YARI-TANJANT DEMETTE (0,2) TİPLİ TENSÖR ALANLARININ LİFTLERİ

Merve Gül ŞİMŞEK

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Doç. Dr. Furkan YILDIRIM
2020

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YARI-TANJANT DEMETTE (0,2) TİPLİ TENSÖR ALANLARININ LİFTLERİ

(Lifts of (0,2) Tensor Fields in the Semi-Tangent Bundle)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve Gül ŞİMŞEK

Danışman: Doç. Dr. Furkan YILDIRIM

Erzurum

Ekim, 2020

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Merve Gül ŞİMŞEK tarafından hazırlanan "Yarı-Tanjant Demette (0,2) Tipli Tensör Alanlarının Liftleri" başlıklı çalışması 27 / 10 / 2020 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Geometri Bilim Dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Prof. Dr. Kürşat AKBULUT Atatürk Üniversitesi	………................
Danışman:	Doç. Dr. Furkan YILDIRIM Atatürk Üniversitesi	………................
Jüri Üyesi:	Dr. Öğr. Üyesi Sibel TURANLI Erzurum Teknik Üniversitesi	………................

Enstitü Yönetim Kurulunun …./…/…. tarih ve …… sayılı kararı.

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Mehmet KARAKAN
Enstitü Müdürü

Bu çalışma Tübitak 3001 projeleri kapsamında desteklenmiştir.
Proje No:118F176

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak Doç. Dr. Furkan YILDIRIM danışmanlığında sunulan “Yarı-Tanjant Demette (0,2) Tipli Tensör Alanlarının Liftleri” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	**Tezin Benzerlik Oranı (%)**	**Maksimum Oran (%)**
Giriş	*0*	**30**
Kuramsal Temeller	*22*	**30**
Materyal ve Yöntem	13	**35**
Bulgular	*15*	**20**
Tartışma	*0*	**20**
Tezin Geneli	*22*	**25**

Not: *Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının* ***%5’den*** *büyük olmaması gerekir.*

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	**Tez Danışmanı**
Merve Gül ŞİMŞEK	Doç. Dr. Furkan YILDIRIM
27.10.2020	**27.10.2020**
İmza:	İmza:

* Tez ile ilgili YÖKTEZ’de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun …./…/…. tarih ve …………. sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun …./…/…. tarih ve …………. sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Çalışmalarımda her türlü desteği sağlayan, hocam Sayın Doç. Dr. Furkan YILDIRIM'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgilerini gösterip, bana yol gösteren ve bilgilerine her zaman ihtiyaç duyacağım değerli hocalarıma ve çalışmalarım esnasında vermiş oldukları destek ve teşvikten dolayı aileme ayrıca burs imkanı sağlayan TÜBİTAK-BİDEP'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması TÜBİTAK'ın MFAG'a bağlı 118F176 numaralı projesi tarafından desteklenmiştir.

Merve Gül ŞİMŞEK

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YARI-TANJANT DEMETTE (0,2) TİPLİ TENSÖR ALANLARININ LİFTLERİ

Merve Gül ŞİMŞEK

Danışman: Doç. Dr. Furkan YILDIRIM

Amaç: Bu yüksek lisans tezinde, tM Yarı-tanjant demete (0,2) tipli tensor alanlarının dikey, tam ve yatay liftleri ile bunlara ait çeşitli geometrik özellikler incelenecektir.

Yöntem: Tez ile ilgili olarak, kuramsal temel, genel metotlar ve araştırma teknikleri olarak aşağıdakiler kullanılacaktır:

1. Tanjant ve yarı-tanjant demet geometrisi (Kuramsal temel-Tanjant ve yarı-tanjant demetler ve bu demetlerdeki liftler ile çeşitli operatörler)

2. Klasik tensör analizi (indislerin yani lokal koordinatların kullanımı)

3. Kovaryant diferensiyelleme formalizmi (global inceleme tekniği).

Bulgular: Bu tezde, TM tanjant demet izdüşümüyle tanımlanan tM yarı-tanjant demete; (0,2) tipli tensör alanlarının dikey, tam ve yatay liftleri verilmiştir. Ayrıca, yarı-tanjant demette çeşitli metrikler sunulmuştur.

Sonuç: Tanjant demette yer alan metrikler non-dejenere (regüler) metriklerdir. Yarı-tanjant demetteki metriklerin ise dejenere (singüler) metrik olması ön görülmektedir. Fizik alanında ve diferensiyel geometride dejenere metrikler önemli bir öneme sahip olup bu metriklerle çok sayıda çalışmalar yapılmaktadır. Dolayısıyla elde edilecek yeni dejenere metrikler ile gelecekte çok sayıda çalışmalar yapılacaktır.

Anahtar Kelimeler: Dejenere metrik, pull-back demet, tam lift, yarı-tanjant demet, yatay lift.

Ekim 2020, 60 sayfa

ABSTRACT

MASTER THESIS

LIFTS OF (0,2) TENSOR FIELDS IN THE SEMI-TANGENT BUNDLE

Merve Gül ŞİMŞEK

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Furkan YILDIRIM

Purpose: In this master thesis the vertical, complete and horizontal lifts of tensor fields of type (0, 2) to semi-tangent bundle and their properties will be found.

Method: In relation to the master thesis, the following will be used as theoretical basis, general methods and research techniques:

1. Tangent and semi-tangent bundle geometry (Theoretical basis-Tangent and semi-tangent bundles and lifts in these bundles and various operators)

2. Classical tensor analysis (the use of indices, ie. local coordinates)

3. Covariant differentiation formalism (global review technique).

Findings: In this thesis; the vertical, complete and horizontal lifts of tensor fields of type (0,2) to semi-tangent bundle and their properties are studied. Some metrics of the semi-tangent bundle were also presented.

Results: The metrics in the tangent bundle are non-degenerate (regular) metrics. It is predicted that the metrics in the semi-tangent bundle are the degenerate (singular) metric. Degenerate metrics in physics and differential geometry have an important place, and many studies have been carried out with these metrics. Therefore, with the new degenerate metrics to be obtained, many studies will be made in the future.

Keywords: Complete lift, Degenerate metric, Horizontal lift, Pull-back bundle, Semi-tangent bundle.

October 2020, 60 pages

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

T^{i}_{km}	Afin Deformasyon (Gerilme) Tensörü
S^{h}_{ij}	Burulma Tensörü
∇	Burulmasız Afin Konneksiyon
$t(B_m)$	B_m Üzerindeki Yarı-tanjant Demet
Γ^{h}_{ij}	Cristoffel Sembolü
ω	Dejenere Simplektik Yapı
^{vv}	Dikey Lift
R^{h}_{ijk}	Eğrilik Tensörü
γ	Gama Operatörü
F	İzdüşümlü Afinor Alanları
X	İzdüşümlü Vektör Alanları
$T(M_n)$	M_n Üzerindeki Tanjant Demet
g	Pseudo-Riemannian Metriği
$\overset{C}{\otimes}$	Pür Çarpım
p	$t^{*}(B_m)$ ’nin Temel 1-formu
π	Tabii İzdüşüm
^{cc}	Tam Lift
W_n	Weyl Uzayı
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
^{HH}	Yatay Lift

GİRİŞ

Birçok bilim dalında uygulama bulması nedeniyle, diferensiyel geometri modern matematiğin en aktif çalışma alanlarından birisi olup diferensiyel ve integral hesaplama metodlarını kullanarak çeşitli geometrik problemleri çözmeyi hedef alan matematiğin alt disiplinidir. XVII. yüzyılda temelleri atılan diferensiyel geometrinin başlıca konusu, Gauss'un eğri ve yüzeylerin çeşitli özelliklerini çalışmasına dayanır. Bu çalışmalar manifold kavramına ön ayak olmuştur. En genel tanımı ile, manifoldlar yerel olarak Euclid uzayına benzeyen noktasal kümelerdir.

Diferensiyel Geometri'de önemli bir yere sahip olan tensör kavramı güncel anlamda ilk olarak aslında bir fizikçi olan Woldemar Voigt tarafından 1898'de kullanıldı. Tensör hesaplamaları 1890'lı yıllarda kısaca Ricci olarak alınan Gregorio Ricci-Curbastro tarafından mutlak diferensiyel hesaplamalar başlığı altında incelendi ve bu çalışmalar 1892 yılında kendisi tarafından sunuldu. Daha sonra Ricci and Tullio Levi-Civita (1900) mutlak diferensiyel hesaplama metodları ve uygulamaları adı altında çalışmalarını yayımladılar.

Uzayda her bir noktaya sırasıyla bir skaleri veya vektörü tayin eden skaler alanın veya vektör alanın genelleşmiş hali olan tensör alanı, manifold üzerinde tanımlı olup manifoldun her bir noktasına bir tensör karşılık getiren bir dönüşümdür. Matematiksel yapılarda ise tensör alanı ifadesi yerine kısaca tensör kullanılır.

Diferensiyel Geometri'de önemli bir konu olan Riemannian manifoldda tanjant demetlerin Diferensiyel Geometri'sinin incelenmesi ilk olarak Sasaki (1958) tarafından yapılmıştır ve sonra Dombrowski (1962), tanjant demetteki geometrilerin gelişmesine katkıda bulunmuştur. Ledger and Yano (1965), simetrik uzaylarda tanjant demeti tanımlamışlar ve bununla ilgili çalışmalarda bulunmuşturlar.

1966 yılında tanjant demette liftler çalışılmaya başlanmıştır. İlk çalışma Yano and Kobayashi (1966)'ya ait tanjant demette tensör alanlarının ve konneksiyonların tam ve dikey liftleri olmuştur. Ama "lift" kavramı "genişleme" anlamında Yano and Kobayashi'den daha önce yapılan Sasaki (1958)'nin çalışmalarında "devam" adı altında görülmektedir. Kandatu (1966), lineer olmayan konneksiyona sahip bir manifoldda tanjant demeti tanımlamıştır.

Yano and Ishihara (1967) tanjant demette konneksiyonların ve tensör alanlarının yatay liftleriyle ilgili çalışmalarda bulunmuşlardır. Morimoto (1970) tanjant demette tensör alanlarının ve konneksiyonların liftleri hakkında çalışmalar yapmıştır.

Yano and Petterson (1967) çalışmasında lift konusu, kotanjant demet için de incelenmiştir. Yano and Ishihara (1973) çalışmasında ise, hem tanjant hem de kotanjant demetlerdeki dikey, tam, yatay ve diagonal liftlerle ilgili elde edilmiş önemli sonuçlara yer verilmiştir.

Yarı-tanjant demet ise Duc (1979) tarafından tanımlanmış olup yarı-tanjant demete ait bazı özellikleri Vishnevskii (2002) tarafından incelenmiştir. Yarı-tanjant demette Lie ve kovaryant türevlerinin tam liftleri ise Salimov and Kadıoğlu (2000) tarafından çalışılmıştır.

Sunulan bu tezde ise öncelikle, TM tanjant demet izdüşümüyle tanımlanan tM yarı-tanjant demete; (0,2) tipli tensör alanlarının dikey, tam ve yatay liftleri verilmiştir. Ayrıca, yarı-tanjant demette çeşitli metrikler sunulmuştur.

Tezdeki sonuçların büyük bir kısmı Yıldırım and Simsek (2020) çalışmasında yer almaktadır.

KURAMSAL TEMELLER

Manifold Kavramı

Tanım 2.1.1: X Hausdorff uzay ve herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinden $V \subset \Re^n$ kümesine tanımlanan

$$\varphi : U \to V$$

homeomorfizmine X 'de n boyutlu koordinat sistemi veya harita, U 'ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir ve (U, φ) şeklinde gösterilir. Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \in \mathbb{R}^n$$

olur. Burada $x^1, ..., x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

Tanım 2.1.2: Eğer X Hausdorff uzayının n-boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \text{ , (A-indisler kümesi)}$$

ise X 'e n-boyutlu topolojik manifold veya sadece n-boyutlu manifold denir.

Tanım 2.1.3: X Hausdorff uzay ve k ise $0 \le k$ şartını sağlayan tam sayı olmak üüzere aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal koordinatlar ailesine X üzerinde C^k sınıfından n-boyutlu atlas adı verilir:

1. Lokal haritaların U_α bölgesi X 'i örter, yani X, n-boyutlu topolojik manifolddur.

2. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir. $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü $\left(u^i_\beta = u^i_\beta\left(u^j_\alpha\right), i, j = 1, ..., n\right)$ denir. Burada u^i_β, (U_β, φ_β) haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları, u^j_α ise $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarıdır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ ise bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tanımlanamaz. Ancak, bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2. şart, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından difeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobi matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

Tanım 2.1.4: $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritaları C^k uzlaşmış ise yani, $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.

Tanım 2.1.5: *X* Hausdorff uzayı üzerinde C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k-yapı denir. C^k-yapısının tüm C^k atlaslarının birleşiminin oluşturduğu C^k atlasına maksimal C^k atlas adı verilir.

X üzerindeki C^k atlaslarının her bir denklik sınıfı, kendisinin bir elemanı ile ifade edilir. Yani, C^k-yapısı, onun keyfi C^k atlası ile oluşturulabilir. Buradan da X üzerindeki her bir C^k-yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucu çıkar.

C^0-yapıya topolojik yapı, C^k $(1 \le k \le \infty)$ yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bundan sonra sadece C^∞-yapılara bakılacaktır.

Tanım 2.1.6: *M*, sayılabilir baza sahip Hausdorff uzay olsun. Eğer, *M* üzerinde *n*-boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmişse *M* uzayına *n*-boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir.

Tensör Alanları

Tanım 2.2.1: B_n, $n-$boyutlu reel vektör uzayı ve B_n^* bu reel vektör uzayının dual uzayı olmak üzere $\vec{x}_j \in B_n$, $j = 1,...,q$ ve $\overset{i}{\xi} \in B_n^*$, $i = 1,..., p$ kovektör değişkenlerinin

$$\omega = t\ (\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi})$$

reel değerli fonksiyonunu göz önüne aldığımızda bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa, fonksiyona multilineer fonksiyon denir.

Mesela birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartı $\lambda, \mu \in \Re$ olmak üzere

$$\omega = t(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi}) = \lambda t\ (\vec{x}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi}) + \mu t(\vec{y}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi})$$

biçiminde gösterilebilir. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t : \underbrace{B_n \times B_n \times \ldots \times B_n}_{q} \times \overbrace{B_n^* \times \ldots \times B_n^*}^{p} \to \mathbb{R}$$

operatörüne B_n uzayında *p* dereceden kontravaryant, *q* dereceden kovaryant tensör adı verilir. Bu şekildeki tüm tensörlerin uzayı ise $\Im_q^p(B_n)$ ile gösterilir. $p \geq 0,\ q \geq 0$ olmak üzere $s = p+q$ sayısına tensörün valentliği, (p,q) sembolüne ise tensörün tipi denir. (p,0) tipli tensöre kontravaryant tensörler, (0,q) tipli tensörlere ise kovaryant tensörler denir.

$S_2(B_n)$, $\Im_2^0(B_n)$ uzayının bütün simetrik tensörlerinin alt uzayı olmak üzere herhangi bir $g \in S_2(B_n)$ tensörünü alalım.

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = 0,\ \forall \vec{y} \in B_n \tag{2.1}$$

şartında $\vec{x} = 0$ olması halinde *g* tensörüne regüler tensör denir.

(2.1)'deki eşitliğin koordinatlarla gösterimi

$$g_{ij} x^i y^j = 0$$

biçiminde yazılır. Bu eşitlik her y^j için sağlandığından

$$g_{ij} x^i = 0\,,\ j = 1, \ldots, n$$

bulunur. Bu denklem sisteminde

$$Det(g_{ij}) \neq 0$$

olduğunda $x^i = 0$ çözümü elde edilir. Burada (g_{ij}), g tensörüne karşılık gelen matrisi gösterir.

$g \in S_2(B_n)$ tensörü regüler tensör ise *g* tensörüne B_n uzayında esas tensör adı verilir. Esas tensöre karşılık gelen (g_{ij}) matrisinin tersini $(\tilde{g}^{ij})$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\tilde{g}^{kj} g_{ji} = \delta_i^k \tag{2.2}$$

olduğu görülür. B_n ve B_n^* uzayları arasında

$$\xi_i = g_{ik} x^k\,,\ (\eta_i = g_{ik} y^k) \tag{2.3}$$

dönüşümü, (2.2) eşitliğine göre

$$x^k = \tilde{g}^{ki}\xi_i, \ (y^k = \tilde{g}^{ki}\eta_i) \qquad (2.4)$$

olur. $g \in S_2(B_n)$ tensörüne karşılık gelen invaryant bilineer formu

$$\omega = g(\vec{x},\vec{y}) = g_{ij}x^i y^j$$

şeklinde yazalım. Burada (2.3) ve (2.4) eşitliklerini göz önüne alırsak

$$\omega = g(\vec{x},\vec{y}) = g_{ij}x^i y^j = x^i\eta_i = \tilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j$$

olur. Yani, g esas tensörü verildiğinde biz kovektör değişkenlerinin $\omega = \tilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j$ invaryant bilineer formunu buluruz. Buna göre de $\tilde{g}^{ij}$, (2,0) tipli tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre g tensörünün ters tensörü denir. Ayrıca

$$\tilde{g}(\eta,\xi) = \tilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j = \eta_i x^i = g_{ik}y^k x^i,$$
$$\tilde{g}(\xi,\eta) = \tilde{g}^{ji}\xi_j\eta_i = \xi_j y^j = g_{jk}x^k y^j$$
$$= g_{ki}x^i y^k = g_{ki}y^k x^i = \tilde{g}(\eta,\xi)$$

olduğundan $\tilde{g}^{ij}$ tensörü simetriktir.

Böylece B_n uzayında g tensörü verildiğinde B_n 'den B_n^* 'a bir izomorfizm bulunur. Buna göre vektör ve kovektörler aynılaştırılır ve aynı $\vec{x}$ sembolü ile gösterilir. Yani

$$x_k = g_{ki}x^i, \quad x^i = \tilde{g}^{ik}x_k$$

yazılır. Bu işlemlere indisin indirilmesi $(x^i \to x_k)$ ve yükseltilmesi $(x_k \to x^i)$ işlemleri denir. Buna göre, $S(\vec{x},\vec{y})$ tensörü göz önüne alınırsa

$$S^{p}_{.j} = \tilde{g}^{pi}S_{ij}, \quad S_{i.}^{\ p} = \tilde{g}^{pj}S_{ij}, \quad S^{pq}_{..} = \tilde{g}^{pi}\tilde{g}^{pj}S_{ij}$$

ifadelerinin her biri S_{ij} tensöründen indislerin yükseltilmesi işlemi

$$S_{p}^{.\,j} = g_{pi}S^{ij}, \quad S^{i.}_{\ p} = g_{pj}S^{ij}, \quad S^{..}_{pq} = g_{pi}g_{qj}S^{ij}$$

ifadelerinin her biri ise verilmiş S^{ij} tensöründen indislerin indirilmesi işlemidir.

Eğer $g(\vec{x},\vec{y})$, B_n uzayında (0,2) tipli tensör ise, her $\vec{x},\vec{y} \in B_n$ vektörlerinin skaler çarpımı denildiğinde g tensörünün $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri üzerindeki izi anlaşılır ve $\vec{x}\vec{y}$ veya $(\vec{x},\vec{y})$ biçiminde gösterilir. Yani

$$\vec{x}\vec{y} = g(\vec{x},\vec{y}) = g_{ij}x^i y^j = x_j y^j \qquad (2.5)$$

biçiminde tanımlanır.

$Det(g_{ij}) \neq 0$ olması halinde (2.5) skaler çarpımına regüler çarpım denir.

Tanım 2.2.2: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve T_p, her $p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. M_n manifoldunun her $p \in M_n$ noktasına T_p uzayından bir X_p vektörü karşılık getiren X vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir (Salimov ve Mağden 2008). f, M_n manifoldunda bir dönüşüm ise Xf 'de M_n manifoldunda

$$(Xf)(p) = X_p f$$

ile tanımlanan bir dönüşümdür. $U \subset M_n$ koordinat komşuluğunu alalım. Bu komşuluktaki bir vektör alanı

$$X = \xi^i \partial_i$$

olarak yazılır. ξ^i 'ler U 'daki lokal koordinatlara bağlıdır. Yani

$$\xi^i = \xi^i\left(x^i,...,x^n\right), \quad i = 1,...,n$$

olur.

M_n, C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere her $m \in M_n$ noktasındaki her bir (p,q) tipli tensör için uygun bir $\Im_q^p(m)$ tensör uzayı vardır.

Tanım 2.2.3: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $\Im_q^p(m)$, her $m \in M_n$ noktasındaki (p,q) tipli tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun her $m \in M_n$ noktasına $\Im_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren T fonksiyonuna (p,q) tipli tensör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Eğer $p = 1,\ q = 0$ ise vektör alanı elde edilir. Yani, $(1,0)$ tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p = q = 0$ ise her $m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Bu yüzden $(0,0)$ tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer $U \subset M_n$ bölgesinde f fonksiyonu C^∞ sınıfından ise her $x \in U$ için $df\big|_x \in \Im_1^0(x)$ olur. Böylece f fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü $(0,1)$ tipli bir tensör alanıdır.

Herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü simetrik tensör ise T tensör alanına simetrik tensör alanı denir. Eğer herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü antisimetrik tensör ise T tensör alanına antisimetrik tensör alanı denir.

T, (p,q) tipli tensör alanı olsun. $\theta_1,...,\theta_p$ $(0,1)$ tipli tensör alanları ve $X_1,...,X_q$ vektör alanları olmak üzere

$$T(\theta_1,...,\theta_p,X_1,...,X_q)(m)=T_m(\theta_1(m),...,\theta_p(m),X_1(m),...,X_q(m))$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özelikle x^i koordinatlarına göre T tensör alanının bileşenleri

$$T^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}=T\left(dx^{i_1},...,dx^{i_q},\partial_{j_1},...,\partial_{j_p}\right)$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop and Goldberg 1968).

T tensör alanının bileşenleri C^∞ sınıfından fonksiyonlar ise T tensör alanına C^∞ sınıfındandır denir. C^∞ sınıfından olan $(0,1)$ tipli tensör alanına 1-form (Pfaffian form) denir.

(p,q) tipli T tensör alanının C^∞ sınıfından olması için gerek ve yeter şart her bir $\theta_1,...,\theta_p$ 1-formları ve her bir C^∞ sınıfından $X_1,...,X_q$ vektör alanları için $T(\theta_1,...,\theta_p,X_1,...,X_q)$ fonksiyonunun C^∞ sınıfından olmasıdır.

Tanım 2.2.4: $\omega=(\omega_{ij})$, (0,2) tipli bir tensör olsun. $\omega=(\omega_{ij})$ tensöründe i ve j indislerine göre antisimetriklik varsa $\omega=(\omega_{ij})$ tensörüne 2-form veya dış form denir. Bir k-forma dış diferensiyel uygulanırsa sonuçta k+1-form elde edilir. Yani ω, k-form ise $d\omega\in\Im_{k+1}(M_n)$ olup k+1-form oluşur. Böyle k+1 formlara tam form denir.

$$d^2\omega=d(d\omega)=0$$

olması tam formların en önemli özelliğidir. Yani tam formlara dış diferensiyel uygulanırsa sonuç sıfır olur.

Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin (Levi-Civita) Konneksiyon

M_n diferensiyellenebilir manifoldunun $\gamma: u^i=u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon tanımlanması eğrinin noktalarına uygulanan vektörler arasında bağlantı oluşturma kuralıdır. Eğer γ eğrisinin herhangi bir noktasındaki v^i vektörü t parametresine bağlı olarak değiştikçe verilen konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun kalırsa, bu durumda bu vektör verilen konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılmış olur. Eğer konneksiyon diferensiyellenebilirse, o zaman paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilir fonksiyonlar olur. Eğer vektörlerin paralel kaydırılması halinde lineer bağımlılık korunursa verilen konneksiyona afin veya lineer konneksiyon adı verilir.

Afin konneksiyonun γ eğrisinin çeşitli noktalarına uygulanan vektörler arasında uygunluğu ifade eden şartı, yani vektörün eğri boyunca verilmiş afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını bulalım. γ eğrisinin başlangıç noktasındaki $\underset{k}{a}^i,\ k=1,...n$ lokal bazını alalım ve farz edelim ki $\underset{k}{a}^i(t)$ 'nin lineer bağımlılığı, baz vektörlerin verilen eğri boyunca paralel kaydırılma kuralını ifade etmiş olsun. Keyfi $v^i = \lambda^k \underset{k}{a}^i$ vektörünün verilen afin konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması için gerek ve yeter şart λ^k katsayılarının sabit olmasıdır. Bu nedenden istifade edilerek

$$dv^i = \lambda^k d\,\underset{k}{a}^i \tag{2.6}$$

ifadesi yazılabilir. $v^i = \lambda^k \underset{k}{a}^i$ eşitliğinden

$$\lambda^k = \overset{k}{a}_i\, v^i \tag{2.7}$$

eşitliği yazılır. Burada $\underset{k}{a}^i$ baz vektörü olduğundan buna karşılık gelen kobaz vektörü $\overset{k}{a}_i$ ile gösterilir. Dolayısıyla $\underset{k}{a}^i\, \overset{s}{a}_i = \delta_k^s$ olur. (2.7) ifadesi (2.6) eşitliğinde kullanılırsa

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0 \tag{2.8}$$

eşitliği elde edilir. (2.8) denkleminde ω_i^k,

$$\omega_i^k = -\overset{s}{a}_i\, d\,\underset{s}{a}^k \tag{2.9}$$

biçimindedir. (2.8) şartı v^i vektörünün verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartıdır. (2.9) biçiminde tanımlanan ω_i^k objelerine konneksiyon formları (bağlantı objeleri) denir.

Teorem 2.3.1: **1.** Konneksiyon formları $\left\{\underset{k}{a}^i\right\},\ k=1,...,n$ bazının seçilişinden bağımsızdırlar.

2. Konneksiyon formları, eğrisel koordinatların dönüştürülmesi durumunda tensör dönüşüm kuralına göre dönüşmezler.

İspat: 1. ω_i^k ve $\overline{\omega}_i^k$ farklı iki baza karşılık gelen konneksiyon formları olmak üzere paralel kaydırılan v^i vektörü için

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0, \tag{2.10}$$

$$dv^i + \overline{\omega}_k^i v^k = 0 \tag{2.11}$$

şartları elde edilir. (2.10) ve (2.11) şartlarından ve v^i vektörünün başlangıç değerinin keyfiliği şartından $\omega_k^i = \overline{\omega}_k^i$ olduğuna ulaşılır.

2. M_n manifoldunda u^i eğrisel koordinatların değişmesi halinde baz vektörlerinin ve kovektörlerinin dönüşüm kuralı

$$\overset{k}{a}_i = A_i^{i'} \overset{k}{a}_{i'}, \quad \underset{k}{a}^i = A_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} \tag{2.12}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $A_{i'}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$, $A_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$ biçimindedir. (2.12)'deki ikinci eşitliğin diferensiyelini alındığında

$$d\underset{k}{a}^i = dA_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^i d\underset{k}{a}^{i'} \tag{2.13}$$

eşitliği elde edilir. (2.9) denkleminde (2.12)'nin birinci eşitliği ve (2.13) eşitliği göz önüne alındığında

$$\omega_j^i = -\overset{k}{a}_j \, d\underset{k}{a}^i = -A_j^{j'} \overset{k}{a}_{j'} \left(dA_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^i d\underset{k}{a}^{i'} \right)$$

ve gerekli işlemler sonucunda

$$\omega_j^i = A_j^{j'} A_{i'}^i \omega_{j'}^{i'} - A_j^{j'} dA_{j'}^i \tag{2.14}$$

elde edilir. (2.14) eşitliği, ω_j^i konneksiyon formlarının, tensörün koordinatları olamadığını gösterir.

Şimdi ise kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını inceleyelim.

Tanım 2.3.1: ω_i kovektörünün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılan keyfi v^i vektörü üzerindeki izi bu eğri boyunca sabit kaldığı için, ω_i kovektörüne γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyonuna göre paralel kaydırılmıştır denir.

Bu tanıma göre

$$d\left(v^i \omega_i\right) = dv^i \omega_i + v^i d\omega_i = 0 \tag{2.15}$$

eşitliği yazılabilir. v^i vektörünün paralel kaydırılması şartından

$$dv^i = -\omega_k^i v^k \tag{2.16}$$

elde edilir. (2.16) eşitliği (2.15) ifadesinde kullanılırsa

$$\left(d\omega_i - \omega_i^k \omega_k\right) v^i = 0$$

eşitliği bulunur. v^i vektörünün keyfiliğinden dolayı ω_i kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılma şartı

$$d\omega_i - \omega_i^k \omega_k = 0 \tag{2.17}$$

biçiminde olur. Vektörün ve kovektörün (1-form) γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartını kullanarak, eğrinin çeşitli noktalarına uygulanmış keyfi tipli tensörün de paralel kaydırılmasını verebiliriz. γ eğrisi boyunca (p,q) tipli keyfi tensörün izi

$$Z = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p}$$

şeklinde verilmiş olsun. Z fonksiyonunun vektör ve kovektör değişkenlerinin γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartları dahilinde diferensiyeli

$$\begin{aligned} dZ &= dt_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p} + t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} d\underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p} \\ &\quad + \dots + t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots d\overset{p}{\omega}_{i_p} \\ &= \left(dt_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \omega_{j_1}^s t_{s j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \dots - \omega_{j_q}^s t_{j_1 \dots s}^{i_1 \dots i_p} + \omega_s^{i_1} t_{s j_2 \dots j_q}^{s i_2 \dots i_p} + \omega_s^{i_p} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots s} \right) \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p} \end{aligned} \tag{2.18}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\delta t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = dt_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \omega_{j_1}^s t_{s j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \dots - \omega_{j_q}^s t_{j_1 \dots s}^{i_1 \dots i_p} + \omega_s^{i_1} t_{j_1 \dots j_q}^{s i_2 \dots i_p} + \omega_s^{i_p} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots s} \tag{2.19}$$

olarak alındığında

$$dZ = \delta t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p} \tag{2.20}$$

olarak bulunur. γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılan vektör ve kovektör değişkenlerinin multilineer fonksiyonunun diferensiyeli de değişkenlerin multilineer fonksiyonu olur. O halde dZ multilineer fonksiyonuna karşılık gelen bu tensörün tipi $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörünün tipi ile aynıdır. Koordinatları da (2.19) eşitliği ile verilmiştir. $\delta t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörüne $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörünün mutlak diferensiyeli denir.

Tensörün mutlak diferensiyelinin tanımından çıkartılan sonuçlar şöyle ifade edilebilir:

a. Vektörün ve kovektörün paralel kaydırılması şartları

$$\delta v^i = 0 \,, \; \delta \omega_i = 0$$

şeklinde olur. Dolayısıyla keyfi tipli bir tensörün paralel kaydırılması şartı

$$\delta t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = 0$$

olarak verilir.

b. Birim tensörün mutlak diferensiyeli sıfıra eşittir, yani

$$\delta\left(\delta_i^j\right) = 0$$

olur.

(2.19) eşitliğinden dolayı tensörlerin mutlak diferensiyelleri için aşağıdaki özellikleri yazabiliriz:

1. $\delta(t_1 \mp t_2) = \delta t_1 \mp \delta t_2$, t_1 ve t_2 aynı tipli tensörlerdir,
2. $\delta(\lambda t) = (d\lambda)t + \lambda(\delta t)$, λ -skalerdir,
3. $\delta(A \otimes B) = (\delta A) \otimes B + A \otimes (\delta B)$, A ve B keyfi tipli tensörlerdir, $\otimes$- tensör çarpımını gösterir.
4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterneleştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile işlem öncelik sırası değişebilir.

Afin konneksiyonlu uzaylar

Tanım 2.3.1.1: X_n diferensiyellenebilir manifoldunun her bir eğrisi boyunca afin konneksiyonu verilmiş olsun. Lineerlik şartını sağlayan X_n diferensiyellenebilir manifolduna *n*- boyutlu afin konneksiyonlu uzay denir.

Bu tanımdaki lineerlik şartı şu şekilde ifade edilir:

X_n manifoldunun keyfi M noktası ve bu noktanın komşuluğunda keyfi vektör alanları verilmesi halinde keyfi v^i vektör alanının M noktasından geçen keyfi bir eğri için hesaplanmış mutlak diferensiyeli, bu eğri boyunca elementer yer değişme du^i vektörünün lineer fonksiyonudur, yani

$$\delta v^i = v_k^i du^k \tag{2.21}$$

olarak yazılır. Burada v_k^i, v^i 'ye ve noktaya bağlı fonksiyon, du^k ise her bir vektöre teğet vektörün koordinatlarıdır. Diğer taraftan $dv^i = \partial_k v^i du^k$ olduğundan

$$\delta v^i = dv^i + \omega_k^i v^k = \partial_k v^i du^k + \omega_k^i v^k \tag{2.22}$$

olur. (2.21) ve (2.22) eşitliklerinden

$$\omega_k^i v^k = \left(v_s^i - \partial_s v^i\right) du^s \tag{2.23}$$

ifadesi bulunur. v^k, $\partial_s v^i$ 'nin ve v_s^i 'ler ise u^i 'lerin fonksiyonlarıdır. ω_k^i formları v^i vektör alanlarının seçilişine bağlı olmadığından ω_k^i formları du^k 'nın lineer fonksiyonu olur, yani

$$\omega_k^i = \Gamma_{sk}^i du^s \tag{2.24}$$

olarak yazılır. Burada Γ_{sk}^i katsayıları afin uzayın bir noktasının fonksiyonlarıdır. Bunlara afin konneksiyonun katsayıları denir. Katsayıların verilmesi X_n 'de afin konneksiyonunu tayin eder.

Şimdi Γ_{sk}^i afin konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralını verelim. (2.24) eşitliği kullanılarak

$$\omega_{j'}^{i'} = \Gamma_{k'j'}^{i'} du^{k'} = \Gamma_{k'j'}^{i'} A_k^{k'} du^k$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i\right) du^k \tag{2.25}$$

olduğu için ve diğer taraftan $A_j^{j'} A_{j'}^i = \delta_j^i$ eşitliğin her iki tarafının ∂_k kısmi diferensiyeli alındığında

$$\partial_k\left(A_j^{j'}A_{j'}^i\right)=\partial_k\left(\delta_j^i\right)=0$$
$$\left(\partial_k A_j^{j'}\right)A_{j'}^i+A_j^{j'}\left(\partial_k A_{j'}^i\right)=0$$
$$A_j^{j'}\left(\partial_k A_{j'}^i\right)=-\left(\partial_k A_j^{j'}\right)A_{j'}^i$$

olduğu görülür. Bu son eşitlik (2.25) denkleminde kullanılırsa

$$A_j^{j'}dA_{j'}^i=-A_{j'}^i\left(\partial_k A_j^{j'}\right)du^k \tag{2.26}$$

elde edilir. (2.26), (2.24) ve (2.14) eşitlikleri kullanılarak konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralı

$$\Gamma_{kj}^i=A_{i'}^iA_j^{j'}A_k^{k'}\Gamma_{k'j'}^{i'}+A_{i'}^iA_{kj}^{i'} \tag{2.27}$$

olarak verilir. Burada $A_{kj}^{i'}=\partial_k A_j^{i'}$ biçimindedir.

(2.24) denklemini kullanarak afin konneksiyonlu uzayda verilen keyfi vektör alanı için mutlak diferensiyel

$$\delta v^i=(\ \partial_k v^i+\Gamma_{ks}^i v^s\ )\,du^k \tag{2.28}$$

biçiminde bulunur. (2.28) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatları olur. Bu tensöre, verilen v^i tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k v^i=\partial_k v^i+\Gamma_{ks}^i v^s \tag{2.29}$$

olarak gösterilir. Bu türevin sonucu (1,1) tipli bir tensördür.

Benzer şekilde ω_j kovektör alanının kovaryant türevi

$$\nabla_k\omega_j=\partial_k\omega_j-\Gamma_{kj}^s\omega_s \tag{2.30}$$

olur ve sonuç (0,2) tipli bir tensör olduğunu gösterir.

(2.24) eşitliğinden, (p,q) tipli $t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}$ tensörünün mutlak diferensiyeli

$$\delta t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}=(\partial_k t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}+\sum_{\lambda=1}^{\mathrm{p}}\ \Gamma_{ks}^{i_\lambda}t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots s\ldots i_p}-\sum_{\mu=1}^{q}\ \Gamma_{kj_\mu}^{s}\,t_{j_1\ldots s\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p})du^k \tag{2.31}$$

biçiminde olur. (2.31) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre, verilen $t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}$ tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \partial_k t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma^{i_\lambda}_{ks} t^{i_1\ldots s\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^{s}_{kj_\mu} t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots s\ldots j_q} \tag{2.32}$$

biçiminde gösterilir. Tensörün kovaryant türevi tanımından, (p,q) tipli tensörün kovaryant türevi (p,q+1) tipli bir tensördürYani kovaryant türev, uygulanan tensörün kovaryantlık derecesini bir artırır.

Kovaryant türevin tanımından yararlanılarak aşağıdaki özelikler verilmektedir:

1. $\nabla_k (\underset{1}{t}{}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \mp \underset{2}{t}{}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}) = \nabla_k \underset{1}{t}{}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \mp \nabla_k \underset{2}{t}{}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$

2. $\nabla_k (\lambda t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}) = (\partial_k \lambda) t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \mp \lambda \nabla_k t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}, \quad \lambda \in F(M_n)$

3. $\nabla_k (t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \otimes g^{l_1\ldots l_p}_{s_1\ldots s_q}) = \nabla_k t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \otimes g^{l_1\ldots l_p}_{s_1\ldots s_q} + t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \otimes \nabla_k g^{l_1\ldots l_p}_{s_1\ldots s_q}$

4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterneleştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile işlem öncelik sırası değişebilir.

Afin (lineer) konneksiyonun invaryant tanımı aşağıdaki gibi verilir:

Tanım 2.3.1.2: M_n manifoldu üzerinde $\Im^1_0(M_n)$ vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X,Y) : \; \Im^1_0(M_n) \times \Im^1_0(M_n) \to \Im^1_0(M_n)$$

dönüşümü

i. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z \; ; \; f,g \in \Im^0_0(M_n), \; X,Y,Z \in \Im^1_0(M_n)$

ii. $\nabla_Z (fX + gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ’ya afin konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X : \Im^1_0(M_n) \to \Im^1_0(M_n)$$

dönüşümüne de X vektör alanı boyunca kovaryant diferensiyellenme denir (Bishop and Goldberg 1968).

Eğrilik ve burulma tensörleri

A_n afin konneksiyonlu uzayında verilen $f = f(u^1,\ldots,u^n)$ diferensiyellenebilir fonksiyonun tam diferensiyeli, yani $df = \partial_i f du^i$ ifadesi, koordinatların dönüşümü halinde invaryant kalır ve df fonksiyonu du^i vektörünün lineer fonksiyonudur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f \tag{2.33}$$

ile gösterilir. Bu kovektöre f fonksiyonunun gradienti, f fonksiyonuna ise bu kovektör alanın potansiyel fonksiyonu denir. Keyfi V_i kovektörünün herhangi bir skaler alanın gradienti olması için

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \tag{2.34}$$

olması gerek ve yeter şarttır (Yano and Ako 1968).

V_i gradient kovektörünün kovaryant türevi

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma_{ji}^{k} V_k \tag{2.35}$$

biçimindedir. (2.35) denkleminde j ve i indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılarak (2.34) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_{[j} V_{i]} = S_{ij}^{k} V_k \tag{2.36}$$

elde edilir. Burada

$$S_{ij}^{k} = \Gamma_{[ij]}^{k} \tag{2.37}$$

olarak verilmiştir. (2.36) denkleminin sol tarafındaki kovaryant türev (0,2) tipli tensör olduğu için S_{ij}^{k} kemiyetleri aşağı indislerine göre antisimetrik olan (1,2) tipli tensörün bileşenlerini ifade eder. Bu tensöre A_n uzayının burulma (torsion) tensörü denir. A_n manifoldundan alınmış keyfi X, Y vektör alanları için burulma tensörünün invaryant formda yazılışı ise

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.38}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963). Burada $[X,Y]$, X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi olup

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklindedir.

Keyfi v^i vektörünün $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma_{sm}^{i} v^m$ kovaryant türevi (1,1) tipli tensör belirtir. Bu tensörün kovaryant türevi ise

$$\nabla_r \nabla_s v^i = \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma^i_{rm} \nabla_s v^m - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i$$

$$= \partial_r (\partial_s v^i + \Gamma^i_{sk} v^k) + \Gamma^i_{rm} (\partial_s v^m + \Gamma^m_{sk} v^k) - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i$$

$$= \partial^2_{rs} v^i + \partial_r \Gamma^i_{sk} v^k + \Gamma^i_{sk} \partial_r v^k + \Gamma^i_{rm} \partial_s v^m + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} v^k - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i$$

biçiminde bulunur. Bu eşitlikte *r*, *s* indislerine göre alterneleştirme işlemi uygulanırsa

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i = R_{rsk}{}^i v^k - 2S^k_{rs} \nabla_k v^i \tag{2.39}$$

denklemi elde edilir. (2.39) denkleminde

$$R_{rsk}{}^i = \partial_r \Gamma^i_{sk} - \partial_s \Gamma^i_{rk} + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} - \Gamma^i_{sm} \Gamma^m_{rk} \tag{2.40}$$

$$= 2(\partial_{[r} \Gamma^i_{s]k} + \Gamma^i_{[r|m|} \Gamma^m_{s]k})$$

olarak alınmıştır. (2.39) denkleminin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim tensör ve v^i keyfi vektör olduğundan R^i_{rsk} ifadesi (1,3) tipli tensördür. Bu tensöre A_n uzayının Eğrilik tensörü veya Riemannian- Christoffel tensörü denir.

(2.39) formülüne benzer olarak aşağıdaki formüller yazılabilir:

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} \omega_k = -R^m_{rsk} \omega_m - 2S^m_{rs} \nabla_m \omega_k \ , \tag{2.41}$$

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} \varphi^j_i = R^j_{rsm} \varphi^m_i - R^m_{rsi} \varphi^j_m - 2S^k_{rs} \nabla_k \varphi^j_i \ , \tag{2.42}$$

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = R^{i_1}_{rsm} t^{m i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \ldots + R^{i_p}_{rsm} t^{i_1 \ldots m}_{j_1 \ldots j_q} \tag{2.43}$$

$$- R^m_{rsj_1} t^{i_1 \ldots i_p}_{m j_2 \ldots j_q} - \ldots - R^m_{rsj_q} t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots m} - 2S^k_{rs} \nabla_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \ .$$

(2.41)'e ω_k kovektörünün (2.42) formülüne ise φ^j_i afinorunun Ricci özdeşliği denir.

Keyfi $X, Y, Z \in A_n$ vektör alanları için eğrilik tensörünün invaryant formda yazılışı ise

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.44}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963).

Konneksiyonların dönüşümü

Keyfi iki afin konneksiyonlu uzayların difeomorfizmine bakalım. Bu durumda, bu uzayların karşılıklı noktalarının koordinatları aynı olacak şekilde uygun eğrisel koordinat sistemi verilebilir. Bu tür karşılık getirme, aynı bir X_n differensiyellenebilir manifoldunda iki keyfi afin konneksiyonun verilmesiyle de oluşturulabilir. Bu duruma, konneksiyonların birinden diğerine geçmeye, konneksiyonların dönüştürülmesi veya paralel kaydırma kuralının dönüştürülmesi olarak bakılabilir. Aynı manifold üzerinde çeşitli konneksiyonlar dahil etmek mümkündür. M_n manifoldu üzerinde Γ_{ij}^k ve $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ konneksiyon katsayılarına sahip ∇ ve $\overline{\nabla}$ konneksiyonları verilmiş olsun. Keyfi v^i vektör alanının bu konneksiyonlara göre kovaryant türevleri

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_{km}^i v^m \,, \; \overline{\nabla}_k v^i = \partial_k v^i + \overline{\Gamma}_{km}^i v^m$$

biçiminde olur. Bu iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak

$$\overline{\nabla}_k v^i - \nabla_k v^i = T_{km}^i v^m \tag{2.45}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$T_{km}^i = \overline{\Gamma}_{km}^i - \Gamma_{km}^i \tag{2.46}$$

biçimindedir. (2.45) eşitliği ile verilen T_{km}^i, (1,2) tipli tensör meydana getirir. Bu tensöre afin deformasyon (gerilme) tensörü denir.

Teorem 2.3.3.1: T_{km}^i, (1,2) tipli tensör ve Γ_{km}^i ise ∇ afin konneksiyonunun katsayıları olmak üzere (2.46) eşitliği ile verilen $\overline{\Gamma}_{km}^i$ katsayıları da diğer bir afin konneksiyonun katsayıları olur.

İspat: (2.46) eşitliğinden

$$\Gamma_{ij}^k = \overline{\Gamma}_{ij}^k - T_{ij}^k$$

yazılır. Γ_{ij}^k için konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi halinde

$$\overline{\Gamma}_{ij}^k - T_{ij}^k = A_{k'}^k A_i^{i'} A_j^{j'} \left(\overline{\Gamma}_{i'j'}^{k'} - T_{i'j'}^{k'} \right) + A_{k'}^k A_{ij}^{k'} \tag{2.47}$$

olur. Burada T_{ij}^k tensör olduğundan

$$T_{ij}^k = A_{k'}^k A_i^{i'} A_j^{j'} T_{i'j'}^{k'} \tag{2.48}$$

eşitliği elde edilir. (2.48) eşitliği (2.47) eşitliğinde kullanılırsa

$$\overline{\Gamma}_{ij}^k = A_{k'}^k A_i^{i'} A_j^{j'} \overline{\Gamma}_{i'j'}^{k'} + A_{k'}^k A_{ij}^{k'}$$

olduğu bulunur. Bu ise, $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ katsayılarının, konneksiyonların dönüştürülmesi kuralına göre dönüştüğünü ifade eder. Dolayısıyla bir afin konneksiyondur.

Bu teoremin bazı sonuçları aşağıdaki gibi verilmiştir:

Sonuç 1. $\overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ afin konneksiyon katsayıları olmak üzere her λ skaleri için

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij} + \lambda \overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}}{1+\lambda} \tag{2.49}$$

değeri de bir afin konneksiyonun katsayılarıdır.

İspat: (2.49) eşitliği

$$\Gamma^k_{ij} = \overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij} - \overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij}) \tag{2.50}$$

biçiminde yazılabilir. (2.50) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim tensör olduğundan Teorem 2.3.2'e göre Γ^k_{ij} afin konneksiyon olur. Yani iki farklı konneksiyon kullanılarak yeni bir konneksiyon oluşturulmuş olur.

Özel halde $\lambda = 1$ alırsak

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{k}_{ij} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij} + \overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}}{2} \tag{2.51}$$

bulunur. $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ konneksiyonuna $\overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ konneksiyonlarına göre orta konneksiyon denir.

Sonuç 2. Γ^k_{ij} afin konneksiyonu verilmiş olsun. Bu taktirde, $\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}$ katsayıları da afin konneksiyon tayin eder.

İspat: Burulma tensörünün ifadesi

$$S^k_{ij} = \Gamma^k_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}\right)$$

olduğundan

$$\tilde{\Gamma}^k_{ji} = \Gamma^k_{ji} + 2S^k_{ij}\,,\ \tilde{\Gamma}^k_{ji} = \Gamma^k_{ji} \tag{2.52}$$

yazılır. Teorem 2.3.2'den dolayı $\tilde{\Gamma}^k_{ji}$ katsayıları bir afin konneksiyon belirtir. $\tilde{\Gamma}^k_{ji}$ ve Γ^k_{ji} konneksiyonlarına karşılıklı konneksiyon denir.

Burulması sıfır olan uzaylar

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayların burulma tensörü sıfıra eşit olduğundan bu uzayların konneksiyon katsayıları alt indislerine göre simetriktir, yani

$$\Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij} = \tilde{\Gamma}^k_{ij}$$

olur. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın herhangi eğrisel koordinat sistemine göre koordinatları $\overset{\circ}{u}{}^1,...,\overset{\circ}{u}{}^n$ olan $O(\overset{\circ}{u}{}^i)$ noktasını alalım ve konneksiyon katsayılarının verilmiş olduğu koordinat sistemine göre bu noktadaki değerlerinin $\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij}$ katsayıları ile verildiğini kabul edelim. $\delta^{i'}_k$ Kronecker sembolü olmak üzere

$$u^{i'} = \delta^{i'}_k \{(u^k - \overset{\circ}{u}{}^k) + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{pq}(u^p - \overset{\circ}{u}{}^p)(u^q - \overset{\circ}{u}{}^q)\} \tag{2.53}$$

biçiminde yeni koordinatları tanımlayalım. Bu ifade u^i 'den $u^{i'}$ 'ne bir dönüşümdür. (2.53) dönüşümü difereniyellenebilirdir ve $u^{i'}$ koordinatlarının u^i koordinatlarına göre kısmi türevleri

$$A^{i'}_i = \delta^{i'}_i + \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ip}(u^p - \overset{\circ}{u}{}^p),\ A^{i'}_{ij} = \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} \tag{2.54}$$

biçiminde yazılır. (2.54) eşitliği O noktasında ve civarında $\det\left(A^{i'}_i\right) \neq 0$ şartını sağlar. Yani, (2.53) dönüşümü diferensiyellenebilir manifoldun tanımındaki mümkün olan dönüşümler sınıfındandır. (2.54) türev fonksiyonları O noktasında yazılırsa

$$A^{i'}_i = \delta^{i'}_i,\ A^{i'}_{ij} = \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} \tag{2.55}$$

olur.

Şimdi ise konneksiyon katsayılarının yeni koordinat sistemine göre O noktasındaki değerlerini hesaplayalım. Bunun için (2.55) ve (2.27) eşitlikleri kullanılarak

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk} = \delta^{j'}_j \delta^{k'}_k \delta^i_{i'} \overset{\circ}{\Gamma}{}^{i'}_{j'k'} + \delta^i_{i'} \delta^{i'}_l \overset{\circ}{\Gamma}{}^l_{kj}$$

veya

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{i'}_{j'k'} = 0$$

eşitlikleri bulunur. Böylece burulmasız afin uzayın her bir noktasında öyle bir koordinat sistemi verilebilir ki, konneksiyon katsayıları bu sisteme göre bu noktadaki bütün değerleri sıfır olur. (2.53) ile verilen koordinatlara normal koordinat sistemi denir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda

1. $R_{(rs)k}{}^i = 0,$

2. $R_{[rsk]}{}^i = 0,$

3. $\nabla_{[t} R_{rs]k}{}^{i} = 0$ (Bianchi-Padov eşitliği), (Bianchi'nin 2. özdeşliği)

eşitlikleri geçerlidir.

Bu eşitliklerin her üçünün de invaryant (tensör) karakter taşıdığını dikkate alırsak, bunların ispatını normal koordinat sisteminde incelemek yeterli ve daha kolaydır.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayda simetrik ve regüler a_{ij} tensörü verilmiş olsun. Bu tensörün tersi $\tilde{a}^{ij}$ olmak üzere, a_{ij} tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k a_{ij} = a_{kij} \tag{2.56}$$

şeklinde olsun. (2.56) eşitliğinde indislerin yeri dairesel olarak değiştirilerek

$$\begin{aligned}
\partial_k a_{ij} - \Gamma_{ki}^m a_{mj} - \Gamma_{kj}^m a_{mi} &= \nabla_k a_{ij}, \\
\partial_i a_{jk} - \Gamma_{ij}^m a_{mk} - \Gamma_{ik}^m a_{jm} &= \nabla_i a_{jk}, \\
\partial_j a_{ki} - \Gamma_{jk}^m a_{mi} - \Gamma_{ji}^m a_{km} &= \nabla_j a_{ki}.
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır.

Sonuncu iki eşitlikten birinci eşitlik çıkartılırsa

$$2\Gamma_{ij}^m a_{mk} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} - \left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{2.57}$$

eşitliği bulunur. (2.57) eşitliğinin her iki tarafı $\tilde{a}^{rk}$ tensörü ile çarpılırsa

$$\Gamma_{ij}^r = \left\{ {r \atop ij} \right\} - \frac{1}{2}\tilde{a}^{rk}\left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{2.58}$$

olur. Burada

$$\left\{ {r \atop ij} \right\} = \frac{1}{2}\tilde{a}^{rk}\left(\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij}\right) \tag{2.59}$$

şeklindedir. (2.59) ifadesine a_{ij} tensörünün Riemannian konneksiyon katsayıları, Levi-Civita konneksiyonu veya Christoffel sembolü denir. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları regüler ve simetrik a_{ij} tensörünün Christoffel sembolü ve kovaryant türevleri yardımıyla ifade edilir.

Tanım 2.3.4.1: Burulmasız afin konneksiyonlu A_n uzayında $e_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} \mp e & e_s \neq e_n \\ 0 & e_s = e_n \end{cases}$, n-vektörü olmak üzere $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \dots, \underset{n}{v}$ lineer bağımsız vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmi

$$V = e_{i_1 i_2 \ldots i_n} \underset{1}{v}^{i_1} \underset{2}{v}^{i_2} \ldots \underset{n}{v}^{i_n} \tag{2.60}$$

olsun. $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}$ vektörlerinin paralel taşınması sonucunda V hacmi korunursa, burulmasız A_n uzayına eş afin (denk afin) uzay denir.

(2.60) denkleminden

$$\delta e_{i_1 \ldots i_n} = 0 \text{ veya } \nabla_k e_{i_1 \ldots i_n} = 0 \tag{2.61}$$

olur. Eş afin uzayın konneksiyonu (2.61) denklemiyle belirlenir. (2.61) şartı

$$\partial_k e_{i_1 \ldots i_n} - \Gamma^s_{ki_1} e_{si_2 \ldots i_n} - \ldots - \Gamma^s_{ki_n} e_{i_1 \ldots s} = 0 \tag{2.62}$$

biçiminde yazılabilir. n-vektörün antisimetrikliğine göre (2.62) sisteminin bütün denklemleri

$$\partial_k e_{12 \ldots n} - \Gamma^s_{k1} e_{s2 \ldots n} - \ldots - \Gamma^s_{kn} e_{12 \ldots s} = 0 \tag{2.63}$$

denklemine denk olur. $e_{12 \ldots n} = e$ olarak yazılırsa bu durumda (2.63) eşitliğinden

$$\Gamma^s_{ks} = \partial_k \ln e \tag{2.64}$$

yazılır. Eş afin uzay bu şart ile de karakterize edilebilir. (2.64) eşitliğindeki eş afin konneksiyonun katsayıları ile belirlenen Γ^s_{ks} toplamı gradiyentdir. Bu gradiyentin potansiyel fonksiyonu ise $\ln e$ olur.

$$R_{ij} = R_{kij}{}^{k} = \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_i \Gamma^k_{kj} + \Gamma^k_{kl} \Gamma^l_{ij} - \Gamma^l_{ki} \Gamma^k_{lj} \tag{2.65}$$

tensörüne Ricci tensörü denir. Eş afin konneksiyonu

$$R_{ij} = R_{ji} \tag{2.66}$$

şartı ile de karakterize edilebilir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda eğrilik tensörünün $R_{[rsk]}{}^{i} = 0$ ve $R_{(rs)k}{}^{i} = 0$ şartlarını sağladığını göz önüne alırsak

$$R_{rsk}{}^{k} = R_{rs} - R_{sr} \tag{2.67}$$

eşitliğini yazabiliriz. (2.66) ve (2.67) eşitlikleri eş afin konneksiyonunun

$$R_{rsk}{}^{k} = 0$$

şartı ile de karakterize edilebileceğini gösterir.

Tanım 2.3.4.2: Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın her bir noktasındaki tanjant uzayında verilen simetrik, (0,2) tipli g tensörü, tanjant uzayın paralel kaydırılması durumunda korunuyorsa bu uzaya metrik uzay adı verilir ve simetrik, (0,2) tipli g_{ij} tensörüne metrik tensör denir.

Tanım 2.3.4.3: Metrik uzayın g metrik tensörü regüler ise yani $\det(g_{ij}) \neq 0$ ise bu uzaya Weyl uzayı adı verilir ve W_n ile gösterilir.

Tanım 2.3.4.4: Weyl uzayın eş-afin uzay olması halinde, bu uzaya Riemannian uzayı adı verilir ve V_n ile gösterilir.

Riemannian uzayı burulmasız konneksiyona sahip olan uzaydır ve bu uzayın Riemannian konneksiyonu

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \tag{2.68}$$

şartı ile karakterize edilir. V_n Riemannian uzayının konneksiyon katsayıları

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ {k \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{kr} \left(\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ir} - \partial_r g_{ij} \right) \tag{2.69}$$

biçiminde verilir. Yani, V_n uzayının konneksiyon katsayıları g tensörünün Christoffel sembolleriyle çakışır. (2.69) katsayılarıyla verilen konneksiyona Riemannian konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir. Diğer taraftan Riemannian manifoldu üzerinde $\nabla g = 0$ şartını sağlayan ama burulması olan konneksiyonlar da vardır. Bu tür konneksiyonlara ise metrik konneksiyon denir.

Riemannian uzayında $R_{jkl}{}^{s} g_{si} = R_{ijkl}$ olmak üzere

1. $R_{(ij)kl} = 0$

2. $R_{[ijk]l} = 0$

3. $\nabla_{[s} R_{ij]kl} = 0$

4. $R_{ij(kl)} = 0$

5. $R_{ijkl} = R_{klij}$

eşitlikleri geçerlidir.

MATERYAL ve YÖNTEM

Tanjant Demet

M_n, C^∞ sınıfından n- boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun P noktasındaki tanjant uzay $T_P(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n) = \bigcup_{P \in M_n} T_P(M_n) \tag{3.1}$$

ile tanımlanan $T(M_n)$ kümesine tanjant demet denir (Yano and Ishihara 1973).

$T(M_n)$ 'nin herhangi bir $\tilde{P} \in T_P(M_n)$ noktası için M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ tabii demet yapısını üreten $\pi : T(M_n) \to M_n$, $\pi(\tilde{P}) = P$ doğal demet izdüşümünü tanımlar. $\pi^{-1}(P) = \tilde{P} \in T_P(M_n)$ kümesine M_n baz uzayının P noktasındaki fibresi denir.

$f : M_n \to T(M_n)$ diferensiyellenebilir dönüşümü ile tanımlanan f kesitine bakalım: $\pi \circ f = id\big|_{M_n}$. M_n manifoldunun keyfi P noktasındaki $f(P)$ görüntüsünü, $T_P(M_n)$ 'nin sıfır vektörüne götüren f kesitine sıfır kesit denir. $f(M_n)$ sıfır kesiti M_n baz uzayı ile aynı olması nedeniyle M_n manifoldunun kendisi $T(M_n)$ 'de diferensiyellenebilir imbedding olmuş (içine daldırılmış) altmanifolddur (Yano and Ishihara 1973).

(x^h), U koordinat komşuluğunda lokal koordinatlar olsun. M_n baz uzayı $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluk sistemiyle örtülmüş olacak şekilde R^n uzayı, R üzerindeki n-boyutlu vektör uzayı olmak üzere

$\tilde{P} \in T_P(M_n)$ $(P \in U)$ noktası (P, X) sıralı çifti ile gösterildiğinden ve $X \in R^n$ vektörünün bileşenleri $T_P(M_n)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\}\left(\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h}\right)$ doğal bazına göre $\tilde{P}$ 'nin $y^h = x^{\bar{h}}$ $\left(\bar{h} = n+1, \ldots, 2n\right)$ kartezyen koordinatları olduğu için $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesi $U \times R^n$ direkt çarpımı difeomorfizm olacaktır. U komşuluğunda $P = \pi(\tilde{P})$ 'nin koordinatları

$x^h \quad (h=1,...,n)$ ile gösterilirse ve $(x^h, x^{\bar{h}}) \leftrightarrow \tilde{P} \in \pi^{-1}(U)$ olduğu dikkate alınırsa, $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde $(x^h, x^{\bar{h}})$ lokal koordinatlar sistemi elde edilir ve $(x^h, x^{\bar{h}})$ 'ye, (x^h) 'dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$ 'daki koordinatlar denir (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldunun $P=\pi(\tilde{P})$ noktasını içeren diğer bir koordinat komşuluğu $\{U', x^{h'}\}$ olmak üzere, $\pi^{-1}(U')$ koordinat komşuluğu da $\tilde{P}$ noktasını içerir.

$\pi^{-1}(U')$ koordinat komşuluğuna göre $\tilde{P}$ noktasının indirgenmiş koordinatları $(x^{h'}, y^{h'})$ ile belirtilir. Buradaki dönüşüm kuralı

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}(x^h), \\ x^{\bar{h}'} = \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} y^h \end{cases} \tag{3.2}$$

biçimindedir (Yano and Ishihara 1973). Burada, $x^{h'}(x^h)$; $x^1, x^2, ..., x^n$ değişkenlerinin C^∞ − sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}} = y^h,\ x^{\bar{h}'} = y^{h'}$ ile gösterilirse (3.2) dönüşümü

$$x^{H'} = x^{H'}(x^H),\ H = 1,...,n,n+1,...,2n \tag{3.3}$$

olarak yazılır. (3.2) dönüşümünün Jakobi matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{H'}}{\partial x^H}\right) = \begin{pmatrix} A_h^{h'} & 0 \\ A_{h\varepsilon}^{h'} y^\varepsilon & A_h^{h'} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

ile tanımlıdır. Burada

$$A_h^{h'} = \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^h},\ A_{h\varepsilon}^{h'} = \frac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^h \partial x^\varepsilon}$$

eşitlikleri mevcuttur. (3.2) dönüşümünün tersi ise

$$\begin{cases} x^h = x^h(x^{h'}), \\ x^{\bar{h}} = \dfrac{\partial x^h}{\partial x^{h'}} y^{h'} \end{cases} \tag{3.5}$$

veya

$$x^H = x^H\left(x^{H'}\right) \tag{3.6}$$

ile gösterilir. (3.5) dönüşümünün Jakobi matrisi

$$\left(\frac{\partial x^H}{\partial x^{H'}}\right) = \begin{pmatrix} A_{h'}^h & 0 \\ A_{h'\varepsilon'}^h y^{\varepsilon'} & A_{h'}^h \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

biçimindedir. (3.4) ve (3.7) matrisleri $T(M_n)$ tanjant demetin daima yönlendirilebilir olduğunu gösterir (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldu üzerinde C^∞ -sınıfından (r,s) tipli tüm tensör alanlarının kümesi $\Im_s^r(M_n)$ ve bunların direkt toplamı ise

$$\Im(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \Im_s^r(M_n)$$

ile belirtilir. Benzer olarak $T(M_n)$ tanjant demetindeki uygun kümeler sırasıyla $\Im_s^r(T(M_n))$ ve $\Im(T(M_n))$ ile gösterilir.

Fonksiyonun dikey lifti

f , M_n 'de bir fonksiyon olmak üzere $T(M_n)$ tanjant demette ${}^v f$ fonksiyonuna bakalım: $f : M_n \to R$ ve $\pi : T(M_n) \to M_n$ olmak üzere ${}^v f = f \circ \pi$ olsun. ${}^v f : T(M_n) \to R$ fonksiyonuna f fonksiyonunun dikey lifti denir. Burada

$${}^v f(\tilde{P}) = {}^v f(x,y) = f \circ \pi(\tilde{P}) = f(P) = f(x) \quad \left(\tilde{P}, \in \pi^{-1}(U),\ \tilde{P} = (x^i, y^i)\right)$$

olup ${}^v f(\tilde{P})$ değeri fibre boyunca sabittir ve $P = \pi^{-1}(\tilde{P}) \in M_n$ noktasındaki $f(P)$ değerine eşittir (Yano and Ishihara 1973).

Vektör alanının dikey lifti

M_n manifoldu üzerinde herhangi bir $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı verilmek üzere $T(M_n)$ tanjant demetinde

$${}^v X(\iota\omega) = {}^v(\omega(X)) \tag{3.8}$$

ile tanımlanan ${}^{v}X$ vektör alanına X vektör alanının dikey lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

Burada ω kovektörü M_n 'nin U komşuluğunda $\omega = \omega_i dx^i$ şeklindeki koordinatlara sahip olup $\iota\omega$ ise $\pi^{-1}(U)$ 'da $\iota\omega = \omega_i y^i$ indirgenmiş koordinatlarına sahiptir.

(3.8) eşitliğinden X vektör alanının ${}^{v}X$ dikey liftinin, $T(M_n)$ tanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$$ {}^{v}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix} \tag{3.9} $$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

1-formun dikey lifti

M_n manifoldunda $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ 1-formu verilmiş olsun. $T(M_n)$ tanjant demetinde ω 'nın dikey lifti olan ${}^{v}\omega \in \Im_1^0(T(M_n))$ 1-formu indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{v}\omega = (\omega_h, 0) \tag{3.10} $$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

(3.10) eşitliğinden her bir $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde

$$ {}^{v}(dx^h) = dx^h \tag{3.11} $$

olacak şekilde yazılır (Yano and Ishihara 1973).

Vektör alanının tam lifti

M_n manifoldunda $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı verilmiş olsun. $T(M_n)$ tanjant demetinde X vektör alanının tam lifti olan ${}^{c}X \in \Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanı indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$$ {}^{c}X = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{pmatrix} \tag{3.12} $$

şeklindedir. (Yano and Ishihara 1973).

(3.12) eşitliğinden her bir $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde

$$^{c}(\partial_h) = \partial_h \tag{3.13}$$

olur (Yano and Ishihara 1973).

Afinor alanının tam lifti

M_n manifoldu üzerinde $F \in \Im_1^1(M_n)$ afinor alanı verilmiş olsun. $T(M_n)$ tanjant demetinde F afinor alanının tam lifti olan $^{c}F \in \Im_1^1(T(M_n))$ afinor alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$^{c}F = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ y^s \partial_s F_i^h & F_i^h \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

γ − operatörü

F , M_n üzerinde tanımlı bir afinor alanı olmak üzere $T(M_n)$ tanjant demetinde $\gamma F \in \Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$\gamma F = \begin{pmatrix} 0 \\ y^s F_s^h \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

$T \in \Im_2^1(T(M_n))$ olmak üzere, $T(M_n)$ tanjant demetinde $\gamma T \in \Im_1^1(T(M_n))$ afinor alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$\gamma T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y^s T_{s\ h}^{h} \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

Yatay lift

M_n , diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyonu verilmiş olsun. Keyfi $X \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$^{H}X = {}^{C}X - (\nabla_{\gamma} X) \tag{3.16}$$

ile tanımlanan $^{H}X \in \Im_0^1\left(T(M_n)\right)$ vektör alanına, X vektör alanının yatay lifti denir ve burada

$$(\nabla_{\gamma} X) = \gamma(\nabla X)$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

X 'in ^{H}X yatay lifti, $T(M_n)$ tanjant demeti üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre

$$^{H}X = \begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma_i^h X^i \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

bileşenlerine sahiptir. Burada

$$\Gamma_i^h = y^s \Gamma_{s\ i}^{\ h} \tag{3.18}$$

şeklindedir.

$F \in \Im_1^1(M_n)$ 'in $T(M_n)$ tanjant demeti üzerindeki ^{H}F yatay lifti

$$^{H}F = {}^{C}F - \left(\nabla_{\gamma} F\right) \tag{3.19}$$

ile tanımlıdır (Yano and Ishihara 1973).

Burada $\nabla_{\gamma} F$

$$\left(\nabla_{\gamma} F\right) = y^s \nabla_s F_i^h \partial_{\bar{i}} \otimes dx^h \tag{3.20}$$

şeklinde tanımlıdır. F 'in ^{H}F yatay lifti, $T(M_n)$ tanjant demeti üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre

$$^{H}F = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ -\Gamma_s^h F_i^s + \Gamma_i^s F_s^h & F_i^h \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

Kovektör alanının dikey lifti

$\omega \in \Im_1^0(M_n)$ üzerindeki $\omega^A = \omega_B \xi^{BA}$ lokal bileşenlerine sahip ve koordinatları $\omega = \omega_i dx^i$ şeklindeki 1-form olmak üzere ω 1-formunun dikey lifti olan ${}^v\omega$ vektör alanı $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demetinde indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^v\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_i \end{pmatrix} \tag{3.32} $$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

Vektör alanının tam lifti

M_n manifoldu üzerinde $X \in \Im_0^1\left(M_n\right)$ vektör alanı verilmiş olsun. $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demetinde X vektör alanının tam lifti olan ${}^cX \in \Im_0^1\left(T^*\left(M_n\right)\right)$ vektör alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^cX = \begin{pmatrix} X^h \\ -p_i\left(\partial_h X^i\right) \end{pmatrix} \tag{3.33} $$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

Afinor alanının tam lifti

M_n manifoldu üzerinde $F \in \Im_1^1\left(M_n\right)$ afinor alanı verilmiş olsun. $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demetinde F afinor alanının tam lifti olan ${}^cF \in \Im_1^1\left(T^*\left(M_n\right)\right)$ afinor alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^cF = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ p_s(\partial_i F_h^s - \partial_h F_i^s) & F_h^i \end{pmatrix} \tag{3.34} $$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

$\gamma -$ operatörü

X, M_n üzerinde tanımlı bir vektör alanı olacak şekilde $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demeti üzerindeki γX fonksiyonu

$$ \gamma X = p_s X^s \tag{3.35} $$

ile tanımlanır.

F , M_n üzerinde tanımlı bir afinor alanı olacak şekilde $T^*(M_n)$ kotanjant demetinde $\gamma F \in \Im_0^1(T^*(M_n))$ vektör alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$\gamma F = \begin{pmatrix} 0 \\ p_s F_i^s \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

$T \in \Im_2^1(M_n)$ olmak üzere, $T^*(M_n)$ kotanjant demetinde $\gamma T \in \Im_1^1(T^*(M_n))$ afinor alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$\gamma T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_s T_{j\,i}^{s} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

Vektör alanının yatay lifti

M_n diferensiyellenebilir manifoldunda ∇ simetrik afin konneksiyon olmak üzere keyfi $X \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$^H X = {}^C X + \gamma(\nabla X) \tag{3.38}$$

ile tanımlanan $^H X \in \Im_0^1(T^*(M_n))$ vektör alanına, X vektör alanının yatay lifti denir ve burada X^s 'in $\nabla_i X^s$ kovaryant türevi

$$(\nabla_i X^s) = \partial_i X^s + X^j \Gamma_{j\,i}^{s}$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

X 'in $^H X$ yatay lifti, $T^*(M_n)$ kotanjant demeti üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre

$$^H X = \begin{pmatrix} X^i \\ X^j \Gamma_{ji} \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

bileşenlerine sahiptir. Burada

$$\Gamma_{ji} = p_s \Gamma_{j\,i}^{s} \tag{3.40}$$

şeklindedir.

Afinor alanının yatay lifti

$F \in \Im_1^1(M_n)$ 'in $T^*(M_n)$ kotanjant demeti üzerindeki ${}^H F$ yatay lifti

$$ {}^H F = {}^C F + \gamma[\nabla F] \tag{3.41}$$

ile tanımlıdır. Burada $[\nabla F]$, keyfi $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanları için

$$[\nabla F](X,Y) = -\nabla_X(FY) + \nabla_Y(FX) \tag{3.42}$$

ile tanımlı (1,2) tipli bir tensör alanıdır. F 'in ${}^H F$ yatay lifti, $T^*(M_n)$ kotanjant demeti üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^H F = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ -\Gamma_{is} F_h^s + \Gamma_{hs} F_i^s & F_h^i \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

Yarı-Tanjant Demet

M_n ile B_m sırasıyla C^∞ sınıfından n ve m-boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\pi_1 : M_n \to B_m$ submersionu tarafından tanımlanan diferensiyellenebilir bir demet olsun. Bu demette $a, b, \ldots = 1, \ldots, n-m$; $\alpha, \beta, \ldots = n-m+1, \ldots, n$; $i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere, $(x^a, x^\alpha) = (x^i)$ lokal koordinat sistemine göre x^α 'lar B_m 'nin lokal koordinatları, x^a 'lar ise, $\pi_1 : M_n \to B_m$ demetinin fibre koordinatlarıdır (Vishnevskii *et al*. 1985). $(x^{a'}, x^{\alpha'})$ demetteki bir diğer yerel koordinatlar olmak üzere

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}\left(x^b, x^\beta\right), \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}\left(x^\beta\right) \end{cases} \tag{3.44}$$

dönüşümü yazılır. (3.44)'de belirtilen dönüşümün Jakobi matrisi

$$\left(A_j^{i'}\right) = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right) = \begin{pmatrix} A_b^{a'} & A_\beta^{a'} \\ 0 & A_\beta^{\alpha'} \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

$T_x(B_m)$, B_m 'in $(x = \pi_1(\tilde{x}), \tilde{x} = \left(x^a, x^\alpha\right) \in M_n)$ x noktasındaki tanjant uzayı olsun. $T_x(B_m)$ uzayındaki $\{\partial_\alpha\}$ doğal çatısına göre X 'in bileşenleri $X^\alpha = dx^\alpha\left(X\right)$ olmak üzere,

M_n manifoldu üzerinde lokal koordinatları $(x^I)=(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$, $(x^{\bar{\alpha}}=y^\alpha$, $\bar{\alpha}=\alpha+m$, $I=1,\ldots,n+m)$ olan $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti (pull-back demeti) elde edilir (Husemoller 1994; Lawson and Michelsohn 1989, Salimov and Kadıoğlu 2000, Steenrod 1951, Duc 1979, Vishnevskii *et al*. 1985).

$t(B_m)$ yarı-tanjant demeti, B_m üzerinde doğal demet yapısına ve $\pi:(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})\to(x^\alpha)$ şeklinde tanımlı $\pi: t(B_m)\to B_m$ izdüşümüne sahiptir. Eğer, $\pi_2:(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})\to(x^a, x^\alpha)$ ile, $\pi_2: t(B_m)\to M_n$ dönüşümü tanımlanacak olursa; $t(B_m)$, M_n üzerinde de bir demet yapısına sahip olur. Buradaki izdüşüm dönüşümleri arasında $\pi=\pi_1\circ\pi_2$ eşitliği yazılabilir (Salimov and Kadıoğlu 2000). Böylece $(t(B_m), \pi_1\circ\pi_2)$ kompozit demeti veya step-like demeti tanımlar (Ostianu 1974; Poor 1981).

M_n 'nin lokal koordinatlarının (3.44)'e göre, $t(B_m)$ üzerinde belirttiği koordinat dönüşümü

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}\left(x^b, x^\beta\right), \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}\left(x^\beta\right), \\ x^{\bar{\alpha}'} = \dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} x^{\bar{\beta}} \end{cases} \tag{3.45}$$

şeklindedir. (3.45) dönüşümünün Jakobi matrisi

$$\bar{A} = A_J^{I'} = \begin{pmatrix} A_b^{a'} & A_\beta^{a'} & 0 \\ 0 & A_\beta^{\alpha'} & 0 \\ 0 & A_{\beta\alpha}^{\alpha'} y^\alpha & A_\beta^{\alpha'} \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

ile gösterilir. Ayrıca burada

$$A_{\beta\alpha}^{\alpha'} = \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}$$

şeklindedir. (3.45) dönüşümünün tersi yazılırsa

$$\begin{cases} x^a = x^a(x^{b'}, x^{\beta'}), \\ x^\alpha = x^\alpha\left(x^{\beta'}\right), \\ x^{\bar{\alpha}} = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta'}} y^{\beta'}, \end{cases} \tag{3.47}$$

elde edilir. (3.47) dönüşümünün Jakobi matrisi

$$\left(A_{J'}^{I}\right) = \begin{pmatrix} A_{b'}^{a} & A_{\beta'}^{a} & 0 \\ 0 & A_{\beta'}^{\alpha} & 0 \\ 0 & A_{\beta'\varepsilon'}^{\alpha} y^{\varepsilon'} & A_{\beta'}^{\alpha} \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

ile gösterilir. (3.46)'da belirtilen matris için

$$Det(A_b^{a'}) \neq 0,\ Det(A_\beta^{\alpha'}) \neq 0$$

olduğundan $Det\bar{A} \neq 0$ 'dır. Yarı-tanjant demetin boyutu $\dim t(B_m) = n + m$ olur (Duc 1979; Vishnevskii *et al*. 1985). Özel olarak $n = m$ olması durumunda $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti, $T(M_n)$ tanjant demetine dönüşür (Salimov and Kadıoğlu 2000). Pull-back demetinin yüksek mertebeden durumlara genellemeleri Pontryagin demetleri olarak bilinir (Pontryagin 1950).

$F\left(B_m\right)$, B_m üzerindeki C^∞ sınıfından reel değerli fonksiyonların belirttiği halka olmak üzere, B_m 'deki $\left(p,q\right)$ tipli tüm tensör alanlarının $F\left(B_m\right)$ üzerindeki modülü $\Im_q^p\left(B_m\right)$ ile gösterilir.

Bu tez çalışmasının amacı (0,2) tipli tensör alanlarının yarı-tanjant demete dikey, tam ve yatay liftlerini tanımlamak ayrıca bunların metrik özelliklerini incelemektir (Eker 2019a, 2019b).

Fonksiyonun dikey lifti

f , B_m üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti üzerinde, $\pi : t(B_m) \to B_m$ ve ${}^{v}f = f \circ \pi_1$ dönüşümleri vasıtasıyla tanımlanan f fonksiyonunun dikey lifti

$${}^{w}f = {}^{v}f \circ \pi_2 = f \circ \pi_1 \circ \pi_2 = f \circ \pi$$

şeklindedir (Ay 2013).

Buradan

$$ {}^{vv}f(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}}) = f(x^\alpha) \tag{3.49} $$

elde edilir. Böylece ${}^{vv}f$ değeri $\pi : t(B_m) \to B_m$ 'deki her bir fibre boyunca sabittir (Ay 2013).

Vektör alanının dikey lifti

$\tilde{X} \in \Im_0^1(M_n)$, $X = X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ olmak üzere $\tilde{X} = \tilde{X}^a(x^a, x^\alpha)\partial_a + X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ şeklindeki bir izdüşümü olan vektör alanının $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine dikey lifti indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri (Vishnevskii 2002)

$$ {}^{vv}\tilde{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^\alpha \end{pmatrix} \tag{3.50} $$

şeklindedir. Buradan ve (3.46) eşitliğinden $({}^{vv}\tilde{X}') = \bar{A}({}^{vv}\tilde{X})$ elde edilir (Ay 2013).

Kovektör alanının dikey lifti

ω, B_m üzerindeki ω_α lokal bileşenlerine sahip ve koordinatlarla ifadesi $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$ şeklinde olan 1-form olmak üzere ω 1-formunun $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine dikey lifti indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{vv}\omega = (0, \omega_\alpha, 0) \tag{3.51} $$

bileşenlerine sahiptir. Buradan ve (3.46) eşitliğinden $({}^{vv}\omega) = \bar{A}({}^{vv}\omega)$ olduğu görülür (Ay 2013).

Fonksiyonun tam lifti

Eğer $f = f(x^a, x^\alpha)$, B_m üzerinde bir fonksiyon ise f fonksiyonunun $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine tam lifti

$$ {}^{cc}f = (\iota(df)) = x^{\bar{\beta}}\partial_\beta f = y^\beta \partial_\beta f \tag{3.52} $$

ile tanımlanır (Salimov and Kadıoğlu 2000).

Vektör alanının tam lifti

$\tilde{X} \in \Im_0^1\left(M_n\right)$, $X = X^{\alpha}(x^{\alpha})\partial_{\alpha}$ olmak üzere $\tilde{X} = \tilde{X}^{a}(x^{a}, x^{\alpha})\partial_{a} + X^{\alpha}(x^{\alpha})\partial_{\alpha}$ şeklindeki bir izdüşüme sahip olan vektör alanının $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine tam lifti indirgenmiş koordinatlara göre (Vishnevskii 2002)

$$^{cc}\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{X}^{a} \\ X^{\alpha} \\ y^{\sigma}\partial_{\sigma}X^{\alpha} \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

bileşenlerine sahiptir. Buradan ve (3.46) eşitliğinden $(^{cc}\tilde{X}') = \bar{A}(^{cc}\tilde{X})$ elde edilir (Vishnevskii *et al*. 1985).

ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

(0,2) Tipli Tensör Alanının Dikey Liftleri

$G = G_{\alpha\beta} dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta}$ ile tanımlı $G \in \Im_2^0(M_n)$ tensör alanının $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine dikey lifti

$$^{vv}G = \left({^{vv}G_{IJ}} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

bileşenlerine sahiptir. (3.48) kullanılarak $^{vv}G_{I'J'} = A_{I'}^{I} A_{J'}^{J} ({^{vv}G_{IJ}})$ eşitliği ispatlanabilir. (0,2) tipli ^{vv}G tensör alanına $G \in \Im_2^0(M_n)$ tensör alanının $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine dikey lifti denir.

$Det({^{vv}G}) = 0$ olduğu için aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.1.1. $t(B_m)$ yarı-tanjant demet sıradan (trivial) ^{vv}G metriğine sahiptir.

Teorem 4.1.2. G, B_m üzerinde (0,2) tipli tensör alanı olmak üzere $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanları için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

i) $^{vv}G({^{vv}X}, {^{vv}Y}) = 0,$

ii) $^{vv}G({^{vv}X}, {^{cc}Y}) = 0,$

iii) $^{vv}G({^{cc}X}, {^{vv}Y}) = 0,$

iv) $^{vv}G({^{cc}X}, {^{cc}Y}) = {^{vv}}\left(G(X,Y) \right).$

İspat. (i) $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ ve $G \in \Im_2^0(B_m)$ olmak üzere, (3.50) ve (4.1)'den,

$$^{vv}G({^{vv}X}, {^{vv}Y}) = {^{vv}G_{IJ}}\, {^{vv}X^{I}}\, {^{vv}Y^{J}}$$

$$= {^{vv}G_{ab}} \underbrace{^{vv}X^{a}}_{0} {^{vv}Y^{b}} + {^{vv}G_{a\beta}} \underbrace{^{vv}X^{a}}_{0} {^{vv}Y^{\beta}} + {^{vv}G_{a\bar{\beta}}} \underbrace{^{vv}X^{a}}_{0} {^{vv}Y^{\bar{\beta}}}$$

$$+ {^{vv}G_{\alpha b}} \underbrace{^{vv}X^{\alpha}}_{0} {^{vv}Y^{b}} + {^{vv}G_{\alpha\beta}} \underbrace{^{vv}X^{\alpha}}_{0} {^{vv}Y^{\beta}} + {^{vv}G_{\alpha\bar{\beta}}} \underbrace{^{vv}X^{\alpha}}_{0} {^{vv}Y^{\bar{\beta}}}$$

$$+ {^{vv}G_{\bar{\alpha} b}}\, {^{vv}X^{\bar{\alpha}}} \underbrace{^{vv}Y^{b}}_{0} + {^{vv}G_{\bar{\alpha}\beta}}\, {^{vv}X^{\bar{\alpha}}} \underbrace{^{vv}Y^{\beta}}_{0} + \underbrace{^{vv}G_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}_{0} {^{vv}X^{\bar{\alpha}}}\, {^{vv}Y^{\bar{\beta}}}$$

$$= 0$$

elde edilir.

(ii) $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ ve $G \in \Im_2^0(B_m)$ olmak üzere, (3.50), (3.53) ve (4.1)'den,

$$
\begin{aligned}
{}^{vv}G({}^{vv}X, {}^{cc}Y) &= {}^{vv}G_{IJ}\, {}^{vv}X^{I}\, {}^{cc}Y^{J} \\
&= {}^{vv}G_{ab} \underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0} {}^{cc}Y^{b} + {}^{vv}G_{a\beta} \underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0} {}^{cc}Y^{\beta} + {}^{vv}G_{a\bar{\beta}} \underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0} {}^{cc}Y^{\bar{\beta}} \\
&+ {}^{vv}G_{\alpha b} \underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0} {}^{cc}Y^{b} + {}^{vv}G_{\alpha\beta} \underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0} {}^{cc}Y^{\beta} + {}^{vv}G_{\alpha\bar{\beta}} \underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0} {}^{cc}Y^{\bar{\beta}} \\
&+ \underbrace{{}^{vv}G_{\bar{\alpha}b}}_{0} {}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\, {}^{cc}Y^{b} + \underbrace{{}^{vv}G_{\bar{\alpha}\beta}}_{0} {}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\, {}^{cc}Y^{\beta} + \underbrace{{}^{vv}G_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}_{0} {}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\, {}^{cc}Y^{\bar{\beta}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(iii) $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ ve $G \in \Im_2^0(B_m)$ olmak üzere, (3.50), (3.53) ve (4.1)'den,

$$
\begin{aligned}
{}^{vv}G({}^{cc}X, {}^{vv}Y) &= {}^{vv}G_{IJ}\, {}^{cc}X^{I}\, {}^{vv}Y^{J} \\
&= {}^{vv}G_{ab}\, {}^{cc}X^{a} \underbrace{{}^{vv}Y^{b}}_{0} + {}^{vv}G_{a\beta}\, {}^{cc}X^{a} \underbrace{{}^{vv}Y^{\beta}}_{0} + \underbrace{{}^{vv}G_{a\bar{\beta}}}_{0} {}^{cc}X^{a}\, {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
&+ {}^{vv}G_{\alpha b}\, {}^{cc}X^{\alpha} \underbrace{{}^{vv}Y^{b}}_{0} + {}^{vv}G_{\alpha\beta}\, {}^{cc}X^{\alpha} \underbrace{{}^{vv}Y^{\beta}}_{0} + \underbrace{{}^{vv}G_{\alpha\bar{\beta}}}_{0} {}^{cc}X^{\alpha}\, {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
&+ \underbrace{{}^{vv}G_{\bar{\alpha}b}}_{0} {}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\, {}^{vv}Y^{b} + \underbrace{{}^{vv}G_{\bar{\alpha}\beta}}_{0} {}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\, {}^{vv}Y^{\beta} + \underbrace{{}^{vv}G_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}_{0} {}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\, {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(iv) $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ ve $G \in \Im_2^0(B_m)$ olmak üzere, (3.49), (3.50), (3.53) ve (4.1)'den,

$$
\begin{aligned}
{}^{vv}G({}^{cc}X, {}^{cc}Y) &= {}^{vv}G_{IJ}\, {}^{cc}X^{I}\, {}^{cc}Y^{J} \\
&= \underbrace{{}^{vv}G_{ab}}_{0} {}^{cc}X^{a}\, {}^{cc}Y^{b} + \underbrace{{}^{vv}G_{a\beta}}_{0} {}^{cc}X^{a}\, {}^{cc}Y^{\beta} + \underbrace{{}^{vv}G_{a\bar{\beta}}}_{0} {}^{cc}X^{a}\, {}^{cc}Y^{\bar{\beta}} \\
&+ \underbrace{{}^{vv}G_{\alpha b}}_{0} {}^{cc}X^{\alpha}\, {}^{cc}Y^{b} + \underbrace{{}^{vv}G_{\alpha\beta}}_{G_{\alpha\beta}} \underbrace{{}^{cc}X^{\alpha}}_{X^{\alpha}} \underbrace{{}^{cc}Y^{\beta}}_{Y^{\beta}} + \underbrace{{}^{vv}G_{\alpha\bar{\beta}}}_{0} {}^{cc}X^{\alpha}\, {}^{cc}Y^{\bar{\beta}}
\end{aligned}
$$

$$+\underbrace{{}^{vv}G_{\bar{\alpha}b}}_{0}\,{}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\,{}^{cc}Y^{b}+\underbrace{{}^{vv}G_{\bar{\alpha}\beta}}_{0}\,{}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\,{}^{cc}Y^{\beta}+\underbrace{{}^{vv}G_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}_{0}\,{}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\,{}^{cc}Y^{\bar{\beta}}$$

$$=G_{\alpha\beta}X^{\alpha}Y^{\beta}={}^{vv}\left(G(X,Y)\right)$$

elde edilir.

(0,2) Tipli Tensör Alanının Tam Liftleri

$\tilde{G}\in\Im_2^0(M_n)$, $G=G_{\alpha\beta}\left(x^{\alpha}\right)dx^{\alpha}\otimes dx^{\beta}$ izdüşümü ile tanımlı M_n üzerinde (0,2) tipli bir tensör alanı olmak üzere (x^{a},x^{α}) koordinatlarına göre,

$$\tilde{G}=\left(\tilde{G}_{ij}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & G_{\alpha\beta}\left(x^{\alpha}\right)\end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahiptir (Vishnevskii 1985). (0,2) tipli $\tilde{G}$ izdüşümlü tensör alanının $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine tam lifti

$$^{cc}\tilde{G}=\left({}^{cc}\tilde{G}_{IJ}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}G_{\alpha\beta} & G_{\alpha\beta}\\ 0 & G_{\alpha\beta} & 0\end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

şeklindeki bileşenlere sahiptir. Burada (3.46) kullanılarak $^{cc}\tilde{G}_{I'J'}=A_{I'}^{I}A_{J'}^{J}({}^{cc}G_{IJ})$ eşitliği kolaylıkla gösterilebilir (Vishnevskii 1985).

Burada

$$Det({}^{cc}G)=0$$

olduğu için aşağıdaki teoremler yazılır.

Teorem 4.2.1. $t(B_m)$ yarı tanjant demet, ^{cc}G dejenere metriğine sahiptir (V. Vishnevskii 1985).

Teorem 4.2.2. $\tilde{G}$, M_n üzerinde tanımlı (0,2) tipli izdüşümlü tensör alanı ve $\tilde{X},\tilde{Y}\in\Im_0^1(M_n)$ olmak üzere;

i) $^{cc}\tilde{G}({}^{vv}X,{}^{vv}Y)=0,$

ii) $^{cc}\tilde{G}({}^{vv}X,{}^{cc}\tilde{Y})={}^{vv}\left(G(X,Y)\right),$

iii) $^{cc}\tilde{G}({}^{cc}\tilde{X},{}^{vv}Y)={}^{vv}\left(G(X,Y)\right),$

iv) $^{cc}\tilde{G}({}^{cc}\tilde{X},{}^{cc}\tilde{Y})={}^{cc}\left(G(X,Y)\right)$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: (i) $\tilde{X},\tilde{Y}\in \Im_0^1(M_n)$ ve $\tilde{G}\in \Im_2^0(M_n)$ olmak üzere, (3.50) ve (4.2)'den,

$$
\begin{aligned}
{}^{cc}\tilde{G}({}^{vv}X,{}^{vv}Y) &= {}^{cc}\tilde{G}_{IJ}\,{}^{vv}X^{I}\,{}^{vv}Y^{J}\\
&= {}^{cc}\tilde{G}_{ab}\underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0}{}^{vv}Y^{b} + {}^{cc}\tilde{G}_{a\beta}\underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0}{}^{vv}Y^{\beta} + {}^{cc}\tilde{G}_{a\bar{\beta}}\underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0}{}^{vv}Y^{\bar{\beta}}\\
&\quad + {}^{cc}\tilde{G}_{\alpha b}\underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0}{}^{vv}Y^{b} + {}^{cc}\tilde{G}_{\alpha\beta}\underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0}{}^{vv}Y^{\beta} + {}^{cc}\tilde{G}_{\alpha\bar{\beta}}\underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0}{}^{vv}Y^{\bar{\beta}}\\
&\quad + {}^{cc}\tilde{G}_{\bar{\alpha} b}\,{}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\underbrace{{}^{vv}Y^{b}}_{0} + {}^{cc}\tilde{G}_{\bar{\alpha}\beta}\,{}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\underbrace{{}^{vv}Y^{\beta}}_{0} + \underbrace{{}^{cc}\tilde{G}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}_{0}{}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\,{}^{vv}Y^{\bar{\beta}}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(ii) $\tilde{X},\tilde{Y}\in \Im_0^1(M_n)$ ve $\tilde{G}\in \Im_2^0(M_n)$ olmak üzere; (3.49), (3.50), (3.53) ve (4.2)'den,

$$
\begin{aligned}
{}^{cc}\tilde{G}({}^{vv}X,{}^{cc}\tilde{Y}) &= {}^{cc}\tilde{G}_{IJ}\,{}^{vv}X^{I}\,{}^{cc}\tilde{Y}^{J}\\
&= {}^{cc}\tilde{G}_{ab}\underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0}{}^{cc}\tilde{Y}^{b} + {}^{cc}\tilde{G}_{a\beta}\underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0}{}^{cc}\tilde{Y}^{\beta} + {}^{cc}\tilde{G}_{a\bar{\beta}}\underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0}{}^{cc}\tilde{Y}^{\bar{\beta}}\\
&\quad + {}^{cc}\tilde{G}_{\alpha b}\underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0}{}^{cc}\tilde{Y}^{b} + {}^{cc}\tilde{G}_{\alpha\beta}\underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0}{}^{cc}\tilde{Y}^{\beta} + {}^{cc}\tilde{G}_{\alpha\bar{\beta}}\underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0}{}^{cc}\tilde{Y}^{\bar{\beta}}\\
&\quad + \underbrace{{}^{cc}\tilde{G}_{\bar{\alpha} b}}_{0}{}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\,{}^{cc}\tilde{Y}^{b} + \underbrace{{}^{cc}\tilde{G}_{\bar{\alpha}\beta}}_{G_{\alpha\beta}}\underbrace{{}^{vv}X^{\bar{\alpha}}}_{X^{\alpha}}\underbrace{{}^{cc}\tilde{Y}^{\beta}}_{Y^{\beta}} + \underbrace{{}^{cc}\tilde{G}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}_{0}{}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\,{}^{cc}\tilde{Y}^{\bar{\beta}}\\
&= G_{\alpha\beta}X^{\alpha}Y^{\beta} = {}^{vv}\big(G(X,Y)\big)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(iii) $\tilde{X},\tilde{Y}\in \Im_0^1(M_n)$ ve $\tilde{G}\in \Im_2^0(M_n)$ olmak üzere; (3.49), (3.50), (3.53) ve (4.2)'den,

$$
\begin{aligned}
{}^{cc}\tilde{G}({}^{cc}\tilde{X},{}^{vv}Y) &= {}^{cc}\tilde{G}_{IJ}\,{}^{cc}\tilde{X}^{I}\,{}^{vv}Y^{J}\\
&= {}^{cc}\tilde{G}_{ab}\,{}^{cc}\tilde{X}^{a}\underbrace{{}^{vv}Y^{b}}_{0} + {}^{cc}\tilde{G}_{a\beta}\,{}^{cc}\tilde{X}^{a}\underbrace{{}^{vv}Y^{\beta}}_{0} + \underbrace{{}^{cc}\tilde{G}_{a\bar{\beta}}}_{0}{}^{cc}\tilde{X}^{a}\,{}^{vv}Y^{\bar{\beta}}\\
&\quad + {}^{cc}\tilde{G}_{\alpha b}\,{}^{cc}\tilde{X}^{\alpha}\underbrace{{}^{vv}Y^{b}}_{0} + {}^{cc}\tilde{G}_{\alpha\beta}\,{}^{cc}\tilde{X}^{\alpha}\underbrace{{}^{vv}Y^{\beta}}_{0} + \underbrace{{}^{cc}\tilde{G}_{\alpha\bar{\beta}}}_{G_{\alpha\beta}}\underbrace{{}^{cc}\tilde{X}^{\alpha}}_{X^{\alpha}}\underbrace{{}^{vv}Y^{\bar{\beta}}}_{Y^{\beta}}\\
&\quad + \underbrace{{}^{cc}\tilde{G}_{\bar{\alpha} b}}_{0}{}^{cc}\tilde{X}^{\bar{\alpha}}\,{}^{vv}Y^{b} + {}^{cc}\tilde{G}_{\bar{\alpha}\beta}\,{}^{cc}\tilde{X}^{\bar{\alpha}}\underbrace{{}^{vv}Y^{\beta}}_{0} + \underbrace{{}^{cc}\tilde{G}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}_{0}{}^{cc}\tilde{X}^{\bar{\alpha}}\,{}^{vv}Y^{\bar{\beta}}
\end{aligned}
$$

$$= G_{\alpha\beta}X^{\alpha}Y^{\beta} = {}^{vv}\left(G(X,Y)\right)$$

elde edilir.

(iv) $\tilde{X},\tilde{Y} \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\tilde{G} \in \Im_2^0(M_n)$ olmak üzere; (3.50), (3.52), (3.53) ve (4.2)'den,

$${}^{cc}\tilde{G}({}^{cc}\tilde{X},{}^{cc}\tilde{Y}) = {}^{cc}\tilde{G}_{IJ}\,{}^{cc}\tilde{X}^{I}\,{}^{cc}\tilde{Y}^{J}$$

$$= \underbrace{{}^{cc}\tilde{G}_{ab}}_{0}\,{}^{cc}\tilde{X}^{a}\,{}^{cc}\tilde{Y}^{b} + \underbrace{{}^{cc}\tilde{G}_{a\beta}}_{0}\,{}^{cc}\tilde{X}^{a}\,{}^{cc}\tilde{Y}^{\beta} + \underbrace{{}^{cc}\tilde{G}_{a\bar{\beta}}}_{0}\,{}^{cc}\tilde{X}^{a}\,{}^{cc}\tilde{Y}^{\bar{\beta}}$$

$$+ \underbrace{{}^{cc}\tilde{G}_{\alpha b}}_{0}\,{}^{cc}\tilde{X}^{\alpha}\,{}^{cc}\tilde{Y}^{b} + \underbrace{{}^{cc}\tilde{G}_{\alpha\beta}}_{y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}G_{\alpha\beta}}\underbrace{{}^{cc}\tilde{X}^{\alpha}}_{X^{\alpha}}\underbrace{{}^{cc}\tilde{Y}^{\beta}}_{Y^{\beta}} + \underbrace{{}^{cc}\tilde{G}_{\alpha\bar{\beta}}}_{G_{\alpha\beta}}\underbrace{{}^{cc}\tilde{X}^{\alpha}}_{X^{\alpha}}\underbrace{{}^{cc}\tilde{Y}^{\bar{\beta}}}_{y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}Y^{\beta}}$$

$$+ \underbrace{{}^{cc}\tilde{G}_{\bar{\alpha}b}}_{0}\,{}^{cc}\tilde{X}^{\bar{\alpha}}\,{}^{cc}\tilde{Y}^{b} + \underbrace{{}^{cc}\tilde{G}_{\bar{\alpha}\beta}}_{G_{\alpha\beta}}\underbrace{{}^{cc}\tilde{X}^{\bar{\alpha}}}_{y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}}\underbrace{{}^{cc}\tilde{Y}^{\beta}}_{Y^{\beta}} + \underbrace{{}^{cc}\tilde{G}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}_{0}\,{}^{cc}\tilde{X}^{\bar{\alpha}}\,{}^{cc}\tilde{Y}^{\bar{\beta}}$$

$$= y^{\varepsilon}\left(\partial_{\varepsilon}G_{\alpha\beta}\right)X^{\alpha}Y^{\beta} + G_{\alpha\beta}X^{\alpha}y^{\varepsilon}\left(\partial_{\varepsilon}Y^{\beta}\right) + G_{\alpha\beta}y^{\varepsilon}\left(\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}\right)Y^{\beta}$$

$$= y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}\left(G_{\alpha\beta}X^{\alpha}Y^{\beta}\right) = {}^{cc}\left(G(X,Y)\right)$$

elde edilir.

Ayrıca, (4.1) ve (4.2)'ye göre, ${}^{cc}\tilde{G}^{*}$ ile

$${}^{cc}\tilde{G}^{*} = {}^{cc}\tilde{G} + {}^{vv}G$$

şeklindeki yeni bir (0,2) tipli izdüşümlü tensör alanı tanımlanacak olursa, bu tensör alanı $(x^{a},x^{\alpha},x^{\bar{\alpha}})$ koordinatlarına göre

$${}^{cc}\tilde{G}^{*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}G_{\alpha\beta} & G_{\alpha\beta} \\ 0 & G_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}G_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta} & G_{\alpha\beta} \\ 0 & G_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahiptir.

${}^{cc}\tilde{G}^{*}$, (0,2) tipli $\tilde{G}$ tensör alanının $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine deforme olmuş tam lifti olarak tanımlanır. (3.48)'den kolaylıkla ${}^{cc}\tilde{G}^{*}_{I'J'} = A^{I}_{I'}A^{J}_{J'}({}^{cc}\tilde{G}^{*}_{IJ})$ olduğu görülür.

İspat: Burada kolaylık adına sadece ${}^{cc}\tilde{G}^{*}_{\alpha'\beta'}$ bileşenini hesaplarsak (3.48)'den

$${}^{cc}\tilde{G}^{*}_{\alpha'\beta'} = A^{a}_{\alpha'}A^{b}_{\beta'}\underbrace{{}^{cc}\tilde{G}^{*}_{ab}}_{0} + A^{a}_{\alpha'}A^{\beta}_{\beta'}\underbrace{{}^{cc}\tilde{G}^{*}_{a\beta}}_{0} + A^{a}_{\alpha'}A^{\bar{\beta}}_{\beta'}\underbrace{{}^{cc}\tilde{G}^{*}_{a\bar{\beta}}}_{0}$$

$$+A^{\alpha}_{\alpha'}A^{b}_{\beta'}\underbrace{{}^{cc}G^{*}_{\alpha b}}_{0}+\underbrace{A^{\alpha}_{\alpha'}}_{A^{\alpha}_{\alpha'}}\underbrace{A^{\beta}_{\beta'}}_{A^{\beta}_{\beta'}}\underbrace{{}^{cc}G^{*}_{\alpha\beta}}_{y^{\varepsilon'}\partial_{\varepsilon'}G_{\alpha\beta}+G_{\alpha\beta}}+\underbrace{A^{\alpha}_{\alpha'}}_{A^{\alpha}_{\alpha'}}\underbrace{A^{\bar\beta}_{\beta'}}_{A^{\beta}_{\beta'\varepsilon'}y^{\varepsilon'}}\underbrace{{}^{cc}G^{*}_{\alpha\bar\beta}}_{G_{\alpha\beta}}$$

$$+A^{\bar\alpha}_{\alpha'}A^{b}_{\beta'}\underbrace{{}^{cc}G^{*}_{\bar\alpha b}}_{0}+\underbrace{A^{\bar\alpha}_{\alpha'}}_{A^{\alpha}_{\alpha'\varepsilon'}y^{\varepsilon'}}\underbrace{A^{\beta}_{\beta'}}_{A^{\alpha}_{\alpha'}}\underbrace{{}^{cc}G^{*}_{\bar\alpha\beta}}_{G_{\alpha\beta}}+A^{\bar\alpha}_{\alpha'}A^{\bar\beta}_{\beta'}\underbrace{{}^{cc}G^{*}_{\bar\alpha\bar\beta}}_{0}$$

$$=A^{\alpha}_{\alpha'}A^{\beta}_{\beta'}\left(y^{\varepsilon'}\partial_{\varepsilon'}G_{\alpha\beta}+G_{\alpha\beta}\right)+y^{\varepsilon'}(\partial_{\varepsilon'}A^{\beta}_{\beta'})A^{\alpha}_{\alpha'}G_{\alpha\beta}+y^{\varepsilon'}(\partial_{\varepsilon'}A^{\alpha}_{\alpha'})A^{\beta}_{\beta'}G_{\alpha\beta}$$

$$=A^{\alpha}_{\alpha'}A^{\beta}_{\beta'}\left(y^{\varepsilon'}\partial_{\varepsilon'}G_{\alpha\beta}\right)+A^{\alpha}_{\alpha'}A^{\beta}_{\beta'}G_{\alpha\beta}+y^{\varepsilon'}(\partial_{\varepsilon'}A^{\beta}_{\beta'})A^{\alpha}_{\alpha'}G_{\alpha\beta}+y^{\varepsilon'}(\partial_{\varepsilon'}A^{\alpha}_{\alpha'})A^{\beta}_{\beta'}G_{\alpha\beta}$$

$$=y^{\varepsilon'}\partial_{\varepsilon'}(A^{\alpha}_{\alpha'}A^{\beta}_{\beta'}G_{\alpha\beta})+G_{\alpha'\beta'}=y^{\varepsilon'}\partial_{\varepsilon'}G_{\alpha'\beta'}+G_{\alpha'\beta'}$$

elde edilir. Bu şekilde kolaylıkla ${}^{cc}G^{*}_{I'J'}$ nin diğer bileşenleri de bulunabilir.

Dolayısıyla,

$${}^{cc}G^{*}_{I'J'}=A^{I}_{I'}A^{J}_{J'}({}^{cc}G^{*}_{IJ})$$

elde edilir. Buradan

$$Det({}^{cc}G^{*})=0$$

olur.

Teorem 4.2.3. $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti dejenere deforme olmuş ${}^{cc}G^{*}$ metriğine sahiptir.

(0,2) Tipli Tensör Alanının Yatay Liftleri

$F\in\Im^{1}_{1}(B_m)$ için, γF vektör alanı $(x^{a},x^{\alpha},x^{\bar\alpha})$ koordinatlarına göre

$$\gamma F=(\gamma F^{I})=\begin{pmatrix}0\\0\\y^{\varepsilon}F^{\alpha}_{\varepsilon}\end{pmatrix}\tag{4.3}$$

şeklindeki bileşenlere sahiptir. Burada $(\gamma F)'=\bar{A}(\gamma F)$ olduğu (3.46) yardımı ile kolaylıkla gösterilebilir.

$S\in\Im^{0}_{3}(B_m)$ için, (0,2) tipli γS tensör alanı $(x^{a},x^{\alpha},x^{\bar\alpha})$ ve $(x^{b},x^{\beta},x^{\bar\beta})$ koordinatlarına göre

$$\gamma S=(\gamma S_{IJ})=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&y^{\varepsilon}S_{\varepsilon\alpha\beta}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\tag{4.4}$$

şeklindeki bileşenlere sahiptir. Burada $(\gamma S)' = A_{I'}^{I} A_{J'}^{J} (\gamma S)$ olduğu (3.48) yardımı ile kolaylıkla gösterilebilir.

$X \in \Im_0^1(B_m)$ izdüşümü olmak üzere, $\tilde{X} \in \Im_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanı olsun (Vishnevskii 2002). $\tilde{X}$ izdüşümlü vektör alanının $t(B_m)$ yarı-tanjant demete yatay lifti

$$^{HH}\tilde{X} = {}^{cc}\tilde{X} - \gamma(\nabla \tilde{X})$$

ile tanımlıdır.

Burada ∇, B_m diferensiyellenebilir manifoldunda simetrik afin konneksiyon belirtir.

Burada ayrıca $^{cc}\tilde{X}$ ve $\gamma(\nabla \tilde{X})$ vektör alanları $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$ koordinatlarına göre $t(B_m)$ yarı-tanjant demette sırasıyla

$$^{cc}\tilde{X} = \left({}^{cc}\tilde{X}^I\right) = \begin{pmatrix} \tilde{X}^a \\ X^\alpha \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix}, \quad \gamma(\nabla \tilde{X}) = \left(\gamma(\nabla \tilde{X})^I\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\varepsilon \nabla_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix}$$

lokal bileşenlerine sahiptir.

X^ε nin $\nabla_\alpha X^\varepsilon$ kovaryant türevi

$$(\nabla_\alpha X^\varepsilon) = \partial_\alpha X^\varepsilon + X^\beta \Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}$$

ile tanımlıdır.

$\tilde{X}$ izdüşümlü vektör alanının $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine $^{HH}\tilde{X}$ yatay lifti $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$ indirgenmiş koordinatlarına göre

$$^{HH}X = \left({}^{HH}X^I\right) = \begin{pmatrix} \tilde{X}^a \\ X^\alpha \\ -\Gamma^\alpha{}_\beta X^\beta \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

bileşenlerine sahiptir. Burada

$$\Gamma^\alpha{}_\beta = y^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta} \tag{4.6}$$

eşitliği geçerlidir.

B_m in U komşuluğunda $G_{\alpha\beta}$, $G = G_{\alpha\beta}\left(x^{\alpha}\right) dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta}$ lokal bileşenlerine sahip olan $\tilde{G} \in \Im_2^0(M_n)$ izdüşümlü tensör alanının $t(B_m)$ yarı-tanjant demete ${}^{HH}\tilde{G}$ yatay lifti $(x^a, x^{\alpha}, x^{\bar{\alpha}})$ ve $(x^b, x^{\beta}, x^{\bar{\beta}})$ indirgenmiş koordinatlarına göre

$$ {}^{HH}\tilde{G} = {}^{cc}\tilde{G} - \nabla_{\gamma}\tilde{G} = {}^{cc}\tilde{G} - \gamma[\nabla\tilde{G}] \tag{4.7}$$

ile tanımlıdır. Buradaki (0,2) tipli $\gamma[\nabla\tilde{G}]$ tensör alanı

$$\gamma[\nabla\tilde{G}] = y^{\varepsilon}\nabla_{\varepsilon}G_{\alpha\beta}dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta} \tag{4.8}$$

ile tanımlıdır.

(4.2), (4.4), (4.7) ve (4.8) kullanılarak ${}^{HH}\tilde{G}$ yatay liftinin $(x^a, x^{\alpha}, x^{\bar{\alpha}})$ koordinatlarına göre $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinde

$$ {}^{HH}\tilde{G} = ({}^{HH}\tilde{G}_{IJ}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\sigma}{}_{\alpha}G_{\sigma\beta} + y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\sigma}{}_{\beta}G_{\alpha\sigma} & G_{\alpha\beta} \\ 0 & G_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

bileşenlerine sahip olduğu görülür. Burada $G_{\alpha\beta}$ lar $G \in \Im_2^0(M_n)$ tensör alanının, $\Gamma_{\varepsilon}{}^{\sigma}{}_{\alpha}$ $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti üzerindeki ∇ nın bileşenleridir. $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta}$ lar ise (4.6)'daki gibi tanımlıdır.

İspat: (4.2), (4.4), (4.7) ve (4.8) kullanılarak

$$ {}^{HH}\tilde{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\sigma}{}_{\alpha}G_{\sigma\beta} + y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\sigma}{}_{\beta}G_{\alpha\sigma} & G_{\alpha\beta} \\ 0 & G_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}G_{\alpha\beta} - y^{\varepsilon}(\partial_{\varepsilon}G_{\alpha\beta} - \Gamma_{\varepsilon}{}^{\sigma}{}_{\alpha}G_{\sigma\beta} - \Gamma_{\varepsilon}{}^{\sigma}{}_{\beta}G_{\alpha\sigma}) & G_{\alpha\beta} \\ 0 & G_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}G_{\alpha\beta} & G_{\alpha\beta} \\ 0 & G_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^{\varepsilon}\nabla_{\varepsilon}G_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^{cc}\tilde{G} - \gamma[\nabla\tilde{G}]$$

elde edilir.

Teorem 4.3.1. $\tilde{G}$, M_n de (0,2) tipli izdüşümlü bir tensör alanı ve $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere,

i) ${}^{HH}\tilde{G}({}^{vv}X, {}^{vv}Y) = 0,$

ii) ${}^{HH}\tilde{G}({}^{HH}\tilde{X},\, {}^{HH}\tilde{Y}) = {}^{HH}\big(G(X,Y)\big),$

iii) ${}^{HH}\tilde{G}({}^{vv}X,\, {}^{HH}\tilde{Y}) = {}^{vv}\big(G(X,Y)\big),$

iv) ${}^{HH}\tilde{G}({}^{HH}\tilde{X},\, {}^{vv}Y) = {}^{vv}\big(G(X,Y)\big)$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: (i) $\tilde{X},\tilde{Y} \in \Im^1_0(M_n)$ ve $\tilde{G} \in \Im^0_2(M_n)$ olmak üzere, (3.50) ve (4.9)'dan,

$$
\begin{aligned}
{}^{HH}\tilde{G}({}^{vv}X,\, {}^{vv}Y) &= {}^{cc}\tilde{G}_{IJ}\, {}^{vv}X^{I}\, {}^{vv}Y^{J} \\
&= {}^{HH}\tilde{G}_{ab}\, \underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0}\, {}^{vv}Y^{b} + {}^{HH}\tilde{G}_{a\beta}\, \underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0}\, {}^{vv}Y^{\beta} + {}^{HH}\tilde{G}_{a\bar{\beta}}\, \underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0}\, {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
&\quad + {}^{HH}\tilde{G}_{\alpha b}\, \underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0}\, {}^{vv}Y^{b} + {}^{HH}\tilde{G}_{\alpha\beta}\, \underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0}\, {}^{vv}Y^{\beta} + {}^{HH}\tilde{G}_{\alpha\bar{\beta}}\, \underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0}\, {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
&\quad + {}^{HH}\tilde{G}_{\bar{\alpha}b}\, {}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\, \underbrace{{}^{vv}Y^{b}}_{0} + {}^{HH}\tilde{G}_{\bar{\alpha}\beta}\, {}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\, \underbrace{{}^{vv}Y^{\beta}}_{0} + \underbrace{{}^{HH}\tilde{G}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}_{0}\, {}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\, {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(ii) $\tilde{X},\tilde{Y} \in \Im^1_0(M_n)$ ve $\tilde{G} \in \Im^0_2(M_n)$ olmak üzere, (4.5) ve (4.9)'dan,

$$
\begin{aligned}
{}^{HH}\tilde{G}({}^{HH}\tilde{X},\, {}^{HH}\tilde{Y}) &= {}^{HH}\tilde{G}_{IJ}\, {}^{HH}\tilde{X}^{I}\, {}^{HH}\tilde{Y}^{J} \\
&= \underbrace{{}^{HH}\tilde{G}_{ab}}_{0}\, {}^{HH}\tilde{X}^{a}\, {}^{HH}\tilde{Y}^{b} + \underbrace{{}^{HH}\tilde{G}_{a\beta}}_{0}\, {}^{HH}\tilde{X}^{a}\, {}^{HH}\tilde{Y}^{\beta} + \underbrace{{}^{HH}\tilde{G}_{a\bar{\beta}}}_{0}\, {}^{HH}\tilde{X}^{a}\, {}^{HH}\tilde{Y}^{\bar{\beta}} \\
&\quad + \underbrace{{}^{HH}\tilde{G}_{\alpha b}}_{0}\, {}^{HH}\tilde{X}^{\alpha}\, {}^{HH}\tilde{Y}^{b} + {}^{HH}\tilde{G}_{\alpha\beta}\, {}^{HH}\tilde{X}^{\alpha}\, {}^{HH}\tilde{Y}^{\beta} + {}^{HH}\tilde{G}_{\alpha\bar{\beta}}\, {}^{HH}\tilde{X}^{\alpha}\, {}^{HH}\tilde{Y}^{\bar{\beta}} \\
&\quad + \underbrace{{}^{HH}\tilde{G}_{\bar{\alpha}b}}_{0}\, {}^{HH}\tilde{X}^{\bar{\alpha}}\, {}^{HH}\tilde{Y}^{b} + {}^{HH}\tilde{G}_{\bar{\alpha}\beta}\, {}^{HH}\tilde{X}^{\bar{\alpha}}\, {}^{HH}\tilde{Y}^{\beta} + \underbrace{{}^{HH}\tilde{G}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}_{0}\, {}^{HH}\tilde{X}^{\bar{\alpha}}\, {}^{HH}\tilde{Y}^{\bar{\beta}}
\end{aligned}
$$

$$= \left(y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\sigma}{}_{\alpha}G_{\sigma\beta} + y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\sigma}{}_{\beta}G_{\alpha\sigma}\right)X^{\alpha}Y^{\beta} + G_{\alpha\beta}X^{\alpha}\left(-y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\sigma}Y^{\sigma}\right) + G_{\alpha\beta}Y^{\beta}\left(-y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\sigma}X^{\sigma}\right)$$

$$= {}^{cc}\big(G(X,Y)\big) - \gamma[\nabla\big(G(X,Y)\big)]$$

$$= {}^{HH}\big(G(X,Y)\big)$$

elde edilir.

(iii) $\tilde{X},\tilde{Y} \in \Im^1_0(M_n)$ ve $\tilde{G} \in \Im^0_2(M_n)$ olmak üzere; (3.49), (3.50), (4.5) ve (4.9) kullanılarak,

$$
{}^{HH}\tilde{G}({}^{vv}X, {}^{HH}\tilde{Y}) = {}^{HH}\tilde{G}_{IJ}\, {}^{vv}X^{I}\, {}^{HH}\tilde{Y}^{J}
$$

$$
= {}^{HH}\tilde{G}_{ab} \underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0} {}^{HH}\tilde{Y}^{b} + {}^{HH}\tilde{G}_{a\beta} \underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0} {}^{HH}\tilde{Y}^{\beta} + {}^{HH}\tilde{G}_{a\bar{\beta}} \underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0} {}^{HH}\tilde{Y}^{\bar{\beta}}
$$

$$
+ {}^{HH}\tilde{G}_{\alpha b} \underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0} {}^{HH}\tilde{Y}^{b} + {}^{HH}\tilde{G}_{\alpha\beta} \underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0} {}^{HH}\tilde{Y}^{\beta} + {}^{HH}\tilde{G}_{\alpha\bar{\beta}} \underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0} {}^{HH}\tilde{Y}^{\bar{\beta}}
$$

$$
+ \underbrace{{}^{HH}\tilde{G}_{\bar{\alpha} b}}_{0} {}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\, {}^{HH}\tilde{Y}^{b} + {}^{HH}\tilde{G}_{\bar{\alpha}\beta}\, {}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\, {}^{HH}\tilde{Y}^{\beta} + \underbrace{{}^{HH}\tilde{G}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}_{0} {}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\, {}^{HH}\tilde{Y}^{\bar{\beta}}
$$

$$
= G_{\alpha\beta} X^{\alpha} Y^{\beta} = {}^{vv}\big(G(X,Y)\big)
$$

elde edilir.

(iv) $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\tilde{G} \in \Im_2^0(M_n)$ olmak üzere; (3.49), (3.50), (4.5) ve (4.9) kullanılarak,

$$
{}^{HH}\tilde{G}({}^{HH}\tilde{X}, {}^{vv}Y) = {}^{HH}\tilde{G}_{IJ}\, {}^{HH}\tilde{X}^{I}\, {}^{vv}Y^{J}
$$

$$
= \underbrace{{}^{HH}\tilde{G}_{ab}}_{0} {}^{HH}\tilde{X}^{a}\, {}^{vv}Y^{b} + \underbrace{{}^{HH}\tilde{G}_{a\beta}}_{0} {}^{HH}\tilde{X}^{a}\, {}^{vv}Y^{\beta} + \underbrace{{}^{HH}\tilde{G}_{a\bar{\beta}}}_{0} {}^{HH}\tilde{X}^{a}\, {}^{vv}Y^{\bar{\beta}}
$$

$$
+ \underbrace{{}^{HH}\tilde{G}_{\alpha b}}_{0} {}^{HH}\tilde{X}^{\alpha}\, {}^{vv}Y^{b} + {}^{HH}\tilde{G}_{\alpha\beta}\, {}^{HH}\tilde{X}^{\alpha} \underbrace{{}^{vv}Y^{\beta}}_{0} + {}^{HH}\tilde{G}_{\alpha\bar{\beta}}\, {}^{HH}\tilde{X}^{\alpha}\, {}^{vv}Y^{\bar{\beta}}
$$

$$
+ \underbrace{{}^{HH}\tilde{G}_{\bar{\alpha} b}}_{0} {}^{HH}\tilde{X}^{\bar{\alpha}}\, {}^{vv}Y^{b} + {}^{HH}\tilde{G}_{\bar{\alpha}\beta}\, {}^{HH}\tilde{X}^{\bar{\alpha}} \underbrace{{}^{vv}Y^{\beta}}_{0} + \underbrace{{}^{HH}\tilde{G}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}_{0} {}^{HH}\tilde{X}^{\bar{\alpha}}\, {}^{vv}Y^{\bar{\beta}}
$$

$$
= G_{\alpha\beta} X^{\alpha} Y^{\beta} = {}^{vv}\big(G(X,Y)\big)
$$

elde edilir.

SONUÇ

(1) Bu tezde; Yarı-tanjant (pull-back) demete (0,2) tipli tensor alanlarının dikey, tam ve yatay vb. liftleri tanımlandı.

(2) Yarı-tanjant (pull-back) demete tanımlı (0,2) tipli tensor alanlarının dikey, tam ve yatay vb. liftlerle ilgili çeşitli problemler araştırıldı.

(3) Yarı-tanjant demette çeşitli metrikler sunulmuştur.

(4) Yarı-tanjant demetteki elde edilen yeni dejenere (singüler) metrikler ile gelecekte fizik alanında ve diferensiyel geometride çok sayıda çalışmalar yapılacaktır.

KAYNAKLAR

Ay, S., 2013. Yarı Tanjant Demet. (Y. Lisans Tezi), Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi.

Bishop, R.L. and Goldberg S.I., 1968. Tensor Analysis on Manifolds. The Macmillan Company, p.19-135, New York.

Dombrowski, P., 1962. On the Geometry of the Tangent Bundle. Journal für die reine und angewandte Mathematik. 210: 73-88.

Duc, T.V., 1979. Structure presque-transverse. J. Diff . Geom., 14, No:2, 215-219.

Eker, S., 2019. Seiberg-Witten-like equations on the strictly pseudoconvex CR-3 manifolds, Bull. Korean Math. Soc., 56 (6), pp. 1551-1567.

Eker, S., 2019. Seiberg-Witten-like equations on the strictly-pseudoconvex CR-7 manifolds, Miskolc Mathematical Notes, 20 (1) , pp. 233-243.

Husemoller, D., 1994. Fibre Bundles. Springer, New York.

Kandatu, A., 1966. Tangent bundle of a manifold with a non-linear connection. Kodai Mathematical Seminar Reports. 18, no. 4, 259-270.

Kobayashi, S. and Nomizu K., 1963. Foundations of differential geometry. Vol. I, Interscience Publishers, New York-London.

Lawson, H.B. and Michelsohn M.L., 1989. Spin Geometry. Princeton University Press., Princeton.

Ledger, A.J. and Yano K., 1965. The Tangent Bundle of a Locally Symmetric Space. Jour. London Math. Soc., 40, 487-492.

Morimoto, A., 1970. Liftings of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles of Higher order. Nagoya Math. Jour., 40, 99-120.

Ostianu, N.M., 1974. Step-fibred spaces. Tr. Geom. Sem., 5, VINITI, 259–309, Moscow.

Pontryagin, L.S., 1950. Characteristic classes on differentiable manifolds. Amer. Math. Soc. Translation 1950 (32), 72 pp. (1950).

Poor, W.A., 1981. Differential Geometric Structures. McGraw-Hill, New York.

Ricci, G. and Levi-Civita, T., 1900. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. Mathematische Annalen. 54 (1–2): 125–201.

Salimov, A.A. and Kadıoğlu E., 2000. Lifts of derivations to the semitangent bundle. Turk J. Math, 24, 259-266.

Salimov, A.A. ve Mağden A., 2008. Diferensiyel Geometriye Giriş. Atatürk Üniversitesi.

Sasaki, S., 1958, On Differential Geometry of Tangent Bundle of Riemannian Manifolds, I, Tohoku Math, Jour., 14, 146-155.

Steenrod, N. 1951. The Topology of Fibre Bundles. Princeton University Press., Princeton.

Vishnevskii, V.V., 2002. Integrable affinor structures and their plural interpretations. Geometry, 7.J. Math. Sci., 108, no. 2, 151-187, New York.

Vishnevskii, V.V., Shirokov A.P. and Shurygin V.V., 1985. Spaces over Algebras. Kazan. Kazan Gos. Univ. Russian.

Voigt, W., 1898. The fundamental physical properties of crystals in an elementary presentation, p. 20, Leipzig, Germany.

Yano, K. and Ako M., 1968. On certain operators associated with tensor fields. Kodai Math. Sem. Rep., 20, 414-436.

Yano, K. and Ishihara S., 1967. Horizontal Lifts of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles. Jour. Math. and Mech., 16, 1015-1030.

Yano, K. and Ishihara S., 1973. Tangent and Cotangent Bundles. Marcel Dekker, Inc., New York.

Yano, K. and Kobayashi, S., 1966, Prolongations of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles, I. General Theory, Jour. Math. Soc. Japan, 18, 194-210.

Yıldırım, F. and Simsek M., 2020. Lifts of (0,2) tensor fields in the Semi-Tangent Bundle. TWMS J. App. and Eng. Math., 10, 866-877.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Merve Gül ŞİMŞEK
Doğum tarihi:	16.07.1992
Doğum Yeri:	Erzurum
Uyruğu:	T.C
Tel:	05316554319
E-mail:	mervegul.simsek@gmail.com
Eğitim	
Lise:	Oltu Anadolu Öğretmen Lisesi
Lisans:	Atatürk Üniversitesi Matematik Öğretmenliği
Yüksek lisans:	Atatürk Üniversitesi
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	İyi
Tezden Üretilmiş Yayınlar	
1. Yıldırım, F. and Simsek M., 2020. Lifts of (0,2) tensor fields in the Semi Tangent Bundle. TWMS J. App. and Eng. Math., 10, 866-877.	