ISI DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN RİTZ METODU

Adem IRMAK

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi S. Şule ŞENER KILIÇ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

2021

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ISI DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN RİTZ METODU

(Ritz Method for Approximate Solution of the Heat Equation)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Adem IRMAK

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi S. Şule ŞENER KILIÇ

Erzurum

Ocak, 2021

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Adem IRMAK tarafından hazırlanan "Isı Denkleminin Yaklaşık Çözümü İçin Ritz Metodu" başlıklı çalışması 18 / 01 / 2021 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Uygulamalı Matematik Ana Bilim Dalı, Matematik Bilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Prof. Dr. Ercan ÇELİK *Atatürk Üniversitesi*
Danışman:	Dr. Öğr. Üyesi S. Şule ŞENER KILIÇ *Atatürk Üniversitesi*
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. Asıf YOKUŞ *Fırat Üniversitesi*

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Mehmet KARAKAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak *Dr. Öğr. Üyesi S. Şule ŞENER KILIÇ* danışmanlığında sunulan "Isı Denkleminin Yaklaşık Çözümü İçin Ritz Metodu" başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	**Tezin Benzerlik Oranı (%)**	**Maksimum Oran (%)**
Giriş	*2*	**30**
Kuramsal Temeller	*28*	**30**
Materyal ve Yöntem	*1*	**35**
Bulgular	*7*	**20**
Tartışma	*0*	**20**
Tezin Geneli	*18*	**25**

Not: *Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının **%5'den** büyük olmaması gerekir.*

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	**Tez Danışmanı**
Adem IRMAK	Dr. Öğr. Üyesi S. Şule ŞENER KILIÇ
3.2.2021	**3.2.2021**
İmza:	İmza:

***** Tez ile ilgili YÖKTEZ'de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun …./…/…. tarih ve …………. sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun …./…/…. tarih ve …………. sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölüm' ünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmamın her aşamasında bana yol gösterip değerli bilgi ve katkılarını esirgemeyen Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim üyelerinden Sayın Dr. Öğr. Üyesi S. Şule ŞENER KILIÇ hocama en içten teşekkürlerimi arz ederim.

Her zaman olduğu gibi bu çalışmamda da yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Adem IRMAK

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ISI DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN RİTZ METODU

Adem IRMAK

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi S. Şule ŞENER KILIÇ

Amaç: Bu tezde, ısı denklemi için bir sınır değer problemi ele alındı. Problemin Ritz metodu kullanılarak yaklaşık çözümü ile tam çözümü karşılaştırmalı olarak sunuldu.

Yöntem: İlk olarak, problem Ritz metodu kullanılarak, bir denklem sistemine dönüştürüldü ve algoritmanın hata analizi sunuldu.

Bulgular: Ele alınan problem tipi için Ritz yönteminin ne kadar kullanışlı olduğu sayısal örnekler üzerinde görülmüştür.

Sonuç: Isı denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için Ritz metodunun etkili olduğu görülmüş ve avantajlarından faydalanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: ısı denklemi, Ritz metodu, hata analizi

Ocak 2021, 41 sayfa

ABSTRACT

MS THESIS

RITZ METHOD FOR APPROXIMATE SOLUTION OF THE HEAT EQUATION

Adem IRMAK

Supervisor: Dr. Öğr. Üyesi S. Şule ŞENER KILIÇ

Purpose: In this thesis, a boundary value problem for the heat equation is discussed. Using the Ritz method, the approximate solution and the exact solution of the problem were presented comparatively.

Method: First, the problem was converted into an equation system using the Ritz method and the error analysis of the algorithm was presented.

Findings: The usefulness of the Ritz method for the problem type was seen on numerical examples.

Results: It has been seen that the Ritz method is effective to obtain numerical solutions of the heat equation and its advantages have been utilized.

Keywords: heat equation, Ritz method, error analysis.

January 2021, 41 pages

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\Omega = (0,l) \times (0,T)$	: $\mathbb{R}^2$ uzayında verilen bölge
$L_2(0,l)$	: $(0,l)$ aralığında ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_2(\Omega)$	: Ω bölgesinde ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$H^1(0,l)$	: Kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayına ait olan fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayı
$H_0^1(0,l)$	: $H^1(0,l)$ uzayının alt uzayı olup $(0,l)$ aralığının sınırlarında sıfıra dönüşebilen fonksiyonların uzayı

GİRİŞ

Isı denklemi, uygulamalı bilimlerdeki büyük öneminden dolayı son yıllarda oldukça yaygın olarak ele alınmaktadır. Özellikle mühendislik uygulama alanlarında sıklıkla kullanılmaktadır. Bu denklemlerin çözümlerini anlama arzusu, matematikçilerin çabalarında her zaman önemli bir yer tutmuştur.

Ritz metodu, adi diferansiyel denklem ve kısmi diferansiyel denklenmelerin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılan yaygın metotlardan bir tanesidir. Diferansiyel denklemlerin çözümü için oldukça kullanışlı olan Ritz metodu, fizik, kimya, biyoloji, mühendislik uygulamaları, reaktif uygulamalar, difüzyon denklemleri ve radyo frekansı uygulama alanlarında sıklıkla başvurulan kullanışlı bir yöntemdir. Bu yöntemde, zayıf çözüme seri çözümler yardımıyla yaklaşılır. Yöntemin etkinliği (yakınsaması) kullanılan temel sistem fonksiyonlarının sayısına bağlıdır.

Birçok parabolik, eliptik ve hiperbolik denklemlerin çözümünde Ritz metodunun kullanılması oldukça yaygın bir yöntemdir. Yöntem ilk olarak 1870'de Lord Rayleigh tarafından, bir ucu kapalı bir ucu açık borulardaki titreşim problemlerini çözmek için kullanılmıştır . Ancak yaklaşım literatür de pek tanınmamıştır. 40 yıl sonra, Ritz tarafından iki bildirinin yayınlanması nedeniyle, yöntem Ritz yöntemi olarak da adlandırıldı. Teori daha sonra bu metodun gelişimini inceleyen tartışmalara konu olmuş ve bazı farklarla Rayleigh-Ritz yöntemi olarak da yeniden isimlendirilmiştir (Leissa 2005).

Bu yöntemin uygulanmasında diğer tüm varyasyonel metotlar gibi öncelikle denklem integral formuna dönüştürülür ve ardından yaklaşık çözüm elde edilir (Reddy 1993). Ritz metodunun baz fonksiyonları seçimini ısı denkleminde ilk irdeleyen bilim adamları Delves ve Freeman (1981), Mikhlin (1971) dir.

Reddy ve Babu (2016) çalışmasında başka metotlarla Ritz metodunu adi diferansiyel denklemlere uygulayarak bazı mühendislik problemlerinde yaklaşık çözümleri karşılaştırmıştır.

Rashedi ve Yousefi (2011), parabolik bir denklemin Ritz metoduyla ters problem için çözümünü incelemişlerdir.

Storch ve Strang (1988), eşit yük altında konsol kirişinin statik deformasyonuna karşılık gelen varyasyon prensibini Ritz metoduyla oluşturmuşlardır.

Gander ve Wanner (2012), Ritz metodu hakkında bilgi verip;

$\psi_1(x,y), \psi_2(x,y), \psi_3(x,y), \psi_4(x,y), \ldots$ gibi bir dizi seçerek bu diziyle

$$\sum_{j=1}^{m} k_{i,j} a_j = b_i$$

sağlandığını ve diziyi içeren fonksiyonelin karesel terimlerden oluşup, minimal olduğunu göstermişlerdir.

Knabner ve Angermann (2003) çalışmasında parabolik denklemlerin klasik ve modern çözümleriyle ilgilenmişlerdir.

Omodei ve Anderssen (1975), iki noktalı sınır değer problemi için çözümlerin kararlılığını Ritz metodunu kullanarak ispat etmişlerdir.

Galerkin metodunun diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerine uygulanması Evans (1998) ve Ladyzhenskaya (1985) çalışmalarında anlatılmaktadır.

Bu tez çalışması ısı denkleminin sınır değer problemi için yaklaşık çözümler elde etmek amacıyla hazırlanmıştır.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Kuramsal Temeller bölümü tezde yer alan tanım ve teoremlerin ifade edildiği bölümüdür.

Materyal ve Yöntem bölümünde ısı problemi için Ritz metodunun nasıl uygulandığı ve hata yaklaşımı ifade edilmektedir. Bu bölümdeki teorik işlemlerde, Axelsson ve Barker (2001) çalışmasından faydalanılmıştır.

Araştırma Bulguları bölümü bir önceki bölümde teorisi incelenen metodun, zayıf çözümü elde edilen ısı problemimize nasıl uygulandığını ve yaklaşık çözümün elde edilmesi konularını kapsayan kısmıdır.

Tezin, Nümerik Örnekler bölümünde, iki örnek ele alınarak, bir önceki bölümde verilen teorik bilgiler ışığında yaklaşık nümerik çözümler elde edilmiştir. Sonuçlar tablo ve şekil üzerinde gösterilmiştir. Bu bölümdeki matematiksel işlemlerde Maple® programından yararlanılmıştır.

Son bölüm olan Tartışma ve Sonuç bölümünde ise Ritz metodunun bu tür problemlerin çözümü üzerine olan etkisinden bahsedilmektedir.

KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde verilen tanım ve teoremler için Vainberg (1973), Kreyszig (1989), Ladyzhenskaya (1985) ve Zeidler (1985,1990) kaynaklarından faydalanılmıştır.

Tanım 1: V herhangi bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

Eğer

$$N: V \to \mathbb{R}^+$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa, bu dönüşüme norm denir. Normlu bir vektör uzayına normlu uzay denir.

$N1.$ Her $x \in V$ için $\|x\| \geq 0$ dır. (Pozitiflik aksiyomu)

$N2.$ Her $x \in V$ için $\|x\| = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = 0$ olmasıdır.

$N3.$ Her $x \in V$ ve $\alpha \in F$ için $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$. (Homojenlik aksiyomu).

$N4.$ Her $x, y \in V$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (Üçgen eşitsizliği)

Tanım 2: (u_n) , normlu uzayında bir dizi olsun .

Eğer

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u\| = 0$$

oluyorsa (u_n) dizisi $u \in X$ elemanına yakınsıyor denir.

Tanım 3 (Kapalı Küme): X kümesinde her yakınsak dizinin yakınsadığı nokta bu kümeye ait ise X kümesine kapalı küme denir.

Tanım 4 (Konveks Küme): $X \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme olmak üzere, her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in X$ için

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in X$$

şartı sağlanıyorsa X kümesine konveks küme denir.

Tanım 5 (Konveks Fonksiyon): $X, \mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı konveks bir alt kümesi olsun. $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in X$ için

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu fonsiyona X üzerinde konveks fonksiyon denir.

Ayrıca $\lambda \in [0,1]$ ve $x_1 \neq x_2$ için

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

eşitsizliği geçerli ise f fonksiyonu kesin konvekstir denir.

Tanım 6: X normlu uzay olmak üzere, her $u, v \in X$ için

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u \pm v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

eşitsizliği geçerlidir ve bu genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği olarak adlandırılır.

Tanım 7 (Lineer Uzay): X kümesi üzerinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre, her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$L1.$ $x + y = y + x$

$L2.$ $(x + y) + z = x + (y + z)$

$L3.$ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

$L4.$ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

$L5.$ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

$L6.$ $\alpha x = x \Rightarrow \alpha = 1$

$L7.$ $x + u = x$ olacak şekilde $u \in X$ vardır.

$L8.$ $x + y = u$ olacak şekilde $y \in X$ vardır.

şartları sağlanıyorsa X kümesine reel sayılar kümesi üzerinde bir lineer uzay denir.

Tanım 8 (Koersiv Bilineer Form): $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\lim_{\|x\| \to 0} f(x) = \infty$$

şartını sağlıyorsa koersiv olarak adlandırılır. Başka bir ifadeyle herhangi $M > 0$ sayısı için $\|x\| \geq \mathbb{R}$ iken $f(x) \geq M$ olacak şekilde $R > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna koersiv adı verilir. H, Hilbert uzayı olmak üzere her $x \in H$ için

$$a(x, x) \geq c\|x\|^2$$

olacak şekilde $c > 0$ sabiti varsa $a: H \times H \to \mathbb{R}$ bilineer formuna koersiv adı verilir. Burada

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle_H}$$

şeklindedir.

Tanım 9 (Yakınsaklık): (X, d) bir metrik uzay ve (x_n), X kümesinde bir dizi olsun. Eğer her $\mathcal{E} > 0$ ve her $n \geq n_0$ için $d(x_n, x) < \mathcal{E}$ olacak şekilde $n_0(\mathcal{E}) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine X kümesinde yakınsak dizi ve x elemanına da dizinin limiti denir.

Tanım 10 (Cauchy Dizisi): (X, d) bir metrik uzay ve (x_n), X kümesinde bir dizi olsun. Eğer her $\mathcal{E} > 0$ için $n, m \geq n_0$ iken $d(x_n, x) < \mathcal{E}$ olacak şekilde $n_0(\mathcal{E}) \in \mathbb{N}$ sayısı mevcutsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 11 (Tam Metrik Uzay): (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer bu uzaydaki her Cauchy dizisi bir $x \in X$ limitine yakınsıyorsa (X, d) uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 12 (Banach Uzay): $X = (X, \|.\|)$, normlu lineer uzay olsun. X uzayı $d(x, y) = \|x - y\|$ metriğine göre tam ise bu uzaya Banach Uzayı denir.

Tanım 13 (Süreklilik): $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\mathcal{E} > 0$ için $d_X(x, x_0) < \delta$ iken $d_Y(f(x), f(x_0)) < \mathcal{E}$ olacak şekilde $\delta = \delta(\mathcal{E})$ pozitif sayı varsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu X kümesinin her noktasında sürekli ise bu fonksiyona X kümesinde sürekli fonksiyon denir.

Tanım 14: $f(x)$ fonksiyonu, $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a, b) açık aralığında diferansiyellenebilir ise

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ vardır.

Tanım 15: $g(x)$, $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilen pozitif veya negatif bir fonksiyon olsun. Eğer $f(x)$ bu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekliyse herhangi bir $c \in [a, b]$ için

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

olur. Eğer $g(x) = 1$ olarak alınırsa, bu teorem $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığındaki ortalama değerine karşılık gelir. Yani

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

olur.

Tanım 16 (Operatör): Lineer uzayda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 17 (Lineer Operatör): X ve Y, F cismi üzerinde birer lineer uzay olsun. $T: X \to Y$ operatörü, her $\lambda, \mu \in F$ ve $x, y \in X$ için

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüme lineer operatör denir.

Tanım 18: K üzerinde bir X lineer uzayı, $u + v$ toplamı $u, v \in X$ ve αu, $u \in X$ $\alpha \in K$ skaler çarpımı ile tanımlanmış bir kümedir. Bu toplama ve skaler çarpma şu özellikleri sağlamalıdır. Her $u, v, w \in X$ ve $\alpha, \beta \in K$ için

$V1.$ $u + v = v + u$

$V2.$ $(u + v) + w = u + (v + w)$

$V3.$ $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

$V4.$ $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

$V5.$ $\alpha u = u \Rightarrow \alpha = 1$

$V6.$ Her $u \in X$ için $u + \theta = u$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ mevcut olmalı.

$V7.$ Her $u \in X$ için $u + v = \theta$ olacak şekilde bir $v \in X$ mevcut olmalı.

Tanım 19: V, F cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı olmak üzere, eğer

$$\dot{\mathrm{I}} = V \times V \to F$$

dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu dönüşüme V üzerinde bir iç çarpım denir ve $x, y \in V$ için $\langle x, y \rangle$ şeklinde gösterilir.

İ1. Her $x \in V$ için $\langle x, x \rangle \geq 0$

İ2. Her $x \in V$ için $\langle x, x \rangle = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = 0$ olmasıdır.

İ3. Her $x, y \in V$ için $\langle x, y \rangle = \langle \overline{y, x} \rangle$. Yani $\langle x, y \rangle$ iç çarpımı $\langle y, x \rangle$ iç çarpımının eşleniğine eşittir.

İ4. Her $x, y \in V$ ve $\alpha \in F$ için $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.

İ5. Her $x, y, z \in V$ için $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x + z \rangle$.

Tanım 20: $(X, \langle\ \rangle)$ bir iç çarpım uzayı olsun. Her $x, y \in X$ için

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

eşitsizliğine Cauchy-Schwartz eşitsizliği denir. Burada norm, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ olarak tanımlanmaktadır.

Tanım 21: $(X, \langle\ \rangle)$, bir iç çarpım uzayı olsun. Bu uzay $d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ metriğine göre tam ise bu uzayan Hilbert uzayı denir.

Tanım 22: $H^1(0, l)$, Hilbert uzayı olup kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0, l)$ uzayına ait olan fonksiyonların uzayıdır.

$H_0^1(0, l)$ uzayı $H^1(0, l)$ uzayının alt uzayı olup, $(0, l)$ aralığının sınırlarında sıfır olan fonksiyonlar içermektedir. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(0,l)} = \int_0^l \left(u(x)v(x) + \frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx} \right) dx$$

$$\|u\|_{H_0^1(0,l)} = \sqrt{\langle u, v \rangle_{H_0^1(0,l)}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 23: $L_2(0,l)$ fonksiyon uzayı olup, $(0,l)$ aralığında ölçülebilir ve karesel olarak integrallenebilir fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzaydır. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle f,g\rangle_{L_2(0,l)} = \int_0^l f(x)g(x)dx$$

$$\|f\|_{L_2(0,l)} = \sqrt{\langle f,g\rangle_{L_2(0,l)}}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 24: $L_2(\Omega)$, $\Omega = (0,l)\times(0,T]$ bölgesinde ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonları içeren Hilbert uzayıdır.

Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u,v\rangle_{L_2(\Omega)} = \iint_\Omega u(x,t)v(x,t)\,dxdt,$$

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle u,v\rangle_{L_2(\Omega)}}$$

ile tanımlanır.

MATERYAL VE YÖNTEM

Bu tezde,

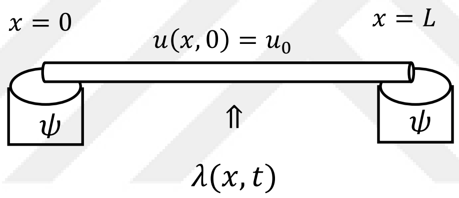
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial \left[\alpha^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]}{\partial x} = \lambda(x,t) \tag{1}$$

$$u(x,t)\Big|_{\psi} = g_1, g_2 \qquad\qquad t \in (0,T) \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad\qquad x \in \Omega = (0,L) \tag{3}$$

problemi sınır şartları ile birlikte ele alınmıştır.

Isı yayılım denklemi



şeklinde görselleştirildiğinde;

$$\alpha^2 = \frac{K}{\rho s}$$

eşitliğinde s çubuğun özgül ısısı, ρ yoğunluk fonksiyonu ve K ısıl iletkenliktir.

Burada α^2 ısı yayılım sabiti, $\lambda(x,t) \in L_2(\Omega)$ sürekli dış ısı kaynağı, $u_0(x) \in L_2(0,l)$ başlangıç ısı dağılımı, $\Big|_{\psi} \in L_2(0,T)$ ise uç noktalardaki ısı akı fonksiyonlarıdır. Bu problemin çözümü olan $u(x,t)$ fonksiyonu telin x noktasının t anındaki ısı değerini verir. Bu bölümde (1) - (3) sınır değer probleminin Ritz metodu ile nasıl çözülebildiğinden (Goldberg 1976) bahsedilmiş ve ardından çözüm yönteminin hata analizi verilmiştir (Drabek and Milota 2007).

Problemin Çözümüne İlişkin Bazı Teoremler ve Ritz Metodunun Yaklaşımı

Bu bölümde (1) - (3) probleminin yaklaşık çözümünü için Ritz metodunun hata yaklaşımı verilmiştir.

Remark 1: Hilbert uzaylarında, kısmi diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerinin varyasyonel veya zayıf formülasyonlarını incelemektedir. Uygun bir şekilde tanımlanmış zayıf çözümün varlığı ve tekliği tartışılacaktır. Bu çözümün sonlu boyutlu uzaylar yardımıyla yakınsamasına Ritz veya Galerkin metodu denir. Bu metodun bazı temel özellikleri ispatlanacaktır.

V Hilbert uzayı, $\alpha(.,.)$ iç çarpımı ile düşünüldüğünde $VxV \to \mathbb{R}$ ve norm $||v||_V = \alpha(v,v)^{1/2}$ şeklindedir.

Teorem 1 (Riesz Temsil Teoremi): $f \in V'$ sürekli lineer fonksiyonel olsun, burada tek olarak belirlenmiş bir $u \in V$ ile

$$\alpha(u,v) = f(v) \qquad \forall v \in V \tag{4}$$

birlikte, u varyasyonel problemin tek çözümüdür. Ayrıca

$$F(v) = \frac{1}{2}\alpha(v,v) - f(v) \to \min \qquad \forall u \in V \tag{5}$$

şeklindedir.

İspat: İlk olarak varyasyonel problemin varlığı ispat edilecektir.

f sürekli olduğu için

$$\|f(v)\| \leq c\|v\|_V \qquad \forall v \in V$$

yazılır. Buradan hareketle

$$f(v) = \frac{1}{2}\|v\|_V^2 - c\|v\|_V \geq -\frac{1}{2}c^2$$

yazılır. Burada son eşitlikte ilk eşitliğin lokal minimum değeri için gereklilik kriteri kullanıldı.

Dolayısıyla $F(.)$ fonksiyonu aşağıdan sınırlı ve

$$d = \inf_{v \in V} F(v)$$

vardır.

$\{V_k\}_{k\in N}$, $k \to \infty$ $için$ $F(V_k) \to d$ olan bir dizi olsun.

Basit bir hesaplama (Hilbert uzaylarda paralelkenar eşitliği) bize aşağıdaki ifadeyi verir.

$$||V_k - V_\ell||_V^2 + ||V_k + V_\ell||_V^2 = 2||V_k||_V^2 + 2||V_\ell||_V^2$$

$\forall v \in V$ için $d \leq F(V)$ ve $f(.)$' nin lineerliği kullanılırsa,

$k, \ell \to \infty$ için,

$$||V_k - V_\ell||_V^2 = 2||V_k||_V^2 + 2||V_\ell||_V^2 - 4\left\|\frac{V_k + V_\ell}{2}\right\|_V^2 - 4f(V_k) - 4f(V_\ell) + 8f\left(\frac{V_k + V_\ell}{2}\right)$$

$$= 4F(V_k) + 4F(V_\ell) - 8F\left(\frac{V_k+V_\ell}{2}\right)$$

$$\leq 4F(V_k + 4F(V_\ell) - 8d \to 0$$

elde edilir.

Bu yüzden $\{V_k\}_{k\in N}$ Cauchy dizisidir. Çünkü V bir tam uzay, $u \in V$ ile bu dizinin bir u limiti vardır. Çünkü $F(.)$ sürekli $F(u) = d$ ve u varyasyonel problemin bir çözümüdür.

Sonraki adımda, (2) varyasyonel probleminin her bir çözümünün (1)' inde çözümü olduğu gösterilecektir. Bu,

$$\phi(\mathcal{E}) = F(u + \mathcal{E}v) = \frac{1}{2}\alpha(u + \mathcal{E}v, u + \mathcal{E}v) - f(u + \mathcal{E}v)$$

$$= \frac{1}{2}\alpha(u,u) + \mathcal{E}\alpha(u,v) + \frac{\mathcal{E}^2}{2}\alpha(v,v) - f(u) - \mathcal{E}f(v)$$

şeklindedir.

Eğer u varyasyonel problemin minimumu ise $\mathcal{E} = 0$ da $\Phi(\mathcal{E})$ lokal minimuma da sahiptir. Yerel minimum için gerekli şart

$$0 = \phi'(0) = \alpha(u,v) - f(v) \qquad \forall v \in V$$

eşitliğine yol açar.

Son olarak çözümün tekliği kanıtlanacaktır. (1) denkleminin çözümünün tek olduğunu ispatlamak yeterlidir.

Eğer (1)' in çözümü tek ise, o zaman (2) varyasyonel probleminin iki çözümünün varlığı, önceki adımda kanıtlanmış olan gerçeğe aykırı olacaktır.

(1) denkleminin iki çözümü u_1 ve u_2 olsun. İki denklemin farkını hesaplamak

$$\alpha(u_1 - u_2, v) = 0 \qquad \forall v \in V$$

verir.

Özel olarak $v = u_1 - u_2$ için bu denklem sağlanır.

Bu yüzden $||u_1 - u_2||_V = 0$, yani $u_1 = u_2$ dir.

Tanım 25: $b(.,.): VxV \to \mathbb{R}$, V Banach uzayı üzerinde bilineer form olsun. Eğer

$$|b(u,v)| \leq \mu \|u\|_V \|v\|_V \qquad \forall u, v \in V\,, \qquad \mu > 0 \tag{6}$$

eşitliği sağlanırsa sınırlıdır. Burada μ ise u ve v den bağımsız bir sabittir.

Eğer bilineer form

$$b(u,u) \geq m\|u\|_V^2 \qquad \forall u \in V\,, \qquad m > 0 \tag{7}$$

şartını sağlarsa koersivdir. Burada m ise u dan bağımsız bir sabittir.

Remark 2: İç çarpım uygulaması . V Hilbert uzay olsun.

$\alpha(.,.)$ iç çarpımı sınırlı ve koersiv bilineer form, Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$$|\alpha(u,v)| \leq \|u\|_V \, \|v\|_V \quad \forall u, v \in V$$

Tarafından, açıkça $\alpha(u,v) = \|u\|_V^2$ olduğu görülür. Bu yüzden sabitler $m = 1$ ve $\mu = 1$ seçilebilir.

Sonra Riesz Teoreminin ifadesiyle sınırlı bilineer form ve koersiv durumuna göre genelleşecek.

Teorem 2 (Lax-Milgram Teoremi): $b(.,.): VxV \to \mathbb{R}$, V Hilbert uzayı üzerinde sınırlı ve koersiv bilineer form olsun.

$$b(u,v) = f(v) \qquad \forall v \in V \tag{8}$$

Bu halde her bir sınırlı lineer fonksiyonel $f \in V'$ için, tam olarak bir $u \in V$ vardır.

İspat: T bir lineer operatör, $T': V \to V$

$$\alpha(Tu,v) = b(u,v) \quad \forall v \in V \qquad \alpha(T'u,v) = b(v,u) \qquad \forall v \in V \tag{9}$$

ile tanımlanır.

$b(u,.)$ ve $b(.,u)$ V üzerinde sürekli lineer fonksiyonel olmak üzere Tu ve $T'u$ elemanları vardır ve tek tanımlanır.(Teorem 1' den). Çünkü operatörler aşağıdaki bağıntıyı sağlar.

$$\alpha(Tu,v) = b(u,v) = \alpha(T'v,u) = \alpha(u,T'v) \tag{10}$$

T' ne T nin adjoint operatörü denir. (9) da $V = Tu$ alınırsa ve $b(.,.)$ nın sınırsızlığı kullanılırsa ($\forall u \in V$ $için$)

$$\|Tu\|_V^2 = \alpha(Tu,Tu) = b(u,Tu) \leq \mu\|u\|_V \implies \|Tu\|_V \leq \mu\|u\|_V$$

yazılır.

Bu yüzden T sınırlıdır. Buradan T lineer ve süreklidir.

Aynı işlemler kullanılarak T' nünde sınırlı ve sürekli olduğu gösterilebilir.

Bilineer formu tanımlayalım.

$$d(u,v) := \alpha(TT'u,v) = \alpha(T'u,T'u) \qquad \forall u,v \in V$$

Burada (10) kullanıldı.

Bundan dolayı bilineer form simetriktir. $b(.,.)$ nin koersivliği kullanılarak ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$m^2\|v\|_V^4 \leq b(v,v)^2 = \alpha(T'v,v)^2 \leq \|v\|_V^2\ \|T'v\|_V^2 = \|v\|_V^2\alpha(T'v,T'v) = \|v\|_V^2 d(v,v)$$

elde edilir. Şimdi T' ve $\alpha(.,.)$ nın sınırlılığı uygulanırsa

$$m^2\|v\|_V^2 \leq d(v,v) = \alpha(T'v,T'v) = \|T'v\|_V^2 \leq \mu\|v\|_V^2 \tag{11}$$

Burada $d(.,.)$ V üzerinde bir iç çarpm, simetrik aynı zamanda da koersivdir. (11) de $d(v,v)^{\frac{1}{2}}$ tarafından etkilenmiş norma $\|v\|_V$ normuna eşittir.

Teorem 2' den

$$d(w,v) = f(v) \qquad \forall v \in V$$

için tam olarak bir $w \in V$ vardır. (9) ile (8) in içine $u = T'$ eklenirse

$$b(T'w,v) - \alpha(TT'w,v) = d(w,v) = f(v) \qquad \forall v \in V$$

Bu yüzden (8) in çözümü $T'w$ dır.

Çözümün tekliği simetrik durumda olduğu gibi benzer şekilde kanıtlanmıştır.

Remark 3: V Hilbert uzay olmak üzere $\alpha(.,.)$ iç çarpımını alalım.

$$F(v) = \frac{1}{2}\alpha(v,v) - f(v) \rightarrow \min \tag{12}$$

problemini düşündüğümüzde burada $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı lineer fonksiyoneldir.

$$\alpha(u,v) = f(v) \qquad \forall v \in V \tag{13}$$

Denkleminde tek çözümü olan varyasyonel problemin $u \in V$ tek çözümü vardır. Bu da Teorem (2) de kanıtlanmıştır.

(12) veya (13) ün çözümünde nümerik yöntemle yaklaşmak için, V nin sayılabilir ortonormal baza (Schauder baz) sahip olduğu varsayılacaktır. Sonra, aşağıdaki özelliklere sahip $dimV_K = k$ ile sonlu boyutlualt uzaylar

$V_1, V_2, \ldots . \subset V \quad \forall u \in V \quad$ ve $\quad \forall \mathcal{E} > 0$ için $\; k \in N\;$ ve $\; u_k \in V_K$

vardır ve

$$\|u - u_k\|_V \leq \mathcal{E} \qquad \forall k \geq K \tag{14}$$

şartını sağlar.

$V_K \subset V_{K+1}$ formunun dahil edilmesinin gerekli olmadığına dikkat edelim.

(12) ve (13) ün Ritz yaklaşımı şu şekilde tanımlanır.

$$\alpha(u_k, v_k) = f(v_k) \qquad \forall v_k \in V_K \tag{15}$$

olacak şekilde $u_k \in V_K$ bulunmasıdır.

Lemma 1: (15) çözümünün varlığı ve tekliği (15) in tam olarak bir çözümü vardır.

İspat: Hilbert uzaylarının sonlu boyutlu alt uzayları da Hilbert uzaylarıdır. Bu sebeple Teorem 1’ i (15) e uygulayabiliriz, bu da lemmanın açıklamasını verir. Ek olarak, (15) in çözümü V_K üzerindeki bir minimizasyon problemini çözer.

Lemma 2: (En iyi yaklaşım özelliği)

(15) in çözümü V_K da u nun en iyi yaklaşımıdır. Yani,

$$\|u - u_k\|_V = \inf_{v_k \in V_K} \|u - u_k\|_V \tag{16}$$

sağlanır.

İspat: $V_K \subset V$ olmak üzere (13) zayıf denkleminde test fonksiyonlarının biri V_K dan kullanılabilir. (13) ve (15) in fonksiyon ortogonalliğini verir, buna Galerkin ortogonalliği denir.

$$\alpha(u - u_k, v_k) = 0 \qquad \forall v_k \in V_K \tag{17}$$

ile ifade edilir. Burada $u - u_k$ hatası V_K uzayında ortogonaldir. Yani, $u - u_k \perp V_K$ dir. Bunun manası, V nin iç çarpımına göre V_K üzerinde u nun ortogonal yansımasıdır. Şimdi $w_k \in V_K$ keyfi bir eleman olsun. (17) Galerkin Ortogonali ile Cauchy-Schwarz eşitsizliği aşağıdaki ifadeyi sağlar.

$$\|u - u_k\|_V^2 = \alpha(u - u_k, u - u_k) = \alpha(u - u_k, u - (u_k - w_k))$$

$$= \alpha(u - u_k, u - v_k) \leq \|u - u_k\|_V \|u - v_k\|_V$$

Burada $w_k \in V_K$ ve $v_k \in V_K$ keyfidir.

Eğer $\|u - u_k\|_V > 0$ ise $\|u - u_k\|_V$ bölünerek lemmanın ifadesini verir. Eğer $\|u - u_k\| = 0$ ise lemma son derece doğrudur.

Teorem 3 (Ritz Metodunun yakınsaması): Ritz metodu aşağıdaki bağıntıyla yakınsar.

$$\lim_{x \to \infty} \|u - u_k\|_V = 0$$

İspat: En iyi yaklaşım özelliğini (14) ve (16) verir.

$$\|u - u_k\|_V = \inf_{v_k \in V_K} \|u - u_k\|_V \leq \mathcal{E}$$

Eşitliği her bir $\mathcal{E} > 0$ ve $k \geq K(\mathcal{E})$ için sağlanır. Böylece yakınsama ispatlanmış olur.

Remark 4: Ritz Metodunun Lineer denklem sistemi olarak formülasyonu:

V_K nın hesaplanması için V_K nın keyfi bazı $\{\phi_i\}_{i=1}^k$ kullanılabilir. $\forall v_k \in V_K$ için (15) Ritz yaklaşımı için denklem sağlanır ve sadece her bir ϕ_i baz fonksiyonu için sağlanır. Bu ifade denklemin her iki tarafının test fonksiyonuna göre lineerliğinden ve her bir fonksiyonun $v_k \in V_K$ baz fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak gösterilebileceğinden kaynaklanmaktadır. $v_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i \phi_i$ olsun. (15) den yola çıkarak

$$\alpha(u_k, v_k) = \sum_{k=1}^{k} \alpha_i \alpha(u_k, \phi_i) = \sum_{k=1}^{k} \alpha_i f(\phi_i) = f(v_k)$$

yazılır.

Eğer

$$\alpha(u_k, \phi_i) = f(\phi_i) \qquad i = 1,2, \dots, k$$

ise denklem sağlanır. Eğer (15) sağlanırsa özellikle ϕ_i nin her bir baz fonksiyonu için geçerlidir. Ardından, baz fonksiyonlarının lineer kombinasyonu da olası bir çözüm için kullanılır.

$u_k = \sum_{j=1}^{k} u^j \phi_j$ $\qquad$ $u_j \in \mathbb{R}$ (bilinmeyen katsayılar olmak üzere)

Test fonksiyonları olarak kullanıldığında, baz fonksiyonları elde edilir.

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha(u^j \phi_j, \phi_i) = \sum_{j=1}^{k} \alpha(\phi_j, \phi_i) u^j = f(\phi_j) \qquad i = 1,2, \dots, k$$

Bu denklem $A_u = f$ denkleminin lineer sistemine eşittir.

Burada;

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{k} = \alpha(\phi_j, \phi_i)_{i,j=1}^{k}$$

sertlik matrisi olarak adlandırılır.

İç çarpımın argümanları ve matrisin girişi için, indislerin sırasının farklı olduğuna dikkat edelim. Sağ taraf, $f_i = f(\phi_j)$, $i = 1,2, \dots, k$ olmak üzere k uzunluğunda bir vektördür.

$v_k = \sum_{i=1}^{k} v^j \phi_i$ elemanları ve $(v^1, v^2, \dots, v^k)^T$ katsayı vektörü arasında $1-1$ eşleme kullanmak, A matrisinin pozitif tanımlı ve simetrik olduğunu gösterebilir.

$$A = A^T \Leftrightarrow \alpha(v, w) = \alpha(w, v) \qquad \forall v, w \in V_K$$

$$x^T A_x > 0 \quad x \neq 0 \text{ için} \Leftrightarrow \alpha(v, v) > 0 \qquad \forall v \in V_K \quad v \neq 0$$

Remark 5: Koersiv bilineer form ve sınırlılık durumu:

Eğer $b(.,.)$ sınırlı ve koersiv fakat simetrik değil, (8) in yaklaşık çözümü (Ritz metodunda olduğu gibi aynı fikirle) mümkündür. Bu durum Galerkin yöntemi olarak adlandırılır.

Ayrık problem

$$b(u_k, v_k) f(v_k) \qquad \forall v_k \in V_K \tag{18}$$

olacak şekilde $u_k \in V_k$ bulmaya bağlıdır.

Lemma 3: (18) in çözümünün varlığı ve tekliği:

(18) in tam olarak tek çözümü vardır.

İspat: Lemma' nın ifadesi doğrudan Teorem Lax-Milgram (Teorem (2)) den gelir.

Remark 6: Ayrık çözüm üzerine;

Koersiv bilineer form ve sınırlılık olması durumunda ayrık çözüm ortogonal izdüşüm değildir.

Lemma 4: Cea Lemma' sının hata tahmini:

V Hilbert uzayında $b: VxV \to \mathbb{R}$ sınırlı ve koersiv bilineer form olsun ve $f \in V'$ sınırlı lineer fonksiyonel olsun.

(8) in çözümü u ve (18) in çözümü u_k olsun, o halde hata tahmini aşağıdaki gibi

$$\|u - u_k\|_V \leq \frac{\mu}{m} \inf_{v_k \in V_K} \|u - u_k\|_V \tag{19}$$

bulunur. Burada,

m ve μ sabitleri Tanım (25) ve Remark (2) de verilmiştir.

ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde ısı denkleminin, bir önceki bölümde verilen Ritz metodu kullanılarak yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Böylelikle ele alınan problem tipi için Ritz yönteminin ne kadar etkili olduğu sayısal örnekler üzerinde bir kez daha sunulmuştur. Hesaplamalar için (Grossmann et al. 2007) çalışmasından faydalanılmıştır.

Problemimizin matematiksel ifadesi;

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial \left[\alpha^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]}{\partial x} = \lambda\,(x,t) \qquad 0 \leq x \leq L \tag{20}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in \Omega = (0,L) \tag{21}$$

$$u(x,t)\Big|_{\psi} = 0 \qquad t \in (0,T) \tag{22}$$

şeklindedir. Eğer problemimizin zayıf bir çözümü varsa, bir seri aracılığıyla problemimize yaklaşık olarak ulaşabiliriz.

Denklem (20)' i yeniden ifade edersek

$$u_t - [\alpha^2 u_x]_x = \lambda \tag{23}$$

olur.

Burada x ve t indisleri mekânsal ve zamansal türevlere karşılık gelir. (Larsson and Thomee 2003).

(20) - (22) probleminin çözümü denince her $g \in H^1(\Omega)$ test fonksiyonu için

$$\int_0^L g(-[\alpha^2 u_x]_x + u_t)\,dx = \int_0^L g\lambda\,dx \qquad u(x,0) = u_0 \tag{24}$$

eşitliğini sağlayan $u \in H^{2,1}((0,L) \times (0,T))$ fonksiyonu anlaşılacaktır (Sobolev 1991).

(24) deki integral eşitliği ifadesi artık (20) - (22) orijinal denklem sisteminin zayıf çözümüne eşittir.

Zayıf çözüm için (24) eşitliğini integrallediğimizde

$$\int_0^L [\alpha^2 u_x]_x g\, dx = (\alpha^2 u_x g)\Big|_0^L - \int_0^L \alpha^2 u_x g_x\, dx$$

$$= [\alpha^2 u_x g]_0^L - \int_0^L \alpha^2 u_x g_x\, dx$$

olduğundan (24) denklemi

$$\int_0^L (\alpha^2 u_x g_x + u_t g)\, dx - [\alpha^2 u_x g]_0^L = \int_0^L \lambda g\, dx \tag{25}$$

şeklinde yazılabilir.

$$g(0) = g(L) = 0 \tag{26}$$

olduğu düşünülürse

$$\int_0^L (\alpha^2 u_x g_x + u_t g)\, dx = \int_0^L \lambda g\, dx \tag{27}$$

olur.

Bu denklem (20) - (22) denkleminin zayıf çözüm formudur.

Bu formun temel faydası bağımlı değişkenin düzgün zayıf olabileceğine imkan tanır. Şimdi kendi problemimiz için Ritz metodundan bahsedelim.

Bu metod ile uygun yaklaşık fonksiyonların lineer kombinasyonu şeklinde yaklaşık çözümü

$$u^N(x,t) = \sum_{i=1}^{N} c_i(t)\phi_i(x) \tag{28}$$

eşitliği şeklinde aranacaktır. Ritz metodu self adjoint problemlere uygulanabilir.

Burada $\phi_i(x)$ fonksiyonları

$\phi_i(0) - \phi_i(L) = 0$ ve $(\phi_i, \phi_j) = \delta_i^j = (\phi_j, \phi_i)$ yani; $\left(\phi_{i,j}\right) = (\phi_{j,i})$

şartını sağlamalıdır (Samarskii 2001).

$$g = \phi_j \tag{29}$$

şartını kabul edelim.

Denklemimizin zayıf formu

$$\int_0^L \left(\alpha^2 u_x (\phi_j)_x + u_t \phi_j\right) dx = \lambda \phi_j \tag{30}$$

denklemine dönüşür. Burada

$$\phi_j(0) = \phi_j(L) = 0 \tag{31}$$

şartlarını sağlar.

Aradığımız $u(x,t)$ fonksiyonu

$$u(x,t) \approx u^N(x,t) = \phi_0 + c_1(t)\phi_1(x) + c_2(t)\phi_2(x) + \; \ldots ....$$

$$= \phi_0 \; + \sum_{i=1}^{N} c_i(t)\phi_i(x) \tag{32}$$

biçimindedir. $\phi_0 = 0$ olduğundan (30) denklemi düşünüldüğünde

$$\int_0^L \left[\alpha^2 \sum_{i=1}^{N} c_i(t)\big(\phi_i(x)\big)_x + \sum_{i=1}^{N} \big(c_i(t)\big)_t \phi_i(x)\phi_j(x)\right] dx = \int_0^L \lambda \phi_i dx \tag{33}$$

elde edilir. (33) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\sum_{i=1}^{N} (c_i(t))_t \int_0^L \phi_i(x)\phi_j(x)\, dx = -\alpha^2 \sum_{i=1}^{N} c_i(t) \int_0^L (\phi_i(x))_x (\phi_j(x))_x \, dx + \int_0^L \lambda \phi_j \, dx \tag{34}$$

Buradan

$$\mu \dot{\vec{c}} = -\alpha^2 K \vec{c} + \lambda \tag{35}$$

elde edilir.

Burada $\vec{c} = [c_1(t), c_2(t), \dots, c_N(t)]^T$ olmal üzere

$$\mu = \left[\int_0^L \phi_i(x)\phi_j(x)\,dx\right]_{i,j=1}^N \quad , \quad K = \left[\int_0^L (\phi_i(x))_x(\phi_j(x))_x dx\right]_{i,j=1}^N \quad , \quad \lambda = \left[\int_0^L \lambda\phi_i(x)dx\right]_{i=1}^N$$

şeklindedir.

Bu matrissel ifade sınır şartları ve başlangıç şartlarıyla birlikte düşünüldüğünde

$$\phi_i = x^i\left(1 - x^i\right) \tag{36}$$

$$\frac{d\phi_i}{dx} = -2x^{2i-1} + ix^{i-1} \tag{37}$$

sınır şartları ile

$$u(x,0) = \sin(k\pi x) \tag{38}$$

olur.

Başlangıç şartı alındığında

$$\int_0^L u(x,0)\phi_j(x)dx = \int_0^L \sum_{i=1}^N c_i(0)\phi_i(x)\phi_j(x)\,dx \tag{39}$$

elde edilir. Denklem μ bilindiğinden (39) da yerine konulursa

$$\mu\vec{c}(0) = \int_0^L \sin(k\pi x)\,\phi_j(x)dx \tag{40}$$

bulunur.

Son olarak c için çözüldüğünde

$$\vec{c}(0) = \mu^{-1}\left[\int_0^L \sin(k\pi x)\,\phi_j(x)dx\right]_{j=1}^N \tag{41}$$

bulunur. Bu değer bize $u^N(x,0)$ fonksiyonunu verir.

Şimdi ise çubuğun ısısının zamanla nasıl geliştiğini anlamak için λ, K, μ katsayı matrisleriyle (35) adi diferensiyel denklemini başlangıç şartıyla birlikte düşündüğümüzde,

$$c(0) = c_0$$

için

$c_i(t)$ fonksiyonları tam olarak bulunabilir. Bu fonksiyonları yaklaşımımızda yerine koyarsak

$$u^N(x,t)$$

çözümü bulunur.

Nümerik Örnekler

Bu bölümde elde edilen bulgular doğrultusunda sonuçları test etmek üzere nümerik örneklere yer verilmiştir.

Örnek 1: (1) probleminde $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ bölgesi için

$$\begin{gathered} u_t - [\alpha^2 u_x]_x = e^{-t} \sin \pi x \qquad (\mathrm{x,t}) \in \Omega \\ \mathrm{u(x,0)} = e^{x-1}, \qquad \mathrm{x} \in (0,1) \\ \mathrm{u(0,t)} = e^t \qquad \mathrm{u(1,t)} = e^{t+1} \qquad \mathrm{t} \in (0,1) \end{gathered} \tag{42}$$

sınır değer probleminin çözümünü arayalım.

Katsayı matrisleri

$$\mu = \begin{bmatrix} \int_0^1 \phi_1\phi_1\, dx & \cdots & \int_0^1 \phi_1\phi_4\, dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \phi_4\phi_1\, dx & \cdots & \int_0^1 \phi_4\phi_4\, dx \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} \int_0^1 \phi_1'\, \phi_1' dx & \cdots & \int_0^1 \phi_1'\, \phi_4' dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \phi_4'\, \phi_1' dx & \cdots & \int_0^1 \phi_4'\, \phi_4' dx \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} 3/34 & 3/23 & 0 & 0 \\ 3/23 & -3/41 & 3/23 & 0 \\ 0 & 3/23 & -3/46 & 3/26 \\ 0 & 0 & 3/26 & 3/52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}_t = -\alpha^2 \begin{bmatrix} 3/11 & 2/13 & 0 & 0 \\ 2/13 & -3/13 & 2/15 & 0 \\ 0 & 2/15 & 4/15 & 2/17 \\ 0 & 0 & 2/17 & 3/17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \tag{43}$$

eşitliği elde edilir.

$$\mu\vec{c}(0) = \int_0^1 \sin \pi x \, \phi_j(x) dx \qquad (j = 1, 2, \dots)$$

hesaplanarak

$$\vec{c}(0) = \begin{bmatrix} 0{,}604975 \\ -1{,}150738 \\ 1{,}583846 \\ -1{,}861928 \end{bmatrix}$$

bulunur ve

$$u^N(x, 0) = 0{,}604975 e^x \sin \pi x - 1{,}150738 e^x \sin 3\pi x$$

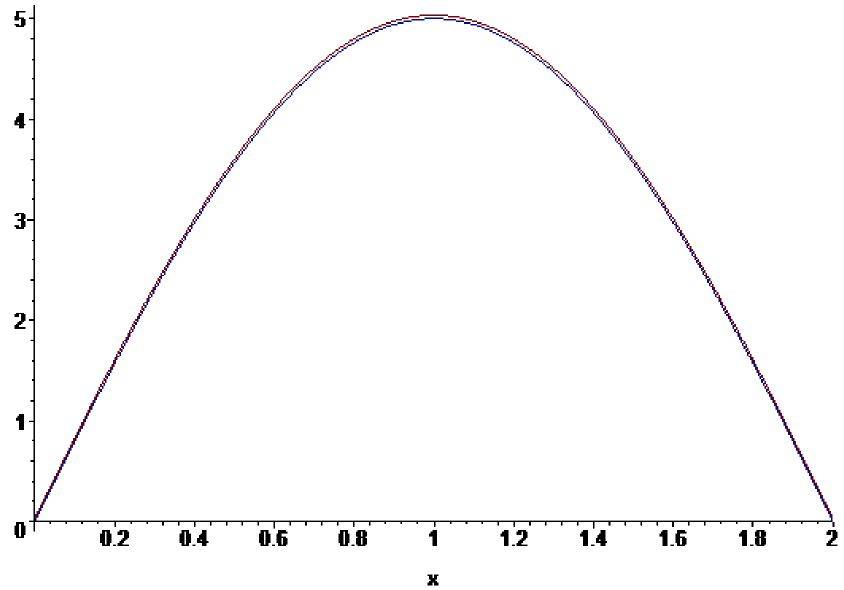
başlangıç şartı elde edilir. Başlangıç şartıyla birlikte

$$c_1(t), c_2(t), c_3(t), c_4(t)$$

düşünüldüğünde

$$\begin{aligned} u^N(x,t) = {} & e^{\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 4t}\left(0{,}57355 + 3{,}864 e^{t^3}\right) \sin \frac{\pi}{2} x \\ & + e^{\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 4t}\left(0{,}2772 + 2{,}04 e^{t^3}\right) \sin \frac{5\pi}{3} x \\ & + e^{\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 4t}\left(0{,}31532 + 0{,}71835 e^{t^3}\right) \sin \frac{7\pi}{0} x \\ & + e^{\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 4t}\left(0{,}62534 + 0{,}32109 e^{t^3}\right) \sin \frac{9\pi}{2} x \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (42) problemi için $u(x) = e^{x(\cos t) + \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 4t} \sin \pi x$ çözümü elde edilir. Şekil 1' de bu çözüm fonksiyonu ve $u^N(x)$ nümerik çözümünün grafikleri verilmiştir.



Şekil 1. Örnek 1 için $u(x)$ ve $u^N(x)$ fonksiyonlarının grafiği

Tablo 1 de $u(x)$çözümü ve farklı sayıda test fonksiyonu ile elde edilen yaklaşık çözüm arasındaki farkın L_2 normu verilmiştir.

Tablo 1. Farklı n değerleri için L_2 hataları

$\boldsymbol{n}$ **test fonksiyonu sayısı**	$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}\|^2_{L_2(\mathbf{0},\mathbf{1})}$
10	$0.23445554 \times 10^{-5}$
20	$0.86565666 \times 10^{-6}$
30	$0.69942957 \times 10^{-8}$
40	$0.75666652 \times 10^{-9}$
50	$0.10989807 \times 10^{-11}$
60	$0.56778784 \times 10^{-12}$
70	$0.14158152 \times 10^{-14}$
80	$0.10403664 \times 10^{-14}$
90	$0.360599523 \times 10^{-15}$
100	$0.13975272 \times 10^{-16}$

Tablo 1 den kullanılan baz fonksiyonu sayısı artıkça hatanın azaldığı görülmektedir. Buna göre baz fonksiyonu sayısı ne kadar artırılırsa o kadar gerçek çözüme yakın bir çözüm fonksiyonu elde edilecektir.

Örnek 2: (1) probleminde

$$u_t - [\alpha^2 u_x]_x = \pi e^{-t} \sin \pi x \qquad (\mathrm{x},\mathrm{t}) \in \Omega$$
$$\mathrm{u}(\mathrm{x},0) = \sin \pi \mathrm{x} + 3\mathrm{x}, \qquad 0 < x < 1 \tag{44}$$
$$-\mathrm{u}(0,\mathrm{t}) = \pi e^{-t} \qquad \mathrm{u}(1,\mathrm{t}) = \pi e^{-t} \qquad 0 < t < 1$$

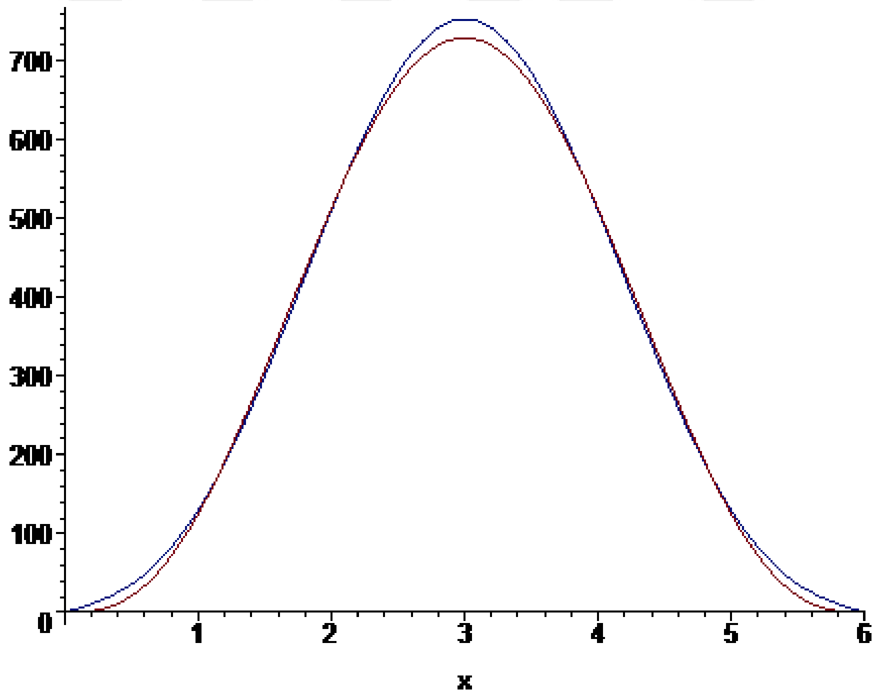
sınır değer problemini ele alalım. Bu problemin01

$$u^N(x) = \sum_{i=1}^{N} u_n \sin k\ \pi x \tag{45}$$

formunda bir çözümünü arayalım. Gerekli hesaplamalar yapılarak, (45) ifadesinde bilinmeyen katsayılar hesaplandığında aşağıdaki çözüm fonksiyonu elde edilir:

$$\mathrm{u}^{\mathrm{N}}(x) = e^{t+\sin\frac{\pi}{2}} + 588.21590173 \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) - e^{t+\sin\frac{\pi}{2}} + 164.48327540 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

(44) problemi için tam çözüm $u(x) = e^{t^2} \sin x(x-1)$ şeklindedir. Aşağıdaki Şekil 2' de $u(x)$ ve $u^N(x)$ nümerik çözümünün grafikleri verilmiştir.



Şekil 2. Örnek 2 için $u(x)$ ve $u^N(x)$ fonksiyonlarının grafiği

Tablo 2' de $u(x)$çözümü ve farklı sayıda test fonksiyonu ile elde edilen yaklaşık çözüm arasındaki farkın L_2 normu verilmiştir.

Tablo 2. Farklı n değerlerine karşılık gelen L_2 hataları

$\boldsymbol{n}$ **test fonksiyonu sayısı**	$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}\|_{L_2(\Omega)}^{2}$
10	0.12865383635353
20	0.00527906000063
30	0.00001768515181
40	$0.12131383 \times 10^{-6}$
50	$0.16343126 \times 10^{-6}$
60	$0.31738288 \times 10^{-7}$
70	$0.79358519 \times 10^{-8}$
80	$0.97654623 \times 10^{-9}$
90	$0.56789414 \times 10^{-10}$
100	$0.2345665 \times 10^{-11}$

Tablo 2' den n değerinin artması durumunda Örnek 2 için gerçek çözüm ve elde edilen yaklaşık çözümler arasındaki farkın L_2 normunun azaldığı görülmektedir.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, Isı Problemi için bir sınır değer problemi ele alınmıştır. Materyal ve Yöntem bölümde ele alınan sınır değer problemi için zayıf çözümden bahsedilmiştir. Bu nümerik yaklaşım Ritz metodunun kullanılmasını içermektedir. Bu metodun yaklaşık çözüm elde edilebilmesi için nasıl uygulandığı açıklanmıştır. Ayrıca tezin bu bölümde bu metodun hata analizi de anlatılmış ve hataya ait teorem ispatı ile birlikte verilmiştir.

Araştırma ve Bulgular kısmında, teorik olarak verilen nümerik yaklaşımı test etmek için iki nümerik örnek çözülmüştür. Nümerik örneklerde, Ritz metodunda kullanılan temel sistem fonksiyonlarının sayısına bağlı olarak hatanın nasıl değiştiği tablolar üzerinde açıklanmıştır. Ayrıca ele alınan nümerik problemler için gerçek çözüm ve yaklaşık çözümün grafiklerinin karşılaştırılması da yapılmıştır. Sunulan problemlerde elde edilen hata sonuçları, kullanılan nümerik yaklaşımın ne kadar etkili olduğunu göstermektedir. Diğer bir ifadeyle, ısı denkleminin nümerik çözümlerini elde etmede Ritz metodu oldukça kullanışlı olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

Axelsson, O. and Barker, V.A., 2001. Finite Element Solution of Boundary Value Problems: Theory and Computation. Society for Industrial & Applied Mathematics,U.S., 431 p, New York, United States.

Delves, L.M. and Freeman, T.L., 1981. Analysis of Global Expansion Methods. Academic Press, 275 p, New York.

Drabek, P. and Milota, J., 2007. Methods of Nonlinear Analysis: Applications to Differential Equations. Birkhauser Basel, 568 p, Switzerland.

Evans, L.C., 1998. Partial Differential Equations (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19). Amer Mathematical Society, 662p, Providence, RI, USA.

Gander, M.J., and Wanner, G., 2012. From Euler, Ritz, and Galerkin to Modern Computing. SIAM Review, 54 (4), 627-666.

Goldberg, R.R., 1976. Methods of Real Analysis. John Wiley & Sons, 416 p, New York, USA.

Grossmann, C. Ross, H.O. and Stynes, M., 2007. Numerical Treatment of Partial Differential Equations. Springer Science & Business Media, 596 p, Berlin.

Knabner, P. and Angermann, L., 2003. Numerical Methods for Elliptic and Parabolic PartialDifferential Equations. Springer-Verlag New York, 426 p, New York.

Kreyszig, E., 1989. Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley, 704 p, USA.

Ladyzhenskaya, O.A., 1985. The boundary value problems of mathematical physics: Applied Mathematical Sciences 49. Springer-Verlag New York, 322 p, New York.

Larsson, S. and Thomee, V., 2003. Partial Differential Equations with Numerical Methods. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 262 p, Berlin Heidelberg.

Liessa, A., 2005. The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods. Journal of Sound and Vibration, 287 (4-5), 961-978.

Mikhlin, S.G., 1971. The Numerical Performance of Variational Methods. Wolters-Noordhoff, 373 p, Groningen, Holland.

Omodei, B.J. and Anderssen, R.S., 1975. Stability of the Rayleigh-Ritz Procedure for Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems. Numerische Mathematik, 24 (1), 27-38.

Rashedi, K. and Yousefi, S.A., 2011. Ritz-Galerkin Method for Solving a Class of Inverse Problems in the Parabolic Equations. ISSN 1749-3889 (print), 1749-3897 (online) International Journal of Nonlinear Science, 12 (4), 498-502.

Reddy J.N., 1993. An Introduction to the Finite Element Method. Department of Mechanical Engineering Texas A & M University College Station, Texas 77843-3123.

Reddy, P.S. and Babu, K.R., 2016. Applıcatıon of varıatıonal methods and galerkın method ın solvıng engıneerıng problems represented by ordınary dıfferential equatıons. İnternational Journal of Mechanical And Production Engineering, 4 (4), ISSN: 2320-2092.

Samarskii, A.A., 2001. The Theory of Difference Schemes, Monographs and Textbooks in Pure and Appled Mathematics. Marcel Dekker New York, Inc, 761 p, New York, USA.

Sobolev, S.L., 1991. Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, vol. 90 of Translations of Mathematical Monographs, Amer Mathematical Society, Providence, RI, USA.

Storch, J. and Strang, G., 1988. Paradox lost: natural boundary conditions in the Ritz-Galerkin method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26 (10), 2255–2266.

Vainberg, M.M., 1973. Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations. John Wiley & Sons, 356 p, New York, NY, USA.

Zeidler, E., 1985. Nonlinear Functional Analysis and its Applications: III Variational Methods and Optimization. Springer-Verlag New York, 662 p, New York, NY, USA.

Zeidler, E., 1990. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: II/B Nonlinear Monotone Operators. Springer-Verlag, 741 p, New York, NY, USA.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Adem IRMAK
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
Adres:	
Tel:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	Bayburt Lisesi
Lisans:	Atatürk Üniversitesi, Fen Fakültesi
Yüksek lisans:	Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalı
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	Orta