

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**PULS ALGILAMA MODEL
PROBLEMLERİ VE İLGİLİ
ALGORİTMALAR**

**Ercan YALDIZ
DOKTORA TEZİ
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜH. A.B.D.
Konya, 2002**

**İC. YÜKSEK ÖZGÜR FEN BİLİMLERİ
DOKÜMANLAMA MERKEZİ**

ÖZET

Doktora Tezi

PULS ALGILAMA MODEL PROBLEMLERİ VE İLGİLİ ALGORİTMALAR

Ercan YALDIZ

Selçuk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet BAYRAK

2002, 137 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Mirzahan HIZAL

Prof. Dr. Mehmet BAYRAK

Prof. Dr. Haydar BULGAK

Yrd.Doç.Dr. Abdullah ÜRKMEZ

Yrd.Doç.Dr. Ramazan AKKAYA

Bu çalışmada, sonlu farklar metodunun analiz bölgesi, tam yutucu sanal sınır koşullarından yararlanarak doğru olarak sınırlanması yapılmıştır. Bu yolla elde edilen sonuçlar, puls algılama model problemlerine uygulanmıştır.

Bilgisayarların artan işlem kapasiteleri ve hızlarına paralel olarak geliştirilen algoritmalar sayesinde, gerçek durumlardaki gibi cihaz veya ortama zarar verme endişesi ve tekrarlama sınırı olmadan çeşitli modellerin direkt ve ters problemlerinin çözümü amacıyla nümerik deneyler yapmak mümkündür. Elektromagnetik teoride dalgaların yayılması ve saçılmasının analizi gibi birçok direkt problemin çözümünde kullanılan en önemli nümerik metotlardan birisi, zaman domeninde sonlu farklar metodudur. Diferansiyel dalga denkleminin uzay ve zamanda sonlu farklarının kullanılmasıyla elde edilen bu metoda ait algoritmasının gerçekleştirilmesi oldukça basittir. Dolayısıyla, günümüzde özellikle de son yıllarda bu alandaki çalışmalar büyük çapta yoğunluk kazanmıştır. Sonlu farklar metodunun doğru çalışması için incelenen ortamın bir şekilde sınırlandırılması gerekir. Kaynak ve saçıcılardan gelen dalgaların açık ortamlarda olduğu gibi bölge dışına yansız yayılabilmelerinin sağlanabilmesi için, literatürde çok sayıda farklı sınır koşulları ileri sürülmüş, ancak soruna tam olarak çözüm getirilememiştir.

Elektromagnetik dalga saçılması problemlerinde periyodik ızgaralar yaygın olarak kullanılır. Literatürdeki birtakım matematiksel gösterim ve dönüşümlerden yararlanarak, ızgaralara ait analiz edilecek bölgeyi sınırlamak için, tam yutucu sınır koşullu sanal sınırlar ileri sürülmüştür. Söz konusu yaklaşımın etkinliğini kanıtlamak amacıyla, birtakım nümerik hesaplamalar yapılmış ve bu hesaplamalardan elde edilen sonuçlar klasik yutucu sınır koşulları kullanılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Ortamın katman özelliklerinin incelenmesi, ortam içinde gömülü cisimlerin (veya boşluğun) varlığının, derinliğinin ve profilinin belirlenmesi gibi pek çok alanda pulslu (darbeli) radarların kullanımı artmıştır. Bu cihazı iyileştirmek amacıyla, incelenecek ortama pulsun yönlendirilmesi ve yansıyan sinyalin tekrar algılanması için en uygun anten tipinin belirlenmesi gerekir. Ortamdan yansıyan alan verisine ortam parametrelerinin katkılarının ne düzeyde olacağını bilmesi ve yararlı bilginin veriden doğru olarak ayrıştırılması gerekir. Direkt puls algılama model problemlerinin çözümünde sonlu farklar metodunu doğru ve etkin bir şekilde kullanabilmek amacıyla, tam sınır koşulları öne sürülür. Söz konusu sınır koşulları, bu çalışmada gömülü cisimleri, homojen olmayan lokal cisimleri, düzlemsel katmanlı yapıları ve demet şekillendirici antenleri tanımlayan çeşitli model problemlere uygulanmıştır. Geliştirilen algoritmaları kullanarak, bu algoritmaların uygunluğunun testi için birtakım nümerik hesaplamalar yapılmıştır. Ayrıca, karteziyen koordinatlarını kullanmak suretiyle sonlu farklar metodunda karşılaşılan köşe noktası problemine çözüm getirilmeye çalışılmıştır. Yukarıda bahsedilen teorik çalışmalar, bu tez çalışmasında çeşitli deneysel araştırmalarla pekiştirilmeye çalışılmıştır. Elde edilen teorik ve deneysel sonuçlardan, her iki durumda da sonuçların tam uyum içinde olduğu gözlenmiştir. Ayrıca, elde edilen hem teorik hem deneysel sonuçlar; sonlu farklar metodunu kullanarak başlangıç sınır değer problemlerini çözmek için (problem koşullarına yansımatsız sanal sınırların da eklenmesiyle) simülasyonu yapılan fiziksel proseslerde bozulmanın olmadığını göstermiştir. Yansımatsız sanal sınırların eklenmesiyle ortaya çıkan bu yeni yaklaşımın uygulanması durumunda, klasik yutucu sınır koşulu yaklaşımlarında karşılaşılan hatalar giderilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yutucu sınır koşulları (ABC), model problem, başlangıç sınır değer problemleri, zaman domeninde sonlu farklar (FDTD) metodu, puls algılama, dalga saçılması, elektromagnetikte nümerik metotlar, dielektrik sabiti ölçümü.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

MODEL PROBLEMS OF PULSE SENSING AND RELATED ALGORITHMS

Ercan YALDIZ

Selcuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Electrical-Electronic Engineering

Supervisor: Prof.Dr. Mehmet BAYRAK

2002, 137 Pages

Jury:Prof. Dr. Mirzahan HIZAL

Prof. Dr. Mehmet BAYRAK

Prof. Dr. Haydar BULGAK

Assist.Prof.Dr. Abdullah ÜRKMEZ

Assist.Prof.Dr. Ramazan AKKAYA

In this study, the region to be analysed via finite differences method is correctly limited by introducing exact absorbing virtual boundary conditions. The results obtained in this way are applied to the pulse sensing model problems.

By means of the algorithms developed parallel to the increasing process capacity and speeds of computers, it is possible to make the numerical experiments for solution of direct and inverse problems on the different models without worry of taking a risk and limitation of repetition. Finite difference time domain method is one of the most important numerical methods used on many solutions of direct problems such as analyzing of propagating and scattering of waves in electromagnetic theory. The construction of algorithm for this method is quite simple using finite differences in time and space of the differential wave equations, hence, the recent studies in this field have been shown considerable accumulation in the literature. In order to run correctly, the region to be analysed must be truncated. Although a number of different boundary conditions were introduced in the literature

this problem have not yet been solved exactly in connection with the waves from the source and the scatterers propagating out of the region with no reflection (similar in the open space case).

Since the periodical gratings widely used in the solution of scattering problems of electromagnetic waves, the virtual boundaries with exact absorbing boundary conditions are introduced for analyzing the gratings by means of the mathematical representations and transformations reported in the literature. To show the effectiveness of this approach, several numerical computations have been undertaken and the results obtained were compared with those of the classical absorbing boundary conditions given in the literature.

The use of pulsed radars has been increased recently in many fields to investigate the properties of layers of medium; to understand if there is any object or cavity and to sense depth (or profile) of objects (or cavities) embedded into the medium under consideration. In order to improve this device, appropriate antenna must be obtained for directing the pulse into the medium to be investigated and for receiving it again. The effects of the parameters of medium (or objects) onto the data of scattered fields must be known so that the useful information would be separated correctly from it. To use finite differences method in the solution of direct model problems of pulse sensing effectively and correctly, the exact boundary conditions would be introduced. These boundary conditions in this work are applied onto the different model problems such as the embedded objects, local non-uniform objects, flat layered structures and beam former antennas. The numerical computations are undertaken to check the suitability of the algorithms. In addition, a solution into the problem of corner point occurs in finite difference method using the cartesian coordinates is introduced. In relation with the above mentioned theoretical study, various experimental investigations were also conducted in this thesis. The theoretical and the experimental results obtained promptly proved that both of the results were well in agreement.

Consequently, in order to solve the initial boundary value problems using finite differences method, the virtual boundaries without reflection were added into the problem conditions. The deformations in physical processes simulated have not been observed. The errors occurred by using the classical absorbing boundary conditions are exactly removed in this case.

Keywords: Absorbing boundary conditions (ABC), model problem, initial boundary value problems, finite differences time domain (FDTD) method, pulse sensing, wave scattering, numerical methods in electromagnetics, measurement of dielectric constant.

TEŞEKKÜR

Doktora tez çalıŐmalarım esnasında bana yardımlarını esirgemeyen, tez danışmanım ve Bölüm Başkanımız sayın Prof. Dr. Mehmet BAYRAK'a, ayrıca konuyla yakından ilgilenen Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü (GYTE) öğretim üyesi sayın Doç.Dr. Yuriy K. SIRENKO'ya, çalıŐmalarımda beni çok yönlü destekleyen GYTE Elektronik Müh. Bölüm Başkanı Dr. Ertuğrul KARAÇUHA'ya, S.Ü. Müh.-Mim. Fak. Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünün değerli tüm öğretim elemanlarına, son olarak bana çalıŐmalarım esnasında her türlü maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen ve daima beni teşvik eden eşim ve oğlumla birlikte ailemin bütün bireyelerine teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Teorinin Ana Denklemleri ve Temel Sonuçları.....	5
1.2. Uzay-Frekans Gösterimleri ve Laplace İntegral Dönüşüm Metodu	19
1.3. Zaman Domeninde Sonlu Farklar Metodu (FDTD).....	28
1.3.1. FDTD-metodu hesaplama uzayının sınırlanması için yutucu koşullar.....	33
1.4. Sonuçlar.....	36
2. SONLU FARKLAR METODUNUN HESAPLAMA UZAYININ SINIRLANMASI İÇİN TAM YUTUCU KOŞULLAR.....	37
2.1. Giriş.....	37
2.2. Durağan Olmayan Dalgaların Alanındaki Izgara.....	39
2.3. Tam Yutucu Sınır Koşullarının Nümerik Testi.....	47
2.4. Sonuçlar.....	55
3. PULS ALGILAMA MODEL PROBLEMLERİNDE SANAL SINIRLARDA TAM YUTUCU KOŞULLU SONLU FARKLAR METODU.....	57
3.1. Giriş.....	57
3.2. Puls Algılama Model Problemlerinde Sanal Sınırlarda Tam Yutucu Koşullar.....	58
3.2.1. Yer altı puls algılama model problemi.....	58

3.2.2. Homojen olmayan lokal kompakt cisim.....	63
3.2.3. Düzlemsel katmanlı dielektrik yapı.....	67
3.2.4. Demet şekillendirici yapı.....	70
3.3. Model Problemlerin Algoritmasının Gerçeklenmesi ve Nümerik Deneylerin Sonuçları	72
3.4. Sonuçlar.....	82
4. AÇIK YAPILARDAKİ GEÇİŞLERİN MODELLENMESİNDE TAM YUTUCU KOŞULLAR.....	83
4.1. Giriş.....	83
4.2. Problemin Formülasyonu ve Tam Yutucu Koşulların Oluşturulması.....	85
4.3. Köşe Probleminin Çözümü.....	88
4.4. Bazı Nümerik Sonuçlar.....	91
5. PULS GECİKMESİYLE TOPRAĞIN DİELEKTRİK SABİTİNİN BELİRLENMESİ VE FDTD METODU İLE TEST EDİLMESİ	96
5.1. Giriş.....	96
5.2. Dielektrik Malzemelerin Özellikleri.....	97
5.3. Problemlerle Ölçüm Tekniği.....	99
5.3.1. Deney düzeneği ve ölçümlerin yapılması.....	101
5.3.2. Ölçüm sonuçları.....	103
5.4. Prob Kullanarak Elde Edilen Puls Gecikmesi Sonuçlarının FDTD Simülasyonları ile Test Edilmesi.....	111
5.5. Ölçüm Sonuçları ile FDTD Simülasyon Sonuçlarının Kıyaslanması.....	117
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	118
6.1. Sonuçlar.....	118
6.1. Öz-sonuçlar.....	121
6.2. Öneriler.....	122
7. KAYNAKLAR.....	124
8. EKLER.....	129

SİMGELER VE KISALTMALAR

\mathbb{R}^n	n boyutlu Euclid uzayı
\mathbb{C}	w veya s kompleks değişkenli düzlem
$C^n(Q)$	n inci dereceye kadar tüm türevleri olan Q üzerinde sürekli fonksiyonlar sınıfı
$L_n(Q)$	Q üzerinde integre edilebilen $ f(g) ^n$ için $f(g)$, $g \in Q$ uzayı
g ve p	\mathbb{R}^n uzayının noktaları
x, y, z	Karteziyen koordinatları
ρ, ϕ, z	Silindirik koordinatlar
t	Zaman değişkeni
τ	Zaman sabiti
$(0, T)$, $T < \infty$	Zaman aralığı
Q	Başlangıç sınır değer ve sınır değer problemlerinde sonsuz analiz bölgesi; $Q^T = Q \times (Q, T)$
$R = \{g \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2\pi\}$	Floquet kanalı
Q_a	Q bölgesinin sonlu alt bölgesi
${}_a Q = Q \setminus \bar{Q}_a$	Q da \bar{Q}_a nın farkı
$D(Q)$	Q da belirsiz türevlenen sonlu fonksiyonlar kümesi
$\tilde{D}(Q)$	$D(Q)$ temel fonksiyonlar uzayında genelleştirilmiş fonksiyonlar uzayı (lineer sürekli fonksiyoneller)
(f, γ)	$\gamma \in D(Q)$ temel fonksiyonu üzerindeki fonksiyonelin (genelleştirilmiş f fonksiyonu) değeri
$\tilde{D}_r(Q)$	Regüler genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfı
$W_m^l(Q)$	$L_m(Q)$ dan l dereceye kadar genelleştirilmiş türevlere sahip tüm $f(g)$ elemanları kümesi
$L_{2,1}(Q^T)$	Son normu $\ f\ = \int_0^T \left(\int_Q f ^2 dg \right)^{1/2} dt$ olan tüm $f(g, t) \in L_1(Q^T)$ elemanlarından oluşan uzay
$W_{2,0}^1(Q^T)$	Yoğun kümesi $S^T = S \times (0, T)$ de sıfıra eşit düzgün fonksiyonlar olan, $W_2^1(Q^T)$ uzayının alt uzayı

$\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$	$D(Q)$ yoğun kümesi olan $W_2^1(Q)$ uzayının alt uzayı
\emptyset	Boş küme
$S(g, a)$	R^n de g noktasında merkezli ve a yarıçaplı açık daire
S	İdeal-iletken ortam sınırı
S_1	Dielektrik saçıcı ortam sınırı
$\overline{\text{int}S}$	İdeal iletken saçıcı bulunan bölgenin kapalılığı
$k = 2\pi/\lambda$	Serbest uzaydaki bir dalganın dalga-sayısı
λ	Serbest uzaydaki bir dalganın dalgaboyu
ϵ_0, μ_0	Boşluğun elektromagnetik parametreleri
σ_0	Malzemelerin öz iletkenliği
$\epsilon(g)$	Malzemelerin bağlı dielektrik sabiti
$U(g, t)$ ve $\tilde{U}(g, k)$	Başlangıç sınır değer ve sınır değer problemlerinde alan şiddeti vektörü bileşenlerini belirten bilinmeyen fonksiyonlar
$E(\dots)$ ve $H(\dots)$	Elektrik (\vec{E}) ve magnetik (\vec{H}) alan şiddeti vektörlerinin bileşenleri
$(f * g)$	Konvolüsyon operasyonu
$(f \times g)$	Direkt çarpım
$[\vec{a} \times \vec{b}]$	Vektörel çarpım
f^*, \bar{Q}	Kompleks eşlenik ve kapalılık
$\delta(\dots)$ ve $\delta^{(m)}(\dots)$	δ -Dirac fonksiyonu ve bu fonksiyonun m -inci dereceden genelleştirilmiş türevi
δ_m^n	Kronicker sembolü
$\chi(\dots)$	Heaviside basamak fonksiyonu
$G(\dots)$	Diferansiyel operatörünün temel çözümü (Green fonksiyonu)
$J_n(\dots)$	Bessel silindirik fonksiyonları
$H_n^{(i)}(\dots)$	Henkel silindirik fonksiyonları
$N_n(\dots)$	Neumann silindirik fonksiyonları
$\text{Re}(a)$ ve $\text{Im}(a)$	a karmaşık değerinin reel ve sanal kısımları
$\text{Res } f(w_n)$	$w = w_n$ noktasındaki $f(w)$ fonksiyonunun rezidüsü
ABC	Yutucu Sınır Koşulları
FDTD	Zaman Domeninde Sonlu Farklar

1. GİRİŞ

Elektromagnetikle ilgili teorik analizlerin çoğu Maxwell'in diferansiyel denklem sistemlerinin sınır değer ve başlangıç sınır değer problemlerini içerir. Bu analizler genelde matematiksel yollarla fiziksel sonuçlar alınması gereken matematikle iç içe olan fiziksel metotlardır. Buna bağlı olarak günümüzde bilginin modern bilgisayarda somutlaştırılması işlemleri; orijinal bir problemin nitelikli matematiksel analizi, problemin algoritması ile programının oluşturulması, probleme dayalı iyi bir hesaplama deneyimine sahip olunması ve sonuçların fiziksel yorumları hakkında yeterli bilgi birikimini gerektirir. Teorik ve deneysel çalışmalarda problemlerin çözümüne izin veren bu yöndeki bir yaklaşımın başarılı bir şekilde gerçekleştirilmesine frekans domenindeki rezonans dalga saçılması teorisi ile ilgili çalışmalar somut bir örnek teşkil eder. Bu paraleldeki çalışmalar literatürde geniş ölçüde yer almıştır [Shestopolov ve ark. (1997 ve öncesinde), Petit (1980), Colton (1983), vb.]. Aslında yeni fonksiyonel birimler dizisinin oluşturulmasında ve milimetre ve milimetre altı frekanslardaki radyo mühendisliği ile ilgili cihazların, vakum ve katı-hal elektroniği ile optik ve spektroskopinin ortaya çıkmasında bu yöndeki çalışmalar büyük boyutlarda temel teşkil etmiştir.

Zaman domeninde sinüzoidal olmayan elektromagnetik dalgaların muhtemel rezonans saçılma koşullarının analizi, frekans domenindeki gibi, temeli klasik matematikten alınan sonuçlarla yapılır. Bu analizlerin çoğu kendine özgü temel modelleme yapılarında geliştirilir. Teorik temellerin genişlemesini sağlayan çözümlerin ana problemlerin incelenmesindeki kullanımlarının yaygın olmamasına karşın, zaman domeni analizleri mevcut uygulamalı problemleri etkin bir şekilde çözmeye izin verirler.

Bu tez çalışması, çeşitli sürelerdeki durağan olmayan sinyallerin (yani, modern jeo-radarların, entroskopi, güvenlik görüntüleme ve iletişim cihazlarının yapımında temel olarak kullanılan sinyallerin) uzay-zaman domenindeki dönüşümlerinin güvenilir ve verimli bir şekilde analizlerine ve birçok güncel teorik problemlerin çözümüne

adanmıştır. Bir ortam veya cisimden saçılan elektromagnetik alanların ölçülmesiyle elde edilen veriden yararlı bilgilerin alınması ve görüntülenmesi konularındaki ters problemlerin (inverse problems) çözülmesi gerekir. Bu amaçla, pulsların oluşturulması, ışınlanması, yayılması ve saçılması işlemlerinin temelde önemli kanun ve özelliklerinin bilinmesinde, uygun tasarımlarda optimum değişkenlerin belirlenmesinde, nümerik metotlar için çeşitli modellere ait algoritmalar oluşturularak, nümerik deneyler yapılabilir. Uygulamadaki gerçek cihazlarla yapılan işlemlerde nümerik metotlarda olduğu gibi, tekrarlama ve risk bakımından güvende olma avantajlarının elde edilmesi imkansızdır. Dolayısıyla, bu tez çalışmasının esas amacı elektromagnetik alanlar teorisinin sınır değer problemlerinin geniş bir çerçevesinin çizilmesi, özellikle de içinde periyodik yapılarla (ızgaralar) yer değiştirilen engellerin etkin olduğu problemlerin araştırılmasıdır.

Geleneksel olarak yapılan çoğu yeni yaklaşımlar veya önerilen metotlarda, dalgaların rezonans saçılması teorisindeki modellemelerde ızgara model olarak uygun görülmüştür (Shestopalov ve ark (1997 ve öncesi), Petit (1980)). Sinyallerle ilgili olarak uzay, frekans ve polarizasyonun etkin seçimindeki yeteneğine bağlı olarak ızgaralar, çoğu kuasi-optik ve diyagram oluşturan cihazlar ile enerji giriş-çıkış cihazlarının ve kırınımlı ışın jeneratörlerinin yaygın ve evrensel saçıcı elemanlarından biri olarak görev üstlenirler. Bundan dolayı bu tez çalışmasında ızgara, temel model olarak seçilmiştir. Shestopalov (1986)'a göre, bu elemanlarla alınan sonuçlar, çeşitli dalgakılavuzu yollarındaki rezonans homojensizlikleri konusundaki problemlerin çözümüne kolaylıkla uygulanabilmektedir. Izzaraların elektrodinamik teorisi dikkate alınarak gerçekleştirilen nümerik metotlara ait etkin algoritmalar, durağan olmayan elektromagnetik alanlar teorisinin difraksiyon problemlerinde kullanıldığı gibi özellikle puls algılamanın model problemlerinde de kullanılabilir.

Elektromagnetik dalgalarla ilgili problemlerin matematiksel modellenmesi ve elde edilen modeller için nümerik deneylerin standart algoritmalar ve programlar aracılığıyla gerçekleştirilmesi mümkündür. Teorik ve uygulamalı modern radyofizikteki

uygun yaklaşımlarla; karmaşık elektrodinamik yapıdaki nesnelere matematiksel modellenmesi, elektromagnetik dalgaların yayılması ve saçılmasında homojen olmayan ortamların etkilerinin analizi ve saçıcı elemanlar ile diğer ilgili cihazların analiz ve sentezi yapılırken karşılaşılan problemlerin çözümleri kolaylıkla gerçekleştirilebilmektedir.

Bu tez çalışmasında, farklı geometrik yapıya sahip objelerin sinüzoidal olmayan (ancak, örneğin puls şeklindeki) elektromagnetik dalgalar üzerindeki etkileri ile ilgili problemlere çözüm üretilmeye çalışılmıştır. Bu tür problemlerin matematiksel olarak ifade edilmesi ve soruna çözüm üretilebilmesi temelde modern salınım ve dalga hareketleri teorisi çerçevesinde yapılabilmektedir. Önceki araştırmacıların deneyim ve başarılarının dikkate alınması, zaman domeninde temel matematiksel modelleme sorunlarının araştırılmasına ve dolayısıyla doğrudan çözüme gidilmesine imkan vermektedir. Bu tez çalışmasında bu tür sorunlara iki ana grup altında açıklık getirilmeye çalışılmıştır. Bunlardan ilki, "periyodik yapılar tarafından oluşturulan elektromagnetik alanların uzay-zaman dönüşümlerinin analizi için güvenilir metotların geliştirilmesi", ikincisi ise ilk çalışmadan elde edilen sonuçların "puls algılama model problemlerine uygulanması" biçimindedir. Yapılan teorik ve deneysel çalışmalardan, elde edilen sonuçların birbirleri ile tamamen uyum içinde olduğu görülmüştür.

Çalışmanın Bilimsel Yeniliği ve Uygulamadaki Önemi

Çalışmanın bilimsel yeniliği ve uygulamadaki önemi aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Zaman domeninde ızgara problemleri için sonlu farklar metodundaki sonsuz (açık) analiz bölgelerinin sanal sınırları üzerinde tam yutucu koşullar geliştirilerek, nümerik plana doğru bir şekilde dahil edilir. Böylece matematiksel yollarla simüle edilen fiziksel prosesleri bozmadan, esasen "açık" problemleri "kapalı"ya dönüştüren nümerik analiz metotları elde edilir. Uygun yaklaşımların verimliliği nümerik deneylerle doğrulanır.

2. Bir çok puls algılama model problemlerinin çözüm algoritmaları geliştirilir. Bu model problemler çoğu kez homojen ve homojen olmayan ortamların sınırına yakın homojen olmayan nesnelere, serbest uzaydaki yerel homojen olmayan nesnelere, sinüzoidal olmayan dalga alanındaki düzlemsel katlı heterojenlikleri ve düzlemsel horn antenleri içerir. Geliştirilen bu algoritmalar, sonsuz analiz bölgelerinin sanal sınırlarındaki tam yutucu koşullu sonlu farklar metodunun algoritmalarıdır. Bu tür tam yutucu koşulların ilgili hesaplama planlarına dahil edilmesi, orijinal sınır değer probleminin sadece ayrıklaştırılmasından meydana gelen hatalar olarak bırakılır ve böylelikle modelleme hataları minimum seviyede tutulur.

3. Toprak altına nüfuz edebilen radar (GPR) uygulamalarındaki frekanslarında; dielektrik sabitinin belirlenmesi amacıyla puls dalgasının gecikmesine yönelik yapılan birçok ölçüm sonuçları, çeşitli puls algılama modelleri için geliştirilen algoritmalarla (simülasyon sonuçları) doğrulanmıştır.

Yukarıda sıralanan bu sonuçlar radyofizik, optik, akustik, anten ve radyo mühendisliği gibi çok değişik alanlarda çözüm üretmek için etkin olarak kullanılabilir.

Tez çalışmasının bu bölümünde, Maxwell denklemleriyle ifade edilen elektromagnetik dalgalar teorisinin temel denklemlerine ve literatürde bu konudaki problem çözümü için kullanılan gösterimler ile dönüşümlere yer verilmiştir, zaman domeninde sonlu farklar metodu kısaca tanıtılmıştır. İkinci bölümde; problem çözmede yaygın şekilde kullanılan periyodik ızgara modeli üzerinde durulmuş, sonlu farklar metodu için tam yutucu sınır koşullu sanal sınırlar ileri sürülmüştür. Klasik sınır koşulu olarak yaygın bir şekilde kullanılan Mur yutucu sınır koşulu yaklaşımları ile tam yutucu sınır koşulu nümerik deneylerle kıyaslanmıştır. Üçüncü bölümde, önceki bölümde ızgaralar için elde edilen tam yutucu koşullar, puls algılama model problemlerine (yer altında gömülü cisim araştırması, düzlemsel katmanlı dielektrik yapılar, saçıcı cisim ve ışın şekillendirici anten modellerine) uygulanmıştır. Dördüncü bölümde tam yutucu koşullu metod, açık yapılara ait model örnekleri için kullanılmış ve karteziyen koordinatlarında modelleme yapılması durumunda karşılaşılan köşe noktası problemine

çözüm getirilmeye çalışılmıştır. Beşinci bölümde, önce de değinildiği gibi puls gecikmesinin ölçülmesi suretiyle toprağın dielektrik sabitinin bulunması üzerinde durulmuş, söz konusu bu ölçüm tekniğinin doğruluğu ise bu tez çalışmasında geliştirilen sonlu farklar metodu (FDTD, tam yutucu sınır koşullu) ile test edilmiştir. Son bölümde bu tez çalışmasında elde edilen teorik ve deneysel sonuçlar bir bütün olarak değerlendirilmiş ve daha sonra bu konuda yapılacak çalışmalar için bazı önerilerde bulunulmuştur. Ekler bölümünde ise FDTD metodunun kullanıldığı direkt problemlere ait modelleme örneklerine yer verilmiştir.

1.1. Teorinin Ana Denklemleri ve Temel Sonuçları

Sürekli durağan ortamdaki elektromagnetik alanlar, Maxwell denklemleriyle diferansiyel olarak;

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \varepsilon \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma_0 \vec{E} + \vec{j} \\ \text{rot } \vec{E} &= - \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanırlar. Burada $\vec{E} \equiv \vec{E}(g,t)$ ve $\vec{H} \equiv \vec{H}(g,t)$ sırasıyla elektrik ve magnetik alan vektörleri; $\varepsilon \equiv \varepsilon(g) \geq 1$ ve $\sigma_0 \equiv \sigma_0(g) \geq 0$ sırasıyla dalgaların yayıldığı homojen olmayan ortamın bağıl dielektrik permitivitesi ve yerel özgül iletkenliğidir; $\vec{j} \equiv \vec{j}(g,t)$, etkilenmeyle oluşan akım yoğunluğu; ε_0 ve μ_0 boşluğun elektriksel ve magnetik sabitleri; t zaman değişkeni; $g = \{x, y, z\}$ veya $g = \{\rho, \varphi, z\}$ R^3 uzayının noktaları; x, y ve z Kartezyen koordinatları; ρ, φ, z silindirik koordinatlarıdır. (1.1) deki zaman içeren terimler sonraki adımlardaki kolaylığından dolayı $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ ışık hızı ile çarpılmıştır.

Kartezyen koordinatlarında (1.1) ile verilen Maxwell denklemlerinin bileşenleri;

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \varepsilon \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} E_x + \sigma_0 E_x + j_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varepsilon \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} E_y + \sigma_0 E_y + j_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \varepsilon \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} E_z + \sigma_0 E_z + j_z \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= - \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= - \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= - \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} H_z \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

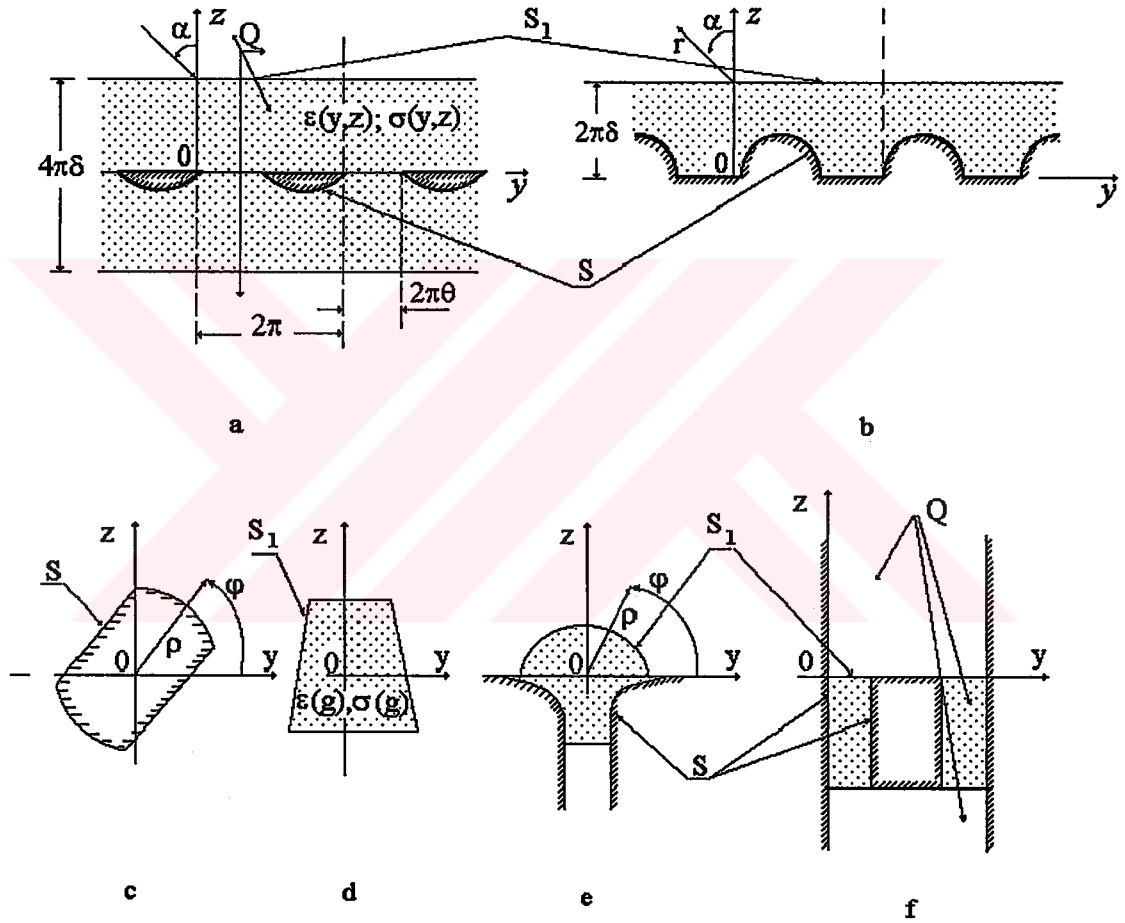
şeklini alır. Silindirik koordinatlardaki bileşenler ise;

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_x}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\rho}{\partial x} &= \varepsilon \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} E_\rho + \sigma_0 E_\rho + j_\rho \\ \frac{\partial H_\rho}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial \rho} &= \varepsilon \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} E_\varphi + \sigma_0 E_\varphi + j_\varphi \\ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho H_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} \right] &= \varepsilon \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} E_x + \sigma_0 E_x + j_x \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_x}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial x} &= - \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} H_\rho \\ \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{\partial \rho} &= - \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} H_\varphi \\ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho E_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} \right] &= - \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} H_x \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

formunda yazılabilir.

Genellikle, matematiksel modelleme problemlerinin çoğunda alanların uzay-zaman dönüşümleri ile ilgili temel kanun ve özelliklerinin incelendiği problemlerin geometrisi yeterince basittir (Şekil 1.1). Bu durum, belli koşullar altında, denklem (1.1) gibi üç boyutlu problemlerin iki boyutlu skaler denklemlere indirgenmesine izin verir.



Şekil 1.1 Model problemlerin geometrisi. Yarı-transparent (a) ve yansıtıcı (b) ızgaralar; $\epsilon(y + 2\pi, z) = \epsilon(y, z)$, $\sigma(y + 2\pi, z) = \sigma(y, z)$. Serbest uzayda ideal yansıtıcı (c) ve lokal homojen olmayan (d) cisimler. Horn anten (e). Paralel düzlemsel dalgakılavuzlarında heterojenlik (f).

Örneğin Şekil 1.1'de gösterilen $y0z$ düzlemleriyle olan kesitleri ve uyartım alan kaynakları x -ekseni boyunca homojen olan model yapılarında, E-polarizeli ($E_y = E_z = H_x = j_y = j_z \equiv 0$) ve H-polarizeli ($H_y = H_z = j_x \equiv 0$) alanlar için, (1.2), (1.3) denklemlerine ve $\partial/\partial x \equiv 0$ olan genel problemine sahibiz.

Çalışmalarda temel olarak kabul edilen E-polarizasyonu durumunda, (1.2) ve (1.3) denklemlerinden,

$$\left[-\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E_x = F \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_y = -\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial z} E_x, \quad \frac{\partial}{\partial t} H_z = -\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial y} E_x, \quad (1.7)$$

elde edilir. Burada, $\varepsilon \equiv \varepsilon(g)$, $\sigma = (\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2} \sigma_0 \equiv \sigma(g)$, $E_x \equiv E_x(g, t)$

$F = (\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2} \partial/\partial t j_x \equiv F(g, t)$ ve $g = \{y, z\}$, R^2 dir. H-polarizeli bir alan bileşeni için de (1.6), (1.7) denklemlerine benzer ifadeler elde etmek mümkündür.

ρ, φ, x silindirik koordinatlar sisteminde (Şekil 1.1,c-e), E-polarizeli alanlar ($E_y = E_z = H_x = j_y = j_z \equiv 0$) aşağıdaki skaler denklemlerle tanımlanır:

$$\left[-\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] E_x = F, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_\rho = -\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_x, \quad \frac{\partial}{\partial t} H_\varphi = \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \rho} E_x, \quad (1.9)$$

Yine $\varepsilon \equiv \varepsilon(g)$, $\sigma = (\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2} \sigma_0 \equiv \sigma(g)$, $E_x \equiv E(g, t)$ ve $F = (\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2} \partial/\partial t j_x$, fakat burada $g = \{\rho, \varphi\}$ dir.

x -doğrultusu boyunca homojen olan problemlerdeki Q analiz bölgesinin geometrisi (Şekil 1.1), S konturları tarafından sınırlı $R^2 = \{g = [y, z]: |y| < \infty, |z| < \infty\}$ düzlem parçasını temsil eder.

Fiziksel ortam ve cisimlerin varolduğu durumlarda problemin matematiksel ifadesi, sadece temel denklemleri değil, aynı zamanda başlangıç ve sınır koşullarını da içermelidir. Son koşul, bir elektrik alan vektörünün teğetsel bileşeninin ideal bir iletken yüzeyi (S sınırları) üzerinde sifira eşit olmasını gerektirir:

$$E_{tg}(g,t)\Big|_{g \in S} = 0 \quad (1.10)$$

Bununla birlikte, Q bölgesinde iletken olmayan farklı ortamları sınırlayan yüzeylerde (S_1 sınırları), hem elektrik (\vec{E}), hem de magnetik (\vec{H}) alanların vektörlerinin teğetsel bileşenleri E_{tg} ve H_{tg} sürekli olmalıdır.

Başlangıç koşulları ($t=0$ anındaki durum), diferansiyel denklemler ve sınır koşulları tarafından belirlenen kurallar ile ($t>0$ anlarında) değişen sistemin orijinal konumunu ayarlar. (1.1) denklem sistemindeki $\vec{E}(g,0)$ ve $\vec{H}(g,0)$ başlangıç koşulları, \vec{H} vektörünün (\vec{E} vektörünün) incelenmesi söz konusu değil iken, (1.1) e dönüştürülen zamana göre ikinci dereceden diferansiyel formdaki $\vec{H}(g,0)$ ve $\left[\partial/\partial t \vec{H}(g,t)\right]_{t=0}$ ($\vec{E}(g,0)$ ve $\left[\partial/\partial t \vec{E}(g,t)\right]_{t=0}$) eşdeğerdirler. Böylece, (1.6), (1.8) eşitlikleri

$$E(y,z)(g,0) = \varphi(g), \quad \frac{\partial}{\partial t} E(y,z)(g,t)\Big|_{t=0} = \Psi(g). \quad (1.11)$$

şeklinde başlangıç koşullarıyla desteklenmelidir. $t>0$ 'da $\varphi(g)$, $\Psi(g)$ ve $F(g,t)$ kaynak fonksiyonları Q bölgesinde genellikle sınırlı desteğe sahiptir. Bu fonksiyonlarla, saçıcı cisimlerin herhangi bir yolla uyarımı pratik olarak simüle edilebilir (örneğin $U^i(g,t)$ puls sinyali, $\varphi(g) = U^i(g,0)$ ve $\Psi(g) = \left[\partial/\partial t U^i(g,t)\right]_{t=0}$ uyarımları gibi). Puls sinyali $U^i(g,t)$, ilgili dalga denklemini ve nedensellik prensibini sağlamalıdır. $t=0$ anında gelen pulsun saçıcı cisimle henüz teması olmadığı kabulü önemlidir. Ancak bu kabulün, normalden $\alpha \neq 0$, $|\alpha| < \pi/2$ kadar ayrılan doğrultuda yayılan düzlemsel puls dalgalarıyla sonsuz yapıların uyarılmasında pratik olmadığı açıktır (Şekil 1.1,a ve b). Bu tür

dalgalar herhangi bir anda saçıcı yüzeyin bir kısmını kaplayacak zamana sahip olabileceğinden, fiziksel bakımdan işlemin gerçekleştirilmesi mümkün değildir.

Frekans domeni problemlerinde (Shestopalov ve ark. 1989; Petit 1980), bir α açısı ile gelen düzlemsel bir dalga alanında ızgara yerleşimine herhangi bir engel yoktur. Bir periyotluk (2π rad) yapıda ve alan uyarıtımı (y boyutunda 2π 'lik regüler bir faz kayması) tarafından oluşturulan $y=0$ ve $y=2\pi$ düzlemlerindeki singüler (tekil) olmayan sınır koşulları, analiz bölgesinin $Q_{\text{yeni}} = \{g \in Q : 0 < y < 2\pi\}$ ye kadar daralmasına imkan verir.

Zaman domeni problemlerinde de analiz bölgesini Q_{yeni} ye kadar daraltmak mümkündür. Bu yüzden analiz nesnesi, sadece tümüyle fiziksel düzlemsel kompleks dalgaya dönüşmez, aynı zamanda sonucun basit matematiksel dönüşümleri, alışlagelmiş tüm alan değerlerini fiziksel olarak doğru gösterimlere dönüştürür. Pek çok nedene bağlı olarak, ızgaraların elektrodinamik teorisinin durağan olmayan problemlerindeki fiziksel katı durumlarının modellenmesinde, doğru alan ve kaynakları tanımlayan $f_{\text{gerçek}}(y, z, t)$ fonksiyonunun $f(y, z, t; \Phi)$ Fourier görüntülerinden başlamak daha yararlıdır. Yani;

$$\begin{aligned} f_{\text{gerçek}}(y, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(z, t; \Phi) e^{i\Phi y} d\Phi \\ &= \int_{-0.5}^{0.5} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(z, t; \Phi) e^{i(n+\Phi)y} \right] d\Phi = \int_{-0.5}^{0.5} f(y, z, t; \Phi) d\Phi. \end{aligned} \quad (1.12)$$

ve (1.12) den,

$$f \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \right\} (y + 2\pi, z, t; \Phi) = e^{i2\pi\Phi} f \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \right\} (y, z, t; \Phi), \quad (1.13)$$

elde edilir. (1.2) veya (1.3) ifadesinden, sınır değer problemlerinin, frekans domenindeki problemlerin klasik ifadeleriyle uyumlu olduğu, dolayısıyla frekans domeninin matematiksel ve fiziksel sonuçlarının bu durumda kolaylıkla kullanılacağı görülmektedir. (1.13) ifadesi $y=0$ 'da, analiz bölgesini $Q_{\text{yeni}} \in \mathbb{R} = \{g \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2\pi\}$ ye kadar daraltan sınır koşuluna dönüşür. Izgara (grating) teorisinde sınır koşullarıyla

ilgili olarak (1.13) periyodik koşullu bir R şeridi, Floquet kanalı adıyla anılır. Bu kanalın, esasen alışılmış kapalı dalgakılavuzlarıyla hiçbir farkı yoktur. Bundan dolayı, homojen olmayan ızgaraların analizinde alınan sonuçların çoğu, pratik olarak değişmeyen açık dalgakılavuzu rezonatörler konusundaki problemlere taşınır (Shestopalov ve ark. 1986).

Periyodik yapılara ait sınır-değer problemleri, (ızgaraların periyodunun uzunluğu 2π ye eşit olduğu) uzay-zaman koordinatlarında boyutsuz formüle edilir ve incelenir. Böyle bir seçim, temel parametre (ızgara periyodunun gerçek uzunluğu l ile uyartım dalgaboyu λ ilişkisini tanımlayan boyutsuz frekans parametresi κ) konusundaki analize yoğunlaşmaya imkan veren, tüm matematiksel temsilleri esaslı olarak basitleştiren ve geleneksel frekans ve zaman domenlerindeki problemlerin bağlantısı için yararlıdır. Iızgaraların elektrodinamik teorisinin tüm temel sonuçları, κ , δ ve bunlarla bağlantılı diğer parametreler cinsinden formüle edilirler.

Şekil 1.1,c-e'de temsil edilen geometriler için, E-polarizeli alanın geçiş durumunu tanımlayan problem,

$$U(g,t)|_{g \in S} = 0, \quad t > 0 \quad (1.14)$$

Dirichlet sınır koşullarını (S sınırının yeterince düzgün olduğu varsayılır, (1.10)) ve

$$U(g,0) = \varphi(g), \quad \frac{\partial}{\partial t} U(g,t)|_{t=0} = \Psi(g), \quad g \in Q. \quad (1.15)$$

başlangıç koşullarını (bkz. (1.11)) sağlayan,

$$P_{\varepsilon, \sigma}[U] \equiv \left[-\varepsilon(g) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma(g) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] U(g,t) = F(g,t), \quad (1.16)$$

$$g \in Q, \quad t > 0$$

iki boyutlu telgraf denkleminin $U(g,t) = E_x$ çözümünün aranmasına indirgenir.

Herhangi bir $F(g,t) \in C^2(t \geq 0)$, $\varphi(g) \in C^3(R^2)$ ve $\psi(g) \in C^2(R^2)$ de, R^2 deki dalga denklemi için Cauchy probleminin ($Q = R^2$ ve $\varepsilon(g) \equiv 1$, $\sigma(g) \equiv 0$ olan (1.14)-

(1.16) problemi) $U(g,t) \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$ klasik çözümünü vardır, bu çözüm tekdir ve Poisson formülü cinsinden bu çözüm;

$$U(g,t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ - \int_0^t \int_{s(g,t-\tau)} \frac{F(p,\tau) dp d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2 - |g-p|^2}} + \int_{s(g,t)} \frac{\psi(p) dp}{\sqrt{t^2 - |g-p|^2}} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{s(g,t)} \frac{\varphi(p) dp}{\sqrt{t^2 - |g-p|^2}} \right\}. \quad (1.17)$$

şeklinde ifade edilir (Vladimirov 1971). (1.17) formülü, R^2 homojen uzayının uyarıtımı ile ilgili bir problemin (durağan olmayan elektrodinamiğin elemanter probleminin) açık çözümünü verir. Regüler düzlemsel-paralel dalgakılavuzlarının uyarıtımı (Vladimirov 1971) ve regüler ($Q_{\text{yeni}} = R$) Floquet kanalları problemleri için de benzer çözümler elde edilebilir (Shestopalov ve ark. 1989).

Başlangıçta, tüm denklemlerin Q bölgesinin her bir noktasında sağlandığı (1.14)-(1.16) problemlerinin klasik ifadesindeki $U(g,t)$ çözümünün, yeterince düzgün olduğu (denkleme giren kısmın sürekli türevlenebilir olmalısı gerekir) ve problemde kapsanan tüm veri üzerinde düzgünlük konusunda katı sınırlamalar yüklemesi gerektiği varsayılır. Genelleştirilmiş ifadeler ve çözümlere geçiş, diferansiyel denklemler tarafından tanımlanan olayların fiziksel esasına karşılık gelir ve aslında bir problemin analiz tekniğini basitleştirir.

Genelleştirilmiş fonksiyon, klasik fonksiyon kavramının genelleştirilmesidir (Vladimirov 1971). Kabaca söylemek gerekirse, genelleştirilmiş fonksiyon, her bir noktanın komşuluğundaki "ortalama değerlerle" belirlenir ve örneğin bir ani nokta kaynağın şiddeti vb. gibi pek çok idealleştirilmiş kavramları matematiksel formda ifade etmeye (ve bunun sonucu olarak kullanılan bölgeye doğru olarak dahil etmeye) imkan verir. Genelleştirilmiş fonksiyon, $D = D(R^n)$ temel fonksiyonları uzayındaki (R_n deki tüm sonlu belirsiz türevlenebilen γ fonksiyonlarının uzayı), herhangi bir lineer sürekli (f, γ) fonksiyoneldir. Tüm genelleştirilmiş fonksiyonların lineer kümesi $\tilde{D} = \tilde{D}(R^n)$

deki fonksiyonların yakınsamanın, dizilerin zayıf bir yakınsaması olarak tanımlanmasıyla, tam uzay olur.

Eğer tüm $\gamma \in D(Q)$ için $(f, \gamma) = 0$ ise, Q bölgesinde genelleştirilmiş fonksiyon sıfıra eşittir. Bu tanıma göre, Q bölgesindeki eşitlik tanımlarına sınır değer ve başlangıç sınır değer problemlerinin fonksiyonları ve genelleştirilmiş çözümleri dahil edilir. Örneğin, (1.16) denklemlerinin U 'ya göre genelleştirilmiş çözümü, $(P_{\sigma, \sigma}[U] - F, \gamma)$ fonksiyonunun değeri sıfır olmalıdır. Genelleştirilmiş fonksiyonlarla benzer fonksiyonların açıklanması için gerekli işlemler basit eşitliklerle yazılır:

- β belirsiz türev fonksiyonlu $f \in \bar{D}$ genelleştirilmiş fonksiyonunun βf çarpımının tanımındaki $(\beta f, \gamma) = (f, \beta \gamma)$ eşitliği;
- $f \in \tilde{D}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş fonksiyonunun $\partial^\alpha f$ genelleştirilmiş türev tanımındaki $(\partial^\alpha f, \gamma) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \gamma)$ eşitliği ($\partial^\alpha \gamma$ daki $(\alpha - \{\alpha_i\}, i = 1 \dots n)$ çoklu indisi, γ fonksiyonunun $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ dereceli türevini gösterir);
- $\tilde{D}(\mathbb{R}^n)$ den olan iki genelleştirilmiş fonksiyon $f_1(g)$ ve $f_2(g)$ nin $(f_1 * f_2)$ konvolüsyonu tanımındaki $((f_1 * f_2), \gamma) = (f_1(g) \cdot f_2(p), \gamma(g+p))$ eşitliği, $\gamma \in D(\mathbb{R}^n)$ vb.

Genelleştirilmiş fonksiyonlar, regüler ve singüler olarak ikiye ayrılırlar. Regüler genelleştirilmiş fonksiyonlar, \mathbb{R}^n de lokal olarak integre edilebilen $f(g)$ fonksiyonlarıyla türevlenir ve

$$(f, \gamma) = \int f(g) \gamma(g) dg, \quad \gamma \in D(\mathbb{R}^n) \quad (1.18)$$

formülüyle belirlenirler.

\mathbb{R}^n de lokal olarak integre edilebilen fonksiyonlar ve regüler genelleştirilmiş fonksiyonlar arasında karşılıklı uyum mevcuttur. Bundan dolayı, klasik bir fonksiyonda olduğu gibi genelleştirilmiş fonksiyonlarla da çalışmak mümkündür. Böylece sınır değer

problemleri teorisi ve fonksiyonel analizin kullanımı büyük ölçüde kolaylaşır (Ladyzhenskaya 1985). Regüler genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfı $\tilde{D}_r(\mathbb{R}^n)$ 'da tüm elemanlar belirsiz türevlenebilir değildir. Bunlar türev özelliklerine göre çeşitli fonksiyonel uzaylarının (özelde $L_m(Q)$ dahil l dereceye kadar genelleştirilmiş türevlere sahip $f(g) \in L_m(Q)$, $g \in Q$ fonksiyonlarından oluşan $W'_m(Q)$ uzaylarının) elemanı olarak görülebilir.

Singüler (regüler olmayan) genelleştirilmiş fonksiyonlara örnek, $\delta(g)$ şeklinde ifade edebileceğimiz δ -Dirac fonksiyonu ve bu fonksiyonun genelleştirilmiş türevidir. Sınır değer problemleri için sonlu farklar metodu algoritmalarına benzer şekilde, singüler fonksiyonların standart matematiksel işlemlerinin doğru gerçekleştirilmesini engelleyen durumlarda; δ -fonksiyonu ile söz konusu singüler fonksiyonların “regülerizasyonu” yapılabilir (Vladimirov 1971). Genelde, herhangi bir $f(g) \in \tilde{D}$ genelleştirilmiş fonksiyonunun regülerizasyonu; $f_\varepsilon(g) = (f * \omega_\varepsilon)(g - p)$ planı altında yapılan $f_\varepsilon(g)$ fonksiyonunun, $\varepsilon \rightarrow +0$ da belirsiz türevlenebilen $f(g)$ ye yakınsadığı (\tilde{D} deki yakınsama) konvolüsyonun bir sonucu olarak elde edilir.

Genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisine giren tanımların çerçevesine $P[U]$ (etkileme fonksiyonu) diferansiyel operatörünün temel çözüm kavramı dahil edilir: Eğer $P[G] = \delta(g)$ ise, $G(g) \in \tilde{D}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş fonksiyonu, $P[U]$ operatörünün temel çözümüdür.

Genelleştirilmiş G fonksiyonunun yardımıyla $f : U = (G * f)$ sağ taraflı $P(U) = f$ denklemlerinin çözümünü yazabiliriz. G ile bir konvolüsyonun yapılabilmesi için bu çözüm \tilde{D} ye ait olan genelleştirilmiş bir fonksiyonlar sınıfında tekdir ve bu çözüm ortaya çıkan eşdeğer gösterimli diferansiyel operatörün muhtemel kısmi inversiyonudur. Vladimirov (1971-1974) ve Borisov (1996)'in çalışmalarında diferansiyel operatörler için analitik formda sunulan çok sayıda temel çözümler mevcuttur. Bunların aşağıda kullanılacak olan bazı sonuçları şöyledir:

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] G(g, t) = \delta(g, t), \quad G(g, t) = -\frac{\chi(t-|g|)}{2\pi\sqrt{t^2-|g|^2}}, \quad g = \{y, z\}; \\
& \cdot \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - m^2 \right] G(z, t) = \delta(z, t), \quad G(z, t) = -\frac{\chi(t-|z|)}{2} J_0(m\sqrt{t^2-z^2}); \\
& \cdot \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2m \frac{\partial}{\partial t} \right] G(g, t) = \delta(g, t), \\
& \quad G(g, t) = -\frac{e^{-mt} \chi(t-|g|)}{2\pi\sqrt{t^2-|g|^2}} \operatorname{sch}\left(m\sqrt{t^2-|g|^2}\right), \quad g = \{y, z\}; \\
& \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a^2 \right] G(t) = \delta(t), \quad G(t) = -\chi(t) \frac{\sin(at)}{a}.
\end{aligned}$$

Burada χ Heaviside basamak fonksiyonu ve J_m Bessel fonksiyonudur. Bir problemin genel çözümüne önemli bir adım atılan Romanov (1985)'un çalışmasında, ε ve σ_0 fonksiyonlarının düzgünlüğünden daha kolay varsayımlar altında, Rot Maxwell denklemleri sistemi (1.1)'nin diferansiyel operatörü için temel çözümün singüler ve regüler kısımlarının yapısı incelenmiştir.

Ladyzhenskaya (1985) tarafından (1.14) - (1.16) probleminin $F(g, t)$, $\varphi(g)$ ve $\psi(g)$ kaynak fonksiyonlarının Q 'da sonlu olduğu kabulü ile aşağıdaki teoremin doğruluğu gösterilmiştir.

Teorem 1.1. $F(g, t) \in L_{2,1}(Q^T)$, $\varphi(g) \in \dot{W}_2^1(Q)$, $\psi(g) \in L_2(Q)$, $Q^T = Q \times (0, T)$, $T < \infty$ olsun. O zaman (1.14)-(1.16) problemi bir güç sınıfından genelleştirilmiş çözüme sahiptir ve bu genelleştirilmiş çözümler sınıfında teklik teoremi sağlanır.

Burada bir güç sınıfından genelleştirilmiş çözüm herhangi bir $t \in \overline{(0, T)}$ de $\dot{W}_2^1(Q)$ ye ait bir $U(g, t)$ fonksiyonudur ve $W_2^1(Q)$ normunda t ye bağımlı olarak sürekli değişkendir. Ayrıca $\partial/\partial t U$ türevi herhangi bir $t \in \overline{(0, T)}$ anında $L_2(Q)$ uzayının bir elemanı olarak mevcut olmalıdır ve $L_2(Q)$ normunda t ye göre sürekli değişmelidir. (1.15) başlangıç koşulları $\dot{W}_2^1(Q)$ ve $L_2(Q)$ uzaylarında bir süreklilik üzerinde kabul edilmelidir. Buna göre, (1.16) eşitliği,

$$\int_{Q^T} \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} U \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \gamma \right) - \sigma \left(\frac{\partial}{\partial t} U \right) \gamma - \left(\frac{\partial}{\partial y} U \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \gamma \right) - \left(\frac{\partial}{\partial z} U \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \gamma \right) \right\} dg dt = \int_{Q^T} F \gamma dg dt$$

özdeşliğini sağlamalıdır. Burada $\gamma = \gamma(g, t)$, $W_{2,0}^1(Q^T)$ dan herhangi bir elemandır. Böyle bir tanım anlamlıdır ve bunun gerçekten klasik çözüm kavramının genelleştirilmesi olduğu Ladyzhenskaya (1985) tarafından ispatlanmıştır.

Ladyzhenskaya (1985)'nin çalışmasında aynı kabullerle pratik olarak $W_2^1(Q^T)$ deki bir problemin tek değerli çözülebilirliği ispatlanır. "Güç" olarak adlandırılan genelleştirilmiş çözümler sınıfı, $W_2^1(Q^T)$ den olan genelleştirilmiş çözümler sınıfının halihazırda az bir kısmıdır. Bu, iki durum bakımından ilginçtir. Birincisi, bunun içinde, hiperbolik denklemlerin $U(g, t)$ çözümünün aynı diferansiyel özelliklere sahip olduğunu ispatlamak için, zamanın başlangıç anında icra edildiği kabul edilir (sürekli başlangıç koşulları). İkincisi, genelleştirilmiş çözümlerin güç sınıfı, enerjinin korunumu kanunuyla doğru bağlantıya sahiptir: Bu sınıftan olan $U(g, t)$ için güç denklemi uygulanmalıdır:

$$\int_Q \left(\varepsilon \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right|^2 + |\text{grad} U|^2 \right) dg \Big|_0^T + 2 \int_{Q^T} \left(\sigma \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right|^2 + \text{Re} \left(F \frac{\partial U^*}{\partial t} \right) \right) dg dt = 0 \quad (1.19)$$

(1.19) eşitliği,

$$\int_Q \left(|U|^2 + \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right|^2 + |\text{grad} U|^2 \right) dg \leq c(t) \left[\int_Q \left(|U|^2 + \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right|^2 + |\text{grad} U|^2 \right) dg \Big|_{t=0} + \int_0^t \|F\|_{L_2(Q)} dt \right]$$

enerji yargısından çıkarılır. Burada kesintisiz monoton artan $c(t)$ fonksiyonu, sadece σ/ε , $(\partial\varepsilon/\partial y)/\varepsilon^2$ ve $(\partial\varepsilon/\partial z)/\varepsilon^2$ fonksiyonlarını sınırlayan bir sabit olarak tanımlanır.

Aynı çalışmada bir probleme ait çözümlerinin artan düzgünlüğü de incelenir. Böyle çözümler türeve sahip olduğunda denklemde kapsandığı sonucuna varılır: Verinin uygun düzgünlükte olması ve başlangıç koşulları, sınır koşulları ve denklemin uyuşma derecesi gereklidir. Teorem 1.1 durumunda, S sınırı üzerinde $\varphi(g)$ fonksiyonunun $\varphi(g) \in \dot{W}^1_2(Q)$ olması gerekir. Ayrıca $\psi(g)$ fonksiyonunun S

üzerinde sıfırda inversiyonu hesaba katılır. Sınır koşulu, başlangıç koşulları ve denklem (1.16)'nın $g \in S$ kümesi üzerindeki kararlılık konusuna dikkat edilmelidir.

$S^T = S \times (0, T)$ üzerinde U 'nun daha yüksek türevlerinin sıfır olması gerekir.

(1.14) - (1.16) probleminin ifadesi ile bağlantılı olarak, klasik çözümler için hiperbolik denklemlerin iyi bilinen osilasyon yayılmasının sınırlı hızda olması karakteristik özelliğinden de bahsetmek icabeder. Q bölgesinin herhangi bir sonlu Q_a alt bölgesinde yoğunlaşan başlangıç osilasyonu, Q_a dan $(\mu)^{1/2} t$ mesafesinden daha fazla olmayan t zamanında yayılacaktır. μ büyüklüğü, analiz bölgesine ait g noktaları üzerinde $\varepsilon^{-1}(g)$ fonksiyonunun en büyük değeri ile belirlenir.

Geçici alanlar teorisinin somut problemlerinin çözümü altında pratik çalışmaların başlangıcını, fonksiyonel-değişmeyen çözümler metodu şeklinde anılan 30'lu yıllardaki gelişmelere bağlamak mümkündür (V.I. Smirnov ve S.L. Sobolev). O zaman temsil edildiği gibi, elastisite dinamik teorisinin başlangıç problemlerinin analizine daha etkin yaklaşımlar bulmak mümkündür. Bir Fourier metodu ve bir klasik kontur integraller metodu ile verilen metodun verimliliğini değerlendirmeksizin gerçekleştirilmesinde, iki ve üç uzaysal değişken durumunda dalga denkleminin (Bateman 1955 sonrası) yeni çözüm sınıfları elde edilmiştir. Bunlardan çözümlerle doğrudan ilgili olanları (Petrashen ve ark. 1982), bu çalışmada ele alınmıştır. Yeterince düzgün $U_0(\tau)$ fonksiyonunun $\tau = t + \alpha y \pm (1 - \alpha^2)^{1/2} z + \eta(\alpha)$ (z değerlerinin + işaretlisi azalma, - işaretlisi artma yönünde yayılan),

$$P_{1,0}[U_0] = 0 \quad (1.20)$$

homojen dalga denklemini sağladığı ve kompleks düzlemsel dalgalara karşılık geldiği bilinir. $\eta(\alpha)$ kompleks α da tanımlı bir fonksiyondur. Petrashen ve ark. (1982)'nin ifadesini takip ederek (1.20) dalga denklemi, $t + \alpha y \pm (1 - \alpha^2)^{1/2} z + \eta(\alpha) = 0$ türü denklemlerle y, z uzaysal değişkenleri ve t ile bağlantılı, α kompleks değişkeninin herhangi bir analitik fonksiyonu olan $U_0(\alpha)$ çözümlerine sahiptir. Burada $\eta(\alpha)$ herhangi bir analitik fonksiyondur.

Genelleştirilmiş fonksiyonlar kullanılarak elde edilen sonuçlar ile sınır değer problemlerinin sonuçları iki nedenle ilişkilendirilebilir: Bunlardan birincisi, bir çözümler sınıfının analitik tanımının temsil edilebilirlik (representability) hakkında çeşitli teoremleri formüle etmeye imkan vermesidir. Bu analitik tanım, eliptik denklemler ile ilgili bazı çalışmalarda görüldüğü gibi (Vekua 1966), hesaplama metodlarının tüm spektrumunu üretir ve nitel temel sonuçlarla teoriyi zenginleştirmeye yardım eder.

İkinci olarak, çeşitli regüler bölgelerdeki dalga denkleminin çözümlerinin açık analitik formu, değişik tipte ışıma ve yutucu sınır koşulları kullanılarak, açık problemlerde hesaplama bölgesinin doğru sınırlanmasına bir anahtar teşkil eder. Böylelikle, regüler yönlendirme (kılavuz) yapıları (düzlemsel-paralel, silindirik, horn, sektörel, vb.) için uygun sonuçların alınması mümkündür.

Maxwell denklemlerinden elde edilen ikinci dereceden denklemlerde eksik değişkenlerine ayırma metodunun gerçekleştirilmesi, Miller (1977) ve Maykov (1986)'un çalışmalarında benzer şekilde tanımlanır. Bu metotta genellikle, osilasyonun yayılma yönüne dik bir veya iki değişken ayrılır. Hiperbolik tipteki ikinci dereceden denklemi t 'ye bağımlı fonksiyonlar ve kalan uzaysal değişken için çözmek gerekir.

Miller (1977), karteziyen koordinatlarda değişkenlerine ayırma konusunda Kleyn-Gordon denklemini detaylı olarak inceler. Ayrık ve sürekli spektrumlu çok sayıda değişken ve olası durumları ele alır.

Borisov (1996) bu türden denklemlerin çözümleri için, çoğu araştırmalarda uzay-zaman gösteriminde bir alanın açık tanımını yapmaya imkan veren Reimann metodunu kullanır.

Maykov (1986) çalışmasında, uzaysal değişken üzerindeki Kleyn-Gordon denkleminin Cos-Fourier transformasyonu tekniğini ele alarak, regüler kılavuz yapılarının herhangi bir sanal dik düzlemindeki "giden" dalgalar için ışıma koşullarının tam formunu belirler.

1.2. Uzak-Frekans Gösterimleri ve Laplace İntegral Dönüşüm Metodu

Güç ile ilgili Teorem 1.1'i uzak terimlerinde yeniden formüle etmek gerekirse,

$$W_2^1(Q^\infty, \beta) \equiv \{U(g, t) : U(g, t) \exp(-\beta t) \in W_2^1(Q^\infty)\}$$

olduğundan bu terim (1.14)- (1.16) ifadeleri ile belirlenen durağan olmayan problem ile durağan problem çözümleri arasındaki ilişkide,

$$\tilde{f}(s) = L[f](s) \equiv \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \leftrightarrow f(t) = L^{-1}[\tilde{f}](t) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \tilde{f}(s) e^{st} ds \quad (1.21)$$

direkt ve ters Laplace transformasyonunun (görüntü \leftrightarrow orijinal) kullanılmasına imkan verir (Ladyzhenskaya 1985, Vaynberg 1982). Yani, $\text{Im } k > 0$ de ve $L_2(Q)$ ye ait herhangi bir \tilde{f} için;

$$\tilde{P}_{\varepsilon, \sigma}[\tilde{U}] \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \varepsilon_1 k^2 \right] \tilde{U}(g, k) = f(g, k), \quad g \in Q \quad (1.22)$$

$$\tilde{U}(g, k) \Big|_{g \in S} = 0; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon + i\sigma/k, \quad \tilde{f} = \tilde{F} + ik\varepsilon_1 \kappa \varphi - \varepsilon \psi, \quad s = -ik. \quad (1.23)$$

ile belirlenen problemler $W_2^1(Q)$ de çözülebilir ve bu çözüm k parametresinin analitik fonksiyonu olan $\tilde{U}(g, k)$ olacaktır (Shestopalov 1986-1997, Ladyzhenskaya 1985, Colton 1983, Vaynberg 1982). Herhangi bir geometrideki durağan problem için (Bkz. Şekil 1.1), Q 'yu Q_{yeni} ile değiştirmek ve (1.13) gibi kuasi-periyodik bir koşul eklemek sadece periyodik yapılarda mümkündür. Eğer $\text{Re } s > \beta \geq 0$ ve $\text{Im } k > \beta$ ise ve ayrıca $\tilde{U}(g, k)$ fonksiyonu bazı $\text{Im } k = \alpha > \beta$ 'larda R^1 üzerindeki $\text{Re } k$ ya göre mutlak integrale edilebilir ise, o zaman Teorem 1.1'e uyan bir güç sınıfına ait (1.14)-(1.16) ile tanımlanan problemin $U(g, t)$ çözümleri ve $W_2^1(Q)$ ye ait $\tilde{U}(g, t)$ çözümü,

$$U(g, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \tilde{U}(g, k) e^{-ikt} dk, \quad (1.24)$$

$$\tilde{U}(g, t) = \int_0^\infty U(g, t) e^{it} dt. \quad (1.25)$$

bağıntılarıyla birleştirilebilir.

(1.24) transformasyonu, k kompleks değişkenli $\tilde{U}(g,k)$ fonksiyonunun analitik özellikleri ve nümerik değerleriyle ilgili çalışmada, sonlu farklar hesaplama planlarında olduğu gibi durağan olmayan problemlerin analizinde kullanılabilir. Bu dönüşümün en basit biçiminden biri, hızlı Fourier transformasyonunun nümerik Fourier analizinde yaygın olarak kullanılan ters Laplace transformasyonunun nümerik gerçekleştirilmesidir (Gold ve ark. 1969). Elde edilen sinüzoidal olmayan bir dalga spektrumunun ayırık frekansının bağıl önemi bakımından, frekans ve zamandaki çeşitli olası bozulma örneklerinin niteliksel analizi, herhangi bir k değerinde $\tilde{U}(g,k)$ yi hesaplamak için yeterince hızlı algoritmalar gerektirir. Yaklaşımın; hesaplamaların büyük hacimde olması, parametrelerin optimum seçimi ve alınan sonuçların muhakemesi için güvenli bir kriterin olmaması, saçılan alanların formasyonunu etkileyen mekanizmaların rollerinin belirlenmesinde söz konusu yaklaşıma odaklanmanın imkansızlığı gibi bazı eksiklikleri vardır. (1.24) deki integrasyon konturunun başarılı eşdeğer bir deformasyonuyla ve durağan olmayan işaretlerin kaynak fonksiyonlarının optimum düzeltme yaklaşımlarıyla hesaplamanın kolaylaştırılması teorik olarak mümkündür. k ya bağımlı $\tilde{U}(g,k)$ fonksiyonuna ait (1.14)-(1.16) problemini, homojen başlangıç koşulları olan veya içinde $\varphi = \psi = \left(\frac{\partial^m F}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} = 0 \quad (m = 0,1,\dots,M)$ olan bir probleme başlangıç transformasyonlarıyla indirgenebilir (Ladyzhenskaya 1985).

Uzay-frekans gösterimlerine dayanan metotlar için yaygın ve çok zor problem, kompleks frekans parametresi k 'nın değişiminin tüm doğal bölgede (1.22)-(1.23) probleminin çözücü operatör-fonksiyonunun analitik özellikleri konusunda orijinal bilginin alınmasıdır. "Açık rezonatörlerin spektral teorisi" olarak bilinen çerçevede bu problemle son zamanlarda daha fazla meşgul olunmaya başlanmıştır. Kompakt saçıcı cisimlerin durumu göz önüne alınırsa (Bkz. Şekil. 1.1,c,d; S sınırı açık uçlu ve kırılmış olabilir, dielektrik cisimlere, metal vb. şeylere yakın olabilir);

(1.22)-(1.23) problemine, saçıcı ve kaynakların olmadığı ${}_a Q = Q \setminus \bar{Q}_a$,
 $Q = \{g \in Q : |g| < a \text{ bölgesindeki } (\text{Im} k > 0 \text{ daki}) \text{ çözümleri için,}$

$$\tilde{U}(g, k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(1)}(kp) e^{in\varphi}, \quad (1.26)$$

ışıma koşulunu ekleyebiliriz. Reel $k > 0$ için Sommerfeld koşuluna eşdeğer olan bu koşulu, (potansiyeller teorisinin standart tekniğini kullanmak için) k kompleks bölgesinde difraksiyon probleminin sürekliliğinde doğru olarak genelleştirebiliriz. Bu sürekliliğin doğal sınırları; Helmholtz denkleminin temel çözümünün analitik sürekliliğinin belirsiz bir K Reimann yüzeyi tarafından belirlenmesi gibi veya $\ln k$ fonksiyonunkine benzer şekilde tanımlanır.

Teorem 1.2. $\tilde{f}(g, k) \in L_2(Q_a)$ olsun. O zaman (1.22), (1.23) ve (1.26) ile tanımlanan problemin çözümü, $-\infty < n < +\infty$ için ($\bar{k}_n \in K$ elemanlarının Ω_k kümesini hesaba katmaktan başka istisnası olmayan desteği ile) K daki her yerde, $W_2^1(Q_b)$ de mevcuttur ve tektir (Q_b , Q bölgesinin herhangi bir sınırlı alt bölgesidir). Ω_k kümesinin elemanları üzerinde, k kompleks parametresinin (değişken K yüzeyi üzerinde bir yerde) meromorfik fonksiyonu olan $\tilde{U}(g, k)$ çözümü, sonlu dereceden kutuplara sahiptir ve (1.22), (1.23) ve (1.26) ile tanımlanan açık homojen problemi, $\tilde{U}_n(g, \bar{k}_n)$ çözümüne sahiptir. Bu çözümler kompakt açık rezonatörlerdeki bir elektromagnetik alanın serbest osilasyonunu, \bar{k}_n eigen frekanslarına göre tanımlar (Shestopalov ve ark. 1997).

Kararsız osilasyonlar teorisinde Tikhonov regülizasyonunun temelleri ve metotları konusunda Laplace transformasyonunun nümerik inversiyonu deneyimi (Tikhonov ve ark. 1995), henüz geniş yayılma göstermemiştir. Bununla birlikte, pratik hesaplamalar düzeyindeki regülizasyonun teorik olarak transparan planlarının dönüşümü yapılırken, belirgin zorluklarla karşılaşılır. Buna rağmen, regülizasyon operatörünün, eksik veya değişken veriye sahip, doğru olmayan problemlerin çözümü işlemi, biçimsel olarak kontrol edilebilen bir forma dönüştür ve hesaplama prosedürleriyle kontrol edilebilir. Bu tür bir yaklaşım, Brianzi ve ark. (1991)'nin çalışmasında gerçekleştirilmiştir. Bu yaklaşımda Laplace transformasyonunun nümerik inversiyonu problemi, sonlu momentler problemine dönüştürülür. $\tilde{f}(s)$ fonksiyonu, sistem üzerindeki reel s noktalarının eşit uzaklıktaki

değerleri ile ayarlanır. Parametrelerin başarılı seçimiyle, analitik olarak pek çok normal çözümün (minimal normlu) tatmin edici yaklaşımı elde edilir.

Frekans domeninden zaman domenine geçişte, kompleks k -düzlemindeki nümerik integrasyonun orijinal algoritması, Hosono (1981) tarafından önerilmiş ve Kwok ve ark. (1989) tarafından geliştirilmiştir. Kwok ve ark. (1989)'na göre, nümerik integrasyon küçük işlemsel çalışmalarla yüksek doğrulukta hesaplamalar yapabilmeye imkan verir; programı gerçekleştirmek için gereken çaba, yüksek doğrulukta hesaplamalı benzer algoritmalarla karşılaştırıldığında minimum olduğu görülür.

Durağan olmayan elektrodinamikteki singülerite açılım metodunun kompleks k düzlemlerindeki integrasyonda; $\tilde{U}(g, k)$ fonksiyonunun analitik özelliklerinin kullanım metodu ve $U(g, t)$ ye ait olan “doğal mod” gösterimlerinin elde edilme amacı literatürde çoğu çalışmada yer alır (Felsen 1976, Marin 1973, Ramm 1980). Ayırma aşamalarının çözümü tekniğindeki muhtemel değişiklikler ise çok çeşitlidir. Ancak genelde, kapalı bir formda çözülen kanonik problemler dizisi ve büyük (veya küçük) parametrelerin mevcudiyetiyle “yardımcı” çözümler hariç, adımların herhangi bir sırasını tümüyle tavizsiz olarak kanıtlamak mümkün değildir. Örneğin herhangi tek boyutlu bir uzaydaki dışbükey kompakt cisimlere ait açık durağan olmayan problemlerin çözümlerinin asimptotik açılımlarını alabiliriz (Vaynberg 1982). Bu açılımlar sınırlı bölgedeki karmaşık problemlerin çözümüne ait Fourier serileri ile aynı türden açılımlar olup hem osilasyonlu değildirler ve hem de $t \rightarrow \infty$ iken bileşenleri üstel bir fonksiyona uygun şekilde azalım gösterirler. Buradaki frekanslar durağan bir problemin çözücüsünün analitik sürekliliğinin kutuplarıdır.

Bir metodun genel fikrinin gerçekleştirilmesindeki iki temel öğeden biri; (1.24) formülü altında direkt transformasyon için elverişli olan $\tilde{U}(g, k)$ dekompozisyonunun kullanımına dayanır. Bu bağlamda örneğin $\tilde{f}(s)$, C deki s 'in meromorfik fonksiyonu olduğunu düşünelim. Mittag-Leffler teoremine göre (Hurwitz 1964) daima;

$$\tilde{f}(s) = E(s) + E_0(s - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [E_n(s - a_n) - h_n(s)] \quad (1.32)$$

eşitliği mevcuttur. Burada a_0, a_1, \dots değerleri $\tilde{f}(s)$ 'in kutuplarıdır. $E_j(s - a_j)$, bu kutuplardaki $\tilde{f}(s)$ fonksiyonlarıdır. $E(s)$ ise tam fonksiyondur. $h_n(s)$, bir serinin herhangi bir sonlu dairedeki (bu dairede kutupları olan sayıların çıkarılmasından sonra) düzgün yakınsamasını sağlayan polinomları tanımlar. r yarıçaplarının sınırsız büyüdüğü C 'deki regüler C_r konturlar sistemi üzerinde $\tilde{f}(s)$ 'in sınırlı olduğu ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Re} s \tilde{f}(a_n)| |a_n|^{-m-1} \text{ serisinin yakınsadığı basit kutuplar durumunda, (1.32)}$$

ifadesinin formu çok daha basit hale gelir. Ancak $r \rightarrow \infty$ iken C_r üzerinde $|\tilde{f}(s)| \rightarrow 0$ koşulu, zaman domeninde kolayca dönüştürülen;

$$\tilde{f}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} s \tilde{f}(a_n) (s - a_n)^{-1} \leftrightarrow f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} s \tilde{f}(a_n) e^{a_n t}$$

açılımıyla sonuçlanır.

Metodun temel fikrinin gerçekleştirilmesine esas teşkil eden ikinci ana öge; k fonksiyonlarına benzer şekilde $\tilde{U}(g, k)$ özelliğinin katkısı bakımından, bir hareket bölgesinde alınan (1.24) deki integrasyon konturunun eğrilmesi ve K 'daki ayrık konturlar üzerinde oluşturulan sıfır olmayan integrallerin muhakemesidir. Buradaki doğru çalışma için gerekli olan analitik destek, aslında ilk incelenen biçimdeki gereksinimden farklı değildir. $|k| \rightarrow \infty$ daki $|\tilde{U}(g, k)|$ davranışının orijinal muhakemesi, $\tilde{U}(g, k)$ özelliklerinin karakterinin niteliksel analizi (kutup, dallanma noktası, lokalizasyon bölgeleri ve muhtemel yoğunlaşma, parametrelere bağımlılık), $\bar{k}_n \in \Omega_k$ eigen frekanslarının spektrumu üzerinde $\tilde{U}_n(g, \bar{k}_n)$ alanının serbest salınımla $\tilde{U}(g, k)$ nin temsil edilebilirliği konusundaki problemin araştırılması ve spektral problemlerin nümerik çözümleri için güvenli ve etkin algoritmaların geliştirilmesi bir metot ile ilgili en ciddi sorunlar olarak sıralanabilir. Bunlar sadece bir metodun aşılması gereken problemleri değil, aynı zamanda matematiksel difraksiyon teorisinin (frekans domenindeki saçılma teorisi) de genel problemleridir. Dolayısıyla, bunların tatmin edici çözümleri olmaksızın singüler açılım metodu, yeterli titizlikteki bir çalışma çizgisi için uygulanamaz ve ispatlanamaz. Bu yönde özel sonuçların bile alınması çok miktarda analitik çaba ister. Açık iki-boyutlu

kompakt rezonatörlerin spektral karakteristiklerinin hesabı (Ω_k 'ya ait \bar{k}_n eigen frekanslarının ve bunlarla ilgi bir $\tilde{U}_n(g, \bar{k}_n)$ alanının serbest osilasyonu), prosedürlerinin algoritmik desteğiyle oldukça iyi durumdadır. Shestopalov ve ark. (1989,1997) ile Poyedinchuk ve ark. (1987) tarafından kullanılan analitik regülerizasyon metodunun eşdeğeri, $k \in K$ için (1.22), (1.23) ve (1.26) ile tanımlanan homojen problemi, sonlu $A(k)$ meromorfik operatör-fonksiyonlu ikinci türden $[I + A(k)]a = 0$ operatör denkleminin sıradan olmayan çözümlerinin tanımına indirger. Çözümlerin ekseriyetinde, sonsuz $A(k): l_2 \rightarrow l_2$ matris-fonksiyonları, iz sınıfı veya Koh matrisi operatörünü oluşturur. Bu operatör,

$$f(k) = \det[I + A(k)] = 0, \quad k \in K \quad (1.35)$$

karakteristik denkleminin yaklaşık çözümü üzerinde spektra arama algoritmaları yapmaya imkan verir.

(1.35) skaler denkleminin bir \bar{k}_n kökünün tekrarlama faktörü, açık rezonatörün \bar{k}_n eigen frekansının tekrarlama faktörünü belirler (\bar{k}_n , $A(k)$ operatör-fonksiyonunun bir kutbu değildir). Yani tekrarlama faktörü $N = N_1 + \dots + N_m + m$ değeridir ve burada m bir $\tilde{U}_{n,j}(g, \bar{k}_n)$ alanının lineer bağımsız serbest osilasyonlarının ve N_j ise j numaralı eigen fonksiyonunun adjoint fonksiyonlarının sayısını temsil eder. $k = \bar{k}_n$ daki $[I + A(k)]^{-1}$ çözücüsünün bir kutbunun derecesi (orijinal problemin $\tilde{G}(g, p, k)$ Green fonksiyonu), $N_j + 1$ 'nin maksimum değeri ile belirlenir. Çeşitli çalışmalarda bir analitik regülerizasyon metodunun algoritmaları, hesaplama deneylerindeki etkinliği, eigen frekanslarının dinamiğinin temel kanunları, serbest osilasyonların etkileşiminin fiziksel sonuçlarıyla ispatlanmış; düzlemsel dalgaların alanındaki yapıların rezonans cevabının oluşum mekanizmaları incelenmiştir (Shestopalov ve ark. 1989, Poyedinchuk ve ark. 1987).

Frekans domenindeki ile aynı olan zaman domenindeki integral sınırı ve "volümetrik" denklemler (Felsen 1976), elektromagnetik dalgaların saçılma ve yayılma proseslerinin analizinin güçlü ve evrensel çözümüdür. Doğrudan zaman domenindeki gibi operatörün temel çözümleri kavramına dayalı dalga potansiyelleri

tekniki ve daha sonra frekans domeninde potansiyel teorisinin klasik denklemlerine ters Laplace transformasyonları uygulanarak eşdeğer gösterimler elde etmek mümkündür. Şimdi, ideal olarak iletken bir saçıcı cisim için bu metodu basit bir örnekle göstermeye çalışalım (Bkz. Şekil 1.1,c).

$k \in K$ olsun. (1.26) şeklindeki ışınma koşullarının, $\tilde{f}(g,k) = \delta(g - g_0)$ daki $\tilde{U}(g,k) = \tilde{G}(g, g_0, k)$ den ziyade bir (1.22)-(1.23) sınır probleminin çözümünün var olması durumunda (herhangi bir $\tilde{f}(g,k)$ için genelleştirme önem taşımaz),

$$\tilde{U}(g,k) = \int_S \tilde{\mu}(p) \tilde{G}_0(g, p, k) ds_p + \tilde{G}_0(g, g_0, k), \quad g \in Q, \quad g_0 \in Q_a, \quad (1.36)$$

şeklindeki gösterim gerekli ve yeterli olacaktır (Shestopalov ve ark. 1997, Poyedinchuk 1987). Burada $\tilde{\mu}(p)$, S üzerinde \tilde{U} 'nun normal türevinin atlamasına orantılı olan S üzerinde bir fonksiyondur ve $\tilde{G}_0(g, p, k) = -(i/4)H_0^{(1)}(k|g - p|)$ dir.

Sınır koşullarıyla (1.36) eşitliği yeniden düzenlenerek $\tilde{\mu}(p)$ tanımı için,

$$\int_S \tilde{\mu}(p) \tilde{G}_0(g, p, k) ds_p = -\tilde{G}_0(g, g_0, k), \quad g \in S. \quad (1.37)$$

birinci türden singüler sınır integral denklemi elde edilir. Benzer şekilde, aşağıda verilen S üzerindeki çift katlı potansiyelin kullanımı;

$$\tilde{U}(g,k) = \int_S \tilde{\eta}(p) \frac{\partial}{\partial n_p} \tilde{G}_0(g, p, k) ds_p + \tilde{G}_0(g, g_0, k)$$

$$g \in Q, \quad g_0 \in Q_a.$$

aşağıda ifade edilen sınır integralli Fredholm denklemini verir.

$$\tilde{\eta}(g) + 2 \int_S \tilde{\eta}(p) \frac{\partial}{\partial n_n} \tilde{G}_0(g, p, k) ds_p = -2\tilde{G}_0(g, g_0, k), \quad g \in S \quad (1.38)$$

(1.24) formülü ile bağlantılı olarak (1.36) ve (1.37) ile verilen denklem çifti zaman domeninde;

$$U(g,t) = \int_S \int_0^{t-|g-p|} \mu(p,\tau) G_0(g, p, t - \tau) d\tau dp + G_0(g, g_0, t)$$

$$g \in Q, \quad g_0 \in Q_a; \quad (1.39)$$

veya

$$\int_S \int_0^{t-|g-p|} \mu(p, \tau) G_0(g, p, t - \tau) d\tau dp = -G_0(g, g_0, t), \quad g \in S. \quad (1.40)$$

eşitliği oluşturur. Burada $G_0(g, p, t) = -(2\pi)^{-1} \chi(t - |g - p|) [t^2 - |g - p|^2]^{-1/2}$, dalga operatörünün $(P_{1,0}[G_0(g, p, t)] = \delta(g - p, t))$ temel çözümüdür. $\mu(p, \tau) \leftrightarrow \tilde{\mu}(p, k)$ ise, (1.39) yardımı ile üzerinde (açık kompakt rezonatör tarafından oluşturulan) durağan olmayan $U(g, t)$ alanını elde edebildiğimiz bilinmeyen yüzey potansiyelidir. (1.38) denklemini benzer transformasyonlara tabi tutarsak,

$$U(g, t) = - \int_S \int_0^{t-|g-p|} \frac{\partial}{\partial \tau} \eta(p, \tau) G_0(g, p, t - \tau) \times \frac{\cos(n_p, g - p)}{|g - p|} d\tau dp + G_0(g, g_0, t),$$

$$g \in Q, \quad g_0 \in Q_a; \quad (1.41)$$

ve

$$\eta(g, t) - 2 \int_S \int_0^{t-|g-p|} \frac{\partial}{\partial \tau} \eta(p, \tau) G_0(g, p, t - \tau) \frac{\cos(n_p, g - p)}{|g - p|} d\tau dp = -2G_0(g, g_0, t),$$

$$g \in S.$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada $(n_p, g - p)$ bileşenleri, p ve g noktalarını birleştiren bir vektör ile p noktasındaki S konturunun normali arasındaki açıyı tanımlar.

Üç boyutlu durumda, integral denklemlerine göre biraz daha kolay görülen Huygens prensibi ışınlanan bir yüzeyin çeşitli parçalarının karışım alanlarını keskin bir şekilde ayırır. Fakat $g \neq p$ deki iki uzaysal değişken durumunda (1.40) ve (1.41) deki operatörler, sadece önceki zaman aralığındaki değerler ile verilen potansiyelleri etkiler. Bazı durumlar direkt formüller dizisinin peş peşe gerçekleştirilmesi şekline indirgenerek, (1.41) formunda integral denklemlerinin nümerik çözüm prosedürü basitleştirilir. (1.39)-(1.41) şeklindeki integral denklemlerine dayanan hesaplama planlarının verimliliği ve alınan sonuçların doğruluğu bir problemin algoritmasının yapılması işlemindeki detayların belirlenmesi ile doğrudan bağlantılıdır.

Bir metodun ana problemleri (konvolüsyon tipi denklemlerin niteliksel analizi), yukarıda ele alınan disiplinlerden ziyade (parçalı-düzgün kapalı ve kapalı olmayan S konturları vb. gibi açık rezonatörlerdeki kısmi homojen olmayan

dielektriklere karşılık gelen, voltümetrik potansiyellerin varlığı), klasik matematiksel disiplinler çerçevesinde ve daha genel durumlar için çözülür. Böylece integral denklemleri metodunun, durağan olmayan elektrodinamiğin perspektif, evrensel ve güvenilir metotlarından birisi olarak göz önüne alınmasını sağlar.

Hiperbolik denklemlerin önemli karakteristik özelliği ise (osilasyonun sonlu yayılma hızı), biçimsel olarak Fourier metodunun klasik planını izleyerek, oldukça küçük $t \in (0, T)$ zaman aralıkları için, (1.14) - (1.16) problemin $\sigma(g) \equiv 0$ olması durumundaki genelleştirilmiş çözümünün elde edilmesine imkan vermesidir.

T zaman aralığının bilindiğini varsayalım. $t = T$ anında F, φ ve ψ kaynaklarının varlığından kaynaklanan etkinin, belirleyeceğimiz $Q_b \in Q$ bölgesinin sınırına henüz varmadığını kabul edelim. Daha sonra biçimsel olarak,

$$U(g, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(\lambda_n t) + b_n \sin(\lambda_n t) - (\lambda_n)^{-1} \int_0^t F_n(\tau) \sin \lambda_n(t - \tau) d\tau \right] v_n(g) \quad (1.42)$$

serisi tarafından temsil edilebilen bir problemin $U(g, t)$ çözümünü düşünelim.

Burada a_n, b_n, λ_n ve $F_n(t)$;

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon(g) \lambda^2 \right] v(g) = 0, \quad g \in Q_b; \quad v(g) = 0, \quad g \in \bar{Q}_b \setminus Q_b \quad (1.43)$$

Storm–Liouville probleminin eigen fonksiyonlarından oluşan $L_2(Q_b)$ ortonormal temelindeki $\varphi(g), \psi(g)$ ve $F(g, t)$ fonksiyonlarının Fourier katsayılarıdır. Bir Fourier metodunun özü, bu serinin toplamının orijinal bir problemin çözümü olarak ele alınmasıyla, (1.42) serisinin herhangi bir fonksiyonel uzayı normunda yakınsama araştırmasından oluşur.

Teorem 1.3. $\varphi(g) \in \dot{W}_2^1(Q_b)$, $\psi(g) \in L_2(Q_b)$ ve $F(g, t) \in L_2(Q_b^T)$ olsun. O zaman (1.42) serisi ve bu serinin y, z veya t üzerinde birim diferansiyeli tarafından oluşturulan seri, $t \in (0, T)$ üzerinde regüler aralıklarda $L_2(Q_b^T)$ normunda yakınsaktır. (1.42) serisinin toplamı, bir güç sınıfından olan bir orijinal problemin genelleştirilmiş $U(g, t)$ çözümüdür (Ladzhenskaya 1985).

(1.43) benzeri problemlerin spektral kümeleri ve eigen vektörlerinin karakteristikleri ile bunların değişim dinamiği, Q_b bölgesi ve $\varepsilon(g)$ potansiyeli değişim aralığında Marchenko (1977) tarafından incelenir. Söz konusu fonksiyonların düzgünlüğünden dolayı, $n \rightarrow \infty$ deki $|a_n|$, $|b_n|$, $|F_n(t)|$ davranışının iyi bilinen bağıntıları, (1.43) nümerik çözümünün evrensel, etkin ve güvenilir algoritmaları çok sayıda problem (frekans domenlerindeki self-adjoint spektral problemleri) üzerinde geliştirilmiş ve doğrulanmıştır.

1.3 Zaman Domeninde Sonlu Farklar Metodu (FDTD)

Frekans ve zaman domeni metotları, direkt ve yarı-analitik metotlar, frekans ve zaman domeni fiziği ile bunların potansiyellerinin toplamı (ve uygun değerlendirilmeleri), elektromagnetik teorisinin güncel ve uygulamalı temel problemlerinin başarılı bir şekilde çözümüne imkan verirler.

Shlager (1995)'in çalışmalarından anlaşıldığı gibi, elektromagnetikteki nümerik metotlar arasında daha çok ilgi çeken zaman domeninde sonlu farklar (finite differences time domain - FDTD) metodudur ve günümüzde gerçekleştirilmesindeki evrenselliği ve basitliği bu direkt metodun popülerlik derecesini artırmıştır. İnsan kavrayışına uygun olarak elde edilen bilgiyi optimize etmek, simüle edilen prosesi görüntülemek, büyük miktardaki nümerik dosyaları işlemek için etkili bir araç olarak önem kazanmıştır. Her problem için FDTD metoduna yapılan değişik fark planı (difference scheme) yaklaşımları, farklı türden problemler için birbirinden değişik planların ortaya çıkmasına sebep olmuştur.

Sonlu farklar metodu, diferansiyel denklem sistemleriyle ifade edilen çeşitli problemlerin analiz bölgesini kapsayan ağlar (mesh) üzerinde tanımlanan ağ fonksiyonları şeklinde bilinmeyenleri, cebirsel denklem sistemlerine indirgeme işlevini üstlenir. Sonsuz bir diziyi, yaklaşım yapılan çözümleri (ağ fonksiyonlarını) belirleyen yardımcı sonlu boyutlu problemlere bu yolla indirmek, bazı problem türleri için belirsizlik ve çözüm zorluğu yaratır.

Bu söz konusu metot ilk defa adi diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılmıştır ve matematikte buna “Kırılmış Euler Metodu” adı verilir. Kısmi türevli denklemlere ait araştırma ve uygulamalar ancak içinde bulunduğumuz yüzyılda başlamıştır. Sonlu farklara yakınsama tasarımının prensipleri, kararlılık araştırması, yakınsama hızının belirlenmesi, katsayıların dondurulması prensibi, vb. gibi konularda metodun teorisinin geliştirilmesinde pek çok araştırmacının payı vardır.

Burada incelenen problemlerin (Şekil 1.1c-e’de gösterilen engellere ait (1.14)-(1.16) problemi; $\sigma \equiv 0$, $t \in \overline{(0, T)}$) sonlu farklar benzerinin (analogue) temel değişikliği; $t_m = ml$, $m = 1, 2, \dots, M = T/\tau$ zaman katmanlarında bir $g_{jk} = \{y_j, z_k\} \in Q(h, T)$ ağının düğümlerindeki,

$$\left[-\varepsilon(j, k) D_+^t D_-^t + D_+^y D_-^y + D_+^z D_-^z \right] u = F(j, k, m) \quad (1.44)$$

fark denklemini sağlayan, $u = U(y_j, z_k, t_m) = U(j, k, m)$ ağ fonksiyonunun tanımına dayanır. Bunlara başlangıç ve sınır koşullarının benzeri olan

$$\begin{aligned} U(j, k, 0) &= \varphi(j, k), & U(j, k, 1) &= \varphi(j, k) + l\psi(j, k), & g_{jk} &\in Q(h, T); \\ U(j, k, m) &= 0, & g_{jk} &\in S(h, T), & m &= 0, 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (1.45)$$

denklemleri eklenir. Burada,

$$D_+^y [u] = h^{-1} [U(j+1, k, m) - U(j, k, m)] \text{ sağ}$$

ve

$$D_-^y [u] = h^{-1} [U(j, k, m) - U(j-1, k, m)] \text{ sol}$$

fark türevlerinin standart operatörleridir ($D_+^z [u]$, $D_-^z [u]$ için de benzer ifadeler söz konusudur). Ayrıca $y_j = jh$, $z_k = kh$ ve $j, k = 0, \pm 1, \dots$ dir. $g_{jk} \in Q(h, T)$ düğümlerindeki tüm $f(j, k)$ ağ fonksiyonları $g \in Q$ üzerindeki $f(g)$ nin, $f(j, k) = h^{-2} \int_{\omega_h(j, k)} f(g) dg$ ortalamaları şeklinde tanımlanır. Üzerinde integral alınan hücreler $\omega_h(j, k) = \{g : jh < y < (j+1)h; kh < z < (k+1)h\}$ dir. $Q(h, T)$, $Q(T)$ ye ait $\omega_h(j, k)$ hücrelerinin oluşturduğu bölgedir. $Q(h, T)$ nin sınırı $S(h, T)$ dir, $Q(T)$ ise $t > T$ anında Q bölgesindeki F, φ, ψ kaynaklarının etki alanıdır. (1.44) ve (1.45) denklemleri u ’yu tam olarak belirler ve bu denklemler u ’nun hesaplanmasında herhangi bir matris operatörünün kullanımını gerektirmez (açık plan).

Sonlu farklar planının teorik analizinin önemli aşamalarından biri, kararlılık probleminin çözümüdür. Eğer yaklaşım yapılan u çözümleri için, h ve l uzunluklarıyla ilgili homojen sınırlamaların doğruluğu gösterilirse herhangi bir normda plan kararlıdır. Kararlılıktan, $\{u\}_{h,l}$ dizisinin dahili yakınsaması sağlanır ve u limit fonksiyonu orijinal durağan olmayan problemin çözümünü verir. Bu işlem, (1.14)-(1.16) ve (1.44)-(1.45) ile ilgili problemlerde kullanılır. İncelenen planın kararlılığının araştırılması için, orijinal problemlerin doğru olarak ifade edildiği “güç” uzaylarından yararlanır.

Teorem 1.4. Q bölgesinde, ($g \in Q$ için) $F(g,t) \in L_{2,1}(Q^T)$, $\varphi(g) \in W_2^1(Q)$, $\psi(g) \in L_2(Q)$ ve $\xi \leq \varepsilon^{-1}(g) \leq \eta$ olan $F(g,t)$, $\varphi(g)$, $\psi(g)$ ve $\varepsilon(g)-1$ fonksiyonları sonlu olsunlar. O zaman, (1.44)-(1.45) problemlerinin u çözümlerinin sürekli polilineer \tilde{u} görüntülerinin $W_2^1(Q^T)$ normları (herbir değişken enterpolasyon ağ fonksiyonlarına kadar lineer) herhangi bir h ve l 'de homojen olarak sınırlıdır ve bu normlar;

$$\eta(2/\xi)^{1/2} l/h < 1, \quad 2(\eta)^{1/2} l/h < 1. \quad (1.46)$$

koşullarından birini sağlarlar. $h, l \rightarrow 0$ da $\{\tilde{u}\}_{h,l}$ dizisi, (1.14)-(1.16) problemlerinin $U(g,t)$ çözümlerine $W_2^1(Q^T)$ de zayıf olarak, $L_2(Q^T)$ de ise güçlü olarak yakınsar (Ladyzhenskaya 1985).

Sonlu farklar metodu, sadece matematikte başlangıç sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümlerinin hesaplanma aracı değildir. Bu metotla, aynı zamanda, geliştirilmiş çözümlerin uzay-zaman teoremlerinin ispatı da yapılır (Ladyzhenskaya 1953). Bundan başka, verinin güvenli alınmasında çeşitli fonksiyonel uzaylardaki hiperbolik problemlerin çözülebilirliğinin incelenmesi, ilk kez bu metot yardımıyla mümkün olmuştur. Sonlu farklar metodu, farklı klasik sınır koşullarına sahip başlangıç sınır değer problemlerinin çok geniş bir yelpazesinin çözümüne uygulanabilir. Bu çerçeveye, geliştirilmiş çözümler teorisindeki elektromagnetik dalgaların saçılma problemleri de dahildir.

Elektromagnetikteki tam dalga analizinde, genellikle Maxwell denklemlerinin altı vektör bileşeni ayrıklaştırılır. Örneğin, bu amaçla yapılan klasik Yee algoritması Rot Maxwell denklemlerinin merkezi-farklar yaklaşımını temsil eder (Yee 1966). Dalganın elektrik alan şiddeti ve manyetik alan şiddeti bileşenleri “Yee Hücresi” denen birbirine bağlı bir düzenlemeyle belirlenir. Böylece ayrıklaştırma işlemi, hesaplama pratiğinin gereksinimleriyle başarılı bir şekilde birleştirilir. Yee planı, daha sonraki araştırmacılar tarafından yapılan çalışmalar için durağan ve durağan olmayan elektrodinamiğin güncel mühendislik problemlerinde, dalgaların yayılma ortamı ve incelenen geometri türüne uygun olarak metodun güncelleştirilmesinde, metodun işlemsel karakteristiğinin iyileştirilmesi ve hesaplama etkinliğinin artırılmasında temel oluşturmuştur. Bu konuda bazı önemli çalışmalar aşağıdaki gibi özetlenebilir;

FDTD metodu, yoğun olarak mikroşerit iletim hatlarının hesabı ve bunlara dayalı çeşitli fonksiyonel cihaz uygulamalarında yer almıştır (Sheen ve ark. 1990, Moore ve ark. 1990, Fang ve ark. 1993). Burada genel bir kural, zaman domenindeki çözüm bir ara işlemdir ve frekanstan bağımsız karakteristiklerin elde edilmesinde kullanılır. Geometri olarak düzlemsel yapıların analizi konusuna odaklanan metodun yapılan değişik biçimlerini günümüze uygun halde temsil eden Sheen ve ark. (1990)’nın çalışmasını burada vurgulamak gerekir. İki ve üç boyutlu horn antenlerin modellenmesi, iki ve üç boyutlu ideal iletken cisimlerin saçılma özelliklerinin analizi ve dielektrik üzerindeki açık dalgakılavuzu rezonatörlerdeki problemlerde metodun uygulanması, Furse ve ark. (1990), Katz ve ark. (1991), Dib ve ark. (1993) ve Krupezevic (1993) tarafından yapılan çalışmalarda sunulmuştur. Bu metodun dielektrik homojensizliklerin model geometrilerinde kullanımı ile ilgili bu kadar başarılı bir alternatifi daha yoktur ve frekans domenindeki analizlerde de elementerdir. Zaman domeninde bir problemin çözümünün elde edilmesi, henüz simüle edilen proseslerin nitel fiziksel analizi fırsatını sağlamaz. Olayları ayrıntılı bir şekilde tanımlayan karakteristiklerin minimum sayıda paketlenmemiş sayılar bloğu, fiziksel bir inceleme için çok yetersizdir.

Zaman domeninde dalgaların saçılması proseslerinin parametrik tanımlanma standardının olmamasından dolayı, çoğu araştırmacı frekans domeninin yerleşik

biçimselliğini tercih ederek bu metodu terk etmişlerdir. Bunun nedeni, durağan olmayan elektrodinamikte kendi fiziksel sonuçlarının azlığıdır. Dalgaların saçılmasının muhtemel rezonans olayları, anormal rejimler konusunda durağan elektrodinamik potansiyel olarak daha zengindir. Örneğin, Moore (1990)'ın yaptığı çalışmada, belli bir konfigürasyondaki kapalı bir şerit iletim hattının 90° dönmesinin Gaussian pulsunun geçişini etkilemediği rapor edilmiştir.

Fang ve ark. (1990), Katz ve ark. (1991), Jurgents ve ark.(1992), Yee ve ark. (1992), Luebbers ve ark. (1992), Hunsberger ve ark. (1992) tarafından yapılan çalışmaların çoğu bu metodun dalgaların yayılma ortamı ve problemlerin geometrisine göre güncelleştirilmesi çalışmalarına ayrılmıştır. Yukarıda sözü edilen ilk üç çalışma, homojen olmayan saçıcının eğrisel sınırları üzerinde standart bir koordinat ağında metodun birim hücrelerinin değişimini sergiler. Bir kontur FDTD metotlarına geçişteki esas, Ampere ve Faraday'ın integral kanunlarını içerir.

Hücre boyutları azalmadan sınır koşulları yardımıyla alınan sonuçların doğruluğunda sapma olmaksızın, hesaplamalar için gerekli bilgisayarların işlemsel bellek hacminin azaltılmasında uygulanan prosedürlerin önemi büyüktür. Yee ve ark. (1992), Lueberg ve ark. (1992), Hunsberger ve ark. (1992) tarafından yapılan çalışmalar bu metodu, dağıtıcı (dispersive) ve jirotropik (gyrotropic) malzemelerin ve ortamların analizine uyarlar niteliktedir.

FDTD metodunun gerçekleşmesi, bir kural olarak, büyük işlemsel bilgisayar belleği ve hesaplama süresi gerektirir. Bu konuda bilgisayar kaynaklarının ekonomik kullanımı için, bu metodun hesaplama verimini artırmak gerekir. Bu amaç için; bir elemanter hücre çerçevesindeki alan denklemleriyle ilgili bilinmeyen bileşenlerin toplam sayısının azaltılması (Krupezevic 1993, Aoyagi ve ark. 1993), rezonans durumlarında FDTD-metodu planının esnek değişimi (Mittra ve ark. 1993), hücrelerin yapısının sabit olmayan koordinat sınırlarına dönüştürülmesi (Katz ve ark. 1991, Jurgents ve ark. 1992), simüle edilen prosesleri sanal sınırların kullanımıyla analiz uzayı boyutlarının azaltılması ve bilgisayarların paralel çalışma avantajlarının kullanımı yararlı olacaktır.

1.3.1. FDTD-metodu hesaplama uzayının sınırlanması için yutucu koşullar

Sonsuz bölgelerdeki başlangıç sınır değer problemlerinin analizinde hesaplama uzayının boyutlarının etkin sınırlanma işlemi, sadece FDTD-metodunda değil, benzer diğer direkt nümerik metotlarda da önemli bir konudur. Sınırlama problemin çözümünün bugün bilinen değişik biçimleri, esasen farklı birkaç yaklaşıma dayanır. En yaygın olanlardan birincisinde (Engquist ve ark. 1977, Mur 1981, Mei ve ark. 1992, Railton ve ark. 1993, Betz ve ark. 1993, Fang 1994, Umashankar ve ark. 1992, Moore ve ark. 1988, Tirkas ve ark. 1992), ilgilenilen saçıcı cisimlerin ve kaynakların konumlandırıldığı bölge yutucu sınır koşulları (ABC) olarak bilinen sanal sınırlarla çevrilir. Bir $z \geq 0$ uzayında incelenen homojen dalga denkleminin (1.20) U_0 çözümleri için böyle bir temel ABC, dalganın $z = 0$ sınırı üzerine gelme açısına göre;

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t}\right)U_0 \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{birinci dereceden}$$

ve

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)U_0 \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{ikinci dereceden}$$

yaklaşım denklemine benzer (Engquist ve ark. 1977, Mur 1981). Bu koşullar serbest uzayda, azalan z-yönünde düzlemsel kompleks dalgaların yayılmasıyla ilgili fiziksel transparen gösterimlerden ve dalgaların sınır üzerine normal doğrultuda gelen bileşeninin yansıma katsayısının sıfır olması durumunda elde edilir. Yüksek dereceli yaklaşımlarda dalga bileşenlerinin yansıma katsayısı, dalganın gelme açısına göre alınan türevleri ile daha da azalmaktadır. Bozma faktörleri bakımından, lokal klasik ABC'lerin kullanıldığı modelleme gösterimlerine göre gerçek durumlar daha çok yer tutar (Engquist ve ark. 1977, Mur 1981, Umashankar ve ark. 1992, Moore ve ark. 1988, Tirkas ve ark. 1992). Ancak bu yaklaşım, orijinal türdeki problemlerde nadiren kullanılır ve hesaplamanın doğruluğu, hesaplama uzayının kabul edilebilir boyutu, sanal sınırlarda malzeme parametrelerinin heterojenliği gibi somut durumlarda yeniden düzenlenmesi gerekir.

Mai ve ark. (1992)'nin çalışmasında ise, bilinen yutucu koşulları iyileştiren "süper yutma" tekniği öne sürülür. Bu teknik, FDTD-metodunun bir elemanter

hücresinde oluşan alanın çeşitli teğetsel bileşenleri için iki defa kullanılır ve hesaplamalar ince bir sınır katmanında öngörülen plan çerçevesinde hataları gidermek suretiyle tekrarlanır. Railton ve ark. (1993), Betz ve ark. (1993) ve Fang (1994) bu bağlamda orijinal başarılı çalışmalar yapmışlardır. Örneğin,

$$\left[\prod_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial z} - \beta_j \frac{\partial}{\partial t} - \alpha_j \right) \right] U_0|_{z=0} = 0 \quad (1.47)$$

biçimsel gösterimine benzeyen bir koşula birinci dereceden ABC dahil edilerek, yutma faktörü çarpılır. Burada β_j ve α_i bağımsız parametrelerdir. $N = 2$ de bağımsız ABC parametrelerinin güvenli seçimiyle (1.47)'nin, klasik ikinci dereceden yaklaşımlı ABC'dan daha iyi olduğu rapor edilir (Betz ve ark. 1993). Söz konusu yaklaşım sayılarla kontrol edilir ve planın hesaplama etkinliğinin artışı sayılarla kanıtlanır. Ancak, $N = 3$ ve daha büyük değerler alması halinde (1.47) sınır koşulu kapalı bölgede bir başlangıç sınır değer probleminin sonlu fark yaklaşımlarının kararlılık araştırması ciddi sorunlar yaratabilir. Tabii ki çözümü olmayan FDTD-planı da yeterince güvenilir olarak kabul edilemez.

Yukarıda sözü edilen çalışmaların dışında, hesaplama bölgesinin sınırlamasına yaklaşım yapılan (Brenger 1994, 1996, Katz ve ark. 1994, Chen ve ark. 1995, Reuter ve ark. 1994, De Moerloose 1995) ve (Maykov ve ark. 1986,1989, Olivier 1992, Tromp ve ark. 1995) çalışmaları da örnek olarak gösterilebilir. İlk yaklaşım, ideal olarak boşluk ile iş birliği yapan ve üzerine gelen elektromagnetik dalgaları yutan ve analiz bölgesi sanal sınırları üzerinde yaklaşım yapılan koşullarla sonuçlanan katman teorisi kriteriyle ilişkilidir. İkincisinde, herhangi bir sanal sınıra gönderilen ikincil alanlar için katı ışınma koşullarının kullanımı tam ABC (exact ABC) olarak sunulur. Bu yaklaşımda çoğu kez sınırlar ortamın etkin saçıcılarıyla (serbest uzay veya regüler dalgakılavuzlarının kompakt heterojenlikleri gibi) işbirliği yapar. Tam ABC yaklaşımı, sınıra yakın bir alanın yapısı konusunda herhangi bir sezgisel (heuristic) yaklaşıma dayanmaz. Ayrıca, simüle edilen işlemler fiziksel esaslara tam olarak karşılık gelir, bozulma olmaz ve (hesaplama uzayının boyutu gibi) elverişsiz parametreye bağımlı değildir. Maykov ve ark. (1986, 1989)'nın çalışmalarında ışınma koşulları, denklemler yardımıyla ifade edilmişlerdir. Olivier (1992), Tromp ve ark. (1995) çalışmalarındaki ABC yaklaşımında ise, birincil ve

ikincil (saçıcı) kaynakları içeren bir yüzeyde eşdeğer akımlarla serbest uzaydaki ışınım alanının temsil edilebilirliği üzerinde durulmuştur. Maykov ve ark. (1986, 1989) tarafından kullanılan koşulların tersine, bu durumda ABC sınırı saçıcı cisme yaklaşabilir.

Dalgaları ayırma tekniği; frekans domeninde homojen olmayan katmanlı ortamlardaki dalgaların saçılması ile ilgili direkt ve ters problemlerinin çözümünde daha önce yaygın olarak kullanılmıştır (Rikatty denklemi metodu). J.P.Corones, R.J.Krueger, V.H.Weston, S.Strom, G.Kristensson ve diğer birçok araştırmacının çalışmalarından dolayı, bugün bu teknik durağan olmayan dalgalar teorisinde en çok kullanılan tekniklerden biri haline gelmiştir. Bununla birlikte, yutucu ve jirotropik homojen olmayan ortamları kapsayan herhangi üç boyutlu homojensizlikler durumunda söz konusu tekniği doğru olarak genelleştirmek suretiyle, (öncelikle standart olmayan problemler dahil) ters problemlerin etkin nümerik çözümü yapılır (He ve ark. 1998, Lundstedt 1993).

Klasik analitik yaklaşımların pek çok detaylı tekrarında eksik değişken ayırma metodu (Borisov 1996), mod temeli metodu ve evrimsel dalga denklemleri metodu (Tretyakov 1993) durağan olmayan elektromagnetik alanlar teorisinin başlangıç problemlerinin analizi için kullanılmıştır. Dalgaların elektrodinamiği, yayılması ve uyartımı konusunda bu metotların hala yararlı bir çözüm olduğunu gösteren sonuçlar mevcuttur. Bu sonuçlar serbest uzayda, çeşitli tiplerdeki regüler kılavuz yapılarında, (hacimsel kapalı rezonatörlerdeki gibi) regüler bölgelerdeki kararsız akımların elektromagnetik alanlarının esasında analitik, açık ve diferansiyel denklemlerin gerçekleştirilmesi için basit formda uzay-zaman gösterimleridir. Bu tür sonuçlar olmadan puls sinyallerinin oluşturulması, taşınması, dönüştürülmesi, ışınlanması (yayınlanması) ve algılanması ile ilgili temel ve uygulamalı problemlerin etkin nümerik ve analitik metotlarının geliştirilmesi mümkün değildir.

Sonlu elemanlar metodu (method of finite elements, FEM) ve iletim hattı matrisleri metodu (method of transmission line matrixes, TLM) elektromagnetik teoride kullanılan önemli nümerik metotlardandır. Bunların hesaplama planları çok açıktır ve bu metotlarda karşılaşılan problemler de yine FDTD-metodunda

karşılaşılan problemlere benzer. Temel olarak fizik konusunda özel amaçlı ve yeterince güvenilir nümerik veri elde etmede kullanılan hibrit metotlar da vardır.

Hesaplama deneylerinin sonuçlarının işlenmesi ve bunların fiziksel anlamda bilgiye indirgenmeleri gerekir. Çeşitli rezonans ve anormal olayların özelliklerinin; kanun ve mekanizmalarının niteliksel analizi, modelleme problemlerine karşılık gelen çözüm metotları ile etkin ve güvenilir algoritmaları olmaksızın yapılamaz. Frekans-zaman gösterim tekniklerinin kullanılması halinde, birincil sinyali oluşturan bilginin farklı katkılardan ayrıştırılarak, karmaşık dağıtma karakteristiğine sahip yapıların analizi yapılabilir (Shestopalov ve ark. 1986, 1989, 1997).

1.4. Sonuçlar

Matematiksel modelleme ve hesaplama deneyleri, dalgaların rezonans saçılması alanında teorik ve uygulamalı araştırmaların gerçekleştirilmesi için en etkin ve güvenilir yoldur. Bu güne kadar frekans domenlerindeki elektrodinamik teorinin uygun matematiksel modellemesinin tüm anahtar sorunları (direkt ve ters problem çözüm metotları ve algoritmalarıyla) pratik olarak çözülmüş, sinüzoidal dalgalarla ilgili saçılma olaylarının fiziği geniş bir şekilde incelenmiştir. Şimdi önemli aşama ise, frekans domeninin çoğu olgunlaştırılmış matematiksel ve fiziksel sorularına cevaplar almaya ve zaman domeninde spektral teorinin oluşturulmasına gelmiştir. Günümüzde uygun başlangıç sınır değer problemlerinin nümerik analizinin etkin metotlarının oluşturulması problemi karşımıza çıkmaktadır. Bunların çözümünde; çeşitli analitik ve doğrudan nümerik metotların uzay-frekans gösterimlerini kullanan ve bir problemin doğrudan zaman domeninde çözümünü kullanan metotlar geliştirmeye imkan veren yeterli temel sonuçlar mevcuttur. Hangi metodun seçileceği, her bir somut problemin sergileyeceği özellikler ile belirlenir.

2. SONLU FARKLAR METODU İLE İLGİLİ HESAPLAMA UZAYININ SINIRLANMASI İÇİN TAM YUTUCU KOŞULLAR

Bu bölümde sinüzoidal olmayan dalgaların bir yansıtıcı ızgaraya (grating) herhangi bir şekilde çarpması olayı, sonlu farklar metodu kullanılarak incelenecektir. Problemin etkin çözümü için gerekli olan analiz bölgesi, matematiksel yollarla simüle edilen fiziksel prosesleri deforme etmeyen sanal sınırlarla (virtual boundary) çerçevenmiştir.

2.1. Giriş

Sınırsız Q bölgelerinde, sonlu farklar metoduyla sınır değer problemlerinin çözümü aşamasında ortaya çıkan esas problem; t gözleme zaman artışı sonunda elde edilecek alanın belirlenmesidir. Bu durum ise, $U(g,t)$ $g \in Q$ fonksiyonunun desteğinin (support) sabit açılımı ile ilgilidir. Şimdi, Q da herhangi bir yerde sanal bir L sınırını tespit etmek ve

$$M[U(g,t)]|_{g \in L} = 0, \quad t > 0 \quad (2.1)$$

koşuluna bir başlangıç sınır değer problemi ekleyerek analiz bölgesini sınırlamak mümkündür. Burada M , L üzerinde tanımlı integro-diferansiyel operatördür. Bir problemin bu şekilde düzenlenmesinde iki gereksinim yerine getirilmelidir:

(a) (2.1) koşulu, problemin ve problemin ayrık benzerinin doğruluk sınıfını değiştirmez,

(b) (2.1) koşulu, matematiksel yollarla simüle edilen fiziksel işlemleri deforme etmez.

Bunlardan (a) koşulu klasik yutucu sınır koşullarına uygun düşer, fakat (b) koşulu sadece L düzlemsel sınırına normal olarak gelen düzlemsel kompleks dalga durumlarını gerektirir. Diğer tüm durumlarda ise, L üzerine gelen $U(g,t)$ dalgası, sanal sınır tarafından kısmen yansıtılır ve dolayısıyla. $U(g,t)$ dalgasının simüle edilen serbest yayılma işleminde bozulma olur. Bu durumda da hesaplamalardaki

hataları analitik olarak belirlemek mümkün olmaz. Hata değerini; L sınırına yakın $U(g,t)$ alanının yapısı, L ile kaynaklar ve etkin saçıcıların bulunduğu bölge arasındaki mesafe, t gözleme zamanı, vb. gibi pek çok faktör etkiler.

Klasik sezgisel ABC'yi iyileştirmek için çok sayıda çalışma yapılmış olmakla birlikte bunlardan büyük bir kısmı, L sanal sınırının varlığından kaynaklanan sanal fiziksel etkilerin hafifletilmesi konusuna yönelmiştir. Bu çalışmalarda kural olarak yukarıda belirtilen (a) koşulu tamamen görmezlikten gelinmiştir. M diferansiyel operatörünün derecesinin artması pahasına L deki tek bir hata artışı, örneğin sonlu farklar hesaplama planının kararlılığının ihlaline, toplam hataların ise tahmin edilemez artışına sebep olabilir.

Problemin çözümü için burada önerilen akılcı bir yaklaşım, Maykov ve ark. (1986), Katz ve ark. (1991), Fang (1994) ve Berenger (1994) tarafından öne sürülen alternatif çözümlerle ilişkilendirilebilir. Yaklaşımın esası, aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır.

Bu yaklaşımın ilk adımında, $U(g,t)$ dalgasının serbest olarak yayıldığı bir ${}_L Q = Q \setminus \bar{Q}_L$ regüler bölgesi tahsis edilir. Böylece ${}_L Q$ bölgesi, kaynak ve saçıcıları içeren Q_L bölgesinden ayrılır.

İkinci adımda, ${}_L Q$ bölgesinde başlangıç değer probleminin $U(g,t)$ çözümü için katı ışıma koşulları belirlenir. Bu koşullar, $U(g,t)$ "giden" dalga çözümünün genel özelliğini yansıtır. Bunun sonucu olarak, ${}_L Q$ ve Q_L bölgelerini ayıran L sınırında tam ABC koşulunun kullanımı, başlangıç probleminde herhangi bir değişiklik yapmaz ve incelenen prosese ilave bir modelleme distorsiyonu getirmez ve ayrıca yukarıda verilen (a) ve (b) koşulları sağlar. M operatörü, ${}_L Q$ regüler bölgesinde serbest yayılan durağan olmayan $U(g,t)$ işaretinin evrimsel temelini (evolutionary basis) uzay-zaman dönüşümünü tanımlayan, transport operatörü tarafından belirlenir (Sirenko ve ark. 1999,2000). M operatörü, geometriye göre seçilen ${}_L Q$ bölgeleri için çeşitlidir. Bununla birlikte tüm durumlarda yapısal prosedür, hiperbolik denklemler teorisinde yaygın olarak kullanılan aynı teknikleri

içerir (Borisov 1996). Bilindiği gibi bu teknikler telgraf denklemlerinde eksik değişkenlerine ayırma, bir-boyutlu Klein-Gordon denklemlerinde integral transformasyonları, adi diferansiyel denklemler için yardımcı sınır problemlerinin çözümü ve ters integral transformasyonlarıdır.

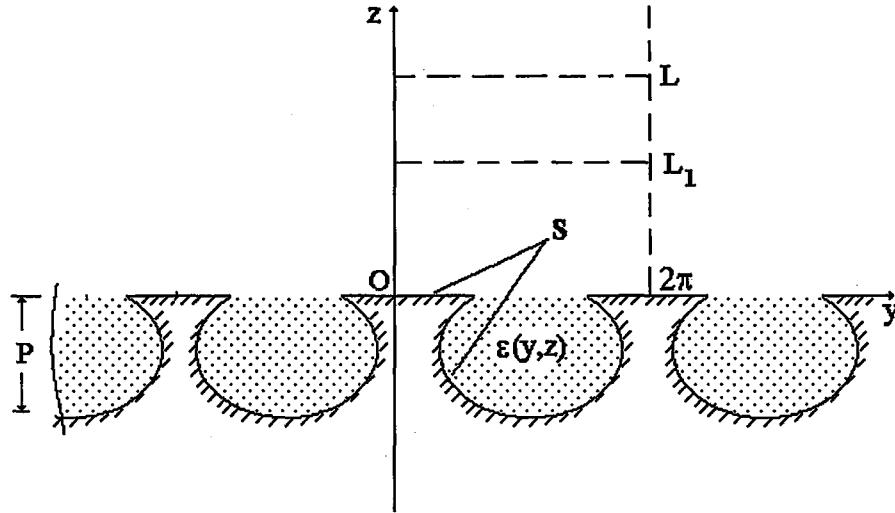
Son olarak üçüncü adımda, L koordinat sınırına uygulanan tam ışınma koşulları, standart sonlu farklar metodunun hesaplama planında doğru olarak içerilir. Analiz bölgesi (başlangıç sınır değer problemlerinin ayrıklaştırma bölgesi), Q_L bölgesine kadar daraltılır. Algoritmanın gerçekleştirilmesi, fiziksel olarak kapalı Q_L bölgelerine benzer şekilde, t gözleme zamanının tüm anları için çözüm aynı basitlik ve tam nümerik formda sonuçlanır.

2.2. Durağan Olmayan Dalgaların Alanındaki İzgara

E-polarizeli durağan olmayan dalgaların (bkz. Şekil 2.1) bir ızgara üzerinde saçılmasından meydana gelen elektromagnetik alanın incelenmesi,

$$\left. \begin{aligned} & \left[-\varepsilon(g) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] U(g,t) = F(g,t); \quad t > 0; \quad g = \{y, z\} \in Q \\ & U(g,t)|_{t=0} = \varphi(g); \quad \frac{\partial}{\partial t} U(g,t)|_{t=0} = \Psi(g); \\ & U(g,t)|_{g \in S} = 0; \quad U \left\{ \frac{\partial U}{\partial y} \right\} (2\pi, z, t) = e^{i\Phi 2\pi} \cdot U \left\{ \frac{\partial U}{\partial y} \right\} (0, z, t), \quad t > 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

başlangıç sınır değer probleminin çözümüne indirgenebilir. Q analiz bölgesi, $R = \{g = \{y, z\} : 0 < y < 2\pi\}$ ise aşağıdan S konturu tarafından sınırlı bir şerit parçasıdır. Q bölgesinde $F(g,t)$, $\varphi(g) = U^i(g,0)$, $\Psi(g) = \frac{\partial}{\partial t} U^i(g,t)|_{t=0}$ fonksiyonları sonlu olup $\varepsilon(g) - 1 = \text{Im } \varepsilon \equiv 0$, $\varepsilon(y, z > 0) \equiv 1$; $W_2^1(Q^T)$, $Q^T = Q \times (0, T)$, $T < \infty$ Sobolev uzayı, (2.2) probleminin çözülebilirliği hakkındaki teoremin gerekli koşulları sağlanmış kabul edilir (Ladyzhenskaya 1985). Burada F , φ ve Ψ uyartım kaynağı fonksiyonları; ε ızgaranın dolgu malzemesinin bağıl dielektrik permitivitesi; $U(y, z, t) = E_x$ ve $E_y = E_z = H_x \equiv 0$ dır. Manyetik alan şiddeti vektörünün sıfırdan



Şekil 2.1 Periyodik ızgara model problemin geometrisi.

farklı bileşenleri ise,

$$\frac{\partial}{\partial t} H_y = - \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial z} E_x; \quad \frac{\partial}{\partial t} H_z = \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial y} E_x \quad (2.3)$$

formülleriyle belirlenir.

$F(g,t) = 0$ olduğu varsayılınsın. $z \geq 0$ yansıma bölgesinde ızgara tarafından oluşturulan U alanını, $U(g,t) = U^i(g,t) + U^s(g,t)$ olarak yazalım. Burada;

$$U^i(g,t) = \sum_n v_n(z,t) \mu_n(y); \quad U^s(g,t) = \sum_n w_n(z,t) \mu_n(y) \quad (2.4)$$

$$\mu_n(y) = (2\pi)^{-1/2} e^{i\Phi_n y}, \quad \Phi_n = n + \Phi, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

sırasıyla gelen ve yansıyan durağan olmayan alanları tanımlayan fonksiyonlardır. $t = 0$ anında U^i dalgası henüz ızgaraya ulaşmadığı kabul edilirse, U^s dalgalarının $w(z,t) = \{w_n(z,t)\}_n$ evrimsel temelinin $w_n(z,t)$ elemanları için, (2.2) ve (2.4) ifadelerinden,

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Phi_n^2 \right] [w_n(z,t)] = 0, \quad z > 0, \quad t > 0; \quad (2.5)$$

$$w_n(z,0) = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} w_n(z,t) \right|_{t=0} = 0.$$

şeklindeki yeni problemle sonuçlanır.

(2.5) probleminde $z \geq 0$ yarı-ekseni üzerinde z 'ye göre Cos-Fourier transformasyonunun kullanımı, $\tilde{w}_n(\omega, t)$ görüntüleri için aşağıdaki Cauchy problemi formunun elde edilmesini sağlar;

$$D\left((\Phi_n^2 + \omega^2)^{1/2}\right)[\tilde{w}_n(\omega, t)] \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\Phi_n^2 + \omega^2)\right]\tilde{w}_n(\omega, t) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} w'_n(0, t) \quad (2.6)$$

$$\tilde{w}_n(\omega, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial}{\partial t} \tilde{w}_n(\omega, t)\right|_{t=0} = 0$$

Burada U^s dalgalarının, azalan z yönünde yayılan bileşen içermediği göz önünde tutulmuştur. Herhangi bir sonlu $t = T$ anında $z = \infty$ bölgesinde "ayrılan" alan bileşenleri, z 'nin yeterince büyük değerleri için sifıra eşittir. $D(\lambda)$ operatörünün $G(t; \lambda) = \chi(t)\lambda^{-1} \sin \lambda t$ temel çözümünün (2.6) denkleminin sağ tarafıyla konvolüsyonu;

$$\tilde{w}_n(\omega, t) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^t \sin\left[(\Phi_n^2 + \omega^2)^{1/2}(t-\tau)\right] (\Phi_n^2 + \omega^2)^{-1/2} w'_n(0, \tau) d\tau \quad (2.7)$$

eşitliğini yazmaya imkan verir (Vladimirov 1971). (2.7) eşitliğinde $w_n(z, t)$ için orijinallerine geçişten sonra,

$$w_n(z, t) = -\int_0^t J_0\left[\Phi_n((t-\tau)^2 - z^2)^{1/2}\right] \chi[(t-\tau) - z] w'_n(0, \tau) d\tau, \quad z \geq 0. \quad (2.8)$$

sonucu elde edilir. (2.8) ile verilen sonucun;

$$w_n(z, t) = -\int_0^t J_0\left[\Phi_n((t-\tau)^2 - (z-\omega)^2)^{1/2}\right] \chi[(t-\tau) - (z-\omega)] w'_n(\omega, \tau) d\tau, \quad (2.9)$$

$$z \geq \omega \geq 0$$

formunda da sunulabileceği açıktır. Burada,

$$w'_n(\omega, t) = \left.\frac{\partial}{\partial z} w_n(z, t)\right|_{z=\omega} = \int_0^{2\pi} \left.\frac{\partial}{\partial z} U^s(y, z, t)\right|_{z=\omega} \mu_n^*(y) dy$$

dir ve Q da herhangi bir yerde sanal bir $z = L > 0$ koordinat sınırını tespit ederek ve ayrıca (2.4) avantaj gösterimini dikkate alarak, (2.9) denkleminde yapılacak basit bir transformasyondan sonra;

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) U^s(y, z, t) \Big|_{z=L} = G_1(y, t) \quad (2.10)$$

$$U^s(y, L, t) = G_2(y, t) \quad (2.11)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada,

$$G_1(y, t) = \sum_n \left\{ \int_0^t J_1[\Phi_n(t-\tau)] w'_n(L, \tau) d\tau \right\} \mu_n(y) \Phi_n \quad (2.12)$$

ve

$$G_2(y, t) = - \sum_n \left\{ \int_0^{t-(L-L_1)} J_0 \left[\Phi_n \left((t-\tau)^2 - (L-L_1)^2 \right)^{1/2} \right] w'_n(L_1, \tau) d\tau \right\} \mu_n(y), \quad (2.13)$$

$$0 \leq L_1 < L$$

dir.

Problemin dizi ayrıklaştırmasını amaçlayarak, (2.10) ve (2.11) denklemlerinin simüle edilen prostedeki dalgaların özellikle açık yayılma bölgesini sınırlayan koşullar olarak kullanımının sebeplerine açıklık getirmeye çalışalım. Bu bağlamda ilk vurgulanacak nokta (2.2) ile verilen ifadelerin; (2.10) koşullu (2.2) ve (2.11) koşullu (2.2) ile eşdeğer olması durumudur. Performansın yegane çözülebilirliklerini garanti eden gereksinimler (doğruluk sınıfları) bu durumda birbirleriyle uyum içindedir. İkincisi, bu denklemler tamdır ve bunun sonucu olarak başlangıç değer problemine bağlantıları hesaplama hatasını artırmaz ve simüle edilen proses deforme olmaz. Üçüncüsü, (2.10) ve (2.11) eşitliklerinin sol taraflarında kısımlarda, G_1 ve G_2 ifadelerinde yer alan $U^s(g, \tau)$ fonksiyonlarının “gelecek” veya “ani” etkileri mümkün değildir. Bundan dolayı, (2.10) ve (2.11) de G_1 ve G_2 fonksiyonlarının zaman katmanlarındaki hareketinde τ nin daha küçük t anlarına ait önceki zaman katmanlarında belirlendiğini söyleyebiliriz. Dördüncüsü, (2.10) ve (2.11) yutucu sınır koşulları standart sonlu farklar hesaplama planında doğru olarak içerilir. Yani planın kararlılığı bu koşullarla bozulmaz ve dolayısıyla pratik olarak algoritmanın nümerik gerçekleşmesi prosedürü zorlaştırılmaz (Ladyzhenskaya 1985).

İncelenen problemin sonlu farklar benzerinin (analogue) elemanter değişik biçimi; $t_m = l m$ ($m = 1, 2, \dots, M = T/l$) zaman katmanlarında, uzay ağının (mesh)

$$y_j = h(j-1) \quad (h = 2\pi/(J-1), \quad j = 1, 2, \dots, J),$$

$$z_k = -P + h(k-1) \quad (h = (P+L)/(K-1), \quad k = 1, 2, \dots, K)$$

düğümlelerinde;

$$U(j, k, m+1) = 2U(j, k, m) - U(j, k, m-1) + \frac{l^2}{\varepsilon(j, k)h^2} [U(j, k+1, m) + U(j, k-1, m) + U(j+1, k, m) + U(j-1, k, m) - 4U(j, k, m)] \quad (2.14)$$

fark denklemini sağlayan $U(j, k, m)$ ağ fonksiyonunun tanımından oluşur.

(2.10) koşulu doğru ise, (2.14) denklemine;

$$U(j, k, 0) = \varphi(j, k)$$

ve

$$U(j, k, 1) = \varphi(j, k) + l\Psi(j, k) + \frac{l^2}{2h^2} [\varphi(j+1, k) + \varphi(j, k+1) + \varphi(j-1, k) + \varphi(j, k-1) - 4\varphi(j, k)] \quad (2.15)$$

ve

$$U(1, k, m) = e^{-i2\pi\Phi} U(j, k, m) \quad (2.16)$$

ve ayrıca,

$$\frac{3(h+l)}{2hl} U^s(j, K, m+1) - 2 \left[\frac{U^s(j, K, m)}{l} + \frac{U^s(j, K-1, m+1)}{h} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{U^s(j, K, m-1)}{l} + \frac{U^s(j, K-2, m+1)}{h} \right] = G_1(j, m=1) \quad (2.17)$$

ifadelerini, (2.11) koşulu durumunda ise;

$$U^s(j, K, m+1) = G_2(j, m+1) \quad (2.18)$$

ifadesini eklemek gerekir.

(2.14) denklemini, problemin dalga denklemini yaklaşımını ifade eder. (2.15) ve (2.16) denklemleri ise sırasıyla (2.14) ifadesinin başlangıç koşulu ve Floquet kanalının kuasi-periyodik koşuludur. (2.17) ve (2.18) denklemleri, $z=L$ sanal sınırında sırasıyla (2.10) ve (2.11) yutucu koşullarının yaklaşımıdır. Her yerdeki yaklaşım hatası $O(h^2 + l^2)$ civarındadır. (2.14)-(2.18) de, $U(y_j, z_k, t_m)$, $U^i(y_j, z_k, t_m)$, $U^s(y_j, z_k, t_m)$, $\varepsilon(y_j, z_k)$, $G_1(y_j, t_m)$ ve $G_2(y_j, t_m)$ fonksiyonlarının ağ yaklaşımları için standart atamalar, $U(j, k, m)$ ve benzeri fonksiyonlar için kullanılır. $Q_L = \{g \in Q : z < L\}$ bölgesinin S taban sınırı, $\{\varepsilon^{-1}(j, k)\}_{j,k}$ değerler matrisi ile

ayarlanır; eğer z_j, y_k düğümü S sınırının üzerine veya altına yaklaşırsa bu durumda $\varepsilon^{-1}(j, k)$ değeri sıfıra eşit alınır. Böyle bir yaklaşımda, $U(g, t) = 0$ ($g \in S$) koşulunun (2.14) denklemi çerçevesinde yaklaşım yapacağı açıktır. (2.14)-(2.17) veya (2.14)-(2.16) ve (2.18) gibi iki muhtemel denklem grubunun yegane çözümünün $U(j, k, m)$ olduğu açıktır. Bu yüzden hesaplama, herhangi bir matris operatörlerinin tersini almayı gerektirmez; gerçekleştirilen üç boyutlu algoritma planı da olabildiğince açıktır.

Sonlu fark planlarının (finite-difference schemes) teorik analizinin önemli bir aşaması, kararlılık probleminin çözümüdür. $U(j, k, m)$ yaklaşık çözümleri için h ve l uzunluklarıyla ilgili sınırlama düzgün ayarlanırsa (bkz. Bölüm 1 ve Ladyzhenskaya (1985)), herhangi bir normda plan kararlı olur. Kararlılıktan $\{U(j, k, m)\}_{h,l}$ dizisinin dahili yakınsaması elde edilir ve U fonksiyonunu bu şekilde sınırlamanın, durağan olmayan başlangıç problemin çözümü olduğu görülür. Fark denkleminin ise bu probleme yaklaşması gereklidir. Söz konusu yaklaşım; (2.14)-(2.17) veya (2.14)-(2.16) ve (2.18) ifadelerine göre yerine getirilir. İncelenen planın kararlılığı için, başlangıç probleminin doğru olarak tanımlandığı güç uzaylarının incelenmesinde yarar vardır. Güç eşitsizliklerinin fark benzerleri konusu Ladyzhenskaya (1985) tarafından, ikinci dereceden hiperbolik denklem için Dirichlet probleminin $U(j, k, m)$ çözümlerinin, $W_2^1(Q_L^T)$ normunda homojen sınırlı-sürekli \tilde{U} polilineer karşılığı olduğu ispatlanır. Diğer klasik sınır koşulları altında başka benzer sınır değer problemlerinin çözümü için esaslı değişiklik olmaksızın sağlama metodu uygulanabilir. Bu gerçeklere dayanarak,

$$\eta(2/\xi)^{1/2}lh^{-1} < 1, \quad \xi \leq \varepsilon^{-1}(g) \leq \eta, \quad g \in Q_L$$

koşulu yardımıyla $h, l \rightarrow 0$ de $\{\tilde{U}\}_{h,l}$ dizisinin, $W_2^1(Q_L^T)$ uzayında zayıf ve $L_2(Q_L^T)$ de güçlü bir şekilde gerekli $U(g, t)$ çözümüne yakınsadığı sonucu elde edilir.

Hesaplama planının uygulanmasında bazı önemli detaylar üzerinde durulmalıdır. Birincisi, (2.11) yutucu koşulu durumunda L_1 , h ve l boyutlarını birbirlerine göre öyle ayarlamak gerekir ki, $z = L_1$ 'de ($L_1 = z_N$, $N < K$) ilgili uzaysal

ağ üzerine hassas bir şekilde varılabilsin ve $L-L_1$ aralığı l tam sayı zaman adımlarını içersin ($(L-L_1)l = p$, p tamsayı olmalıdır). Bu durumda;

$$G_2(j, m+1) = -\frac{l}{2} D[U^s(j, N, m+1-p)] - l \sum_n \mu_n(j) \sum_{r=1}^{m-p} J_{0,n}(K-N, m+1-r) \times D[w_n(N, r)] \quad (2.19)$$

ifadesi geçerlidir. Bu ifadede, (2.13) den geçiş yaparken yaklaşımın kabul edilen doğruluk derecesini bozmayan, $D[f(N)]$ operatörü ve ilgili fonksiyonlarının ağ yaklaşımlarına ait atamaları takip eden aşağıdaki trapezler metodunun kare-kuramı formülleri kullanılır:

$$J_\xi \left[\Phi_n \left(t_m^2 - z_k^2 \right)^{1/2} \right] = J_{\xi,n}(k, m); \quad w_n(z_k, t_m) = w_n(k, m); \quad \mu_n(y_j) = \mu_n(j);$$

$$D[f(N)] = [3f(N) - 4f(N-1) + f(N-2)]/2h.$$

Benzer şekilde, aynı atamalarla,

$$G_1(j, m+1) = l \sum_n \Phi_n \mu_n(j) \sum_{r=1}^m J_{1,n}(1, m+1-r) D[w_n(K, r)] \quad (2.20)$$

elde edilir.

$U(1, k, m+1)$ ve $U(J, k, m+1)$ değerlerinin hesaplanması için, metodun hesaplama uzayı dışındaki düğümlerde $U(0, k, m)$ ve $U(J+1, k, m)$ değerlerinin bilinmesi gerekir (bkz. denklem (2.14)). Standart bir ızgaradaki geri dönme, (2.16) kuasi-periyodik koşullarının;

$$U(0, k, m) = U(J-1, k, m) e^{-i2\pi\Phi} \quad \text{ve} \quad U(J+1, k, m) = U(2, k, m) e^{i2\pi\Phi}$$

formunda kullanımıyla elde edilir.

$$U^s(y, L, t) = -\sum_n \left\{ \int_0^t J_0[\Phi_n(t-\tau)] w'_n(L, \tau) d\tau \right\} \mu_n(y) \quad (2.21)$$

denkleminin ayrıklaştırılması, (2.9) ifadesi kullanılmak suretiyle (2.10) ve (2.11) ile verilen sonuçlara benzer şekilde elde edilir ve

$$U^s(j, K, m+1) + \frac{l}{2} D[U^s(j, K, m+1)] = G_3(j, m+1) \quad (2.22)$$

formunda sonuçlanır. Burada,

$$G_3(j, m+1) = -l \sum_n \mu_n(j) \sum_{r=1}^m J_{0,n}(1, m+1-r) D[w_n(K, r)]$$

dir.

Nitelik olarak (2.21) ifadesi, (2.10) ve (2.11) ifadelerine göre sadece sol taraftaki $U^s(y, L, t)$ değerlerinin bulunduğu sınır üzerindeki w_n fonksiyonlarının ani etkilenmesiyle farklılık gösterir. Bu durum, $z=L$ sanal sınırı üzerinde analiz bölgesinin kapallılığında (2.21) in kullanımına yönelmeyi engeller, ancak söz konusu engelleme (2.22) de tamamen giderilir. (2.22) koşulunu kullanarak, sonlu farklar metodunun tam planına simüle edilen işlemi deforme etmeden, (2.17), (2.18) koşullarını doğru olarak eklemek mümkündür.

Özel önemi olan bir durumu burada açıkça belirtmemiz gerekir: $\{D[w_n(k, r)]\}_{n,r}$ boyutlu bir dosyanın depolanması için gerekli bellek hacmi konusunda (2.10), (2.11) ve (2.21) koşullarının ((2.17)-(2.20) ve (2.22) gösterimleri kullanılarak) ileri doğru gerçekleştirilmesi dikkat gerektirir. G_1 , G_2 ve G_3 değerlerinin oluşumuna katılan tüm elemanların her bir adımında ve her bir zaman sürecinde işlem dosyanın boyutları artar (lokal olmama sonucu). Dosya boyutlarını azaltmak için, bu problemin (zaman koşullarında lokale indirgeme) çeşitli muhtemel çözümler vardır. Bu çözümlerinin tümü örneğin;

$$J_0(x+y) = (2 - \delta_m^0) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m J_m(x) J_m(y),$$

$$J_0(x+y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{i(x+y)\cos\varphi} d\varphi,$$

denklemleri yardımıyla Bessel fonksiyonlarının analitik faktörizasyonuna dayanır.

Burada δ_m^n , Kronoker sembolüdür. Böylece, $J_0(\Phi_n(t-\tau)) = \sum_p a_p(\Phi_n \tau) b_p(\Phi_n t)$ gibi

dekompozisyonun kullanımında (2.21) ayrıklaştırma koşulunun (2.22) eşdeğeri,

$$G_3(j, m+1) = -\sum_n \mu_n(j) \sum_p b_{p,n}(m+1) c_{p,n}(m+1)$$

şeklinde G_3 gösterimiyle sonuçlanır. Burada,

$$b_{p,n}(m+1) = b_p(\Phi_n t_{m+1});$$

$$c_{p,n}(m+1) = la_{p,n}(m)D[w_n(K,m)] + c_{p,n}(m), \quad c_{p,n}(0) = 0;$$

$$a_{p,n}(m) = a_p(\Phi_n t_m)$$

dir.

Bessel fonksiyonlarının yaklaşımında p serisinin elemanlarının en küçük serisini veren böyle bir ayrıklaştırma doğru yapılırsa, hesabın verimliliği artar. Bu seçim, problemin parametrelerinin çeşitli değerlerinde ve t gözleme zamanı değişiminin çeşitli aralıklarında farklı olabilir.

$G_1(y,t)$ sıfır yapılırsa, bu durumda simüle edilen düzlemsel kompleks dalganın geliş açısı üzerinde birinci dereceden yaklaşımı sağlayan elemanter yansız yutucu sınır koşuluyla uyuyacaktır (Engquist ve ark. 1977, Mur 1981). Bu yüzden, $G_1(y,t)$ fonksiyonu hesaplama planlarında uygun ABC kullanan yaklaşımların doğruluk parametresinin tahmininde kullanılabilir. (2.10), (2.11) ile (2.21) ve bunların kombinasyonları gibi denklemlerin basit dönüşümleri, bilinen başka ABC'ler için de benzer parametrelerin tahmin edilmesine imkan verir.

2.3. Tam Yutucu Sınır Koşullarının Nümerik Testi

Nümerik testler, sonuçların reel hatalarını değerlendirmeye imkan veren plan çerçevesinde uygulanmış ve tam sınır koşulları ile irtibatlı model problemlerin çözümleri, klasik sezgisel ABC kullanımıyla elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Nümerik deneylerin ilkinde, (2.1) probleminde tam yutucu sınır koşulu ile klasik yutucu sınır koşulunun kullanılmasıyla oluşan yerel (ağın farklı düğümlerinde) ve global (Q_L bölgesindeki tüm ağ sınırları içinde) hatalar belirlenmiştir. Şekil 2.2 de, $\varepsilon(g) \equiv 1$ iken E-polarizeli $F(g,t)$, $\varphi(g)$ ve $\Psi(g)$ kaynak fonksiyonlarına sahip ($t \in (0,T)$ zamanının incelenen tüm anlarında bunların destekleri Q_L 'de bulunan) Q_L ve $Q_P \supset Q_L$ bölgelerinde, (2.2) ile belirlenen başlangıç sınır değer problemi çözümünde, eşzamanlı olarak kullanılan sonlu farklar metodu algoritmasının sonuçları görülmektedir. Q_L bölgesinde $z=L$ sınırında, test edilen sınır koşulları

kullanılmış; ilk problem çözümü U_L ile belirtilmiştir. İkinci problemde Q_P bölgesinin $z=P$ sınırında $U(g,t)$ alanı tüm $t \in (0,T)$ 'ler için sıfır olacak şekilde alınmıştır (U_P , ikinci problemde (2.2) probleminin ayrıklaştırılmasıyla oluşan hatadır).

L sınırı üzerinde yutucu sınır koşullarının kullanımıyla oluşan herhangi bir alan bozulması, Q_L ve Q_P bölgelerinde ilgili düğümlerdeki U_L ve U_P çözüm değerlerindeki farkla sonuçlanır. Bu farkların kıyaslanması için,

$$D^{abs}(j,k,m) = |U_L(j,k,m)| - |U_P(j,k,m)|, \quad R^{abs}(j,k,m) = \frac{D^{abs}(j,k,m)}{|U_P(j,k,m)|}$$

ve

$$D^{arg}(j,k,m) = \arg U_L(j,k,m) - \arg U_P(j,k,m), \quad R^{arg}(j,k,m) = \frac{D^{arg}(j,k,m)}{\arg U_P(j,k,m)}$$

olan $D(j,k,m)$ ve $R(j,k,m)$ değerleri, her bir m zaman adımında Q_L bölgesine ait tüm j ve k 'lar için belirlenir. $D(j,k,m)$ ve $R(j,k,m)$ değerleri sırasıyla $z=L$ sanal sınırının kullanılmasıyla oluşan, mutlak ve bağıl lokal hesaplama hatalarını verir.

$$D(m) = \frac{1}{N} \sum_{j,k} |D^{abs}(j,k,m)| \quad \text{ve} \quad R(m) = \frac{1}{N} \sum_{j,k} |R^{abs}(j,k,m)|$$

değerleri Q_L bölgesinde tüm ağ sınırları içindeki m zaman adımındaki ortalama global hatayı belirler (N , toplam ağ düğümü sayısıdır).

Nümerik deneylerde, önerilen tam sınır koşulları;

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right) U(g,t)|_{z=L} = 0, \quad \text{1. dereceden}$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial z \partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) U(g,t)|_{z=L} = 0 \quad \text{2. dereceden}$$

ve

$$\left(-\frac{\partial^3}{\partial z \partial t^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial z} - \frac{\partial^3}{\partial t^3} + \frac{3}{4} \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial t} \right) U(g,t)|_{z=L} = 0 \quad \text{4. dereceden}$$

klasik ABC yaklaşımları kullanılarak alınan sonuçlarla kıyaslanmıştır (Engquist ve ark. 1977). Uyarım koşulları, $U(g,t)$ probleminin analitik çözüm sonuçlarının

tümünü karşılaştırmaya ve $z = L$ sınırı üzerine gelen alandaki değişiklikleri görmeye imkan verir.

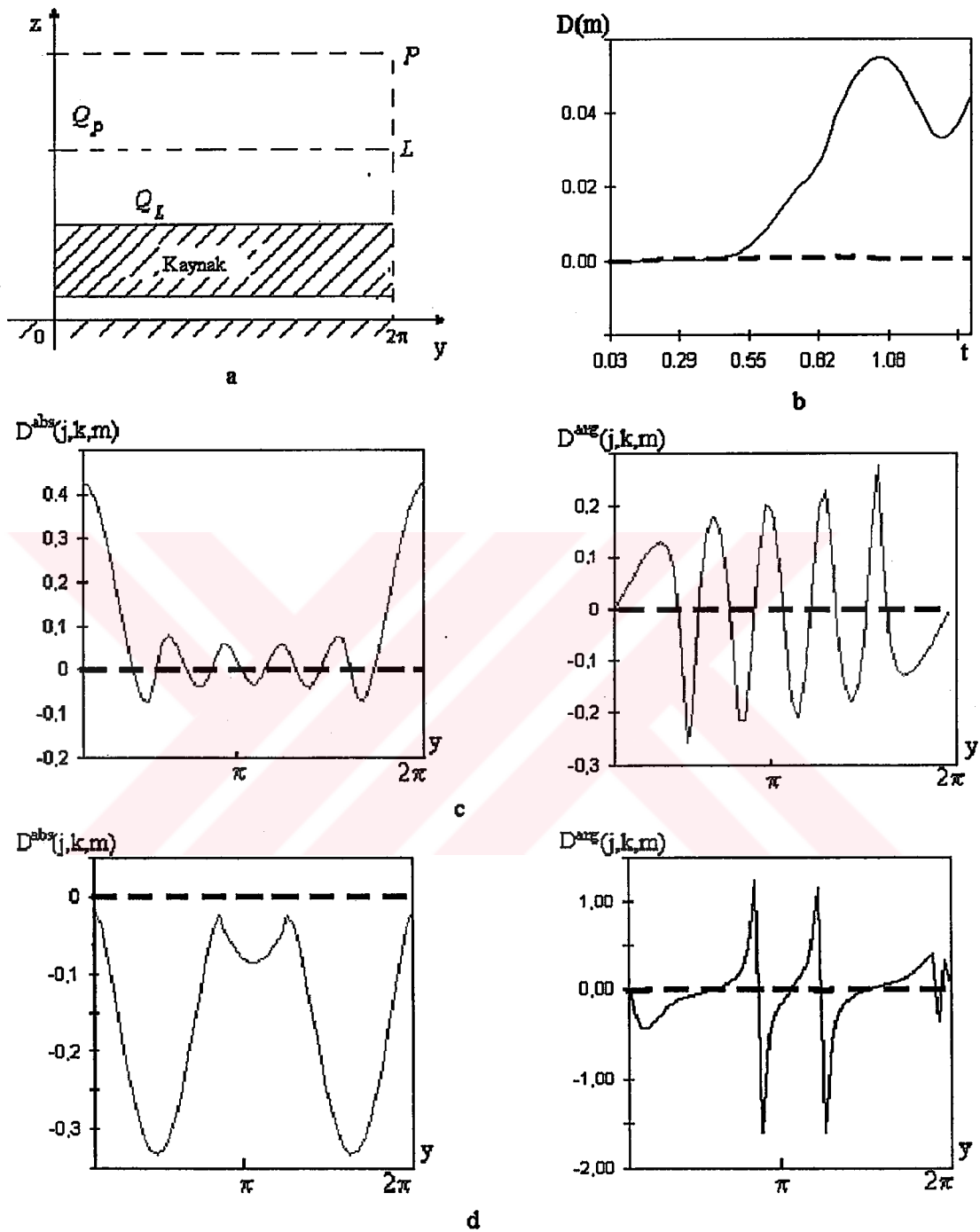
Nümerik deneylerde değişimlere karşı klasik ABC'ler daha duyarlı iken, tam sınır koşullarının uygulanması durumunda ortaya çıkan hatalar, sonlu farklar planının gerçek doğruluk sınırları içinde kalır.

Şekil 2.2'de ikinci dereceden yaklaşımlı klasik ABC uygulanmasıyla (sürekli çizgiler) ve (2.10) tam yutucu koşulu uygulanmasıyla (kesikli çizgiler) oluşan genlik ve fazdaki global ve lokal hatalar görülmektedir. Uzay değişkeninde ayrıklaştırma adımı $h = h_1 = 6.1359 \cdot 10^{-3}$, zamanda ayrıklaştırma adımı $l = l_1 = 8.7656 \cdot 10^{-4}$; $\varphi(g) = F(g, t) \equiv 0$; $\psi(g) = \sum_{n=0}^N \psi_n(z) e^{i\Phi_n y}$, $\Phi = 0.3$, $N=5$, $z \in [0.1, 0.3]$ de $\psi_n(z) = 10$ ve $z \notin [0.1, 0.3]$ de $\psi_n(z) = 0$ olarak alınmış olup; lokal hata $z = L = 0.4$ çizgisi üzerindeki düğümlerde hesaplanmıştır.

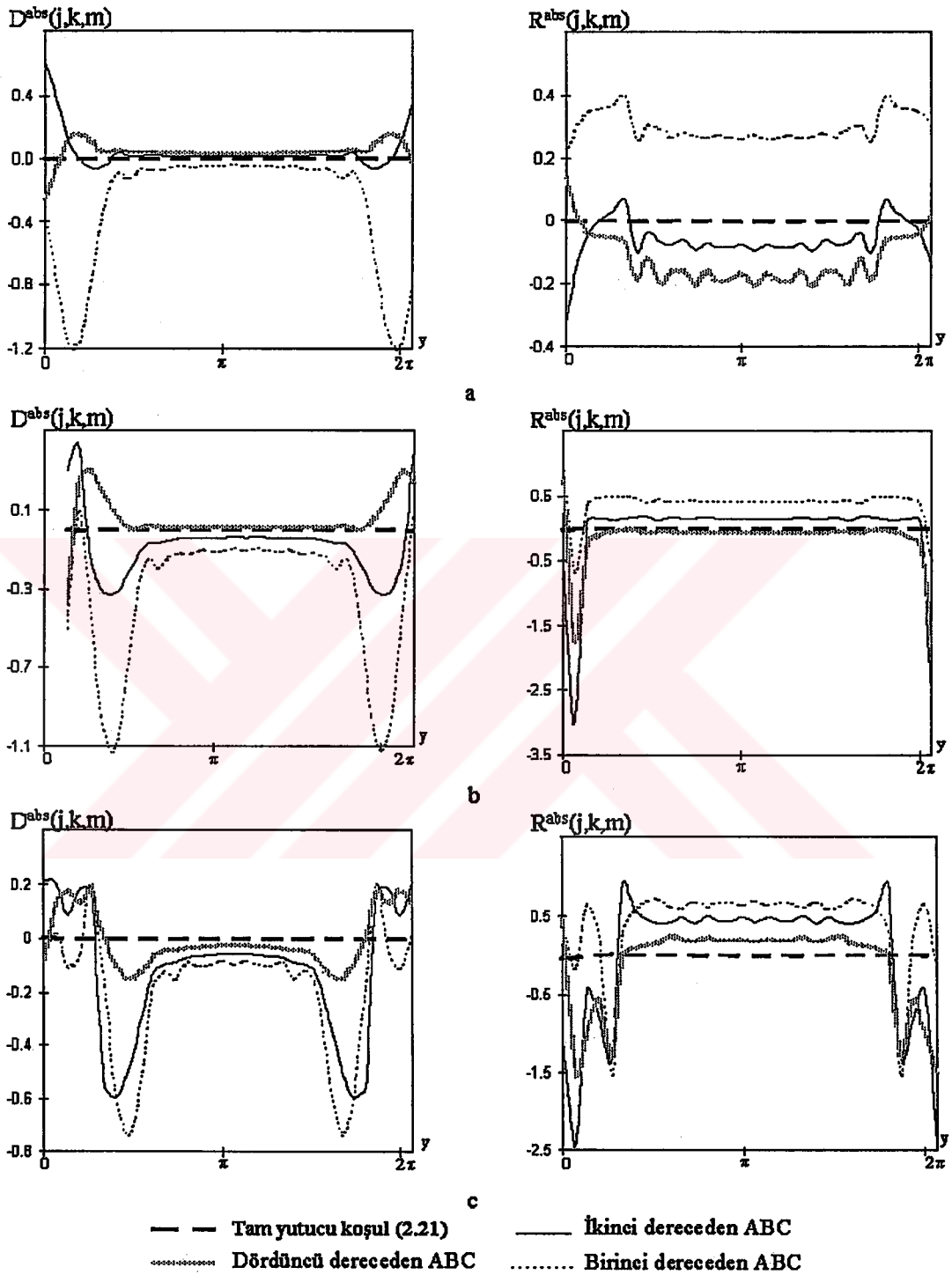
Şekil 2.3'de, t gözleme zamanının farklı anlarında (2.21) tam yutucu koşulu ile birinci, ikinci ve dördüncü dereceden klasik ABC yaklaşımları testinin mukayeseli sonuçları verilmiştir. Hesaplama deneylerinde sadece N parametresi değiştirilmiştir ve buradaki değeri 10'dur. Artan t ile Q_L bölgesindeki $U(g, t)$ alan şiddetinin hızlı düşmesi (ani çalışan kaynağın etkisi) deney sonuçlarına bir dereceye kadar etki edebilir.

Şekil 2.4'te gösterilen global ve lokal hata değerleri, (2.2) probleminin çözümünde $\varphi(g) = \psi(g) \equiv 0$ ve $F(g, t) = e^{-i\kappa t} \sum_{n=0}^{11} \psi_n(z) e^{i\Phi_n y}$, $\kappa = 0.5$ (sabit çalışan kaynak) kullanılmasıyla elde edilmiştir.

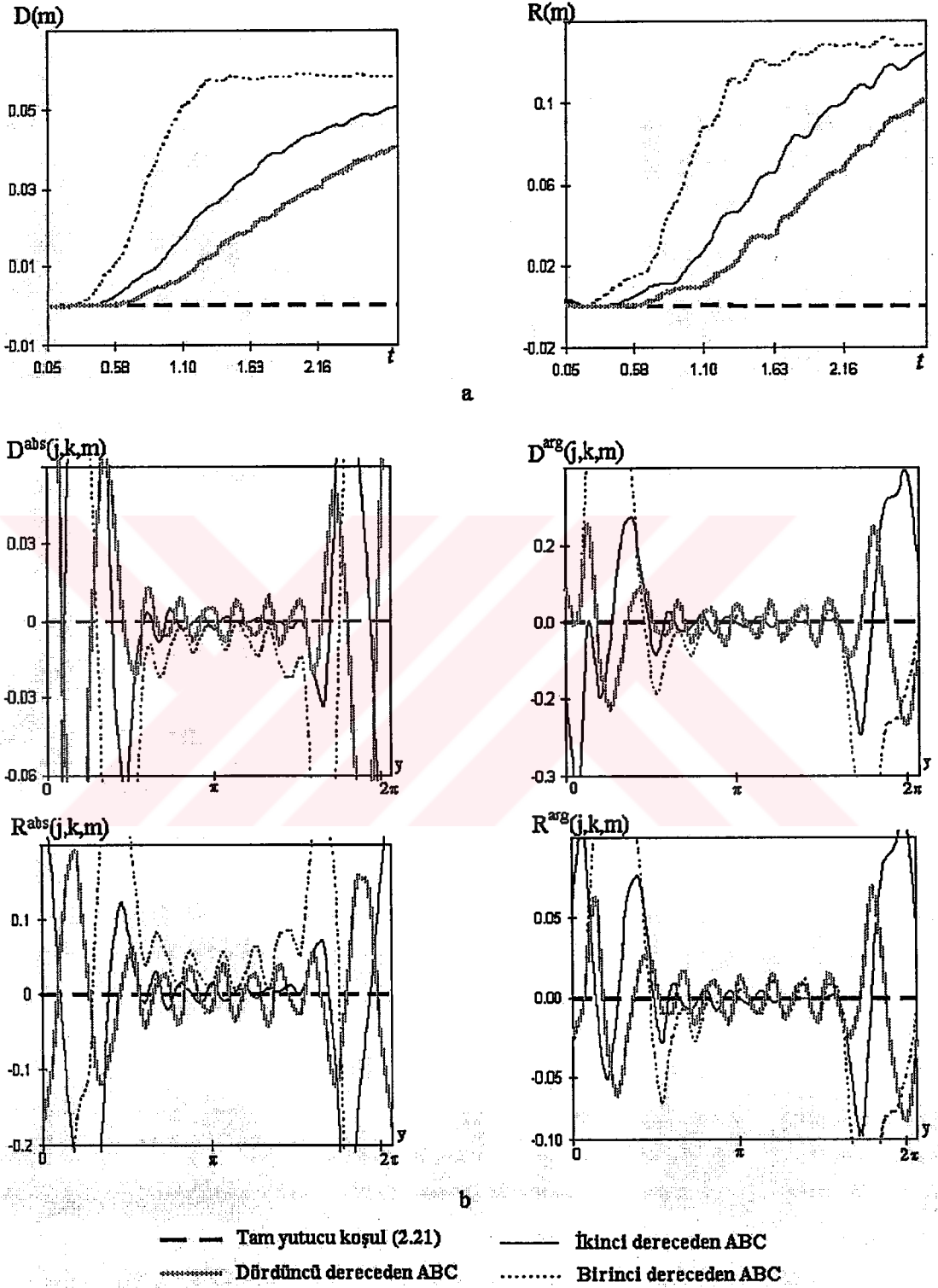
Şekil 2.4'de rapor edilen sonuçlar detaylı yorum gerektirmeyecek kadar açıktır. Tam yutucu koşulların tümü, klasik olmayan (sınırsız) bölgede başlangıç sınır değer probleminin ayrıklaştırılmasında hesap uzayının sınırlanması probleminin etkin bir şekilde çözümünü verir. Tam yutucu sınır koşullarının kullanımı matematiksel yollarla simüle edilen fiziksel işlemleri deforme etmez. Hesaplama



Şekil 2.2. İkinci dereceden ABC yaklaşımının kullanılmasıyla (sürekli çizgiler) ve (2.10) tam yutucu koşulunun kullanılmasıyla (kesikli çizgiler) oluşan global (b) ve lokal (c,d) hatalar[c] $t=0.6$, d) $t=1.4$]. Test probleminin geometrisi (a) da verilmektedir.



Şekil 2.3 Farklı tiplerdeki yutucu sınır koşullarının kullanımıyla oluşan $z=L=0.4$ sınır noktalarındaki yerel hatalar [a) $t=0.7$; b) $t=0.9$; c) $t=1.4$].



Şekil 2.4 Farklı tiplerdeki yutucu sınır koşullarının kullanımıyla oluşan global (a) ve lokal (b) hatalar [$t=1.4$].

hataları, sonlu farklar planının uygun seçimiyle belirli bir düzeyde kalarak daha fazla artış sergilemezler. Problem çözümünün kararlı hale gelmesiyle, klasik ABC yaklaşımı ile bağlantılı hatanın azalma eğilimi yanıtıcı olabilir. Herhangi bir rezonans durumunda sanal sınırların kullanımıyla oluşan herhangi sanal bir etki güçlenerek artacaktır.

Bir ızgaraya gelen düzlemsel E-polarizeli $\tilde{U}^i(g, \kappa) = e^{i(\Phi \cdot y - \Gamma_0 \cdot z)}$ dalgası (Şekil 2.1), yapının yansıma bölgesinde;

$$\tilde{U}^s(g, \kappa) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i(\Phi_n \cdot y + \Gamma_n \cdot z)}, \quad z \geq 0 \quad (2.23)$$

ikincil monokromatik alanını üretir (Shestopalov ve ark. 1989). Burada $\Gamma_n = (\kappa^2 - \Phi_n^2)^{1/2}$, $\text{Re } \Gamma_n \geq 0$ ve $\text{Im } \Gamma_n \geq 0$ dir ve κ reel frekans parametresi olup kullanılan boyutsuz uzay-zaman koordinatlarında zamana bağımlılığı $e^{-i\kappa t}$ çarpanıyla belirlenir. $\{a_n\}$ kompleks genlikleri, ızgaranın geometrik ve malzeme parametrelerinin Φ, κ kompleks fonksiyonlarıdır. Yeni tam ABC'li sonlu farklar metodu algoritmasının testi için kullanılan tam nümerik değerleri, eliptik sınır değer probleminin analitik regülerizasyon metoduyla çözümünün bir sonucu olarak elde edilmiştir (Shestopalov ve ark.1989, 1997).

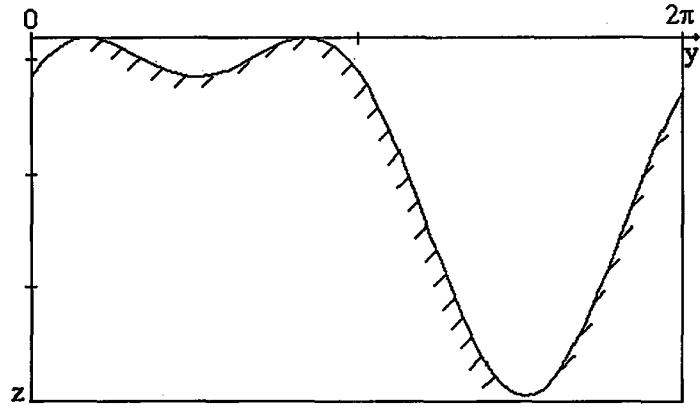
Nümerik deneyler, aşağıdaki plan çerçevesinde oluşturulmuştur. Bir ızgarayı uyaran durağan-olmayan $U^i(g, t)$ alanı (bkz. (2.4) formülü ve Şekil 2.1),

$$\tilde{U}^i(g, \kappa)A(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} U^i(g, t) e^{i\kappa t} dt, \quad A = \frac{i}{\Gamma_0} \int_b^c e^{i\Gamma_0 \omega} d\omega$$

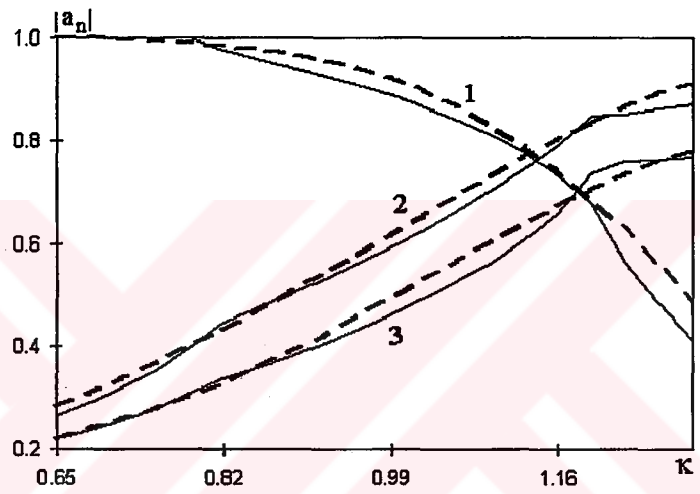
olduğundan,

$$U^i(g, t) = e^{i\Phi y} \int_b^c J_0[\Phi(t^2 - (z - \omega)^2)^{1/2}] \chi[t - |z - \omega|] d\omega, \quad L_1 < b < c, \quad z < b \quad (2.24)$$

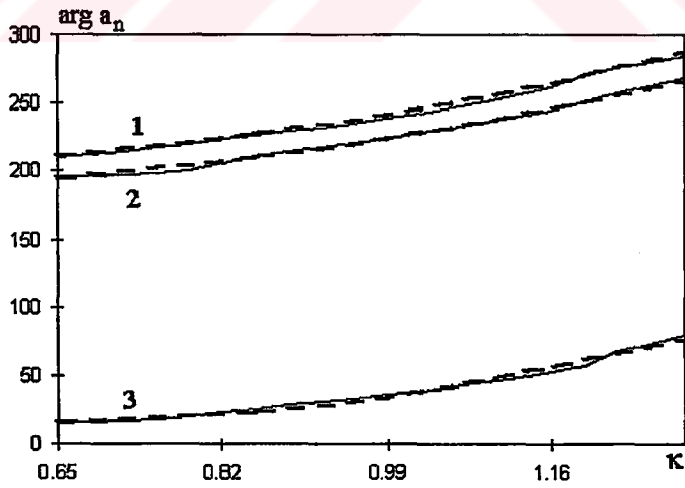
olarak elde edilir. Izgara sebebiyle oluşan durağan $\tilde{U}^s(g, \kappa)$ alanı ile durağan-olmayan $U^s(g, t)$ alanı aynı integral transformasyonu ile ilişkilendirilebilir. Bu çalışmada zaman domeninde elde edilen sonuçların frekans domenine dönüştürülmesinde ve uygun $\{\tilde{a}_n(\kappa)\}$ değerlerinin hesaplanmasında, (2.24) benzeri bir denklem de kullanılmıştır.



a



b



c

Şekil 2.5 Test probleminin geometrisi (a), doğrudan (sürekli çizgiler) ve zaman domeninden geçişle elde edilen (kesikli çizgiler) genlik-frekans karakteristiklerinin karşılaştırma sonuçları (b,c). Burada 1: $n=0$, 2: $n=-1$ ve 3: $n=1$ değeri içindir.

$\{a_n(\kappa)\}$ kompleks değerlerinin frekans bağımlılıkları (bir ızgaranın üç ana kompleks uzaysal harmoniğinin genlik modülleri ve fazları) Şekil 2.5'te sunulmuştur ($n = 0, \pm 1$, sürekli çizgiler). Örnek geometrik yapı, Şekil 2.5a'da temsil edilmiştir.

Şekil 2.5'deki çizimlerde kesikli çizgilerin gösterdiği $\{\tilde{a}_n(\kappa)\}$ bağımlılıkları, $z = 0.4$ sanal sınırı üzerinde (2.10) sınır koşullu sonlu farklar metodu algoritmasının gerçekleşmesinden sonra, zaman domeninden geçişle elde edilmiştir. Şekil 2.5a'daki örnek yapının S profili $z = 1.4(\sin y + \cos^2 y - 1.25)$, $\varepsilon(g) \equiv 1$, $\Phi = 0.2$ fonksiyonlarıyla tanımlanır. Uzay değişkeninin ayrıklaştırma adımı $h = h_1/2$, zamanda ayrıklaştırma adımı $l = l_1/2$ ve (2.24) fonksiyonunun hesaplanmasında dikkate alınan zaman katmanları sayısı $M = 5705$ 'dir. Doğrudan hesaplanan sonuçlar ile zaman domeninden geçişle elde edilen sonuçların uyum içinde olduğu açıktır. (2.24) transformasyonunda $t = T$ üst sınırının artırılması ve l ile h değerlerinin azaltılmasıyla hesaplamalardaki doğruluk payı artacaktır.

2.4. Sonuçlar

Bu bölümdeki hesaplamalardan elde edilen sonuçlar, standart sonlu farklar metodunun hesaplama uzayının doğru sınırlamasında, (2.1) gibi sınır koşullarıyla ilgili (a) ve (b) gereklerinin yerine getirilmesinin elverişliliği ve verimliliği konusunda yeterli bilgi vermektedir. Yapılan tam yutucu koşul yaklaşımının klasik olmayan (sınırsız) bölgelerde başlangıç sınır değer problemlerinin ayrıklaştırılmasında hesaplama uzayının sınırlanması problemini etkin olarak çözümlendiği izlenmektedir. Bu koşullarının kullanımı, matematiksel yollarla simüle edilen fiziksel proseslerin bozulmasına sebep olmaz ve hesaplama hataları, daha fazla artış göstermeksizin, sonlu farklar planının seçimiyle oluşan düzeyde kalır.

Nümerik deneylerin gerçekleşmesinde işaret edilen, klasik ABC'de hesaplama hatasının düşüşü doğaldır, ancak bir rezonans durumunda sanal sınırların kullanımıyla oluşacak herhangi bir sanal etki tekrar tekrar kuvvetlenecektir.

Bir boyutlu periyodik ızgara modeli üzerindeki sinüzoidal olmayan dalgaların saçılması probleminde önerilen ve gerçekleştirilen, kompakt rezonans homojensizlikleri olan sonsuz bölgelerdeki geçişlerin analizine yapılan yaklaşım yeterince evrenseldir. Söz konusu yaklaşım teorik ve uygulamalı radyofizik, akustik, dalga optiği, anten ve radyo mühendisliğinin pek çok (örneğin puls algılama gibi) gerçek problemlerinin araştırılmasında etkin bir şekilde kullanılabilir (bkz. Bölüm 3). L sanal sınırı üzerinde tam ABC'ye yapılan yaklaşım çerçevesinde oluşturulan (2.9) gibi ışınma koşullarıyla, ilgili kaynakları ve etkin saçıcıları içeren Q_L bölgesinde elde edilen veri, Q_L bölgesinin uzak bir yerindeki alanların yeniden hesaplanmasında da başarıyla kullanılacak şekilde uyarlanabilir.



3. PULS ALGILAMA MODEL PROBLEMLERİNDE SANAL SINIRLARDA TAM YUTUCU KOŞULLU SONLU-FARKLAR METODU

3.1. Giriş

Katmanlı ortam parametrelerinin belirlenmesi, ortam içinde gömülü cisim veya boşlukların görüntülenmesi amacıyla radar, inşaat, jeodezi, petrol, hidrolik mühendisliği gibi çeşitli mühendislik alanlarında yaygın şekilde kullanılır. Ancak, radarların sinyal nüfuz etme derinliği küçük olan ilk türlerinin geliştirilmesinde ve algılanan verilerden yararlı bilgilerin doğru olarak süzülmesinde bazı önemli sorunlar mevcuttur.

Bu sorunların çözümünde yetersiz kalan geleneksel teorik ve deneysel metotlara (araçlara) yeni güvenilir yaklaşımların getirilmesi icabeder. Sinüzoidal olmayan radarların üretilmesinde söz konusu bu tür olumsuzlukların giderilmesinde günümüzde büyük ilerlemeler kaydedilmiştir. Burada önemli teorik problemlerden biri de ölçüm sonuçlarının doğru yorumlanmasıdır. Bu sorunlar, incelenen uzay parçasındaki geçişleri tanımlayan uygun matematiksel modeller ve bunların gerçekleştirilen algoritmaları kullanılmaksızın çözülemez.

Puls algılama model problemlerinin kaynağı, lokal homojen olmayan kompakt saçıcı cisimlerin bulunduğu sonsuz bölgelerdeki sınırlardır. Bu sorunların etkin çözüm anahtarı, sonlu farklar hesaplama uzayının doğru sınırlanmasından geçer. Böyle bir sınırlamada esasen bir açık-problem bir kapalı-probleme indirgenirken, alınan nümerik verinin doğruluğunda ve güvenilirliğinde herhangi bir bozulma olmaz.

Bu tez çalışmasında geliştirilen yaklaşımın teorik ve metodolojik esaslarına daha önceki yıllarda Sirenko ve ark. (1997,1999, 2000), Perov ve ark. (1999) tarafından bir dereceye kadar değinilmiştir (Bkz. Bölüm 2).

3.2. Puls Algılama Model Problemlerinde Sanal Sınırlarda Tam Yutucu Koşullar

3.2.1. Yer altı puls algılama model problemi

Geometrik yapısı Şekil 3.1,a da verilen model problemi göz önüne alalım. Bu durumda;

$$\left. \begin{aligned} -\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} U - \sigma \frac{\partial}{\partial t} U + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} U \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} U &= F, \\ t > 0, \quad g = \{\rho, \theta\} \in Q; \\ U(\rho, \theta, 0) = \varphi; \quad \frac{\partial}{\partial t} U(\rho, \theta, t)|_{t=0} &= \Psi; \quad U(\rho, \theta, t)|_{g \in S} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

ifadesini sağlayan $U(\rho, \theta, t)$ fonksiyonunu elde etmek gerekir. Burada Q, S konturlarıyla sınırlı bir düzlem parçasıdır. Burada $\sigma = \sigma_0(\mu_0 / \varepsilon_0)^{-1/2}$ dir $\varepsilon(\rho, \theta)$ incelenen ortamın bağıl dielektrik permitivitesi ve $\sigma_0(\rho, \theta)$ öz iletkenliğidir. $U = E_x$; $E_\theta = E_\rho = H_x \equiv 0$ (E-polarizasyonlu elektromagnetik alan) olduğu hatırlanırsa;

$$\frac{\partial}{\partial t} H_\rho = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \theta} E_x \quad \text{ve} \quad \frac{\partial}{\partial t} H_\theta = \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \rho} E_x$$

eşitlikleri geçerlidir. F, φ, ψ, σ ve $\varepsilon-1$ fonksiyonlarının Q bölgesinde sonlu olduğu ve $W_2^1(Q^T)$, $Q^T = Q \times (0, T)$ Sobolev uzayında problem (3.1)'in çözülebilirlik konusundaki teoremi sağladığı varsayılır. İncelenen $t \in (0, T)$ olan zaman anlarının tümünde yukarıdaki bu fonksiyonların desteği, $Q_a = \{g \in Q : \rho < a\}$ bölgesinde yoğunlaşmıştır. S_1 sınırı Q 'da homojen ($\varepsilon-1 = \sigma \equiv 0$) ve homojen olmayan ortamları ayırır. Ayrıca, S_1 üzerinde alan şiddeti vektörlerinin teğetsel bileşenleri süreklidir.

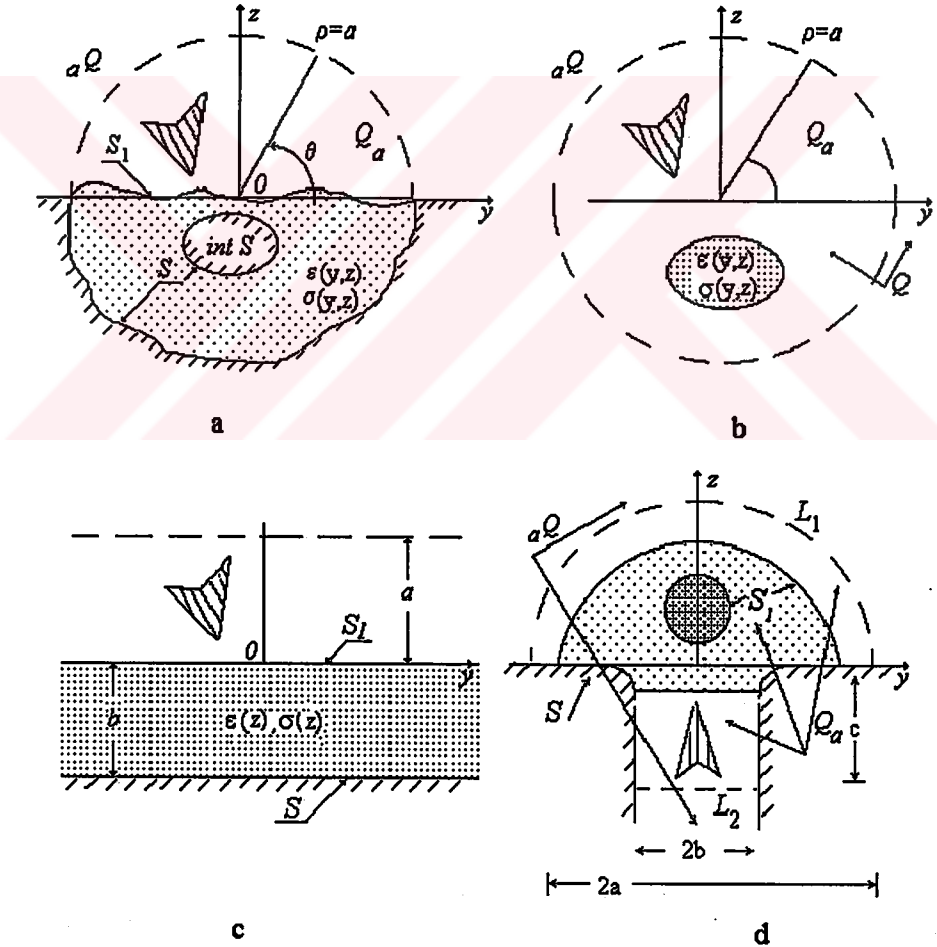
Bu problemin sonlu farklar metoduyla etkin olarak çözülebilmesi için, sanal sınırlar öne sürülerek analiz bölgesinin kapatılması yoluna gidilebilir.

Sınır koşullarının oluşturulmasına, Sirenko ve ark. (1999, 2000)'nın çalışmaları ve Bölüm 2'nin sonuçlarına dayanarak, durağan olmayan işaretlerin

evrimsel temelinin elemanları üzerinde, bir alanın ayrıklaştırma (decomposition) olarak gösterimi ışık tutabilir. ${}_aQ = Q \setminus \bar{Q}_a$ bölgesinde (3.1) probleminin $U(\rho, \theta, t)$ çözümü, kaynaklar ve etkin saçıcıların konumlandığı bölgeden “giden” durağan olmayan bir dalgayı temsil eder ve bu durumda;

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} U + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} U \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} U &= 0, & t > 0, & \quad g = \{\rho, \theta\} \in Q; \\ U(\rho, \theta, 0) &= 0; & \frac{\partial}{\partial t} U(\rho, \theta, t)|_{t=0} &= 0; & U(\rho, \theta, t)|_{g \in S} &= 0. \end{aligned} \right\} (3.2)$$

ifadesi geçerlidir.



Şekil 3.1. Model problemlerinin geometrileri.

(3.2) ifadesindeki değişken θ açısına göre, ${}_a Q$ da yapılacak ayrıklaştırmayla $U(\rho, \theta, t)$ için aşığıdaki eşitlik elde edilir;

$$U(\rho, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\rho, t) \sin(n\theta), \quad g \in {}_a Q, \quad t > 0. \quad (3.3)$$

Bu durumda U dalgasının evrimsel temelinin $w_n(\rho, \theta)$ elemanları;

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} w_n + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} w_n \right) - \frac{n^2}{\rho^2} w_n &= 0, \\ a \leq \rho, \quad t > 0, \quad g = \{\rho, \theta\} \in Q; \\ w_n(\rho, 0) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t} w_n(\rho, t) \Big|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

ifadesiyle verilen koşulları sağlar.

Çözüm için (3.4) ifadesi $\chi(\rho - a)$ ile çarpılır ve $\rho \geq 0$ yarı eksen üzerinde ρ üzerinde Fourier-Bessel transformasyonu kullanılır. $Z_n(\rho, t) = w_n(\rho, t) \chi(\rho - a)$ fonksiyonlarının $\tilde{Z}_n(\omega, t)$ görüntüleri için,

$$\left. \begin{aligned} D(\omega) [\tilde{Z}_n(\omega, t)] &\equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2 \right] \tilde{Z}_n(\omega, t) = a [w_n(a, t) J'_n(\omega a) - w'_n(a, t) J_n(\omega a)], \\ t > 0, \\ \tilde{Z}_n(\omega, 0) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{Z}_n(\omega, t) \Big|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $J'_n(\omega a) = \frac{\partial}{\partial \rho} J_n(\omega \rho) \Big|_{\rho=a}$ dır ve

$$w'_n(a, t) = \frac{\partial}{\partial \rho} w_n(\rho, t) \Big|_{\rho=a} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \rho} U(\rho, \theta, t) \Big|_{\rho=a} \sin(n\theta) d\theta$$

ifadesi geçerlidir. (3.5) eşitliğinin sağ tarafı ile $D(\omega)$ operatörünün

$G(t; \omega) = \chi(t) \omega^{-1} \sin \omega t$ temel çözümünün konvolüsyonu,

$$\tilde{Z}_n(\omega, t) = \frac{a}{\omega} \int_0^t \sin(\omega(t - \tau)) [w_n(a, \tau) J'_n(\omega a) - w'_n(a, \tau) J_n(\omega a)] d\tau$$

ile sonuçlanır (Vladimirov 1971).

Fourier-Bessel transformasyonunun tersinin alınmasından sonra,

$$w_n(\rho, t) = a \int_0^t [w_n(a, \tau) f'_n(a, \rho, t - \tau) - w'_n(a, \tau) f_n(a, \rho, t - \tau)] d\tau, \quad \rho > a, \quad (3.6)$$

ifadesini elde ederiz. Burada,

$$f_n(r, \rho, t - \tau) = \int_0^\infty \sin(\omega(t - \tau)) J_n(\omega r) J_n(\omega \rho) d\omega, \quad (3.7)$$

ve

$$f'_n(a, \rho, t - \tau) = \frac{\partial}{\partial r} f_n(r, \rho, t - \tau) \Big|_{r=a}$$

olarak alınmıştır.

$A = [r^2 + \rho^2 - (t - \tau)^2] / (2\rho r)$ olması halinde, (3.7) ile verilen integral ifadesi birinci dereceden ($P_{n-1/2}(A)$) ve ikinci dereceden ($Q_{n-1/2}(-A)$) Legendre fonksiyonlarına indirgenir (Bateman ve ark. 1954). Yani;

$$f_n(r, \rho, t - \tau) = \begin{cases} 0, & 0 < t - \tau < \rho - r \\ \frac{P_{n-1/2}(A)}{2(r\rho)^{1/2}}, & \rho - r < t - \tau < \rho + r \\ \frac{Q_{n-1/2}(-A) \cos n\pi}{\pi(r\rho)^{1/2}}, & \rho + r < t - \tau \end{cases}$$

dir ve (3.6) ifadesinin türevi alınarak ve Legendre fonksiyonlarının özelliklerini de hesaba katarak, ${}_aQ$ bölgesinde $U(\rho, \theta, t)$ nun aşağıdaki verilen tam gösterimine (ışınma koşulu) ulaşılır:

$$U(\rho, \theta, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\rho}} U(a, \theta, t) + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(n\theta) \left\{ \int_0^{t-(\rho-a)} \frac{w_n(a, \tau)}{2a} [Q'_{n-1/2}(-A) \times \left(\frac{\rho^2 - a^2 - (t - \tau)^2}{a\rho} \right) - Q_{n-1/2}(-A)] - w'_n(a, t) Q_{n-1/2}(-A) \right\}, \quad \rho > a \quad (3.8)$$

Burada $Q'_{n-1/2}(-A) = \frac{\partial}{\partial A} Q_{n-1/2}(-A)$ dir.

$\rho = a$ sanal sınırında ρ yok olacağından,

$$\frac{1}{2}U(a, \theta, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(n\theta) \left\{ \int_0^t \frac{w_n(a, \tau)}{2a} \xi_n(t-\tau) - w'_n(a, \tau) \eta_n(t-\tau) \right\}, \quad (3.9)$$

$$\xi_n(t-\tau) = 2Q'_{n-1/2}(-B)(B-1) - Q_{n-1/2}(-B),$$

$$\eta_n(t-\tau) = Q_{n-1/2}(-B), \quad B = 1 - \frac{(t-\tau)^2}{2a^2}.$$

koşulu elde edilir.

(3.9) ifadesi (3.1) probleminin çözümü için tam ışına koşullarının muhtemel yazım şekillerinden birisidir (bu koşul değişik yollardan da elde edilebilir). Bu yollardan uygun olan birini kısaca tanımlayalım ($\rho = a$ sınırı üzerinde (3.9)'dan farklı formda koşulların varolduğunu kabul edelim). Bu amaçla önce,

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} v_n + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} v_n \right) - \frac{n^2}{\rho^2} v_n &= 0, & t \leq \tau, & \quad a \leq \rho, r \leq b \\ v_n(\rho, \tau) = 0, & \quad \frac{\partial}{\partial t} v_n(\rho, t) \Big|_{t=\tau} = \frac{\delta(\rho-r)}{\rho}, \\ \frac{\partial}{\partial \rho} v_n(\rho, t) \Big|_{\rho=a} = \frac{\partial}{\partial \rho} v_n(\rho, t) \Big|_{\rho=b} &= 0. \end{aligned} \right\} (3.10)$$

yardımcı problemi göz önüne alınır.

(3.10) da değişkenlerine ayırma işlemi yapılırsa;

$$v_n(\rho, t) = - \sum_{s=0}^{\infty} \sin[\lambda_{ns}(\tau-t)] \lambda_{ns}^{-1} R_{ns}(\rho) R_{ns}(r) = \tilde{v}_n(r, \rho, \tau-t)$$

sonucuna ulaşılır. Burada;

$$R_{ns}(\rho) = \frac{\pi (J'_n(\lambda_{ns} a) N_n(\lambda_{ns} \rho) - N'_n(\lambda_{ns} a) J_n(\lambda_{ns} \rho))}{\left[\left(2 - \frac{2n^2}{\lambda_{ns}^2 b^2} \right) \left(\frac{J'_n(\lambda_{ns} a)}{J'_n(\lambda_{ns} b)} \right)^2 - \left(2 - \frac{2n^2}{\lambda_{ns}^2 a^2} \right) \right]^{1/2}}$$

dir. λ_{ns} değeri,

$$N'_n(\lambda_{ns} a) J'_n(\lambda_{ns} b) - N'_n(\lambda_{ns} b) J'_n(\lambda_{ns} a) = 0$$

denklemini sağlar ve

$$J'_n(\lambda a) = \frac{\partial}{\partial \rho} J_n(\lambda \rho) \Big|_{\rho=a}, \quad N'_n(\lambda a) = \frac{\partial}{\partial \rho} N'_n(\lambda \rho) \Big|_{\rho=a}$$

eşitlikleri geçerlidir. Şimdi ρv_n ile (3.4) denkleminin çarpımından elde edilecek sonuç, ρw_n ile (3.10) denkleminin çarpımından elde edilecek sonuçtan çıkarılır ve bulunan nihai sonuç $a \leq \rho \leq b$, $0 \leq t \leq \tau$ aralıklarında integre edilirse ve ayrıca gerekli transformasyonlar yapılırsa;

$$w_n(r, \tau) = - \left[\rho \int_0^\tau v_n(\rho, t) w'_n(\rho, t) dt \right]_{\rho=a}^{\rho=b} \quad (3.11)$$

ifadesi elde edilir.

Eğer saçılma işlemi $t \leq T$ sonlu zaman aralığında incelenirse, $w'_n(b, t) \equiv 0$ olacak şekilde bir b değerini seçmek daima mümkündür ($b = a + T$ kullanılması yeterli). Bu koşullarda, standart atamalardaki (3.11) denklemi,

$$U(\rho, \theta, t) = a \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta) \left\{ \int_0^t \tilde{v}_n(\rho, a, t - \tau) w'_n(a, \tau) d\tau \right\}, \quad (3.12)$$

$$a \leq \rho \leq b, \quad b = a + T, \quad 0 \leq t \leq T$$

şeklindeki yazıma uygun düşer.

(3.8), (3.9), (3.12) gösterimlerinin, simüle edilen proste dalgaların yayıldığı gerçekte açık olan bölgeyi sınırlayan koşullar olduğu göz önüne alınır; şunları söylemek mümkündür: Bu koşullardan birine sahip olan (3.1) ile bir diğerine sahip (3.1) problemlerinin birbirlerine eşdeğer olduğu görülür. Bunların çözülebilirliklerini garanti eden gerekler (doğruluk sınıfları) birbiriyle uyur. Ayrıca, bu değerler tamdır, dolayısıyla bunların orijinal probleme eklenmesi hesaplama hatasını artırmaz ve simüle edilen prosesi bozamaz.

3.2.2. Homojen olmayan lokal kompakt cisim

Serbest uzaydaki dielektrik cisim üzerine gelen E-polarizeli sinüzoidal olmayan dalgaların saçılmasının araştırılması (Bkz. Şekil 3.1,b), aşağıdaki problemin çözümü ile irtibatlandırılabilir. Bu durumda;

$$\left. \begin{aligned}
 & -\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} U - \sigma \frac{\partial}{\partial t} U + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} U \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} U = F, \\
 & t > 0, \quad g = \{\rho, \theta\} \in Q; \\
 & U(\rho, \theta, 0) = \varphi; \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} U(\rho, \theta, t) \right|_{t=0} = \psi; \quad U(\rho, \theta, t) = U(\rho, \theta + 2\pi, t).
 \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

şeklindeki $U(\rho, \theta, t)$ fonksiyonunu bulmak gerekir.

(3.1) ifadesinin çözümü aşamasında yapılan tüm atamalar ve kabuller bu durum için de geçerlidir. $Q = \{g : 0 \leq \rho < \infty; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ analiz bölgesi burada sadece ρ ve θ değişkenlerinin tüm düzlemi kaplamasıyla farklılık gösterir ($U|_{g \in S} = 0$ sınır koşulu geçerlidir). Bu bağlamda, θ ve $\theta + 2\pi$ açılarının uzayın aynı noktalarına karşılık gelmesi gerçeğini yansıtan periyodiklik koşulu yerine getirilmiş demektir. Şimdi de bu farkların, (${}_a Q = \{g \in Q : \rho > a\}$ bölgesinde) (3.13) probleminin dışarı “giden” dalga çözümleri için tam ışınma koşulları üzerine nasıl bir etkiye sahip olacağını inceleyelim. Bu koşulları kabul etmenin, problemin ciddi değişimlere maruz kalmasına neden olmadığı açıktır.

Bu bağlamda, (3.13) ifadesinden, ${}_a Q$ bölgesinde;

$$\left. \begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2}{\partial t^2} U + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} U \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} U = 0, \\
 & t > 0, \quad g \in {}_a Q; \\
 & U(\rho, \theta, t) = 0; \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} U(\rho, \theta, t) \right|_{t=0} = 0; \quad U(\rho, \theta, t) = U(\rho, \theta + 2\pi, t)
 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

ifadeleri geçerlidir ve bu durumda tüm kaynaklar ve saçıcı engeller $Q_a = Q \setminus {}_a Q$ bölgesinde konumlandırılmıştır.

(3.14) de θ değişkeninin $\mu_n(\theta)$ eigen fonksiyonları sisteminde, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ aralığı üzerinde yapılan dekompozisyon ile ayrılması, ${}_a Q$ bölgesindeki ;

$$U(\rho, \theta, t) = \sum_n w_n(\rho, t) \mu_n(\theta), \quad g \in {}_a Q, \quad t > 0, \quad (3.15)$$

gösterimi ile sonuçlanır ve U dalgasının evrimsel temelinin $w_n(\rho, t)$ elemanları ise,

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} w_n + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} w_n \right) - \frac{\lambda_n^2}{\rho^2} w_n &= 0, \quad a \leq \rho, \quad t > 0 \\ w_n(\rho, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} w_n(\rho, t) \Big|_{t=0} &= 0, \quad a \leq \rho. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

koşullarını ikinci plana iter. Burada λ_n^2 ,

$$\{\mu_n(\theta)\}_n = \left\{ \frac{1}{2}, \cos(n\theta), \sin(n\theta) \quad n = 1, 2, \dots \right\}$$

eigen fonksiyonlarına uyan eigen sayılarıdır. Burada $1/2$ fonksiyonuna 0 eigen ayısı; $\sin(n\theta)$ ile $\cos(n\theta)$ fonksiyonlarına ise $\lambda_n^2 = n^2$ eigen sayıları karşılık gelir.

$\{\mu_n(\theta)\}_n$ yerine, formül biçiminde ifadesi daha kolay olan $\exp(in\theta)$ ($n = 0, \pm 1, 2, \dots$) fonksiyon sistemini almak da mümkündür, fakat bu durumda kompleks uzayda çalışmak için iki kat daha büyük bilgisayar belleğine ihtiyaç vardır.

$\chi(\rho - a)$ ile (3.16) ifadesini çarpmak suretiyle, $\rho \geq 0$ yarı eksenini üzerinde ρ 'ya göre Fourier-Bessel transformasyonunu kullanabiliriz. Böylece, $Z_n(\rho, t) = w_n(\rho, t)\chi(\rho - a)$ fonksiyonlarının $\tilde{Z}_n(\omega, t)$ görüntülerini elde ederiz. Yani;

$$\left. \begin{aligned} D(\omega)[\tilde{Z}_n(\omega, t)] &\equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2 \right) \tilde{Z}_n(\omega, t) = \\ & a [w_n(a, t) J'_{|\lambda_n|}(\omega a) - w'_n(a, t) J_{|\lambda_n|}(\omega a)], \quad t > 0; \\ \tilde{Z}_n(\omega, 0) &= \frac{\partial}{\partial t} \tilde{Z}_n(\omega, t) \Big|_{t=0} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

dir. Burada $J'_{|\lambda_n|}(\omega a) = \frac{\partial}{\partial \rho} J_{|\lambda_n|}(\omega \rho) \Big|_{\rho=a}$

ve

$$w'_n(a, t) = \frac{\partial}{\partial \rho} w_n(\rho, t) \Big|_{\rho=a} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} U(\rho, \theta, t) \Big|_{\rho=a} \mu_n(\theta) d\theta.$$

ifadeleri geçerlidir. (3.17) eşitliğinin sağ tarafı ile $D(\omega)$ operatörünün

$G(t; \omega) = \chi(t)\omega^{-1} \sin \omega t$ temel çözümünün konvolüsyonu,

$$\tilde{Z}_n(\omega, t) = \frac{a}{\omega} \int_0^t \sin(\omega(t-\tau)) [w_n(a, \tau) J'_{|\lambda_n|}(\omega a) - w'_n(a, \tau) J_{|\lambda_n|}(\omega a)] d\tau$$

ifadesi ile sonuçlanır (Vladimirov 1971).

Burada, ters Fourier-Bessel transformasyonu alınarak;

$$w_n(\rho, t) = a \int_0^t [w_n(a, \tau) f'_n(a, \rho, t-\tau) - w'_n(a, \tau) f_n(a, \rho, t-\tau)] d\tau, \quad \rho > a, \quad (3.18)$$

$$f_n(r, \rho, t-\tau) = \int_0^\infty \sin(\omega(t-\tau)) J_{|\lambda_n|}(\omega r) J_{|\lambda_n|}(\omega \rho) d\omega, \quad (3.19)$$

$$f'_n(a, \rho, t-\tau) = \left. \frac{\partial}{\partial r} f_n(r, \rho, t-\tau) \right|_{r=a}$$

sonuçları elde edilir.

(3.19) eşitliğindeki integrasyon, daha önce (3.7) de verilen integrasyon ile aynıdır. Bu durumda da yine $A = [r^2 + \rho^2 - (t-\tau)^2]/(2\rho r)$ argümanının değeri, $P_{|\lambda_n|-1/2}(A)$ birinci ve $Q_{|\lambda_n|-1/2}(-A)$ ikinci dereceden Legendre fonksiyonlarına indirgenir (Bateman ve ark. 1954). Yani;

$$f_n(r, \rho, t-\tau) = \begin{cases} 0 & 0 < t-\tau < \rho-r \\ P_{|\lambda_n|-1/2}(A) / [2(rp)^{1/2}] & \rho-r < t-\tau < \rho+r \\ Q_{|\lambda_n|-1/2}(-A) \cos(\lambda_n \pi) / [\pi(rp)^{1/2}] & \rho+r < t-\tau. \end{cases}$$

dir. (3.19)'daki türevlerin alınmasıyla ve tamsayılar kümesine ait eigen sayılarının hesaba katılmasıyla, tam ışımaya koşulu;

$$U(\rho, \theta, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\rho}} U(a, \theta, t) + \sqrt{\frac{a}{\rho}} \sum_n \frac{\cos(\lambda_n \pi)}{\pi} \mu_n(\theta) \cdot \left\{ \int_0^{t-(\rho-a)} \frac{w_n(a, \tau)}{2a} [Q'_{|\lambda_n|-1/2}(-A) \times \left(\frac{\rho^2 - a^2 - (t-\tau)^2}{a\rho} \right) - Q_{|\lambda_n|-1/2}(-A) - w'_n(a, \tau) Q_{|\lambda_n|-1/2}(-A)] \right\}, \quad \rho > a \quad (3.20)$$

olarak elde edilecektir. Burada $Q'_{|\lambda_n|-1/2}(-A) = \frac{\partial}{\partial A} Q_{|\lambda_n|-1/2}(-A)$ dir.

$\rho = a$ olması durumunda (3.20) ifadesi, (3.13) açık sınır-değer probleminin çözümlerinin analiz bölgesini kapayan sanal sınır üzerindeki koşula dönüştürülür.

Yani;

$$\frac{1}{2}U(a, \theta, t) = \sum_n \frac{\cos(\lambda_n | \pi)}{\pi} \mu_n(\theta) \cdot \left\{ \int_0^t \frac{w_n(a, \tau)}{2a} \xi_n(t - \tau) - w'_n(a, \tau) \eta_n(t - \tau) \right\} \quad (3.21)$$

olur, burada $\xi_n(t - \tau) = 2 Q'_{|\lambda_n| - 1/2}(-B) \cdot (B - 1) - Q_{|\lambda_n| - 1/2}(-B)$

ve

$$\eta_n(t - \tau) = Q_{|\lambda_n| - 1/2}(-B)$$

ve

$$B = 1 - \frac{(t - \tau)^2}{2a^2}$$

dir.

3.2.3. Düzlemsel katmanlı dielektrik yapı

Önceki altbölümlerde verilen iki problemin özdeş teknikler ve aynı (silindirik) koordinat sistemleri kullanılarak birbirine çok yakın sonuçlar elde edilmişti. Yukarıdaki iki modelin sonuçlarının sergilediği farklılıkların tümü Q bölgesinde θ açısının değişim aralığının değişmesiyle ortaya çıkmıştır. Bu altbölümde inceleyeceğimiz problemde ise karteziyen koordinat sistemini kullanacağız. Bu durumda da yine hiperbolik denklemler teorisinde yaygın şekilde benimsenen eylemlerdeki ana prosedürde değişme olmaz (Borisov 1996). Yani, dalga denklemlerinde yine eksik değişkenlerine ayırma, bir boyutlu Klein-Gordon denklemlerinde integral transformasyonları, adi diferansiyel denklemler için yardımcı sınır problemlerinin çözümü ve ters integral transformasyonları geçerlidir. Ancak, koordinatların değişmiş olması, sıralama tekniğinde ve elde edilecek sonuçlar için belirli bir etkiye sahip olacaktır. Ayrıca, aşağıda incelenen model problemin durumunda, tam ışımaya koşullarının formülasyonu için başlangıçta saçıcı heterojenlik ve kompakt uyartım kaynaklarının sonsuz genişletilmesi arasında doğal olmayan çelişkiden (modelleme etkisi) kaynaklanan bir uyumsuzluk söz konusudur ve bu olumsuzluğu yok etmek gerekir.

Bu amaç için, ε ve σ parametreleri sadece z değişkeninin bir fonksiyonu olan katmanlı (bkz. Şekil 3.1,c) $Q = \{g : -\infty < y < \infty, z > -b\}$ bölgesinde destekleri olan E-polarizeli sinüzoidal olmayan dalgalar F , φ ve ψ kaynakları tarafından uyarıldığı varsayalım. Daha önce belirtildiği gibi, zamanın incelenen tüm anlarında bu desteklerin de $Q_a = \{g \in Q : z < a\}$ ya ait olduğu kabul edilir. Yani;

$$\left. \begin{aligned} -\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} U - \sigma \frac{\partial}{\partial t} U + \frac{\partial^2}{\partial z^2} U + \frac{\partial^2}{\partial y^2} U &= F, \quad t > 0; \quad g \in Q; \\ U(g, t)|_{t=0} &= \varphi; \quad \frac{\partial}{\partial t} U(g, t)|_{t=0} = \psi; \quad U(g, t)|_{g \in S} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

şeklindeki problemin çözümü için, $U(y, z, t)$ fonksiyonunu bulmak gerekir. Daha önce yapıldığı gibi, S_1 sınırı üzerinde alanın teğetsel bileşenlerinin sürekliliklerle ve problemin çözülebilirliği ile ilgili varsayımları ve $U = E_x$, $E_y = E_z = H_x = 0$ eşitlikleri yine bu durumda da geçerlidir. Ayrıca, sıfırdan farklı manyetik alan bileşenleri aşağıda verilmiştir;

$$\frac{\partial}{\partial t} H_y = -\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial z} E_x; \quad \frac{\partial}{\partial t} H_z = \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial y} E_x.$$

(3.22) ifadesi, Fourier transformasyonuna tabi tutulursa,

$$\tilde{f}(z, t, \Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y, z, t) e^{-i\Phi y} dy \leftrightarrow f(y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(z, t, \Phi) e^{i\Phi y} d\Phi,$$

yeni problemi tanımlayan aşağıdaki denklemler grubu elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} \left[-\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Phi^2 \right] \tilde{U}(z, t, \Phi) &= \tilde{F}(z, t, \Phi), \quad t > 0, \quad z > -b; \\ \tilde{U}(z, t, \Phi)|_{t=0} &= \tilde{\varphi}(z, \Phi); \quad \frac{\partial}{\partial t} \tilde{U}(z, t, \Phi)|_{t=0} = \tilde{\psi}(z, \Phi); \quad \tilde{U}(-b, t, \Phi) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

(3.23) ile verilen problemin ters Fourier transformasyonundaki çözümü, şüphesiz bize U 'yu verecektir. (3.22) ifadesinden (3.23) ifadesine geçişte bu transformasyon; bundan önceki ilk iki problemin çözümünde kullanılan ve bizi yukarıda vurguladığımız çelişkiden (bir boyutlu z uzayında kaynaklar ve heterojenliğin sınırlı olması) kurtaran eksik değişken ayırma prosedürüne eşdeğer bir rol oynar.

\tilde{U} fonksiyonu, $z > a$ da kaynaklar ve heterojenliğin konumlandığı bölgeden dışarı "giden" dalgayı temsil eder ve parametreleri $\varepsilon \equiv 1$ ve $\sigma \equiv 0$ olan (3.23) homojen sınır değer problemini sağlar. Bu problem, $z > 0$ yarı-ekseni üzerinde z 'ye göre Cos-Fourier transformasyonuna tabi tutularak aşağıdaki $\tilde{w}_n(\omega, t) \leftrightarrow \tilde{U}(z+a, t)$ görüntülerine ait Cauchy problemine gelinir:

$$\left. \begin{aligned} D((\Phi^2 + \omega^2)^{1/2})[\tilde{w}_n(\omega, t)] &\equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\Phi^2 + \omega^2) \right] [\tilde{w}_n(\omega, t)] = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \tilde{U}'(a, t), \\ t > 0; \\ \tilde{w}_n(\omega, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} \tilde{w}_n(\omega, t) \right|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Burada, \tilde{U} dalgasının $z > a$ bölgesinde azalan z yönünde yayılan bir bileşeni içermediği varsayımı yapılmıştır. Zamanın herhangi bir sonlu anında $z = \infty$ bölgesine "giden" bileşenler, z 'nin yeterince büyük değerleri için sıfıra eşittir. $D(\lambda)$ operatörüne ait $G(t; \lambda) = \chi(t) \lambda^{-1} \sin \lambda t$ temel çözümün, (3.24) denkleminin sağ tarafı ile konvolüsyonu,

$$\tilde{w}_n(\omega, t) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^t \sin[(\Phi^2 + \omega^2)(t-\tau)] (\Phi^2 + \omega^2)^{-1/2} \tilde{U}'(a, \tau) d\tau \quad (3.25)$$

eşitliğini elde etmeye veya (3.25) de $\tilde{U}(z+a, t)$ orijinallerine geçişten sonra;

$$\tilde{U}(z+a, t) = -\int_0^t J_0[\Phi((t-\tau)^2 - z^2)^{1/2}] \chi[(t-\tau) - z] \tilde{U}'(a, \tau) d\tau, \quad z > 0 \quad (3.26)$$

eşitliğini elde etmeye imkan verir. Burada $\tilde{U}'(a, \tau) = \frac{\partial}{\partial z} \tilde{U}(z, \tau) \Big|_{z=a}$ dır. $z = a$ sanal

sınırı üzerinde, (3.26) ifadesinin basit transformasyonlarından sonra,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right] \tilde{U}(z, t) \Big|_{z=a} = G_1(t) \quad (3.27)$$

ve

$$\tilde{U}(a, t) = G_2(t) \quad (3.28)$$

ifadeleri elde edilir. Burada

$$G_1(t) = \Phi \int_0^t J_1[\Phi(t-\tau)] \tilde{U}'(a, \tau) d\tau$$

ve

$$G_2(t) = - \int_0^{t-(a-a_1)} J_0[\Phi((t-\tau)^2 - (a-a_1)^2)^{1/2}] \tilde{U}'(a_1, \tau) d\tau$$

dir ve $a_1 < a$ ise ${}_a Q$ bölgesi, ${}_a Q$ bölgesi ile aynı olmasına rağmen kaynaklar ve etkin saçıcılar içermez.

(3.27) ve (3.28) ile belirlenen koşulların, önceden elde edilen (3.9), (3.12) ve (3.21) koşullarına benzer şekilde, orijinal probleme eklenmeleri durumunda yine söz konusu matematiksel problemde herhangi bir bozulmaya sebep olmazlar. Ayrıca bunlar, $\tilde{U}(z, \tau)$ fonksiyonunun (3.27) ile (3.28) ifadelerinin sol taraflarındaki G_1 ve G_2 ye giren gelecek veya ani etkilerin olmadığı bir formda yazılırlar. Bundan dolayı, G_1 ve G_2 fonksiyonlarını, metodun hesaplama planında zaman katmanlarında harekette, t 'den daha küçük τ anlarında önceki katmanlarda belirlenmiş bilinenler olarak göz önüne almak mümkündür. Aşağıdaki altbölümde görüleceği gibi, sanal sınırlar için tüm koşullar standart sonlu farklar planına uygun düşecek şekilde dahil edilirler. Bunlar planın kararlılığını bozamaz ve nümerik gerçekleştirme prosedürüne de herhangi bir zorluk getirmez. Bu ifadenin geçerliliğinin biçimsel sağlaması bu aşamada gerekmez, fakat orijinal ve yeniden düzenlenmiş problemlerin eşitliğine ve bilinen klasik sonuçlara dayandırılmasında yarar vardır (bkz. Bölüm 1 ve Ladyzhenskaya (1985)).

3.2.4. Demet şekillendirici yapı

Muhtemel biçimlerinden birinin geometrisi Şekil 3.1,d de temsil edilen E-polarizeli dalgalar tarafından uyarılan antenle ilgili model problem,

$$\left. \begin{aligned} -\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} U - \sigma \frac{\partial}{\partial t} U + \frac{\partial^2}{\partial z^2} U + \frac{\partial^2}{\partial y^2} U = F, \quad t > 0, \quad g = \{y, z\} \in Q; \\ U(g, t)|_{t=0} = \varphi; \quad \frac{\partial}{\partial t} U(g, t)|_{t=0} = \Psi; \quad U(g, t)|_{g \in S} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

denklemler sistemini sağlayan $U(g, t)$ fonksiyonunu bulmak için kullanılabilir. Burada, $U = E_x$, $E_y = E_z = H_x \equiv 0$ olup problemlerin çözülebilirliğini sağlayan

tüm varsayımlar da geçerlidir. Q analiz bölgesi ise bu durumda S eğrileriyle sınırlı uzay parçasıdır.

F , φ ve ψ kaynaklarının, $Q_a = \{g \in Q : |y| \leq a; -c \leq z \leq \sqrt{a^2 - y^2}$ bölgesinde kompakt desteğe sahip olduğu varsayılır. (3.29) problemi, $L_1 = \{g : z = \sqrt{a^2 - y^2}; -a \leq y \leq a$ ve $L_2 = \{g : z = -c; -b \leq y \leq b\}$ sınırları üzerinde ilave koşulların sunulmasıyla Q_a bölgesindeki probleme dönüştürülebilir.

L_1 üzerinde, (3.1) problemi için elde edilen (3.8), (3.9) veya (3.12) koşulunu değiştirmeksizin kullanmak mümkündür. (3.9) koşulu, Kartezyen koordinat sisteminde,

$$\frac{1}{2} U(g, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi} U_n(y/a) \left\{ \int_0^t \frac{w_{n1}(\tau)}{2a} \xi_n(t-\tau) - w'_{n1}(\tau) \eta_n(t-\tau) \right\} \quad (3.30)$$

yazımına uygun düşer. Burada U_n , ikinci dereceden Chebishev polinomlarıdır; w_{n1} ve w'_{n1} fonksiyonları L_1 üzerinde körvi-lineer integraller olarak belirlenir ve

$$w_{n1}(\tau) = \frac{2}{\pi_{L_1}} \int \frac{U(g, \tau) U_n(y/a)}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy, \quad w'_{n1}(\tau) = \frac{2}{\pi_{L_1}} \int \frac{\partial U(g, \tau)}{\partial n} \frac{U_n(y/a)}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy$$

dir ve U 'nun Q_a dışındaki L_1 eğrisine dik doğrultudaki türevi şüphesiz $\partial U / \partial n$ dir.

L_2 sınırı üzerinde dalgakılavuzu oluşturan açık kesit alanlı bir uç, y -yönünde sonsuz-periyodik yapılu durumdaki standart teknikte aynı tipte olacak şekilde tam yutucu koşullar elde etmeye imkan verir (bkz. Bölüm 2). Floquet kanalının (ızgara problemleri) herhangi regüler bir dalgakılavuzunun yerine konması, herhangi bir sorun yaratmaz. Çünkü her iki durumda da, yayılma hatlarının düzgün kesimlerinde durağan olmayan işaretler, nitelik bakımından özdeş evrimsel temelde verilebilirler (Sirenko ve ark. 2000). L_2 sınırı üzerinde Q_a analiz bölgesinin kapatılması için kullanılan koşulların sonlu formu çok çeşitli olmakla birlikte bunların tümü yine,

$$U(g, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n y) \int_0^t J_0(\lambda_n(t-\tau)) w'_{n2}(z, \tau) d\tau \quad z \geq -c, |y| \leq b \quad (3.31)$$

tam yutucu koşuluna dayanır. Burada $w'_{n2}(z, \tau) = \frac{1}{b} \int_{-b}^b \frac{d}{dz} U(g, \tau) \sin(\lambda_n y) dy$,

$\lambda_n = n\pi/b$ dir.

3.3. Model Problemlerin Algoritmasının Gerçeklenmesi ve Nümerik Deneylerin Sonuçları

Model problemlerinin algoritmalarının ortaya çıkarılmasında atılacak adımlar, sadece etkin hesaplama için yapılan bireysel kabullerle standarttan ayrılır. Bundan dolayı sadece incelenen iki problem, yani (3.1), (3.9) ve (3.29) - (3.31) problemleri için, metodun hesaplama planının kısa açıklaması aşağıda verilmiştir.

(3.1) ve (3.9) ile tanımlanan problemin sonlu farklar benzerinin oluşturulmasında, h_p ve h_θ sabit adımlarına sahip uzaysal ağ,

$$\left\{ \rho_j = (j + 0.5)h_p, \quad j = 0 \dots J, \quad h_p = \frac{a}{J + 0.5} \right\}, \left\{ \theta_k = kh_\theta, \quad k = 0 \dots K, \quad h_\theta = \frac{2\pi}{K} \right\}$$

ve l adımlı zaman ağı ise $\left\{ t_m = ml, \quad m = 0 \dots M, \quad l = \frac{T}{M} \right\}$ formunda seçilir. Bunları

izleyen atamalar şöyledir: $Q(h_p, h_\theta)$, Q_a ya ait hücrelerden oluşan bölge; $S(h_p, h_\theta)$, S eğrisi içinde veya altında kalan birimler kümesi; $U(j, k, m) = U(\rho_j, \theta_k, t_m)$ ise m -inci zaman katmanında $g_{jk} = \{\rho_j, \theta_k\}$ birimlerindeki ağ fonksiyonudur. Yanlış anlamaya meydan vermemek için daha ileri indisler aşağıdaki gösterimlerde kullanılmamıştır.

$\partial/\partial t$, $\partial/\partial \rho$, $\partial/\partial \theta$ operatörlerinin yaklaşımı için aşağıdaki belirtilen sağ, sol ve merkezi fark türevi operatörleri gibi;

$$D_+^t U = \frac{U(j, k, m+1) - U(j, k, m)}{l}, \quad D_-^t U = \frac{U(j, k, m) - U(j, k, m-1)}{l},$$

$$D_0^t U = \frac{U(j, k, m+1) - U(j, k, m-1)}{2l}$$

operatörler kullanılır.

(3.1) diferansiyel problemine uyan fark denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\left[-\varepsilon(j, k) D_+^t D_-^t - \sigma(j, k) D_0^t + L^{\rho, \theta} \right] U = F(j, k, m); \quad g_{jk} \in Q(h_\rho, h_\theta) \quad (3.32)$$

$$U(j, k, 0) = \varphi(j, k)$$

$$U(j, k, 1) = \varphi(j, k) + l\Psi(j, k) + \frac{l^2}{2\varepsilon(j, k)} \left(D^{\rho, \theta} \varphi(j, k) - \sigma(j, k)\Psi(j, k) - F(j, k, 0) \right) \quad (3.33)$$

$$U(j, k, m) = 0, \quad g_{jk} \in S(h_\rho, h_\theta)$$

Burada $L^{\rho, \theta}$ kutupsal koordinatlarda fark Laplace operatörüdür (Fryazinov 1971) ve

$$L^{\rho, \theta} U = \begin{cases} \frac{1}{\rho_j} D_+^\rho (\bar{\rho} D_+^\rho U) + \frac{1}{\rho_j^2} D_+^\theta D_-^\theta U & j \neq 0 \\ \frac{1}{\rho_0 h_\rho} (\bar{\rho}_1 D_-^\rho U(1, k, m)) + \frac{1}{\rho_0^2} D_+^\theta D_-^\theta U & j = 0, \end{cases}$$

$$\bar{\rho}_j = 0.5(\rho_j + \rho_{j-1}), \quad j = 1 \dots J; \quad \bar{\rho}_0 \equiv 0; \quad \varepsilon(j, k) = \varepsilon(\rho_j, \theta_k);$$

$$\sigma(j, k) = \sigma(\rho_j, \theta_k); \quad F(j, k, m) = F(\rho_j, \theta_k, t_m)$$

ifadeleri geçerlidir. (3.32) denklemi dalga denklemi yaklaşımı, (3.33) denklemleri ise, başlangıç koşulu ve S sınırı üzerinde alanın sıfıra eşit olması koşulu yaklaşımlarıdır.

Sanal sınır üzerinde (3.9) koşulunun ayırık benzeri (analogue) trapezler metodu ile elde edilir. Yani;

$$\frac{1}{2} U(J, k, m+1) + \left(\frac{U(J, k, m+1)}{2a} + D[U(J, k, m+1)] \right) \frac{l}{4} = G(k, m+1) \quad (3.34)$$

yazılabilir. Burada;

$$G(k, m+1) = l \sum_n \sin(n\theta_k) \sum_{r=1}^m \frac{w_n(J, r)}{2a} \xi_n(m+1-r) - D[w_n(J, r)] \eta_n(m+1-r).$$

$$w_n(J, r) = \frac{4}{K} \sum_{p=0}^{K/2-1} U(J, p, r) \sin(n\theta_p)$$

$$D[U(J, k, m)] = \frac{3U(J, k, m) - 4U(J-1, k, m) + U(J-2, k, m)}{2h_\rho}$$

$$\xi_n(m+1-r) = \frac{(-1)^n}{\pi} \xi_n(l(m+1-r))$$

$$\eta_n(m+1-r) = \frac{(-1)^n}{\pi} \eta_n(l(m+1-r))$$

dir ve $t > 2a$ anları için, (3.9) da zamana göre integralin uygun olmayacağını da hesaba katmak gerekir. Bundan dolayı, l adımının seçiminde zaman ağı üzerinde $t = 2a$ noktasının varyantının sağlanması gerekmektedir. (3.12) koşulunun ayrıştırılması, (3.9) koşulunun benzer şekilde yapılabilir. Bu durumlarda ayrı ayrı koşul uygulanması gereken yeni durumlar ortaya çıkmaz. (3.32)-(3.34) denklemleri U 'yu kesin olarak belirlediği ve U hesabının herhangi bir cebirsel sistemi çözmeyi gerektirmediği ortadadır (açık plan). Bunlar orijinal probleme ikinci dereceden doğrulukla yaklaşır. Yaklaşılan $U(j, k, m)$ çözümleri için, h_p , h_θ ve l uzunlukları ile ilgili sınırlama düzgün ayarlanırsa, (herhangi bir normda) plan kararlıdır (Ladyzhenskaya 1985). Hiperbolik denklemlerin sınır-değer problemlerine ait sonlu-farklar planlarının kararlılığının ispatı mümkündür (Ladyzhenskaya 1985) ve bizim durumumuzda da esaslı değişiklik olmaksızın yeterli olduğu kabul edilebilir. (3.32) - (3.34) fark planının kararlılığı, $\{U(j, k, m)\}_{h_p, h_\theta, l}$ dizisinin durağan olmayan orijinal problem çözümüne yaklaşımını garantileyen

$$2\sqrt{2} \frac{l}{h_p h_\theta} < 1$$

yaklaşım koşulu yardımıyla belirlenir.

Anten uyarıtımı ile ilgili (3.29) - (3.31) probleminin algoritmasının oluşturulmasında,

$$\left\{ y_j = -a + jh, j = 0 \dots J, h = \frac{2a}{J}; \quad z_k = -c + hk, k = 0 \dots K, K = \frac{a+c}{h} \right\}$$

uzay ağı ve $\left\{ t_m = ml, m = 0 \dots M, l = \frac{T}{M} \right\}$ zaman ağı kullanılır.

Q_a içinde kalan ağ birimleri kümesinin $Q(h)$ olarak atandığını kabul edelim ve Q_a bölgesinin $\Gamma = S \cup L_1 \cup L_2$ sınırlı $z = z_k$ ve $y = y_j$ çizgileri boyunca noktalar kümesi de $\Gamma(h)$ olarak atansın. Ayrıca $\Gamma(h)$ ile akla gelen $Q(h)$ 'ye ait birimler kümesi (y veya z yönünde sınırdan bunlara olan uzaklık h 'a eşit değildir) $Q^*(h)$ olarak atansın ve $Q(h) = Q^o(h) + Q^*(h)$ olsun. Bu durumda m -inci zaman

katmanındaki ağ birimlerinin $U=U(j,k,m)$ ağ fonksiyonunu belirleyelim ve orijinal diferansiyel problemin sonlu farklar benzerini elde etmeye çalışalım. Yani;

$$\left[-\varepsilon(j,k)D_+^t D_-^t - \sigma(j,k)D_0^t + \Lambda^{y,z} \right] U = F(j,k,m), \quad g_{jk} \in Q(h) \quad (3.36)$$

$$\left. \begin{aligned} U(j,k,0) &= \varphi(j,k) \\ U(j,k,1) &= \varphi(j,k) + l\psi(j,k) + \frac{l^2}{2\varepsilon(j,k)} \left(\Lambda^{y,z} \varphi(j,k) - \sigma(j,k)\psi(j,k) - F(j,k,0) \right) \\ U(j,k,m) &= 0, \quad g_{jk} \in S(h) \end{aligned} \right\} (3.37)$$

yazabiliriz. Burada

$$\varepsilon(j,k) = \varepsilon(y_j, z_k)$$

$$\sigma(j,k) = \sigma(y_j, z_k)$$

$$F(j,k,m) = F(y_j, z_k, t_m)$$

dir ve ayrıca $\Lambda^{y,z}$, fark Laplace operatörü olup,

$$\Lambda^{y,z} U = \begin{cases} D_+^z D_-^z U + D_+^y D_-^y U & g_{jk} \in Q^\circ(h) \\ \hat{D}_+^z D_-^z U + \hat{D}_+^y D_-^y U & g_{jk} \in Q^*(h), \end{cases}$$

formunda yazılabilir. Dolayısıyla, homojen olmayan ağ üzerinde ikinci dereceden türev fark operatörü;

$$\hat{D}_+^z D_-^z U(j,k,m) = \frac{1}{\bar{h}_k} \left(\frac{U(j,k+1,m) - U(j,k,m)}{h_{k+1}} - \frac{U(j,k,m) - U(j,k-1,m)}{h_k} \right),$$

eşitliğinden elde edilebilir. Burada, $h_k = z_k - z_{k-1}$ ve $\bar{h}_k = 0.5 \cdot (h_k + h_{k+1})$ dir.

(3.36) ile verilen denklem dalga denklemi yaklaşımıdır. (3.37) denklemleri başlangıç koşullarına ve S sınırı üzerinde alanın sıfıra eşit olması koşuluna bağlı olarak yapılan yaklaşımları tanımlar.

L_1 sınırı üzerindeki koşulun ayrıklaştırılması,

$$\frac{1}{2}U(j,k,m+1) + \left(\frac{U(j,k,m+1)}{2a} + \hat{D}[U(j,k,m+1)] \right) \frac{l}{4} = G^1(m+1) \quad (3.38)$$

ve

$$j = 1 \dots J-1, \quad k = \frac{K}{2} + \sqrt{Jj - j^2},$$

koşuluyla sonuçlanır. Burada;

$$G^1(m+1) = l \sum_n U_n(y_j/a) \sum_{r=1}^m \frac{w_{n1}(r)}{2a} \xi_n(m+1-r) - \hat{D}[w_{n1}(r)] \eta_n(m+1-r)$$

$$w_{n1}(r) = \frac{2h}{\pi} \sum_{p=1}^{J-1} \frac{U(p,k,r) U_n(y_p/a)}{\sqrt{a^2 - y_p^2}}$$

$$\hat{D}[w_{n1}(r)] = \frac{2h}{\pi} \sum_{p=1}^{J-1} \hat{D}U(p,k,r) \frac{U_n(y_p/a)}{\sqrt{a^2 - y_p^2}}, \quad k = \frac{K}{2} + \sqrt{Jp - p^2} \dots$$

$$\hat{D}[U(p,k,r)] = \begin{cases} \frac{U(p,k,r) - U(p,k-1,r)}{z_k - z_{k-1}} \frac{z_k}{a} + \frac{U(p+1,k,r) - U(p,k,r)}{y_{p+1} - y_p} \frac{y_p}{a} \\ p = 1 \dots \frac{J}{2} - 1, \\ \frac{U(p,k,r) - U(p,k-1,r)}{z_k - z_{k-1}} \frac{z_k}{a} + \frac{U(p,k,r) - U(p-1,k,r)}{y_p - y_{p-1}} \frac{y_p}{a} \\ p = \frac{J}{2} \dots J-1, \end{cases}$$

$$\xi_n(m+1-r) = \frac{(-1)^n}{\pi} \xi_n(l(m+1-r))$$

$$\eta_n(m+1-r) = \frac{(-1)^n}{\pi} \eta_n(l(m+1-r))$$

dir. L_2 sınırı üzerindeki koşul için yapılan yaklaşım ise;

$$U(j,0,m+1) = \frac{l}{2} D_+^z U(j,0,m+1) + l \sum_n \sin(\lambda_n y_j) \sum_{r=1}^m J_0(\lambda_n(m+1-r)l) D_+^z [w_{n2}(0,r)], \quad (3.39)$$

ve

$$w_{n2}(0,r) = \frac{1}{J/2 - j_0} \sum_{p=j_0+1}^{J-j_0-1} U(p,0,r) \sin(\lambda_n y_p), \quad j_0 h = a - b$$

şeklindedir.

(3.36) - (3.39) fark problemi, Q_a bölgesinde ikinci dereceden körvi-lineer sınır civarında birinci dereceden doğrulukla orijinal probleme yaklaşır.

(3.9), (3.12), (3.21), (3.27) ve (3.28)'den itibaren tam yutucu sınır koşulları çerçevesinde izlenen ve test edilen hesaplama sonuçları; ızgaraların sınır değer problemlerinde kullanılan koşulların Bölüm 2'de gerçekleştirilen nümerik testleriyle

pratik olarak özdeştir. Bundan dolayı burada, mevcut tartışmadan ayrılmadan, ancak teknik detayları da ihmal ederek, durumu bir bütün olarak tanımlayan tek bir sonuç vermekle yetinilecektir.

Şekil 3.2 deki sonuçlar, (3.9) tam yutucu koşullarının kullanımıyla oluşan hataları (kesikli çizgiler), aşağıdaki klasik sezgisel ABC'nin birinci dereceden yaklaşımı olan

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2a} \right) U(\rho, \theta, t) = 0 \Big|_{\rho=a}$$

ifadesinin kullanılmasıyla oluşan hatalarla (sürekli çizgiler) karşılaştırmaya imkan verir (Engquist ve ark.1977).

Burada, basit geometrili (bkz. Şekil 3.2,a) ve (3.1) ile tanımlanan problemin benzeri iki farklı problem incelenecektir. $\varphi = F = \sigma = \varepsilon - 1 \equiv 0$ ve ψ kaynak fonksiyonları sol kolonda verilen için,

$$\psi(\rho, \theta) = \begin{cases} 10(1 + \cos \theta + \cos 2\theta), & \rho \leq 0.45 \\ 0, & \rho > 0.45 \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

dir, sağ kolonda verilen için ise,

$$\psi(\rho, \theta) = \begin{cases} 10(1 + \cos \theta + \cos 2\theta), & |\rho - 0.2| \leq 0.15 \\ 0, & |\rho - 0.2| > 0.15 \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

dir. $D(j, k, m) = U^a(j, k, m) - U^b(j, k, m)$ lokal hataları, $\rho = a = 0.5$, $0 \leq \theta \leq \pi$ değerleri için sanal sınır üzerindeki ağ birimlerinde hesaplanır.

$$D(m) = \frac{1}{N} \sum_{j,k} |D(j, k, m)| \quad \text{değeri ise, } Q_a \text{ bölgesine ait tüm ağların sınırları}$$

içinde m -inci zaman adımındaki ortalama global hatayı veren ifadedir (N , toplam ağ birimleri sayısıdır). Bu örnekte ρ ve θ daki (j ve k indisleri) ayrıklaştırma adımı $1.22 \cdot 10^{-2}$ ve zamandaki ayrıklaştırma adımı ise $7.53 \cdot 10^{-5}$ olarak alınmıştır. Hataların gerçel değerlerinin elde edilmesi için, yapılan algoritma iki problemin çözümü için eşzamanlı olarak kullanılır. Bunlardan birincisi çözümü U^a olan ve $\rho = a$ sanal sınırı üzerinde test edilen yutucu koşula sahip (3.1) probleminin ayrık benzeridir. İkincisi ise, $U|_{\rho=b} = 0$ koşullu (3.1) probleminin ayrık benzeridir.

$t \in (0, T)$ zamanının incelenen tüm anlarında, $\rho = b$ sınırındaki alan sıfır olacak şekilde b değeri belirlenir ve osilasyon yayılmasının sonlu hızı da b değerinin belirlenmesine imkan verir. Bundan dolayı, bu problemin çözüm hatası U^b , sadece (3.1) orijinal probleminin ayrıklaştırılmasıyla meydana gelen hatadan başka bir şey değildir. Bunun belirgin bir sonucu olarak da $D(j, k, m)$ farkı, $\rho = a$ sınırı üzerinde değişik yutucu koşulların kullanılmasıyla oluşan gerçel hatayı veren bir fark olarak ortaya çıkar.

Üzerlerinde tam ışıma koşulu olan sanal sınırların ileri sürülmesi ile bağlantılı olarak sonlu farklar metodundaki hesaplama uzayının sınırlanmasının, hesaplama hatasını artırmadığı, sadece problemin ayrıklaştırılmasıyla ortaya çıkan belirli bir hata düzeyinde bıraktığı birçok nümerik deney sonuçlarıyla ispatlanmıştır (Şekil 3.2). Klasik sezgisel ABC metodunun kullanılmasından kaynaklanan hata düzeyini yeterince doğru olarak tahmin etmek çoğu durumlarda imkansızdır.

Puls algılama verisinin yorumu, incelenen cisim tarafından oluşturulan sinyalin (genlik, zaman gecikmesi, polarite, şekil, vb. gibi) karakteristiklerinin analizine dayanır. Bu bölümde incelenen model problemlerin çözüm sonuçlarıyla elde edilen bu türden karakteristiklere örnekler, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'de verilmiştir. Şekil 3.3'deki diyagramlar,

$$\tilde{U}^t(z, t, \Phi) = \exp\left[-(t - t_0 + z)^2\right], \quad t_0 = 3$$

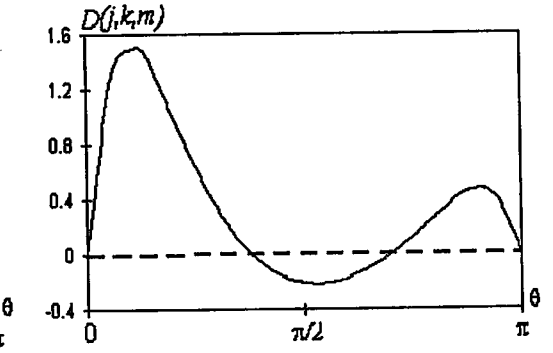
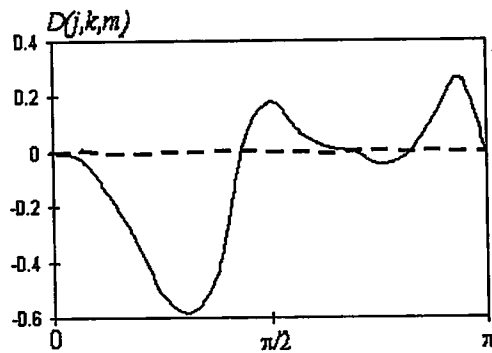
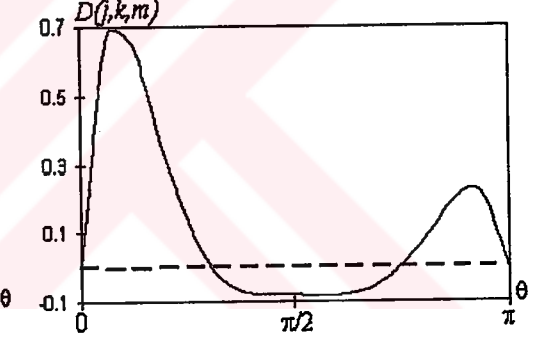
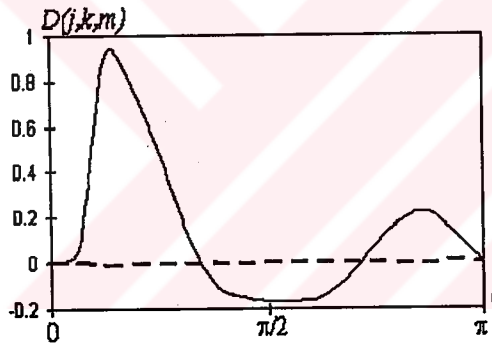
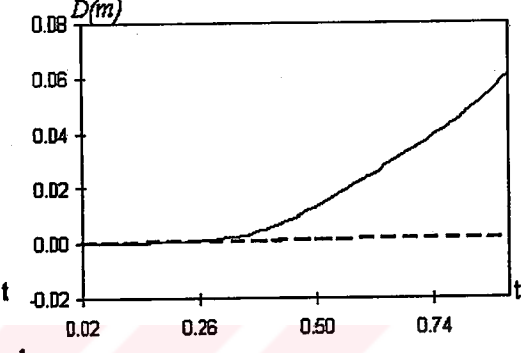
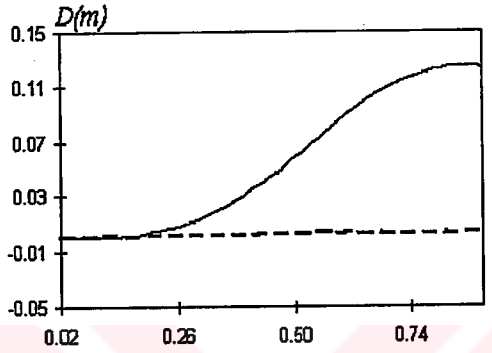
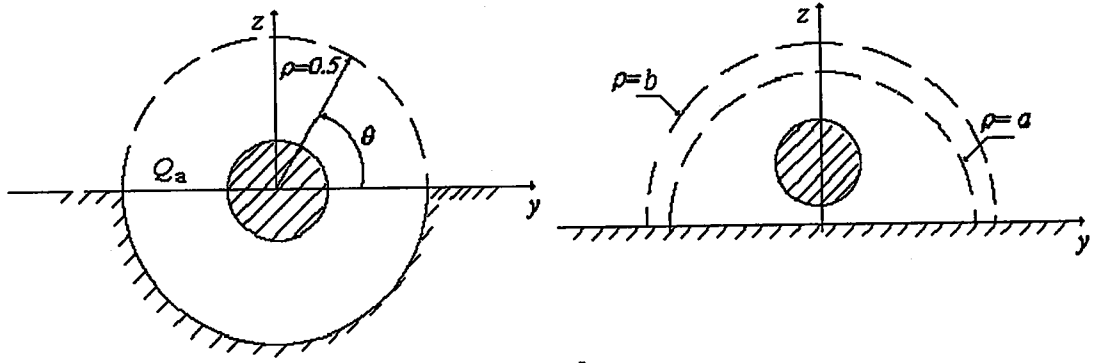
sinyali ile uyartılan, düzlemsel katmanlı yapıların (bkz. Şekil 3.1,c) yansıma bölgesinde ortaya çıkan;

$$\tilde{U}^s(z, t, \Phi) = \tilde{U}(z, t, \Phi) - \tilde{U}^t(z, t, \Phi)$$

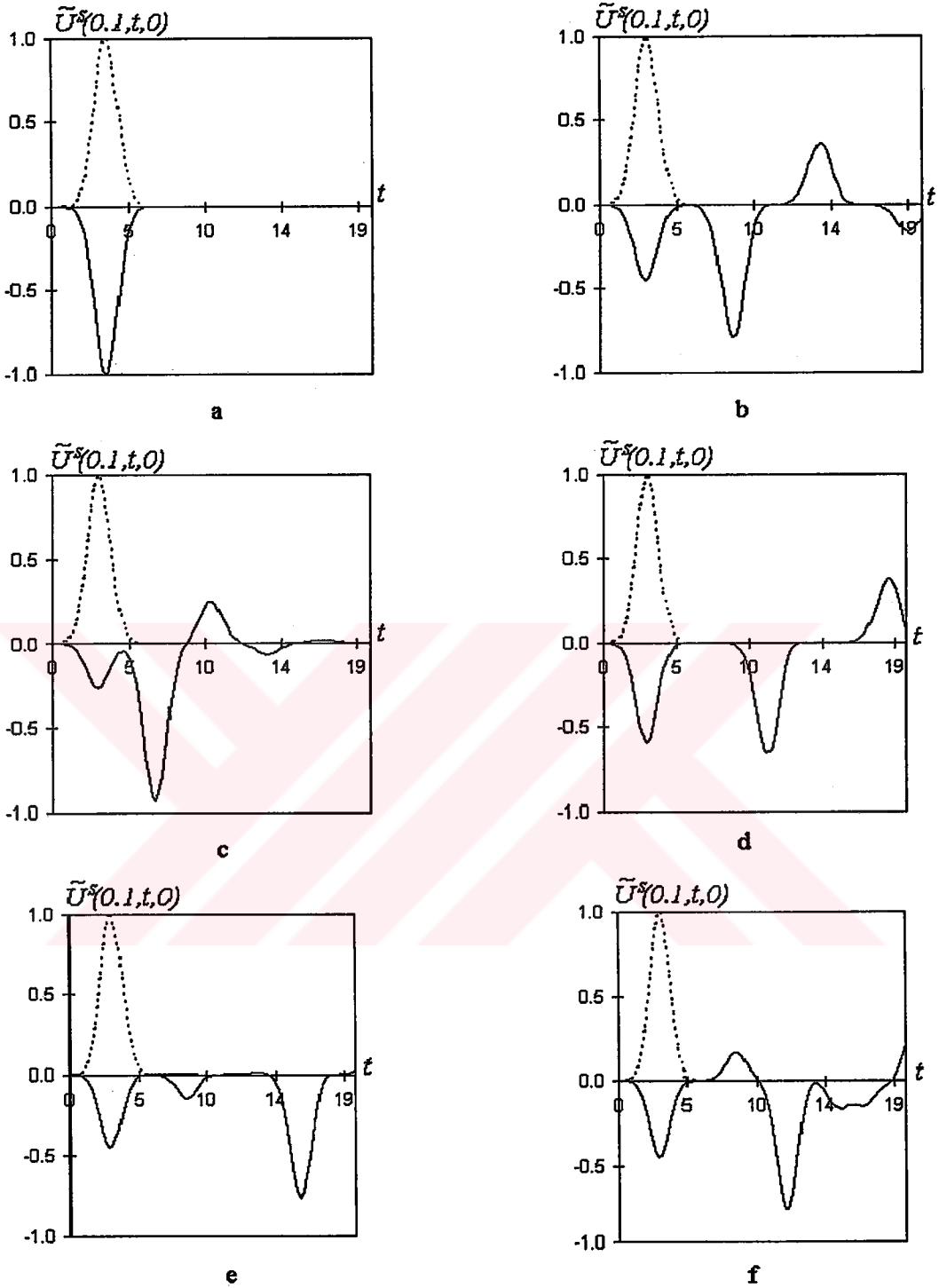
pulslarının genlikleridir. $\tilde{U}(z, t, \Phi)$ fonksiyonu, parametreleri;

$\sigma = 0$, $\tilde{F}(z, t, \Phi) = 0$, $\Phi = 0$, $\tilde{\varphi}(z, 0) = \tilde{U}^t(z, 0, 0)$, $\tilde{\psi}(z, 0) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{U}^t(z, t, 0) \Big|_{t=0}$ olan (3.23) probleminin çözümüdür.

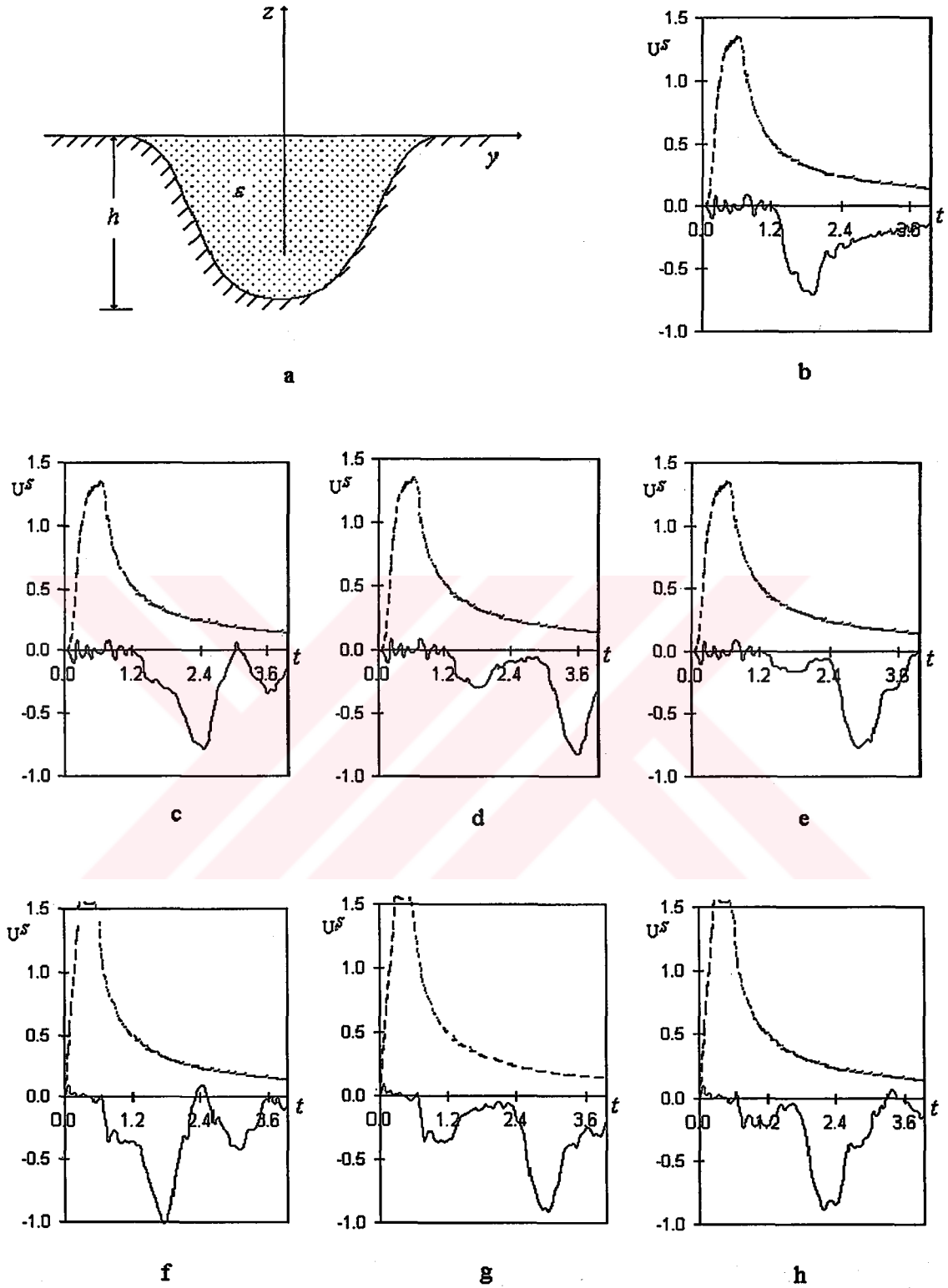
S saçılma yüzeyi tamamen düz olmadığında, saçılma esnasındaki özellikleri yer altı puls algılama model problemi durumunda çözülen (3.1) model problemi çerçevesinde inceleyebiliriz. Bu durumda,



Şekil 3.2 İki çeşit model problem geometrisi (a) için (3.9) tam yutucu koşulları (kesikli çizgiler) ile birinci dereceden yaklaşımli klasik ABC'nin (sürekli çizgiler) karşılaştırmalı sonuçları: (b) Global hata, (c) $t=0.6$ ve (d) $t=0.9$ anlarında $\rho=a=0.5$ sanal sınırı üzerinde ağ hücrelerindeki lokal hatalar.



Şekil 3.3 $z = -b$ deki yansıtıcı düzlem üzerindeki $\epsilon(z)$ permitiviteli bir dielektrik katman tarafından \tilde{U}^i pulsunun saçılması ($z=0$ civarındaki geçici dalgalanma) a) $b=0.5$, $\epsilon(z)=7$; b) $b=1$, $\epsilon(z)=7$; c) $b=1$, $\epsilon(z)=3$; d) $b=1$, $\epsilon(z)=15$; e) $b=2$, $\epsilon(z) = \begin{cases} 7, -1 < z < 0 \\ 15, -2 < z < -1 \end{cases}$; f) $b=2$, $\epsilon(z) = \begin{cases} 7, -1 < z < 0 \\ 3, -2 < z < -1 \end{cases}$.



Şekil 3.4 Çeşitli değerlerde yapı parametrelerine sahip saçıcı için {(b) $h=0$; (c,f) $h=0.1$, $\varepsilon=7$; (d,k) $h=0.3$, $\varepsilon=7$; (e,h) $h=0.3$, $\varepsilon=3$ }, $(y, z)=(0,1)$ (b-e) ve $(0, 0.3)$ (f-h) uzay noktalarındaki $U^S(y,z,t)$ puls alanları.

$$U^i(y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \iint dy_0 dz_0 \psi(y_0, z_0) \frac{\chi\left(t - \sqrt{(z - z_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)}{\sqrt{t^2 - (z - z_0)^2 - (y - y_0)^2}},$$

$$\psi(y_0, z_0) = \chi(0.3 - |z_0 - 0.6|)\chi(0.3 - |y_0|)$$

pulsu ile uyartılan yapıların (Şekil 3.4,a) cevabı, Şekil 3.4'de görülmektedir.

$U^s(y, z, t) = U(y, z, t) - U^i(y, z, t)$ pulsunu ise, ψ fonksiyonunun tanımladığı anî çalışan bir kaynak tarafından oluşturmak mümkündür (Bkz. (3.1) problemi, $F = \phi = 0$). $U^i(y, z, t)$ pulsunun çarpmasıyla, uzayın verilen noktası civarında oluşan geçici dalgalanmalar, Şekil 3.4'de verilmiştir.

$$|y| < a = 3 \text{ konumlarında } S \text{ yüzeyinin eğriliği, } z = \frac{h}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{a} y + \pi\right) - 1 \right]$$

fonksiyonu ile tanımlanır (Şekil 3.4,a), düzlemde oluşturulan oyuk ise, ϵ dielektrik permitiviteli ve $\sigma = 0$ geçirgenlikli bir malzemeyle doldurulmuştur.

3.4. Sonuçlar

Bu bölümde, daha önceki bölümlerde incelenen yaklaşımlar yeniden düzenlenerek puls algılama model problemlerinin çözümleri için kullanılmıştır. Ancak, sonlu-farklar metodunun hesaplama uzayının doğru sınırlanması burada dikkat edilmesi gereken en önemli husustur. Bu sorunun çözüm yolu, açık bölgedeki bir problemin sanal sınırlar üzerinde ilave yutucu koşulların ileri sürülmesiyle sınırlanan bir problem olarak formüle edilmesidir. Bu tez çalışmasında bu tür koşulların oluşturulması, kaynaklar ve saçıcıların bulunduğu bölgeden dışarı giden dalgalara ait gösterimlerin kullanılması şeklindedir. Sanal sınırlar üzerindeki ilave yutucu koşullar, sonlu-farklar metodunun hesaplama planına doğru olarak dahil edilebilir. Pratik olarak buna engel de yoktur. İlave koşulların öngörülen metodun kararlılığı ve yakınsaması üzerinde herhangi bir etkisi söz konusu değildir. Klasik ABC yaklaşımın kullanıldığı durumdan farklı olarak, hesaplama uzayının etkin sınırlanması ile ilgili problem, tam yutucu sınır koşullarıyla ve matematiksel yollarla simüle edilen fiziksel proseslerde bozulma olmaksızın çözülebilir.

4. AÇIK YAPILARDAKİ GEÇİŞLERİN MODELLENMESİNDE TAM YUTUCU KOŞULLAR

Bu bölüm, kompakt rezonans homojensizliğine sahip iki boyutlu sonsuz büyüklükteki ortamlarda geçiş proseslerinin analizinde kullanılan sonlu farklar metodu ile ilgili hesaplama bölgesinin, doğru ve etkin sınırlanması problemleriyle ilgilidir. Bölüm 2’de ızgara model problemine ve Bölüm 3’de puls algılama model problemlerine uygulanan metot burada açık rezonans yapılarına ait model problemlere de uygulanacaktır. Önerilen yaklaşımın esası, dikdörtgen ağda (mesh) tam yutucu koşulların formüle edilmesi ve bunların nümerik hesaplama planına dahil edilmesidir.

4.1. Giriş

Aşağıda inceleyeceğimiz (4.1) ifadesi ile verilen başlangıç sınır değer problemi, $R^2 = \{g = \{y, z\} : |y| < \infty, |z| < \infty\}$ uzayında sinüzoidal olmayan E-polarizeli dalgaların ışıması, yayılması ve saçılması işlemlerini tanımlar.

$$\left. \begin{aligned} & \left[-\varepsilon(g) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma(g) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] U(g, t) = F(g, t), \\ & t > 0, \quad g = \{y, z\} \in Q = R^2, \\ & U(g, t) \Big|_{t=0} = \varphi(g), \quad \frac{\partial}{\partial t} U(g, t) \Big|_{t=0} = \psi(g), \\ & U(g, t) = E_x, \quad \frac{\partial}{\partial t} H_y = -\frac{1}{\eta_0} \frac{\partial}{\partial t} E_x, \quad \frac{\partial}{\partial t} H_z = \frac{1}{\eta_0} \frac{\partial}{\partial t} E_x, \\ & E_y = E_z = H_x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Homojensizlikler, $\sigma(g) = \sigma_0(g) \eta_0$ ve $\varepsilon(g)$ reel sonlu fonksiyonlarıyla verilir.

Burada, $\sigma_0(g)$ özgül iletkenliği; $\eta_0 = (\mu_0 / \varepsilon_0)^{1/2}$ serbest uzayın karakteristik empedansı ve $\varepsilon(g)$ ortamın bağıl dielektrik permitivitesini belirler.

Bu türden problemler yakın geçmişte literatürde incelenmiş ve hesaplama bölgesi, tüm kaynaklar ve etkin saçıcıları kapsayan koordinat (kutupsal ağ) sanal sınıryla kesilerek, sonlu-farklar metoduyla bunların tam çözümü elde edilmiştir (Sirenko ve ark. 2000, Perov ve ark. 1999, Sirenko ve ark. 1999). Ancak, bu tezdeki bizim çalışmalarımızda dikdörtgen ağa ait çözüme benzer bir çözüm öngörülmüştür. Böyle bir değişikliğin ana amacı, bilgisayar kaynaklarının uygun şekilde işletilemediği kutupsal koordinatlarda ayrıklaştırmadan kaynaklanan birçok önemli ve ciddi sıkıntıdan kurtulmaktır. Sorun, zamanda ayrıklaştırma adımı l ve uzayda ayrıklaştırma karesel adımı h^2 'ın değerinin, kutupsal ağda sonlu-farklar hesaplama planlarının kararlılığını sağlamak için aynı derecede olması gereğidir. Bu gereksinim, l 'in h 'la kıyaslanabildiği dikdörtgen ağda çalışmayla hesaplama zamanını bariz bir şekilde artırır. Kutupsal ağda çalışmanın olumsuz etkisini artıran diğer bir neden, aşağıda fiziksel olarak doğrulanan gereksinimle ortaya çıkar (Taflov 1995): Uzaysal ağın maksimum boyutu analiz edilen nesnenin tipik boyutundan en az iki misli daha küçük olmak zorundadır. Bunun nedeni, hesaplama bölgesinin büyük yarıçap değerinin, açısal değişimdeki uzaysal ağın önemli ölçüde azaltılmasındandır. Kutupsal koordinatlardaki koordinat sınıryla analiz bölgesi kapatılabilir ve dikdörtgen ağda problem çözülebilir. Bununla birlikte bir koordinat ağından diğerine geçişte böyle bir direkt çözüm, sınır koşulu yaklaşımında köşe problemini ortaya çıkarır. Bu problemin bir şekilde çözülmemesi durumunda, tam yutucu koşulların kullanılma avantajları kaybolur.

Burada, dikdörtgen ağdaki (4.1) başlangıç sınır değer problemlerini doğru ve etkin bir şekilde ayrıklaştırmaya imkan verecek şekilde (tam yutucu koşulların yapılması için) tüm birikmiş deneyimler kullanılarak yukarıda belirtilen probleme çözüm üretilmeye çalışılmıştır. Önceki bölümlerdeki analizlerde, tam yutucu koşulların oluşturulmasının esasını kapalı dalgakılavuzları, Floquet kanalları, horn-tipi dalgakılavuzları, serbest uzay vb. gibi çeşitli düzenli dalgakılavuzu yapıları boyunca ortaya çıkan ışınma koşulları oluşturmuştur (Sirenko ve ark. 2000). Evrimsel temellerin özellikleri, kılavuz yapının tipine bağlı olmadığından bu özellik açık problemlerde incelenen bölgelerin yayılma yönüne göre enine koordinat sınırlarıyla kapatılması imkanını doğurmaktadır. Bu koordinat sınırı dışarı giden bir dalganın

yayıma kanalı için bir sınırdır. Aşağıda incelenen durumda, bir ışınma kanalını kapama gerekliliğine karşı gelinerek, analiz bölgesi dört koordinat sınırıyla $Q_L = \{g \in Q : L_4 < y < L_3; L_2 < z < L_1\}$ 'e daraltılır (bkz. Şekil 4.1,a). Bu durumda, koordinat sınırlarının kesişim noktalarında, köşe noktaları problemi ortaya çıkar (Bamberger ve ark. 1990, Collino 1993). Tam yutucu koşulların oluşturulması ve "kapalı" başlangıç sınır değer problemlerinin çözüm algoritmasının yapılmasına ait bir teknik olduğundan, asıl dikkat bu probleme çevrilir (Bkz. Bölüm 2 ve 3 ile Sirenko ve ark. 2000).

Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'de, (4.1) problemlerine ait nümerik çözüm örnekleri verilmiştir. Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'deki çizimlerde dielektrik lensli bir eksponansiyel horn (Şekil 4.1,b), kaynak sol odağa yakın yerleştirilmiş bir dielektrik elips (Şekil 4.1,c), açık uçlu bir düzlemsel-paralel dalgakılavuzu (Şekil 4.1,d), bir metal ızgara reflektör yapısı (Şekil 4.2,a), bir parabolik reflektör (Şekil 4.2,b), silindirik aynalı bir açık rezonatör (Şekil 4.2,c) ve metal ekranlı bir Luneberg lensinin (Şekil 4.2,d), $F(g, t)$ yarı-sonsuz basamak fonksiyonu uyarımı durumunda farklı t gözleme anlarındaki elektrik alan şiddetinin uzaysal dağılımı görülmektedir. Basit model yapıların yardımıyla, (4.1) problemlerini çözmek için etkin nümerik algoritmalar; gerçek malzeme ve geometrik parametrelerle tanımlanan oldukça kompleks çeşitli cisimlerdeki geçiş ve kararlı-hal prosesleri hakkında güçlü, kesin ve tam olarak bilgi elde etmeye imkan verir. Günümüzde, geleneksel yaklaşımlar, yüksek seviyedeki güncel temel ve uygulamalı radyo fizik problemlerini çözmede yetersiz kaldığından, böyle bir bilginin elde edilmesi elektromagnetik teori ile çalışmalar yapan herkesi yakından ilgilendirir.

4.2 Problemin Formülasyonu ve Tam Yutucu Koşulların Oluşturulması

F , φ , ϕ , σ , ve $\varepsilon-1$ fonksiyonlarının Q da sonlu ve tüm incelenen zamanları ($0 < t < T$) için, bunların $Q_L = \{g \in Q : L_4 < y < L_3; L_2 < z < L_1\}$ bölgesinde desteklerinin olduğunu varsayalım. Ayrıca, bu fonksiyonların, $W_2^1(Q^T)$, $Q^T = Q \times (0, T)$, $T < \infty$ enerji sınıfında (Sobolev uzayı) (4.1) probleminin tek

çözülebilirliği hakkındaki teoremin gereklerini karşıladığını kabul edelim (Ladyzenskaya 1985, Sirenko ve ark. 2000). Bu varsayımların ışığında, $z = L_1$ ($z = L_2$, $y = L_3$, $y = L_4$) sanal sınırı üzerinde (aşağısında, sağında, solunda) kaynak veya saçıcılar olmayacaktır. Bundan dolayı, ${}_L Q = Q \setminus \overline{Q}_L$ bölgesindeki U fonksiyonu, sadece bir yönde ilgili sınır boyunca dışarı “giden” dalgalara karşılık gelir ve ortam parametreleri $\varepsilon - 1 = \sigma = 0$ olan homojen (4.1) problemini sağlar. Bu fonksiyonun Fourier transformunu alabiliriz. Yani;

$$u_y(\lambda, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(y, z, t) e^{i\lambda y} dy,$$

$$u_z(y, \lambda, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(y, z, t) e^{i\lambda z} dz.$$

ifadelerini kullanabiliriz. Ayrıca, homojen Cauchy problemlerine ait standart tekniği bir boyutlu Klein-Gordon denklemlerine uygulayabiliriz (Sirenko ve ark. 2000). Bu durumda;

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z} \right] u_y(\lambda, z, t) = \pm \lambda \int_0^t J_1(\lambda(t-\tau)) \frac{u_y(\lambda, z, t)}{\partial z} d\tau, \quad z \begin{cases} \geq L_1 \\ \leq L_2 \end{cases}, \quad (4.2)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial y} \right] u_z(y, \lambda, t) = \pm \lambda \int_0^t J_1(\lambda(t-\tau)) \frac{u_z(y, \lambda, t)}{\partial y} d\tau, \quad y \begin{cases} \geq L_3 \\ \leq L_4 \end{cases} \quad (4.3)$$

elde edilir.

Basit işlemler dizisi (t de Laplace transformasyonu, u_y ve u_z fonksiyonlarının transformasyonlarının türevlerine göre işlemsel denklemlerin çözümü ve ters Laplace transformasyonu), (4.2) ve (4.3) denklemlerini aşağıdaki formda yeniden yazmaya imkan verir:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z} \right] u_y(\lambda, z, t) = -\lambda \int_0^t \frac{J_1(\lambda(t-\tau))}{t-\tau} u_y(\lambda, z, t) d\tau, \quad z \begin{cases} \geq L_1 \\ \leq L_2 \end{cases}, \quad (4.4)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial y} \right] u_z(y, \lambda, t) = -\lambda \int_0^t \frac{J_1(\lambda(t-\tau))}{t-\tau} u_z(y, \lambda, t) d\tau, \quad y \begin{cases} \geq L_3 \\ \leq L_4 \end{cases} \quad (4.5)$$

Burada ilk yapılacak işlem, (4.4) ve (4.5) ifadelerinden (zamanda) lokal bağıntılara geçmektir (Sirenko ve ark. 2000). Bu amaç için integral formdaki Poisson

formülü (Korn ve ark. 1961);

$$\begin{aligned}
 J_1(x) &= \frac{2x}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \varphi) \sin^2 \varphi \, d\varphi; \\
 v &= -\lambda \int_0^t \frac{\sin(\lambda(t-\tau) \cos \varphi)}{\cos \varphi} u \, d\tau \\
 \frac{\partial v}{\partial t} &= -\lambda^2 \int_0^t \cos(\lambda(t-\tau) \cos \varphi) u \, d\tau
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} J_1(x) \\ v \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned}} \right\} \quad (4.6)$$

ele alalım ve;

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda^2 \cos^2 \varphi \right] v = -\lambda^2 u, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = v|_{t=0} = 0$$

eşdeğer diferansiyel formlarıyla (4.6) integral formlarının yer değiştirmesi için $D(a) \equiv [d^2/dt^2 + a^2]$ operatörünün $G(t, a) = \chi(t) \sin(at) a^{-1}$ temel çözümünü kullanalım. Sonuç olarak;

$$\left. \begin{aligned}
 \left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z} \right] u_y(\lambda, z, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial v_y(\lambda, z, t, \varphi)}{\partial t} \sin^2 \varphi \, d\varphi, & z \begin{cases} \geq L_1 \\ \leq L_2 \end{cases} \\
 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \pm \lambda^2 \cos^2 \varphi \right] v_y(\lambda, z, t, \varphi) &= -\lambda^2 u_y(\lambda, z, t), \\
 \left. \frac{\partial v_y(\lambda, z, t, \varphi)}{\partial t} \right|_{t=0} &= v_y(\lambda, z, t, \varphi)|_{t=0} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial y} \right] u_z(y, \lambda, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial v_z(y, \lambda, t, \varphi)}{\partial t} \sin^2 \varphi \, d\varphi, & y \begin{cases} \geq L_3 \\ \leq L_4 \end{cases} \\
 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \pm \lambda^2 \cos^2 \varphi \right] v_z(y, \lambda, t, \varphi) &= -\lambda^2 u_z(y, \lambda, t), \\
 \left. \frac{\partial v_z(y, \lambda, t, \varphi)}{\partial t} \right|_{t=0} &= v_z(y, \lambda, t, \varphi)|_{t=0} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

elde edilir veya ters Fourier transformasyonları alınarak ve ayrıca;

$$V_1(g, t, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} v_y(\lambda, z, t, \varphi) e^{-i\lambda y} \, d\lambda$$

$$V_2(g, t, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} v_z(y, \lambda, t, \varphi) e^{i\lambda z} \, d\lambda$$

eşitlikleri kullanılarak;

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z} \right] U(g,t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial V_1(g,t,\varphi)}{\partial t} \sin^2 \varphi d\varphi, & z \begin{cases} \geq L_1 \\ \leq L_2 \end{cases} \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] V_1(g,t,\varphi) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(g,t), \\ \frac{\partial V_1(g,t,\varphi)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= V_1(g,t,\varphi) \Big|_{t=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial y} \right] U(g,t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial V_2(g,t,\varphi)}{\partial t} \sin^2 \varphi d\varphi, & y \begin{cases} \geq L_3 \\ \leq L_4 \end{cases} \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] V_2(g,t,\varphi) &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} U(g,t), \\ \frac{\partial V_2(g,t,\varphi)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= V_2(g,t,\varphi) \Big|_{t=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

sonucu bulunur. Burada χ Heaviside basamak-fonksiyonu ve J_m ise Bessel fonksiyonudur.

4.3 Köşe Probleminin Çözümü

(4.9) ve (4.10) ile verilen denklemlerin her biri, analiz bölgesini $z < L_1$, $z > L_2$, $y < L_3$ veya $y > L_4$ yarı-düzlemine indirgeyerek, tam yutucu koşulun oluşmasını sağlar. Bu koşullarda, V_1 ve V_2 fonksiyonlarına göre dahili diferansiyel problemler iyi-tanımlıdır.

Analiz bölgesi bir dikdörtgen bölgeyle sınırlı iken, (4.9) ve (4.10) daki dört denklemin birlikte kullanılması zorunlu hale gelir ve dahili diferansiyel problemlere sınırların kesişim noktalarındaki (köşelerdeki) koşulların eklenmesi icabeder. Mevcut bilinenlerin (denklemler, bağıntılar) kullanımıyla köşe problemini çözmenin muhtemel birçok yolu vardır (Bamberger ve ark. 1990, Collino 1993), ancak burada en basit ve kolay anlaşılabilir olanının gösterimi ele alınacaktır. Örneğin, (4.9) ve (4.10) verilen ifadelerdeki ilk denklemleri işleme koyalım. Eş zamanlı olarak geçerli oldukları R^2 düzleminin çeyrek parçası, Şekil 4.1,a daki noktalarla kaplanır. Bu çeyreğin dışında $U(g,t)$ fonksiyonunu (ve dolayısıyla $V_1(g,t,\varphi)$ ve $V_2(g,t,\varphi)$

fonksiyonlarını) sıfırlayalım. Elde edilen fonksiyonlar için, tüm bağıntılar, R^2 de herhangi bir yerde geçerli kalan denklemlerle yüklenir. Bu bağıntılar,

$$\hat{f}(\lambda, \mu, p) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty e^{-pt} \int_{-\infty}^\infty e^{i\mu z} \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda y} f(y, z, t) dy dz dt. \quad (4.11)$$

global transformasyona tabi tutulursa, bu durumda, $U(g, t)$, $V_1(g, t, \varphi)$, $V_2(g, t, \varphi)$, $W_1(g, t, \varphi) = V_1(g, t, \varphi) \cos^2 \varphi + U(g, t)$ ve $W_2(g, t, \varphi) = V_2(g, t, \varphi) \cos^2 \varphi + U(g, t)$ fonksiyonlarının \hat{u} , $\hat{v}_1(\varphi)$, $\hat{v}_2(\varphi)$, $\hat{w}_1(\varphi)$ ve $\hat{w}_2(\varphi)$ görüntüleri için,

$$(p - i\mu)\hat{u} = \frac{2p}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \hat{v}_1 d\varphi, \quad (p - i\lambda)\hat{u} = \frac{2p}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \hat{v}_2 d\varphi, \quad (4.12)$$

$$\hat{w}_1 = \frac{p^2}{p^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi} \hat{u}, \quad \hat{w}_2 = \frac{p^2}{p^2 + \mu^2 \cos^2 \varphi} \hat{u}, \quad (4.13)$$

$$\hat{v}_1 = -\frac{\lambda^2}{p^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi} \hat{u}, \quad \hat{v}_2 = -\frac{\mu^2}{p^2 + \mu^2 \cos^2 \varphi} \hat{u}, \quad (4.14)$$

$$p^2 + \mu^2 + \lambda^2 = 0. \quad (4.15)$$

ifadeleri elde edilir. Şimdi;

$$\begin{aligned} -i\lambda \hat{w}_1(\varphi) &= -i\lambda \hat{u} \frac{p^2}{p^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \frac{p^2}{p^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi} \left[-p\hat{u} + \frac{2p}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \gamma \hat{v}_2(\gamma) d\gamma \right] \\ &= -p\hat{u} \frac{p^2}{p^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi} \left[1 + \frac{2\sin^2 \varphi}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma} d\gamma \right] \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} p\hat{u} \frac{p^2}{p^2 + \mu^2 \cos^2 \gamma} \times \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma} d\gamma \\ &= -\frac{p}{\cos \varphi} \hat{w}_1(\gamma) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} p\hat{w}_2(\gamma) \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma} d\gamma \end{aligned} \quad (4.16)$$

fonksiyonunu ele alalım. Burada sırasıyla ilkin (4.13), (4.12) ve (4.14) denklemleri ile

$$\frac{p^2}{p^2 + a\lambda^2} \times \frac{p^2}{p^2 + b\mu^2} = \frac{a}{a + (1-a)b} \times \frac{p^2}{p^2 + a\lambda^2} + \frac{b}{a + (1-a)b} \times \frac{p^2}{p^2 + b\mu^2}$$

eşitliği ((4.15) doğru iken geçerlidir) ve daha sonra tekrar (4.13) denklemi sırasıyla kullanılmıştır.

(4.16) ile verilen ifadelerde görüntülerden orijinallere dönülerek,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} \right] W_1(g, t, \varphi) = \frac{2 \cos \varphi}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma} \frac{\partial W_2(g, t, \gamma)}{\partial t} d\gamma,$$

$$z \geq L_1, y \geq L_3.$$

elde edilir. $-\dot{i}\mu\hat{w}_2(\varphi)$ fonksiyonu için bu tür işlemler dizisinin tekrarı

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} \right] W_2(g, t, \varphi) = \frac{2 \cos \varphi}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma} \frac{\partial W_1(g, t, \gamma)}{\partial t} d\gamma,$$

$$z \geq L_1, y \geq L_3$$

ifadesiyle sonuçlanır.

Analizi yapılan bölgenin, dikdörtgen bölge sınırı boyunca doğru olarak kapanmasına imkan veren tüm denklemler sistemi;

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z} \right] U(g, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial V_1(g, t, \varphi)}{\partial t} \sin^2 \varphi d\varphi, & z \begin{cases} \geq L_1 \\ \leq L_2 \end{cases} \\ \left[\frac{\partial^2 V_1(g, t, \varphi)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W_1(g, t, \varphi)}{\partial y^2} \right] &= 0, \\ \frac{\partial V_1(g, t, \varphi)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= V_1(g, t, \varphi) \Big|_{t=0} = 0 \\ W_1(g, t, \varphi) &= V_1(g, t, \varphi) \cos^2 \varphi + U(g, t) \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} \right] W_1(g, t, \varphi) &= \frac{2 \cos \varphi}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma} \frac{\partial W_2(g, t, \gamma)}{\partial t} d\gamma, & y \begin{cases} \geq L_3 \\ \leq L_4 \end{cases} \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} \right] W_2(g, t, \varphi) &= \frac{2 \cos \varphi}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma} \frac{\partial W_1(g, t, \gamma)}{\partial t} d\gamma, & z \begin{cases} \geq L_1 \\ \leq L_2 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

$$\left. \begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial y} \right] U(g, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial V_2(g, t, \varphi)}{\partial t} \sin^2 \varphi \, d\varphi, & y \begin{cases} \geq L_3 \\ \leq L_4 \end{cases} \\
\left[\frac{\partial^2 V_2(g, t, \varphi)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W_2(g, t, \varphi)}{\partial z^2} \right] &= 0, \\
\frac{\partial V_2(g, t, \varphi)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= V_2(g, t, \varphi) \Big|_{t=0} = 0, \\
W_2(g, t, \varphi) &= V_2(g, t, \varphi) \cos^2 \varphi + U(g, t)
\end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

formuna dönüştür.

4.4 Bazı Nümerik Sonuçlar

(4.17)–(4.19) denklemleriyle oluşan lokal koşullar, tam koşullardır. Bunların (4.1) ifadesine eklenmesiyle, problem nitelik bakımından değişmez ve çözüm bozulmaz. Bu koşulların sonlu-farklar hesaplama planında ayrıklaştırılması ve interpolasyonu, (Perov ve ark. 1999, Sirenko ve ark. 1999) çalışmaları ile (Sirenko ve ark. 2000) da rapor edilen benzer standart işlemler çerçevesinde yapılabilir.

Şekil 4.1 ve Şekil 4.2’de, diğer araştırmacılar tarafından önceden algoritma testleri yapılanlara benzer şekilde bazı nümerik deney sonuçları verilmiştir (Perov ve ark. 1999, Sirenko ve ark. 1999, 2000). Bunlardan önemli sayılabilecek çalışma sonuçlarından biri, Şekil 4.3’de görülmektedir. Bu durumda,

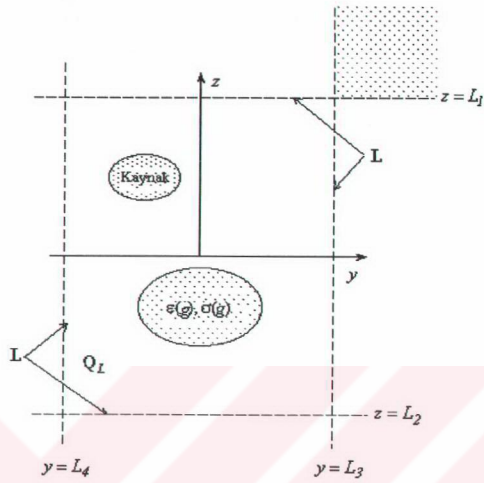
$Q_L = [0 < y < \sqrt{18}] \times [0 < z < \sqrt{18}]$ bölgesine,

$$F(g, t) = \chi \left[0, 25 - (y - \sqrt{2})^2 - (z - \sqrt{2})^2 \right] \chi(1-t) \cos(4\pi(t-0,5))$$

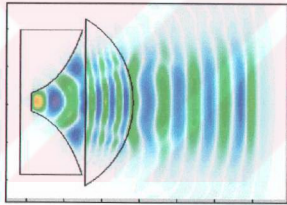
puls kaynağı yerleştirilir. Merkezi frekans, $\lambda = 0.5$ olan bir dalgaya karşılık gelir. Ayrıklaştırılmış zaman artışı 0.005’e, uzaysal artış ise 0.011’e eşittir. Şekil 4.3, a daki farklı t zaman anları için, Q_L deki $U(g, t) = E_x$ alan şiddeti dağılımının iki-boyutlu görünümü verilmektedir. Uyarı, Q_L ’in kaynağa en yakın olan ($y = z = 0$) köşesine $t = 1.5$ zaman sürecinde, en uzak ($y = z = \sqrt{18}$) köşesine ise $t = 3.5$ zaman sürecinde ulaşır. Q_L bölgesine giden silindirik bir puls dalgası için, Q_L bölgesinin sınırları hem düz hem köşeli kısımlarda tamamen transparandır. Q_L bölgesinin çapı

üzerinde düzenli aralıklarla yerleşik $y=z=\sqrt{8}$, $y=z=\sqrt{12.5}$ ve $y=z=\sqrt{18}$ noktalarında $U(g,t)$ ($0 < t < 10$) alanının değişimi, Şekil 4.3,b de verilir. Puls dalgasının hiçbir kısmi bileşeni, yayılma yönü dışına sapmaz ve geri yansıma olmaz.

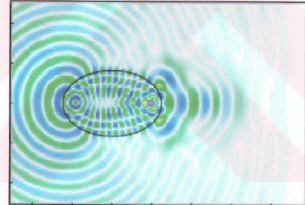




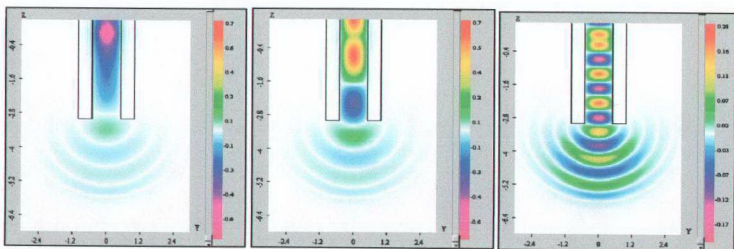
a



b

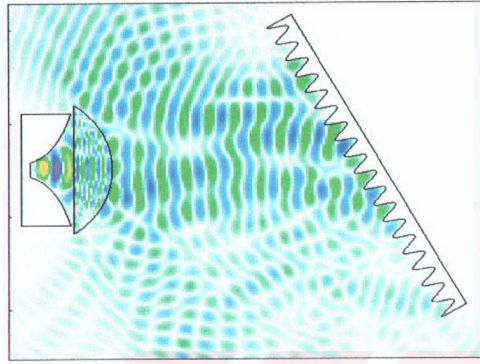


c

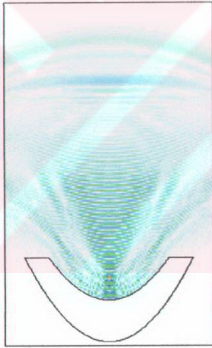


d

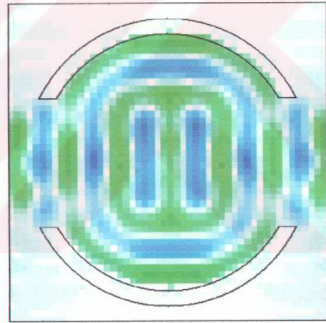
Şekil 4.1 Model problemlerin geometrisi (a) ve bunların nümerik çözüm örnekleri (b-d).



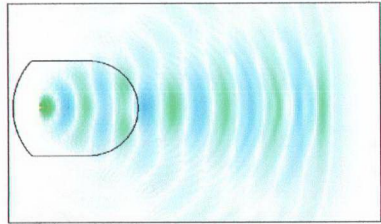
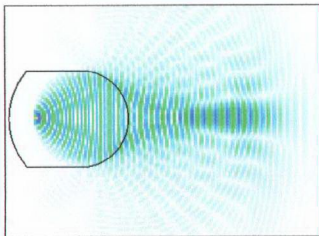
a



b

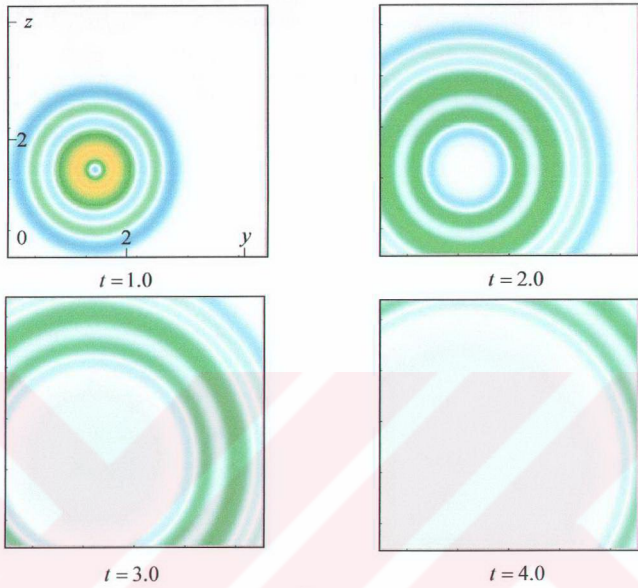


c

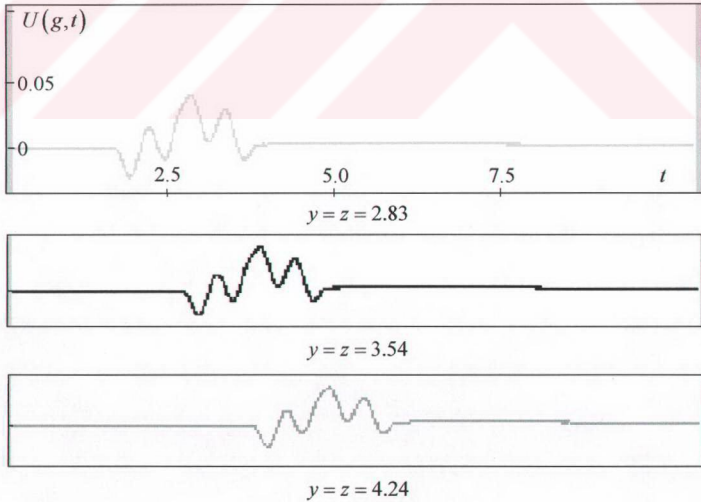


d

Şekil 4.2 (4.1) problemleri için nümerik çözüm örnekleri.



a



b

Şekil 4.3 (4.17)–(4.19) denklemlerinde oluşturulan yutucu koşulların test sonuçları.

5. PULS GECİKMESİYLE TOPRAĞIN DİELEKTRİK SABİTİNİN BELİRLENMESİ VE FDTD METODU İLE TEST EDİLMESİ

Verilen bir ortamda bir elektromagnetik dalganın (bu durumda puls şeklindeki bir dalganın) yayılmasına etki eden en önemli faktörlerden biri o ortamın dielektrik sabitidir. Dolayısıyla, bu bölümde problemlerle ölçüm tekniği adını verdiğimiz bir yöntem kullanılarak toprağın dielektrik sabitinin nasıl elde edilebileceği üzerinde durulmuştur. Söz konusu bu teknik dielektrik ortamda yayılan pulsun iletim gecikmesinin ölçümü esasına dayanır. HP8753A vektör network analizör ve iki prob kullanılarak gerçekleştirilen bu deneysel çalışma, farklı nemliliklere sahip toprak numuneleri için tekrarlanmıştır. Literatürde rapor edilen bilgilere paralel olarak bu tez çalışmasında yer alan ölçüm sonuçları da, bağıl nem oranı ile toprağın dielektrik sabitinin yaklaşık olarak lineer şekilde değiştiğini göstermiştir (Şen ve ark. 1999). Ayrıca, yukarıda sözü edilen ölçüm tekniğini, zaman domeninde sonlu farklar (FDTD) metoduyla yapılan puls gecikmesi simülasyon sonuçları da doğrulamaktadır.

5.1. Giriş

Dielektrik sabiti, malzemelerin elektriksel geçirgenliği olarak tanımlanır. Malzemelerin karakteristik özelliğini belirleyen bir parametre olduğundan, dielektrik sabiti RF ve mikrodalga frekanslarındaki çalışmaların yanı sıra fizik, kimya, jeofizik gibi değişik alanlarındaki çalışmalarda malzemeleri tanımak, malzemeleri birbirinden ayırt etmek ve bunların amaca uygunluğunu belirlemek amacıyla sıkça kullanılır.

Elektromagnetik dalgaların yayılma hızı büyük ölçüde içinde ilerlediği malzemenin bağıl dielektrik sabiti ile yakından ilişkilidir. Günümüze kadar yeryüzündeki malzemelerin dielektrik özelliklerini belirleyici çok sayıda araştırma yapılmıştır. Bu araştırmalar; yeryüzüne yakın olan toprak katmanlarındaki malzemeler için elektromagnetik ışımadaki zayıflamanın frekansla arttığını, ve belirli frekans bantlarında ise nemli malzemelerin kuru malzemelere göre daha çok kayıba

sebepler olduklarını deneysel olarak kesin bir şekilde sergilemişlerdir (Hallikainen ve ark. 1985). Yani; dielektrik sabiti, malzemenin içerdiği su miktarına bağlı olarak değişim gösterir. Düşük mikrodalga frekanslarında suyun bağlı dielektrik sabiti 80 civarında iken, toprak için ölçülen bağlı dielektrik sabiti 4-40 arasında değişmektedir. Mutlak dielektrik sabiti birçok malzeme için frekansla değişim göstermekle birlikte çoğu radar uygulamalarında (100MHz-1.5GHz) bu parametre çoğu kez sabit kabul edilir.

Dielektrik sabitinin önemi genellikle radar uygulamalarında öne çıkar. Gömülü cisimlerin yerini (ve bazı durumlarda cinsini) algılayan sistemlerden biri olan özel radar (GPR) sistemlerinin başarılı bir şekilde çalışmaları ile ilişkili en önemli faktörlerden biri dielektrik sabitidir. Yani, GPR sensörünün algılama gücü, çalışma frekansında dalganın hedefe çarpıp geri gelme süresinin ve dolayısıyla örnekleme hızının belirlenmesi ve toprağın dielektrik sabiti ile doğrudan bağlantılıdır. Dielektrik sabitin belirlenmesi genelde GPR verilerinin sağlıklı bir şekilde değerlendirilmesi, dolayısıyla da ne tür bir sensörün kullanılması gerektiği hakkında çok önemli bir ipucu verir. Bu nedenle GPR sensörleri, çalışma öncesinde (veya çalışma sırasında) ölçümü yapılacak toprağın dielektrik sabiti esas alınarak kalibre edilmelidir (Daniels 1996).

Dielektrik sabitinin deneysel olarak ölçülmesinde; yarıklı hat ve dalgakılavuzu ile ölçüm teknikleri, saçılma matrisi tekniği, kapasite ölçüm tekniği ve problemler ölçüm tekniği gibi birçok yöntem uygulamada kullanılmaktadır. Ancak, bunlardan toprak toprağın dielektriğinin ölçülmesinde bozucu etkisi en az ve en kolay olan problemler ölçüm tekniğidir (Şen ve ark. 1999; Hayes 1982). Malzemelerin dielektrik sabiti ölçümlerinin doğruluğu FDTD metodu ile yapılan simülasyonlarla da test edilebilir (Nassar ve ark.1999).

5.2. Dielektrik Malzemelerin Özellikleri

Mikrodalga çalışmalarında verilen bir ortam içinde ilerleyen dalga hızı, ilerlediği ortamın dielektrik sabiti ile doğrudan bağlantılıdır. Dolayısıyla, bir cismin

(hedefin) kaynağa olan uzaklığını belirleyebilmek için ortamın dielektrik sabitinin bilinmesi gerekir. Elektromagnetik dalgaların yayılmasının analizinde Maxwell denklemleri temel oluşturur. İdeal bir dielektrik malzemede, magnetik geçirgenlik ve elektriksel geçirgenlik sabittir. Yani bu parametreler frekansa bağımsızdır ve dielektrik ortam saçıcı (dağıtıcı) özellik sergilemez. Ayrıca, ideal bir dielektrikte yayılma kayıpları söz konusu değildir.

Genel olarak karmaşık dielektrik sabitini;

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' \quad (5.1)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada, ϵ' parametresi elektriksel geçirgenlikle ilişkili olup bağıl geçirgenlik cinsinden de ifade edilebilir. ϵ'' parametresi ise hem iletkenlik (σ_e) ve hem de frekansa bağımlı kayıplarla ilişkilidir. Dielektrik sabiti ϵ_e ve iletkenliği σ_e olan bir ortam için, rot H içeren Maxwell denklemi;

$$\text{rot} \vec{H} = j\omega \epsilon_e \vec{E} + \sigma_e \vec{E} \quad (5.2)$$

veya

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= j\omega \left[\epsilon'_e - j\epsilon''_e - j\frac{\sigma_e}{\omega} \right] \vec{E} \\ \text{rot} \vec{H} &= j\omega \left[\epsilon'_e - j \left(\epsilon''_e + \frac{\sigma_e}{\omega} \right) \right] \vec{E} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

şeklinde ifade edilebilir. (5.3) denklemlerinden de görüldüğü gibi ϵ_e 'nin sanal bileşeni ile iletkenliğin toplamı, malzemenin zayıflatma faktörüne etki etmektedir. Dolayısıyla, karmaşık dielektrik sabitinin gerçel ve sanal bileşenlerini sırasıyla;

$$\left. \begin{aligned} \epsilon'' &= \epsilon''_e + \frac{\sigma_e}{\omega} \\ \epsilon' &= \epsilon'_e \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

şeklinde de yazabiliriz.

Dielektrik sabitinin sanal bileşeni dielektrik kayıp olarak da ifade edilir. Uygulamada iletkenlikleri 10 mS/m'den düşük olan toprak türleri için ϵ'' parametresinin etkisi ihmal edilecek kadar küçük olur ve hesaplamalarda göz önüne alınmaz. Yani; bu durumda dielektrik sabitini sadece gerçel bileşen temsil eder ($\epsilon = \epsilon'$). Yine GPR uygulamalarında (tipik olarak 25-1500 MHz frekans

aralığında) çoğu tortul toprak türü için bağıl mağnetik geçirgenlik $\mu_r = 1$ olarak alınır (Martinez ve ark. 2001).

Elektromağnetik dalganın verilen herhangi bir ortamdaki yayılma hızı genel olarak;

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (5.6)$$

eşitliğinden hesaplanır. Burada c ışık hızı, ϵ_r bağıl dielektrik sabiti, μ_r ise bağıl mağnetik geçirgenliktir (Fruhirth ve ark. 1996).

Genel olarak toprak-su karışımının dielektrik sabiti frekansın, sıcaklığın, toprak içindeki tuz miktarının, hacimsel nem içeriğinin, toprak parçacıklarının şeklinin ve bir bütün olarak toprağın yoğunluğunun bir fonksiyonudur (Hallikainen ve ark. 1985).

5.3. Problarla Ölçüm Tekniği

Bir elektromağnetik dalganın belirli bir ortamdaki yayılma hızı o ortamın dielektrik ve mağnetik özelliklerine bağımlıdır. Ancak, çalışılan frekanslarda ortamın mağnetik geçirgenliği $\mu_r = 1$ olduğundan (Martinez ve ark. 2001, Şen ve ark. 1999), elektromağnetik dalganın iletim gecikmesini ölçmek suretiyle ortamın dielektrik sabitini bulmak mümkündür. Şekil 5.1 bu amaç için hazırlanan ölçüm düzeneğini göstermektedir. Ölçümler için kullanılan iki prob ve network analizör vasıtasıyla numune ve kablolar boyunca elektromağnetik dalganın iletim gecikmesi sağlıklı bir şekilde ölçülebilir. Bu yöntemle toprağın dielektrik sabitinin ölçülmesi son derece pratik olup elde edilen verilerin doğruluk oranları da çok yüksektir.

Dielektrik sabitinin ölçülmesi istenilen ortam içerisine yerleştirilen bir prob vasıtasıyla gönderilen bir puls işareti, l uzaklığındaki ikinci bir prob tarafından algılanır. Dielektrik ortam içerisindeki puls gecikmesi ise boşluktaki (havadaki) puls gecikmesiyle kıyaslanarak ortamın dielektrik sabiti elde edilir. Birbirine paralel olacak şekilde tutulan problemler arasındaki mesafe l ise bu durumda, örneğin önce

havadaki daha sonra dielektrik ortamdaki iletim gecikmeleri ölçülür ve dielektrik sabitinin hesaplanması için aşağıdaki yöntem uygulanır. Yani, havada $v_h = c$ hızıyla yayılan elektromagnetik dalga için;

$$t_h = \frac{l}{c} \quad (5.7)$$

ifadesi geçerlidir. Burada t_h , elektromagnetik dalganın havadaki iletim gecikmesini belirleyen süresidir (hava için $\epsilon_h = 1$ ve $\mu_h = 1$ dir).

Problar, aralarındaki l uzaklığı sabit kalacak şekilde seçilen numune içine yerleştirilir ve iletim gecikmesi ölçümü tekrarlanır. Dielektrik ortam içerisindeki iletim gecikmesi bu durumda;

$$t_t = \frac{l}{v_t} \quad (5.8)$$

veya

$$t_t = \frac{l}{c} \sqrt{\epsilon_t \mu_t} \quad (5.9)$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada t_t elektromagnetik dalganın topraktaki gecikmesini belirleyen zaman, v_t ise dalganın yayılma hızıdır. (5.7) ve (5.9) denklemlerinden;

$$\frac{t_t}{t_h} = \frac{l/c}{l/c} \sqrt{\epsilon_t \mu_t} \quad (5.10)$$

sonucu yazılabilir. Literatürde rapor edildiği gibi, Sakarya, Hereke, Şile ve Tavşanlı yörelerinden alınan toprak numuneleri ve bu yörelerden toplanan taşkumu olarak isimlendirdiğimiz numuneler için de yine $\mu_t = 1$ dir (Martinez ve ark. 2001, Şen ve ark. 1999). Dolayısıyla (5.10) ifadesini;

$$\epsilon_t = \left(\frac{t_t}{t_h} \right)^2 \quad (5.11)$$

şeklinde basite indirgenerek yeniden yazılabilir.

Dielektrik sabitinin bir başka hesaplanma yöntemi de, verilen bir numune içindeki problar arası mesafeyi değiştirmek ve iletim gecikmesi ölçümlerini tekrarlamaktır. Elde edilen ölçüm değerleri aşağıdaki bağlı dielektrik sabitini veren denklemde kullanılarak nihai sonuç elde edilebilir. Bir başka deyişle, (5.6) eşitliği;

$$\left. \begin{aligned} v_t &= \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \\ \sqrt{\epsilon_r \mu_r} &= \frac{c}{v_t} \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

veya

$$\epsilon_r = \left(\frac{t_f}{l} \right)^2 \quad (5.13)$$

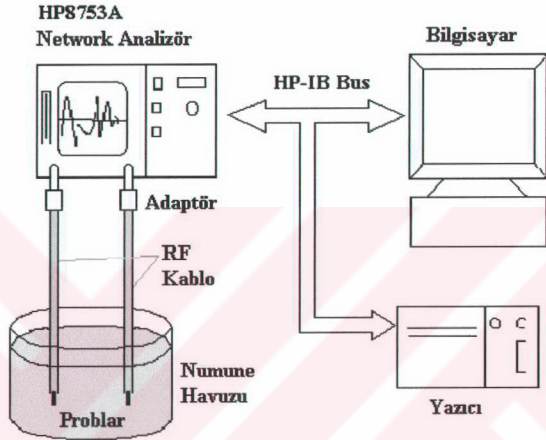
şeklindeki bir ifadeye dönüşür. Bu durumda da yine $\mu_r = 1$ olduğunu hatırlamak gerekir.

5.3.1. Deney düzeneği ve ölçümlerin yapılması

Kısım 5.1'de ifade edildiği gibi uygulamada dielektrik sabitini ölçmek için birçok metot kullanılmaktadır. Yeraltı inceleme radarı (GPR) uygulamalarında kullanılan frekans aralığı yaklaşık 100-1500 MHz arasındadır. Bu çalışmada, bu frekans bandına karşılık gelen puls dalgasının çeşitli toprak numunelerindeki gecikmesinin incelenmesi öngörüldüğünden, ölçümler için kullanılan deney düzeneğinde de 100-1500 MHz frekans bandında çalışan zaman domeni özellikli bir network analizör (HP8753A) tercih edilmiştir. Belirli uzunluktaki iki adet koaksiyel kablo ise deney düzeneğindeki problemleri oluşturmaktadır. Problemler ile birlikte toprağın meydana getirdiği iletim ortamındaki puls gecikmesi network analizör kullanılarak doğrudan ölçülmüştür. Deney düzeneğinin blok diyagramı Şekil 5.1'de ve ölçümler için kurulan donanımın fotoğrafı ise Şekil 5.2'de verilmiştir.

Numunelerin hazırlanması için ilkin, W_t ağırlığındaki değişik toprak örnekleri uygun bir kurutma fırınında 110°C de 24 saat süreyle kurutulmuştur. Bu kurutma prosesinden geçirilen toprak numunelerinin nem oranları ise % 0 olarak kabul edilmiştir (Hallikainen ve ark. 1985). Daha sonra prostesten geçirilmiş belirli V hacmindeki kuru toprak örneklerine değişik miktarlarda su eklenerek farklı nem oranlarına sahip toprak numuneleri hazırlanmıştır. Böylelikle hacimsel nem oranları (m_v) ve ağırlıksal nem oranları (m_g) olan numuneler ölçüm yapmaya hazır hale

getirilmiştir. Her bir nem oranındaki numune için üç değişik prob açıklığında puls sinyalinin iletim gecikmeleri ölçülmüş ve değerlendirilmiştir.



Şekil 5.1. Prob tekniği ile dielektrik sabiti ölçümüne ait blok diyagram.



Şekil 5.2. Prob tekniği ile dielektrik sabiti ölçüm düzeneği.

5.3.2. Ölçüm sonuçları

Kısım 5.3.1'e göre yapılan değişik nem oranına sahip Sakarya kumu numunelerindeki puls gecikmesi ölçüm sonuçlarından, bu numunelerin dielektrik sabitleri (5.11) eşitliği kullanılarak hesaplanmıştır. Üç farklı prob açıklığı için ayrı ayrı hesaplanan dielektrik sabiti değerleri Çizelge 5.1'de listelenmiştir. Ölçümler Sakarya kumu, Tavşanlı toprağı, Hereke toprağı, Şile kumu ve taşkumu toprak türleri için de tekrarlanmıştır. Bu durumda (5.13) eşitliği kullanılarak yapılan dielektrik sabiti hesaplama sonuçları sırasıyla Çizelge 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 ve 5.6 da listelenmiştir. Çizelge 5.7 de farklı toprak numuneleri için hacimsel nem oranlarına göre ölçülen bağıl dielektrik sabiti değerleri görülmektedir. Çizelge 5.7'deki verilerin karakteristik eğrileri ise Şekil 5.3'deki grafiklerle temsil edilmiştir.

Çizelge 5.1. Ölçülen Sakarya kumunun hacimsel nem oranlarına göre bağlı dielektrik sabiti değerleri (Denklem 5.11'e göre).

SAKARYA KUMU

Hacimsel Nem Oranı [%]	Problar Arası Mesafe l [cm]	Gecikme t_h [ns]	Dielek. Sabiti ϵ_h (Hava)	Gecikme t_t [ns]	Dielek. Sabiti ϵ_t (Numune)
0	5	0,17	1,00	0,35	4,41
	10	0,35	1,10	0,83	6,13
	15	0,50	1,00	1,05	4,41

ORTALAMA: 1,03

ORTALAMA: 4,98

9,70	5	0,17	1,00	0,50	9,00
	10	0,35	1,10	1,13	11,39
	15	0,50	1,00	1,50	9,00

ORTALAMA: 1,03

ORTALAMA: 9,80

14,55	5	0,17	1,00	0,65	15,21
	10	0,35	1,10	1,28	14,63
	15	0,50	1,00	1,95	15,21

ORTALAMA: 1,03

ORTALAMA: 15,02

19,39	5	0,17	1,00	0,87	27,46
	10	0,35	1,10	1,76	27,88
	15	0,50	1,00	2,62	27,46

ORTALAMA: 1,03

ORTALAMA: 27,60

24,24	5	0,17	1,00	1,00	36,00
	10	0,35	1,10	1,95	34,22
	15	0,50	1,00	3,00	36,00

ORTALAMA: 1,03

ORTALAMA: 35,41

W_t [gr]	W_{su} [gr]	W_n [gr]	V [cm ³]	ρ [gr/cm ³]	m_g [%]	m_v [%]	ϵ_t Dielek.Sabiti
5165	0	5165	2268,75	2,28	0,000	0,00	4,98
	220	5385			4,259	9,70	9,80
	330	5495			6,389	14,55	15,02
	440	5605			8,519	19,39	27,60
	550	5715			10,649	24,24	35,41

Çizelge 5.2. Ölçülen Sakarya kumunun hacimsel nem oranlarına göre bağlı dielektrik sabiti değerleri (Denklem 5.13'e göre).

SAKARYA KUMU

Hacimsel Nem Oranı [%]	Problar Arası Mesafe l [cm]	Gecikme t_f [ns]	Mesafe Farkı Δl [cm]	Gecikme Farkı Δt_f [ns]	ϵ_t Dielek.Sabiti
0	5	12,90	5	0,350	4,41
	10	13,20	10	0,825	6,13
	15	13,80	15	1,050	4,41
	20	13,95			

ORTALAMA: 4,98

9,70	5	12,90	5	0,500	9,00
	10	13,35	10	1,125	11,39
	15	14,10	15	1,500	9,00
	20	14,40			

ORTALAMA: 9,80

14,55	5	13,05	5	0,650	15,21
	10	13,80	10	1,275	14,63
	15	14,40	15	1,950	15,21
	20	15,00			

ORTALAMA: 15,02

19,39	5	13,43	5	0,873	27,46
	10	14,25	10	1,760	27,88
	15	15,15	15	2,620	27,46
	20	16,05			

ORTALAMA: 27,60

24,24	5	13,50	5	1,000	36,00
	10	14,55	10	1,950	34,22
	15	15,45	15	3,000	36,00
	20	16,50			

ORTALAMA: 35,41

W_t [gr]	W_{su} [gr]	W_n [gr]	V [cm ³]	ρ [gr/cm ³]	m_g [%]	m_v [%]	ϵ_t Dielek.Sabiti
5165	0	5165	2268,75	2,28	0,000	0,00	4,98
	220	5385			4,259	9,70	9,80
	330	5495			6,389	14,55	15,02
	440	5605			8,519	19,39	27,60
	550	5715			10,649	24,24	35,41

Çizelge 5.3. Ölçülen Hereke toprağının hacimsel nem oranlarına göre bağlı dielektrik sabiti değerleri.

HEREKE TOPRAĞI

Hacimsel Nem Oranı [%]	Problar Arası Mesafe l [cm]	Gecikme t_l [ns]	Mesafe Farkı Δl [cm]	Gecikme Farkı Δt_l [ns]	ϵ_t Dielek.Sabit
0	10	12,900	5	0,250	2,25
	15	13,050	10	0,525	2,48
	20	13,350	15	0,750	2,25
	25	13,650			

ORTALAMA: 2,33

9,70	10	13,050	5	0,350	4,41
	15	13,200	10	0,750	5,06
	20	13,650	15	1,050	4,41
	25	14,100			

ORTALAMA: 4,63

14,55	10	13,050	5	0,450	7,29
	15	13,650	10	0,900	7,29
	20	14,100	15	1,350	7,29
	25	14,400			

ORTALAMA: 7,29

19,39	10	13,350	5	0,500	9,00
	15	13,950	10	0,975	8,56
	20	14,400	15	1,500	9,00
	25	14,850			

ORTALAMA: 8,85

24,24	10	13,725	5	0,750	20,25
	15	14,250	10	1,650	24,50
	20	15,300	15	2,250	20,25
	25	15,975			

ORTALAMA: 21,67

W_t [gr]	W_{su} [gr]	W_n [gr]	V [cm ³]	ρ [gr/cm ³]	m_g [%]	m_v [%]	ϵ_t Dielek.Sabit
4565	0	4565	2268,75	2,01	0,000	0,00	2,33
	220	4785			4,819	9,70	4,63
	330	4895			7,229	14,55	7,29
	440	5005			9,639	19,39	8,85
	550	5115			12,048	24,24	21,67

Çizelge 5.4. Ölçülen Şile kumunun hacimsel nem oranlarına göre bağlı dielektrik sabiti değerleri.

ŞİLE KUMU

Hacimsel Nem Oranı [%]	Problar Arası Mesafe l [cm]	Gecikme t_i [ns]	Mesafe Farkı Δl [cm]	Gecikme Farkı Δt_i [ns]	ϵ_t Dielek.Sabiti
0	10	12,750	5	0,275	2,72
	15	13,125	10	0,563	2,85
	20	13,425	15	0,825	2,72
	25	13,575			

ORTALAMA: 2,76

9,70	10	12,975	5	0,325	3,80
	15	13,275	10	0,675	4,10
	20	13,650	15	0,975	3,80
	25	13,950			

ORTALAMA: 3,90

14,55	10	13,050	5	0,425	6,50
	15	13,500	10	0,862	6,70
	20	13,950	15	1,275	6,50
	25	14,325			

ORTALAMA: 6,57

19,39	10	13,200	5	0,550	10,89
	15	13,650	10	1,088	10,64
	20	14,175	15	1,650	10,89
	25	14,850			

ORTALAMA: 10,81

24,24	10	13,875	5	0,675	16,40
	15	14,400	10	1,425	18,28
	20	15,225	15	2,025	16,40
	25	15,900			

ORTALAMA: 17,03

W_t [gr]	W_{su} [gr]	W_n [gr]	V [cm ³]	ρ [gr/cm ³]	m_z [%]	m_v [%]	ϵ_t Dielek.Sabiti
4145	0	4145	2268,75	1,83	0,000	0,00	2,76
	220	4365			5,308	9,70	3,90
	330	4475			7,961	14,55	6,57
	440	4585			10,615	19,39	10,81
	550	4695			13,269	24,24	17,03

Çizelge 5.5. Ölçülen Taşkumunun hacimsel nem oranlarına göre bağlı dielektrik sabiti değerleri.

TAŞKUMU

Hacimsel Nem Oranı [%]	Problar Arası Mesafe l [cm]	Gecikme t_i [ns]	Mesafe Farkı Δl [cm]	Gecikme Farkı Δt_i [ns]	ϵ_t Dielek.Sabiti
0	10	12,825	5	0,300	3,24
	15	13,200	10	0,600	3,24
	20	13,500	15	0,900	3,24
	25	13,725			

ORTALAMA: 3,24

9,70	10	13,125	5	0,550	10,89
	15	13,650	10	1,163	12,16
	20	14,325	15	1,650	10,89
	25	14,775			

ORTALAMA: 11,31

14,55	10	13,350	5	0,700	17,64
	15	14,250	10	1,313	15,50
	20	14,775	15	2,100	17,64
	25	15,450			

ORTALAMA: 16,93

19,39	10	13,800	5	0,925	30,80
	15	14,700	10	1,875	31,64
	20	15,675	15	2,775	30,80
	25	16,575			

ORTALAMA: 31,08

24,24	10	13,950	5	1,024	37,75
	15	14,775	10	2,211	44,00
	20	16,125	15	3,072	37,75
	25	17,022			

ORTALAMA: 39,83

W_t [gr]	W_{su} [gr]	W_n [gr]	V [cm ³]	ρ [gr/cm ³]	m_g [%]	m_v [%]	ϵ_t Dielek.Sabiti
4565	0	4565	2268,75	2,01	0,000	0,00	3,24
	220	4785			4,819	9,70	11,31
	330	4895			7,229	14,55	16,93
	440	5005			9,639	19,39	31,08
	550	5115			12,048	24,24	39,83

Çizelge 5.6. Ölçülen Tavşanlı toprağının hacimsel nem oranlarına göre bağlı dielektrik sabiti değerleri.

TAVŞANLI KIRMIZI TOPRAĞI

Hacimsel Nem Oranı [%]	Problar Arası Mesafe l [cm]	Gecikme t_f [ns]	Mesafe Farkı Δl [cm]	Gecikme Farkı Δt_f [ns]	ϵ_t Dielek.Sabit
0	10	12,825	5	0,275	2,72
	15	13,050	10	0,600	3,24
	20	13,425	15	0,825	2,72
	25	13,650			

ORTALAMA: 2,90

9,70	10	12,900	5	0,325	3,80
	15	13,200	10	0,638	3,66
	20	13,500	15	0,975	3,80
	25	13,875			

ORTALAMA: 3,75

14,55	10	13,050	5	0,375	5,06
	15	13,425	10	0,750	5,06
	20	13,800	15	1,125	5,06
	25	14,175			

ORTALAMA: 5,06

19,39	10	13,125	5	0,450	7,29
	15	13,500	10	0,900	7,29
	20	13,950	15	1,350	7,29
	25	14,475			

ORTALAMA: 7,29

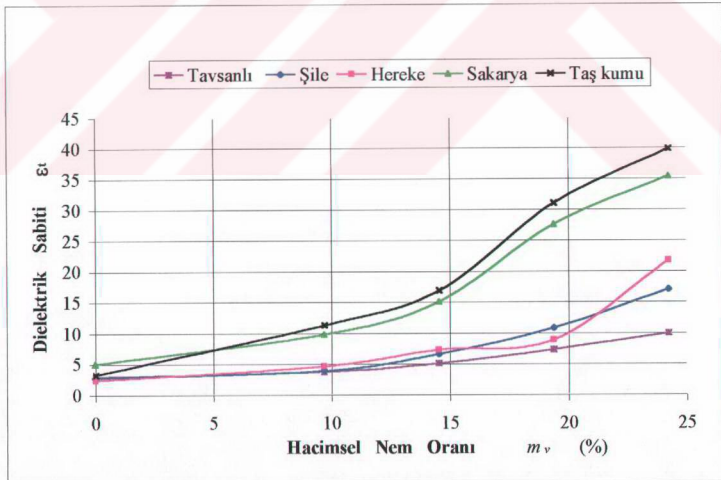
24,24	10	13,200	5	0,525	9,92
	15	13,650	10	1,050	9,92
	20	14,175	15	1,575	9,92
	25	14,775			

ORTALAMA: 9,92

W_t [gr]	W_{su} [gr]	W_n [gr]	V [cm ³]	ρ [gr/cm ³]	m_g [%]	m_v [%]	ϵ_t Dielek.Sabit
4145	0	4145	2268,75	1,83	0,000	0,00	2,90
	220	4365			5,308	9,70	3,75
	330	4475			7,961	14,55	5,06
	440	4585			10,615	19,39	7,29
	550	4695			13,269	24,24	9,92

Çizelge 5.7. Farklı toprak numuneleri için hacimsel nem oranlarına göre ölçülen bağıl dielektrik sabiti değerleri

Numunenin Hacimsel Nem oranı (%)	Numunenin Bağıl Dielektrik Sabiti ϵ_t				
	Tavşanlı Toprağı	Şile Kumu	Hereke Toprağı	Sakarya Kumu	Taş Kumu
0,00	2,90	2,76	2,33	4,98	3,24
9,70	3,75	3,90	4,63	9,80	11,31
14,55	5,06	6,57	7,29	15,07	16,93
19,39	7,29	10,81	8,85	27,60	31,08
24,24	9,92	17,03	21,67	35,41	39,83



Şekil 5.3. Çeşitli toprak türlerine ait bağıl dielektrik sabiti değerlerinin içerdiği hacimsel nem oranına göre değişimi.

5.4. Prob Kullanarak Elde Edilen Puls Gecikmesi Sonuçlarının FDTD Simülasyonları ile Test Edilmesi

Yukarıda şimdiye kadar rapor edilen ölçümler ve bu ölçümlerden elde edilen verilerin hesaplanmasında kullanılan (5.11) ve (5.13) eşitliklerinden bulunan bağıl dielektrik sabiti sonuçları, sonlu farklar metodu ile yapılan birçok simülasyon çalışmalarıyla da doğrulanmaya çalışılmıştır. Söz konusu simülasyonlarda; $(y,z,T) = [-5,5]*[-5,5]*[10]$ analiz bölgesi, $\Delta t = 0.01$ bağıl zaman adımı ve $(y,z) = (-3,-1.5)$ kaynağın yerleştirildiği konumu temsil etmektedir. Bu durumda tanımlanan puls kaynağı,

$$F = \chi(-3-y)*\chi(3.1+y)*\chi(-1-z)*\chi(2+z)*\chi(0.2-t)*20$$

fonsiyonu şeklindedir. Her bir simülasyonda ortamın dielektrik sabitini belirleyen ϵ parametresi sırasıyla;

$$\epsilon=1,$$

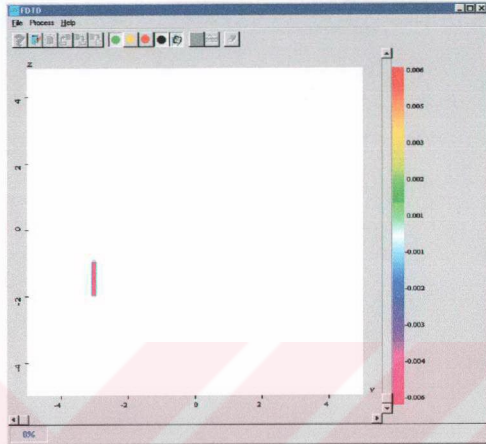
$$\epsilon=1+\chi(5-y)*\chi(y+5)*\chi(-z)*\chi(5+z)=2,$$

$$\epsilon=1+3*\chi(5-y)*\chi(y+5)*\chi(-z)*\chi(5+z)=4,$$

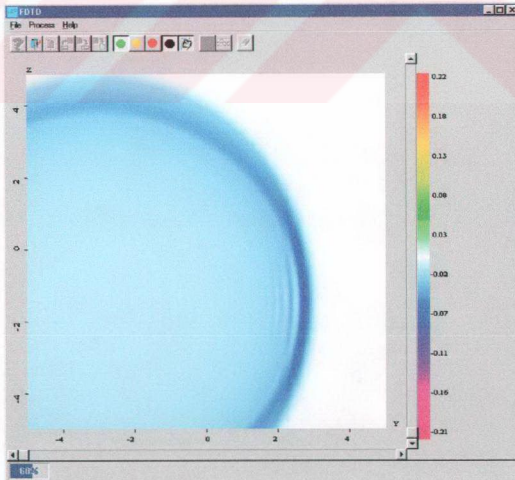
$$\epsilon=1+4*\chi(5-y)*\chi(y+5)*\chi(-z)*\chi(5+z)=5$$

olacak şekilde seçilmiştir. Burada $\chi(\cdot)$, Heaviside birim basamak fonksiyonudur.

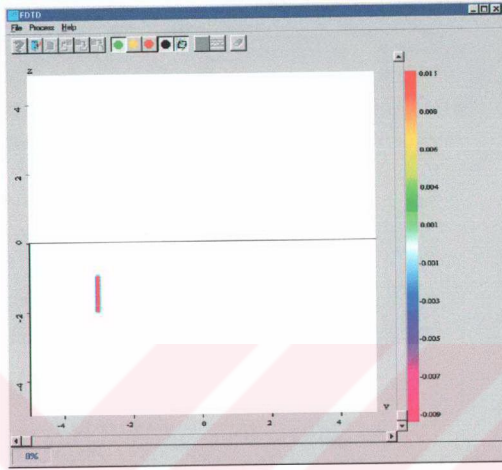
Üretilen puls dalgasının farklı ortamlardaki yayılma biçimini Şekil 5.4'deki alan dağılımı görüntüleri sergilemektedir. Şekil 5.5'deki karakteristik eğriler farklı ortamlara ait simülasyon sonuçlarından elde edilen bağıl zamana göre puls genliğinin değişimlerini göstermektedir. Şekil 5.5'deki karakteristik eğrilerle ilgili puls gecikmesi sonuçları ve (5.11) denklemi kullanılmak suretiyle bulunan dielektrik sabiti değerleri (FDTD değerleri) Çizelge 5.8'de listelenmiştir.



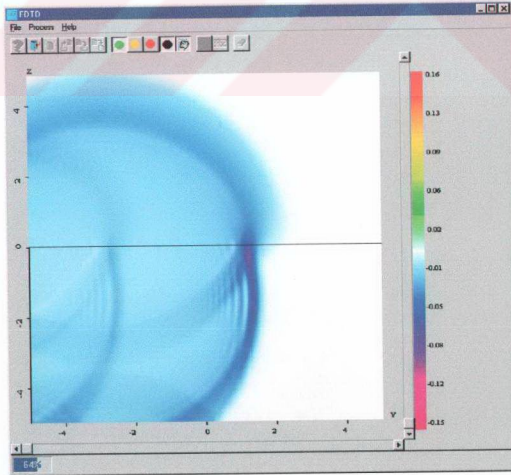
Şekil 5.4a. $\epsilon=1$ için $t=0$ anında puls kaynağı uyarımı.



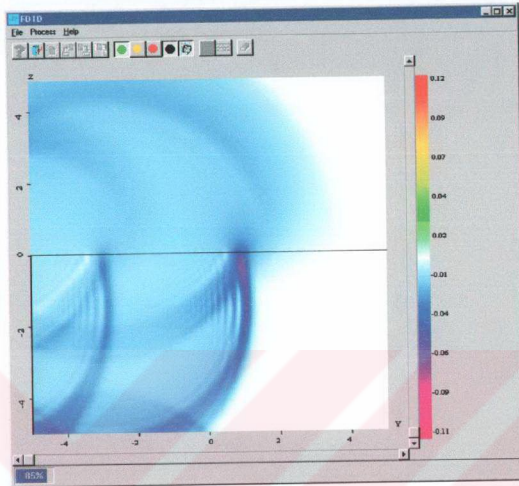
Şekil 5.4b. $\epsilon=1$ için $t=0.60T$ anında puls dalgasının durumu.



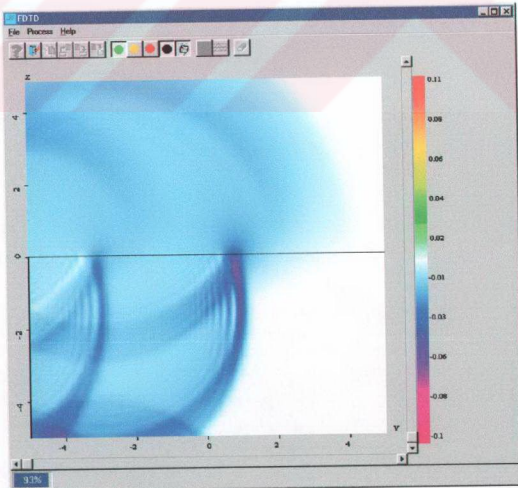
Şekil 5.4c. $\epsilon > 1$ için $t=0$ anında puls kaynağının uyarımı.



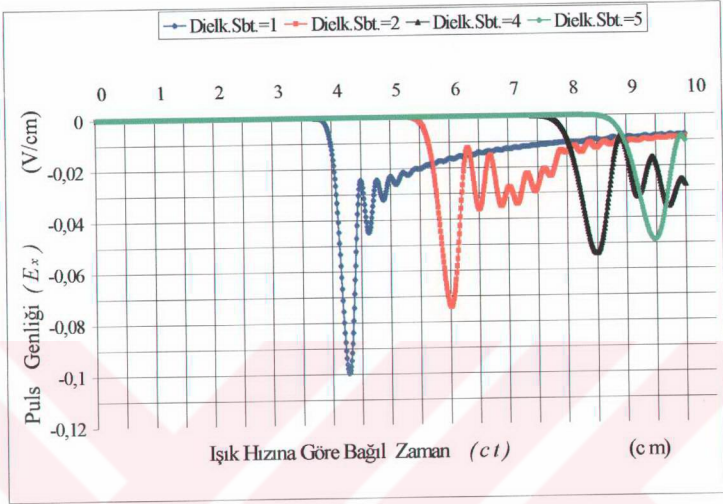
Şekil 5.4d. $\epsilon=2$ için $t=0.64T$ anında puls dalgasının durumu.



Şekil 5.4e. $\epsilon=4$ için $t=0.85T$ anında puls dalgasının durumu.



Şekil 5.4f. $\epsilon=5$ için $t=0.93T$ anında puls dalgasının durumu.



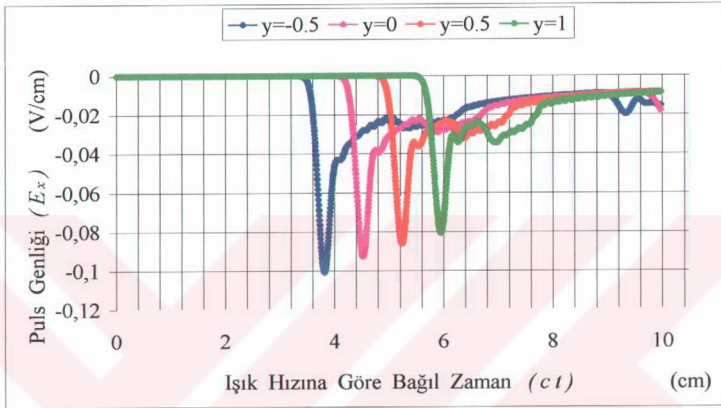
Şekil 5.5. Farklı ortamlarda ve $(y,z)=(1,-1.5)$ konumunda ct bağıl zamanına göre E_x puls genişliğinin değişimi.

Çizelge 5.8. Şekil 5.5'de verilen simülasyon sonuçlarının Denklem (5.11) yardımı ile hesaplanan ϵ bağıl dielektrik sabiti değerleri.

Seçilen Dielek.Sabiti ϵ	Bağıl Gecikme (Hava) ct_h [cm]	Bağıl Gecikme (Ortam) ct_o [cm]	Denk. 5.11'den Hesaplanan Dielek. Sabiti ϵ	Seçilen ve Hesaplanan Dielek. Sabiti Hatası	
				Mutlak [cm]	Bağıl [%]
1	4,29	4,29	1	0,000	0
2		6,05	1,99	0,011	0,56
4		8,51	3,93	0,065	1,63
5		9,51	4,91	0,086	1,72

Şekil 5.6, bağıl dielektrik sabitinin değeri değişmeksizin (yani $\epsilon=2$), gözlem noktasının değişmesi durumunda elde edilen puls genişliğinin bağıl zamana göre değişimlerini vermektedir. Benzer şekilde Çizelge 5.9, Şekil 5.6'daki veriler için

(5.13) denkleminin kullanılması sonucu elde edilen bağıl dielektrik sabiti değerlerini göstermektedir.



Şekil 5.6. Dielektrik ortamda ($\epsilon=2$) farklı ($y,-1.5$) konumlarında ct bağıl zamanına göre E_x puls genişliğinin değişimi.

Çizelge 5.9. Şekil 5.6'da verilen simülasyon sonuçlarının Denklem (5.13) yardımı ile hesaplanan ϵ bağıl dielektrik sabiti değerleri.

Seçilen Dielek.Sabiti ϵ	Gözlem konumu y [cm]	Bağıl Gecikme ct [cm]	Mesafe Farkı Δy [cm]	Bağıl Gecikme Farkı $c\Delta t$ [cm]	Denk. (5.13)'den Hesaplanan Dielek. Sabiti ϵ	Hata
2	-0,5	3,835	0,5	0,71	2	0
	0	4,545	1	1,42	2	0
	0,5	5,255	1,5	2,13	2	0
	1	5,965				

5.5. Ölçüm Sonuçları ile FDTD Simülasyon Sonuçlarının Karşılaştırılması

Uygulamada dielektrik sabiti ölçümünde kullanılan değişik yöntemler olmakla birlikte, bu tez çalışmasında GPR sistemlerinde kullanılan (100-1500 MHz) frekans aralığı esas alınmış ve ölçümler için bu frekans bandına karşılık gelen puls işaretleri tercih edilmiştir. Farklı toprak numuneleri ile ilgili puls yayılma gecikmeleri için özellikli network analizör yöntemi kullanılmış ve öngörülen numunelerin bağıl dielektrik sabitleri bu yöntemle belirlenmiştir. Ayrıca, tez çalışmasında geliştirilen FDTD metodu ile yapılan simülasyon sonuçları ile de söz konusu bu verilerin doğruluğu pekiştirilmeye çalışılmıştır. Deneysel sonuçlar, Şekil 5.3'den de görüldüğü gibi, toprağın dielektrik sabitinin nem oranı ile yaklaşık doğru orantılı olarak arttığını göstermiştir. Uygulanan ölçme yönteminin karmaşık olmayışı ve bağıl dielektrik sabitinin oldukça kolay hesaplanabilmesi, ölçme yöntemin bir avantajı olarak algılanabilir. Bu çalışmada puls gecikmesi simülasyonlarından elde edilen teorik sonuçlar ile dielektrik sabitinin ölçümlerinden elde edilen deneysel sonuçların kabul edilebilecek düzeyde uyum içinde oldukları vurgulanmıştır. Ancak simülasyon metodu ile elde edilen dielektrik sabiti sonuçlarında, bilgisayar özelliklerine bağlı olarak %1.8 den daha küçük bir hesaplama hatasının da göz önünde bulundurulması gerekir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1. Sonuçlar

Dalgaların rezonans difraksiyonu alanındaki araştırmalar yüzyılın başlarında başlayan birçok sorunun analitik olarak çalışılması, elverişli matematiksel modelleme ve hesaplama deneyine dayanan çok sayıda yeni bilimsel metodun ortaya konmasıyla son yıllarda hızlı gelişme göstermiştir. Elektrodinamik teorisinin bu süreçteki başarısı iyi bilinir. Frekans domenindeki uygun matematiksel modellemenin pratik olarak tüm anahtar problemleri (direkt ve ters problemlerin çözüm metotları ve algoritmalarıyla) çözülmüştür, sinüzoidal dalgalarının saçılma fiziği detaylı olarak incelenmiştir. Burada önemli aşama, dalgaların muhtemel rezonans saçılması durumlarında durağan olmayan elektromagnetik alanların uzay-zaman dönüşümleri ile zaman domenindeki başlangıç sınır değer problemlerinin çözümü için etkin metotların geliştirilmesidir. Elektromagnetik teorideki problem çözümlerinde kullanılan en yaygın nümerik metotlardan biri zaman domeninde sonlu farklar metodudur. Bu metodun açık başlangıç sınır değer problemlerinde kullanılabilmesi için, söz konusu metodun analiz bölgesinin bir şekilde sınırlanması ve yayılan veya saçılan dalgaların sınırlardan yansımaması gerekmektedir. Bu amaçla literatürde temelde aynı esaslara dayanan pek çok yutucu veya geçirgen sınır koşulu ileri sürülmüştür. Ancak sonlu farklar metodunun sınırlama problemi bu tarihe kadar tam olarak çözülmemiştir.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde (Bölüm 2), sonlu farklar metodunun etkin sınırlanması için, (öncelikle problem çözümlerinde yaygın olarak kullanılan) periyodik ızgara yöntemi temel analiz modeli olarak ele alınmış ve ızgara modeli üzerinde yeni bir sınır koşulu ileri sürülmüştür. Bu yaklaşımın ilk adımında, $U(g,t)$ dalgasının serbest olarak yayıldığı bir ${}_L Q = Q \setminus \bar{Q}_L$ regüler bölgesi belirlenmiştir. Böylece ${}_L Q$ bölgesi, kaynak ve saçıcıları içeren Q_L bölgesinden ayrılmıştır. İkinci adımda, ${}_L Q$ bölgesinde başlangıç değer probleminin “giden” dalga çözümünün genel özelliğini yansıtan $U(g,t)$ çözümü için katı ışımaya koşulları uygulanmıştır.

Bunun sonucu olarak, ${}_L Q$ ve Q_L bölgelerini ayıran L sınırında tam ABC koşulunun kullanımı, başlangıç probleminde herhangi bir değişiklik yapmamış ve incelenen prosese ilave bir modelleme distorsiyonu getirmemiştir. Ayrıca (2.1) eşitliğinin çözümü ile ilgili olarak Bölüm 2'de verilen (a) ve (b) koşullarının sağlandığı izlenmiştir. M operatörü, ${}_L Q$ regüler bölgesinde serbest yayılan durağan olmayan $U(g,t)$ işaretinin evrimsel temelini (evolutionary basis) uzay-zaman dönüşümünü tanımlayan transport operatörü tarafından belirlenmiştir. M operatörü, geometriye göre seçilen ${}_L Q$ bölgeleri için çeşitli olmakla birlikte tüm durumlarda yapısal prosedür, hiperbolik denklemler teorisinde yaygın olarak kullanılan aynı teknikleri içerir (Borisov 1996). Bilindiği gibi bu teknikler telgraf denklemlerinde eksik değişkenlerine ayırma, bir-boyutlu Klein-Gordon denklemlerinde integral transformasyonları, adi diferansiyel denklemler için yardımcı sınır problemlerinin çözümü ve ters integral transformasyonlarıdır. Son olarak üçüncü adımda, L koordinat sınırına uygulanan tam ışınma koşulları, standart sonlu farklar metodunun hesaplama planında doğru olarak içerilir. Analiz bölgesi (başlangıç sınır değer problemlerinin ayrıklaştırma bölgesi), Q_L bölgesine kadar daraltılır. Algoritmanın gerçekleştirilmesi, fiziksel olarak kapalı Q_L bölgelerine benzer şekilde, t gözleme zamanının tüm anları için çözüm aynı basitlik ve tam nümerik formda sonuçlanmıştır. Izgara model probleminin çözümü için elde edilen tam sınır koşullu algoritmanın nümerik olarak test edilmesi sırasında klasik yutucu sınır koşulları ile karşılaştırılmış, tam koşulların lehinde sonuçlar alınmıştır (Şekil 2, 3 ve 4).

Bölüm 3 de, katmanlı ortam parametrelerinin belirlenmesi, ortam içinde gömülü cisim veya boşlukların görüntülenmesi çalışmalarında radar uygulamalarında sık sık karşılaşılan güncel temel ve uygulamalı problemlerin çözümü için çeşitli model problemler ele alınmıştır. Yer altı puls algılama model problemi, homojen olmayan lokal sıkı cisim, düzlemsel katmanlı dielektrik yapı ve demet şekillendirici anten model problemlerinin sonlu farklar metodu ile incelenebilmesi amacıyla her bir model problem için tam sınır koşullu çözüm algoritmaları geliştirilmiştir. Bu algoritmaların oluşturulmasında Bölüm 2'de ızgara modeli için elde ettiğimiz sonuçlar ile çeşitli ulusal ve uluslararası konferanslarda ve dergilerde bu tezin yazarı dahil bazı araştırmacılar tarafından sunulan (Yaldız ve ark. 2001; Sirenko ve ark.

2000; Sirenko ve ark. 1999; Viazmitinov ve ark. 2001[dergi]; Perov ve ark. 2001; Yashina ve ark. 2000; Veliychko ve ark. 2000;) çalışmalar esas alınmıştır. Gerçekleştirilen tam sınır koşullu sonlu farklar metodu algoritmaları çeşitli örneklerle nümerik olarak test edilmiş ve elde edilen sonuçlar klasik ABC sonuçları ile karşılaştırılmıştır (Şekil 3.2). Lokal ve global hataları incelenen algoritma, değişik ortam parametreleri için puls saçılması analizinde kullanılmıştır (Şekil 3.3 ve 3.4).

Bölüm 4 de ise açık rezonans yapılarıdaki geçici olaylarla ilişkili problemler ele alınmış ve bunların çözümünde Bölüm 2 ve Bölüm 3'de elde ettiğimiz sonuçlar ile daha önce yayınlanan benim de içinde bulunduğum (Sirenko ve ark. 2001; Sirenko ve ark. 2001 [dergi]) bazı çalışmaları esas alınmıştır. Bölüm 4 de, uygulamada çok karşılaşılan köşe probleminin çözümüne ilişkin bir yaklaşım öne sürülmüş ve açık rezonans yapılarla ilgili çeşitli örnek simülasyonlara yer verilmiştir (Şekil 4.1, 4.2 ve 4.3).

Bölüm 5 de, puls gecikmesini ölçmek suretiyle toprağın dielektrik sabitinin hesaplanması ile ilgili değişik deneysel çalışmalara yer verilmiştir. Daha önce ulusal bir konferansta sunulan (Şen ve ark. 1999) bir çalışmaya paralel olarak yapılan, esas dielektrik ortamlarda dalganın yayılma hızının düşmesi prensibine dayalı bir takım ölçüm sonuçları rapor edilmiştir. Şekil 5.1 ve 5.2'deki deney düzeneği kullanılarak network analizör ve probalar vasıtası ile toprak numunelerindeki puls gecikmesi ölçülmüş ve bu sonuçlardan numunelerin dielektrik sabitinin hesaplanması yoluna gidilmiştir (Çizelge 5.1., 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 ve 5.6). Bu sonuçlar 100-1500 MHz frekans bandında düşük iletkenlikli toprak ölçümlerinde $\mu_r = 1$ olduğu göz önüne alınarak hesaplanmıştır (Martinez 2001). Bu işlemler farklı nem oranlarına sahip ve değişik bileşiklere sahip toprak türleri için tekrarlanmış ve elde edilen sonuçlar genelde toprağın dielektrik sabitinin hacimsel nem oranıyla yaklaşık doğrusal olarak değiştiğini göstermiştir (Çizelge 5.7, Şekil 5.3). Söz konusu ölçüm tekniğinin doğruluğunun test edilmesi amacıyla, yine tarafımızdan geliştirilen tam sınır koşullu sonlu farklar metodu kullanılmış ve çeşitli parametreler için puls gecikmesi simülasyonları yapılmıştır (Şekil 5.4, 5.5 ve 5.6). (5.11) ve (5.13) eşitlikleri

kullanılarak tespit edilen puls gecikmeleri yardımı ile hesapladığımız dielektrik sabiti değerlerinin teorik verilerle uyum içinde olduğu gözlenmiştir (Çizelge 5.8 ve 5.9).

Geliştirilen tam sınır koşullu sonlu farklar metodunun çok yönlü değişik problemlerin incelenmesinde kullanılabileceğinin kanıtlanması amacıyla bazı çalışmalar yapılmış ve simülasyon örnekleri Ekler bölümünde sunulmuştur. Ek 1'de serbest uzayda dalga yayılması, Ek 2'de kayıpsız dielektrik ortamdan saçılma ve yayılma, Ek 3'de az kayıplı bir dielektrik ortamda yayılma ve saçılma, Ek 4'de iletken ortamdan tam yansıma olayları şeklindedir. Ek 5 de, eksponansiyel horn anten ve lens düzeneği kullanılarak anten yönelticiliğinin artırılabilmesi ile ilgili simülasyon sonuçları verilmiştir. Ek 6'da horn anten ve dielektrik çubuk düzeneğinden yapılan ışınımın, gömülü bir cisme sahip olan ve olmayan iki ayrı ortamdaki dalga yayılması ve saçılmanın simülasyonlarına yer verilmiştir. Ek 7'de ise toprak içine yerleştirilmiş çeşitli numunelerden kaynaklanan gerçek bir yeraltı inceleme radarı tarafından algılanan elektromagnetik alan değişimi görülmektedir.

6.2. Öz-sonuçlar

Bu tez çalışmasında, puls algılama model problemlerinin teorik ve uygulamada önemli olan birçok somut probleminin çözümüne yer verilmiştir. Elde edilen temel sonuçları aşağıdaki gibi sıralamak mümkündür:

-Izgaraların elektrodinamik teorisinin kompleks başlangıç sınır değer problemlerinin ifadesi ve çözümüne uygun doğru yaklaşım geliştirilmiştir. Bu yaklaşım, açık (sonsuz) analiz bölgelerinin sanal sınırlarında tam yutucu koşullu sonlu farklar metodudur.

-Izgara model problemi ile ilgili olarak öngörülen metotlar puls algılama model problemlerine ve açık yapılarıdaki geçici olaylara genişletilerek uygulanmıştır. Bu konularda doyurucu nümerik sonuçlar alınmıştır.

-Puls gecikmesi ölçümü ile dielektrik sabitinin belirlenebileceği ve toprağın dielektrik sabitinin içerdiği nem oranı ile arttığı uygulamalı çalışma ile gösterilmiştir.

-Geliştirilen tam sınır koşullu sonlu farklar metodunun uygulamalı deneysel ölçüm tekniklerinin doğruluk testinin yapılması ve anten tasarımı dahil pek çok elektromagnetik problem çözümünde kullanılabileceği sergilenmiştir.

Başlangıç sınır değer problemlerinin çözümü için ileri sürülen yaklaşımların algoritmalarının gerçekleşmesi basittir ve deneyin somut koşullarına göre nümerik hesaplamanın düzenlenmesi oldukça kolaydır. Ayrıca, elde edilen algoritmaların gerçekleşmesinde hesaplanan verilerin doğruluğu ve bellek hacmi konusundaki gerekler uygun bilgisayar desteğiyle kolayca sağlanır. Şüphesiz, bu temelde çözülen problemlerin araştırma ve uygulama alanlarının ileride artarak genişleyeceğine inanılmaktadır.

Problem çözümlerine matematiksel yaklaşımlarda, literatürde daha önce araştırmacıların çalışmalarında yer alan gösterim ve dönüşümler kullanılmıştır. Bu tezde tam yutucu sınır koşullu sonlu farklar metodu için model problem çözümlerine ait algoritmalar olabildiğince geliştirilmiştir. Geliştirilen metotlar ve algoritmalar yapılan nümerik hesaplamalarla test edilmiştir. Ayrıca, tam yutucu sınır koşulu, nümerik deneylerde klasik yutucu sınır koşuluyla karşılaştırılmış, sonuçların yeni metot lehinde olduğu gözlenmiştir.

6.3. Öneriler

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, teori ve uygulamayla yakından ilgilidir. Tam yutucu sınır koşullu sonlu farklar metodu için elde edilen algoritmalar kullanılarak yapılan simülasyonlar, puls algılama problemlerine yönelik elektromagnetik teoriyle yakından ilgili çoğu araştırmacılar için yararlı bir araç olarak kullanılabilir. Bu sonuçlar radyo-fizik, optik, akustik, anten mühendisliği, elektronik ve puls radyo mühendisliğinin bilimsel ve mühendislikle ilgili problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılabilir.

Burada, problem çözümünde matematiksel kolaylıklardan yararlanmak ve gerekli bellek hacmi ve işlem hızından kazanmak amacıyla, boyutlardan birini sonsuz uzun kabul ederek iki boyutlu uzay için çalışmalar yapılmıştır. Daha sonraki

çalışmalarda, eęer incelencek model probleme uygun dūřerse ũçũncũ boyut da dikkate alınabilir. ũçũncũ uzay boyutu işleme konurken, uzay ve zamanda ayrıklaştırma adımlarının kũçũklũęũnũn hesaplama doğruluğunu artıracadı, ama gerekli bilgisayar belleği ve hızının da bu paralelde bir hayli artacadı gerçeğini gŕz ũnũnde bulundurmak gerekir. İşlem hızını artırmak ve gerekli bellek hacminden kazanmak amacıyla, uygun gŕrev dağılımlı yapan algoritmalar ve paralel hesaplama yapan işlemcilerden yararlanılabilir.

Puls algılamada amaç; saçılan alanların verisinden yararlanarak saçıcı ortam veya cisim hakkında bilgi elde etmek için ters problemi çŕzmemek esastır. Gũnũmũzdeki çalışmalar bu yŕnde devam etmelidir. Örneğin sonlu farklar metodu, ters problem çŕzũmũ prosedũrũnde ara işlem olarak kullanılabilir. Bunun için, sonlu farklar metodunun kullandığı modeldeki parametreler, alınan veriye gŕre optimize edilerek ters problem çŕzũmũnde de kullanılabilir.

7. KAYNAKLAR

- Bamberger A., Joly P., Roberts J.E. 1990. Second order absorbing boundary conditions for the wave equation: A solution for the corner problem. *SIAM Journal of Numerical Analysis*. Vol.27, No:2, pp.323-352.
- Bateman H. 1955. *The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave-Motion*. Dover Publications, Inc.
- Berenger J.P. 1994. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Comput. Physics*. Vol.114, No:1, pp.185-200.
- Berenger J.P. 1996. Three-dimensional perfectly matched layer for absorption of electromagnetic waves. *Journal of Comput. Physics*. Vol. 127, No:2, pp.363-379.
- Betz V., Mittra R. 1993. A boundary condition to absorb both propagating and evanescent waves in a FDTD simulation. *IEEE MW & Guided Wave Let.* Vol.3, No:6, pp.182-184.
- Borisov V.V. 1996. *Electromagnetic Fields of The Transient Currents*. St. Petersburg: St. Petersburg University Publishing. (in Russian)
- Brianzi P., Frontini M. 1991. On the regularized inversion of the Laplace transform. *Inverse Problems*. Vol.7, No:3, pp.355-368.
- Chen B., Fang D.G., Zhou B.H. 1995. Modified Berenger PML absorbing boundary condition for FDTD meshes. *IEEE Microwave and Guided Wave Let.* Vol. 5, No:11, pp.399-401.
- Colton D., Kress R. 1983. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. New York: A Wiley-Interscience Publication.
- Daniels J., 1996, *Surface Penetrating Radar*, IEE Press.
- De Moerloose J., Stuchly M.A. 1995. Behavior of Berenger's ABC for evanescent waves. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*. Vol.5, No: 10, pp.344-346.
- Dib N.I., Katehi L.P.B. 1993. Analysis of the transition from rectangular waveguide to shielded dielectric image guide using the FDTD method. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*. Vol. 3, No: 9, pp.327-329.
- Engquist B., Majda A. 1977. Absorbing boundary condition for the numerical simulation of waves. *Mathematics of Computation*. Vol. 31, No: 139, pp. 629-651.
- Fang J., Ren J. 1993. A locally conformed finite-difference time-domain algorithm of modeling arbitrary shape planar metal strips. *IEEE Trans.on MTT*. Vol.41, No:5, pp.830-837.
- Fang J. 1994. Absorbing boundary conditions applied to model wave propagation in microwave integrated circuits. *IEEE Trans. on MTT*. Vol. 42, No:8, pp.1506-1513.
- Felsen L.B. 1976. *Transient Electromagnetic Fields*. Ed. Felsen, New York: Springer-Verlag,
- Fruhwrth R.K., Schmöller R., Oberaigner E.R., 1996, Some Aspects on The Estimation Of Electromagnetic Wave Velocities, (*GPR '96*), Sendai, Japan.
- Furse C.M., Mathur S.P., Gandhi O.P. 1990. Improvements to the FDTD method for calculating the radar cross section of a perfectly conducting target. *IEEE Trn.MTT*. Vol.38, No:7, pp.919-927.

- Hallikainen M.T., Ulaby F.T., Dobson M.C., El-Rayes M.A., Wu L., 1985, Microwave dielectric behavior of wet soil-Part I: Empirical models and experimental observations, *IEEE Trans. Geosci. & Remote Sensing*, Vol. GE-23, No.1.
- Hayes P.K., 1982, A single-probe on-site method of measuring the dielectric constant and conductivity of soft earth media over a 1-GHz bandwidth, *IEEE Trans. Geosci. & Remote Sensing*, Vol. GE-20, No.4.
- He S., Strom S., Weston H. 1998. *Time Domain Wave-Splittings and Inverse Problems*. Oxford Univ. Press.
- Hosono T. 1981. Numerical inversion of Laplace transform and some applications to wave optics. *Radio Science*. Vol.16, No:10, pp.1015-1023.
- Hunsberger F., Luebbers R.J., Kunz K. 1992. FDTD analysis of gyrotropic media I: Magnetized plasma. *IEEE Trans. on AP*. Vol. 40, No:12, pp.1489-1495.
- Jurgents T.G., Taflove A., Umashankar K. 1992. FDTD modelling of curved surfaces. *IEEE Trans. on AP*. Vol.40, No:4, pp.357-365.
- Katz D.S., Picket-May M.J., Taflove A., Umashankar K.R. 1991. FDTD analysis of electromagnetic wave radiation from systems containing horn antennas. *IEEE Trans. on AP*. Vol.39, No:8, pp.1203-1211.
- Katz D.S., Thiele E.T., Taflove A. 1994. Validation and extension to three dimensions of Berenger PML absorbing boundary condition for FD-TD meshes. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*. Vol.4, No:8, pp.268-270.
- Korn G.A. and Korn T.M. 1961. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. New York: Mc Graw Hill Book Company, Inc.
- Krupezevic D.V., Brankovic V.J., Arnold F. 1993. The wave equation FDTD method for the efficient eigenvalue analysis and S-matrix computation of waveguide structures. *IEEE Trans. on MTT*. Vol.41, No:2, pp.2109-2115.
- Kwok Yu., Barthez D. 1989. An algorithm for the numerical inversion of Laplace transform. *Inverse Problems*. Vol.5, No:6, pp.1089-1095.
- Ladyzhenskaya O.A. 1953. *The Mixed Problem For Hyperbolic Equations*. Moscow: Gostekhizdat. (in Russian)
- Ladyzhenskaya O. A. 1985. *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*. New York: Springer-Verlag.
- Luebbers R.J., Hunsberger F. 1992. FDTD for N-th order dispersive media. *IEEE Trans. on AP*. Vol.40, No:11, pp.1297-1301.
- Lundstedt J., Strom S. 1993. Simultaneous reconstruction of two parameters from the transient response of a non-uniform LCRG transmission line. *Technical Report TRITA-TET/Royal Institute of Technology; N: 93-180* Stockholm.
- Marchenko V.A. 1977. *The Operators of Storm-Liouville and Their Applications*. Kiev: Naukova Dumka. (in Russian)
- Marin L. 1973. Natural-mode representation of transient scattered fields. *IEEE Trans. on AP*. Vol.21, No:6, pp.809-818.
- Martinez A., Byrnes A.P., 2001, Modeling dielectric-constant values of geologic materials: An aid to ground-penetrating radar data collection and interpretation, *Current Research in Earth Sciences, Bulletin 247*, Part 1, Kansas University.

- Maykov A.P., Sveshnikov A.G., Yakunin S.A. 1986. Different scheme for the non-stationary Maxwell equations in waveguide systems. *Zhurnal Vychislit. Matematiki i Matemat. Fiziki*. Vol.26, No:6, pp.851-863. (in Russian)
- Maykov A.P., Poezd A.D., Sveshnikov A.G., Yakunin S.A. 1989. Different scheme for initial boundary value problems for the Maxwell equations in unlimited area. *Zhurnal Vychislit. Matematiki i Matemat. Fiziki*. Vol.29, No:2, pp.239-250. (in Russian)
- Mei K.K., Fang J. 1992. Superabsorbtion: A method to improve absorbing boundary conditions. *IEEE Trans. on AP*. Vol.40, No:9, pp.1001-1010.
- Miller W. Jr. 1977. *Symmetry And Separation Of Variables*. London: Addison-Wesley Publish. Co.
- Mitra R., Harms P.H. 1993. A new FDTD algorithm for efficient field computation in resonant narrow-band structures. *IEEE MW & Guided Wave Let.* Vol.3, No:9, pp.316-318.
- Moore T.G., Blaschak J.G., Taflove A., Kriegsmann. 1988. Theory and application of radiation boundary operators. *IEEE Trans. on AP*. Vol.36, No:12, pp.1797-1812.
- Moore J., Ling H. 1990. Characterization of a 90° microstrip bend with arbitrary miter via the FDTD method. *IEEE Trans. on MTT*. Vol.38, No:4, pp.405-410.
- Mur G. 1981. Absorbing boundary conditions for the finite difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations. *IEEE Trn. EMC*. Vol.23, No:4, pp.1377-382.
- Nassar E.M., Lee R., Young J.D., 1999, A probe antenna for in situ measurement of complex dielectric constant of materials, *IEEE Trans. on AP.*, Vol.47, No:6, pp.1085-1093.
- Olivier J.C. 1992. On the synthesis of exact free space absorbing boundary conditions for the FDTD method. *IEEE Trans. on AP*. Vol.40, No:4, pp.456-460.
- Perov A.O., Sirenko Yu.K., Yashina N.P. 1999. Explicit conditions for virtual boundaries in initial boundary value problems in the theory of wave scattering. *Journ. of Electromagnetic Waves and Applications*. Vol.13, No:10, pp.1343-1371.
- Perov A.O., Sirenko Y.K., Akdogan H., Yaldiz E., 2001.Truncation of computational domain for finite-difference methods in time-domain electromagnetics: Efficient solution of the problem. *Proceed. of 4th International Symposium on Physics and Engineering of Millimeter & Sub-millimeter Waves*, Kharkov, Ukraine, Vol.1, pp.226-228.
- Petit R. 1980. *Electromagnetic Theory Of Gratings*. Ed. R. Petit, New York: Springer.
- Petrashin G.I., Molotkov L.A., Krauklis P.V. 1982. *Waves In Layered-Homogeneous Isotropic Elastic Media*. Leningrad: Nauka. (in Russian)
- Poyedinchuk A. Ye., Tuchkin Yu.A., Shestopalov V.P. 1987. About regularization of spectral problems of wave scattering on the open-ended screens. *Dokl. AN SSSR*. Vol.295, No:6, pp.1358-1362. (in Russian)
- Railton C., Daniel E.M., Paul D.L., McGeehan J.P. 1993. Optimized absorbing boundary condition for the analysis of planar circuits using the FDTD method. *IEEE Trans. on MTT*. Vol.41, No:2, pp.290-297.
- Ramm A.G. 1980. Theoretical and practical aspects of singularity and eigen-mode expansion methods. *IEEE Trans. on AP*. Vol.28, No:6, pp.897-901.
- Rao S.M., 1999, *Time domain electromagnetics*, Academic Press, Series in Engineering.

- Reuter C.E., Joseph R.M., Thiele E.T., Katz D.S., Taflove A. 1994. Ultra-wide-band absorbing boundary condition for termination of waveguide structures in FDTD simulations. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*. Vol.4, No:10, pp.344-346.
- Romanov V.G. 1985. About the structure of the fundamental solution of a Cauchy problem for system of the Maxwell equations. *Dokl.AN SSSR*. Vol.281, No:5, pp.1052-1055. (in Russian)
- Sheen D.M., Ali S.M., Abouzahra M.D., Kong J.A. 1990. Application of the three-dimensional FDTD method to the analysis of planar microstrip circuits. *IEEE Trans. on MTT*. Vol.38, No:7, pp.849-857.
- Shestopalov V.P., Kirilenko A.A., Masalov S.A., Sirenko Yu.K. 1986. *Resonant Scatterings of Waves. Diffraction Gratings*. Kiev: Naukova Dumka. (in Russian)
- Shestopalov V.P., Sirenko Yu.K. 1989. *The Dynamic Theory of Gratings*. Kiev: Naukova. (in Russian)
- Shestopalov V.P., Tuchkin Yu.A., Poyedinchuk A.Ye, Sirenko Yu.K. 1997. *New Methods For The Solving of Direct and Inverse Problems of The Diffraction Theory: Analytical Regularization of Electrodynamics Boundary Value Problems*. Kharkov: Osnova. (in Russian)
- Shlager K.L. Schneider J.B. 1995. A selective survey of finite-difference time-domain literature. *Antennas and Propagation Magazine*. Vol.37, No:4, pp.39-57.
- Sirenko Yu. K., Shestopalov V. P., Yashina N. P. 1997. New methods in the dynamic linear theory of open waveguide resonators. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. Vol.37, No:7, pp.845-853.
- Sirenko Yu. K., Perov A.O., Yaldiz E. 1999. Novel approaches to the analysis and model synthesis of ultra-wide-band horn-type antennas. *Proceed. of 3rd International Conference on Antenna Theory and Techniques*, Sevastopol, Ukraine, pp.395-396.
- Sirenko Y.K., Suharevsky I. V., Suharevsky I. V., Yashina N.P. 2000. *Fundamental and Applied Problems in Theory of Electromagnetic Wave Scattering*. Kharkov: Krok. (in Russian)
- Sirenko Y.K., Perov A.O., Yaldiz E. 2000. Exact conditions on virtual boundaries for FDTD-method in model problems of pulse sensing. *Proceed. of International Workshop on Direct and Inverse Wave Scattering*, Gebze Inst. of Technology, Turkey, pp.6.37-6.46.
- Sirenko Y.K., Perov A.O., Yaldiz E., 2001. Time-domain modeling of transient processes in open resonance structures, *Proceed. of ELECO'01*, Bursa, Turkey, pp.171-174.
- Sirenko Yu.K., Perov A.O., Yaldiz E., 2001. Exact "absorbing" conditions for modeling of transients in open structures. *Telecom. & Radio Engineering*. Vol.55, No:6-7, pp.
- Şen B., Yaldiz E., 1999, Zaman domeninde gecikme ölçümü yoluyla toprağın dielektrik sabitinin belirlenmesi, *Elektrik Müh. 8. Ulusal Kongresi*, Gaziantep.
- Taflove A. 1995. *Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time Domain Method*. Massachusetts: Artech House.
- Tikhonov A.N., Goncharky A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. 1995. *Numerical Methods For The Solution of Ill-Posed Problems*. London: Kluwer Academic Publishers.
- Tirkas P.A., Balanis C.A., Renaut R.A. 1992. Higher order absorbing boundary conditions for FDTD-method. *IEEE Trans. on AP*. Vol.40, No:10, pp.1215-1222.

- Tretyakov O. A. 1993. Essentials of non-stationary and nonlinear electromagnetic field theory. *Analytical And Numerical Methods In Electromagnetic Wave Theory*. Ed. M. Hashimoto, M. Idemen and O.A. Tretyakov., Tokyo: Science House Co., pp.123-146.
- Tromp E. N. M., Olivier J.C. 1995. Synthesis of absorbing boundary conditions for the FDTD method: numerical results. *IEEE Trans. on AP*. Vol.43, No:2, pp.213-215.
- Umashankar K.R., Taflove A. 1992. A novel method to analyze electromagnetic scattering of complex objects. *IEEE Trans. on EMC*. Vol.24, No:11, pp.392-405.
- Vaynberg B.P. 1982. *Asymptotical Methods in The Equations of Mathematical Physics*. Moscow: Moscow University Publication. (in Russian)
- Veliychko L., Perov A., Sirenko Yu.K., Yaldiz, E., 2000. Model problems of pulse sensing. *EUROEM'2000*, Edinburg, UK, No:34.5.
- Viazmitinova A.I., Pazynin V.L., Perov A.O., Sirenko Y.K., Akdogan H., Yaldiz E., 2001. Pulse antennas: Accurate solution of two-dimensional model problems for structures with gratings as dispersing elements. *Telecom. & Radio Engineering*. Vol.55, No.6-7.
- Vladimirov V. S. 1971. *Equations Of Mathematical Physics*. New York: Dekker.
- Vladimirov V.S. 1974. *The Collection of Problems on The Equations of Mathematical Physics*. Edit V.S. Vladimirov, Moscow: Nauka. (in Russian)
- Yaldiz E., Sirenko Y.K., Bayrak M., 2001. Dielektrik lensle anten yönelticiliğinin artırılması, *SİU'2001*, Gazi Mağusa, KKTC, s.175-179.
- Yashina N., Sirenko Y., Perov A., Yaldiz E., 2000. Explicit conditions for virtual boundaries for the problems of non-harmonic wave. *EUROEM'2000*, Edinburg, UK, No:P.65.
- Yee K.S. 1966. Numerical solution of initial boundary value problem involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. on AP*. Vol.14, No:5, pp.302-307.
- Yee K.S., Shlager K., Chang A.H. 1992. An algorithm to implement a surface impedance boundary condition for FDTD. *IEEE Trans. on AP*. Vol.40, No:7, pp.833-837.

8. EKLER

Bu bölümde aşağıdaki durumlar için tam sınır koşullu sonlu farklar metodu ile yapılan simülasyon örnekleri ve yer altı inceleme radarı görüntüsü yer almaktadır.

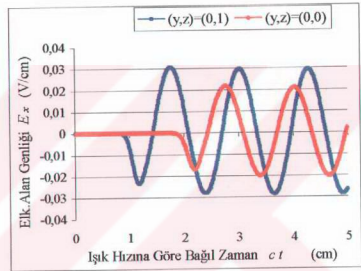
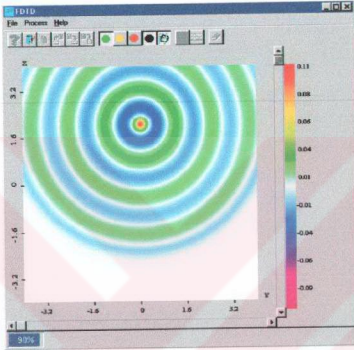
- 1) Serbest uzayda dairesel kesitli bir iletkenin geçen akımın oluşturduğu dalga yayılması.
- 2) Dairesel kesitli bir iletkenin geçen akımın oluşturduğu dalganın yarı sonsuz kayıpsız dielektrik bir ortama uygulanması.
- 3) Dairesel kesitli bir iletkenin geçen akımın oluşturduğu dalganın yarı sonsuz küçük dielektrik sabitine sahip ve kayıplı bir dielektrik ortama uygulanması.
- 4) Dairesel kesitli bir iletkenin geçen akımın oluşturduğu dalganın yarı sonsuz iyi bir iletken ortama uygulanması.
- 5) Exponansiyel horn anten ve dielektrik lens düzeneği.
- 6) a) Metal horn ve dielektrik çubuk dalgakılavuzundan oluşan kaynaktan yarı sonsuz dielektrik düzleme ışınma.
b) (6a) daki yarı sonsuz dielektrik düzleme, dairesel kesitli dielektrik bir cismin eklenmesi durumu.
- 7) Toprak içine yerleştirilmiş çeşitli numunelerden kaynaklanan bir yeraltı inceleme radarı tarafından algılanan elektromagnetik alan değişimi.

- 1) Serbest uzayda dairesel kesitli bir iletkenden geçen akımın oluşturduğu dalga yayılması.

$$[-4,4]*[-4,4], T=5, \Delta T=0.01, \varepsilon=1, \sigma=0,$$

$$F=10*(\chi(0.1*0.1-y*y-(z-2)*(z-2)))*\cos(5*\pi*t).$$

Serbest uzayda $t=0.90T$ anındaki dalganın durumu (solda) ve $(y,z)=(0,1)$ ve $(0,0)$ noktalarında dalga genliğinin ışık hızına göre bağlı zamanla değişimi (sağda).

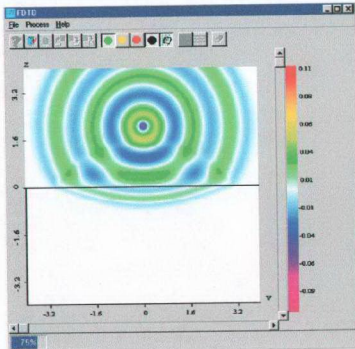


- 2) Dairesel kesitli bir iletkenden geçen akımın oluşturduğu dalganın yarı sonsuz kayıpsız dielektrik bir ortama uygulanması.

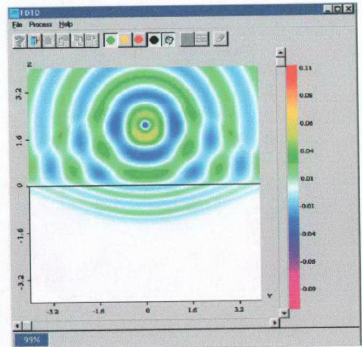
$$[-4,4]*[-4,4], T=5, \Delta T=0.01, \varepsilon=1+4*\chi(4-y)*\chi(y+4)*\chi(-z)*\chi(4+z),$$

$$\sigma=0, F=10*(\chi(0.1*0.1-y*y-(z-2)*(z-2)))*\cos(5*\pi*t).$$

$t=0.75T$ ve $t=0.99T$ anlarında dielektrik ortama gelen dalgaların durumu.



$t=0.75T$



$t=0.99T$

- 3) Dairesel kesitli bir iletkenen geçen akımın oluşturduğu dalganın yarı sonsuz küçük dielektrik sabitine sahip ve kayıplı bir dielektrik ortama uygulanması.

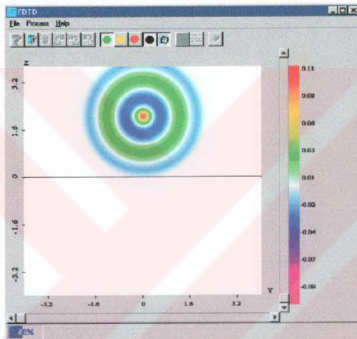
$$[-4,4]*[-4,4], T=5, \Delta T=0.01,$$

$$\varepsilon = 1+4*\chi(4-y)*\chi(y+4)*\chi(-z)*\chi(4+z),$$

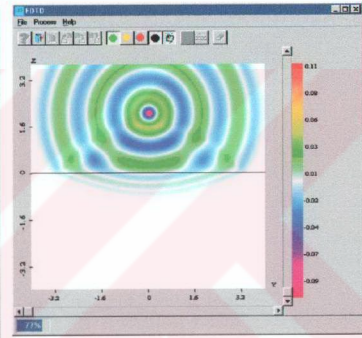
$$\sigma = 8*\chi(-z),$$

$$F=10*(\chi(0.1*0.1-y*y-(z-2)*(z-2)))*\cos(5*t).$$

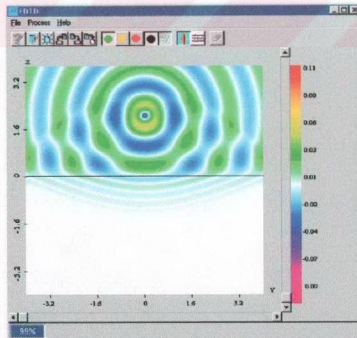
$t=0.40T$, $t=0.77T$ ve $t=0.99T$ anlarında az kayıplı dielektrik ortama gelen dalgaların durumu ve $(y,z)=(0,1)$, $(0,0.5)$ ve $(0,-0.5)$ konumlarında dalga genliklerinin ışık hızına göre bağıl zamanla değişimi (sağ alt).



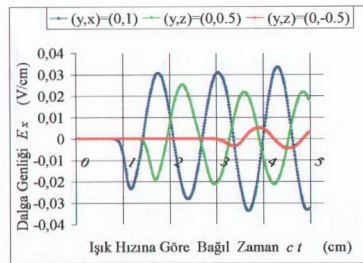
$t=0.40T$



$t=0.77T$



$t=0.99T$



- 4) Dairesel kesitli bir iletkenen geçen akımın oluşturduğu dalganın yarı sonsuz iyi bir iletken ortama uygulanması.

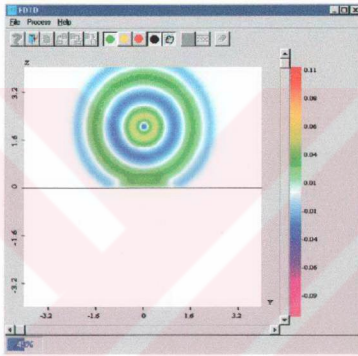
$$[-4,4]*[-4,4], T=5, \Delta T=0.01.$$

$$\varepsilon = 1 + 100 * \chi(4-y) * \chi(y+4) * \chi(-z) * \chi(4+z),$$

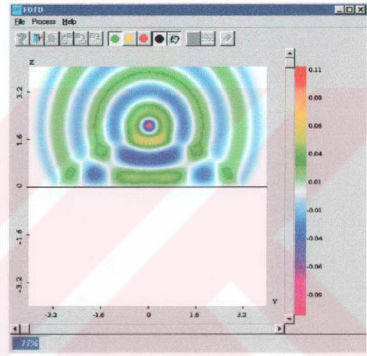
$$\sigma = 130000000 * \chi(-z),$$

$$F = 10 * (\chi(0.1 * 0.1 - y * y - (z-2) * (z-2))) * \cos(5 * t).$$

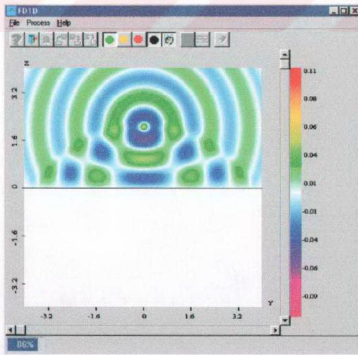
Aşağıda $t=0.49T, 0.77T, 0.86T, 0.99T$ anlarında dalgaların durumu.



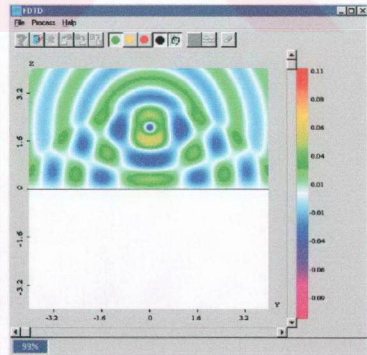
$t=0.49T$



$t=0.77T$



$t=0.86T$



$t=0.99T$

5) Exponansiyel horn anten ve dielektrik lens düzeneği.

$$[-2,10]*[-4,4]; T=15; \Delta t=0.01.$$

$$\varepsilon = 1+100*(\chi(z-\exp(y))+\chi(-z-\exp(y)))$$

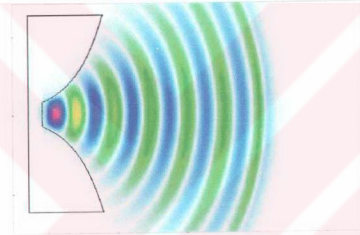
$$+\chi(-y-1))*\chi(1.1-y)*\chi(y+1.5)*\chi(3-z)*\chi(z+3),$$

$$\sigma = 50*(\chi(z-\exp(y))+\chi(-z-\exp(y))+\chi(-y-1))*\chi(1.1-y)*\chi(y+1.5)*\chi(3-z)*\chi(z+3),$$

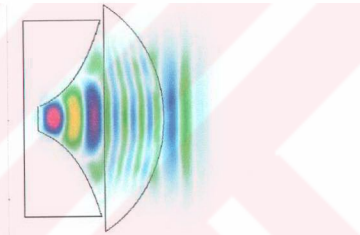
$$F = 10*\chi(0.4-z)*\chi(z+0.4)*\chi(-0.85-y)*\chi(y+0.9)*\sin((z+0.4)*3.14/0.8)*\cos(t*5).$$

İki modele ait simülasyonlarda, sağ kolondakiler için dielektrik lens fazlalığı hariç, tüm parametreler aynıdır. İkinci model için,

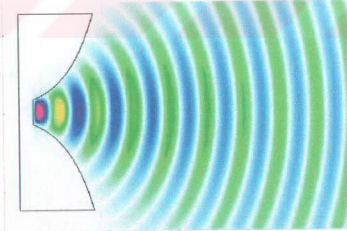
$$\varepsilon = 1+100*(\chi(z-\exp(y))+\chi(-z-\exp(y))+\chi(-y-1))*\chi(1.1-y)*\chi(y+1.5)*\chi(3-z)*\chi(z+3) \\ +4*\chi(y-.2)*\chi(4*4-z*z-(y+0.8)*(y+0.8)).$$



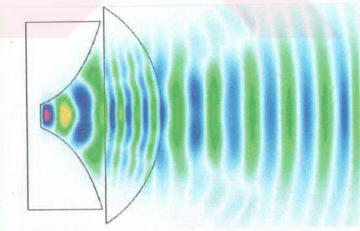
t=0.52T



t=0.52T



t=0.92T



t=0.92T

- 6) a) Metal horn ve dielektrik çubuk dalgakılavuzundan oluşan kaynaktan yarı sonsuz dielektrik düzleme ışınma.

$$[-4,4]*[-6,6.5], T=22, \Delta T=0.02.$$

$$\epsilon_{\text{çubuk}}=1+1.5*\chi(-z+5.7)*\chi(-y+1)*\chi(y+1)*\chi(z-y-1)*\chi(z+y-1),$$

$$\epsilon_{\text{horn}}=100*(\chi(-z+6)*\chi(z-4.5)*\chi(-y+1.3)*\chi(y+1.3)$$

$$-\chi(-z+5.7)*\chi(z-4.5)*\chi(y+1)*\chi(-y+1)),$$

$$\sigma_{\text{horn}}=130000000*(\chi(-z+6)*\chi(z-4.5)*\chi(-y+1.3)*\chi(y+1.3)$$

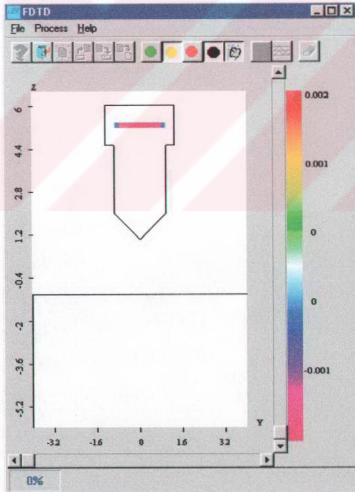
$$-\chi(-z+5.7)*\chi(z-4.5)*\chi(y+1)*\chi(-y+1)),$$

$$\epsilon_{\text{ysdüzlem}}=1+3*\chi(4-y)*\chi(y+4)*\chi(6+z)*\chi(-z),$$

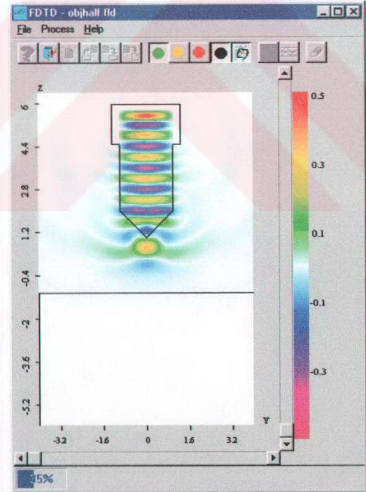
$$F=20*(\chi(-z+5.3)*\chi(z-5.1)*\chi(y+1)*\chi(-y+1))*\sin((y+1)*3.14/2)*\cos(5*t).$$

- b) (6a) daki yarı sonsuz dielektrik düzleme, dairesel kesitli dielektrik bir cismin eklenmesi durumu.

$$\epsilon_{\text{cisim}}=7*(\chi(0.7*0.7-y)*\chi(-z+2.5)*(z+2.5))$$

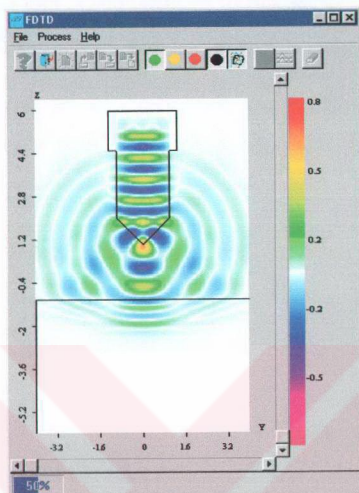
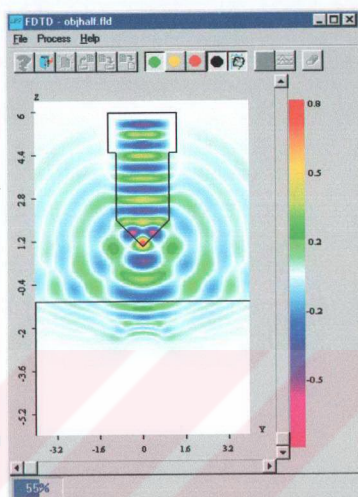
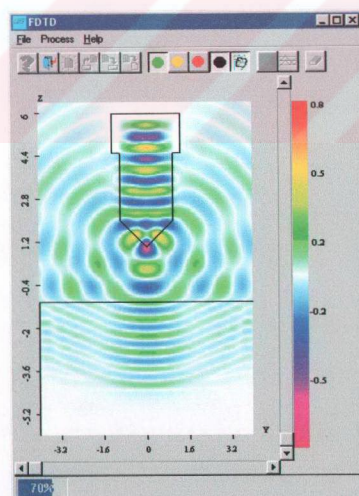
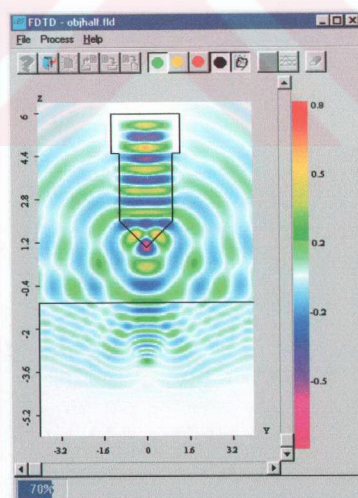


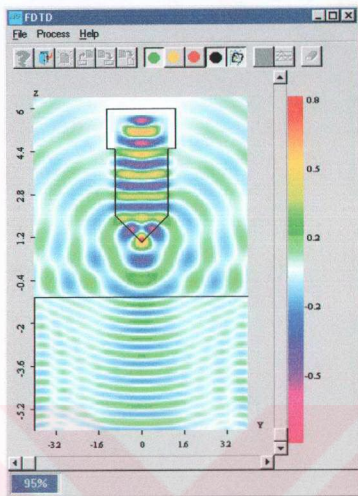
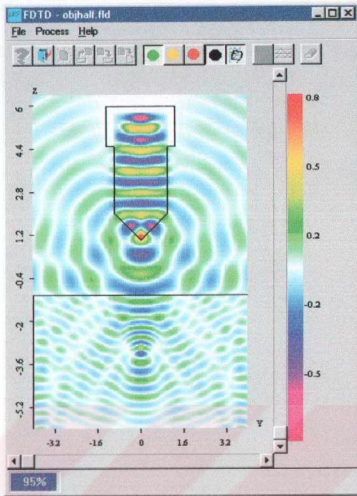
t=0



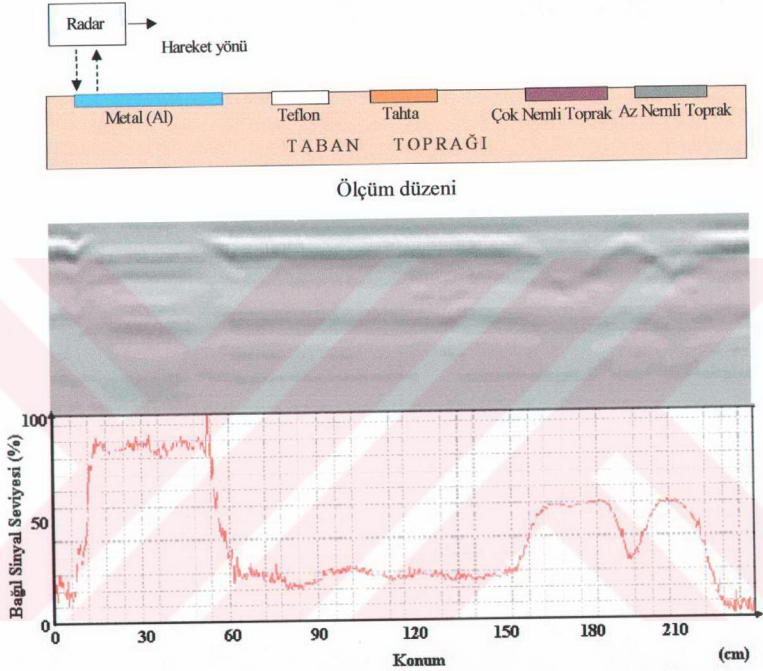
t=0.35T

Aşağıdaki şekillerden sol kolonda olanlar dielektrik cisim olmayan, sağ kolonda olanlar ise dielektrik cisim fazlalığı olan durumu göstermektedir.

 $t=0.50T$  $t=0.55T$  $t=0.70T$  $t=0.70T$

 $t=0.95T$  $t=0.95T$

- 7) Toprak içine yerleştirilmiş çeşitli numunelerden kaynaklanan bir yeraltı inceleme radarı tarafından algılanan elektromagnetik alan değişimi.



Radarla algılanan verilerden elde edilen görüntü ve bağıl sinyal seviyesi değişimi.