ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PH EĞRİLERİ VE UYGULAMALARI

Çağla RAMİS

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2013

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

26/12/2013

Çağla RAMİS

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PH EĞRİLERİ VE UYGULAMALARI

Çağla RAMİS

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tezde gerekli olan bazı kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Öklid uzayında Pisagor-hodograf (PH) eğrisinin genel tanımı verilip, iki ve üç boyutlu uzaylardaki PH eğrilerinin özelikleri incelenmiştir ve PH eğrilerinin helis eğrileri ile arasındaki yakın ilişki verilmiştir. Ayrıca bu uzaylarda çeşitli yöntemler kullanılarak PH eğrileri üretilmiştir.

Dördüncü bölümde, Pisagor-hodograf eğrileri Minkowski metriğine göre tanımlanmış ve MPH olarak adlandırılmıştır. İki ve üç boyutlu Minkowski uzayındaki MPH eğrilerinin karakterizasyonları çeşitli yöntemlerle verilmiştir ve bu eğriler için önemli sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra izdüşüm fonksiyonlarından yaralanılarak düzlemsel ve uzaysal MPH eğrileri elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, PH eğrilerinin uygulama alanlarındaki öneminden bahsedilmiş, dahası Öklid ve Minkowski uzayında PH eğrileri için elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Aralık 2013, 59 sayfa

Anahtar Kelimeler: Polinom eğrisi, hodograf, Pisagor-hodograf eğrisi, kuaterniyon, Minkowski Pisagor-hodograf eğrisi, bölünmüş kuaterniyon, helis eğrisi, izdüşüm.

ABSTRACT

Master Thesis

PH CURVES AND APPLICATIONS

Çağla RAMİS

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter contains some notions, definitions and theorems which are needed in the thesis.

In the third chapter, given the general definition of Pythagorean-hodograph (PH) curves in Euclidean space, two- and three-dimensional space curve's characteristics have been examined,then given the close relationship between the helical curves and them. Also, in these spaces PH curves has been generated using several methods.

In the fourth chapter, firstly Pythagorean-hodograph curves have been defined according to Minkowski metric, then briefly called MPH curves. Representations of two- and three-dimensional MPH curves have been given by several ways and obtained significant results for these curves. Then, with the help of the projection functions planar and spatial MPH curves have been gained succesfully.

In the fifth chapter, the importance of PH curves has mentioned in application areas, moreover conclusions which are obtained for PH curves are given in Euclidean and Minkowski spaces.

December 2013, 59 pages

Key Words: Polynomial curve, hodograph, Pythagorean-hodograph curve, quaternion, Minkowski Pythagorean-hodograph curve, split quaternion, helix curve, projection.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşmasında beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek çalışmanın ilerlemesinde katkıda bulunan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI'ya (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), hayatım boyunca yanımda olduğu gibi çalışmalarım süresince de fedakarlıklar göstererek beni destekleyen aileme en içten duygularımla teşekkür ederim.

Bu tez "TÜBİTAK-2228 Son Sınıf Lisans Öğrencileri Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı" tarafından desteklenmiştir.

Çağla RAMİS
Ankara, Aralık 2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\tilde{\mathbb{H}}$	Bölünmüş kuaterniyon halkası
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
H	Hiperbolik sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{H}$	Kuaterniyon halkası
$\mathbb{R}^n$	$n-$boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^n_k$	$n-$boyutlu, k indisli, Minkowski uzayı
$\|,\|$	Norm
$\alpha(t)$	Polinom eğrisi
$\mathbb{R}[t]$	Reel katsayılı polinomlar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
T_α	α eğrisinin teğet vektörü
α'	α eğrisinin hodografı
σ	α eğrisinin hodograf polinomu

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Matematikte, en eski teoremlerden biri olan Pisagor teoremi MÖ 6. YY' da Yunan filozof ve matemetikçi Pisagor'a atfen isimlendirilmiş olup bir dik üçgenin iki dik kenarı ile hipotenüsü arasında verilen

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1.1}$$

bağıntısıdır. (1.1) denklemindeki a, b ve c tam sayılarına Pisagor üçlüleri adı verilir. Pisagor teoreminin bilinen ilk ispatı Öklid'in elementler kitabında verilmiştir. Pisagor üçlülerinin varlığı için verilen temel karakterizasyon

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2 \tag{1.2}$$

dir.

Pisagor koşulunu sağlayan a, b ve c tam sayıları için verilen (1.2) eşitliklerinde u ve v aralarında asal tam sayılarının varlığı 1964 yılında Solla Price tarafından antik yunan bir tabletin çözümlenmesiyle gözler önüne serilmiştir.

Şekil 1.1 Pisagor üçlüleri tableti

Pisagor ile ilerleyen geometri Descartes'in 1637 yılında yayınladığı La géométrie kitabıyla cebirle birleşmiş ve koordinat, yüksek boyut vd. kavramlar ortaya çıkmıştır. Bunlarla birlikte ortaya çıkan ilk merak ise eğrilerin yay uzunluğunu hesaplama problemi olmuştur.

Leibnitz ve Newton cebiri ile eğri uzunluğunun varlığı ortaya konulmuş, ölçümü ise Gauss tümleme formülü ile eğri belirli aralıklara bölünerek teğet doğruların uzunluklarının hesabıyla yapılmıştır. Daha sonra bu formül yardımıyla bir $\alpha(t) \in \mathbb{R}^n$ eğrisinin yay parametresinin fonksiyonu

$$s(t) = \int_0^t \parallel \alpha'(x) \parallel dx = \int_0^t \sqrt{\alpha_1'^2(x) + ... + \alpha_n'^n(x)}dx \tag{1.3}$$

(1.3) denklemi ile elde edilerek her regüler eğrinin birim hızlı bir eğriye dönüştürülebileceği ispatlanmıştır. Fakat bu dönüşüm teorik olarak güçlü olsa da pratikte $\alpha'(x)$ fonksiyonunun normunun integral hesabı her eğri için kesin olarak bulunamamaktadır. Eğri yay parametresi $s(t)$ ye yapılan ideal yaklaşım, eğrinin iç geometrisini aydınlatmaya yardımcı olan bir varsayımdır.

Eğrilerin tanımı polinomlar, trigonometrik fonksiyonlar vd. ile verilebilir. Polinomsal eğriler özellikle bilgisayar, robotik, dizayn, navigasyon ve bir çok alanda sıklıkla kullanılan eğri ailesidir. Bunun en etkili nedeni ise bu eğrilerin cebirsel kullanım kolaylığı ve en yakın yay uzunluğu hesabı problemine cevap vermesidir.

Kubota (1972) nın polinomlar için (1.2) denklemlerine benzer Pisagor koşulunu vermesiyle uzunluğu net olarak hesaplanabilen eğri düşüncesi ortaya çıkmış oldu. Farouki ve Sakkalis (1990), Kubota' nın çalışması ve (1.3) denklemini göz önüne alarak Pisagor-hodograf (PH) eğrilerini tanımlamışlar ve düzlemsel PH eğrileri için karakterizasyonu vermişlerdir. Sonrasında Farouki (1992), uzunluğu tam olarak hesaplanabilen düzlemsel PH eğrilerinin tasarım ve yaklaşım geometrisi için kullanımını göstermiştir. Ayrıca 1994 de düzlemsel PH eğrileri için $z \rightarrow z^2$ konformal dönüşümü yardımıyla komplex sayı temsilini vermiştir.

Dietz vd. (1993), polinomlar için üç boyutlu uzayda kısmi Pisagor koşulunu vermesiyle, Farouki ve Sakkalis (1994), uzaysal PH eğri karakterizasyonunu yapmıştır. Elde edilen karakterizasyonlar elemanter işlemler sonucu ortaya çıkmıştır, geometrik yorumunu Hamilton tarafından oluşturulan ve uzaysal dönmeleri karaktere eden kuaterniyonlarla Farouki (2006) verilmiştir. En genel sonuçlar ve PH eğrilerinin helis eğrileri ile olan ilişkisi Farouki (2008) tarafından elde edilmiştir.

Moon (1999) ise PH eğrilerini Minkowski metriğine göre ifade edip Minkowski Pisagor-hodograf (MPH) eğrilerini tanımlamıştır ve eğrileri karakterize etmek için kürenin steografik izdüşümünü kullanmıştır.

Biz de bu çalışmalardan yararlanarak iki ve üç boyutlu Öklid ve Minkowski uzayında PH eğrileri ve uygulamaları üzerinde durduk, yeni sonuçlar ve formüller elde ettik. Helis eğrileri ve PH eğrileri arasındaki yakın ilişkiyi göz ününe alarak uzaysal bir PH eğrisinden düzlemsel PH eğrisi üretme yöntemi elde ettik. Özellikle Öklid uzayında PH eğrisi için verilen geometrik karakterizasyonlar, Minkowski uzayında MPH eğrisi için verilmediğinden biz de bu eksikliği düzlemsel MPH eğrileri için polinomsal hiperbolik sayılar ve uzaysal MPH eğrileri için ise polinomsal bölünmüş kuaterniyonlar yardımıyla verdik. Dahası, Minkowski uzayında helis eğrisi ve düzlemsel MPH eğrileri arasında izdüşüm fonksiyonlarından yararlanarak eğri üretme yöntemi oluşturduk ve örnekler üzerinde uygulayarak gösterdik.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışma boyunca yararlanılacak bazı tanımlar ve temel kavramlar verilecektir.

2.1 Öklid Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1.1. ***(Topoloji)*** X bir cümle olsun. X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. τ koleksiyonu

$i.$ X , $\emptyset \in \tau$,

$ii.$ $\forall\ A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$,

$iii.$ $A_i \in \tau,\ i \in I,\ \bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$

önermelerini doğrularsa τ cümlesine, X üzerinde bir topolojidir denir (Kreyszig 1959).

Tanım 2.1.2. ***(Topolojik uzay)*** Bir X cümlesi ve üzerindeki τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir (Kreyszig 1959).

Tanım 2.1.3. ***(Hausdorff uzayı)*** (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi farklı iki noktaları için, X de, sırası ile, P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak biçimde bulunabilirse X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir (Kreyszig 1959).

Tanım 2.1.4. ***(Homeomorfizim)*** X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir

$$f : X \to Y$$

fonksiyonu sürekli ise ve bu fonksiyonun tersi f^{-1} var ve sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizim veya topolojik dönüşüm denir (Kreyszig 1959).

Tanım 2.1.5. ***(Topolojik manifold)*** M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir $n-$boyutlu topolojik manifolddur denir :

M_1. M bir Hausdorff uzayıdır,

M_2. M nin her bir açık alt cümlesi $\mathbb{E}^n$ e veya $\mathbb{E}^n$ nin bir açık alt cümlesine homeomorftur,

M_3. M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir (Kreyszig 1959).

Tanım 2.1.6. ***(Harita)*** M bir topolojik manifold olsun. $P \in M$ noktasının M deki bir açık komşuluğu, $\mathbb{E}^n$ in bir U açık alt cümlesine homeomorf olarak alınabilir. Bu homeomorfizimi

$$\psi : U \to V$$

ile gösterelim. (U, ψ) ikilisine M nin P noktasındaki bir haritası veya koordinat komşuluğu denir (Kreyszig 1959).

Tanım 2.1.7. ***(Atlas)*** M bir topolojik $n-$manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ yazılır. E^n de U_α ya bir ψ_α homeomorfizimi altında homeomorf olan bir açık cümle U_α olsun. Böylece ortaya çıkan (U_α, ψ_α) haritalarının $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ koleksiyonuna bir atlas (koordinat komşuluğu sistemi) denir (Kreyszig 1959).

Tanım 2.1.8. ***(Diferensiyellenebilir yapı)*** Bir topolojik $n-$manifold M ve M nin bir atlası $S = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ olsun. Eğer S atlası için, $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere, $\forall \alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler S ye C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. S atlası M üzerinde C^k sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı denir (Kreyszig 1959).

Tanım 2.1.9. ***(Afin Uzay)*** A boş olmayan bir cümle, V de $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bir

$$\psi : A \times A \to V$$

dönüşümü $\forall P, Q, R \in A$ için

$$(P, Q) \to \psi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer, aşağıdaki iki aksiyom sağlanıyorsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir (Struik 1988).

Tanım 2.1.10. ***(Reel iç çarpım uzayı)*** $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ve V de bir vektör uzayı olmak üzere, V de bir

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

$\forall u, v \in V$ için

$$(u, v) \to \langle , \rangle (u, v) = \langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$$

iç çarpım fonksiyonu tanımlanabilirse, V vektör uzayına iç çarpım uzayı denir (Struik 1988).

Tanım 2.1.11. ***(Öklid uzayı)*** $n-$ boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olmak üzere, V ile birleştirilmiş bir A afin uzayına, Öklid uzayı denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir (Struik 1988).

Tanım 2.1.12. ***(Standart iç çarpım)*** $n-$ boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ de

$\forall u = (u_1, u_2, ..., u_n), v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{E}^n$ için

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir (Struik 1988).

Tanım 2.1.13. ***(Norm)*** $n-$ boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ de $\forall u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{E}^n$ için

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona x vektörünün normu denir (Struik 1988).

Tanım 2.1.14. ***(Vektörel çarpım)*** $3-$ boyutlu Öklid uzayı E^3 de $\forall u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ için Öklid vektörel çarpımı

$$u \times v = (u_2v_3 - v_2u_{3,}u_3v_1 - v_3u_{1,}u_1v_2 - v_1u_2)$$

şeklinde tanımlanır (Struik 1988).

Tanım 2.1.15. (Eğri) $I, \mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere, $\alpha : I \to \mathbb{E}^{n+1}$ biçiminde C^k sınıfından bir α dönüşümüne, $\mathbb{E}^{n+1}$ uzayı içinde k. mertebeden bir eğri denir ve $\alpha \in C^k$ ile gösterilir (Struik 1988).

Tanım 2.1.16. $\mathbb{E}^{n+1}$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \to \mathbb{E}^{n+1}$ fonksiyonunun Öklidiyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}),\ \alpha(t) \in M \\ &\text{ve} \\ \alpha^{'}(t) &= (\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}, \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}, ..., \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial t}) \end{aligned}$$

dır. $\alpha^{'}(t)$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında, (I, α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir (Kreyszig 1959).

Tanım 2.1.17. $\mathbb{E}^{n+1}$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için,

$$\left\|\alpha^{'}(s)\right\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α) ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay-parametresi adı verilir (Kreyszig 1959).

Tanım 2.1.18. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (Kreyszig 1959).

Teorem 2.1.1. $\mathbb{E}^n$ de regüler her eğrinin, birim hızlı olacak şekilde bir koordinat komşuluğu vardır (Kreyszig 1959).

Tanım 2.1.19. $M \subset \mathbb{E}^{n+1}$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\Psi = \left\{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\right\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall\alpha^{(k)}, k > r$, için;

$$\alpha^{(k)} \in Sp\{\Psi\}$$

olmak üzere, Ψ den elde edilen $\{T, N_1, ..., N_{r-1}\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{T(m), N_1(m), ..., N_{r-1}(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet $r-$ayaklısı denir. Herbir T ve N_i, $1 \leq i \leq r-1$, vektörlerine de Serret-Frenet vektör alanı adı verilir (Kreyszig 1959).

Teorem 2.1.2. $M \subset \mathbb{E}^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet $3-$ayaklısı, $\{T(t), N(t), B(t)\}$ ise

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \ \alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} \\ N(t) &= B(t) \wedge T(t) \\ B(t) &= \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} \end{aligned} \tag{2.1}$$

dir (Kreyszig 1959).

Tanım 2.1.20. $M \subset \mathbb{E}^{n+1}$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet $r-$ayaklısı $\{T = N_0, N_1, ..., N_{r-1}\}$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} k_i :\ & I \to \mathbb{R} \quad , 1 \leq i < r \\ & t \to \ k_i(t) = \left\langle N'_{i-1}(t), N_i(t)\right\rangle \end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin $i-$yinci eğrilik fonksiyonu ve $t \in I$ için $k_i(t)$ reel sayısına da $\alpha(t)$ noktasında M nin $i-$yinci eğriliği denir (Kreyszig 1959).

Teorem 2.1.3 $M \subset \mathbb{E}^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki M eğrisinin 1. eğrilik fonksiyonu $k_1 = \kappa$, 2. eğrilik fonksiyonu $k_2 = \tau$

$$\begin{array}{c} \kappa(t) = \frac{\|\alpha^{'}(t)\times\alpha^{''}(t)\|}{\|\alpha^{'}(t)\|^3} \\ \tau(t) = \frac{\det(\alpha^{'}(t),\alpha^{''}(t),\alpha^{'''}(t))}{\|\alpha^{'}(t)\times\alpha^{''}(t)\|^2} \end{array} \tag{2.3}$$

dir (Kreyszig 1959).

Teorem 2.1.4. $M \subset \mathbb{E}^{n+1}$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.
$s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki $i-$yinci eğriliği $k_i(s)$ ve Frenet $(n+1)-$ayaklısı $\{T(s), N_1(s), ..., N_n(s)\}$ ise;

$$\begin{aligned} T'(s) &= k_1(s)N_1(s) \qquad (2.4) \\ N_i'(s) &= -k_i(s)N_i(s) + k_{i+1}(s)N_{i+1}(s), \ 1 \leq i < n+1 \\ N_n'(s) &= -k_n(s)N_{n-1}(s) \end{aligned}$$

dir (Kreyszig 1959).

$M \subset \mathbb{E}^3$ özel halinde (2.4) denklemleri

$$\begin{aligned} T^{'}(s) &= \kappa(s)N(s) \qquad (2.5) \\ N^{'}(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)N(s) \\ B^{'}(s) &= -\tau(s)N(s) \end{aligned}$$

dir.

2.2 Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.2.1. ***(Skalar çarpım uzayı)*** V bir reel vektör uzayı olmak üzere, V üzerinde tanımlı

$$g : V \times V \to V$$

dönüşümü bilineer, simetrik ve nondegenere ise g ye V üzerinde bir *skalar çarpım,* bu durumda V vektör uzayına da bir *Skalar çarpım uzayı* denir (O'Neil 1983).

Tanım 2.2.2. ***(Simetrik bilineer formun indeksi)*** V bir skalar çarpım uzayı, W da üzerinde skalar çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu alt uzayı olsun. Bu durumda W nın boyutuna g skalar çarpımının *indeksi* denir. g skalar çarpımının indeksi k ise $0 \leq k \leq boyV$ dir. Ayrıca V skalar çarpımının indeksi, üzerinde tanımlı g skalar çarpımının indeksi olarak tanımlıdır (O'Neil 1983).

Tanım 2.2.3 ***(Yarı Öklidiyen uzay)*** $\mathbb{R}^n$, $n-$ boyutlu standart vektör uzayı üzerinde $\forall p \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall u_p, v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ için

$$\langle u_p, v_p \rangle = \sum_{i=1}^{n-m} u_i v_i - \sum_{i=n-m+1}^{n} u_i v_i \tag{2.6}$$

eşitliğiyle verilen k indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya *yarı Öklidiyen uzay* denir ve $\mathbb{E}_k^n$ ile gösterilir. Burada $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, u_i ve v_i, sırasıyla u_p ve v_p tanjant vektörlerin bileşenleridir (O'Neil 1983).

Tanım 2.2.4. ***(Minkowski uzayı)*** $\mathbb{E}_k^n$ yarı Öklidiyen uzayında $k = 1$ ve $n \geq 2$ ise $\mathbb{E}_1^n$ yarı Öklidiyen uzayına *n-boyutlu Minkowski uzayı* denir (O'Neil 1983).

Tanım 2.2.5. ***(Spacelike, Timelike, Lightlike(null) vektör)*** $\forall v \in \mathbb{E}_1^n$ için eğer,

i. $\langle v, v \rangle > 0$ veya $v = 0$ ise v ye spacelike vektör,

ii. $\langle v, v \rangle < 0$ ise v ye timelike vektör,

iii. $\langle v, v \rangle = 0$ ise v ye lightlike(null) vektör denir (O'Neil 1983).

Tanım 2.2.6. ***(Gelecek ve geçmiş yönlendirmeli timelike vektör)***
$e_n = (0, ..., 0, 1)$ ve $v \in \mathbb{E}_1^n$ timelike vektörü için eğer,
i. $\langle v, e_n \rangle < 0$ ise v ye gelecek yönlendirilmeli timelike vektör,
ii. $\langle v, e_n \rangle > 0$ ise v ye geçmiş yönlendirilmeli timelike vektör denir (O'Neil 1983).

Tanım 2.2.7. ***(Norm)*** $\forall v \in \mathbb{E}_1^n$ için

$$\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|} \tag{2.7}$$

eşitliği ile tanımlı $\|v\|$ reel sayısına v vektörünün *normu* denir. Normu 1 olan vektöre de birim vektör adı verilir (O'Neil 1983).

Tanım 2.2.8. ***(Minkowski vektörel çarpımı)*** 3 boyutlu Minkowski uzayı E_1^3 de $\forall u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in E_1^3$ için Minkowski vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} u \times v &= \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, v_1 u_3 - v_3 u_1, v_1 u_2 - v_2 u_1) \end{aligned} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanır (O'Neil 1983).

Tanım 2.2.9. ***(Spacelike düzlem)*** Minkowski uzayında normal vektörü timelike olan düzleme spacelike düzlem denir. Bir spacelike düzlemde sadece spacelike vektörler bulunur (Ratcliffe 1994).

Tanım 2.2.10. ***(Timelike düzlem)*** Minkowski uzayında içerisinde en az bir timelike vektör bulunduran düzlemlere timelike düzlem denir. Bir timelike düzlemin normal vektörü spacelike vektördür ve düzlem içinde her türden vektör bulunur (Ratcliffe 1994).

Tanım 2.2.11. ***(Null düzlem)*** Minkowski uzayında spacelike ve timelike düzlemler dışında kalan düzlemlerdir. Null düzlemlerde bir tane null vektör bulunup bu vektör düzlemin normal vektörüdür ve aynı zamanda düzlemde yatar. Ayrıca null düzlemlerde spacelike vektörler bulunur (Ratcliffe 1994).

Teorem 2.2.1. $u, v \in \mathbb{E}_1^n$ vektörleri arasındaki açı değeri için eğer,
$i.$ $u, v \in \mathbb{E}_1^n$ spacelike vektörleri spacelike düzlem geriyorsa

$$\langle u, v \rangle = \| u \| \| v \| \cos\theta \tag{2.9}$$

$ii.$ $u, v \in \mathbb{E}_1^n$ spacelike vektörleri timelike düzlem geriyorsa

$$\langle u, v \rangle = \| u \| \| v \| \cosh\theta \tag{2.10}$$

$iii.$ $u, v \in \mathbb{E}_1^n$ timelike vektörleri aynı timelike konide ise

$$\langle u, v \rangle = - \| u \| \| v \| \cosh\theta \tag{2.11}$$

$iv.$ u spacelike vektör ve v gelecek yönlendirmeli timelike vektör ise

$$\langle u, v \rangle = \| u \| \| v \| \sinh\theta \tag{2.12}$$

dir (Ratcliffe 1994).

Tanım 2.2.12. ***(Eğri)*** I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere, $\alpha : I \to E_1^n$ biçiminde tanımlı diferensiyellenebilir dönüşümüne Minkowski uzayında bir eğridir denir. Eğer $\alpha'(t)$ vektörü spacelike, timelike ya da null ise eğriye sırasıyla spacelike, timelike ya da null eğri denir (O'Neil 1983).

Teorem 2.2.2. $\alpha(s) \in \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı timelike eğrisinin Frenet $3-$ayaklısı, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olsun

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

$\kappa = \langle T', N \rangle$, $\tau = \langle N', B \rangle$, $\langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = 1$ dir (O'Neil 1983).

Teorem 2.2.3. $\alpha(s) \in \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı spacelike eğrisinin Frenet $3-$ayaklısı, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olsun
i. $T'(s)$ spacelike vektör ise

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

$\kappa = \langle T', N \rangle$, $\tau = -\langle N', B \rangle$, $\langle B, B \rangle = -1$ dir.

ii. $T'(s)$ timelike vektör ise

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

$\kappa = -\langle T', N \rangle$, $\tau = \langle N', B \rangle$, $\langle B, B \rangle = 1$ dir.

iii. $T'(s)$ null vektör ise

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -1 & 0 & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$\tau = \langle N', B \rangle$, $\langle N, B \rangle = 1$ dir (O'Neil 1983).

Teorem 2.2.4. $\alpha(s) \in \mathbb{E}_1^3$ lightlike eğrisinin Frenet $3-$ayaklısı, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olsun

$$\begin{pmatrix} T^{'} \\ N^{'} \\ B^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & -1 \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

$\tau = \langle N^{'}, B \rangle$, $\langle B, B \rangle = 0$, $\langle N, N \rangle = \langle T, B \rangle = 1$ dir (O'Neil 1983).

3. ÖKLİD UZAYINDA PİSAGOR-HODOGRAF EĞRİLERİ

Tanım 3.1. ***(Polinom)*** $k \in \mathbb{N}_0$ ve $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq k$ olmak üzere

$$x(t) = a_k t^k + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0, \quad a_k \neq 0 \tag{3.1}$$

biçimindeki $t-$değişkenine bağlı fonksiyona, k. dereceden bir polinom denir (Larson 2012).

Tanım 3.2. ***(Rasyonel polinom eğrisi)*** $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ eğrisi için eğer,

$$x_1(t) = \frac{a_1(t)}{b_1(t)}, x_2(t) = \frac{a_2(t)}{b_2(t)}, ..., x_n(t) = \frac{a_n(t)}{b_n(t)} \tag{3.2}$$

olacak şekilde $ebob(a_i(t), b_i(t)) = c_i$, $c_i \in \mathbb{R}$ koşulunu sağlayan $a_i(t)$ ve $b_i(t)$, k. dereceden polinomları mevcut ise $\alpha(t) \in \mathbb{R}[t]$ eğrisine n-boyutlu rasyonel polinom eğrisi denir (Larson 2012).

Tanım 3.3. ***(Polinom eğrisi)*** $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ eğrisi için eğer, $1 \leq i \leq n$ için $p_i(t)$ değerleri birer polinom ise $\alpha(t) \in \mathbb{R}[t]$ eğrisine n-boyutlu polinom eğrisi denir (Larson 2012).

Tanım 3.4. ***(Polinom eğrisinin derecesi)*** $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ n-boyutlu polinom eğrisi için,

$$\max = \{der(x_1(t)), der(x_2(t)), ..., der(x_n(t))\} \tag{3.3}$$

değerine α eğrisinin derecesi denir (Larson 2012).

Tanım 3.5. ***(Polinom eğrisinin hodografı)*** $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ n-boyutlu polinom eğrisinin hodografı α eğrisinin türevi olan $\alpha'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), ..., x_n'(t))$ vektör alanıdır (Farouki ve Sakkalis 1990).

Tanım 3.6. ***(Pisagor-Hodograf eğrisi)*** $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ n-boyutlu polinom eğrisinin hodografı $\alpha^{'}(t)$,

$$x_1^{'}(t)^2 + x_2^{'}(t)^2 + ... + x_n^{'}(t)^2 = \sigma(t)^2 \tag{3.4}$$

denklemini sağlayacak şekilde $\sigma(t)$ polinomu bulunuyorsa $\alpha(t)$ eğrisine n-boyutlu Pisagor-Hodograf eğrisi, kısaca PH eğrisi denir (Farouki ve Sakkalis 1990).

3.1 Düzlemsel Pisagor-Hodograf Eğrileri

Tanım 3.1.1. ***(Düzlemsel PH eğrisi)*** $\mathbb{R}^2$ de $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ polinom eğrisinin hodografı $\alpha^{'}(t) = (x^{'}(t), y^{'}(t))$ olmak üzere,

$$x^{'}(t)^2 + y^{'}(t)^2 = \sigma(t)^2 \tag{3.5}$$

olacak şekilde bir $\sigma(t)$ polinomu mevcutsa $\alpha(t)$ eğrisine düzlemsel Pisagor-Hodograf eğrisi ya da kısaca düzlemsel PH eğrisi denir (Farouki ve Sakkalis 1990).

(3.5) denklemini sağlayan $x(t)$ ve $y(t)$ polinomlarını bulabilmek için $\alpha(t)$ eğrisinin hodografını karakterize etmek yeterlidir. Hodograf karakterizasyonunu yapabilmek için sıradaki teoremi verelim.

Teorem 3.1.1. $a(t), b(t), c(t)$ polinomları

$$a^2(t) + b^2(t) = c^2(t)$$

Pisagor koşulunu sağlarlar ancak ve ancak

$$\begin{aligned} a(t) &= [u^2(t) - v^2(t)]w(t) \\ b(t) &= [2u(t)v(t)]w(t) \\ c(t) &= [u^2(t) + v^2(t)]w(t) \end{aligned} \tag{3.6}$$

olacak şekilde $u(t), v(t)$ aralarında asal polinomları ve $w(t)$ polinomu vardır (Kubota 1972).

İspat. Pisagor koşulunu sağlayan $a(t), b(t), c(t)$ polinomlarının ebobu $w(t)$ polinomu olsun. Bu durumda,

$$\tilde{a}(t) = \frac{a(t)}{w(t)},\ \tilde{b}(t) = \frac{b(t)}{w(t)},\ \tilde{c}(t) = \frac{c(t)}{w(t)}$$

polinomları aralarında asaldır ve

$$\tilde{a}^2(t) + \tilde{b}^2(t) = \tilde{c}^2(t)$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \tilde{b}^2(t) &= \tilde{c}^2(t) - \tilde{a}^2(t) \\ &= [\tilde{c}(t) + \tilde{a}(t)][\tilde{c}(t) - \tilde{a}(t)] \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

$\tilde{a}(t), \tilde{b}(t), \tilde{c}(t)$ polinomlarının ortak böleni olmadığı için $\tilde{c}(t) + \tilde{a}(t)$ ve $\tilde{c}(t) - \tilde{a}(t)$ polinomlarının da ortak böleni yoktur. Genelliği bozmadan, $u(t)$ ve $v(t)$ aralarında asal polinomlar olmak üzere

$$\tilde{c}(t) + \tilde{a}(t) = 2u^2(t) \text{ ve } \tilde{c}(t) - \tilde{a}(t) = 2v^2(t)$$

olarak seçilirse

$$\tilde{a}(t) = u^2(t) - v^2(t), \tilde{b}(t) = 2u(t)v(t), \tilde{c}(t) = u^2(t) + v^2(t)$$

dir.

Böylece polinomsal Pisagor üçlülerinin en genel karakterizasyonunu veren (3.6) denklemleri elde edilir.

Sonuç 3.1.1. Düzlemsel polinom eğrisi $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ bir PH eğrisi ise teorem 3.1.1 den $\alpha(t)$ eğrisinin hodografı $\alpha^{'}(t) = (x^{'}(t), y^{'}(t))$ için

$$\begin{aligned} x^{'}(t) &= [u^2(t) - v^2(t)]w(t) \\ y^{'}(t) &= [2u(t)v(t)]w(t) \\ \sigma(t) &= [u^2(t) + v^2(t)]w(t) \end{aligned} \tag{3.7}$$

olacak şekilde $w(t)$ ve aralarında asal $u(t)$ ve $v(t)$ polinomları mevcuttur. Yapılan bu karakterizasyonda $x^{'}$ ve $y^{'}$ için verilen eşitlikler yer değiştirebilir (Farouki 1992).

$u(t), v(t), w(t)$ polinomlarının bazı özel değerlerine karşılık gelen $\alpha(t)$ eğrisinin durumları;

- $w(t) = 0$ veya $u(t) = v(t) = 0$ ise, $\alpha(t)$ PH eğrisi bir noktadır,

- $u(t), v(t), w(t)$ polinomları sabit ise, $\alpha(t)$ bir doğrudur,

- $u(t), v(t)$ sabit polinomlar ve $w(t)$ sabit polinom değilse, $\alpha(t)$ bir doğrudur

- $w(t) \neq 0$ ve $u(t), v(t)$ polinomlarından en az biri sıfır ise, $\alpha(t)$ bir doğrudur.

Bundan sonra, $u(t), v(t), w(t) \neq 0$ ve $u(t), v(t)$ polinomlarının aynı anda sabit olmaması durumları göz önünde bulundurularak PH eğrileri ele alınacaktır.

Lemma 3.1.1. Eğer $\lambda = der(w(t))$ ve $\mu = \max\{der(u(t)), der(v(t))\}$ ise hodografı $u(t), v(t), w(t)$ polinomlarıyla belli olan PH eğrisinin derecesi $n = \lambda + 2\mu + 1$ dir.

Tanım 3.1.2. ***(Basit düzlemsel PH eğrisi)*** $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ düzlemsel PH eğrisinin hodografının bileşenlerinin ebobu $w(t) = ebob(x^{'}(t), y^{'}(t))$ sabit polinom ise $\alpha(t)$ eğrisine basit PH eğrisi denir (Farouki 1992).

Sonuç 3.1.2. Basit PH eğrilerinin derecesi tek sayıdır.

$\alpha(t) = (x(t), y(t))$ PH eğrisinin hodografının sağlamış olduğu (3.5) denklemini

$$\left(\frac{x^{'}(t)}{\sigma(t)}\right)^2 + \left(\frac{y^{'}(t)}{\sigma(t)}\right)^2 = 1 \tag{3.8}$$

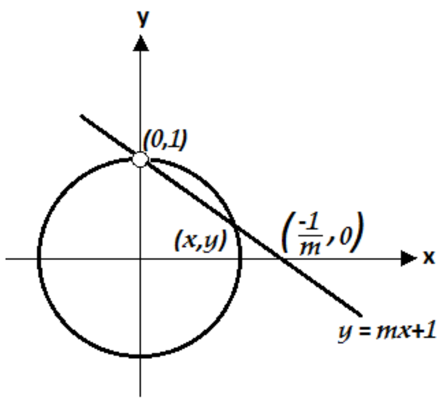
olarak ele alalım ve düzlemsel PH eğrilerinin karakterizasyonuna geometriksel bir bakış açısıyla bakalım.

Teorem 3.1.2. Rasyonel parametreli $c(t) = (x(t), y(t))$ birim çemberi için,

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{2a(t)b(t)}{a^2(t)+b^2(t)}, \frac{a^2(t)-b^2(t)}{a^2(t)+b^2(t)}\right) \tag{3.9}$$

olacak şekilde $a(t), b(t)$ polinomları mevcuttur. Eğer $a(t), b(t)$ aralarında asal ise $a^2(t)+b^2(t), 2a(t)b(t)$ ve $a^2(t)-b^2(t)$ de aralarında asaldır
(Pottman ve Wallner 2010).

İspat.



Şekil 3.1 Çemberin steografik izdüşümü

Birim çember üzerindeki (x, y) noktalarının $(0, 1)$ merkezli ve x-eksenine izdüşümleri $(\frac{-1}{m}, 0), m \in \mathbb{R}$ tipindeki noktalardır. Tersine, $(\frac{-1}{m}, 0)$ noktasının birim çember üzerindeki görüntüsü olan (x, y) noktasının koordinatları $y = mx + 1$ doğrusu ve $x^2 + y^2 = 1$ birim çemberinin ortak çözülmesiyle elde edilen

$$x = \frac{-2m}{1+m^2}, y = \frac{1-m^2}{1+m^2} \tag{3.10}$$

eşitlikleridir.

$m = \frac{-b(t)}{a(t)}$ seçilirse (3.10) eşitlikleri

$$x(t) = \frac{2a(t)b(t)}{a^2(t)+b^2(t)}, y(t) = \frac{a^2(t)-b^2(t)}{a^2(t)+b^2(t)} \tag{3.11}$$

denklemlerine dönüşür.

Sonuç 3.1.3. $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ PH eğrisinin hodografının sağlamış olduğu (3.8) denklemi birim çember üzerindeki noktaları göstermektedir. Teorem 3.1.2 den $\alpha(t)$ eğrisinin karakterizasyonu,

$$\begin{aligned} x^{'}(t) &= 2a(t)b(t) \\ y^{'}(t) &= a^2(t) - b^2(t) \\ \sigma(t) &= a^2(t) + b^2(t) \end{aligned} \tag{3.12}$$

olarak elde edilir.

3.2 Düzlemsel PH Eğrilerinin Özelikleri

3.2.1 PH Eğrilerinin Kompleks Sayı Temsili

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ noktası, kompleks düzlemde $x + iy \in \mathbb{C}$ noktasıyla birebir eşlenir. $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ düzlemsel polinom eğrisi ise $z(t) = x(t) + iy(t)$ polinomsal kompleks sayısı ile eşlenir.

$\alpha(t)$ bir basit PH eğrisi ve hodografını karakterize eden polinomlar $u(t), v(t)$ olsun. $w(t) = u(t) + iv(t)$ polinomsal kompleks sayısı ile $\alpha(t)$ eğrisinin hodografının karakterizasyonu

$$\begin{aligned} \alpha^{'}(t) &= w^2(t) \\ &= u^2(t) - v^2(t) + i2u(t)v(t) \\ &= (u^2(t) - v^2(t), 2u(t)v(t)) \end{aligned} \tag{3.13}$$

dir (Farouki 1994).

3.2.2 Regüler Polinom Eğrileri ile PH Eğrileri Arasındaki İlişki

Regüler polinom eğrilerinin cümlesi

$$G = \{z(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 |\ z^{'}(t) \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}\} \tag{3.14}$$

ve regüler PH eğrilerinin cümlesi

$$\tilde{G} = \{\tilde{z}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \in \mathbb{R}^2 |\ \tilde{z}^{'}(t) \neq 0 \text{ ve } \tilde{x}^{'}(t)^2 + \tilde{y}^{'}(t)^2 = \sigma^2(t),\ \forall t \in \mathbb{R}\} \tag{3.15}$$

dir. Açıkça görülüyor ki $\tilde{G} \subset G$ dir.
G ve $\tilde{G}$ cümleleri arasında $z(0) = \tilde{z}(0) = 0$ olacak şekilde,

$$\begin{array}{llcl} \Psi : & G & \rightarrow & \tilde{G} \\ & z(t) = (x(t), y(t)) & \rightarrow & \tilde{z}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \\ & & & = \left(\int (x^{'}(t)^2 - y^{'}(t)^2)dt, \int 2x^{'}(t)y^{'}(t)dt\right) \end{array} \tag{3.16}$$

dönüşümünü tanımlayalım.

Önerme 3.2.1. Regüler polinom eğrilerinin cümlesi G ve regüler PH eğrilerinin cümlesi $\tilde{G}$ arasında (3.16) da tanımlanan Ψ dönüşümü $1:1$ bir dönüşümdür (Farouki 1994).

İspat. $z_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$, $ebob(x_1(t), y_1(t)) = sabit$ ve $z_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$, $ebob(x_2(t), y_2(t)) = sabit$ olacak şekilde regüler iki eğri olsun. Kabul edelim ki $\Psi(z_1(t)) = \Psi(z_2(t))$ dir.

Bu durumda,

$$\left(\int (x_1'(t)^2 - y_1'(t)^2)dt, \int 2x_1'(t)y_1'(t)dt)\right) = \left(\int (x_2'(t)^2 - y_2'(t)^2)dt, \int 2x_2'(t)y_2'(t)dt)\right)$$

$$\begin{aligned} \int (x_1'(t)^2 - y_1'(t)^2)dt &= \int (x_2'(t)^2 - y_2'(t)^2)dt \\ \int 2x_1'(t)y_1'(t)dt &= \int 2x_2'(t)y_2'(t)dt \end{aligned}$$

dir.

$\Psi(z_1(0)) = \Psi(z_2(0)) = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \int_0^t (x_1'(s)^2 - y_1'(s)^2)ds &= \int_0^t (x_2'(s)^2 - y_2'(s)^2)ds \\ \int_0^t 2x_1'(s)y_1'(s)ds &= \int_0^t 2x_2'(s)y_2'(s)ds \end{aligned}$$

dir.

Leibnitz teoreminden,

$$\begin{aligned} x_1'(t)^2 - y_1'(t)^2 &= x_2'(t)^2 - y_2'(t)^2 \\ 2x_1'(t)y_1'(t) &= 2x_2'(t)y_2'(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} x_1'(t)^2 - y_1'(t)^2 + i2x_1'(t)y_1'(t) &= x_2'(t)^2 - y_2'(t)^2 + i2x_2'(t)y_2'(t) \\ \left(x_1'(t) + iy_1'(t)\right)^2 &= \left(x_2'(t) + iy_2'(t)\right)^2 \end{aligned}$$

$$x_1'(t) = \pm x_2'(t) \text{ ve } y_1'(t) = y_2'(t)$$

dir.

Eşitliklerde her iki tarafın integrali alınırsa $z_1(0) = z_2(0) = 0$ olduğundan,

$$x_1(t) = \pm x_2(t) \text{ ve } y_1(t) = y_2(t)$$

elde ededilir ve kompleks denklikten dolayı $z_1(t) = z_2(t)$ olup, Ψ dönüşümü $1:1$ dir.

Lemma 3.2.1. Regüler n.dereceden bir eğri $z(t) \in G$ ve $z(t)$ eğrisinin Ψ dönüşümü altındaki görüntüsü $\tilde{z}(t) \in \tilde{G}$ PH eğrisi olsun. Bu durumda $\tilde{z}(t)$ eğrisinin derecesi $2n-1$ dir (Farouki 1994).

İspat. $z(t) = (x(t), y(t))$ n.dereceden bir eğri ise hodografı $z'(t) = (x'(t), y'(t))$ nin derecesi $n-1$ dir. $\max\{der(x'(t)^2 - y'(t)^2, 2x'(t)y'(t))\} = 2n-1$ olup regüler PH eğrisinin derecesi $der(\tilde{z}(t)) = 2n-1$ dir.

Sonuç 3.2.1. Çift dereceli regüler PH eğrisi yoktur (Farouki 1994).

Düzlemdeki regüler eğrilere karşılık gelen PH eğrileri aşağıdaki tablodaki gibi elde edilir.

	Polinom eğrisi (G)	*PH eğrisi* $(\tilde{G})$
$n = 1$	doğru	doğru
$n = 2$	parabol	PH kübik
$n = 3$	regüler kübik	PH kuintik
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

3.2.3 Dönme Altında PH Eğrisinin Hodografı

$\alpha(t) = (x(t), y(t))$ bir PH eğrisi ve (3.5) denklemini sağlayan hodografı,

$$\begin{aligned} x^{'}(t) &= u^2(t) - v^2(t) \\ y^{'}(t) &= 2u(t)v(t) \\ \sigma(t) &= u^2(t) + v^2(t) \end{aligned}$$

$ebob(u(t), v(t)) = sabit$ olacak şekilde $u(t)$ ve $v(t)$ polinomları ile belli olsun.
θ açılık düzlem dönmesi altında $\alpha(t)$ eğrisinin görüntüsü

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

$\tilde{\alpha}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (x(t)\cos\theta - y(t)\sin\theta, x(t)\sin\theta + y(t)\cos\theta)$ eğrisidir.
$\tilde{\alpha}(t)$ eğrisinin hodografı,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}^{'}(t) &= (\tilde{x}^{'}(t), \tilde{y}^{'}(t)) \\ &= (x^{'}(t)\cos\theta - y^{'}(t)\sin\theta, x^{'}(t)\sin\theta + y^{'}(t)\cos\theta) \qquad (3.18) \\ &= \left[(u^2(t) - v^2(t))\cos\theta - 2u(t)v(t)\sin\theta, (u^2(t) - v^2(t))\sin\theta + 2u(t)v(t)\cos\theta\right] \end{aligned}$$

dir.
Diğer taraftan eğer,

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{'}(t) &= \tilde{u}^2(t) - \tilde{v}^2(t) \\ \tilde{y}^{'}(t) &= 2\tilde{u}(t)\tilde{v}(t) \end{aligned}$$

ise

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ \tilde{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

dir.

Ayrıca, dönmeler altında eğrilerin hodografının sağladığı (3.5) denklemindeki $\sigma(t)$ polinomu değişmez. Yani $\alpha(t)$ eğrisi için,

$$x^{'}(t)^2 + y^{'}(t)^2 = \sigma(t)^2$$

iken $\tilde{\alpha}(t)$ eğrisi için de,

$$\begin{aligned}
\tilde{x}^{'}(t)^2 + \tilde{y}^{'}(t)^2 &= \Big(x^{'}(t)\cos\theta - y^{'}(t)\sin\theta\Big)^2 + \Big(x^{'}(t)\sin\theta + y^{'}(t)\cos\theta\Big)^2 \\
&= x^{'}(t)^2 + y^{'}(t)^2 \\
&= \sigma(t)^2 \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

dir.

3.2.4 Yay Uzunluğu Hesabı

$\alpha(t) = (x(t), y(t))$ bir PH eğrisi ise $\alpha(t)$ eğrisinin yay uzunluğu, yay uzunluğu değerine en iyi yaklaşımı veren Gauss tümleme formülü kullanmadan kesin olarak hesaplanır (Farouki ve Sakkalis 1990).

$$\int_a^b \parallel \alpha^{'}(t) \parallel dt = \int_a^b \sigma(t)dt \qquad (3.21)$$

3.2.5 Diferensiyel Özelikler

$\alpha(t) = (x(t), y(t))$ PH eğrisinin birim teğet, birim normal vektörleri ve eğriliği rasyonel fonksiyonlardır. (3.5) denkleminden $x^{'}(t) = u^2(t) - v^2(t)$, $y^{'}(t) = 2u(t)v(t)$ ve $\sigma(t) = u^2(t) + v^2(t)$ olmak üzere, $\alpha(t)$ eğrisinin teğet,normal vektörleri ve eğriliği sırasıyla,

$$\begin{aligned} T &= \frac{(u^2(t)-v^2(t), 2u(t)v(t))}{\sigma(t)} \\ N &= \frac{(2u(t)v(t), v^2(t)-u^2(t))}{\sigma(t)} \\ \kappa &= 2\frac{u(t)v^{'}(t)-u^{'}(t)v(t)}{\sigma^2(t)} \end{aligned} \tag{3.22}$$

dir.

Sonuç 3.2.2. Birim rasyonel teğet vektörüne sahip olan eğriler PH eğrisidir (Farouki 2008).

3.2.6 PH Eğri Çiftleri

Tanım 3.2.1. $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ düzlemsel eğrisinin normal vektörü N olmak üzere $\alpha(t)$ PH eğrisinin eğri çiftleri

$$\beta(t) = \alpha(t) + dN, \quad d > 0 \tag{3.23}$$

olarak tanımlanan rasyonel fonksiyonlardır (Farouki ve Sakkalis 1990).

Teorem 3.2.1. $\mathbb{R}^2$ de polinomsal PH eğrilerinin paralel eğrileri rasyonel PH eğrisidir (Farouki ve Sakkalis 1990).

İspat. $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ polinomsal PH eğrisi ve $x'(t)^2 + y'(t)^2 = \sigma(t)^2$ olsun. α eğrisinin normal vektörü $N = \frac{(y'(t), -x^{'}(t))}{\sigma(t)}$ dir. α eğrisinin paralel eğrileri ise (3.23) denkleminden,

$$\beta(t) = \left(x(t) + \frac{dy'(t)}{\sigma(t)}, y(t) - \frac{dx'(t)}{\sigma(t)}\right), \quad d > 0$$

dir.

$\beta(t)$ eğrisinin hodografı,

$$\beta^{'}(t)=\left(x'(t)+d\left(\frac{y^{''}(t)\sigma(t)-y'(t)\sigma^{'}(t)}{\sigma(t)^2}\right),y'(t)-d\left(\frac{x^{''}(t)\sigma(t)-x'(t)\sigma^{'}(t)}{\sigma(t)^2}\right)\right)$$

dir.

$\beta(t)$ eğrisinin PH eğrisi olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
&\left[x^{'}(t)+d\left(\frac{y^{''}(t)\sigma(t)-y'(t)\sigma^{'}(t)}{\sigma(t)^2}\right)\right]^2+\left[y'(t)-d\left(\frac{x^{''}(t)\sigma(t)-x^{'}(t)\sigma^{'}(t)}{\sigma(t)^2}\right)\right]^2\\
=\;&\sigma(t)^2+\frac{d^2}{\sigma(t)^4}\left[\left(x^{''}(t)^2+y^{''}(t)^2\right)\sigma(t)^2-\sigma(t)^2\sigma^{'}(t)^2\right]+\frac{2d}{\sigma(t)}\left(x^{'}(t)y^{''}(t)-x^{''}(t)y'(t)\right)\\
=\;&\sigma(t)^2+\frac{d^2}{\sigma(t)^4}\left(x^{'}(t)y^{''}(t)-x^{''}(t)y'(t)\right)^2+\frac{2d}{\sigma(t)}\left(x^{'}(t)y^{''}(t)-x^{''}(t)y'(t)\right)\\
=\;&\left[\sigma(t)+\frac{d}{\sigma(t)^2}\left(x^{'}(t)y^{''}(t)-x^{''}(t)y'(t)\right)\right]^2
\end{aligned}$$

$\beta(t)$ eğrisinin hodografı Pisagor koşulunu sağladığı ve rasyonel fonksiyon tipli olduğundan, $\beta(t)$ eğrisi rasyonel PH eğrisidir.

Tanım 3.2.2. $\alpha,\beta\subset\mathbb{R}^n$ iki eğri olsun. α ve β eğrilerinin Frenet n-ayaklıları sırasıyla $\{U_1(t),U_2(t),...,U_n(t)\}$ ve $\{V_1(t),V_2(t),...,V_n(t)\}$ olmak üzere,

$$\langle U_1(t),V_1(t)\rangle=0 \tag{3.24}$$

ise α ve β eğrilerine bir involüt-evolüt eğri çifti denir (Struik 1988).

Sonuç 3.2.3. α düzlemsel PH eğrisi ile α eğrisinin çifti β eğrisi bir involüt-evolüt çifti değildir.

İspat. $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ eğrisi ve çifti $\beta(t)=\alpha(t)+dN$ eğrisinin Frenet çatısının teğet vektörleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
T_\alpha &= \left(\frac{x'}{\sigma},\frac{y'}{\sigma}\right)\\
T_\beta &= \left(\frac{x'\sigma^2+d(y''\sigma-y'\sigma')}{\sigma^3+d(x'y''-x''y')},\frac{y'\sigma^2-d(x''\sigma-x'\sigma')}{\sigma^3+d(x'y''-x''y')}\right)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\langle T_\alpha, T_\beta\rangle &= \frac{(x'^2 + y'^2)\sigma^2 + d(x'y''\sigma - x''y'\sigma)}{\sigma^4 + d\sigma(x'y'' - x''y')}\\ &= 1\end{aligned}$$

olup α ve β eğrileri bir involüt-evolüt çifti oluşturmaz.

3.3 Uzaysal Pisagor-Hodograf Eğrileri

Tanım 3.3.1. ***(Uzaysal PH eğrisi)*** $\mathbb{R}^3$ de $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ polinom eğrisinin hodografı $\alpha'(t)$,

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = \sigma(t)^2 \tag{3.25}$$

Pisagor eşitliğini sağlarsa $\alpha(t)$ eğrisine uzaysal PH eğrisi denir (Farouki ve Sakkalis 1994).

Uzaysal PH eğrilerinin karakterizasyonunu yapabilmek için sıradaki teoremi verelim.

Teorem 3.3.1. Aralarında asal $a(t), b(t), c(t), d(t)$ polinomları

$$a^2(t) + b^2(t) + c^2(t) = d^2(t) \tag{3.26}$$

Pisagor koşulunu sağlıyorsa bu polinomlar $u(t), v(t), p(t), q(t)$ reel polinomları yardımı ile

$$\begin{aligned}a(t) &= u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t)\\ b(t) &= 2\left[u(t)q(t) + v(t)p(t)\right]\\ c(t) &= 2\left[v(t)q(t) - u(t)p(t)\right]\\ d(t) &= u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t)\end{aligned} \tag{3.27}$$

şeklinde ifade edilir (Dietz, Hoschek ve Jüttler 1993).

İspat. (3.26) eşitliğini alalım.

$$\begin{aligned} b^2(t) + c^2(t) &= d^2(t) - a^2(t) \\ [b(t) + ic(t)][b(t) - ic(t)] &= [d(t) + a(t)][d(t) - a(t)] \end{aligned} \tag{3.28}$$

i. Eğer $ebob(b(t), c(t)) = sabit$ ise (3.28) eşitliğinde $b(t)+ic(t)$ ve $b(t)-ic(t)$ kompleks polinomlarının ortak çarpanı yoktur. Dahası bu polinomların reel kökleri yoktur ve bir polinomun kökü diğerinin eşleniğidir. Yani,

$$b(t) + ic(t) = f(t)\bar{g}(t), b(t) - ic(t) = \bar{f}(t)g(t)$$

dir.

Dolayısıyla $d(t) + a(t)$ ve $d(t) - a(t)$ reel polinomlarının $f(t)$ ve $g(t)$ kompleks polinomları cinsinden ifadesi

$$d(t) + a(t) = f(t)\bar{f}(t), d(t) - a(t) = g(t)\bar{g}(t)$$

dir.

$f(t)$ ve $g(t)$ kompleks polinomlarının reel ve sanal kısımlarını $u(t), v(t), p(t), q(t)$ reel polinomları ile ifadesi

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{2}(p(t) + iq(t)) \\ g(t) &= \sqrt{2}(v(t) + iu(t)) \end{aligned}$$

olarak alınırsa, bu durumda $a(t), b(t), c(t), d(t)$ polinomlarının eşitlikleri (3.27) denklemleri olarak elde edilir.

ii. Eğer $ebob(b(t), c(t)) \neq sabit$ ise (3.28) denkleminin sol tarafından gelecek olan $w^2(t)$ ortak böleni, ya $d(t)+a(t)$ ya da $d(t)-a(t)$ polinomunun bir çarpanıdır. $w^2(t)$, iki polinomun birden çarpanı olamaz çünkü bu durum $a(t), b(t), c(t), d(t)$ polinomlarının aralarında asal olmasıyla çelişir. $b(t)+ic(t)$ ve $b(t)-ic(t)$ kompleks polinomları $w(t)$ ye bölündükten sonra (i) durumuna dönülür ve aynı sonuçlar elde edilir.

Teorem 3.3.1. den $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uzaysal PH eğrilerisinin karakterizasyonu x', y', z' aralarında asal olması durumunda

$$\begin{aligned} x'(t) &= u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t) \\ y'(t) &= 2\left[u(t)q(t) + v(t)p(t)\right] \\ z'(t) &= 2\left[v(t)q(t) - u(t)p(t)\right] \\ \sigma(t) &= u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t) \end{aligned} \tag{3.29}$$

denklemleri ile verilebilir.

Uyarı 3.3.1. Düzlemsel PH eğrilerinin karakterizasyonu için verilen teorem 3.1.1 gerek ve yeter şart iken, uzaysal PH eğrileri için verilen teorem 3.3.1 de polinomların aralarında asal olması durumunda gerek şart olarak verilmiştir. Çünkü, $u(t), v(t), p(t), q(t)$ reel polinomlarının aralarında asal olması $a(t), b(t), c(t), d(t)$ polinomlarının da aralarında asal olmasını gerektirmez. Bu durumdan dolayı, $\mathbb{R}^2$ de regüler eğriler ile basit PH eğrileri arasında yapılan $1:1$ eşleme uzay eğrilerinde mevcut değildir (Farouki 2008).

Örnek 3.3.1. $u(t) = t^2-3t$, $v(t) = t^2-5t+10$, $p(t) = -2t^2+3t+5$, $q(t) = t^2-9t+10$ polinomları aralarında asaldır. Bu polinomlardan elde edilen PH eğrisinin hodografı,

$$\begin{aligned} x'(t) &= -3t^4 + 14t^3 - 36t^2 + 50t + 100 \\ &= (t^2 - 2t + 5)(-3t^2 + 8t - 5) \\ y'(t) &= -2t^4 + 2t^3 + 14t^2 - 50t + 100 \\ &= (t^2 - 2t + 5)(-2t^2 - 2t + 20) \\ z'(t) &= 6t^4 - 46t^3 + 138t^2 - 250t + 200 \\ &= (t^2 - 2t + 5)(6t^2 - 34t + 40) \end{aligned}$$

dir.

$u(t), v(t), p(t), q(t)$ polinomlarının asal olmasına rağmen $x'(t), y'(t), z'(t)$ polinomları aralarında asal değildir. Dolayısıyla elde edilen $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ PH eğrisi basit PH eğrisi değildir.

3.4 Uzaysal PH Eğrilerinin Özelikleri

3.4.1 PH Eğrilerinin Kuaterniyon Temsili

Tanım 3.4.1. ***(Kuaterniyon)*** Kuaterniyon cebiri birleşmeli, değişmeli olmayan bölüm halkasıdır ve

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= \left\{ q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R},\ i^2 = j^2 = k^2 = -1 \right\} \\ ij &= -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j \end{aligned} \tag{3.30}$$

olarak ifade edilir, herbir elemanına kuaterniyon denir (Ward 1997).

$\mathbb{R}^3$ de bir basit PH eğrisi $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ olsun ve hodografı $u(t), v(t), p(t), q(t)$ reel polinomları ile (3.29) denklemleri biçiminde ifade edilsin.
$A(t) = u(t) + v(t)i + p(t)j + q(t)k$ bir polinomsal kuaterniyon ve eşleniği
$A^*(t) = u(t) - v(t)i - p(t)j - q(t)k$ kuaterniyonu olsun.
$\alpha(t)$ eğrisinin hodografının $A(t)$ kuaterniyonu ile ifadesi

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= A(t) i A^*(t) \\ &= [u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t)]i + 2\left[u(t)q(t) + v(t)p(t)\right] j + 2\left[v(t)q(t) - u(t)p(t)\right] k \end{aligned} \tag{3.31}$$

dir (Choi, Lee ve Moon 2002).

Örnek 3.4.1. $A(t) = 1 + (1-t)i + (1+t)j + (t^2+1)k$ polinomsal kuaterniyonu ile karakterize edilen $\alpha(t)$ PH eğrisinin hodografı

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= A(t) i A^*(t) \\ &= (-t^4 - 2t^2 - 4t,\ 4,\ -2t^3 + 2t^2 - 4t) \end{aligned}$$

olup

$$\alpha(t) = (\frac{-t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} - 2t^2,\ 4t,\ \frac{-1}{2}t^4 + \frac{2}{3}t^3 - 2t^2)$$

dir.

Uyarı 3.4.1. (3.31) denklemindeki, $A(t)iA^*(t)$ çarpımında "i" yerine "j" ya da "k" alınabilir. Bu durumda $u(t), v(t), p(t), q(t)$ polinomlarının çeşitli permütasyonları elde edilir.

$\alpha(t)$ eğrisinin hodografını,

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= A(t)iA^*(t) \\ &= \| A(t) \|^2\ U(t)iU^*(t) \end{aligned} \tag{3.32}$$

olarak $U(t) = (\cos\frac{1}{2}\theta(t), \sin\frac{1}{2}\theta(t)\vec{n}(t)), \vec{n}(t) = (n_x(t), n_y(t), n_z(t))$ birim kuaterniyonu ile ifade edebiliriz.
Burada $U(t)iU^*(t)$ çarpımı $\vec{n}$ ekseni etrafında i vektörünün $\theta(t)$ açısı kadar dönmesini tanımlar. Böylelikle (3.31) denklemi i birim vektörünün uzaysal dönmesinin sürekli bir ailesi olarak yorumlanabilir.

Uzaysal dönme hareketinin önemli bir özelliği yapıyı korumasıdır. $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ PH eğrisini ve bu eğrinin $\vec{n} = n_x i + n_y j + n_z k$ birim vektörü boyunca Φ açısı kadar dönmesi sonucunda elde edilen $\tilde{\alpha}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))$ PH eğrisini ele alalım.
$\tilde{\alpha}'(t) = \tilde{A}(t)i\tilde{A}^*(t)$ ise,

$$\tilde{A}(t) = UA(t), U = (\cos\frac{1}{2}\Phi, \sin\frac{1}{2}\Phi\vec{n}) \tag{3.33}$$

dir.

$\tilde{A}(t) = \tilde{u}(t) + \tilde{v}(t)i + \tilde{p}(t)j + \tilde{q}(t)k$ ise

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ \tilde{v}(t) \\ \tilde{p}(t) \\ \tilde{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\Phi & -n_x\sin\frac{1}{2}\Phi & -n_y\sin\frac{1}{2}\Phi & -n_z\sin\frac{1}{2}\Phi \\ n_x\sin\frac{1}{2}\Phi & \cos\frac{1}{2}\Phi & -n_z\sin\frac{1}{2}\Phi & n_y\sin\frac{1}{2}\Phi \\ n_y\sin\frac{1}{2}\Phi & n_z\sin\frac{1}{2}\Phi & \cos\frac{1}{2}\Phi & -n_x\sin\frac{1}{2}\Phi \\ n_z\sin\frac{1}{2}\Phi & -n_y\sin\frac{1}{2}\Phi & n_x\sin\frac{1}{2}\Phi & \cos\frac{1}{2}\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

dir (Farouki 2006).

3.4.2 Diferensiyel Özelikler

$\mathbb{R}^3$ de $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ PH eğrisi ve hodografı $\alpha'(t)$,

$$\begin{aligned} x' &= u^2 + v^2 - p^2 - q^2 \\ y' &= 2(uq + vp) \\ z' &= 2(vq - up) \\ \sigma &= u^2 + v^2 + p^2 + q^2 \end{aligned}$$

olsun.

$\alpha(t)$ eğrisinin Frenet çatısını ve eğriliklerini inceleyelim.

α eğrisinin teğet vektörü,

$$\begin{aligned} T &= \frac{\alpha'}{\| \alpha' \|} \\ &= \left(\frac{u^2 + v^2 - p^2 - q^2}{\sigma}, \frac{2(uq + vp)}{\sigma}, \frac{2(vq - up)}{\sigma} \right) \end{aligned} \tag{3.35}$$

rasyonel fonksiyondur.

Fakat, normal ve binormal vektörleri rasyonel fonksiyon değildir.

$$\| \alpha' \times \alpha'' \|^2 = \sigma^2(t)\rho(t) \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= 4\begin{bmatrix} (up' - u'p)^2 + (uq' - u'q)^2 + (vp' - v'p)^2 \\ +(vq' - v'q)^2 + 2(uv' - u'v)(pq' - p'q) \end{bmatrix} \\
&= 4\left[(up' - u'p + vq' - v'q)^2 + (uq' - u'q - vp' + v'p)^2\right] \\
&= \| \alpha''(t) \|^2 - \sigma'(t)^2
\end{aligned} \tag{3.37}$$

dir.

Buradan eğrinin birinci eğriliği $\kappa(t)$,

$$\kappa = \frac{\sqrt{\rho(t)}}{\sigma^2(t)} \tag{3.38}$$

olarak elde edilir ve rasyonel fonksiyon değildir, ikinci eğriliği $\tau(t)$ ise rasyonel fonksiyondur.

Eğrinin normal ve binormal vektörleri,

$$\begin{aligned}
N &= \frac{\sigma\alpha'' - \sigma'\alpha'}{\kappa\sigma} \\
B &= \frac{\alpha' \times \alpha''}{\kappa\sigma}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

dir.

κ nın rasyonel fonksiyon olmamasından dolayı, N ve B vektör alanları rasyonel olmayan fonksiyonlardır (Farouki 2008).

Tanım 3.4.2. ***(Çift PH eğrisi)*** $\mathbb{R}^3$ de $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ regüler bir eğri olsun. $\| \alpha'(t) \|$ ve $\| \alpha'(t) \times \alpha''(t) \|$ norm değerleri polinom ise $\alpha(t)$ eğrisine çift PH eğrisi denir, kısaca ÇPH olarak gösterilir (Farouki ve Sakkalis 1990).

Sonuç 3.4.1. $\alpha(t)$ ÇPH eğrisi ise (3.36) denkleminden $\rho(t) = w^2(t)$ olacak şekilde

$w(t)$ polinomu mevcuttur. Bu durumda, $\alpha(t)$ eğrisinin Frenet çatısı ve eğrilikleri

$$T = \frac{\alpha'}{\sigma}, N = \frac{\sigma\alpha'' - \sigma'\alpha'}{\sigma w}, B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\sigma w}$$

$$\kappa = \frac{w}{\sigma^2}, \tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\sigma^2 w^2} \tag{3.40}$$

rasyonel fonksiyonlardır (Farouki ve Sakkalis 1990).

3.5 Helis Eğrileri ve PH Eğrileri Arasındaki İlişki

Tanım 3.5.1. ***(Helis eğrisi)*** $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ eğrisinin her noktasında teğet vektörü sabit bir $\vec{v} \neq (0,0,0)$ vektörü ile sabit açı yapıyorsa, $\alpha(t)$ helis eğrisidir. Doğrultusu $\vec{v}$ vektörü olan doğruya ise helisin ekseni denir (Struik 1988).

Teorem 3.5.1. Bir uzaysal eğri $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ helistir ancak ve ancak eğrinin eğrilikleri arasında $\tau = c\kappa$ eşitliği sağlanacak şekilde $c \in \mathbb{R}$ sabiti vardır (Lancret 1806).

Teorem 3.5.2. $\mathbb{R}^3$ de polinomsal helis eğrileri PH eğrisidir
(Farouki ve Sakkalis 1994).

İspat. $\alpha(t)$ eğrisi 3-boyutlu uzayda polinomsal helis eğrisi olsun. Dolayısıyla, $\alpha(t)$ eğrisinin teğet vektörü $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ sabit bir $\vec{v}$ vektörü ile sabit açı yapar.

$$\begin{aligned} \langle T(t), \vec{v} \rangle &= \cos\Psi \\ \langle \frac{\alpha'(t)}{\| \alpha'(t) \|}, \vec{v} \rangle &= \cos\Psi \end{aligned}$$

$$\| \alpha'(t) \| = \frac{1}{\cos\Psi} \langle \alpha'(t), \vec{v} \rangle \tag{3.41}$$

(3.41) denkleminde, eşitliğin sağ tarafı $\cos\Psi$ nin sabit olmasından dolayı bir polinomdur. Böylelikle $\| \alpha'(t) \| = \sigma(t)$ olacak şekilde bir $\sigma(t)$ polinomu mevcuttur, $\alpha(t)$ helis eğrisi PH eğrisidir.

$\mathbb{R}^3$ de polinomsal her helis eğrisi PH eğrisi iken bu durumun tersi her zaman doğru değildir. Bu duruma kısmi bir cevap için sıradaki teoremi verelim.

Teorem 3.5.3. Eğer uzaysal PH eğrisi helis ise (3.37) denklemleriyle tanımlı olan $\rho(t)$ fonksiyonu tam kare olmalıdır (Farouki 2008).

İspat. $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ PH eğrisi bir helis eğrisi olsun. Bu durumda, $\alpha(t)$ eğrisinin teğet vektörü T, $\vec{v}$ sabit doğrultusuyla sabit açı yapar. Aynı zamanda eğrinin her noktasında binormal vektörü de $\vec{v}$ ile sabit açı yapar.

$$\begin{aligned} \langle B, \vec{v} \rangle &= \sin \Psi \\ \langle \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\| \alpha'(t) \times \alpha''(t) \|}, \vec{v} \rangle &= \sin \Psi \end{aligned}$$

$$\| \alpha'(t) \times \alpha''(t) \| = \frac{1}{\sin \Psi} \langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \vec{v} \rangle \tag{3.42}$$

(3.42) denkleminde $\| \alpha'(t) \times \alpha''(t) \|$ normu bir polinomdur, diğer taraftan $\alpha(t)$ PH eğrisi olup (3.36) denkleminden

$$\| \alpha' \times \alpha'' \|^2 = \sigma^2(t)\rho(t)$$

eşitliğin sol tarafı polinom, sağ tarafında ise $\sigma(t)$ polinomdur.
Dolayısıyla, $\rho(t)$ de bir polinomdur ve eşitliğin sağlanabilmesi için tam kare olmalıdır.

Sonuç 3.5.1. Eğer $\mathbb{R}^3$ de bir PH eğrisi helis ise eğri ÇPH eğrisidir (Farouki 2008).

O halde, $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ helis eğrisi için (3.40) denklemlerinden ve Lancret teoreminden

$$\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle = \tan \Psi w^3(t) \tag{3.43}$$

elde edilir. Eğer $\alpha(t)$ eğrisi n.dereceden bir polinom eğrisi ise $w(t)$ polinomunun derecesi $n-3$ olur.

Sonuç 3.5.2. $\mathbb{R}^3$ de derecesi 3 olan PH eğrileri helistir.

Örnek 3.5.1. $\alpha(t) = \left(\frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - t^2 - t, t^4 - \frac{2}{3}t^3 + 2t^2 - 2t, \frac{-2}{3}t^3 - 2t\right)$ regüler polinomsal eğrisini alalım. $\alpha(t)$ eğrisinin hodografı

$$\begin{aligned} x' &= 2t^4 - 2t^3 + t^2 - 2t - 1 \\ y' &= 4t^3 - 2t^2 + 4t - 2 \\ z' &= -2t^2 - 2 \end{aligned}$$

olup

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (2t^4 - 2t^3 + 5t^2 - 2t + 3)^2$$

Pisagor koşulunu sağlar.

$$\| \alpha' \times \alpha'' \|^2 = 32(t^2+1)^4(2t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 3t + 3) \tag{3.44}$$

(3.44) eşitliğinin sağ tarafı tam kare ifade olmadığından $\alpha(t)$ PH eğrisi helis değildir.

3.6 $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ de PH Eğrisi Üretme

3.6.1 Helis Eğrisinin Dik İzdüşümü

Tanım 3.6.1. $\beta(t) \in \mathbb{R}^3$ eğrisinin ikinci eğriliği $\tau = 0$ ise $\beta(t)$ eğrisi düzlemsel bir eğridir (Struik 1988).

$\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ helis eğrisinin ekseni $\vec{v}$ birim vektörü ve $\| \alpha'(t) \| = \sigma(t)$ olsun. $\alpha(t)$ eğrisinin eksenine dik olan düzleme izdüşüm yaptığımızda elde edilen düzlemsel eğri

$$\beta(t) = \alpha(t) - \langle \alpha(t), \vec{v} \rangle \vec{v} \tag{3.45}$$

dir.

$\beta(t)$ eğrisinin hodografı $\beta'(t)$,

$$\beta'(t) = \alpha'(t) - \langle \alpha'(t), \vec{v} \rangle \vec{v}$$

olup

$$\begin{aligned} \langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle &= \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle - \langle \alpha'(t), \vec{v} \rangle^2 \\ &= \sigma^2(t)(1 - \cos^2 \Psi) \\ &= (\sigma(t) \sin \Psi)^2 \end{aligned}$$

$$\| \beta'(t) \| = \sigma(t) \sin \Psi \tag{3.46}$$

elde edilir.

Sonuç 3.6.1. $\mathbb{R}^3$ de helis eğrilerinin eksenlerine dik izdüşümleri sonucunda elde edilen düzlemsel eğri PH eğrisidir.

Örnek 3.6.1. $\alpha(t) = (6t, 3t^2, t^3)$ helis eğrisi veriliyor. $\alpha(t)$ eğrisinin ekseni $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ ve $\vec{v}$ ile yaptığı sabit açı $45°$ dir. $\alpha(t)$ eğrisinin hodografının normu ise $\| \alpha'(t) \| = \sigma(t) = 3(t^2 + 2)$ dir.
$\alpha(t)$ eğrisinin eksenine dik izdüşümü sonucu elde edilen $\beta(t)$ eğrisi,

$$\beta(t) = \left(3t - \frac{1}{2}t^3, 3t^2, \frac{1}{2}t^3 - 3t \right)$$

dir.
$\beta(t)$ eğrisinin hodografı,

$$\begin{aligned} \| \beta'(t) \| &= \tfrac{3}{\sqrt{2}}(t^2 + 2) \\ &= \| \alpha'(t) \| \sin 45° \end{aligned}$$

olup (3.46) denklemi sağlanır.

3.6.2 $\mathbf{Ox}, \mathbf{Oy}$ ve $\mathbf{Oz}$ Eksenli Helis Eğrisi Üretme

$c(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ bir PH eğrisi olmak üzere,

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \sigma(t)^2$$

sağlanır ve

$$\begin{aligned} x'(t) &= u^2(t) - v^2(t) \\ y'(t) &= 2u(t)v(t) \\ \sigma(t) &= u^2(t) + v^2(t) \end{aligned}$$

olacak şekilde $u(t), v(t)$ reel polinomları mevcuttur.
$c(t)$ eğrisinden üretilen uzaysal $\alpha(t)$ eğrisi,

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \left(x(t), y(t), \int \sigma(t)dt\right) \\ &= \left(\int (u^2(t) - v^2(t))dt, \int (2u(t)v(t))dt, \int (u^2(t) + v^2(t))dt\right) \end{aligned} \tag{3.47}$$

$Oz-$ ekseniyle 45° açı yapan polinomsal bir helis eğrisidir.

Uyarı 3.6.1. Ox veya Oy eksenli helis eğrisi üretmek için "$\int \sigma(t)dt$" değişkenini eğri denkleminde sırasıyla birinci veya ikinci bileşen yapmak yeterlidir ve diğer bileşenlerin permütasyonlarıyla da farklı eğriler oluşturulabilir.

Örnek 3.6.2. $c(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 - t, t^2\right)$ düzlemsel PH eğrisini alalım. $c(t)$ eğrisinin hodografı $c'(t) = (x'(t), y'(t)) = (t^2 - 1, 2t)$ dir. Bu durumda, x' ve y' bileşenlerini karakterize eden polinomlar

$$u(t) = t, v(t) = 1$$

dir.

Dolayısıyla $c(t)$ eğrisinden üretilen x, y ve $z-$ eksenli helis eğrileri sırasıyla

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \left(\frac{1}{3}t^3 + t, t^2, \frac{1}{3}t^3 - t\right)\\ \alpha_y &= \left(\frac{1}{3}t^3 - t, \frac{1}{3}t^3 + t, t^2\right)\\ \alpha_z &= \left(\frac{1}{3}t^3 - t, t^2, \frac{1}{3}t^3 + t\right)\end{aligned}$$

dir.

3.6.3 Herhangi Eksenli Helis Eğrisi Üretme

Teorem 3.6.1. $\beta(t)$, normali $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ olan düzlemde yatan regüler düzlemsel bir eğri ve $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ olmak üzere

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + \sin\theta\beta(t) + (s(t) - s(t_0))\cos\theta\vec{u} \tag{3.48}$$

şeklinde tanımlanan $\alpha(t)$ eğrisi $\alpha(t_0)$ keyfi noktasından geçen ve her noktasındaki teğet vektörü $\vec{u}$ doğrultusu ile θ kadar açı yapan bir helis eğrisidir (Sy 2001).

Örnek 3.6.3. $\beta(t) = \left(3t - \frac{t^3}{2}, 3t^2, \frac{t^3}{2} - 3t\right)$, normali $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ düzleminde yatan düzlemsel bir eğri olmak üzere $\beta(t)$ eğrisinden ekseni $\vec{u}$,teğet vektörünün yaptığı açı $\theta = \frac{\pi}{6}$ ve $\alpha(0) = 0$ olacak şekilde bir helis eğrisi üretelim.

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha(0) + \sin\frac{\pi}{6}\beta(t) + (s(t) - s(0))\cos\frac{\pi}{6}\vec{u}\\ &= \frac{1}{2}\left(3t - \frac{t^3}{2}, 3t^2, \frac{t^3}{2} - 3t\right) + \left(\frac{t^3}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}t\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}t^3 + \frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}t, \frac{3}{2}t^2, \frac{\sqrt{3}+1}{4}t^3 + \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}t\right)\end{aligned}$$

$\alpha(t)$ eğrisinin eğrilikleri,

$$
\begin{aligned}
\kappa &= \frac{2}{3(t^2+2)^2} \\
\tau &= \frac{2\sqrt{3}}{3(t^2+2)^2}
\end{aligned}
$$

olup Lancret teoreminden

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\theta$$

$\alpha(t)$ eğrisinin istediğimiz helis eğrisi olduğu açıktır.

4. MİNKOWSKİ UZAYINDA PİSAGOR-HODAGRAF EĞRİLERİ

Tanım 4.1. ***(Minkowski Pisagor-Hodograf eğrisi)*** $\mathbb{E}_1^n$ de $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t))$ eğrisinin hodografı $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), ..., \alpha_n'(t))$ için,

$$\alpha_1'(t)^2 + \alpha_2'(t)^2 + ... + \alpha_{n-1}'(t) - \alpha_n'(t)^2 = \sigma(t)^2 \tag{4.1}$$

olacak şekilde bir $\sigma(t)$ polinomu varsa, α eğrisine Minkowski Pisagor-Hodograf eğrisi ya da kısaca MPH eğrisi denir (Moon 1999).

Sonuç 4.1. $\mathbb{E}_1^n$ de timelike MPH eğrisi yoktur (Moon 1999).

Sonuç 4.2. $\mathbb{E}_1^n$ de bütün null eğriler MPH eğrisidir (Moon 1999).

4.1 Düzlemsel Minkowski Pisagor-Hodograf Eğrileri

Tanım 4.1.1. ***(Düzlemsel MPH eğrisi)*** $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{E}_1^2$ için α eğrisinin hodografı için

$$x'(t)^2 - y'(t)^2 = \sigma(t)^2 \tag{4.2}$$

sağlanacak şekilde bir $\sigma(t)$ polinomu varsa, α eğrisine düzlemsel MPH eğrisi denir (Moon 1999).

Teorem 4.1.1. $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ düzlemsel MPH eğrisinin hodografı için,

$$\begin{aligned} x'(t) &= [u^2(t) + v^2(t)]w(t) \\ y'(t) &= [2u(t)v(t)]w(t) \\ \sigma(t) &= \pm[u^2(t) - v^2(t)]w(t) \end{aligned} \tag{4.3}$$

olacak şekilde $u(t), v(t), w(t)$ polinomları mevcuttur.

İspat. α eğrisi bir MPH eğrisi olduğundan (4.2) denklemi sağlanır, buradan

$$\sigma(t)^2 + y'(t)^2 = x'(t)^2$$

dir.

Teorem 3.1 den $\sigma(t), y'(t), x'(t)$ polinomlarının karakterizasyonu ile (4.3) denklemlerinin varlığı açıktır.

Tanım 4.1.2. ***(Basit MPH eğrisi)*** $\alpha(t)$ eğrisi için (4.3) denklemleriyle verilen karakterizasyonda $w(t) = 1$ ve $ebob(u(t), v(t)) = 1$ olması durumunda $\alpha(t)$ eğrisine basit MPH eğrisi denir (Moon 1999).

Tanım 4.1.3. ***(Hiperbolik sayı)*** Reel sayılar üzerinde tanımlı,

$$H = \left\{\ z = x + ey \mid x, y \in \mathbb{R}, e^2 = 1\right\} \tag{4.4}$$

cümlesiyle belli olan 2-boyutlu cebirsel yapıya hiperbolik sayı cebiri, herbir elemanına ise hiperbolik sayı denir (Catoni vd. 2011).

$z(t) = u(t) + ev(t)$ polinomsal hiperbolik sayısının $z \to z^2$ olarak tanımlı konformal dönüşüm altındaki görüntüsü

$$z^2(t) = u^2(t) + v^2(t) + (2u(t)v(t))\, e \tag{4.5}$$

dir.

Dolayısıyla, hodografı $u(t), v(t)$ polinomları ile belli olan bir MPH eğrisi hiperbolik düzlemde bir polinomsal hiperbolik sayısı ile karakterize edilebilir.

Teorem 4.1.2. $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ düzlemsel MPH eğrisinin $u(t), v(t)$ polinomlarıyla belli olan hodografı hiperbolik düzlemde $z(t) = u(t) + ev(t)$ hiperbolik sayısı ile

$$\alpha'(t) = z^2(t) \tag{4.6}$$

şeklinde ifade edilir.

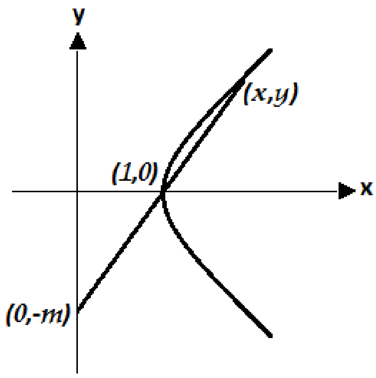
$\mathbb{E}_1^2$, 2-boyutlu Minkowski uzayında MPH eğrilerinin karakterizasyonunu geometrik açıdan yorumlayalım.

Teorem 4.1.3. Rasyonel parametreli $c(t) = (x(t), y(t))$ Minkowski birim çemberi için,

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{a^2(t) + b^2(t)}{b^2(t) - a^2(t)}, \frac{2a(t)b(t)}{b^2(t) - a^2(t)} \right) \tag{4.7}$$

olacak şekilde $a(t), b(t)$ polinomları mevcuttur.

İspat.



Şekil 4.1 Minkowski çemberinin steografik izdüşümü

$x^2 - y^2 = 1$, birim çemberi üzerindeki (x, y) noktalarının $(1, 0)$ merkezli ve y-eksenine izdüşümleri $(0, -m), m \in \mathbb{R}$ tipindeki noktalardır. Tersine, $(0, -m)$ noktasının birim çember üzerindeki görüntüsü olan (x, y) noktasının koordinatları $y = mx - m$ doğrusu ve $x^2 - y^2 = 1$ birim çemberinin ortak çözülmesiyle elde edilen

$$x = \frac{1 + m^2}{m^2 - 1}, \ y = \frac{2m}{m^2 - 1} \tag{4.8}$$

eşitlikleridir.

$m = \frac{b(t)}{a(t)}$ seçilirse (4.8) eşitlikleri

$$x(t) = \frac{a^2(t) + b^2(t)}{b^2(t) - a^2(t)}, y(t) = \frac{2a(t)b(t)}{b^2(t) - a^2(t)}$$

(4.7) denklemlerine dönüşür.

Eğer, izdüşüm yapılacak nokta hiperbolün sol kolunda ise

$$x(t) = \frac{a^2(t) + b^2(t)}{a^2(t) - b^2(t)}, y(t) = \frac{2a(t)b(t)}{a^2(t) - b^2(t)}$$

dir.

Sonuç 4.1.1. $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ MPH eğrisinin hodografı için

$$\begin{aligned} x'(t)^2 - y'(t)^2 &= \sigma(t)^2 \\ \left(\frac{x'(t)}{\sigma(t)}\right)^2 - \left(\frac{y'(t)}{\sigma(t)}\right)^2 &= 1 \end{aligned} \tag{4.9}$$

sağlanır.

Dolayısıyla, teorem 4.1.3 ve (4.9) birim Minkowski çember denklemi göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} x'(t) &= a^2(t) + b^2(t) \\ y'(t) &= 2a(t)b(t) \\ \sigma(t) &= \pm\left(a^2(t) - b^2(t)\right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

olacak şekilde $a(t)$ ve $b(t)$ polinomları mevcuttur.

4.2 Uzaysal Minkowski Pisagor-Hodograf Eğrileri

Tanım 4.2.1. ***(Uzaysal MPH eğrisi)*** $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{E}_1^3$ için α eğrisinin hodografı için

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 - z'(t)^2 = \sigma(t)^2 \tag{4.11}$$

sağlanacak şekilde bir $\sigma(t)$ polinomu varsa, α eğrisine uzaysal MPH eğrisi denir (Moon 1999).

Teorem 4.2.1. $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uzaysal MPH eğrisinin (4.11) denklemini sağlayan hodografı $\alpha'(t)$ için

$$\begin{aligned} x'(t) &= u^2(t) - v^2(t) + p^2(t) - q^2(t) \\ y'(t) &= 2[u(t)q(t) - v(t)p(t)] \\ z'(t) &= 2[u(t)p(t) - v(t)q(t)] \\ \sigma(t) &= \pm\left(u^2(t) - v^2(t) - p^2(t) + q^2(t)\right) \end{aligned} \tag{4.12}$$

olacak şekilde $u(t), v(t), p(t), q(t)$ polinomları mevcuttur (Moon 1999).

İspat. $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{E}_1^3$ MPH eğrisi için (4.11) denkleminden

$$\frac{1}{2}(y'(t) + z'(t))\frac{1}{2}(y'(t) - z'(t)) = \frac{1}{2}(\sigma(t) + x'(t))\frac{1}{2}(\sigma(t) - x'(t)) \tag{4.13}$$

dir.

Polinomlar için tek şekilde çarpanlara ayrılma özelliğinden (4.13) denklemi için $A(t), B(t), C(t), D(t) \in \mathbb{R}[t]$ polinomları mevcuttur.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma(t) + x'(t)) &= A(t)B(t),\ \frac{1}{2}(\sigma(t) - x'(t)) = C(t)D(t) \\ \frac{1}{2}(y'(t) + z'(t)) &= A(t)C(t),\ \frac{1}{2}(y'(t) - z'(t)) = A(t)D(t) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Eğer,

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{A(t) + B(t)}{2},\ v(t) = \frac{B(t) - A(t)}{2} \\ p(t) &= \frac{C(t) - D(t)}{2},\ q(t) = \frac{C(t) + D(t)}{2} \end{aligned} \tag{4.15}$$

seçilirse (4.12) denklemleri elde edilir.

Uyarı 4.2.1. Teorem 4.2.1 de verilen karakterizasyonda ispattan açık bir şekilde $u(t), v(t), p(t), q(t)$ polinomlarının aralarında asal olmasına gerek yoktur. Dolayısıyla verilen koşul çift yönlüdür.

$\mathbb{R}^3$ de PH eğrilerinin karakterizasyonu kuaterniyonlarla ifade etmiştik, $\mathbb{E}_1^3$ de ise MPH eğrilerinin karakterizasyonunu bölünmüş kuaterniyonlarla yapabiliriz. $\tilde{\mathbb{H}}$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.2. ***(Bölünmüş kuaterniyon cebiri)*** Bölünmüş kuaterniyon cebiri $(-,+,+,-)$ işaretli $\mathbb{E}_2^4$ Minkowski uzayında tanımlı birleşmeli, değişmeli olmayan bölümlü olmayan bir halkadır ve

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{H}} = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R},\ i^2 = j^2 = 1, k^2 = -1\} \\ ij = -ji = -k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j \end{aligned} \tag{4.16}$$

olarak tanımlanır, herbir elemanına bölünmüş kuaterniyon denir (Inoguchi 1998).

Tanım 4.2.3. ***(Bölünmüş kuaterniyon)*** $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \tilde{\mathbb{H}}$ bölünmüş kuaterniyonu eğer,
$i.$ $-q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 > 0$, ise spacelike bölünmüş kuaterniyon
$ii.$ $-q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 < 0$, ise timelike bölünmüş kuaterniyon
$iii.$ $-q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 = 0$, ise lightlike bölünmüş kuaterniyon

dur (Inoguchi 1998).

Teorem 4.2.2. $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uzaysal MPH eğrisinin (4.12) denklemleriyle $u(t), v(t), p(t), q(t)$ polinomları cinsinden verilmiş ifadesi $A(t) = u(t) + v(t)i + p(t)j + q(t)k$ polinomsal bölünmüş kuaterniyonu ile

$$\alpha'(t) = A(t) i A^*(t) \tag{4.17}$$

olarak ifade edilir.

İspat. $A(t) = u(t) + v(t)i + p(t)j + q(t)k$ polinomsal bölünmüş kuaterniyonu ve eşleniği $A^*(t) = u(t) - v(t)i - p(t)j - q(t)k$ için

$$\begin{aligned} A(t)iA^*(t) &= (u(t) + v(t)i + p(t)j + q(t)k)i(u(t) - v(t)i - p(t)j - q(t)k) \\ &= (u^2(t) - v^2(t) + p^2(t) - q^2(t))i + 2(u(t)q(t) - v(t)p(t))j \\ &\quad +2(u(t)p(t) - v(t)q(t))k \end{aligned} \tag{4.18}$$

dir.

$\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$ olarak ifade edilebilir, bu durumda (4.12) ve (4.18) denklemleri göz önüne alındığında (4.17) eşitliği elde edilir.

Uyarı 4.2.2. Teorem 4.2.2 de MPH eğrileri için verilen bölünmüş kuaterniyon karakterizasyonunda "i" çarpanı yerine "j" çarpanı da yazılabilir. Elde edilen denklem $u(t), v(t), p(t), q(t)$ polinomlarının farklı bir permütasyonudur.

(4.17) eşitliğini

$$\alpha'(t) = \| A(t) \|^2 \, U(t)iU^*(t) \tag{4.19}$$

$U(t)$ birim bölünmüş kuaterniyonu ile ifade edebiliriz. Eğer,

i. $U(t)$ spacelike ise, $U(t) = \left(\sinh \frac{1}{2}\theta(t) + \cosh \frac{1}{2}\theta(t)\vec{n}(t)\right)$, $\vec{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), n_3(t))$,

ii. $U(t)$ timelike, vektörel kısmı spacelike ise, $U(t) = \left(\cosh \frac{1}{2}\theta(t) + \vec{n}(t)\sinh \frac{1}{2}\theta(t)\right)$, $\vec{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), n_3(t))$,

iii. $U(t)$ timelike, vektörel kısmı timelike ise, $U(t) = \left(\cos \frac{1}{2}\theta(t) + \vec{n}(t)\sin \frac{1}{2}\theta(t)\right)$, $\vec{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), n_3(t))$

dir.

$\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında dönme matrisi timelike bölünmüş kuaterniyonları ile karakterize edilir. Eğer, $\alpha(t)$ MPH eğrisini karakterize eden $U(t)$ birim bölünmüş kuaterniyonu timelike ise bu durumda $U(t)iU^*(t)$ çarpımı Minkowski uzayında $\theta(t)$ açılık $\vec{n}(t)$ vektörü boyunca bir dönme ailesi belirtir.

Ayrıca, dönmeler altında yapı korunduğundan $\alpha(t)$ MPH eğrisinin $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ birim vektörü boyunca Φ açısı kadar dönmesiyle elde edilen $\tilde{\alpha}(t)$ eğrisi de bir MPH eğrisidir. Ve $\tilde{\alpha}(t)$ MPH eğrisinin karakterizasyonunu veren bölünmüş kuaterniyon $\tilde{A}(t) = \tilde{u}(t) + \tilde{v}(t)i + \tilde{p}(t)j + \tilde{q}(t)k$ ise

$$\tilde{A}(t) = UA(t) \tag{4.20}$$

dir.

Eğer,

i. $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ birim vektörü spacelike ise,

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{p} \\ \tilde{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\frac{1}{2}\Phi & n_x\sinh\frac{1}{2}\Phi & n_y\sinh\frac{1}{2}\Phi & -n_z\sinh\frac{1}{2}\Phi \\ n_x\sinh\frac{1}{2}\Phi & \cosh\frac{1}{2}\Phi & -n_z\sinh\frac{1}{2}\Phi & n_y\sinh\frac{1}{2}\Phi \\ n_y\sinh\frac{1}{2}\Phi & n_z\sinh\frac{1}{2}\Phi & \cosh\frac{1}{2}\Phi & -n_x\sinh\frac{1}{2}\Phi \\ n_z\sinh\frac{1}{2}\Phi & n_y\sinh\frac{1}{2}\Phi & -n_x\sinh\frac{1}{2}\Phi & \cosh\frac{1}{2}\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ q \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

ii. $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ birim vektörü timelike ise,

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{p} \\ \tilde{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\Phi & n_x\sin\frac{1}{2}\Phi & n_y\sin\frac{1}{2}\Phi & -n_z\sin\frac{1}{2}\Phi \\ n_x\sin\frac{1}{2}\Phi & \cos\frac{1}{2}\Phi & -n_z\sin\frac{1}{2}\Phi & n_y\sin\frac{1}{2}\Phi \\ n_y\sin\frac{1}{2}\Phi & n_z\sin\frac{1}{2}\Phi & \cos\frac{1}{2}\Phi & -n_x\sin\frac{1}{2}\Phi \\ n_z\sin\frac{1}{2}\Phi & n_y\sin\frac{1}{2}\Phi & -n_x\sin\frac{1}{2}\Phi & \cos\frac{1}{2}\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ q \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

dir.

4.3 $\mathbb{E}_1^2$ ve $\mathbb{E}_1^3$ de MPH Eğrisi Üretme

4.3.1 MPH Helis Eğrisinin İzdüşümü

Tanım 4.3.1. ***(Helis eğrisi)*** $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ eğrisinin her noktasında teğet vektörünün sabit bir $\vec{u} \neq (0,0,0)$ vektörü Minkowski iç çarpımına göre sabit bir fonksiyona eşit ise, $\alpha(t)$ Minkowski uzayında bir helis eğrisidir denir. Sabit olan $\vec{u}$ vektörüne ise helisin ekseni adı verilir (O'Neil 1983).

Minkowski uzayında bir helis eğrisinin ekseni timelike, spacelike ya da null olabilir. Helis eğrisini kendi eksenine dik olan düzleme izdüşüm yapabilmek için bu bölümde timelike ve spacelike eksenli helisler ele alınmıştır.

Teorem 4.3.1. Minkowski uzayında α helis eğrisinin kendi eksenine dik olan düzleme göre izdüşümü bir düzlemsel MPH eğrisi olması için gerek ve yeter koşul α eğrisinin aşağıdaki özelliklerden birini sağlamasıdır

i. α, $\vec{u}$ spacelike eksenli helis eğrisi ve $Sp\{\alpha', \vec{u}\}$ bir spacelike düzlem
ii. α, $\vec{u}$ timelike eksenli bir helis eğrisi.

İspat.
i. α, $\vec{u}$ spacelike eksenli helis eğrisini ele alalım. α eğrisinin normali $\vec{u}$ olan düzlemindeki izdüşüm eğrisi

$$\beta = \alpha - \langle \alpha, \vec{u} \rangle \vec{u} \tag{4.23}$$

dir.
β eğrisinin MPH eğrisi olması için grek ve yeter şart

$$\langle \beta', \beta' \rangle = \rho^2 \tag{4.24}$$

olacak şekilde bir ρ polinomunun var olamasıdır.
Burada α eğrisi bir helis olduğundan $\langle \alpha', \alpha' \rangle = \sigma^2$ sağlanır ve

$$\langle \beta', \beta' \rangle = \sigma^2 - \langle \alpha', \vec{u} \rangle^2 \tag{4.25}$$

elde edilir.
(4.25) eşitliği eğer $Sp\{\alpha', \vec{u}\}$ bir spacelike düzlem ise

$$\langle \beta', \beta' \rangle = \sigma^2 \sin^2 \theta \tag{4.26}$$

olarak elde edilir ve β eğrisi bir düzlemsel MPH eğrisidir, eğer $Sp\{\alpha', \vec{u}\}$ bir timelike düzlem ise

$$\langle \beta', \beta' \rangle = -\sigma^2 \sinh^2 \theta \tag{4.27}$$

dir ve β eğrisi bir MPH eğrisi olmaz.

ii. α, $\vec{u}$ timelike eksenli helis eğrisi ise izdüşüm eğrisi β

$$\beta = \alpha + \langle \alpha, \vec{u} \rangle \vec{u} \tag{4.28}$$

dir.

β eğrisinin hodografı

$$\begin{aligned} \langle \beta', \beta' \rangle &= \langle \alpha', \alpha' \rangle + \langle \alpha', \vec{u} \rangle \\ &= \sigma^2 \cosh^2 \theta \end{aligned} \tag{4.29}$$

(4.29) eşitliğini sağladığından β bir düzlemsel MPH eğrisidir.

Örnek 4.3.1. $\alpha(t) = \left(\frac{3}{5}\left(t + \frac{t^3}{3}\right), \frac{4}{5}\left(\frac{t^3}{3} - t\right), \frac{3}{5}t^2\right)$ eğrisi $\vec{u} = (0,1,0)$ spacelike eksenli bir helis eğrisi olup $Sp\{\alpha', \vec{u}\}$ bir spacelike düzlem belirtir. Bu durumda α helis eğrisinin normali $\vec{u}$ olan düzlemdeki izdüşüm MPH eğrisi β,

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \alpha(t) - \langle \alpha(t), \vec{u} \rangle \vec{u} \\ &= \frac{3}{5}\left(t + \frac{t^3}{3}, 0, t^2\right) \end{aligned}$$

olup

$$\langle \beta', \beta' \rangle = \frac{3}{5} \langle \alpha', \alpha' \rangle$$

dir.

Örnek 4.3.2. $\vec{u} = (0,0,1)$ timelike eksenli $\alpha(t) = \left(\frac{5}{3}\left(\frac{t^3}{3} - t\right), \frac{5}{3}t^2, \frac{4}{3}\left(\frac{t^3}{3} + t\right)\right)$ helis eğrisinin izdüşüm eğrisi β,

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \alpha(t) + \langle \alpha(t), \vec{u} \rangle \vec{u} \\ &= \frac{5}{3}\left(\frac{t^3}{3} - t, t^2, 0\right) \end{aligned}$$

dir.

MPH eğrisi olma koşulu sağlanır

$$\langle \beta', \beta' \rangle = \frac{5}{3} \langle \alpha', \alpha' \rangle.$$

4.3.2 Ox ve Oy Eksenli MPH Helis Eğrisi Üretme

$\alpha(t) = (x(t), y(t))$ düzlemsel MPH eğrisi ve hodografı $x'^2 - y'^2 = \sigma^2$ koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$\begin{aligned} x'(t) &= u^2(t) + v^2(t) \\ y'(t) &= 2u(t)v(t) \\ \sigma(t) &= u^2(t) - v^2(t) \end{aligned}$$

olacak şekilde aralarında asal $u(t)$ ve $v(t)$ polinomları vardır.

O halde aşağıdaki durumlar elde edilebilir.

i. α eğrisinden üretilen Ox eksenli helis,

$$\beta_x(t) = \left(\int \left(u^2(t) - v^2(t)\right) dt, u^2(t) + v^2(t), 2u(t)v(t)\right) \tag{4.30}$$

dir.

ii. α eğrisinden üretilen Oy eksenli helis,

$$\beta_y(t) = \left(u^2(t) + v^2(t), \int \left(u^2(t) - v^2(t)\right) dt, 2u(t)v(t)\right) \tag{4.31}$$

veya

$$\beta_y(t) = \left(u^2(t) + v^2(t), 2u(t)v(t)\right), \int \left(u^2(t) - v^2(t)\right) dt \tag{4.32}$$

dir.

Uyarı 4.3.1. Minkowski uzayında $\sigma(t)$ polinomu yardımıyla MPH helis eğrisi üretme yalnızca Ox ve Oy eksenli helisler için geçerlidir ve bileşenler arasında bir permütasyon yoktur. Aksi takdirde, üretilen eğriler null olur.

4.3.3 Herhangi Eksenli MPH Helis Eğrisi Üretme

Minkowski uzayında $\beta(t)$ spacelike eğrisi normal vektörü $\vec{N}$ olan düzlemde yatan bir MPH eğrisi olmak üzere;
i. $\vec{N}$ bir timelike vektör ise

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) \pm \cosh\theta\beta(t) \pm \sinh\theta(s(t) - s(t_0))\vec{N} \tag{4.33}$$

eğrisi β eğrisinden üretilen MPH helis eğrisidir.

Uyarı 4.3.2. $\vec{N}$ timelike vektörü gelecek yönlendirmeli ise (4.33) denkleminde işaretler pozitif, geçmiş yönlendirmeli ise negatif alınacaktır. Burada bahsi geçen açı α' teğet vektörünün sabit doğrultu $\vec{N}$ ile yaptığı açıdır.

ii. $\vec{N}$ bir spacelike vektör ise teorem 4.3.1 de 1.durum göz önünde bulundurularak üretilen α helis eğrisi

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + \sin\theta\beta(t) + \cos\theta(s(t) - s(t_0))\vec{N} \tag{4.34}$$

dir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Matematikte bir eğri polinomlarla, rasyonel fonksiyonlarla, trigonometrik fonksiyonlarla vd. fonksiyonlar yardımıyla tanımlanabilir. Polinomsal eğrilerin ailesi özellikle bilgisayar, robotik, dizayn, navigasyon ve daha bir çok alanda sıklıkla kullanılır dolayısıyla bu eğrilerin uzunluğuna en iyi yaklaşımın yapılması gerekmektir. Bu eğrilerde yaklaşım için Bezier kontrol noktaları ile Bernstein polinomları kullanılmaktadır. Pisagor teoreminin polinomlara uygulanması ile polinomsal eğrilere yaklaşım farklılaşmıştır. 1990 yılında ise Farouki ve Sakkalis tarafından tanımlanan Pisagor-hodograf (PH) eğrileri ile uzunluğu net olarak hesaplanabilen eğrilerin varlığı ortaya çıkmıştır. İki ve üç boyutlu PH eğrileri için karakterizasyon çalışmaları kompleks sayılar ve kuaterniyonlar kullanılarak Farouki tarafından verilmiştir. Ayrıca bu eğrilerin helis eğrileri ile olan yakın ilişkisi de bulunmuş ve bütün helis eğrilerinin PH eğrisi olduğu fakat tersinin her zaman gerçekleşmediği ispatlanmıştır. Moon ise 2000 yılında PH eğrilerini Minkowski metriğine göre tanımlayarak Minkowski Pisagor-hodograf (MPH) eğrilerini elde etmiş ve steografik izdüşüm yaparak MPH eğrilerinin bir temsilini vermiştir.

Bu tezde PH eğrilerinin uygulama alanlarındaki önemi ve kullanıcılara uygulama kolaylığı sağlaması için düzlemsel ve uzaysal PH eğrilerinin Öklid ve Minkowski uzayında özelikleri detaylı olarak incelenmiştir. Dahası Farouki'nin helis eğrileri ve PH eğrileri ile ilgili verdiği teorem ve sonuçlar ele alınmış ve ispatları verilmiştir. İspatlar verilirken sadece cebirsel değil geometrik yorum da yapışlmıştır. Bu teorem ve sonuçlardan yola çıkarak düzlemsel bir PH eğrisinden uzaysal PH eğrisi üretme problemi araştırılmıştır. Sonuç olarak izdüşüm fonksiyonları kullanılarak uzaysal PH eğrisinin görüntüsü alındığında düzlemsel eğrinin PH olma koşulunu eğer uzaysal PH eğrisi bir helis olursa elde edileceği bulunmuştur. Tersine, düzlemsel eğriden uzaysal PH eğrisi elde edebilmesi ise düzlemsel eğrinin kesinlikle PH olması ve üretilen eğrinin ekseni o düzlemin normali olan helis eğrisi olması ile mümkün olacağı elde edilmiştir. Dahası, çeşitli örneklerle elde edilen sonuçlar dekteklenmiştir.

Diğer yandan, Farouki ve Sakkalis'in PH eğrileri için Öklid uzayında yaptığı çalışmaları Minkowski metriğine göre inceledik, ve Moon'un tanımlamış olduğu MPH eğrileri için düzlemsel eğrileri hiperbolik sayılarla, uzaysal eğrileri ise bölünmüş kuaterniyonlarla karakterizasyonlarını yaptık. Uzaysal PH eğrisinin geometrik yorumu Moon tarafından verilirken bizde düzlemsel eğriler için birim Minkowski çemberi yardımıyla verdik. Helis ve MPH arasındaki bağı Minkowski metriğine göre çeşitli izdüşüm ve üretme fonksiyonları oluşturarak elde ettik.

KAYNAKLAR

Catoni, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V. and Zampetti, P. 2011. Geometry of Minkowski Space-Time. Springer, New York.

Choi, H. I., Lee, D. S. and Moon, H. P. 2002. Clifford algebra, spin representation, and rational parameterization of curves and surfaces. Adv. Comp. Math., 17, 5-48.

Dietz, R., Hoschek, J. and Jüttler, B. 1993. An algebric approach to curves and surfaces on the sphere and on other quadrics. Comput. Aided Geom. Design, 10, 211-229.

Farouki, R. T. and Sakkalis, T. 1990. Pythagorean hodographs. IBM journal of Research and Development, 34, 736-752.

Farouki, R. T. 1992. Pythagorean-hodograph curves in pratical use. Geometry Processing for Design and Manufacturing, SIAM, 3-33.

Farouki, R. T. 1994. The conformal map $z \rightarrow z^2$ of the hodograph plane. Comput. Aided Geom. Design, 11, 363-390.

Farouki, R. T. and Sakkalis, T. 1994. Pythagorean-hodograph space curves. Advances in Computational Mathematics, 2, 41-66.

Farouki, R. T. 2006. Algorithms for spatial Pythagorean-hodograph curves. Geometric Properties for Incomplete Data, Springer, 43-58.

Farouki, R. T. 2008. Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable. Springer, Berlin.

Inoguchi, J. 1998. Timelike surfaces of constant mean curvature in Minkowski 3-space. Tokyo J. Math., 21, 140-152.

Kreyszig, E. 1959. Differential Geometry. University of Toronto Press.

Kubota, K. K. 1972. Pythagorean triples in unique factorization domains. American Mathematical Monthly, 79, 503-505.

Lancret, M. A. 1806. Mémoire sur les courbes à double courbure. Mémoires présentés à l'Institut1, 416-454.

Larson, R. 2012. Elementary Linear Algebra. The Pennsylvania State University, Boston.

Moon, H. P. 1999. Minkowski Pythagorean hodographs. Comput. Aided Geom. Design, 16, 739-753.

O'Neil, B. 1983. Semi-Riemannian Geometry. Academic Press, New York.

Pottman, H. and Wallner, J. 2010. Computational Line Geometry. Springer-Verlag, Berlin.

Ratcliffe, J. G. 1994. Foundation of Hyperbolic Manifolds. Springer-Verlag, New York.

Solla Price, D. J. The Babylonian "Pythagorean triangle" table. Centaurus, 10, 219-231.

Struik, D. J. 1988. Lectures on Classical Differential Geometry. Dover, New York.

Sy, S. 2001. General Helices and Other Topics in The Differential Geometry of Curves. Master Thesis, Michigan Technological University.

Ward, J. P. 1997. Quaternions and Cayley Numbers: Algebra and Applications. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Çağla RAMİS
Doğum Yeri	:	Keçiören
Doğum Tarihi	:	22.08.1989
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	(YDA) Aydın Efeler Lisesi (2007)
Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (Haziran 2011)
Yüksek Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2011 - Ocak 2014)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

1. Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi (2012 – 2013)
2. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi (2013 – ...)

Yayınları (SCI ve diğer)

1. **Ramis, Ç.** ve Yaylı, Y. 2013 Dual split quaternions and Chasles' theorem in 3-dimensional Minkowski space $\mathbb{E}_1^3$. Adv. Appl. Clifford Algebras, 23, 951-964.