SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$Ax = f$ PROBLEMİNİN SVD ALGORİTMASI İLE ÇÖZÜMÜ

Dağıstan ŞİMŞEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya, 1999

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ax = f PROBLEMİNİN SVD ALGORİTMASI İLE ÇÖZÜMÜ

Dağıstan ŞİMŞEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 28 / 01 / 1999 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof Dr. Haydar BULGAK	Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ	Yrd. Doç. Dr. Kemal AYDIN
(Danışman)	(Üye)	(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Ax = f PROBLEMİNİN SVD ALGORİTMASI İLE ÇÖZÜMÜ

Dağıstan ŞİMŞEK
Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Haydar BULGAK
1999, 78 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Haydar BULGAK
Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ
Yrd. Doç. Dr. Kemal AYDIN

Altı bölümden oluşan bu tezde, Ax = f problemi singüler değerler yardımıyla çözülmüştür.

Birinci bölümde singüler değerler ve format hakkında genel bilgi verilmiştir. İkinci bölümde matrisler ve vektör uzayıyla ilgili temel tanımlar üzerinde durulmuştur.

Üçüncü ve dördüncü bölümde singüler değerlerin tanımı ve SVD algoritması olarak bilinen singüler değerlerin ayrışımı için bir teorem verilerek, Ax = f problemine uygulanması tanıtılmıştır.

Beşinci bölümde bilgisayarda kullanılan format sayıları hakkında bilgi verilmiş ve bilgisayar formatına göre SVD algoritması incelenmiştir.

Altıncı bölümde ise bazı örnekler çözülmüştür.

Anahtar kelimeler: Matris, Öz değer, Singüler değer, SVD algoritması

ABSTRACT

MS Thesis

THE PROBLEM OF AX = F SOLVE WİTH SVD ALGORİTM

Dağıstan ŞİMŞEK
Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Haydar BULGAK

1999, Page 78

Jury : Prof. Dr. Haydar BULGAK
Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ
Yrd. Doç. Dr. Kemal AYDIN

In this thesis including six chapters, the problem Ax = f is solved by singular values.

In the first chapter, general information about singular values and format are given.

In the second chapter, basis definations in relation to matrixs and vector spaces are discussed.

In the third and fourth chapters, a theorem is given for defination of singular values and decomposition of singular value which known as SVD algoritm and , its application to the problem Ax=f is found.

In the fifth chapter, information that about format numbers are used in computer is given and in according the computer format, SVD algoritm is analysed.

In the six chapter, some examples are solved.

Key words: Matrix, Eigen value, Singular value, SVD algoritm

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana teklif eden ve çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, bilgilerinden faydalanma imkanını veren Danışman Hocam Sayın Prof. Dr. Haydar BULGAK'a, Niğde Üniversitesi Matematik Bölüm Başkanı Sayın Yrd. Doç. Dr. İsmet Altıntaş ve bölümündeki tüm elemanlara, yazım aşamasında yardımcı olan N.Ü. Fizik Bölümü'nden Araş. Gör. İzzettin Yılmazer' e ve desteklerini benden esirgemeyen eşim ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i

ABSTRACT ii

TEŞEKKÜR iii

SİMGELER vi

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1. Cisim 3

2.2. Vektör Uzayı 3

2.3. Alt Vektör Uzayı 3

2.4. Krilow Alt Vektör Uzayı 4

2.5. İnvaryant Öz Alt Vektör Uzayı 4

2.6. Maksimal İnvaryant Öz Alt Vektör Uzayı 4

2.7. İç Çarpım Vektör Uzayı 5

2.8. Normlu Vektör Uzayı 5

2.8.1 Vektörlerin iç çarpımı ve vektör normları 5

2.8.2. Matris normu 6

2.8.3. Simetrik matrisin normu 6

2.9. Karakteristik Denklem 7

2.10. Öz Değer 8

2.11. Öz Vektör 8

2.12. Öz Çift 8

2.13. Transpoz Matris 8

2.14. Taban 8

2.15. Vektörlerin Ortogonalliği 8

2.16. Ortonormal Küme 9

2.17.Çekirdek Uzayı 9

3. SİNGÜLER DEĞERLER VE SİNGÜLER DEĞERLERİN AYRIŞIMI 10

3.1.Singüler Değerler ve Singüler Vektörler 10

3.2 Singüler Değerlerin Ayrışımı 11

3.2.1.Uyarılar 18

3.3. Karesel Matrislerin Singüler Değerlerinin Özellikleri 19
4. AX = F LİNEER CEBİRSEL DENKLEM SİSTEMLERİ 22
4.1. Bazı Tanımlar 22
4.2. Lineer Cebirsel Homojen Denklem Sistemlerinin Çözüm Kümesi Bir Alt Vektör Uzaydır, Fundamental Matris 24
4.3. Genel Çözüm 28
4.4. Lineer Homojen Olmayan Cebirsel Denklem Sistemlerinin Çözümü 28
4.4.1. Kısmi çözüm (Özel çözüm) 28
4.4.2. Genel çözüm 29
4.4.3. Genelleştirilmiş normal çözüm 30
5. FORMAT 31
6. ÖRNEKLER 45
7. KAYNAKLAR 70
ÖZGEÇMİŞ 72

SİMGELER

σ	Singüler Değer
u	Sol Singüler Vektör
q	Sağ Singüler Vektör
(σ, u, q)	Singüler Üçlü
A^*	A Matrisinin Transpozu
Σ	Eş Diyagonal Matris
λ	Öz Değer
$\lVert A \rVert$	A nın Normu
(λ, x)	Öz Çift
Dim	Boyut
ψ	Fundamental Matris
Ker	Çekirdek
$\hat{x}$	Kısmi Çözüm
$\bar{x}$	Genelleştirilmiş Normal Çözüm

KISALTMALAR

SVD	Singüler Değerlerin Ayrışımı
Max	Maksimum
Min	Minimum

1. GİRİŞ

Dünyada öz değer kavramı eğitim sisteminde çok kullanılan temel kavramlardan birisidir. Bu kavram simetrik problemlerde genellikle bütün sorunları aşmaya imkan tanımıştır. Aynı zamanda bilgisayarda da simetrik matrisler için öz değer problemleri sorun çıkarmayan bir problemdir.

Simetrik olmayan matrislere simetrik yöntemleri uygulamasıyla singüler değerler kavram olarak ortaya çıkmaktadır. Bu kavram yaklaşık olarak 100 yıl önce integral denklemlerin teorisinde kullanılmıştır. Gantmaher tarafından 1959 yılında yayınlanan Matris Teorisi kitabı bütün dünyada matrisler hakkında bir ansiklopedi şekline gelmiştir. Ancak bu kitapda singüler değerler hakkında hiçbir bilgi mevcut değildir. 1970 li yıllarda bu boşluğu gören Lidskii daha sonra ki bir baskısında singüler değerler adlı ek bir bölümü Gantmaherin kitabına eklemiştir[5].

Golub ve Van Loan ın 1989 yılında yayınlamış oldukları kitapta, SVD teoremi ve teoremin ispatı verilmiştir[7].

Godunov, Antonov ve Kiriluk un 1993 yılında yayınladıkları kitapta, SVD algoritmasının kanonik forma indirgenmesinden ve dikdörtgen matrisler için SVD nin indirgenmesiyle elamanter ortogonal dönüşümleri elde etmenin mümkün olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca SVD nin lineer cebir denklem sistemine uygulanmasını göstermişlerdir[6].

Treferthen ve David in 1995 yılında yayınladıkları kitapta, singüler değerlerin geometride nasıl kullanıldığı hakkında bilgi veriliyor. Kitapta azalan SVD ve tam SVD den bahsediliyor. Azalan SVD, $Av_j = \sigma_j u_j$ $(1<j<n)$ formülünden hesap ediliyor. Tam SVD ise $A = U\Sigma V^*$ formülünden hesap ediliyor[8].

Ayşe Bulgak 1997 yılında hazırladığı singüler değerler adlı seminerinde singüler değerlerin tanımını vermiştir[10].

Bu değerler Ax = f probleminde vazgeçilmez noktaya son otuz senede gelmiştir ve bilim hesaplamalarında SVD(singüler değerlerin ayrışımı) algoritması olarak bilinen yöntem yer almıştır.

Teknolojinin hızla ilerlediği, bilgisayar çağı adını verdiğimiz 2000 li yıllara yaklaştığımız şu günlerde bilgisayar hayatımızın bir parçası olmuştur. Ulaşım, haberleşme, tıp ve uzay gibi birçok dalda bilgisayar kullanılmaktadır. Bilgisayar, günümüzde mühendislik, fen ve ekonomide karşılaşılan problemlerin çözümünde büyük kolaylıktır. Bilgisayar, rasyonel sayıların alt kümesi olan format sayıları ile işlem yapmaktadır. Bu yüzden format sayıları çok önemlidir.

Matris işlemlerinde garanti yaklaşım çözüm metodu, matematikte Ax = f sisteminin, stabilite teorisindeki Lyapunov denklemi, optimal kontrol teoride kullanılan Riccati denklemi gibi fen ve mühendislikte matris formuna getirilebilen problemlerin bilgisayarla çözümünde uygulanan en son teknik metottur. Bu metodun Ax = f problemine uygulaması SVD algoritma ile ilgilidir. Bu algoritmanın ana konusu verilen simetrik matrisin öz vektörlerinden oluşan ortonormal tabanı bilgisayarda hesaplamaktır. Bu metotla yukarıdaki problemlerin bilgisayar çözümlerinde oluşan yuvarlama hatalarının etkisi minumuma indirgenerek, problemin çözüm hatası, bilgisayarın işlem hatasından daha küçük olarak elde edilir.

İyi konulmamış problemlerde [11] verilen data ve giriş hataları problemi çözülemeyen ve uygulanamayan duruma getirmektedir. Bu metotla bu tür problemlerin data ve giriş hataları kontrol edilir, hataya sebeb olan değerler tespit edilerek, problem iyi konulmuş hale getirilir. Kısaca bu metot, yukarıdaki problemlerin çözümünde, dünyada değişik ülkelerde uygulanan metotlardan daha hassas yaklaşım veren algoritma ve programlar grubudur[11].

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Cisim

K, Kompleks sayılar kümesinin bir alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa, K kümesine bir cisimdir denir.

1) $y,z \in K$ için $y \oplus z \in K$ ve $y \otimes z \in K$

2) $y \in K$ için $y \oplus e = e \oplus y = y$ ve $y \otimes e_1 = e_1 \otimes y = y$ olacak şekilde $e, e_1 \in K$ vardır.

3) $y \in K$ için $y \oplus y^{-1} = y^{-1} \oplus y = e$ ve $y \otimes y^{-1} = y^{-1} \otimes y = e_1$ olacak şekilde $y^{-1} \in K$ vardır.

2.2. Vektör Uzayı

V bir küme, F de bir cisim olsun. V kümesi üzerinde toplama işleminin ve F deki skalerle çarpma işleminin tanımlı olduğunu düşünelim.

V deki x,y,z elemanları ve F deki α,β sayıları için aşağıdaki işlemler sağlanırsa

1) $x+y = y+x$

2) $x+(y+z) = (x+y)+z$

3) Her bir x için $0+x = x$ olacak şekilde V nin bir 0 elemanı vardır.

4) Her bir x için $x+(-x) = 0$ olacak şekilde V nin bir $-x$ elemanı vardır.

5) $1.x = x$, 1 verilen F nin elemanıdır.

6) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;

7) $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$;

8) $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$;

V kümesine skaler F cismi üzerinde bir vektör uzayıdır denir.

2.3. Alt Vektör Uzayı

V bir vektör uzayı ve W, V nin bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa W ye V nin bir alt vektör uzayı denir.

1) $u,v \in W$ için $u+v \in W$

2) $c \in K$ ve $u \in W$ için $c.u \in W$

3) $0 \in V$ için $0 \in W$

2.4. Krilow Alt Vektör Uzayı

$\ell: V \rightarrow V$ bir dönüşüm olsun.

$f \in V$ olmak üzere,

$$\ell f = \alpha f,\ \alpha \neq 0 \text{ ve } f \neq 0$$

ise o zaman (α, f) bir öz çifttir. Eğer f üzerinden bir alt vektör uzayı kurarsak,

$$X = \{f, \ell f, \ell^2 f, \ell^3 f, \ldots\}$$

vektör uzayına Krilow alt vektör uzayı denir.

2.5. İnvaryant Öz Alt Vektör Uzayı

Genelleştirilmiş öz vektörler, bir f_1 vektörü ve $(P-\lambda I)$ dönüşümü ile bir Krilow alt vektör uzayı,

$$f_1,\ f_2 = (P-\lambda I)\, f_1,\ f_3 = (P-\lambda I)\, f_2,\ \ldots,\ f_k = (P-\lambda I)\, f_{k-1},\ (P-\lambda I)\, f_k = 0$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bu alt vektör uzayı, verilen P dönüşümüne göre invaryanttır. Bu alt vektör uzayına invaryant öz alt vektör uzayı denir.

2.6. Maksimal İnvaryant Öz Alt Vektör Uzayı

Açıktır ki, bir λ öz değerine birden fazla invaryant alt vektör uzayları gelebilir. Bütün λ öz değerlerine karşılık gelen invaryant alt vektör uzaylarının toplamına λ ya karşılık gelen maksimal invaryant öz alt vektör uzayı denir.

2.7. İç Çarpım Vektör Uzayı

F cismi üzerinde bir vektör uzayı, V olsun. V vektör uzayındaki bir iç çarpım V nin her u, v vektör çiftini $\rho(u, v)$ sayısına eşleyen ve aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir fonksiyondur.

1) V nin her u, v vektörleri için $\rho(u, v)$ bir sayıdır;
2) V nin her u, v vektörleri için $\rho(u, v) = \rho(v, u)$;
3) V nin her u, v, w vektörleri için $\rho(u+w, v) = \rho(u, v) + \rho(w, v)$;
4) V nin her u, v vektörleri ve F nin her α değeri için $\rho(\alpha u, v) = \alpha\, \rho(u, v)$;
5) $\rho(u, u) > 0$, V nin her $u \neq 0$ için, $\rho(0, 0) = 0$

dır.

$\rho(.. .)$ iç çarpımıyla V vektör uzayına iç çarpım vektör uzayı denir.

2.8. Normlu Vektör Uzayı

V bir vektör uzayı ve $n: V \rightarrow R$ de bir dönüşüm olsun. Eğer V deki her u vektörü için aşağıdaki aksiyomlar

1) V deki her $u \neq 0$ için $n(u) > 0$, $n(0) = 0$;
2) R deki her α için $n(\alpha\, u) = |\alpha|\, n(u)$;
3) V deki her u, v için $n(u + v) \leq n(u) + n(v)$

doğru ise bu taktirde n dönüşümüne norm denir.

V vektör uzayına n(.) normuyla beraber normlu vektör uzayı denir.

2.8.1 Vektörlerin iç çarpımı ve vektör normları

R^N deki herhangi iki

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_N \end{pmatrix} ; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_N \end{pmatrix}$$

vektörleri için iç çarpım

$$(x ,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_Ny_N$$

şeklindedir. Öklid normuda

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \dots + x_N^{\ 2}}$$

şeklinde tanımlanır.

2.8.2. Matris normu

NxN tipindeki matrislerin vektör uzayında birçok normu vardır. Bunlardan ikisi

1) $\|A\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$ - spektral norm,

2). $\|A\|_E = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{N} a_{ij}^{\ 2}}$ - Frobenius normu

dur.

2.8.3. Simetrik matrisin normu

S, NxN tipinde simetrik bir matris ise

$$\|S\| = \max_{j=1,2,\ldots,N} |\lambda_j(S)|$$

şeklinde hesap edilir.

2.9. Karakteristik Denklem

A, N-boyutlu karesel bir matris ve N-boyutlu bir x vektörü için

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2N} \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{N1} & a_{N2} & . & . & . & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_N \end{pmatrix}$$

denklemini aşağıdaki şekilde yazarsak

$$Ax-\lambda x = 0\,, \quad Ax-\lambda Ix = 0\,, \quad (A-\lambda I)x = 0$$

olur. Burada I birim matristir.

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & . & . & . & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & . & . & . & a_{2N} \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{N1} & a_{N2} & . & . & . & a_{NN}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_N \end{pmatrix} = 0$$

sıfırdan farklı çözümler için kullanılan det(A-λI) = 0 ifadesine karakteristik denklem denir.

2.10. Öz Değer

A, N-boyutlu bir kare matris olsun. $x \neq 0$ için $Ax = \lambda x$ eşitliği sağlayan λ değerlerine A matrisinin öz değerleri denir.

2.11. Öz Vektör

A, N-boyutlu bir kare matris olsun. $x \neq 0$ için $Ax = \lambda x$ eşitliğini sağlayan x vektörlerine A matrisinin öz vektörleri denir.

2.12. Öz Çift

A, N-boyutlu bir kare matris olsun. $Ax = \lambda x$ eşitliğini sağlayan (λ, x) çiftine, öz çift denir. Burada λ öz değer, x de öz vektördür.

2.13. Transpoz Matris

$A = (a_{ij})_{MxN}$ tipinde bir matris ise bu matriste aynı numaralı satırların sütunlarla yer değiştirmesi sonucu elde edilen matrise (yani $A^t = A^* = (a_{ji})_{NxM}$ matrisine) A nın transpoz matrisi denir.

2.14. Taban

Eğer verilen V vektör uzayını oluşturan N tane lineer bağımsız $x_1, x_2, ..., x_N$ vektörleri var ise buradaki $x_1, x_2, ..., x_N$ vektörlerine V vektör uzayının tabanı veya bazı denir.

2.15. Vektörlerin Ortogonalliği

V bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer $(u, v) = 0$ ise $u, v \in V$ vektörlerine ortogonal(dik) denir.

2.16. Ortonormal Küme

V herhangi bir vektör uzayı ve $\{v_i\}$, V de aşağıdaki özellikleri sağlayan bir küme olsun.

1) $\forall\ v_i \in V$ için $(v_i, v_i) = 1$,

2) $i \neq j$ için $(v_i, v_j) = 0$

Bu durumda $\{v_i\}$ kümesine ortonormal küme denir.

2.17.Çekirdek Uzayı

MxN tipinde reel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2N} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{M1} & a_{M2} & . & . & . & a_{MN} \end{pmatrix}$$

matrisini alalım. A nın çekirdeği

$$Ker(A) = \{\, x,\ Ax = 0,\ x \in R^N \}$$

ile ifade edilir. Burada Ker(A) nın R^N nin bir alt uzayı olduğu açıktır ve buna A nın çekirdek uzayı denir. Ker(A) nın boyutuna A nın nullity(çekirdek veya sıfır) uzayı denir ve dim(Ker(A)) şeklinde gösterilir.

3. SİNGÜLER DEĞERLER VE SİNGÜLER DEĞERLERİN AYRIŞIMI

3.1.Singüler Değerler ve Singüler Vektörler

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix}.$$

reel elemanlı M×N tipindeki bir matris olsun.

$$Au = \sigma q \; ; \; A^*q = \sigma u$$

denklemleri sağlanırsa (σ, u, q) üçlüsüne A nın singüler üçlüsü denir. Burada σ negatif olmayan bir sayı,

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_M \end{pmatrix},$$

$\| u \| > 0$, $\| q \| > 0$ şartına sahip sırasıyla N ve M-boyutlu aşikar olmayan vektörlerdir. Eğer (σ, u, q) A nın singüler üçlüsü ise, o zaman σ, u, q değerleri sırasıyla A nın singüler değeri, sol ve sağ singüler vektörleridir.

Burada tanımdan $A^*Au = \sigma^2 u$ ve $AA^*q = \sigma^2 q$ olduğu açıktır. Ancak dikdörtgen matrisler için A^*A ve AA^* aynı boyutta matrisler değildir.

3.2 Singüler Değerlerin Ayrışımı

Simetrik matrisler için öz değer ayrışımı ne kadar önemli ise genel matrisler için de singüler değer ayrışımı o kadar önemlidir. Bunu bu bölümde tanıtacağız.

Teorem 3.2.1. Herhangi bir M×N tipindeki A matrisi için $\{u_1, u_2, \dots, u_K\}$ bir sol ortonormal singüler vektör kümesi ve $\{q_1, q_2, \dots, q_K\}$ da bir sağ ortonormal singüler vektör kümesi olmak üzere $0 \le \sigma_1(A) \le \sigma_2(A) \le \dots \le \sigma_K(A)$ olacak şekilde $(\sigma_{K-j+1}, u_j, q_j)$ üçlüleri vardır. Burada $j = 1, 2, \dots, K = \min(N, M)$ dir.

Eğer $K < N$ ise, $u_{K+1}, u_{K+2}, \dots, u_N$ vektörleri ile tabana tamamlanan sol singüler vektörler, $\mathbf{R}^N$ uzayının ortonormal bir tabanını verir ve bu vektörler $Au_j = 0$, $j = K+1, K+2, \dots, N$ denklemini sağlar.

Eğer $K < M$ ise, $q_{K+1}, q_{K+2}, \dots, q_M$ vektörleri ile tabana tamamlanan sağ singüler vektörler, R^M uzayının ortonormal bir tabanını verir ve bu vektörler

$A^*q_j = 0, j = K+1, K+2, \dots, M$ denklemini sağlar.

Buna göre

$$Q = [q_1, q_2, \dots, q_M] \; ; \; U = [u_1, u_2, \dots, u_N]$$

vektörlerin oluşturduğu matrisler yardımıyla

$$QAU = \Sigma$$

matrisini kuralım. Bu şekildeki gösterime A nın singüler ayrışımı denir. Burada, eğer

$K < N$ ise

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_K(A) & 0 & \cdots & 0 & \\ & \sigma_{K-1}(A) & O & 0 & O \\ & & \ddots & \vdots & \\ O & & & \sigma_1(A) & \end{pmatrix}$$

K×N boyutlu matris, K < M ise

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_K(A) & & & O \\ 0 & \sigma_{K-1}(A) & & \\ \vdots & O & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_1(A) \\ & O & & \\ & & & \end{pmatrix}.$$

M×K boyutlu matristir. Burada Σ eş diyagonal matris olarak adlandırılır.

İspat. K < N (yani M < N) olduğunu kabul edip

$$H = \begin{pmatrix} O & A^* \\ A & O \end{pmatrix}$$

olduğunu ele alalım. Bu (N+M)x(N+M) tipinde simetrik bir matristir. Biz biliyoruz ki burada N+M tane ($\lambda_j(H)$, $h_j(H)$), j = 1, 2, ..., N+M, öz çifti vardır öyle ki $h_j(H)$, j = 1, 2, ..., N+M vektörlerinin bir kümesi ortonormaldir ve $\lambda_j(H)$, j = 1, 2, ..., N+M öz değerleri

$$\lambda_1(H) \leq \lambda_2(H) \leq \ldots \leq \lambda_{N+M}(H)$$

şeklinde sıralıdır. H nin bütün öz vektörlerini

$$h_j(H) = \begin{pmatrix} v_j \\ g_j \end{pmatrix}, j = 1, 2, ..., N+M$$

şeklinde tekrar yazabiliriz. Burada v_j ve g_j sırasıyla M ve N-boyutlu vektörler ve

$$\| v_j \| + \| g_j \| > 0 \, , j = 1, 2, \dots N+M$$

dır. Eğer s, H matrisinin pozitif öz değeri ise o zaman -s negatif ve M+N-2s sıfır öz değeridir.

Gerçekten, λ

$$| \lambda | \geq \lambda_j(H), j = 1, 2, \dots, N+M$$

olacak şekilde H nin bir öz değeri olsun. v ve g sırasıyla N ve M boyutlu vektörler olmak üzere H nin bir öz çiftini $(\lambda, \begin{pmatrix} v \\ g \end{pmatrix})$ olarak alalım. Eğer $\lambda = 0$ ise o zaman H nin bütün öz değerlerinin 0 olduğu açıktır ve H nin simetrik oluşundan H = 0 sonucu çıkar ve buradan da A = 0 olur.

$|\lambda|$ bir pozitif sayı olsun. Tanımdan

$$A^* g = \lambda v;$$
$$A v = \lambda g$$

olarak yazılabilir. Buradan hareketle

$$A^* (-g) = -\lambda v;$$
$$A v = -\lambda(-g)$$

yazılabilir. Dolayısıyla H nin bir öz çifti de $(-\lambda, \begin{pmatrix} v \\ -g \end{pmatrix})$ olur. Simetrik matrislerin öz değerlerine farklı ortonormal öz vektörlerin karşılık geldiğini biliyoruz. Yani $\begin{pmatrix} v \\ g \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} v \\ -g \end{pmatrix}$ vektörleri ortogonaldir. Buradan $\| g \| = \| v \|$ olduğu görülür.

Öz değerlerin katlı olduğu durumlarda ne söyleyebiliriz.? Şimdi bu durumu gösterelim.

λ ve $-\lambda$ öz değerlerini sırasıyla m ve mm katlı alalım. Farz edelim ki $m \geq mm$ olsun. Burada λ ya karşılık gelen H nin $w_1, w_2, ..., w_m$ ortonormal vektörleri vardır. Bunu

$$w_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, m$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $x_1, x_2, ..., x_m$ ve $y_1, y_2, ..., y_m$ sırasıyla N ve M-boyutlu vektörlerdir. Yukarıdaki işlemler kullanılarak (λ, w_j) öz çifti için aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir:

1) $\| x_j \| = \| y_j \|, j = 1, 2, ..., m;$

2) $(x_i, x_j) + (y_i, y_j) = 0, i, j = 1, 2, ..., m, i \neq j;$

3) $(x_j, x_j) + (y_j, y_j) = 1, j = 1, 2, \dots, m.$

$$f_j = \begin{pmatrix} x_j \\ -y_j \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, m$$

vektörlerini alalım. $(-\lambda, f_j)$ nin H nin öz çifti olduğunu görebiliriz. $|\lambda|$ pozitif sayı olduğundan bütün f_i ler w_j , (i, j = 1, 2, ..., m) vektörüne ortogonaldirler. Bu bizi şu sonuca götürür. Eğer λ, H nin m katlı öz değeri ise o zaman $-\lambda$ da mm katlıdır ve mm ≥ m olur. m ≥ mm kabulü kullanılarak mm = m sonucuna varılır. Bundan dolayı, eğer s, H nin pozitif öz değeri ise o zaman -s negatif ve M+N-2s sıfır öz değeri olduğu ispatlanmış oldu. Bundan başka.

$$h_j(H) = \begin{pmatrix} v_j \\ g_j \end{pmatrix},\ h_{M+N+j+1}(H) = \begin{pmatrix} v_j \\ -g_j \end{pmatrix},\ j = 1, 2, \ldots, s$$

vektörleri H nin maksimal invaryant alt uzayının da ortonormal bir tabanıdır ve onun sıfır olmayan öz değerlerine karşılık gelir.

$$\| v_j \| + \| g_j \| > 0 \text{ ve } \| v_j \| = \| g_j \|$$

olduğundan herhangi bir j = 1, 2, ... s için

$$\| v_j \| > 0,\ \| g_j \| > 0$$

dır. İlginçtir ki v_j ve g_j (j = 1, 2, ..., s) kümeleri, iki ortogonal kümedir. Bunu ispat etmek için herhangi bir i ve j (i ≠j, i, j = 1, 2, ..., s) için

$$(v_i, v_j) = 0;\ (g_i, g_j) = 0$$

olduklarını göstermemiz gerekmektedir. Açıkça

$$h_j(H) = \begin{pmatrix} v_j \\ g_j \end{pmatrix},\ h_{M+N-j+1}(H) = \begin{pmatrix} v_j \\ -g_j \end{pmatrix},\ j = 1, 2, \ldots, s$$

ortonormal tabanlar olduklarından

$$(v_i, v_j) - (g_i, g_j) = 0;$$
$$(v_i, v_j) + (g_i, g_j) = 0;$$
$$(v_i, v_i) + (g_i, g_i) = 1$$

yazılabilir. Bundan dolayı

$$(v_i, v_j) = 0;\ (g_i, g_j) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, s$$

olur. Buradan

$$u_j = \frac{1}{\|v_j\|} v_j,\ q_j = \frac{1}{\|g_j\|} g_j,\ j = 1, 2, \ldots, s$$

vektörlerinin, ortonormal kümeler olduğu sonucuna varılır. Bununla beraber

$$\sigma_K(A) = \lambda_{N+M}(H),\ \sigma_{K-1}(A) = \lambda_{N-M-1}(H),\ \ldots,\ \sigma_{K+1-s}(A) = \lambda_{N+M+1-s}(H),$$

$$\sigma_{K-s}(A) = \sigma_{K-s-1}(A) = \ldots = \sigma_1(A) = 0$$

olduğu gösterilebilir.

Şimdi sıfır singüler değerine karşılık gelen sağ ve sol singüler vektörlerin nasıl hesaplanacağını gösterelim. Sıfıra karşılık gelen H nin öz değerlerinin hesaplanması esnasında biz vektörlerin üç kümesi ile bunlara karşılık gelen 2p, t ve r elemanlarını bulabiliriz ve bunları düzgün olarak

$$\begin{pmatrix} v_{s+1} \\ g_{s+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{s+1} \\ -g_{s+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{s+3} \\ g_{s+3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{s+3} \\ -g_{s+3} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} v_{s+2p-1} \\ g_{s+2p-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{s+2p-1} \\ -g_{s+2p-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} v_{s+2p+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{s+2p+2} \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} v_{s+2p+t} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ g_{s+2p+t+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ g_{s+2p+t+r} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ g_{s+2p+t+r} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Sıfıra karşılık gelen H nin öz vektörleri ortonormal sistemin seçilmiş vektörleridir. Yukarıdaki ortogonal vektörlerden dolayı

$$h_j(H) = \begin{pmatrix} v_j \\ g_j \end{pmatrix},\ h_{M+N-j+1}(H) = \begin{pmatrix} v_j \\ -g_j \end{pmatrix},\ j = 1, 2, ..., s,$$

vektörleri de ortogonaldir. Esas amacımız

$$u_j = \frac{1}{\|v_j\|} v_j,\ q_j = \frac{1}{\|g_j\|} g_j,\ j = 1, 2, ..., s$$

formülü ile sırasıyla $v_{s+1}, v_{s+3}, v_{s+2p-1}, v_{s+2p+1}, ..., v_N$ ve $g_{s+1}, g_{s+3}, g_{s+2p-1}, g_{s+2p+t+1}, ..., g_M$ ortogonal vektörlerini ortonormal vektörlere dönüştürmektir. Yani

$$N = s + p + t$$
$$M = s + p + r$$

olduğunu ispatlamaktır. v_j ve g_i vektörleri sırasıyla N ve M-boyutlu vektörler olduklarından

$$s + p + t \leq N$$
$$s + p + r \leq M$$

ise

$$2s + 2p + t + r = N + M$$

yazılabilir. $N = s + p + t$ nin böyle olmadığını kabul edelim, yani $N > s + p + t$ olsun. Bu kabulden hareketle

$$2s + 2p + t + r = N + M$$

ve buradan da

$$s + p + r > N + M - N = M$$

olduğu yazılabilir. $s + p + r \leq M$ düşüncesinden $M > M$ sonucu çıkar, fakat bu imkansızdır. Böylece $N = s + p + t$ olduğunu ispatladık. Benzer şekilde $M = s + p + r$ olduğu ispatlabilir.

Sonuç olarak, vektörlerimizi aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz;

$$u_j = \frac{1}{\|v_j\|} v_j,\ q_j = \frac{1}{\|g_j\|} g_j,\ j = s + 1, s + 3, ..., s + 2p - 1;$$

$$u_i = v_i,\ i = s + 2p + 1, s + 2p + 2, ..., N;$$

$$g_i = g_i,\ i = s + 2p + t + 1, s + 2p + t + 2, ..., M.$$

$u_1, u_2, ..., u_N$ ve $q_1, q_2, ..., q_M$ olarak seçilen tabanlarla teoremin şartlarının sağlandığı kolayca kontrol edilebilir. Bundan başka,

$$(\lambda_{N+M}(H), u_1, q_1),\ (\lambda_{N+M-1}(H), u_2, q_2),\ \ldots,\ (\lambda_{N+M+1-s}(H), u_s, q_s),$$
$$(0, u_{s+1}, q_{s+1}),\ (0, u_{s+2}, q_{s+2}),\ ...,\ (0, u_K, q_K)$$

üçlüleri A nın singüler üçlüleridir.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

3.2.1.Uyarılar

Kare matrislerin singüler ayrışımından aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

1) $\| A \| = \sigma_N(A)$.

2) Eğer A, $A = Q^*\Sigma U^*$, singüler değer ayrışımına sahip ise, bu durumda A^{-1} vardır ve $A^{-1} = U\Sigma^{-1}Q$ ile tanımlanır. Burada U, Q ortogonal matrislerdir. Σ, A nın singüler değerine sahip diyagonal bir matristir ve $\sigma_1(A) \neq 0$ dır.

3) Eğer $\sigma_1(A) \neq 0$ ise o zaman $\| A^{-1} \| = 1/\sigma_1(A)$ doğrudur. Burada A nın en büyük singüler değeri $\sigma_N(A)$ ve en küçük singüler değeri $\sigma_1(A)$ dır.

3.3. Karesel Matrislerin Singüler Değerlerinin Özellikleri

A karesel N-boyutlu bir reel matris ve $\sigma_1(A) \leq \sigma_2(A) \leq \ldots \leq \sigma_N(A)$ onun sıralanmış singüler değerleri olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1. $\sigma_1(A) = \sigma_1(A^*) \leq \sigma_2(A) = \sigma_2(A^*) \leq \ldots \leq \sigma_N(A) = \sigma_N(A^*)$

2.Eğer $\sigma_1(A) > 0$ ise o zaman A ve A^{-1} in singüler değerleri

$$\sigma_1(A^{-1}) = 1/\sigma_N(A) \leq \sigma_2(A^{-1}) = 1/\sigma_{N-1}(A) \leq \ldots \leq \sigma_N(A^{-1}) = 1/\sigma_1(A)$$

eşitliğiyle birbirlerine bağlıdırlar.

3. Eğer

$$\lambda_1(AA^*) \leq \lambda_2(AA^*) \leq \ldots \leq \lambda_N(AA^*)$$

ve

$$\lambda_1(A^*A) \leq \lambda_2(A^*A) \leq \ldots \leq \lambda_N(A^*A)$$

belirtilen sıraya göre AA* ve A*A matrislerinin sıralanmış öz değerleri ise, bu durumda A nın sıralanmış singüler değerleri

$$\sigma_1(A) = \sqrt{\lambda_1(AA^*)} = \sqrt{\lambda_1(A^*A)} \leq \sigma_2(A) = \sqrt{\lambda_2(AA^*)} = \sqrt{\lambda_2(A^*A)} \leq \ldots$$

$$\leq \sigma_N(A) = \sqrt{\lambda_N(AA^*)} = \sqrt{\lambda_N(A^*A)}$$

şeklinde yazılır.

4. $H = \begin{pmatrix} O & A^* \\ A & O \end{pmatrix}$

2N-boyutlu bir simetrik matris ve onun $\lambda_1(H) \leq \lambda_2(H) \leq \ldots \leq \lambda_{2N}(H)$ şeklinde sıralı öz değerlerini alalım. Bu durumda A nın sıralanmış singüler değerlerini H nın öz değerlerine bağlı olarak

$$\sigma_1(A) = \lambda_{N+1}(H) \leq \sigma_2(A) = \lambda_{N+2}(H) \leq \ldots \leq \sigma_N(A) = \lambda_{2N}(H)$$

yazabiliriz.

5. A diyagonal bir matris ve a_{ii} (i = 1, 2, ..., N) de onun diyagonal elemanları olsun. Eğer $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_N$, $|a_{ii}|$ (i = 1, 2, ..., N) nin sıralanmış kümesi ise;

$$\sigma_1(A) = b_1 \leq \sigma_2(A) = b_2 \leq \ldots \leq \sigma_N(A) = b_N$$

sıralaması yapılabilir.

6. $\lambda_j(A)$, j = 1, 2, ..., N verilen A matrisinin sıralanmış

$$|\lambda_1(A)| \leq |\lambda_2(A)| \leq \ldots \leq |\lambda_N(A)|$$

öz değerleri ise bu taktirde literatürde Weyl eşitsizlikleri olarak bilinen

$$|\lambda_N(A)| \leq \sigma_N(A),$$

$$|\lambda_N(A)|\,|\lambda_{N-1}(A)| \leq \sigma_N(A)\,\sigma_{N-1}(A),$$

$$|\lambda_N(A)|\,|\lambda_{N-1}(A)|\,|\lambda_{N-2}(A)| \leq \sigma_N(A)\,\sigma_{N-1}(A)\,\sigma_{N-2}(A)\,,$$

$$|\lambda_N(A)|\,|\lambda_{N-1}(A)|\,|\lambda_{N-2}(A)| \ldots |\lambda_2(A)| \leq \sigma_N(A)\,\sigma_{N-1}(A)\,\sigma_{N-2}(A) \ldots \sigma_2(A)\,,$$

$$|\lambda_N(A)|\,|\lambda_{N-1}(A)| \ldots |\lambda_2(A)|\,|\lambda_1(A)| = \sigma_N(A)\sigma_{N-1}(A) \ldots \sigma_2(A)\sigma_1(A)$$

eşitsizlikleri doğrudur.

7. A singüler olmayan bir matris ise, bu taktirde $\lambda_j(A)$, $j = 1, 2, \ldots, N$ onun öz değerleridir ve $\sigma_1(A) \leq \ldots \leq \sigma_N(A)$ onun singüler değerleri ise literatürde Weyl eşitsizlikleri olarak bilinen

$$1/\sigma_1(A) \leq |\lambda_j(A)| \leq \sigma_N(A),\ j = 1, 2, \ldots, N$$

eşitsizlikleri doğrudur.

4. AX = F LİNEER CEBİRSEL DENKLEM SİSTEMLERİ

4.1. Bazı Tanımlar

N bilinmeyenli M tane lineer homojen cebirsel denklem sistemini

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \dots + a_{1N}\, x_N = 0,$$

$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \dots + a_{2N}\, x_N = 0,$$

....

$$a_{M1}\, x_1 + a_{M2}\, x_2 + \dots + a_{MN}\, x_N = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklem sistemini

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix} ; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

a_{ij} (i , j = 1, 2, ..., N) reel sayılar, x_j (j = 1, 2, ..., N) reel sayılar alarak kısaca Ax = 0 şeklinde yazabiliriz. N tane bilinmeyenli M tane denklemden oluşan lineer homojen olmayan cebirsel denklem sistemini

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \dots + a_{1N}\, x_N = f_1,$$

$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \dots + a_{2N}\, x_N = f_2,$$

....

$$a_{M1}\, x_1 + a_{M2}\, x_2 + \dots + a_{MN}\, x_N = f_M$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklem sistemini

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix}$$

f_i, x_j, a_{ij} (i = 1, 2, ..., M; j = 1, 2, ..., N) reel sayılar alarak kısaca Ax = f şeklinde yazabiliriz.

K tane aynı A sabit katsayı matrisine sahip lineer denklem sistemlerinden oluşan sistemi de (diğer ifadeyle sistemler sistemi)

$$X_j = \begin{pmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \\ \vdots \\ X_{Nj} \end{pmatrix}, F_j = \begin{pmatrix} F_{1j} \\ F_{2j} \\ \vdots \\ F_{Mj} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \ldots, K$$

bu denklem sistemlerine ait olan bilinmeyen vektör dizileri olmak üzere

$$X = [\, X_1, X_2, \ldots, X_K \,]$$

veya daha açık olarak

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1K} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2K} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_{N1} & X_{N2} & \cdots & X_{NK} \end{pmatrix}$$

dersek AX = F şeklinde yazabiliriz. Bu sistem aynı A katsayı matrisine sahip olan K tane matris vektör sistemi olarak

$$A\, X_j(n) = F_j,\; j = 1, 2, \ldots, K$$

şekilde yeniden yazılabilir.

4.2. Lineer Cebirsel Homojen Denklem Sistemlerinin Çözüm Kümesi Bir Alt Vektör Uzaydır, Fundamental Matris

Reel elemanlı M×N tipindeki A matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix}.$$

olsun. Eğer

$$Ax = 0$$

verilen bir lineer cebirsel homojen denklem sistemi ise, bu taktirde

$$\Im(A) = \{x;\ Ax = 0\ \}$$

vektör kümesi alışılmış toplama ve reel sayılarda çarpma işlemine göre bir alt vektör uzayıdır. Bu alt vektör uzayına nullity alt uzayı denir. Tanımdan açıktır ki A bir karesel matris ve $\Im(A)=\{0\}$ ise, yani homojen denkleminin çözümü tek sıfır vektör ise bu taktirde A singüler olmayan bir matris ve nullity alt uzayının boyutu 0 dır. Genel durumda nullity alt uzayını incelemek için bölüm 3 te ispatlanan SVD teoremini hatırlatalım.

Teorem 3.2.1. Herhangi bir M×N tipindeki A matrisi için $\{u_1, u_2, ..., u_K\}$ bir sol ortonormal singüler vektör kümesi ve $\{q_1, q_2, ..., q_K\}$ da bir sağ ortonormal singüler vektör kümesi olmak üzere $0 \le \sigma_1(A) \le \sigma_2(A) \le ... \le \sigma_K(A)$ olacak şekilde $(\sigma_{K-j+1}, u_j, q_j)$ üçlüleri vardır. Burada $j = 1,2, ..., K = \min(N, M)$ dir.

Eğer $K < N$ ise o zaman $u_{K+1}, u_{K+2}, \dots, u_N$ vektörleri ile tabana tamamlanan sol singüler vektörler, $\mathbf{R}^N$ uzayının ortonormal bir tabanını verir ve bu vektörler $Au_j = 0$, $j = K+1, K+2, \dots, N$ denklemini sağlar.

Eğer $K < M$ ise o zaman $q_{K+1}, q_{K+2}, \dots, q_M$ vektörleri ile tabana tamamlanan sağ singüler vektörler, R^M uzayının ortonormal bir tabanını verir ve bu vektörler $A^*q_j = 0$, $j = K+1, K+2, \dots, M$ denklemini sağlar.

Bundan dolayı

$$Q = [q_1, q_2, \dots, q_M] \; ; \; U = [u_1, u_2, \dots, u_N]$$

vektörlerin oluşturduğu matrisler yardımıyla

$$QAU = \Sigma$$

matrisini kuralım. Bu şekildeki gösterime A nın singüler ayrışımı denir. Burada, eğer

$K < N$ ise

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_K(A) & 0 & \cdots & 0 & \\ & \sigma_{K-1}(A) & O & 0 & O \\ & & \ddots & \vdots & \\ O & & & \sigma_1(A) & \end{pmatrix}$$

$K \times N$ boyutlu matris, $K < M$ ise

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_K(A) & & & O \\ 0 & \sigma_{K-1}(A) & & \\ \vdots & O & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_1(A) \\ & O & & \end{pmatrix}.$$

M×K boyutlu matristir. Burada Σ eş-diyagonal matris olarak adlandırılır.

Verilen teoremin şartları altında farz edelim ki A matrisinin sıfırdan farklı J singüler değerleri var ise bu taktirde

$$QAU = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak yazabiliriz. Burada B karesel J-boyutlu köşegen bir matristir,

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_K & & & \\ & \sigma_{K-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{K-J+1} \end{pmatrix}.$$

yeni bilinmeyen vektörü seçelim; y=U*x olsun. Bu taktirde denklemi

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y = 0$$

veya daha açık

$\sigma_K(A)\, y_1 = 0;$

$\sigma_{K-1}(A)\, y_2 = 0;$

....

$\sigma_{K-J+1}(A)\, y_J = 0$

şeklinde yazabiliriz. Açıktır ki $\sigma_j(A) \neq 0$, $j = K, K-1, ..., K-J+1$ olduğundan

$$y_1 = 0;\ y_2 = 0;\ y_J = 0$$

elde edilir. Böylece keyfi seçilen $y_{J+1}, y_{J+2}, ..., y_N$

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_{J+1} \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

verilen homojen sistemin çözümü olur. Açıktır ki bu küme $\mathbf{R}^N$ uzayının bir alt vektör uzayıdır ve onun boyutu N - J dir. Böylece U ortogonal ve $x = Uy$ olduğundan $\Im(A)$ nın boyutu da N - J dir. Yani kısaca $\dim\Im(A) = N - J$ dir. Eğer $\Im(A)$ uzayının $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{N-J}$ gibi bir tabanı varsa

$$\Psi = [\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{N-J}]$$

matrisine $Ax = 0$ sisteminin Fundamental matrisi denir.

Açıktır ki eğer P karesel N-J boyutlu singüler olmayan bir matris olmak üzere Ψ verilen $Ax = 0$ sisteminin fundamental matrisi ise ΨP de bu sisteminin fundamental matrisi olur.

4.3. Genel Çözüm

Açık olarak her hangi bir Ax = 0 sisteminin çözümü

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{N-J} \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$x = C_1\,\psi_1 + C_2\,\psi_2 + \dots + C_{N-J}\psi_{N-J} = \Psi\, C$$

şeklinde yazılabilir ve buna Ax = 0 sisteminin genel çözümü denir.

4.4. Lineer Homojen Olmayan Cebirsel Denklem Sistemlerinin Çözümü

4.4.1. Kısmi çözüm (Özel çözüm)

A, M×N tipinde bir matris ve f reel bir vektör olmak üzere

$$Ax = f$$

lineer homojen olmayan cebirsel denklem sistemini alalım. Bu denklem sisteminin çözümünün varlığını inceleyelim. Bu bölümde önceden yapılan seçimlerimize göre

$$Q^{*}AU^{*} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \sigma_K & & & \\ & \sigma_{K-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{K-J+1} \end{pmatrix}$$

eşitliğini sağlayan bir B karesel J-boyutlu köşegen matris, Q, U ortogonal matrisleri vardır. Dolayısıyla, $y = U^*x$ ve $g = Qf$ olarak alınırsa $Ax = f$ sistemini

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y = g$$

şeklinde yazabiliriz. Veya

$\sigma_K(A)\, y_1 = g_1;$

$\sigma_{K-1}(A)\, y_2 = g_2;$

....

$\sigma_{K-J+1}(A)\, y_J = g_J;$

$0\, y_{J+1} = g_{J+1};$

$0\, y_{J+2} = g_{J+2};$

....

$0\, y_N = g_N;$

olur. Açıktır ki eğer $[g_{J+1}]^2 + [g_{J+2}]^2 + \ldots + [g_N]^2 = 0$ ise bu taktirde verilen problemin çözümü var, aksi halde çözümü yoktur.

Eğer çözüm varsa ve $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{y} = g$ ise bu taktirde $\hat{x} = U\hat{y}$ alarak $A\hat{x} = f$ olduğunu görebiliriz. $\hat{x}$ verilen denkleminin bir çözümüdür. Bu tür çözümlere kısmi çözüm (özel çözüm) denir.

4.4.2. Genel çözüm

Verilen $Ax = f$ sistemi için f çözümünün var olduğuna imkan tanınırsa bu taktirde sisteminin her bir çözümünün

$$x = z + \hat{x}$$

şeklinde yazılabildiğini görürüz. Burada $Az = 0$ ve $\hat{x}$ verilen $Ax = f$ sisteminin bir kısmi çözümüdür. Dolayısıyla, eğer $\Psi = [q_1, q_2, ..., q_{N-J}]$, $Az = 0$ homojen sisteminin fundamental matrisi ise o zaman $Ax = f$ sisteminin her bir çözümü

$$x = \hat{x} + C_1 q_1(n) + C_2 q_2(n) + ... + C_{N-J} q_{N-J}(n)$$

şeklinde yazılabilir. Burada C_1, C_2, ... , C_{N-J} reel katsayılardır. Bu ifadeye $Ax = f$ sisteminin genel çözümü denir.

4.4.3. Genelleştirilmiş normal çözüm

Verilen $Ax = f$ sistemi için, f çözümün var olmasına imkan vermiyorsa, bu taktirde bazen sistemin klasik çözümü yerine değişik bir çözüm söz konusu olabilir. Eğer

$$X(A,f) = \{x, ||Ax-f|| = \min_x ||Ax - f||\},$$

$$\bar{x} \in X(A,f) \text{ ve } ||\bar{x}|| = \min_{x \in X(A,f)} ||x||$$

bu taktirde $\bar{x}$ vektörüne verilen $Ax = f$ probleminin genelleştirilmiş normal çözümü denir.

5. FORMAT

Q Rasyonel sayılar kümesinin bir alt kümesi olan γ, P_+, k doğal sayılar, P_- negatif tamsayı olmak üzere

$$F = F(\gamma, P_-, P_+, k) = \{0\} \cup \{z, z = \pm\gamma^p(m_1\gamma^{-1}+m_2\gamma^{-2}+\ldots+m_k\gamma^{-k}),$$

$$p \text{ tamsayı}, P_- \le p \le P_+,$$

$$m_1, m_2, \ldots, m_k \text{ tam sayılar } 0 \text{ ve } \gamma-1 \text{ arasında}, m_1 \ne 0\}$$

şeklinde tanımlı olan $F = F(\gamma, P_-, P_+, k)$ kümesine format denir.

1)Herbir formatın ε_∞ en büyük ve $\varepsilon_{-\infty}$ en küçük elemanı vardır. Bu elemanlar γ, P_-, P_+ve k parametrelerine bağlıdır.

Gerçekten $z = \pm mx\gamma^p$ formülünden F sayılarının maksimumu :

$$Z_{max} = \varepsilon_\infty = \gamma^{P_+}\, m_{max} = \gamma^p\left[\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma^2} + \ldots + \frac{\gamma-1}{\gamma^k}\right] = \gamma^{P_+}\,(1-\gamma^{-k})$$

ve minimumu

$$Z_{min} = \varepsilon_{-\infty} = -\gamma^{P_+}\,(1-\gamma^{-k})$$

şeklinde tanımlanır.

2)ε_0 sayısına F kümesinin en küçük pozitif elemanı denir. Açıktır ki;

$\varepsilon_0 = (\pm mx\gamma^p)_{min} = (\gamma^p)_{min} m_{min}$;

$$(\gamma^p)_{min} = \gamma^{P_-}\ ;\ m_{min} = (m_1\gamma^{-1}+m_2\gamma^{-2}+...+m_k\gamma^{-k})_{min} = \gamma^{-1};\ m_1=1;\ m_2,...,m_k=0$$

ve genel olarak

$$\varepsilon_0 = \gamma^{P_-} x(1x\gamma^{-1}+0x\gamma^{-2}+...+0x\gamma^{-k})_{min} = \gamma^{P_- -1}$$

dir. F kümesinde 0 ile ε_0 arasında F nin başka bir elemanı yoktur. Diğer bir ifadeyle $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ aralığında F nin elemanı olarak yalnızca 0 bulunur.

3)$\varepsilon_1 = \gamma^{1-k}$ verilen F kümesinin önemli bir karekteristiğidir. $(1,1+\varepsilon_1]$ aralığında F kümesinin tek bir elemanı vardır ve buda $(1+\varepsilon_1)$ dir. Gerçekten

$$\varepsilon_1 = \gamma^{1-k},\ p = 1,\ z = \gamma x\gamma^{-1} = 1;$$

z = 1 sayısına en yakın sayı

$$\gamma(1x\gamma^{-1}+1x\gamma^{-k}) = 1+\gamma^{1-k} = 1+\varepsilon_1$$

dir. Demek oluyor ki;

$\varepsilon_\infty = \gamma^{P_+}(1-\gamma^{-k})$-F nin en büyük elemanı;

$\varepsilon_{-\infty} = -\varepsilon_\infty = -\gamma^{P_+}(1-\gamma^{-k})$-F nin en küçük elemanı ;

$\varepsilon_0 = \gamma^{P_- -1}$ -F kümesindeki en küçük pozitif sayı;

$1+\varepsilon_1 = 1+\gamma^{1-k}$-F nin 1 den sonraki ilk elemanıdır.

γ, ε_∞, ε_0, ε_1 sayılarına F kümesinin karekteristikleri denir. Böylece bir Format γ, P_-, P_+ve k sayıları yerine γ, ε_∞, ε_0, ε_1 ile de yazılabilir. Açıktır ki

$$\varepsilon_\infty = \varepsilon_\infty(P_-, P_+, k, \gamma);\ \varepsilon_0 = \varepsilon_0(P_-, P_+, k, \gamma);\ \varepsilon_1 = \varepsilon_1(P_-, P_+, k, \gamma)$$

olur.

Şimdi Format sayılarının kaba veya inceliğinden bahsedelim. Eğer elimizde $F(\gamma, P, P_+, k)$ şeklinde bir format ile $F(\gamma, 2P_-, 2P_+, 2k)$ şeklinde başka bir formatımız var ise bu formatları karşılaştıralım.

Burada $F(\gamma, P_-, P_+, k)$ formatının $F(\gamma, 2P_-, 2P_+, 2k)$ formatına göre daha kaba olduğunu söyleyebiliriz. Yani $F(\gamma, P_-, P_+, k)$ formatında yapılacak işlemler $F(\gamma, 2P_-, 2P_+, 2k)$ formatında yapılacak işlemlere göre daha zor olacaktır. Bunu aşağıdaki gibi bir örnekle gösterelim.

Örnek: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ matrisinin Singüler Değerlerinin Ayrışımını F(2, -3, 3, 4) ile F(2, -3, 3, 6) formatlarına göre hesap ederek aradaki farkı gösterelim.

İlk önce F(2, -3, 3, 4) ile F(2, -3, 3, 6) formatlarını hesap edelim.

$$F(2, -3, 3, 4) = 0 \cup \pm\{ \frac{1}{128}(15,14,13,12,11,10,9,8), \frac{1}{64}(15,14,13,12,11,10,9,8),$$
$$\frac{1}{32}(15,14,13,12,11,10,9,8), \frac{1}{16}(15,14,13,12,11,10,9,8), \frac{1}{8}(15,14,13,12,11,10,9,8),$$
$$\frac{1}{4}(15,14,13,12,11,10,9,8), \frac{1}{2}(15,14,13,12,11,10,9,8) \}$$

$$F(2, -3, 3, 6) = 0 \cup \pm\{ \frac{1}{512}(63,62,61,...,34,33,32), \frac{1}{256}(63,62,61,...,34,33,32),$$
$$\frac{1}{128}(63,62,61,...,34,33,32), \frac{1}{64}(63,62,61,...,34,33,32), \frac{1}{32}(63,62,61,...,34,33,32),$$
$$\frac{1}{16}(63,62,61,...,34,33,32), \frac{1}{8}(63,62,61,...,34,33,32) \}$$

şeklinde hesap edilir.

Şimdi A matrisinin singüler değerlerinin ayrışımını F(2, -3, 3, 4) formatına göre hesap edelim.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix},\ A^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

şeklinde ise

$$A^*A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6 & -1\\ -1 & 6\end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I-A^*A)=0$$

$$\begin{vmatrix}\lambda-6 & 1\\ 1 & \lambda-6\end{vmatrix}=0$$

ise

$$\lambda^2-12\lambda+35=0$$

$$\lambda_1=5,\ \lambda_2=7$$

A^*A matrisinin öz değerleridir. Şimdi bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörleri bulalım.

$\lambda_1=5$ için $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$$-x+y=0$$

$$x-y=0$$

dan

$$x=y$$

ise

1.ci öz vektör $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

olur.

$\lambda_2 = 7$ için $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$x+y = 0$$
$$x+y = 0$$

ise

$$x = -y$$

den

2.ci öz vektör $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

olur. Buradan

$$T=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

öz vektörlerden oluşan matris bulunmuş olur. Bulunan bu öz vektörü ortogonalleştirirsek

$$V=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Bulunan bu ortogonal öz vektörleri formatta yazarsak

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=0.7071068$$

ise

$$V=\frac{11}{16}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

formatta ki öz vektörlerin matrisi olur.

Şimdi de AA* ı hesap edelim.

$$AA^* = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -3\\ 0 & -3 & 5\end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - AA^*) = \begin{pmatrix}\lambda-5 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 3\\ 0 & 3 & \lambda-5\end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 35\lambda = 0$$

$$\lambda_1=0,\ \lambda_2=5\ ,\ \lambda_3=7$$

AA* matrisinin öz değerleridir. Şimdi de bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörleri bulalım.

$$\lambda_1 = 0 \text{ için } \begin{pmatrix}-5 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 3\\ 0 & 3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$-5x-y = 0 \text{ ise } x = \frac{-y}{5}$$

$$3y-5z = 0 \text{ ise } z = \frac{3y}{5}$$

1.ci öz vektör $\begin{pmatrix} -1/5 \\ 1 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ formatta $\begin{pmatrix} -13/64 \\ 1 \\ 10/16 \end{pmatrix}$

olur.

$\lambda_2 = 5$ için $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = 3z$$

ise

2.ci öz vektör $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ise formatta $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

olarak bulunur.

$\lambda_3 = 7$ için $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{2}y$$

$$z = \frac{-3}{2}y$$

ise

$$3.\text{cü öz vektör} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ formatta } \begin{pmatrix} \frac{8}{16} \\ 1 \\ -\frac{12}{8} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} \\ \frac{-1}{\sqrt{35}} & \frac{5}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$$

Bulunan bu ortogonal öz vektörlerden oluşan matrisi formatta yazarsak

$$U = \begin{pmatrix} \frac{15}{16} & 0 & \frac{11}{32} \\ \frac{9}{32} & \frac{8}{16} & \frac{-13}{16} \\ \frac{-11}{64} & \frac{13}{16} & \frac{8}{16} \end{pmatrix}$$

olur.

$$UAV = \frac{1}{64}\frac{11}{16} \begin{pmatrix} 60 & 0 & 22 \\ 18 & 32 & -56 \\ -11 & 52 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{11}{1024} \begin{pmatrix} 104 & 98 \\ -126 & 124 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{11}{1024} \begin{pmatrix} 202 & -6 \\ -2 & 250 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2.1699 & -0.0644 \\ -0.0214 & 2.6855 \\ -0.0322 & -0.0107 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi A matrisinin singüler değerlerinin ayrışımını F(2, -3, 3, 6) formatına göre hesap edelim.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

şeklinde ise

$$A^*A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A^*A) = 0$$

ise

$$\begin{vmatrix} \lambda-6 & 1 \\ 1 & \lambda-6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 12\lambda + 35 = 0$$

$$\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 7$$

A*A matrisinin öz değerleridir. Şimdi bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörleri bulalım.

$\lambda_1 = 5$ için $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-x+y = 0$

$x-y = 0$

dan

$x = y$

ise

1.ci öz vektör $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

olur.

$\lambda_2 = 7$ için $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x+y = 0$

$x+y = 0$

ise

$x = -y$

den

2.ci öz vektör $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

bulunur. Buradan

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

öz vektörlerden oluşan matris bulunmuş olur. Bulunan bu öz vektörü ortogonalleştirirsek

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Bulunan bu ortogonal öz vektörleri formatta yazarsak

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=0.7071068$$

ise

$$V=\frac{45}{64}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

şeklinde olur.

Şimdi de AA* ı hesap edelim.

$$AA^*=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -3\\ 0 & -3 & 5\end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I-AA^*)=\begin{pmatrix}\lambda-5 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 3\\ 0 & 3 & \lambda-5\end{pmatrix}=0$$

$$\lambda^3-12\lambda^2+35\lambda=0$$

$$\lambda_1=0,\ \lambda_2=5\ ,\ \lambda_3=7$$

AA* matrisinin öz değerleridir. Şimdi de bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörleri bulalım.

$$\lambda_1=0 \text{ için } \begin{pmatrix}-5 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 3\\ 0 & 3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$-5x-y = 0 \text{ ise } x = \frac{-y}{5}$$

$$3y-5z = 0 \text{ ise } z = \frac{3y}{5}$$

1.ci öz vektör $\begin{pmatrix} -1/5 \\ 1 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ formatta $\begin{pmatrix} -52/512 \\ 1 \\ 39/64 \end{pmatrix}$

olarak bulunur.

$\lambda_2 = 5$ için $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = 3z$$

ise

2.ci öz vektör $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ formatta $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

olarak bulunur.

$\lambda_3 = 7$ için $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{2} y$$

$$z = \frac{-3}{2} y$$

ise

3.cü öz vektör $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}$ formatta $\begin{pmatrix} 32/64 \\ 1 \\ -48/32 \end{pmatrix}$

olarak bulunur.

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} \\ \frac{-1}{\sqrt{35}} & \frac{5}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$$

Bulunan bu ortogonal öz vektörlerden oluşan matrisi formatta yazarsak

$$U = \begin{pmatrix} \frac{61}{64} & 0 & \frac{20}{64} \\ \frac{17}{64} & \frac{34}{64} & \frac{-51}{64} \\ \frac{-43}{64} & \frac{54}{64} & \frac{32}{64} \end{pmatrix}$$

olur.

$$UAV = \frac{1}{64}\frac{45}{64} \begin{pmatrix} 61 & 0 & 20 \\ 11 & 34 & -51 \\ \frac{-43}{4} & 54 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{45}{4096}\begin{pmatrix} 101 & 102 \\ -119 & 119 \\ \frac{-3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{45}{4096}\begin{pmatrix} 203 & 1 \\ 0 & 238 \\ \frac{-1}{4} & \frac{-5}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.230224 & 0.01 \\ 0 & 2.614746 \\ -0.002 & -0.008 \end{pmatrix}$$

bu da

$$\mathrm{UAV} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{7} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğunu gösterir.

Bu örnekte iki tane formata göre işlemler yapılmıştır. F(2, -3, 3, 4) formatına göre yapılan işlemlerde sonuca tam gidilememiştir. Ama F(2, -3, 3, 6) formatına göre yapılan işlemlerde sonuca gidilmiştir. Bu örnekten de anlaşılıyor ki formatımız ne kadar ince ise işlemlerde sonuca gitme olayıda o kadar iyi olacaktır. Yani formatımız ne kadar ince ise problemde hata miktarı o kadar azalacaktır. Bu yüzden bilgisayarda ki format sayıları çok önemlidir.

6. ÖRNEKLER

1-) A=1 matrisinin singüler değerini bulalım.

$$\sigma_1(A) = 1$$

dir.

2-) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin singüler değerini bulalım.

$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ olsun.

$Au = \sigma v$ ise $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \sigma v$

$u_1 + 3u_2 = \sigma v$

$A^* v = \sigma u$ ise $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} v = \sigma \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$v = \sigma u_1$

$3v = \sigma u_2$ ise $u_1 = \dfrac{v}{\sigma}$, $u_2 = \dfrac{3v}{\sigma}$

bulduğumuz bu değerleri

$u_1 + 3u_2 = \sigma v$

denklemde yerine yazarsak

$$\frac{v}{\sigma} + 3\frac{3v}{\sigma} = \sigma v \text{ ise } 10v = \sigma^2 v \Rightarrow \sigma^2 = 10 \Rightarrow \sigma = \sqrt{10}$$

$$\sigma(A) = \sqrt{10}$$

A matrisinin singüler değeridir.

$v=1$ alırsak $u_1 = \dfrac{v}{\sigma}$, $u_2 = \dfrac{3v}{\sigma}$ den

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{10}} \;,\; u_2=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

A matrisinin singüler vektörleri bulunur.

3-) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ matrisinin singüler değerini ve SVD sini bulalım.

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda\text{-}1)(\lambda\text{-}4) - 4 = 0$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$

A matrisinin öz değerleridir. Buradan

$$\sigma_1\,(A) = 0, \sigma_2(A) = 5$$

A matrisinin singüler değerleridir. Şimdide öz değerlere karşılık gelen öz vektörleri bulalım.

$$\lambda_1 = 0 \text{ için } \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ise

$-x - 2y = 0$

$-2x - 4y = 0$ ise $x = -2y$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ise

$$t_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A matrisinin birinci öz vektörüdür.

$$\lambda_2 = 5 \text{ için } \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ise

$4x\text{-}2y = 0$

$-2x+y = 0$ ise $y = 2x$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix}$$

ise

$$t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A matrisinin ikinci öz vektörüdür.

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

bulunur. Şimdi t_1 ve t_2 yi ortogonal yapalım.

$$W_1 = \frac{t_1}{\|t_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$K = t_2 - < t_2, t_1 > t_1$$

$$= (1, 2) - < (1,2),(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) > \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= (1, 2) - 0$$

$$= (1, 2)$$

$$W_2 = \frac{K}{\|K\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, U^* = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{5}} & \frac{10}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

A matrisinin singüler ayrışımıdır.

4-) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ matrisinin singüler değerlerini ve SVD sini hesap edelim.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^*.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 28 & 56 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-14 & -28 \\ -28 & \lambda-56 \end{vmatrix} = 0 \text{ ise } \lambda^2\text{-}70\lambda\text{+}784\text{-}784 = 0$$

λ^2-$70\lambda = 0$

$\lambda_1 = 70,\ \lambda_2 = 0$

dir. Buradan A matrisinin singüler değerleri

$$\sigma_1(A) = \sqrt{70}\ ,\ \sigma_2(A) = 0$$

olur. Şimdide öz değerlere karşılık gelen öz vektörleri bulalım.

$$\lambda_1 = 70 \text{ için } \begin{pmatrix} 56 & -28 \\ -28 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ise

$56x\text{-}28y = 0$

$-28x\text{+}14y = 0$ ise $y = 2x$

buradan

1.ci öz vektör $t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

olur.

$$\lambda_2 = 0 \text{ için } \begin{pmatrix} -14 & -28 \\ -28 & -56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ise

$-14x\text{-}28y = 0$

$-28x\text{-}56y = 0$ ise $x = -2y$

buradan

2.ci öz vektör $t_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

olur.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

öz vektörlerden oluşan matristir. Şimdi bu öz vektörleri ortogonal hale getirelim.

$$W_1 = \frac{t_1}{\|t_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$W_2 = \frac{t_2}{\|t_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 10 & 20 & 30 \\ 15 & 30 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-5 & -10 & -15 \\ -10 & \lambda-20 & -30 \\ -15 & -30 & \lambda-45 \end{vmatrix} = 0$$

ise

$$\lambda^3 - 70\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda.\lambda.(\lambda - 70) = 0$$

$$\lambda_1 = 70, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$

öz değerlerdir. Bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörler

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, t_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{-5}{3} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 2 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

öz vektörlerden oluşan matris bulunur. Bulunan bu öz vektörleri ortogonalleştirirsek

$$W_1 = \frac{t_1}{\|t_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

$$W_2 = \frac{t_2}{\|t_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$W_3 = \frac{t_3}{\|t_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{-5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

olur. Bu durumda

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{-5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

elde edilir. O halde

$$UAV = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{-5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{14}{\sqrt{14}} & \frac{28}{\sqrt{14}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{70} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ifadesi A matrisinin singüler ayrışımıdır.

5-) $u + 2v = 1$

$2u + 4v = 2$

$3u + 6v = 3$

sisteminin SVD algoritması ile çözümünün olup olmadığını inceleyelim. Eğer çözüm varsa hesaplayalım. Ayrıca genelleştirilmiş normal çözümünü de hesap edelim.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

alarak verilen sistemi $Ax = f$ matris-vektör şeklinde yazalım.

Verilen A matrisinin SVD ayrışımı hesap edelim.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^*.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 28 & 56 \end{pmatrix}$$

dır. Dolayısıyla

$$\begin{vmatrix} \lambda - 14 & -28 \\ -28 & \lambda - 56 \end{vmatrix} = 0$$

ise

$$\lambda^2\text{-}70\lambda\text{+}784\text{-}784 = 0$$

$$\lambda^2\text{-}70\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 70,\ \lambda_2 = 0$$

dir. Buradan A matrisinin singüler değerleri

$$\sigma_1(A) = \sqrt{70}\ ,\ \sigma_2(A) = 0$$

olur. Şimdide öz değerlere karşılık gelen öz vektörleri bulalım.

$$\lambda_1 = 70 \text{ için } \begin{pmatrix} 56 & -28 \\ -28 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ise

$$56x\text{-}28y = 0$$

$$-28x+14y = 0 \text{ ise}$$
$$y = 2x$$

buradan

$$1.\text{ci öz vektör } t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

olur.

$$\lambda_2 = 0 \text{ için } \begin{pmatrix} -14 & -28 \\ -28 & -56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ise

$$-14x-28y = 0$$
$$-28x-56y = 0 \text{ ise}$$
$$x = -2y$$

buradan

$$2.\text{ci öz vektör } t_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olur.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

öz vektörlerden oluşan matristir. Şimdi bu öz vektörleri ortogonal hale getirelim.

$$W_1 = \frac{t_1}{\|t_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$W_2 = \frac{t_2}{\|t_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$V=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

öz vektörlerden oluşan matris ortogonal hale getirilmiş oldu.

Şimdide aynı işlemleri AA* için yapalım.

$$AA^*=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10 & 15\\ 10 & 20 & 30\\ 15 & 30 & 45\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}\lambda-5 & -10 & -15\\ -10 & \lambda-20 & -30\\ -15 & -30 & \lambda-45\end{vmatrix}=0$$

ise

$$\lambda^3-70\lambda^2=0\Rightarrow \lambda.\lambda.(\lambda-70)=0$$
$$\lambda_1=70,\lambda_2=0,\lambda_3=0$$

öz değerlerdir. Bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörler

$$t_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ t_2=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},\ t_3=\begin{pmatrix}1\\2\\\frac{-5}{3}\end{pmatrix}$$

$$T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 1 & 2 & -\frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

öz vektörlerden oluşan matris bulunur. Bulunan bu öz vektörleri ortogonalleştirirsek

$$W_1=\frac{t_1}{\|t_1\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$$

$$W_2=\frac{t_2}{\|t_2\|}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0\end{pmatrix}$$

$$W_3=\frac{t_3}{\|t_3\|}=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{-5}{\sqrt{70}}\end{pmatrix}$$

olur. Bu durumda

$$U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0\\ \frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{-5}{\sqrt{70}}\end{pmatrix}$$

elde edilir. O halde A matrisinin SVD ayrışımı

$$UAV = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{-5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{14}{\sqrt{14}} & \frac{28}{\sqrt{14}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{70} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Buna dayanarak

$$x = Vy,\ Uf = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{-5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{14} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = g$$

buradan yeni y ve g vektörlerini birbirine bağlayan $\Sigma y = g$ den

$$\begin{pmatrix} \sqrt{70} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} \sqrt{14} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dir. Böylece $\sqrt{70}y_1 = \sqrt{14}$ dir.

Açıktır ki, bu sistemin kısmi çözümü

$$y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

dir. Genel çözümde

$$y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olur. Aynı zamanda $y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$ verilen sistemin genelleştirilmiş normal çözümüdür.

Şimdi elde edilen sonuçları x için yazalım. Bu taktirde

$$x = Vy = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

verilen problemin bir kısmi ve aynı zamanda onun genelleştirilmiş normal çözümü olur.

$$V \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan genel çözümde

$$x = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olur.

Böylece u = 0.2, v = 0.4 verilen problemin bir kısmi ve aynı zamanda genelleştirilmiş normal çözümü, u = 0.2 +2C, v = 0.4 + C genel çözümü olur.

6-) $u + 2v = 1$

$2u + 4v = 2$

sisteminin SVD algoritması ile çözümünün olup olmadığını inceleyelim. Eğer çözüm varsa hesaplayalım. Ayrıca genelleştirilmiş normal çözümünü de hesap edelim.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

alarak verilen sistemi $Ax = f$ matris-vektör şeklinde yazalım.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-4) - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$$

A matrisinin öz değerleri bulunur. Buradan

$$\sigma_1 (A) = 0, \sigma_2(A) = 5$$

A matrisinin singüler değerleridir. Şimdide öz değerlere karşılık gelen öz vektörleri bulalım.

$$\lambda_1 = 0 \text{ için } \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ise

$$-x - 2y = 0$$

$$-2x - 4y = 0 \text{ ise } x = -2y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ise

$$t_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A matrisinin birinci öz vektörüdür.

$$\lambda_2 = 5 \text{ için } \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ise

$4x-2y = 0$

$-2x+y = 0$ ise $y = 2x$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ise

$$t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A matrisinin ikinci öz vektörüdür.

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A matrisinin öz vektörlerinden oluşan matristir. Şimdi t_1 ve t_2 yi ortogonal yapalım.

$$W_1 = \frac{t_1}{\|t_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$K = t_2 - < t_2, t_1 > t_1$$

$$= (1, 2) - < (1,2), (\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) > \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= (1, 2) - 0$$

$$= (1, 2)$$

$$W_2 = \frac{K}{\|K\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad U^* = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{5}} & \frac{10}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

A matrisinin singüler ayrışımı olarak bulunur. Buna dayanarak

$$x = U^*y \text{ ve } Uf = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = g$$

y ve g vektörlerini birbirlerine bağlayan $\Sigma y = g$ den

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$5y_2 = \sqrt{5} \text{ ise } y_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

buradan

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

bu sistemin bir kısmi çözümüdür.

Aynı zamanda bu sistemin genel çözümü de

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olur. Aynı zamanda

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

verilen sistemin genelleştirilmiş normal çözümüdür.

Şimdi elde edilen sonuçları x için yazalım. Bu taktirde

$$x = U^*y = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

verilen problemin bir kısmi ve aynı zamanda onun genelleştirilmiş normal çözümü olur.

$$U^*\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan genel çözümde

$$x = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olur.

$u = 0.2$, $v = 0.4$ verilen problemin bir kısmi ve aynı zamanda genelleştirilmiş normal çözümü, $u = 0.2 - 2C$, $v = 0.4 + C$ de genel çözümü olur.

7-) $u + 2v = 1$

$2u + 4v = 2$

sistemini F (2, -3, 3, 4) formatına göre hesap edelim. Meydana gelen hatayı değişik normlarda bulalım.

İlk önce F (2, -3, 3, 4) formatının değerlerini hesap edelim.

$$F(2, -3, 3, 4) = 0 \cup \pm\{ \frac{1}{128}(15,14,13,12,11,10,9,8), \frac{1}{64}(15,14,13,12,11,10,9,8),$$

$$\frac{1}{32}(15,14,13,12,11,10,9,8), \frac{1}{16}(15,14,13,12,11,10,9,8), \frac{1}{8}(15,14,13,12,11,10,9,8),$$

$$\frac{1}{4}(15,14,13,12,11,10,9,8), \frac{1}{2}(15,14,13,12,11,10,9,8) \}$$

olarak bulunur.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

alarak verilen sistemi $Ax = f$ matris-vektör şeklinde yazalım.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-4) - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$$

A matrisinin öz değerleridir. Buradan

$\sigma_1(A) = 0, \sigma_2(A) = 5$

A matrisinin singüler değerleridir. Şimdide öz değerlere karşılık gelen öz vektörleri bulalım.

$$\lambda_1 = 0 \text{ için } \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ise

$-x - 2y = 0$

$-2x - 4y = 0$ ise $x = -2y$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ise

$$t_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A matrisinin birinci öz vektörüdür.

$$\lambda_2 = 5 \text{ için } \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ise

$4x - 2y = 0$

$-2x + y = 0$

ise

$y = 2x$

den

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ise

$$t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A matrisinin ikinci öz vektörüdür.

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

bulunur. Şimdi t_1 ve t_2 yi ortogonal yapalım.

$$U = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \; U^* = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; U^* = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = 0.4472$$

Şimdi bu sayılara karşılık gelen formattaki sayıları yazalım.

$$U = \frac{7}{16}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; U^* = \frac{7}{16}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$U^*AU = \frac{7}{16}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\frac{7}{16}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{49}{256}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{49}{256}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4.7851 \end{pmatrix}$$

Formatta

$$U^*AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

olur.

$$x = U^*y,\ Uf = \frac{7}{16}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{7}{16}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.1875 \end{pmatrix} = g$$

ise formatta

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

olur. y ve g vektörlerini birbirlerine bağlayan $\Sigma y = g$ den

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

ise

$$5y_2 = \frac{9}{4} \text{ ise } y_2 = \frac{9}{20} = 0.45$$

ise formatta

$$y_2 = \frac{7}{16}$$

olur.

Buradan genel çözümde

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{16} \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olur.

$$x = U^{*}y = \frac{7}{16}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{16} \end{pmatrix} = \frac{7}{16}\begin{pmatrix} \frac{7}{16} \\ \frac{7}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{49}{256} \\ \frac{49}{128} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1914 \\ 0.3828 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

bu da formatta hesap edilen x değeridir. Bu hesap edilen değer verilen problemin bir kısmi ve aynı zamanda onun genelleştirilmiş normal çözümüdür.

$$U^{*}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{7}{16}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{7}{16}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan genel çözümde

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olur.

$$u = \frac{3}{16} = 0.1875, \; v = \frac{3}{8} = 0.3750$$

verilen problemin bir kısmi ve aynı zamanda onun genelleştirilmiş normal çözümü olur.

$$u = \frac{3}{16} - 2C = 0.1875 - 2C, \; v = \frac{3}{8} + C = 0.3750 + C$$

verilen problemin genel çözümü olur.

$$x = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} \text{ gerçek çözüm, } \; y = \begin{pmatrix} 0.1875 \\ 0.3750 \end{pmatrix} \text{ de yaklaşık çözümdür.}$$

Şimdi bu çözümlerin Frebinous ve Spectral normlarında hatalarını hesap edelim.

$$\text{Hata : } z = x - y = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.1875 \\ 0.3750 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0125 \\ 0.025 \end{pmatrix}$$

$$\|z\| = \sqrt{(0.0125)^2 + (0.025)^2}$$

$$= \sqrt{0.0007812}$$

$$= 0.0279499$$

$$\text{Relatif Hata : } \frac{\|z\|}{\|x\|} = \frac{0.0279499}{0.4472135} = 0.0624978$$

olarak bulunur.

Bu hatalar Frobenius normunda hesap edilmiştir.

$$z = \begin{pmatrix} 0.0125 \\ 0.025 \end{pmatrix}$$

$$z.z^* = \begin{pmatrix} 0.0125 \\ 0.025 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0125 & 0.025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0001562 & 0.0003125 \\ 0.0003125 & 0.000625 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 0.0001562 & -0.0003125 \\ -0.0003125 & \lambda - 0.000625 \end{vmatrix} = 0$$

ise

$$\lambda^2 - 0.0007812\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 0.0007812) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ ve } \lambda_2 = 0.0007812$$

bulunur.

$$\|z\| = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{0.0007812} = 0.0279499$$

olur.

$$x = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

$$x.x^* = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.08 \\ 0.08 & 0.16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 0.04 & -0.08 \\ -0.08 & \lambda - 0.16 \end{vmatrix} = 0$$

ise

$$\lambda^2 - 0.2\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \, , \, \lambda_2 = 0.2$$

$$\|x\| = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{0.2} = 0.4472135$$

$$\text{Relatif Hata : } \frac{\|z\|}{\|x\|} = \frac{0.0279499}{0.4472135} = 0.0624978$$

olarak bulunur.

Bu hatalar spectral normunda hesap edilmiştir.

Sonuç olarak diyebiliriz ki, bu örnekteki meydana gelen hatanın Frobenius normunda hesap edilen değeri ile Spectral normunda hesap edilen değerinin aynı olduğu görülmüştür.

7. KAYNAKLAR

[1] Akın Ö. Bulgak H.,1998. Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi, Uygulamalı Matematik Araştırma Merkezi Yayınları, Yayın no:2 , Selçuk Üniversitesi, Konya.

[2] Bulgakov A. Ya., 1989. Matrix Computation, Second edition, Johns Hopkins University Press, Baltimore.

[3] Bulgakov A. Ya., 1995, Matrix Computation with Guaranteed Accuracy in Stability Theory, Selçuk Universty, Research Center of Applied Mathematics, Konya.

[4] Françoise Chaitin-Chatelin, Valerie Fraysse, 1996. Lectures on Finite Precision Computations, Software-Enviroments-Tools, SIAM, Philadelphia.

[5] Gantmaher F. R., 1959. The Theory of Matrices, vols. 1-2, Chelsea, New-York.

[6] Godunov S. K., Antonov A. G., Kiriluk O. P., Kostin V. I., 1988. Guarenteed accuracy for the solving of linear systems in euclidean spaces, Novosibirsk, Nauka, -456 p.

[7] Golub G., Van Loan C.,1989. Matrix Computations, Second edition, Johns Hopkins University Press, Baltimore.

[8] Trefethen L. N., David Bau III, 1995. Numerical Linear Algebra, Cornell University.

[9] Wilkinson J.H., 1965. The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendom Press Oxford.

[10] Bulgak A., 1997. Singüler Değerler adlı seminer . Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

[11] Selçuk Üniversitesi Uygulamalı Matematik Araştırma Merkezi Notları, Konya.

ÖZGEÇMİŞ

Dağıstan ŞİMŞEK, 1970 yılında Konya ili Altınekin ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Büyük Sinan İlkokulu'nda, ortaokulu Karma Ortaokulu'nda, liseyi Konya Gazi Lisesi'nde tamamladı. Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 1994 yılında mezun oldu. 22. 08. 1995 tarihinden beri Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.