\ \ldots\ b_n].\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = B.\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Tanım 2.1.2 : A bir nxn matris ve bu matris, n tane $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ özdeğerlerine tekabül eden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ özvektörlerine sahip olsun. Bu durumda

$$M=[x_1\ x_2 \ldots x_n\ ] \quad \text{ve} \quad D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

şeklindeki matrislerden M' ye A' nın *"modal matrisi"* ve D' ye A' nın *"spektral matrisi"* denir. Bunlar arasında aşağıdaki bağıntı yazılabilir :

$$D= M^{-1}.A.M \tag{2.4}$$

Bu eşitlikten Tanım 1.19 gereğince A ve D' nin benzer matrisler olduğu görülür. Burada $P= D^{-1}$ alınarak aşağıdaki ifade elde edilir :

$$A= P^{-1}.D.P=M.D.\ M^{-1} \tag{2.5}$$

Teorem 2.1.1 : Bir nxn A matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter şart A'nın n tane lineer bağımsız özvektöre sahip olmasıdır.

Örnek 2.1.1 : $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\0 & 2 & 0\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=4$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler :

$$x_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}\quad x_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\quad x_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

A, üç tane özvektöre sahip olduğundan Teorem 2.1.1 gereğince köşegenleştirilebilirdir ve A'nın modal matrisi ile tersi :

$$M=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}\qquad M^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\-1/2 & -1 & 1/2\\1/2 & 1 & 1/2\end{bmatrix}$$

şeklinde olup , köşegen formu aşağıdaki gibidir :

$$D=M^{-1}.A.M=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

2.2 $e^{A.t}$ Fonksiyonu

Verilmiş bir A matrisi için $e^{A.t}$ 'yi bulurken öncelikle A.t=B kabul ederek e^B haline getirelim. Çözüm için B'nin modal matrisi ve Jordan kanonik formundan yararlanacağız. Burada bilinmesi gereken bir özellik vardır. Bunu kısaca şu şekilde ifade edebiliriz : Bir B matrisinin Jordan Kanonik formu

$$J=M^{-1}.B.M$$

olmak üzere f(B) matris fonksiyonu aşağıdaki eşitlikle hesaplayabiliriz :

$$f(B)=M.f(J).\,M^{-1} \tag{2.6}$$

Bu eşitlikte $f(B)=e^B=e^{A.t}$ alınırsa

$$e^{A.t}=e^B=M.\,e^J.\,M^{-1} \tag{2.7}$$

eşitliğini elde ederiz.

Örnek 2.2.1 : $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ için $e^{A.t}$ 'yi bulalım.

$$B = A.t = \begin{bmatrix} 3t & 0 & 4t \\ t & 2t & t \\ -t & 0 & -2t \end{bmatrix}$$

B'nin modal matrisi ve tersi :

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3t & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad M^{-1}=\begin{bmatrix} -1/3 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1/3t & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

olup, Jordan kanonik formu :

$$J= M^{-1}.B.M=\begin{bmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 1 \\ 0 & 0 & 2t \end{bmatrix}$$

Şeklindedir. Şimdi J, M^{-1}, M matrislerini (2.7)'de yerlerine yazalım :

$$e^{A.t} = e^{B} = M.\, e^{J}.\, M^{-1}$$

$$e^{A.t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3t & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} . \frac{1}{3} . \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1/t & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{A.t} = \frac{1}{3} . \begin{bmatrix} -e^{-t}+4e^{2t} & 0 & -4e^{-t}+4e^{2t} \\ 3te^{2t} & 3e^{2t} & 3te^{2t} \\ e^{-t}-e^{2t} & 0 & 4e^{-t}+4e^{2t} \end{bmatrix}$$

e^{J} matrisinin elde edilişi Teorem 2.4.1'de verilecektir.

2.3 Jordan Kanonik Formu

F cismi üzerinde tanımlı n-boyutlu V vektör uzayı üzerinde bir T lineer dönüşümü (veya matrisi) verilsin. Bu T matrisi ile benzer olan matrislerin oluşturduğu benzerlik sınıfını cl(T) (class(T)) ile gösterelim. cl(T) Tanım 1.1.9 gereğince, C ters çevrilebilir bir matris olmak üzere $C^{-1}.T.C$ formundaki tüm matrisleri tanımlar. $V_n(F)$, F cismi üzerindeki n-boyutlu vektör uzayındaki lineer dönüşümlerin ailesi olmak üzere ;

$$cl(T)=\{A\in V_n(F) \ : \ A\sim T\} \tag{2.8}$$

Bu benzerlik sınıfı içinde bazı özel matris formları vardır ve bunlar genel olarak Kanonik Formlar olarak adlandırılır. Jordan Kanonik Formu da bunlardan biridir.

Tanım 2.3.1 : Bir nxn boyutlu A matrisi şu şekilde verilsin :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

$1 \le s \le n$ olmak üzere eğer $a_s = a_{s+1}$ için $b_s=1$ ve diğer durumlarda $b_s=0$ ise bu A matrisine *"Jordan Kanonik Matrisi"* denir.

Örneğin ilk k tane a_i (i= 1,2,...,k) değeri eşit ise , yani $a_1= a_2= ...= a_k$ ise $b_r=1$ ($1 \le r \le k-1$) olur ve bir kxk boyutlu blok oluşturur. Her bir bloğa *"Jordan temel matrisi"* denir.

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Burada $1 \le r \le k$ için $a=a_r$ dir. Jordan kanonik formu bu bloklardan oluşur. Herhangi iki blok aralarında yer değiştirebilir ve yer değişimi ile oluşan matrisler yine aynı benzerlik sınıfı içinde kalır. Örneğin $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ Jordan kanonik matrisleri benzerdir.

Tanım 2.3.2 : (2.10) ile verilen Jordan bloğu

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

şeklinde ise bu matrise *"Alt Jordan Bloğu"* denir

Tanım 2.3.3 :Bir A Jordan kanonik matrisi T matrisi ile benzer ise A' ya T matrisinin (veya lineer dönüşümünün) *"Jordan Kanonik Formu"* denir.

Bir matrisin Jordan kanonik formunu, bu matrisin elemanter bölenlerini kullanarak elde etmek mümkündür. Her bir elemanter bölene bir Jordan temel matrisi karşılık gelir. Yani; $(\lambda\text{-}a)^r$ elemanter böleni için r-yinci mertebeden Jordan temel matrisi

$$J_r(a) = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

şeklindedir. Benzer şekilde indisler küçültülerek devam edilirse

r=3 için $(\lambda\text{-}a)^3$ elemanter bölenine karşılık $J_3(a)=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

r=2 için $(\lambda\text{-}a)^2$ " " " $J_2(a)=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

r=1 " $(\lambda\text{-}a)$ " " " $J_1(a)=[a]$

olur.

Bir lineer dönüşümün bu şekilde k tane $J_1(a)$, $J_2(a)$, ... , $J_k(a)$ blokları elde edildikten sonra bu matrisin Jordan kanonik formu :

$$J=\text{köş}\,[J_1, J_2, \dots, J_k] \tag{2.13}$$

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \cdots & \\ 0 & & & J_k \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

şeklindedir.

$J_1, J_2, \ldots, J_k$ bloklarından oluşan bir J Jordan kanonik matrisini göz önüne alalım.$E_1, E_2, \ldots, E_k$ matrisleri sırasıyla bu bloklarla aynı boyutlu birim matrisler olsun. Bu durumda (2.14) ifadesindeki Jordan matrisindeki her bir J_t bloğu ($1 \leq t \leq k$) şu şekilde ifade edilebilir :

$$J_t = \begin{bmatrix} a_t & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_t & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_t & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_t \end{bmatrix} = a_t E_t + N_t \tag{2.15}$$

Burada N_t nilpotent matrisleri ve $a_t E_t$ matrisleri aşağıdaki şekildedir :

$$a_t E_t = \begin{bmatrix} a_t & \ldots & 0 \\ & \ldots & \\ 0 & \ldots & a_t \end{bmatrix} \qquad N_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorem 2.3.1 : $(\lambda\text{-}a)^r$ elemanter bölenine bağlı Jordan temel matrisinin karakteristik polinomu ve minimal polinomu aynı olup $(\lambda\text{-}a)^r$ ‘ den ibarettir. Yani ;

$$\Delta(\lambda)=(\lambda-a)^r = m(\lambda) \tag{2.16}$$

Tanım 2.3.4 : F cisminde tanımlı bir A matrisinin bütün karakteristik değerleri de F cisminde olduğuna göre bu matrisin 1' den farklı elemanter bölenleri :

$$B_r(\lambda) = (\lambda - a_1)^{r_1}.(\lambda - a_2)^{r_2}.....(\lambda - a_k)^{r_k}$$

$$B_{r+1}(\lambda) = (\lambda - a_1)^{s_1}.(\lambda - a_2)^{s_2}.....(\lambda - a_k)^{s_k}$$

....

$$B_n(\lambda) = (\lambda - a_1)^{t_1}.(\lambda - a_2)^{t_2}.....(\lambda - a_k)^{t_k}$$

Burada i= 1,2, ... ,k ve $t_i \geq \ldots \geq s_i \geq r_i$ dir. Bu üslerin yardımı ile oluşturulan

$$[(t_1, \ldots, s_1, r_1), ((t_2, \ldots, s_2, r_2), \ldots, (t_k, \ldots, s_k, r_k)] \tag{2.17}$$

şeklindeki ifadeye *"Serge karakteristiği"* denir.

Eğer karakteristik polinomun derecesi n ise ;

$$\sum_{i=1}^{k} (t_i + \ldots + s_i + r_i) = n$$

dir.

Teorem 2.3.2 : F cisminde tanımlanmış ve karakteristik denkleminin bütün kökleri de F cisminde olan A ve B gibi iki matris veriliyor. Bu iki matrisin karakteristik denklemi, dolayısı ile Serge karakteristikleri aynı ise A ve B matrisleri benzerdir.

Teorem 2.3.3 : F cisminde tanımlı bir A kare matrisinin karakteristik denkleminin bütün kökleri yine F cisminde olsun. Bu durumda A matrisinin her λ_i köküne üsleri Serge karakteristiğinde belirtilen ($t_i, \ldots, s_i, r_i$) sayı dizisinde oluşan

$$(\lambda - \lambda_i)^{t_i}, \ldots, (\lambda - \lambda_i)^{s_i}, (\lambda - \lambda_i)^{r_i}$$

gibi elemanter bölenler karşılık gelir. Bu elemanter bölenlere bağlı Jordan temel matrisleri sırasıyla;

$$J_{t_i}(\lambda_i), \ \ldots, J_{s_i}(\lambda_i), \ J_{r_i}(\lambda_i)$$

olsun. Bu matrisler yardımıyla i= 1,2,...,k olmak üzere

$$J_i = \text{köş}\left[J_{t_i}(\lambda_i), \ \ldots, J_{s_i}(\lambda_i), \ J_{r_i}(\lambda_i)\right]$$

matrisleri elde edilir. Bu şekilde her farklı λ_i köküne karşılık gelen J_i matrisleriyle oluşturulan Jordan kanonik formu A matrisine benzerdir. Yani ;

$$J = \left[J_1, J_2, \ldots, J_k\right]$$

olmak üzere

$$J = P^{-1}.A.P \tag{2.18}$$

şeklinde P ters çevrilebilir matrisi vardır.

2.4 Jordan Kanonik Formunun Başlangıç Değerleri Bilinen Lineer Homojen Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Çözümünde Kullanılması

Bir lineer homojen sabit katsayılı diferensiyel denklem sistemi ve başlangıç şartlarının genel ifadesi aşağıdaki şekildedir :

$$\begin{array}{ll} x_1'(t)= a_{11}\, x_1(t)+ a_{12}\, x_2(t)+ \dots + a_{1n}\, x_n(t)\ , & x_1(0)= x_{01} \\ x_2'(t)= a_{21}\, x_1(t)+ a_{22}\, x_2(t)+ \dots + a_{2n}\, x_n(t)\ , & x_2(0)= x_{02} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ , & \dots\dots \\ x_n'(t)= a_{n1}\, x_1(t)+ a_{n2}\, x_2(t)+ \dots + a_{nn}\, x_n(t)\ , & x_n(0)= x_{0n} \end{array} \qquad (1.19)$$

Bu sistemi bir matris diferensiyel denklemi olarak şu şekilde ifade edebiliriz :

$$X'(t)= A.X(t)\ , \qquad X(0)= X_0 \qquad (2.20)$$

Burada A, a_{rs} 'lerden oluşan katsayılar matrisidir. Ayrıca X(t) vektör fonksiyonu, X'(t) türev fonksiyonu ve X_0 başlangıç şartları vektörü ise aşağıdaki şekildedir :

$$X(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad X'(t)=\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ . \\ . \\ x_n'(t) \end{bmatrix} \qquad X_0=\begin{bmatrix} x_{01} \\ . \\ . \\ x_{0n} \end{bmatrix}$$

Bu şekildeki bir sistemin çözümü için teorem 2.4.2'de bir formül verilecektir. Ancak, daha önce verilen bir A matrisi için $e^{t.A}$ nın bulunuşunu bilmek gereklidir.

Teorem 2.4.1 : $A\in M_n(C)$ bir nxn matris olmak üzere, A'nın Jordan kanonik formu $J=P^{-1}.A.P$ ol. Bu durumda e^{tA} matris fonksiyonu

$$e^{tA}=P.\ e^{tJ}.\ P^{-1} \qquad (2.21)$$

şeklindedir.

Burada $J=\begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & J_q \end{bmatrix}$ ve $J_r=\begin{bmatrix} a_r & 1 & & o \\ & & \dots & \\ & & \dots & 1 \\ o & & & a_r \end{bmatrix}$ (J_r, $1\le r\le q$ olmak üzere boyutu r'ye bağlı olan bir matristir). Bu durumda $e^{t.J}$ matris fonksiyonu:

$$e^{tJ}=\begin{bmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & e^{tJq} \end{bmatrix} \qquad (2.22)$$

şeklindedir. Buradaki $e^{t.Jr}$ matrisi, $1 \le r \le q$ için

$$e^{t.J_r} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! & t^3/3! & \ldots & t^{k-1}/(k-1)! \\ & 1 & t & t^2/2! & \ldots & t^{k-2}/(k-2)! \\ & & 1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & \ldots & \ldots & t \\ & & & & \ldots & 1 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

şeklindedir. Bu ifadeyi seriye açılım olarak aşağıdaki şekilde de gösterebiliriz :

$$e^{t.J_i} = e^{t.a_i}.e^{t.N_i} = e^{t.a_i}(E.N_i + t.N_i + \frac{t^2}{2!}N_i{}^2 + \ldots + \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!}N_i{}^{m_i-1}) \tag{2.24}$$

Teorem 2.4.2 : $A \in M_n(C)$ ve $X_0 \in C^{(n)}$ olmak üzere $X'(t) = A.X(t)$ matris diferensiyel denkleminin bir çözümü

$$X(t) = e^{t.A}.X_0 \tag{2.25}$$

dır. $e^{t.A}$ yerine (2.21)'deki karşılığı yazılırsa

$$X(t) = P.\, e^{tJ}.\, P^{-1}.X_0 \tag{2.26}$$

Buradaki e^{tJ}, J_r, $e^{t.J_r}$ matrisleri teorem 2.4.1 ' de verildikleri şekildedir.

Örnek 2.4.1 :

$$\left.\begin{array}{l} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) + 4x_3(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) \\ x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \end{array}\right\}$$ Lineer diferensiyel denklem sistemini aşağıdaki

başlangıç şartları ile çözelim. $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = -2$, $x_3(0) = 0$

Önce verilen denklem sistemini matris formunda yazalım :

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \qquad X_0(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X'(t) \;=\; A \;.\; X(t)$$

A'nın karakteristik polinomu ve özdeğerleri :

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1).(\lambda + 2).(\lambda - 3) \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 3$$

Herbir özdeğere karşılık gelen özvektörler sırası ile

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir.A katsayılar matrisine karşılık gelen Jordan kanonik formu :

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{ve} \qquad J=P^{-1}.A.P$$

dir.Buradaki P ve P^{-1} matrisini Maplev bilgisayar programından yararlanarak elde edebiliriz :

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(2.25) ifadesinde yerlerine yazalım :

$$X(t)= P.\, e^{tJ}\,.\, P^{-1}\,.X_0$$

$$X(t)=P.e^{\begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 0 \\ 0 & 0 & 3t \end{bmatrix}}.\begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = P.\begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X(t)=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -e^{t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t}+e^{3t} \\ -4e^{t}+2e^{3t} \\ -e^{t}+e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$X(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t}+e^{3t} \\ -4e^{t}+2e^{3t} \\ -e^{t}+e^{3t} \end{bmatrix}$$

Çözümün doğruluğunu görmek için başlangıç şartlarını yerlerine yazalım :

$$X_0(0) = \begin{bmatrix} x_1(o) \\ x_2(o) \\ x_3(o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{0}+e^{0} \\ -4e^{0}+2e^{0} \\ -e^{0}+e^{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.BÖLÜM

LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN MERTEBESİNİN İNDİRGENMESİ VE MATRİS FORMUNDA İFADESİ

3.1 n. Mertebeden Bir Diferensiyel Denklemin Mertebesinin İndirgenmesi

Değişken katsayılı n. mertebeden bir lineer diferensiyel denklemin genel ifadesi ve başlangıç şartları aşağıdaki şekildedir:

$$
\begin{aligned}
&a_n(t)\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1(t)\frac{dx(t)}{dt} + a_0(t)x(t) = f(t) \\
&x(t_0) = c_1 \ , \ \frac{dx(t_0)}{dt} = x'(t_0) = c_2 \ , \ \ldots \ , \ \frac{d^{n-1}x(t_0)}{dt^{n-1}} = x^{n-1}(t_0) = c_n
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

(3.1)'in iki tarafını $a_n(t)$ ile bölerek $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ yalnız bırakılırsa denklem

$$
\frac{d^n x(t)}{dt^n} = -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} - \ldots - \frac{a_1(t)}{a_n(t)}\frac{dx(t)}{dt} - \frac{a_0(t)}{a_n(t)}x(t) + \frac{f(t)}{a_n(t)}
$$

şeklini alır. Buradan aşağıdaki dönüşüm yapılarak denklem $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ yeni değişkenlerine sahip olur :

$$
\begin{aligned}
&x_1(t) = x(t) \\
&x_2(t) = \frac{dx_1}{dt} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x_{n-1}(t) = \frac{dx_{n-2}}{dt} \\
&x_n(t) = \frac{dx_{n-1}}{dt}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Bu dönüşümlerin ikinci taraflarını sadece x(t) bilinmeyen fonksiyonu cinsinden elde etmek mümkündür :

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= x(t) \\
x_2(t) &= \frac{dx}{dt} \\
x_3(t) &= \frac{d^2x}{dt^2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-1}(t) &= \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} \\
x_n(t) &= \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Böylece (3.3) ifadesindeki son eşitlikten diferensiyel alarak

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{d^n x}{dt^n} \tag{3.4}$$

elde ederiz. (3.3)'deki yeni değerleri denklemde yerlerine yazalım :

$$\frac{dx_n}{dt} = -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}x_n - \ldots - \frac{a_1(t)}{a_n(t)}x_2 - \frac{a_0(t)}{a_n(t)}x_1 + \frac{f(t)}{a_n(t)}$$

bulunur.Bu denklemi yeniden düzenleyerek yazalım :

$$\frac{dx_n}{dt} = -\frac{a_0(t)}{a_n(t)}x_1 - \frac{a_1(t)}{a_n(t)}x_2 - \ldots - \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}x_n + \frac{f(t)}{a_n(t)}$$

Elde edilen bu son denklemin matris formunda ifadesi :

$$X'(t) = A(t).X(t) + f(t) \tag{3.5}$$

Buradaki X(t), A(t) ve f(t) matrisleri de aşağıdaki şekildedir :

$$
X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots\ldots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad
A(t) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\
\dfrac{-a_0(t)}{a_n(t)} & \dfrac{-a_1(t)}{a_n(t)} & \dfrac{-a_2(t)}{a_n(t)} & \dfrac{-a_3(t)}{a_n(t)} & \ldots & \dfrac{-a_{n-1}(t)}{a_n(t)}
\end{bmatrix}, \quad
f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ \dfrac{f(t)}{a_n(t)} \end{bmatrix}
\tag{3.6}
$$

Başlangıç şartlarını matris formunda yeniden yazarsak ;

$$
X(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \ldots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t_0) \\ \dfrac{dx(t_0)}{dt} \\ \ldots \\ \dfrac{d^{n-1}x(t_0)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad X(t_0)=c
\tag{3.7}
$$

Örnek 3.1.1 :

$$e^t \frac{d^5x}{dt^5} - 2e^{2t}\frac{d^4x}{dt^4} + tx = 4e^t$$

$$x(2)=1 \ , \ \frac{dx(2)}{dt} = -1 \ , \ \frac{d^3x}{dt^3} = 2 \ , \ \frac{d^4x}{dt^4} = 3$$

Bu denklemi önce yukarıda belirtildiği şekilde düzenleyelim :

$$\frac{d^5x}{dt^5} = 2e^t\frac{d^4x}{dt^4} - te^{-t}x + 4$$

$$x_1 = x$$

$$x_2 = x_1' = x'$$

$$x_3 = x_2' = x''$$

$$x_4 = x_3' = x'''$$

$$x_5 = x_4' = \frac{d^4x}{dt^4} \Rightarrow x_5' = \frac{d^5x}{dt^5}$$

Buradan;

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = x_3$$

$$x_3' = x_4$$

$$x_4' = x_5$$

$$x_5' = \frac{d^5x}{dt^5} = 2e^t\frac{d^4x}{dt^4} - te^{-t}x + 4e^t = 2e^t x_5 - te^{-t}x_1 + 4$$

Böylece matris formları :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -te^{-t} & 0 & 0 & 0 & 2e^t \end{bmatrix} \quad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{ve } t_0 = 2$$

olmak üzere verilen sistemin 1. mertebeye indirgenmiş matris ifadesi

$$X'(t) = A(t).X(t) + f(t), \qquad X(t_0) = C$$

şeklindedir.

3.2 Sabit Katsayılı Bir Diferensiyel Denklem Sisteminin Mertebesinin İndirgenmesi

Bir diferensiyel denklemin mertebesinin indirgenmesi için yukarıda verilen bilgilerden yaralanarak bir sistemin mertebesinin indirgenmesi de mümkündür. Bunu bir örnek üzerinde göstermeye çalışalım.

Örnek 3.2.1 :

$$\left.\begin{aligned} x''' &= 5x'' + y' - 7y + e^t \\ y'' &= x' - 2y' + 3y + \sin t \end{aligned}\right\} \qquad (3.8)$$

$$x(1) = 2\,,\ x'(1) = 3\,,\ x''(1) = -1\,,\ y(1) = 0\,,\ y'(1) = -2$$

Önce $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ yeni değerlerini bulalım :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x & y_1 &= y \\ x_2 &= x_1' & y_2 &= y_1' \\ x_3 &= x_2' \end{aligned}\right\} \qquad (3.9)$$

Buradan

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x & y_1 &= y \\ x_2 &= x' & y_2 &= y' \\ x_3 &= x'' \end{aligned}\right\} \qquad (3.10)$$

Böylece

$$\left.\begin{aligned} x_3' &= x''' \\ y_2' &= y'' \end{aligned}\right\} \qquad (3.11)$$

sistem x_1, x_2, x_3, y_1, y_2' ye bağlı olarak 1.mertebeden diferensiyel denklem halinde şu şekli alır : (3.12)

$$\left.\begin{aligned} x_3' &= 5x_3 + y_2 - 7y_1 + e^t \\ y_2' &= x_2 - 2y_2 + 3y_1 + \sin t \end{aligned}\right\} \qquad (3.12)$$

(3.9) ve (3.12)'yi kullanarak sistemi yazalım :

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= 5x_3 - 7y_1 + y_2 + e^t \\ y_1' &= y_2 \\ y_2' &= x_2 + 3y_1 - 2y_2 + \sin t \end{aligned}\right\} \qquad (3.13)$$

Şimdi (3.13)' ü matris formunda ifade edelim :

$$X(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad A(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad f(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \\ 0 \\ \sin t \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

$$X'(t)=A(t).X(t)+f(t) \tag{3.15}$$

Başlangıç şartlarını matris formunda yazalım :

$$X(1)=\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \\ y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x'(1) \\ x''(1) \\ y(1) \\ y'(1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3.3 Sabit Katsayılı Sistemlerin Çözümleri

Yukarıda belirtilen sistemde eğer A(t)'yi oluşturan elemanlar sabitlerden oluşuyorsa yani, t'den bağımsızsa bu başlangıç değer probleminin matris formu

$$X'(t)=A.X(t)+f(t), \qquad X(t_0)=C \tag{3.16}$$

(3.16)'yı şu şekilde de yazabiliriz :

$$X'(t)-A.X(t)=f(t), \qquad X(t_0)=C \tag{3.17}$$

Bu sistemin çözümü :

$$X(t)=e^{A.(t-t_0)}.c+e^{At}.\int_{t_0}^{t} e^{-As}.f(s).ds \tag{3.18}$$

veya

$$X(t)=e^{A.(t-t_0)}.c+\int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}.f(s).ds \tag{3.19}$$

Eğer $f(t)\equiv 0$ ise homojen denklem sistemi olur ve çözüm

$$X(t)=e^{A.(t-t_0)}.c \tag{3.20}$$

şeklindedir. Başlangıç değerleri bilinmiyorsa genel çözüm

$$X(t)=e^{A.t}.k+e^{At}.\int e^{-At}.f(t).dt \tag{3.21}$$

homojen sistem için başlangıç şartları bilinmiyorsa genel çözüm

$$X(t)=e^{A.t}.k \tag{3.22}$$

şeklindedir.

3.4 Yoketme Yöntemi İle Çözüm Örnekleri

Bu bölümde modern mühendislik matematiğinde kullanılan, bazı fiziksel sistemlerin veya elektrik devrelerinin diferensiyel deklem olarak ifade edildikten sonra bu denklemin bilinmeyen iki fonksiyonu bir tek bilinmeyen fonksiyona indirgenerek çözülmesine dair örneklere yer verilmiştir.

Örnek 3.4.1 : Yok etme ile bir sistemin çözümü

(a) $x'=-2x+y$ (3.23)

(b) $y'=-4x+3y+10\cos t$

(a)'dan $y=x'+2x$ yazabiliriz . Bu ifadenin türevini alıp, bu türevde (b)'den y' ve (a)'dan elde ettiğimiz y'yi yerlerine yazdığımızda

$$x''=x'+2x+10\cos t$$

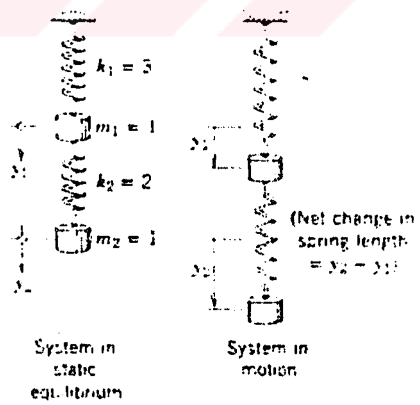
$$x''-x'-2x=10\cos t$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece denklem sistemi sadece x bilinmeyen fonksiyonuna bağlı olarak ifade edilmiş olur. Bu denklemin çözümü :

$$x(t)=-c_1.e^{-t}+2c_2.e^{2t}+3\sin t-10\cos t$$

$$y(t)=c_1.e^{-t}+4c_2.e^{2t}+\sin t-7\cos t$$

Örnek 3.4.2 : Bir mekanik sistem modeli



Şekil 3.1

Şekil 3.1'de iki yay gücü üzerindeki iki kütlenin birleşiminden oluşan bir mekanik sistem görülmektedir. Bu sisteme bir matematik model kurup, çözelim. Newton'un 2.kuralından bu mekanik sistemin diferensiyel denklemleri şu şekilde elde edilir :

$$y_1''=-3y_1+2(y_2-y_1)$$

$y_2''=-2(y_2-y_1)$

Bu sistemi şu şekilde de yazabiliriz :

$$\text{(a)}\quad y_1''=-5\,y_1+2y_2 \tag{3.24}$$

$$\text{(b)}\quad y_2''=2y_1-2y_2$$

(a)'dan

$$y_2=(1/2)y_1''+(5/2)y_1 \tag{3.25}$$

eşitliğini elde ederiz. (a)'nın tekrar türevlerini alalım :

$$y_1'''=-5\,y_1'+2y_2'$$

$$y_1^{IV}=-5\,y_1''+2y_2''$$

buradaki y_2'' yerine (b)'deki karşılığını yazalım :

$$y_1^{IV}=-5\,y_1''+2(2y_1-2y_2)$$

ve buradaki y_2 yerine de (3.25)'de bulunan karşılığını yazalım

$$y_1^{IV}=-5\,y_1''+4y_1-4((1/2)y_1''+(5/2)y_1)$$

$$y_1^{IV}=-5\,y_1''+4y_1-2y_1''-10y_1$$

$$y_1^{IV}=-7\,y_1''-6y_1$$

türevin mertebelerine göre sıralı olarak yazalım

$$y_1^{IV}+7\,y_1''+6y_1=0 \tag{3.26}$$

Sadece y_1'e bağlı olarak elde ettiğimiz bu eşitliğin karakteristik denklemi ve kökleri

$$\lambda^4+7\lambda^2+6=0$$

$\lambda^2=p$ dönüşümü yapalım. Bu durumda $\lambda^4=p^2$ olur.

$$p^2+7p+6=0 \quad\Rightarrow\quad p_1=-1\ ,\qquad p_2=-6$$

$$\Rightarrow\quad \lambda_1=i\ ,\ \lambda_2=-i\ ,\ \lambda_3=\sqrt{6}\,i\ ,\ \lambda_4=-\sqrt{6}\,i$$

Bu dört λ değerine bağlı olarak (3.26) denkleminin genel çözümü

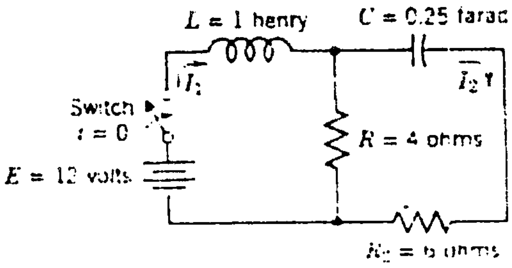
$$y_1=a_1.\cos t+b_1.\sin t+a_2.\cos\sqrt{6}\,t+b_2.\sin\sqrt{6}\,t \tag{3.27}$$

şeklindedir. Şimdi y_2'yi , (3.27)'nin ikinci türevini alıp (3.25)'de yerine yazarak

$$y_2=2a_1.\cos t+2b_1.\sin t-(1/2)\,a_2.\cos\sqrt{6}\,t-(1/2)\,b_2.\sin\sqrt{6}\,t \tag{3.28}$$

bulabiliriz .

Örnek 3.4.3 : Bir elektrik şebekesi modeli



Şekil 3.2

Şekil 3.2'de görülen $I_1(t)$ ve $I_2(t)$ akımlarını bulalım .(elektrik düğmesi kapalı olduğunda bütün yük ve akımın sıfır olduğu kabul ediliyor.)
Kirchhoff'un voltaj kuralından bu şebekenin matematik modeli şu şekilde elde edilir:
Sol taraf için

$$I_1'+4(I_1-I_2)=12$$

Sağ taraf için

$$6I_2+4(I_2-I_1)+4\int I_2.dt=12$$

Bu sistemi yeniden düzenleyerek yazalım :

(a) $I_1'+4I_1-4I_2=12$ (3.29)

(b) $-4I_1'+10I_2'+4I_2$

İkinci denklem bilinmeyen iki fonksiyonun da türevlerini içermektedir. (a)'dan I_2' yi çekip, türevini alalım :

$$I_2=(1/4)\,I_1'+I_1-3 \qquad (3.30)$$

$$I_2'=(1/4)\,I_1''+I_1' \qquad (3.31)$$

(3.30) ve (3.31)'i (b)'de yerine yazalım :

$$-4\,I_1' + 10[(1/4)I_1''+ I_1'] + 4[(1/4)\,I_1'+I_1-3] = 0$$

Bu denklemi düzenleyerek türevin mertebelerine göre yeniden yazarsak :

$$I_1''+ (14/5)\,I_1'+ (8/5)\,I_1 = 24/5 \qquad (3.32)$$

Karakteristik denklem ve kökleri :

$$\lambda^2 + (14/5)\lambda + (8/5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -2\,, \qquad \lambda_2 = (-4/5)= -0.8$$

Bu değerlere göre genel çözüm :

$$I_1(t)= c_1.e^{-2t} + c_2.e^{-0.8t} +3 \qquad (3.33)$$

I_1'in türevini alarak, (3.30)'da yerine yazarak I_1'yi elde ederiz :

$$I_2(t)= (1/2)c_1.e^{-2t} + (4/5)c_2.e^{-0.8t} \quad (3.34)$$

Not : Bu örneklerde de görüldüğü gibi verilen sistem önce bir tek bilinmeyen fonksiyondan oluşan bir denkleme dönüştürüldükten sonra, bu denklemin karakteristik denkleminin köklerinden yararlanarak genel çözüm oluşturulmuştur. Ancak karakteristik değerlerden yararlanarak bulunan çözüm, genel çözümün bir kısmı yani denklemin homojen kısmının çözümüdür. Eğer denklem homojen değilse ayrıca bir özel çözüm de bulunarak bu iki çözümün toplamı ile genel çözüm oluşturulur.

4.BÖLÜM
MATRİS KALEMLERİ

4.1 Genel Tanımlar

Tanım 4.1.1 : Elemanları K cismi üzerinde olan ve aynı boyutlu (mxn) A, B, A_1, B_1 şeklinde dört matris verilsin. Bu matrisler arasında

$$P.A.Q= A_1 \qquad P.B.Q= B_1 \tag{4.1}$$

olacak şekilde sırasıyla m ve n boyutlu P ve Q singüler olmayan iki kare matris bulunuyorsa, bu durumda $A+\lambda B$ ve $A_1+ \lambda B_1$ birer *"matris kalemi"* olup, bunlar arasındaki ilişki (4.1) 'deki eşitlikten yararlanarak bir tek eşitlik olarak şu şekilde verilebilir :

$$P. (A+\lambda B).Q= A_1+ \lambda B_1 \tag{4.2}$$

Tanım 3.1.2 : $A+\lambda B$ matris kalemi için eğer ;

1. A ve B kare matrisler ,
2. $\det(A)\neq 0$

şartları sağlanıyorsa $A+\lambda B$'ye *"regüler matris kalemi"* denir. Diğer durumlarda ($m\neq n$ durumu veya $m=n$ ama $\det(A)=0$ durumu) ise $A+\lambda B$'ye *"singüler matris kalemi"* denir.

Bu çalışmada ele alınan çözüm yönteminde regüler matris kalemlerinden yararlanıldığı için burada sadece regüler matris kalemleri ile ilgili bazı bilgilere yer vereceğiz.

4.2 Regüler Matris Kalemleri

Regüler matris kalemlerini birkaç özel durum için ayrı ayrı incelemek mümkün olup, burada yine sadece ilerideki bölümlerde kullanılacak bilgilere yer verilecektir.

$A+\lambda B$ keyfi bir regüler kalem verilmiş olsun. Bu durumda $\det(A+cB) \neq 0$ olacak şekilde bir c sayısı vardır. Böylece verilen kalem $A_1+(\lambda-c)B$ şeklinde ifade edilebilir. Burada $A_1=A+cB$ ve bu nedenle $\det A_1 \neq 0$ dır. Yani ;

$$A+\lambda B= A_1+(\lambda-c)B \tag{4.3}$$

şeklindedir. Kalemi soldan A_1^{-1} ile çarparak

$$A_1^{-1}.(A_1+(\lambda-c).B)= E+(\lambda-c).A_1^{-1}.B \tag{4.4}$$

elde edilir. Bu kalem bir benzerlik dönüşümü ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilir :

$$E+(\lambda-c).\{J_0, J_1\}=\{E-cJ_0+\lambda J_0 \ , \ E-cJ_1 +\lambda J_1 \} \tag{4.5}$$

Burada $\{J_0, J_1\}$, $A_1^{-1}.B$ matrisinin normal formunun köşegen bloğudur. J_0.bir Jordan nilpotent matrisidir[1] ve $\det J_1 \neq 0$ dır. (4.5) matrisinin sağ tarafının ilk köşegen bloğunu $(E-cJ_0)^{-1}$ ile çarpalım. Böylece

$$E+\lambda.(E-cJ_0)^{-1}.J_0 \tag{4.6}$$

ifadesini elde ederiz. Burada λ'nın katsayısı bir nilpotent matristir[2]. Buradan bir benzerlik dönüşümü ile bu kalem şu şekilde ifade edilebilir :

$$E+\lambda J_0=\{ N^{(u_1)}, N^{(u_2)}, \dots , N^{(u_s)} \} \tag{4.7}$$

$$(N^{(u)}= I^{(u)}+ \lambda H^{(u)})$$ [3]

(4.5)'in sağ tarafındaki ikinci köşegen bloğu. J_1^{-1} ile çarparsak ve sonra yine bir benzerlik dönüşümü yaparsak, 2.köşegen blok $J+\lambda E$ formu ile ifade edilebilir. Burada J normal formda bir matris ve E, birim matristir.

Teorem 4.2.1 : Bir $A+\lambda B$ keyfi regüler kalemi, aşağıdaki kanonik quasi-diagonal form haline getirilebilir :

$$\{ N^{(u_1)}, N^{(u_2)}, \dots , N^{(u_s)}, J+\lambda E\} \tag{4.8}$$

$$(N^{(u)}= I^{(u)}+ \lambda H^{(u)})$$

Burada ilk s köşegen bloklar, $A+\lambda B$ kaleminin $\mu^{u_1}, \mu^{u_2}, \dots , \mu^{u_s}$ sonsuz elemanter bölenlerine tekabül eder ve $A+\lambda E$ son köşegen bloğun normal formu, verilen kalemin sonlu elemanter bölenleri tarafından tek şekilde tayin edilmiştir.

1 $J_0^m=0$ olacak şekilde bir $m>0$ sayısı varsa J_0^m nilpotenttir.

2 $J_0^m=0$ olduğundan $[(E-cJ_0)^{-1}.J_0]^m=0$ dır.

3 Burada $E^{(u)}$, u mertebeden birim matris, $H^{(u)}$.ilk süper-diagonal elemanlarının hepsi bir ve kalan elemanları sıfır olan u mertebeden matristir.

5.BÖLÜM

SABİT KATSAYILI LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

5.1 Çözüm Yöntemi

Buradaki amaç

$$BX'+AX=f(t) \tag{5.1}$$

matris formu ile gösterilen sabit katsayılı lineer (f(t)=0) diferensiyel denklem sisteminin çözümünü araştırmaktır. Burada $X=X(t)\in R^n$ dir.

B, birim matris olduğu durumda (5.1) bir adi diferensiyel denklemdir ve çözümü aşağıdaki şekildedir :

$$X(t)=e^{-tA}.X_0+\int_0^t e^{-(t-s)A}.f(s).ds \tag{5.2}$$

veya

$$X(t)=e^{A.t}.k+e^{At}.\int e^{-At}.f(t).dt \tag{5.3}$$

$e^{t.A}$' nın bulunuşu teorem 2.4.1' de verilmiştir.

B, ters çevrilemez olduğunda ise çözüm, $A+\lambda B$ 'nin regüler matris kalemi olduğu kullanılarak yapılır. Bu metoda göre öyle bir c sayısı vardır ki A+cB ters çevrilebilirdir. Bu durumda

$$P.A.Q=diag\{E_p,N\} \quad ve \quad P.B.Q=diag\{C,E_q\} \tag{5.4}$$

Olacak şekilde nxn boyutlu P ve Q ters çevrilebilir matrisleri vardır. Burada $N=diag\{N_1, N_2, \ldots, N_k\}$ ve her bir N_i, $m_i x m_i$ nilpotent Jordan bloğudur. Ayrıca p+q=n , N qxq matris ve C pxp matris olup, $m_1+\ldots+m_k=q$ dir.

"N_i bir Jordan bloğudur" un anlamı, N_i ' nin ikinci köşegen elemanları dışında bütün elemanları sıfırdır.

Şimdi tekrar (5.1) ifadesine dönelim :

X=QY olsun. Bu durumda (5.1) denklemi şu şekle gelir :

$$P.B.Q.Y'+P.A.Q.Y=P.f(t) \tag{5.5}$$

$Y=(W,Z)^T$ olsun. Bu durumda da şu iki denklem oluşur :

$$W'+CW=(P.f(t))_{1,\dots,p} \tag{5.6}$$

$$NZ'+Z=(P.f(t))_{p+1,\dots,n}$$

Buradaki ilk sistem bir adi diferensiyel denklem sistemi olup, yukarıda verilen formül ile çözülebilir. İkinci sistemin çözümü için :

$$z_2'+z_1=(P.f(t))_{p+1}$$

$$z_3'+z_2=(P.f(t))_{p+2}$$

$$\dots\dots\dots\dots \tag{5.7}$$

$$z'_{m_1}+z_{m_1-1}=(P.f(t))_{p+m_1-1}$$

$$0\ \ +z_{m_1}=(P.f(t))_{p+m_1}$$

eşitliklerinden geriye doğru gidilerek çözüm yapılabilir. Şimdi (5.4) ifadelerinde geçen matrislerin elde edilişini adım adım verelim :

(i) $g(\lambda)=\det(A+\lambda B)$ olsun. Tanım 3.1.2 gereğince $\det(A)\neq 0$ olduğundan $A+\lambda B$ bir regüler matris kalemidir. Bu durumda $g(c)\neq 0$ olacak şekilde yeterli büyüklükte bir c sayısı seçebiliriz.

$$A_1=A+cB \tag{5.8}$$

olsun. Bu durumda A_1 ters çevrilebilirdir ve

$$A+\lambda B=A_1+(\lambda-c)B \tag{5.9}$$

eşitliğini soldan A_1^{-1} ile çarparak

$$A_1^{-1}.(A_1+(\lambda-c)B)=E+(\lambda-c).A_1^{-1}.B \tag{5.10}$$

elde ederiz.

(ii) R, ters çevrilebilir bir matris olsun , öyle ki ;

$$R^{-1}.(A_1^{-1}.B).R \tag{5.11}$$

Jordan formudur. R, MapleV programından yararlanarak bulunabilir. Bu form aşağıdaki şekilde farzedilebilir :

$$R^{-1}.(A_1^{-1}.B).R=\mathrm{diag}\{J_1,J_0\} \tag{5.12}$$

Burada J_1, bütün köşegen elemanları sıfırdan farklı olan ve J_0, bütün köşegen elemanları sıfır olan Jordan matrisleridir. Şimdi (i)'de bulunan (5.10) ifadesini soldan R^{-1}, sağdan R ile çarpalım. Böylece :

$$R^{-1}.(E+(\lambda-c).A_1^{-1}.B).R=\mathrm{diag}\{E+(\lambda-c).J_1\ ,\ (E-cJ_0)+\lambda J_0\} \tag{5.13}$$

eşitliğini elde ederiz.

(iii) (ii)'de bulunan (5.13) kalemini diag$\{E , (E-c J_0)^{-1}\}$ ile çarpalım :

$$\text{diag}\{E , (E-c J_0)^{-1}\}.\ \text{diag}\{E+ (\lambda-c).J_1 ,\ (E-cJ_0)+\lambda J_0\}=$$

$$\text{diag}\{E+ (\lambda-c).J_1 ,\ E+\lambda(E-cJ_0)^{-1}.J_0\} \tag{5.14}$$

Burada $E-cJ_0$'ın ters çevrilebilir olduğuna dikkat edilmelidir. Çünkü bu matris köşegen üzerindeki elemanları ile üst üçgendir.

(iv) J_0 nilpotent olduğundan bazı $h\geq0$ için $J_0^h=0$ dır. $(E-cJ_0)^{-1}$ matrisi J_0'a göre değişir olduğundan $(E-cJ_0)^{-1}.J_0$ da nilpotenttir. S, bir ters çevrilebilir matris olsun, öyle ki :

$$S^{-1}.(E-cJ_0)^{-1}.S \tag{5.15}$$

olup, bu matris Jordan matrisidir (Buradaki S matrisini yine Maplev bilgisayar nprogramından bulabiliriz). (iii)'de bulunan (5.14) ifadesini soldan diag$\{(E , S^{-1}\}$ ve sağdan diag$\{E , S\}$ ile çarpalım :

$$\text{diag}\{(E , S^{-1}\}.\ \text{diag}\{E+ (\lambda-c).J_1 ,\ E+\lambda(E-cJ_0)^{-1}.J_0\}.\ \text{diag}\{E , S\}=$$

$$\text{diag}\{E+(\lambda-c).J_1 ,\ E+\lambda N\} \tag{5.16}$$

Burada $N= S^{-1}.(E-cJ_0)^{-1}.J_0.S$ dir.

(v) Sonuç olarak, (iv)' de bulunan (5.16) ifadesini soldan diag$\{J_1^{-1}, E\}$ ile çarparak :

$$\text{diag}\{J_1^{-1}, E\}.\ \text{diag}\{E+(\lambda-c).J_1 ,\ E+\lambda N\}=$$

$$\text{diag}\{J_1^{-1}+(\lambda-c)E ,\ E+\lambda N\}= \text{diag}\{C , E\}+\lambda.\text{diag}\{E , N\} \tag{5.17}$$

Burada $C= J_1^{-1}-cE$ dir.

(vi) P, (i)-(v) adımlarında orjinal kalemin soldan çarpımlarına uygulanan bütün matrislerin çarpımı ve Q, (i)-(v) adımlarında orjinal kalemin sağdan çarpımlarına uygulanan bütün matrislerin çarpımı olsun. Bu durumda :

$$P.(A+\lambda B).Q= \text{diag}\{C , E\}+\lambda.\text{diag}\{E , N\} \tag{5.18}$$

Şeklinde orjinal kalemi köşegen formda ifade etmiş oluruz.

Bu matrisleri bulduktan sonra tekrar (5.5),(5.6),(5,7) denklem sistemlerine dönerek bulunan matrisleri yerlerine yazarak çözüme ulaşabiliriz.

5.3 Sonuç

$$BX'+AX=f(t)$$

Matris diferensiyel denklemi ile gösterilen sabit katsayılı bir lineer diferensiyel denklem sisteminin çözümü için iki durum karşımıza çıkmaktadır :

(1) B düzgün matris ise ;

B ters çevrilebilir olduğundan B^{-1} mevcuttur. Denklemin her iki tarafını B^{-1} ile çarparak

$$EX'+B^{-1}AX=Bf(t)$$

Şeklinde bir adi diferensiyel denklem elde etmiş oluruz. Bu durumda (5.2) ve (5.3) ifadelerinde de verilmiş olan bilinen çözüm formülünü kullanarak sonuca ulaşabiliriz.

(2) B düzgün matris değil ise ;

Bu durumda, B^{-1} mevcut olmadığından denklemi doğrudan adi diferensiyel denkleme dönüştüremeyiz ancak $A+\lambda B$ regüler matris kaleminden yararlanarak, bilinmeyen fonksiyonların türevlerinin katsayılarının matrisini (Yukarıdaki B matrisi yerindeki matris) köşegen formda ifade edebiliriz. Bunun için $X=QY$ dönüşümü yaparak, denklemi soldan P ile çarpmalıyız. Böylece ;

$$P.B.Q.Y' + P.A.Q.Y = P.f(t)$$

Şeklinde sol tarafın katsayılar matrisleri köşegen olan bir form elde etmiş oluruz. Burada PAQ ve PBQ $A+\lambda B$ matris kaleminin köşegen ifadesini oluşturan ve yine köşegen olan matrislerdir, yani ;

$$P.(A+\lambda B).Q=P.A.Q + \lambda. P.B.Q$$

$Y=(W,Z)^T$ şeklinde ikinci bir dönüşüm yaparak

$$W' + CW = (P.f(t))_{1,\ldots,p}$$

$$NZ' + Z = (P.f(t))_{p+1,\ldots,n}$$

Şeklinde çözülebilir sistemler elde edilir ve W,Z bulunduktan sonra geriye doğru giderek X(t) çözümü elde edilir.

KAYNAKLAR

1. **Akbulut F.(1974)**, Lineer Cebir, Ege Ünv. Yayınları, İzmir

2. **Bellman R.(1970)**,Introduction to Matrix Analysis, Second Edition, Mc Graw-Hill Book Company,U.S.A

3. **Bronson R.(1970)**, Matrix Methods An Introduction, academic Press

4. **Brualdi R.A.(1987)**, *The Jordan Canonical Form: An Old Proof*, American Mathematical Monthly, 94(3), 257-267

5. **Fletcher R.(1983)**, *An algorithmic Derivation Of The Jordan Canonical Form*, American Mathematical Monthly, 90(1), 12-16

6. **Gantmacher F.R.(1959)**, Applications Of The Theory Of Matrices, Interscience Publishers , U.S.A.

7. **Gilbert L.P., Johnson A.M.(1980)**, *An Application Of The Jordan Canonical Form to Epidemic Problem*, Journal Of Applied Probability,17(2), 313-323

8. **Glüsing H., Lüerben , Hinrichsen D.(1988)**, *A Jordan Control Canonical Form For Singuler Systems*, International Journal of Control, 48(5), 1769-1785

8. **Hoffman K., Kunze R.(1971)**, Lineer Algebra,Second Edition, Prentice-Hall, New Jersey

9. **Hong Y., Horn R.A.(1991)**, The Jordan Canonical Of A Product Of A Hermitian And a Positive Semidefinite Matrix, Linear Algebra And Its Applications, 147, 373-386

11. **Schiebold C.(1998),** *An Operator Theoretic Approach To The Toda Lattice Equation*, Physica D, 122(1-4), 37-61

12. **Shirvani M., W.-H.SO Joseph(1998),** *Solutions Of Linear Differantial Algebraic Equations*, Siam Review, 40(2) 244-246

13. **Waterhouse W.C.(1992),** *Jordan Canonical Form*, The American Mathematical Monthly, 9(1), 670

ÖZGEÇMİŞ

01.01.1972 Yılında Ankara'da doğdu. İlkokula Ankara Balgat İlkokulu'nda başlayıp, Manisa Merkez Murat Germen İlkokulu'nda tamamladı. Ortaokulu Manisa Atatürk Ortaokulu'nda bitirdi. Lise Öğrenimini Manisa Lisesi ve Alaşehir Lisesi'nde tamamladı. 1989-1990 Öğretim yılında Ankara Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yüksek öğrenimine başlayarak, 1994-1995 öğretim yılında mezun oldu. Aynı yıl Selçuk Üniversitesi Taşkent M.Y.O.'nda Öğretim Görevlisi olarak çalışmaya başladı. 1996-97 öğretim yılında açılan sınavı kazanarak yine Selçuk Üniversitesi'nde yüksek lisans yapma hakkı kazandı. Halen Selçuk Üniversitesi Taşkent M.Y.O'nda görevine devam etmektedir.