

**T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAGLEY-TORVİK DENKLEMİNİN KESİRLİ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM
METODU İLE ÇÖZÜMÜ VE DİĞER YÖNTEMLERLE KARŞILAŞTIRILMASI**

YÜCEL ÇENESİZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

KONYA-2007

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAGLEY-TORVİK DENKLEMİNİN KESİRLİ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE ÇÖZÜMÜ VE DİĞER YÖNTEMLERLE KARŞILAŞTIRILMASI

Yücel ÇENESİZ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Aydın KURNAZ

2007, 49 Sayfa

Jüri: Doç. Dr. Galip OTURANC

Yrd. Doç. Dr. Aydın KURNAZ

Doç. Ahmet BERKSOY

Bu çalışmada, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümleri araştırılmış bunun için diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Özellikle kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerde önemli yeri olan Bagley-Torvik denklemi incelenmiştir. Diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılarak lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürülebilir ve elde edilen cebirsel denklemler de bazı basit işlemlerle kolaylıkla sistematik bir şekilde çözülebilir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Diferansiyel Denklemler, Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, Bagley-Torvik denklemi

ABSTRACT

Ms Thesis

SOLUTION OF BAGLEY-TORVİK EQUATION BY DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD AND COMPARISON WITH OTHER METHODS

Yücel ÇENESİZ

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Aydın KURNAZ

2007, 49 Page

Jury: Assoc. Prof. Dr. Galip OTURANÇ

Asst. Prof. Dr. Aydın KURNAZ

Assoc. Prof. Ahmet BERKSOY

In this study, the differential transform method is used for solving fractional differential equations. Especially Bagley-Torvik equation which has an important role in fractional differential equations has been analysed by this method. Using differential transform method, linear or nonlinear differential equations can be transformed into simple algebraic equations. Then these equations can be easily dealt with and solved systemically.

Key words: Fractional Differential Equations, Differential Transform Method, Bagley-Torvik equation.

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ.....	1
1.1. Amaç ve kapsam.....	1
1.2. Literatür Özeti.....	2
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1. Adi diferansiyel denklem.....	4
2.2. Kısmi diferansiyel denklem.....	4
2.3. Kesirli integralin sağladığı bazı özellikler.....	7
3.BAGLEY-TORVİK DENKLEMİ.....	10
3.1. Bagley-Torvik denkleminin tarihçesi.....	10
3.2. Bagley-Torvik denkleminin elde edilmesi.....	11
3.3. Bagley-Torvik denklemiyle ilgili yapılan çalışmalar.....	15
4. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ.....	17
4.1. Kesirli Dönüşüm Yöntemi.....	19
5.DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ.....	22
5.1. Kesirli Diferansiyel Denklemlere Yöntemin Uygulanması.....	23
6. BAGLEY-TORVİK DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ VE DİĞER METODLARLA KARŞILAŞTIRILMASI.....	29
7.GENEL SONUÇ VE ÖNERİLER.....	36
8. TABLO VE MAPLE KODLARI.....	37
KAYNAKLAR.....	46

ÖNSÖZ

Diferansiyel denklemler, özellikle lineer diferansiyel denklemler ve kesirli diferansiyel denklemler teorik ve pratik bakımdan büyük önem taşımakta ve bütün fen ve mühendislik bilim dallarında çok geniş bir uygulama yeri bulmaktadır.

Bu çalışmanın ilk bölümünde bu tezin yapılma amacı belirtilmiş ve şimdiye kadar yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir. Sonraki bölümde ise diferansiyel denklemler hakkındaki temel kavramlar aktarılmıştır. 3. bölümde kesirli cebir literatüründe önemli bir yere sahip olan Bagley-Torvik denkleminin detaylı bir analizi yapılmıştır. 4. ve 5. bölümlerde sırasıyla Diferansiyel Dönüşüm yöntemi ve bu yöntemin kesirli diferansiyel denklemlere uygulanması hakkında gerekli tanım ve teoremler verilmiş, konu hakkında örnekler çözülmüştür. 6. bölümde Bagley-Torvik denkleminin diferansiyel dönüşüm metoduyla çözümü verilmiş diğer metotlarla yapılan çözümlerle karşılaştırmalı grafiği verilerek metodun kullanılabilirliği gösterilmiştir. Son bölümde ise çalışmadan elde edilen sonuçlar verilmiş, temel bazı dönüşümler tablo halinde gösterilmiş ve bazı maple kodları eklenmiştir.

Tez konusunun seçimi ve yürütülmesi konusundaki yardımları ve yakın ilgisinden dolayı sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Aydın KURNAZ' a, tavsiyelerini hiçbir zaman eksik etmeyen sayın hocam Doç. Dr. Galip Oturanç' a, yardımlarından dolayı Arş. Gör. Yıldırım Keskin' e ve desteğini esirgemeyen herkese teşekkürlerimi sunarım.

Yücel Çenesiz

Konya, 2007

1. GİRİŞ

1.1. Amaç ve Kapsam

Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi kullanılarak karşılaşılan karmaşık ve yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler (ısı iletim denklemi, dalga denklemi, Poisson denklemi gibi) ve diğer mühendislik problemlerinin çözümünü elde etmek mümkündür. Kullanılan yöntem, kullanım açısından elverişli ve çabuk sonuca götüren bir yöntemdir. Laplace ve Fourier dönüşümleri gibi yöntemlerle karşılaştırıldığında, dönüşüm yöntemi daha pratik ve daha zaman kazandırıcı ve bilgisayar programlamasına uygundur.

Bu yöntem kullanılarak kısmi türevli diferansiyel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürülebilir ve elde edilen cebirsel denklemler de bazı basit işlemlerle kolaylıkla sistematik bir şekilde çözülebilir. Ayrıca diferansiyel dönüşüm metodu diğer yaklaşık çözüm yöntemleriyle karşılaştırıldığında daha kolay çözüme ulaştırır. Buna ek olarak diferansiyel dönüşüm metodunun lineer ve lineer olmayan problemlerin çözümünün yanı sıra, sürekli olmayan sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde de çalıştığı da görülebilir.

1.2. Literatür Özeti

Zhou (1986) çalışmasında ilk olarak Diferansiyel Dönüşüm Yöntemini, elektrik devre analizlerinde ortaya çıkan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini çözmek için ortaya koymuştur. Chen, C.K., Ho, S.H.(1996) ise çalışmasında, diferansiyel dönüşüm (DT) metodunu özdeğer problemlerine uygulamıştır. Özdeğerlerin ve özfonksiyonların bulunmasında kullanılan en çok bilinen yöntemler olan Ritz ve Galerkin yöntemlerinde, $i \geq 2$ için i . özdeğerin bulunması oldukça güç olup Chen ve Ho yaptıkları çalışmada diferansiyel dönüşüm (DT) metodu ile özdeğerleri ve özfonksiyonları elde etmişlerdir. Daha sonra Chen, C.K., Ho, S.H.; (1999) yalnızca adi türevli diferansiyel denklemler için uygulanabilen diferansiyel dönüşüm metodunu, bu çalışmayla birlikte ilk olarak kısmi türevli diferansiyel denklemlere genişletmiş olup bunun için iki boyutlu diferansiyel dönüşümü tanımlamıştır. Ayrıca Jang, M.J., Chen, C.L., Liu, Y.C.:(2000) çalışmalarında, ilk olarak lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemleri gridler yardımıyla diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanarak çözmüşlerdir. Nümerik yöntemlerde sıklıkla gridlerden faydalanılmasına rağmen ilk olarak bu çalışmada dikkate alınmış olmakla birlikte hem daha iyi sonuçlar elde edilmiş hem de çözümün global hatası kontrol altına alınmıştır. Bunlara ek olarak Ayaz, F., (2004). çalışmasında lineer cebirsel-diferansiyel denklemlerin çözümünü DT metodu ile inceleyerek konuyla ilgili örneklerden elde edilen sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırmıştır.Kurnaz A., Oturanç, G. (2005) çalışmalarında ise ; DT metodunu çözümün arandığı aralıktaki çözüm fonksiyonu gridlere bölerek sistemlere uygulamış böylece çözüm fonksiyonu her bir alt aralık için bulunarak çözüme yaklaşılmıştır. Bununla birlikte hata kontrolü yapılarak hata için sisteme girilen üst sınıra bağlı olarak, alınması gereken minimum grid sayısı tespit edilmiştir. Ertürk V. S., Momani S., Odibat Z. (2007) çalışmaları, Caputo anlamında türevlere sahip yüksek mertebeli lineer ve lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için Diferansiyel dönüşüm yönteminin uygulanmasını ve konuyla ilgili çözülmüş örnekleri içermektedir. Ayrıca Momani S., Odibat Z. (2007) çalışmalarında lineer kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri için kesirli fark yöntemi, Adomian

Decomposition yöntemi ve varyasyonel iterasyon teknikleri kullanılarak farklı tip problemler için çözümler elde etmiş ve analitik sonuçlar karşılaştırmışlardır. Oturaç G., Kurnaz A., Keskin Y.(2007). çalışmalarında kesirli türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerine yönelik yeni bir yaklaşık analitik metod sunmuşlardır. Bu yöntemle ilgili tanım ve teoremler verilip lineer veya lineer olmayan denklemler için çözümler incelenmiştir. Ayrıca Kurnaz A., Keskin Y., Oturaç G. (2007) çalışmalarında lineer olmayan kesirli türevli diferansiyel denklem sistemlerine ve lineer çok terimli diferansiyel denklemlerin çözümlerine yönelik yeni bir yaklaşık analitik metodunu sunmuşlar, verilen teknikle ilgili problem çözümleri verilmiştir. S. Saha Ray, R.K. Bera, (2005 çalışmalarında kullanılan analiz ile $\frac{3}{2}$ mertebeli kesirli diferansiyel denklemlere ayrışma metodu uygulanmıştır. Böylece $\frac{3}{2}$ mertebeli lineer kesirli diferansiyel denklemlerin çözümüne bu metodun uygun olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu çalışmada Bagley-Torvik denkleminin çözümünü elde etmek için analitik bir düzen ortaya konulmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Mühendislikte, fiziki bilimlerde, sosyal bilimlerde ve daha birçok bilim dalında çok sayıda problemi çözebilmek için önce bu problemleri matematiksel ifadelerle formülleştirmek ve sonra da bunlarla ilgili bazı sınır şartları, başlangıç şartlarını kullanarak problemlerin çözümleri oluşturan fonksiyonları bulup ortaya koymak gerekir. Bilinen bir problemi formülize eden bu matematiksel ifadeler bazen aranan fonksiyonun en azından birinci mertebeden veya daha yüksek mertebeden türevlerini içermektedir. İşte bu çeşit bir matematiksel ifadeye *diferansiyel denklem* denir.

2.1. Adi Diferansiyel Denklem

Adi türevli diferansiyel denklem,

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$$

şeklinde yazılır. Bu diferansiyel denklem *n. mertebeden türevli diferansiyel denklem* olarak adlandırılır.

Bir diferansiyel denklemde bir veya daha fazla sayıda bağımlı değişken olmasına karşın eğer yalnız bir bağımsız değişken varsa bu denkleme *adi türevli diferansiyel denklem* denir.

2.2. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Bir diferansiyel denklem, bir tek bağımlı değişkenin iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişken cinsinden türevlerini içeriyorsa bu denkleme *kısmi türevli diferansiyel denklem* denir

A, B, C, D, E, F ve G, x ve y bağımsız değişkenlerinin fonksiyonları olmak üzere, ikinci mertebeden lineer kısmi türevli diferansiyel denklem;

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x, y) \quad (2.2.1)$$

şeklindedir. $G(x,y)=0$ ise (2.2.1) denklemi

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0 \quad (2.2.2)$$

şekline indirgenir. (2.2.2) kısmi türevli diferansiyel denklemi parabolik eliptik ve hiperbolik olmak üzere 3 farklı tipi vardır.

A, B, C, D, E ve F katsayıları gerçel sabitler olmak üzere x ve y değişkenlerine göre

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.2.3)$$

şeklinde ikinci dereceden cebirsel denklemin “ Δ ”sına bakılarak tipi belirlenebilir.

Bu durumda;

$$\Delta = B^2 - 4AC \begin{cases} \Delta < 0 & \text{ise eliptik diferansiyel denklem} \\ \Delta = 0 & \text{ise parabolik diferansiyel denklem} \\ \Delta > 0 & \text{ise hiperbolik diferansiyel denklem} \end{cases}$$

gösterdiği bilinmektedir.

Tanım 2.1: $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon Gamma Fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu integral, $n > 0$ için yakınsak olup Gamma fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir.

$$1. \quad \Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)$$

dir. Özel olarak, sırasıyla $n = 1, 2, 3, 4$ için,

$$\Gamma(1) = 0! = 1,$$

$$\Gamma(2) = 1! = 1,$$

$$\Gamma(3) = 2! = 2.1,$$

$$\Gamma(4) = 3! = 3.2.1$$

elde edilebilir. Daha genel olarak, tümevarımla,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

bulunur. Bu yüzden Gamma fonksiyonuna faktöriyel fonksiyonu da denir.

$$1. \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$2. \quad n < 0 \text{ için } \Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} \text{ ile tanımlanır.}$$

$$3. \quad \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, 0 < p < 1$$

$$4. \quad 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x) \text{ Bu formüle Gamma fonksiyonu için çoğalma formülü adı verilir.}$$

$$5. \quad \Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx = -\gamma \text{ burada } \gamma \text{ 'ya Euler sabiti denir.}$$

$$6. \quad \Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx = -\gamma$$

Tanım 2.2.[Momani,2007] $x > 0$ ve $f(x)$ reel fonksiyonu için $f_1(x) \in C[0, \infty)$ olmak üzere $f(x) = x^p f_1(x)$ olacak şekilde bir $p > \mu$, ($\mu \in \mathbb{R}$) reel sayısı varsa $f(x)$ reel fonksiyonuna C_μ 'dedir denir. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ve $f^{(n)} \in C_\mu$ ise bu taktirde $f(x)$ reel fonksiyonuna C_μ^n 'dedir denir.

Tanım 2.3. Bir $f \in C_\mu$, $\mu \geq -1$ fonksiyonu için $\alpha \geq 0$ mertebeli, Riemann-Liouville ${}_a I_t^\alpha \equiv {}_a D_t^{-\alpha}$ integral operatörü,

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) \equiv {}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-u)^{\alpha-1} f(u) du \quad t \geq a \quad (2.2.4)$$

biçiminde tanımlanır. Özel olarak $\alpha = 0$ için , Riemann-Liouville integral operatörü,

$${}_a I_t^0 f(t) = f(t)$$

olarak bulunur.

Tanım 2.4. $n-1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere herhangi bir mertebeden kesirli türev $n - \alpha$ mertebeli kesirli integrasyon yardımıyla

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^n {}_a D_t^{\alpha-n} f(t)$$

biçiminde tanımlanır. Özel olarak

$${}_a D_*^\alpha f(t) = {}_a D_t^n {}_a I_t^{n-\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-u)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(u) du \right], & n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) & , n = \alpha \end{cases} \quad (2.2.5)$$

yazılabilir. $a = 0$ için, (2.2.4) ve (2.2.5) denklemleri sırasıyla Riemann-Liouville integral ve türevleri olarak bilinir.

Kesirli türev kavramı için Riemann-Liouville tanımının dışında bu tanım üzerindeki bazı değişikliklerle elde edilen ve Caputo'nun verdiği ve Caputo türevi olarak da bilinen tanımı dikkate alacağız. Çünkü; başlangıç değer problemleri için Caputo'nun tanımı daha kullanışlıdır.

2.3. Kesirli integralin sağladığı bazı özellikler

1. Lineerlik özelliği

$$D^q(x + y) = D^q(x) + D^q(y)$$

$$D^q(ax) = aD^q(x)$$

2. Birleşme (yada yarıgrup) özelliği

$$D^a D^b(x) = D^{a+b} x$$

3. Sıfır eleman

$$D^0(x) = x$$

4. Alt küme olma özelliği

$$D^a(x) = d^a(x), \quad a \text{ doğal sayısı için}$$

5. Difintegrasyon için çarpım kuralı

$$D_t^q(x+y) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{q}{j} D_t^j(x) D_t^{q-j}(y)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Tanım 2.5. Bir $f(t)$ reel değerli fonksiyonunun Caputo anlamındaki kesirli türevi; ve $f(t) \in C_{-1}^n$ için

$${}_a D_*^\alpha f(t) = {}_a I_t^{n-\alpha} {}_a D_t^n f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-u)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(u) du, & n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, t > 0 \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) & , n = \alpha \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Caputo anlamındaki kesirli türev tanımına ait bazı özellikler Jafari H., Daftardar-Gejji V tarafından aşağıdaki gibi sıralanmıştır.

1. $D_*^\alpha f(t) = {}_a I_t^{n-\alpha} {}_a D_t^n f(t) \neq {}_a D_t^n {}_a I_t^{n-\alpha} f(t) = {}_a D_t^n f(t),$
2. $D_*^\alpha f(t) = {}_a D_t^n \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0^+) \right),$
3. $D_*^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D_*^\alpha f(t) + \mu D_*^\alpha g(t), \lambda, \mu$ birer sabit.
4. $D_*^\alpha D_*^\beta f(t) = D_*^{\alpha+\beta} f(t), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+.$
5. $D_*^\alpha (t^j) = \begin{cases} 0, & j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ ve } j < n \\ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)} t^{j-\alpha}, & j \in \mathbb{N} \text{ ve } j \geq n \text{ veya } j \notin \mathbb{N} \text{ ve } j > n \end{cases}$
6. Herhangi bir C sabiti için, $D_*^\alpha C = 0,$
7. $D_*^\alpha {}_a I_t^\alpha f(t) = f(t),$
8. ${}_a I_t^\alpha D_*^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0^+), n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N},$

Tanım 2.6. $m, m < p < m+1$ şartını sağlayan bir tamsayı, f sürekli bir fonksiyon, $f^k(t), (k=1,2,\dots,m+1)$ türevleri de $[a,t]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun p . mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi

$$D^p f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanabilir.

3.BAGLEY TORVİK DENKLEMİ

3.1. Bagley-Torvik denkleminin Tarihçesi

$$AD_t^2x(t) + BD_t^{3/2}x(t) + Cx(t) = f(t) \quad (3.1.1)$$

şeklindeki Bagley-Torvik denklemi Newton sıvısına batırılmış katı plakaların hareketinin modellenmesi sonucu ortaya çıkmıştır. Burada $A \neq 0$ ve $B, C \in \mathfrak{R}$ olarak alınmıştır. Bu denklem ilk olarak Bagley (1984) tarafından teklif edilmiş Podlubny(1999) ve Trinks(2002) tarafından incelenmiştir.

İyi bilinir ki kesirli diferensiyel denklemler için başlangıç şartlarının kişiye uygun seçimi özel bir meseledir. Lorenzo ve Hartley problemi doğru olarak formulize ettiği, çözümler için önerilen yanlış başlangıç değerlerinin etkisini analiz ettiği çalışmalarında başlangıç değerlerinin etkisini ele almıştır.

Podlubny'nin(1999) öncekini takip eden çalışmasında , şu anki analizde,

$$x(0) = 0 \text{ ve } D_t x(t)|_{t=0} = 0 \quad (3.1.2)$$

homojen başlangıç değerlerinin dinamik süreçte karşılık geldiğini kabul edeceğiz.

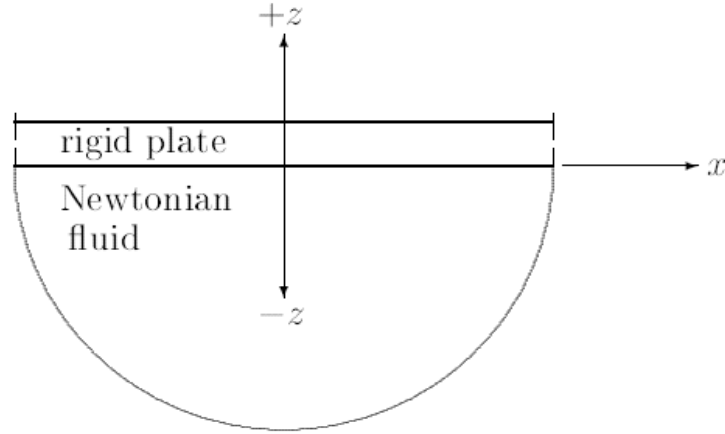
Denklemini bulanlardan Peter Torvik lisans eğitimini Minnesota Üniversitesinde Hava akımları mühendisliği bölümünde yapmış yüksek lisans eğitimini aynı üniversitede Mekanik ve Malzeme üzerine yapmıştır. Doktorasını da bu üniversitede Mühendislik Mekaniği üzerine yapan yazar 1980'de Wright State Üniversitesinde eğitmen olarak, 1988'de Pensilvanya State Üniversitesinde idareci olarak göreve başlamıştır.

Profesör Torvik esneklik, dalga yayılımı, şok ve titreşim, uçak sistemlerinde çarpışma etkisi, lazer materyallerin etkileşimi teorilerinde uzmandır. Öncelikli araştırma konuları yapı dinamiği çarpışma ve etki mekaniği, sürekli ve farklı sistemlerde titreşimin etkisi, enerji dağılımı ve dağılan materyallerin dağılımı üzerinedir.

3.2. Bagley-Torvik Denklemine Elde Edilmesi

Bagley ve Torvik(1984) Newton sıvısına batırılmış plakaların hareketini incelerken $\alpha = \frac{3}{2}$ mertebeli kesirli diferensiyel denklemin türevini almıştır.

Şekil 3.2.1 deki gibi gösterilen yarı alandaki Newton yapışkan sıvısını düşünelim. Bu yüzeydeki hareketler sonsuz yüzeydeki genel enine hareketler sebebiyle meydana gelmektedir. Yarı alandaki sıvının hareketinin denklemi difüzyon denklemidir.



Şekil 3.2.1 Yarı alandaki Newton sıvısı

$$\rho \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} \quad (3.2.1)$$

(3.2.1) denkleminde, ρ sıvının yoğunluğu, μ viskozite ve $v(z,t)$ de z ve t fonksiyonlarının enine sıvı hızını tanımlamakta kullanılmaktadır. (3.2.1) denkleminin Laplace dönüşümünü alarak ve zaman türevlerinin davranışları için aşağıdaki

$$L\left[\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right] = sL[f(t)] - f(t=0) \quad (3.2.2)$$

kuralını kullanarak

$$\rho sL[v(z,t)] - \rho v(z,t=0) = \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} L[v(z,t)] \quad (3.2.3)$$

eşitliğini elde ederiz. Bagley ve Torvik sıvının içinde başlangıç hız profilini sıfır olarak varsayarak (3.2.3) denklemini

$$\rho s L[v(z, t)] = \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} L[v(z, t)] \quad (3.2.4)$$

denkleminde indirger. Sadece zaman değişkeni bakımından Laplace dönüşümü hesaplandığı zaman z 'nin derinlikleri açısından hız profili için aşağıdaki gösterim kullanılabilir.

$$v(z, t) = v(t) e^{\lambda z} \quad (3.2.5)$$

$$L[v(z, t)] = e^{\lambda z} L[v(t)] \quad (3.2.6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} L[v(z, t)] = \lambda^2 e^{\lambda z} L[v(t)] \quad (3.2.7)$$

(3.2.6) ve (3.2.7) denkleminin (3.2.4) denkleminde eklenmesiyle λ bilinmeyen parametresine bağlı

$$\rho s e^{\lambda z} L[v(t)] = \mu \lambda^2 e^{\lambda z} L[v(t)], \quad \lambda = \sqrt{\frac{s\rho}{\mu}} \quad (3.2.8)$$

denklemini elde ederiz. Sıvının $z = 0$ noktasındaki plakanın öngörülen hızıyla eşleşen sınır koşullarından, $v_p(t)$, eksiksiz hız profili

$$v(z = 0, t) = v(t) = v_p(t) \rightarrow v(z, t) = v_p(t) e^{\sqrt{\frac{s\rho}{\mu}} z} \quad (3.2.9)$$

türevlenebilir. Bir sonraki adımda, aşağıdaki eşitlikte

$$\sigma(z, t) = \mu \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \quad (3.2.10)$$

Newton akışkanının ilişkisini gösteren kesinti yukarıdaki özellikleri kullanarak Laplace bölgesine dönüştürülür.

$$L[\sigma(z, t)] = \mu \sqrt{\frac{s\rho}{\mu}} e^{\sqrt{\frac{s\rho}{\mu}} z} L[v(t)] = \sqrt{\mu\rho} \sqrt{s} L[v(z, t)] \quad (3.2.11)$$

denklemini

$$L[\sigma(z, t)] = \sqrt{\mu\rho} \frac{s}{\sqrt{s}} L[v(z, t)] \quad (3.2.12)$$

şeklinde yazılabilir. Aşağıdaki iki dönüşüm (3.2.12) denklemini için tanımlanabilir.

$$sL[v(z,t)] = L\left[\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\right] \quad (3.2.13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{s}} = L\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{t}}\right] \quad (3.2.14)$$

(3.2.13) ve (3.2.14) denklemlerini kullanarak

$$L[\sigma(z,t)] = \sqrt{\mu\rho}L\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{t}}\right]L[\dot{v}(z,t)] \quad (3.2.15)$$

denklemini elde ederiz. (3.2.15) deki iki dönüşümün çarpımı ters dönüşümü hesapladığımız zaman

$$\sigma(z,t) = \sqrt{\mu\rho} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^t \frac{\dot{v}(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \quad (3.2.16)$$

denklemine karşılık gelir. Başlangıç hız profili sıfır olduğu varsayıldığından, (3.2.16) denklemi

$$\sigma(z,t) = \sqrt{\mu\rho} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{v(z,\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau = \sqrt{\mu\rho} D_t^{\frac{1}{2}} v(z,t) \quad (3.2.17)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (3.2.17) denkleminde $\alpha = \frac{1}{2}$ mertebeli kesirli bir türev

Newton sıvısının yarı alandaki kalan gerilimi-hız ilişkisi şeklinde tanımlanabilir. Bu yüzden m kütesinin katı bir plakası sonsuz Newton sıvısına aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi batırılmıştır. Plaka k katılığının sayesinde sabit bir noktada tutulabilir denilebilir. Varsayılabilir ki ortaya çıkan hareketler sıvının hareketini etkilemez ve plakanın A alanı çok büyüktür, öyle ki (3.2.16) denklemindeki gerilim-hız ilişkisi plakanın her iki tarafında da geçerlidir. Plakaya etki eden bütün kuvvetler dengesi

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) + 2A(z=0,t) = 0$$

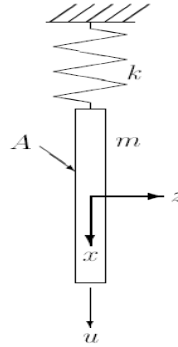
denklemini verir. (3.2.17) denklemini değiştirerek,

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) + 2A\sqrt{\mu\rho_0}D_t^{\frac{1}{2}}v(z=0,t) = 0$$

denklemini elde ederiz.

$$v(z=0,t) = \dot{u}(t)$$

denklemini ve $\alpha = \frac{3}{2}$ mertebeli kesirli diferansiyel denklem sonsuz Newton sıvısına batırılmış katı plakanın yer değiştirmesini takip etmek içindir. Burada belirtmek gerekir ki yer değiştirmenin kesirli türevi yukarıdaki basit fiziksel sistemin hareketinin tanımlanması sonucu meydana gelir. Aynı yolla, $\frac{3}{2}$ mertebeli kesirli türev, güç-yer değiştirme ilişkisinin sonsuz kırılganlık temelini zamanla ilgisi bakımından asimptotik parçası aşağıdaki şekildeki gibi taşınırken elde edilir.[C. Trinks, P. Ruge,2002]



Şekil 3.2.2 Asimptotik parçanın taşınması

3.3. Bagley-Torvik Denklemiyle İlgili Yapılan Çalışmalar

Bagley-Torvik denklemi üzerine şimdiye kadar değişik çözüm metotları uygulanmış, diğer çözüm metotlarıyla karşılaştırmalar yapılmıştır.

Podlubny(1999) yılındaki çalışmasında,

$$AD_t^2 x(t) + BD_t^{3/2} x(t) + Cx(t) = f(t)$$

Bagley-Torvik denklemine katsayıları $A=1, B=0.5, C=0.5$, başlangıç şartları

$y(0)=0, y'(0)=0$ ve $f(t)$ fonksiyonunu da $f(t) = \begin{cases} 8, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$ şeklinde alarak

nümerik olarak çözmüştür.

Ray ve Bera(2005) yaptıkları çalışmada Bagley-Torvik denklemini Podlubny ile aynı başlangıç koşullarını ve aynı A, B, C ve $f(t)$ değerleriyle Adomian Ayrıştırma Metodunu kullanarak çözmüştür. Ayrıca bu çalışmada iki çözümün karşılaştırmalı bir grafiği de mevcuttur.

Gejji ve Jafari[2004] yaptıkları çalışmada Bagley-Torvik denklemini bir sistem haline getirdikten sonra Adomian Ayrıştırma Metodunu kullanarak çözmüşlerdir.

Sayed, Mesiry ve El-Saka[2004] çalışmalarında çeşitli A, B, C ve $f(t)$ değerleri için Bagley-Torvik denkleminin nümerik çözümünü elde etmişlerdir.

Edwards, Ford ve Simpson[2002] yaptıkları çalışmada Bagley-Torvik denklemini sistem haline getirmişler ve nümerik olarak çözümünü elde etmişlerdir.

Diethelm ve Ford[2001] Bagley-Torvik denklemini sistem haline getirmiş ve Adams tipi yaklaşımı kullanarak nümerik olarak çözmüştür.

Arıkoğlu ve Özkol[2006] çalışmalarında $A=1, B=1, C=1$ almış, sınır koşullarını $x(0)=1, x'(0)=1$ olarak belirlemiş ve $f(t)$ fonksiyonunu da $f(t) = C(1+t)$ alarak diferansiyel dönüşüm metoduyla çözmüşlerdir.

Hu, Luo ve Lu[2007] yaptıkları çalışmada başlangıç şartları $y(0)=0$, $y'(0)=0$ olmak üzere Bagley-Torvik denklemini Adomian Ayrıştırma Metodunu kullanarak çözmüşlerdir.

Ertürk, Momani ve Odibat[2007] çalışmalarında Bagley-Torvik denklemini

$$\frac{d^\mu y}{dt^\mu} - a \frac{d^{\beta_1} y}{dt^{\beta_1}} - b \frac{d^{\beta_2} y}{dt^{\beta_2}} = 0$$

olarak ifade etmiştir. Başlangıç koşullarını $y(0)=0$, $y'(0)=1$ olarak kabul etmişler, $0 < \beta_2 < \beta_1 < \mu$, $\mu - 1 < \mu \leq m$, $l - 1 < \beta_1 \leq l$, $s - 1 < \beta_2 \leq s$, $m, l, s \in \mathbb{N}$ ve $\mu = 2$, $\beta_2 = 0$, $a = b = -1$ kabul ederek genelleştirilmiş dönüşüm metoduyla denklemin çözümünü elde etmişlerdir.

4.DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

İlk olarak 1986 yılında Zhou tarafından tanıtılan bu metot ile diferansiyel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürülebilir ve elde edilen cebirsel denklemler de bazı basit işlemlerle kolaylıkla sistematik bir şekilde çözülebilir. Ayrıca diferansiyel dönüşüm metodu diğer yaklaşık çözüm yöntemleriyle karşılaştırıldığında daha kolay çözüme ulaştırır. Sonuçta bu yöntem ile lineer ve lineer olmayan problemlerin çözümünün yanı sıra, sürekli olmayan sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde de çalıştığını görebiliriz.

Tanım 4.1.1.[Chen, 1996]

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $W(k)$ olmak üzere, $w(x)$ 'in tek boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} w(x) \right]_{x=0} \quad (4.1.1)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 4.1.2. [Chen, 1996]

$W(k)$ dönüşüm fonksiyonunun ters diferansiyel dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} W(k)x^k \quad (4.1.2)$$

biçimde tanımlanır. (4.1.1) ve (4.1.2) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (4.1.3) eşitliği elde edilir.

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} w(x) \right]_{x=0} x^k \quad (4.1.3)$$

(4.1.1) ve (4.1.2) denklemleri kullanılarak temel matematiksel operasyonlar yardımıyla tek boyutlu diferansiyel dönüşüm için tablo 8.1 deki özellikler ispat edilebilir.

4.2. Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Teorem 4.2.1. (Genelleştirilmiş Taylor Formülü) Kabul edelim ki, $0 < \alpha \leq 1$ ve $k = 0, 1, \dots, n+1$ için ${}_a D_*^{k\alpha} f(t) \in C(a, b]$ olsun. Bu takdirde,

$$R_n^\alpha(t, a) = \frac{(t-a)^{(n+1)\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} [{}_a D_*^{(n+1)\alpha} f(t)]_{t=\xi}, \quad \xi \in [a, t], t \in (a, b] \quad (4.2.1)$$

olmak üzere

$$f(t) = \sum_{i=0}^n \frac{(t-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} [D_*^{i\alpha} f(t)]_{t=a} + R_n^\alpha(t, a) \quad (4.2.2)$$

olur. Burada, $D_*^{n\alpha} = D_*^\alpha D_*^\alpha \dots D_*^\alpha$ (n defa) olarak dikkate alınmıştır.

Tanım 4.2.1.[Ertürk, 2007] Bir $y(t)$ fonksiyonunun *kesirli diferansiyel dönüşümü*,

$D_*^{k\alpha} = D_*^\alpha D_*^\alpha \dots D_*^\alpha$ (k defa) olmak üzere

$${}_a Y(k) = \frac{1}{\Gamma(k\alpha+1)} [D_*^{k\alpha} y(t)]_{t=t_0}, \quad 0 < \alpha \leq 1, k = 0, 1, \dots \quad (4.2.3)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 4.2.2.[Ertürk, 2007] $\{ {}_a Y(k) \}_{k=0}^\infty$ dizisinin *ters kesirli diferansiyel dönüşümü*

$$y(t) = \sum_{k=0}^\infty {}_a Y(k) (t-t_0)^{k\alpha} \quad (4.2.4)$$

olarak tanımlanır.

(4.2.3) ve (4.2.4) denklemleri birlikte düşünüldüğünde,

$$y(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\Gamma(k\alpha+1)} [D_*^{k\alpha} y(t)]_{t=t_0} (t-t_0)^{k\alpha} \quad (4.2.5)$$

elde edilebilir. Burada (4.2.5) eşitliğinden, kesirli diferansiyel dönüşüm kavramının kesirli kuvvet serileri açılımından elde edildiği açıktır.

Teorem 4.2.2.[Oturanç(In Press), Arikoğlu, 2006] Bir $y(t) = u(t) \pm v(t)$ fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü, ${}_{\alpha}Y(k)$ olmak üzere,

$${}_{\alpha}Y(k) = {}_{\alpha}U(k) \pm {}_{\alpha}V(k) \quad (4.2.6)$$

biçimindedir.

İspat. Kesirli diferansiyel dönüşüm tanımından ve türev operatörünün lineerliğinden,

$$\begin{aligned} {}_{\alpha}Y(k) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} D_*^{k\alpha} [u(t) + v(t)] \Big|_{t=t_0} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} D_*^{k\alpha} [u(t)] \Big|_{t=t_0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} D_*^{k\alpha} [v(t)] \Big|_{t=t_0} \\ &= {}_{\alpha}U(k) \pm {}_{\alpha}V(k) \end{aligned}$$

olarak sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1. Bir $y(t) = cu(t)$, (c bir sabit) fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü, ${}_{\alpha}Y(k)$ olmak üzere,

$${}_{\alpha}Y(k) = c_{\alpha}U(k)$$

biçimindedir.

Teorem 4.2.3.[Arikoğlu, 2006] Bir $y(t) = D_*^{n\alpha}u(t)$, fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü, ${}_{\alpha}Y(k)$ olmak üzere,

$${}_{\alpha}Y(k) = {}_{\alpha}U(k+n) \frac{\Gamma(k\alpha + n\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + 1)}$$

biçimindedir.

İspat. Kesirli diferansiyel dönüşüm tanımından,

$${}_{\alpha}Y(k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} D_*^{k\alpha} D_*^{n\alpha} [u(t)] \Big|_{t=t_0} = \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} D_*^{(k+n)\alpha} [u(t)] \Big|_{t=t_0} \quad (4.2.7)$$

yazılabilir. Bununla birlikte, $u(t)$ ' nin diferansiyel dönüşümü ${}_{\alpha}U(k)$ olmak üzere,

$${}_a U(k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} D_*^{k\alpha} [u(t)] \Big|_{t=t_0}$$

olup,

$$\begin{aligned} {}_a U(k+n) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha(k+n)+1)} D_*^{(k+n)\alpha} [u(t)] \Big|_{t=t_0} \\ &\Rightarrow D_*^{(k+n)\alpha} [u(t)] \Big|_{t=t_0} \\ &= \Gamma(\alpha(k+n)+1) \cdot {}_a U(k+n) \end{aligned}$$

yazılabilir. Elde edilen bu ifade (4.2.7) de yerine yazılırsa,

$${}_a Y(k) = {}_a U(k+n) \frac{\Gamma(k\alpha + n\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + 1)}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.2.2. Bir $y(t) = D_*^\alpha u(t)$, fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü, ${}_a Y(k)$ olmak üzere,

$${}_a Y(k) = {}_a U(k+1) \frac{\Gamma(k\alpha + \alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + 1)}$$

biçimindedir.

Sonuç 4.2.3. Bir $y(t) = u(t)v(t)$, fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü, ${}_a Y(k)$ olmak üzere,

$${}_a Y(k) = {}_a U(r) \otimes {}_a V(k-r) = \sum_{r=0}^k {}_a U(r) {}_a V(k-r)$$

biçimindedir.

Sonuç 4.2.4. Bir $y(t) = t^p$, fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü, ${}_a Y(k)$ olmak üzere,

$${}_a Y(k) = \delta(k\alpha - p) = \begin{cases} 1, & k = p/\alpha, \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

biçimindedir.

5. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Tam değerli olmayan türev ve integral, teoride çok eskiden beri bilinmesine karşılık fizik, kimya ve mühendislik gibi bilimlerdeki uygulamalarına son dönemlerde rastlanmaktadır. Bir çok fiziksel olgu kesirli diferansiyel denklemlerle çok başarılı bir şekilde açıklanabildiğinden kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri için yapılan çalışmalarda bir çok gelişmeler meydana gelmiştir. Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde özellikle Laplace ve Fourier dönüşümleri gibi bir çok analitik yaklaşımlar ortaya konulmuş, ancak bu yöntemler kesirli diferansiyel denklemlerin lineerlik, sabit katsayılı olup olmadığı gibi özel hallerinin çözümlerinde işe yarayabilmiştir. Açık ki, bir çok kesirli diferansiyel denklem lineer veya sabit katsayılı olamayacağı gibi tam çözümlerinin de bulunamaması doğaldır. Bu tip durumlarda yaklaşık veya nümerik çözümler kaçınılmaz hale gelir. Bu yüzden son dönemlerdeki çalışmalarda farklı iteratif yöntemler ve Adomian ayrışma metodu gibi yaklaşık yöntemlere ağırlık verilmiştir. Bu bölümde de diferansiyel dönüşüm yöntemi kesirli diferansiyel denklemlere uygulanarak, kesirli diferansiyel dönüşüm olarak adlandırılacaktır. Bu yöntem; hem lineer hem de lineer olmayan denklemlere uygulanabildiğinden ve bununla birlikte adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerde de olduğu gibi bir kesirli diferansiyel denklemi bir cebirsel denkleme çevirerek çözdüğü için oldukça iyi ve kullanışlı bir yöntem olarak karşımıza çıkmaktadır.

5.1. Kesirli Difreansiyel Denklemlere Yöntemin Uygulanması

Bu başlık altında kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri genelleştirilmiş Taylor formülü kullanılarak incelenecektir. Bu yöntem son derece kullanışlı olup birçok tipteki önemli kesirli diferansiyel denklemlerin çözümüne uygulanabilir.

Problem 5.1.1. $D^\alpha y + f(t)y = g(t)$, $t > 0$, $m-1 < \alpha \leq m$ başlangıç değer problemi;

$f(t)$ ve $g(t) \in C_{-1}^1$ olmak üzere,

$$D^\alpha y + f(t)y = g(t), \quad t > 0, \quad m-1 < \alpha \leq m \quad (5.1.1)$$

$$y^{(j)}(0) = c_j, \dots \quad j=0,1,\dots,(m-1) \quad (5.1.2)$$

başlangıç değer problemi için, öncelikle (5.1.1) eşitliğinin $\alpha = \frac{p}{q}$ için diferansiyel dönüşümü alınır,

$$Y_q(k+p) \frac{\Gamma\left(\frac{k+q+p}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+q}{q}\right)} + \sum_{r=0}^k F_q(r) Y_q(k-r) = G_q(k) \quad (5.1.3)$$

olarak bulunabilir. Burada, $Y_q(k)$, $F_q(r)$ ve $G_q(k)$ sırasıyla $y(t)$, $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının dönüşüm fonksiyonlarıdır. (5.1.2) başlangıç koşulunun diferansiyel dönüşümü yapıldığında

$$Y_q(qj) = c_j, \quad j=0,1,\dots,(m-1) \quad (5.1.4)$$

elde edilir. (5.1.4) şartını ve $k=1..n$ için $Y_q(-k)=0$ eşitliğini (5.1.3)'te yerine yazarak gerekli tüm $Y_q(k)$ katsayıları elde edilir. Böylece ters diferansiyel dönüşüm yardımıyla problemin çözümü elde edilebilir.

Örnek 5.1.1.[Oldham 1969] Şimdi elektrot genişlemelerindeki voltaj teorisinde kullanılan

$$\sqrt{t} \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} y + t^w y = 1 \quad (5.1.5)$$

$$y(0) = \sqrt{\pi} \quad (5.1.6)$$

başlangıç değeri problemini dikkate alalım. Burada $w \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ dir. Bu durumda

$w = \frac{\mu}{n}$ biçiminde olacağı dikkate alınır, (5.1.5) denklemini düzenlenerek

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} y + t^{\frac{2\mu-n}{2n}} y = t^{-1/2} \quad (5.1.7)$$

yazılabilir. Bu durumda (5.1.7) denkleminin diferansiyel dönüşümü alındığında

$$Y_{2n}(k+n) \frac{\Gamma\left(\frac{k+3n}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2n}{2n}\right)} + \sum_{r=0}^k \delta(r-(2\mu-n)) \otimes Y_{2n}(k-r) = \delta(k+n) \quad (5.1.8)$$

elde edilir. Burada, $Y_{2n}(k)$ dönüşüm fonksiyonu ve $\delta(k)$ da Dirac fonksiyonudur. (5.1.6) başlangıç koşulunun diferansiyel dönüşümü alınır,

$$Y_{2n}(0) = \sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

elde edilir. Böylece, $k=1..n$ için $Y_{2n}(-k) = 0$ olacağından, $Y_{2n}(-1) = Y_{2n}(-2) = \dots = Y_{2n}(-n) = 0$

bulunmuş olur. $k=1-n$ için (5.1.7) de bu değerler yerine yazılırsa,

$$Y_{2n}(1) \frac{\Gamma\left(\frac{1-n+3n}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-n+2n}{2n}\right)} + \sum_{r=0}^{1-n} \delta(r-(2\mu-n)) \otimes Y_{2n}(k-r) = \delta(1)$$

yazılabilir. Böylece $Y_{2n}(1) = 0$ elde edilir. $k=i-n$ ($i=1..2\mu-n-1$) için (5.1.7) denkleminde $Y_{2n}(2) = Y_{2n}(3) = \dots = Y_{2n}(2\mu-1) = 0$ bulunur. Bu durumda $k=2\mu-n$ için,

$$Y_{2n}(2\mu) = -Y_{2n}(0) \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{n} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{n} + 1\right)} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{n} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{n} + 1\right)}$$

elde edilir. $k=2\mu-n+1$ için,

$$Y_{2n}(2\mu+1) = -Y_{2n}(1) \frac{\Gamma\left(\frac{2\mu+1}{2n} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\mu+1}{2n} + 1\right)} = 0$$

bulunur. Bu elde edilenler (5.1.8) de yazılırsa

$$Y_{2n}(2\mu+r) = -Y_{2n}(r) \frac{\Gamma\left(\frac{2\mu+r}{2n} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\mu+r}{2n} + 1\right)} = \begin{cases} (-1)^j \prod_{l=0}^j \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + lw\right)}{\Gamma(1+lw)} & \text{for } r = 2j\mu, \\ 0 & \text{for } r \neq 2j\mu. \end{cases}$$

elde edilir. Ters diferansiyel dönüşüm kullanılarak,

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_{2n}(k) (t)^{\frac{k}{2n}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{kw} \prod_{l=0}^k \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + lw\right)}{\Gamma(1+lw)}$$

elde edilir ki bu çözüm [Oldham, 1974]'de de kuvvet serisi yöntemiyle elde edilmiştir.

Problem 5.1.2. $D^m y + aD^\alpha y + by = g(t)$ $t > 0$, $m-1 < \alpha \leq m$ başlangıç değer problemi; $g(t) \in C_{-1}^1$ olmak üzere,

$$D^m y + aD^\alpha y + by = g(t) \quad t > 0, \quad m-1 < \alpha \leq m \quad (5.1.9)$$

$$y^{(j)}(0) = c_j, \quad j=0,1,\dots,(m-1) \quad (5.1.10)$$

başlangıç değer problemi için, (5.1.9) eşitliğinin $\alpha = \frac{p}{q}$ için diferansiyel dönüşümü

alınırsa, $y(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının dönüşüm fonksiyonları sırasıyla $Y_q(k)$ ve $G_q(k)$ olmak üzere,

$$Y_q(k+mq) \frac{\Gamma\left(\frac{k+q+mq}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+q}{q}\right)} + aY_q(k+p) \frac{\Gamma\left(\frac{k+q+p}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+q}{q}\right)} + bY_q(k) = G_q(k) \quad (5.1.11)$$

bulunur. Burada, (5.1.10) başlangıç koşulunun diferansiyel dönüşümü yapıldığında

$$Y_q(qj) = c_j, \quad j=0,1,\dots,(m-1) \quad (5.1.12)$$

elde edilir. (5.1.12) şartını ve $k=1..n$ için $Y_q(-k)=0$ eşitliğini (5.1.3)'te yerine yazarak gerekli tüm $Y_q(k)$ katsayıları elde edilir. Böylece ters diferansiyel dönüşüm yardımıyla problemin çözümü elde edilebilir.

Örnek 5.1.1: Şimdi $m=2$ için

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} + w^2 y = 8, \quad t > 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (5.1.13)$$

$$y(0)=0, \quad y'(0)=0 \quad (5.1.14)$$

denklemini dikkate alalım ve $\alpha = \frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ olduğunu kabul edelim. Gerekli temel

işlemlerden sonra (5.1.13)denkleminin diferansiyel dönüşümü,

$$Y_2(k+4) \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+3\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} + Y_2(k+1) \frac{\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} + w^2 Y_2(k) = 8\delta\left(\frac{k}{2}\right)$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$Y_2(k+4) = 4 \frac{8\delta\left(\frac{k}{2}\right) - Y_2(k+1) \frac{\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} - w^2 Y_2(k)}{(k+4)(k+2)} \quad (5.1.15)$$

yazılabilir. (5.1.14) başlangıç şartının dönüşümü alındığında da

$$\begin{aligned} Y_2(0) &= 0, \\ Y_2(2) &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

elde edilir. Böylece, (4.16) şartını ve $k=1..n$ için $Y_2(-k)=0$ şartını (5.1.15) de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
Y_2(1) &= 0 && \text{for } k = -3, \\
Y_2(3) &= 0 && \text{for } k = -1, \\
Y_2(4) &= 4 && \text{for } k = 0, \\
Y_2(5) &= 0 && \text{for } k = 1, \\
Y_2(6) &= 0 && \text{for } k = 2, \\
Y_2(7) &= -0.68778 && \text{for } k = 3, \\
Y_2(8) &= -\frac{w^2}{3} && \text{for } k = 4, \\
Y_2(9) &= 0 && \text{for } k = 5, \\
Y_2(10) &= 0.06667 && \text{for } k = 6, \\
Y_2(11) &= 0.05558w^2 && \text{for } k = 7, \\
Y_2(12) &= 0.01111w^4 && \text{for } k = 8, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

değerleri elde edilir. Sonuç olarak $\{Y_2(k)\}_{k=0}^{12}$ serisinin diferansiyel ters dönüşümü ve $w^2 = 1$ olduğu dikkate alınarak 12. mertebeden yaklaşık çözüm

$$y(t) = \sum_{k=0}^{12} Y_2(k)t^{k/2} = 4t^2 - 0.68778t^{7/2} - 0.33333t^4 + 0.06667t^5 + 0.05558t^{11/2} + 0.01111t^6.$$

olarak elde edilmiş olur.

Örnek 5.1.3.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}} - 2y^2 = 0 \quad (5.1.17)$$

$$y(0) = 1 \quad ((5.1.18))$$

lineer olmayan başlangıç değer problemini göz önüne alalım. $\alpha = \frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ için

(5.1.17) ve (5.1.18) denklemlerinin sırasıyla diferansiyel dönüşümleri alındığında

$$Y_2(k+2) \frac{\Gamma\left(\frac{k+4}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} + Y_2(k+1) \frac{\Gamma\left(\frac{k+4}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} - 2Y_2(k) \otimes Y_2(k) = 0 \quad (5.1.19)$$

ve

$$Y_2(0) = 1 \quad (5.1.20)$$

elde edilir. Bu durumda (5.1.19) denklemini (5.1.18) de yerine yazıldığında, $k = -1$ için

$$Y_2(1) = -1.128$$

elde edilir. Daha sonra sırasıyla $k = 0, 1, 2, \dots$ için

$$Y_2(2) = 3 \quad , k = 0$$

$$Y_2(3) = -5.265 \quad , k = 1$$

$$Y_2(4) = 10.773 \quad , k = 2$$

$$Y_2(5) = -20.324 \quad , k = 3$$

$$Y_2(6) = 39.544 \quad , k = 4$$

⋮

bulunabilir. Bu şekilde (5.1.17)- (5.1.18) probleminin çözümü için 6 terimli kesirli diferansiyel dönüşüm yaklaşımı

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=0}^6 Y_2(k) t^{k/2} \\ &= 1 - 1.128t^{1/2} + 3t - 5.265t^{3/2} + 10.7732t^2 - 20.324t^{5/2} + 39.544t^3 \end{aligned}$$

olarak elde edilmiş olur. Aşağıdaki tabloda ise sırasıyla 6, 8 ve 10 terimli kesirli diferansiyel dönüşüm yaklaşımları 6., 8. ve 10. mertebeli dönüşümler olarak ifade edilerek elde edilen sonuçlar verilmiştir.

t	$y(t)$		
	6. mertebe FDT metodu	8. mertebe FDT metodu	10. mertebe FDT metodu
0	1	1	1
0.01	0.912809934	0.912803829	0.912803604
0.02	0.889005149	0.888942893	0.888938306
0.03	0.874792545	0.874556807	0.874530738
0.04	0.865462099	0.864866699	0.864778869
0.05	0.859327895	0.858123610	0.857901446
0.06	0.855616503	0.853500936	0.853032380
0.07	0.853938684	0.850568840	0.849697644
0.08	0.854099066	0.849105905	0.847629804
0.09	0.856012325	0.849016834	0.846688877
0.1	0.859661072	0.850291567	0.846824827

Tablo.5.1.1

6. BAGLEY TORVİK DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ VE DİĞER METODLARLA KARŞILAŞTIRILMASI

$$Ay''(t) + BD_t^{3/2}y(t) + Cy(t) = t, \quad t > 0; \quad (6.1.1)$$

genel Bagley-Torvik denkleminde başlangıç şartları

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (6.1.2)$$

şeklinde verilsin. Zaman adımını h olarak alalım. Problemin birinci mertebeye yaklaşımı

$$Ah^{-2}(y_m - 2y_{m-1} + y_{m-2}) + Bh^{-3/2} \sum_{j=0}^m w_j^{3/2} y_{m-j} + Cy_m = f(m) \quad (6.1.3)$$

halinde verilsin. Burada $m = 2, 3, \dots$ için

$$y_0 = 0, \quad \frac{y_1 - y_0}{h} = 0 \quad (6.1.4)$$

ve $m = 0, 1, 2, \dots$ için $y_m = y(mh)$, $f_m = f(mh)$ şeklinde alınacaktır. (6.1.3), (6.1.4) yakınsamasını kullanarak, nümerik çözümü elde etmek için

$$y_m = \frac{h^2(f_m - Cy_{m-1}) + A(2y_{m-1} - y_{m-2}) - B\sqrt{h} \sum_{j=1}^m w_j^{3/2} y_{m-j}}{A + B\sqrt{h}}, \quad m = 2, 3, \dots \quad (6.1.5)$$

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 0$$

algoritmasını türetebiliriz.

(6.1.5) algoritmasına göre yapılan hesaplamalardan elde edilen sonuçlar, sabit katsayılı kesirli diferansiyel denklemler için verilen Green fonksiyonunun yardımıyla elde edilen analitik sonuçlarla örtüşmektedir (Podlubny[1999]). (6.1.1) ve (6.1.2) başlangıç değer problemlerinin analitik çözümü

$$y(t) = \int_0^t G_3(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (6.1.6)$$

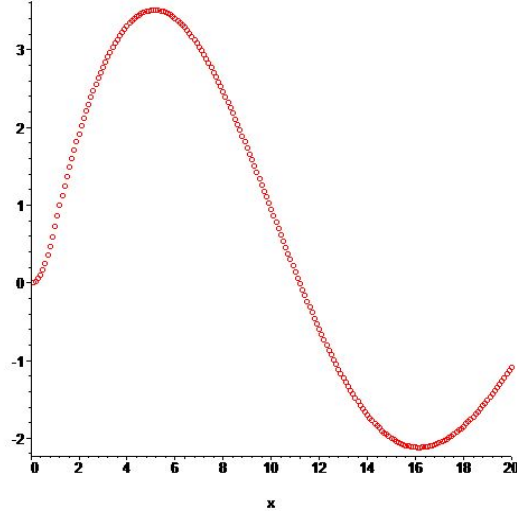
$$G_3(t) = \frac{1}{A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{C}{A}\right)^k t^{2k+1} E_{\frac{1}{2}, 2+\frac{3k}{2}}^k \left(-\frac{B}{A} \sqrt{t}\right) \quad (6.1.7)$$

$$E_{\lambda, \mu}^k(y) \equiv \frac{d^k}{dy^k} E_{\lambda, \mu}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)! y^j}{j! \Gamma(\lambda j + \lambda k + \mu)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

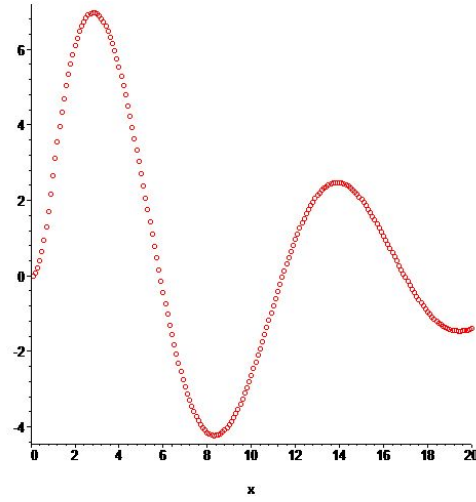
denklemleri şeklinde elde edilir. (Podlubny[1999]). Bu çözümde

$$f(t) = f_*(t) = \begin{cases} 8, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases} \text{ ve } A=1, B=0.5, C=0.5$$

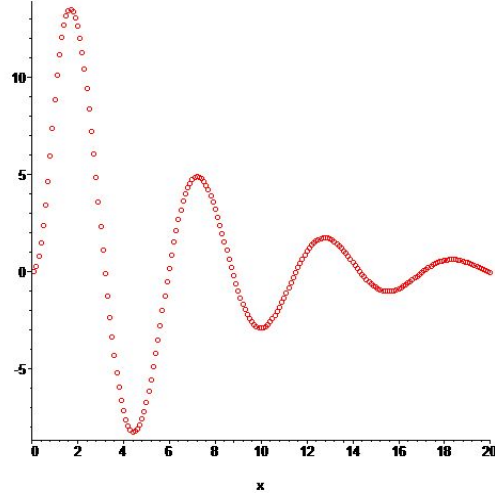
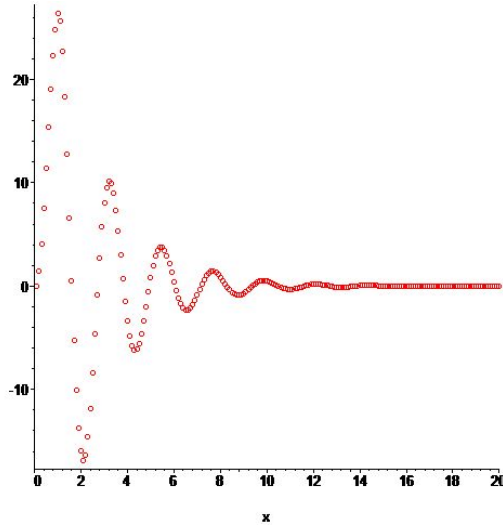
şeklinde alınarak aşağıdaki $h=0.05$, $h=0.1$, $h=0.2$ ve $h=0.5$ için sırasıyla aşağıdaki grafikler çizilmiştir. Bu çözümlerin yapıldığı Maple Program kodları Ek 1.a bölümünde verilmiştir.



Şekil 6.1.1 $h=0.05$ için nümerik çözüm



Şekil 6.1.2 $h=0.1$ için nümerik çözüm

Şekil 6.1.3 $h=0.2$ için nümerik çözümŞekil 6.1.4 $h=0.5$ için nümerik çözüm

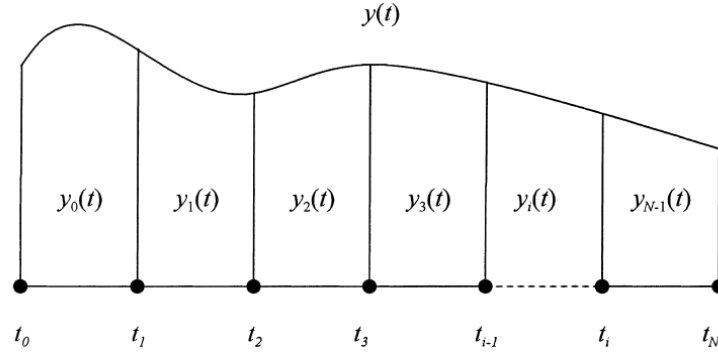
Diferansiyel dönüşüm metodunun bir başka uygulanış şekli de verilen aralığı gridlere ayırarak adım adım gitmektir. Bu yöntemde verilen

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b \quad (6.1.8)$$

şeklinde verilen bir denklemi $[a, b]$ aralığında $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ gibi sabit noktalar yardımıyla aralıklara bölünerek çözüme başlanır. Burada her $i=0, 1, \dots, N$ ve

$h = \frac{(b-a)}{N}$ için $t_i = a + ih$ şeklinde alınacaktır.

Alınan $[a, b]$ bölgesi N tane alt bölgeye ayrılır ve $i = 0, 1, \dots, N-1$ için her alt bölgedeki yakınsak fonksiyonlar aşağıdaki şekilde gösterilen $y_i(t)$ fonksiyonlarıdır.



(6.1.8) denkleminde diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulandığında, dönüştürülmüş fonksiyon ve $y(t)$ fonksiyonu arasındaki spektrum

$$(k+1)Y(k+1) = F(Y(k)) \quad (6.1.9)$$

şeklinde gösterilir. Burada $F(\cdot)$, $f(t, y(t))$ fonksiyonunun dönüştürülmüş halini göstermektedir. $y(a) = \alpha$ başlangıç koşulu altında

$$Y(0) = \alpha \quad (6.1.10)$$

elde edilir.

İlk alt bölgede, $y(t)$ fonksiyonu $y_0(t)$ şeklinde tanımlanabilir. (6.1.9) ve (6.1.10) eşitliklerinden, $y_0(t)$ fonksiyonu a noktasında n . mertebeden Taylor polinomlarının elemanları olarak

$$y_0(t) = Y_0(0) + Y_0(1)(t-a) + Y_0(2)(t-a)^2 + \dots + Y_0(n)(t-a)^n \quad (6.1.11)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada 0 ifadesi Taylor polinomunun $t_0 = a$ noktası civarında açıldığını göstermektedir. Taylor açılımı elde edildiğinden, $y(t_1)$

$$\begin{aligned} y(t_1) &\approx y_0(t_1) \\ &= Y_0(0) + Y_0(1)(t-a) + Y_0(2)(t-a)^2 + \dots + Y_0(n)(t-a)^n \\ &= Y_0(0) + Y_0(1)h + Y_0(2)h^2 + \dots + Y_0(n)h^n \\ &= \sum_{j=0}^n Y_0(j)h^j \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

şeklinde gösterilebilir.

İlk alt bölgedeki $y_0(t_1)$ 'in son değeri ikinci alt bölgenin başlangıç değeri olacaktır, yani $y_1(t_1) = Y_1(0) = y_0(t_1)$ olacaktır. Aynı yol izlenerek

$$\begin{aligned} y(t_2) &\approx y_1(t_2) \\ &= Y_1(0) + Y_1(1)(t_2 - t_1) + Y_1(2)(t_2 - t_1)^2 + \dots + Y_1(n)(t_2 - t_1)^n \\ &= Y_1(0) + Y_1(1)h + Y_1(2)h^2 + \dots + Y_1(n)h^n \\ &= \sum_{j=0}^n Y_1(j)h^j \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

Böylece (t_{i+1}) noktasındaki çözüm

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) &\approx y_i(t_{i+1}) \\ &= Y_i(0) + Y_i(1)(t_{i+1} - t_i) + Y_i(2)(t_{i+1} - t_i)^2 + \dots + Y_i(n)(t_{i+1} - t_i)^n \\ &= Y_i(0) + Y_i(1)h + Y_i(2)h^2 + \dots + Y_i(n)h^n \\ &= \sum_{j=0}^n Y_i(j)h^j \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

olarak elde edilecektir.(Jang[2000])

Bagley -Torvik denklemini

$$A \frac{d^2 y}{dx^2} + B \frac{d^{\frac{3}{2}} y}{dx^{\frac{3}{2}}} + Cy = f(x) \quad (6.1.15)$$

şeklinde alalım. Başlangıç koşulları da $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ olarak verilsin.

Denklemin katsayıları $A = 1, B = 0.5, C = 0.5$ ve $f(x)$ fonksiyonu da

$$f(x) = \begin{cases} 8, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda (6.1.15) denklemini

$$D_*^2 y(x^*) + \frac{1}{2} D_*^{\frac{3}{2}} y(x^*) + \frac{1}{2} y(x^*) = f(x^*) \quad (6.1.16)$$

haline gelir. Yukarıdaki eşitliğe diferansiyel dönüşüm metodu uygulandığı zaman

$$\frac{\Gamma(k\alpha + 4\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + 1)} {}_\alpha Y(k+4) + \frac{\Gamma(k\alpha + 3\alpha + 1)}{2\Gamma(k\alpha + 1)} {}_\alpha Y(k+3) + \frac{{}_\alpha Y(k)}{2} = {}_\alpha F(k)$$

eşitliğini elde ederiz. $\alpha = \frac{1}{2}$ ve $x^* = x - x_i$ yazıldığı zaman

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k+6}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} {}_{\alpha}Y(k+4) + \frac{\Gamma\left(\frac{k+5}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} {}_{\alpha}Y(k+3) + \frac{{}_{\alpha}Y(k)}{2} = {}_{\alpha}F(k)$$

elde edilir. $N = 10$ ve $h = 0.2$ seçilirse $0 \leq x \leq 0.2$ aralığında

$${}_{\alpha}Y_0(k+4) = \left[8\delta\left(\frac{k}{2}\right) - \frac{{}_{\alpha}Y_0(k)}{2} - \frac{\Gamma\left(\frac{k+5}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} {}_{\alpha}Y_0(k+3) \right] \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+6}{2}\right)}$$

denklemini elde edilir. Başlangıç koşulları ele alındığında

$${}_{\alpha}Y_0(0) = 0, \quad {}_{\alpha}Y_0(1) = 0, \quad {}_{\alpha}Y_0(2) = 0, \quad {}_{\alpha}Y_0(3) = 0$$

elde edilir. Ayrıca

$${}_{\alpha}Y_0(4) = 8 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3)}, \quad {}_{\alpha}Y_0(5) = -\frac{8 \Gamma(1) \Gamma(3)}{2 \Gamma(3) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}$$

yazılarak bu katsayılar da bulunur. Buradan ters dönüşüm yapıldığı zaman

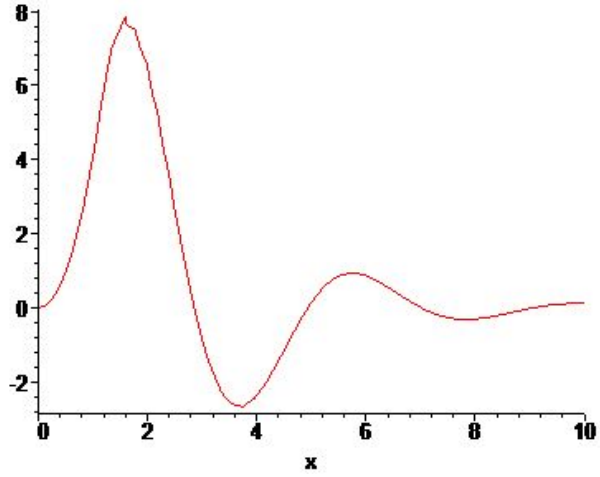
$$Y_0(x) = {}_{\alpha}Y_0(0) + {}_{\alpha}Y_0(1)x^{\frac{1}{2}} + \dots + {}_{\alpha}Y_0(4)x^2 + {}_{\alpha}Y_0(5)x^{\frac{5}{2}}$$

yazılır. Böylece

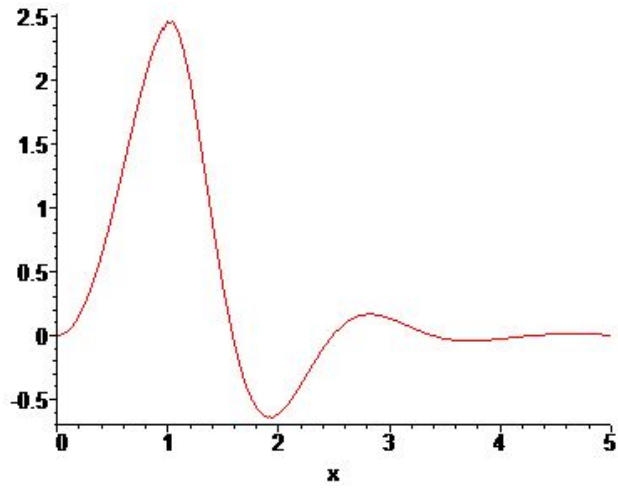
$$y_1(0.2) = {}_{\alpha}Y_1(0) = y_2(0)$$

ikinci seçilen başlangıç şartları elde edilmiş olur ve bu alt aralık içinde aynı prosedür uygulanır.

Yukarıdaki işlemler uygulandığı zaman elde edilen verilerle çizilen grafikler aşağıda verilmiştir. Bu çözümde kullanılan Maple Program kodu Ek 1.b de verilmiştir.



Şekil 6.1.5 $h=0.2$ için FDT metodu



Şekil 6.1.6 $h=0.5$ için FDT metodu

Değişik h değerleri için çizilen grafiklerde elde edilen sonuçlardan da anlaşıldığı üzere Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için uygun ve elde edilen sonuçlar göz önüne alındığında kullanışlı bir yöntemdir.

7.GENEL SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada diferansiyel dönüşüm yöntemi ve bu yöntemin kesirli diferansiyel denklemlere uygulanması hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca yonteme ilişkin mevcut formüllere yeni formüller ifade ve ispat edilerek geniş bir dönüşüm tablosu hazırlanmıştır. Ayrıca kesirli türev ve katlarını ihtiva eden, literatürde önemli bir yere sahip olan Bagley-Torvik denkleminin de bu yöntemle çözümü yapılmış elde edilen sonuçların kalitesi daha önce yapılan sonuçlarla karşılaştırarak belirtilmiştir. Diğer taraftan çalışmanın sonunda dönüşüm fonksiyonları okuyucunun kolayca kullanımını açısından tablo şeklinde verilmiş, ayrıca çalışmanın içinde geçen problemlerin çözümünde kullandığımız bazı Maple programları yazılmıştır.

Diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanım açısından ve bilgisayara uygulanabilirliğinden dolayı diğer yaklaşık çözüm yöntemleriyle kıyaslama yapıldığında söz konusu yöntem daha kolay bir yöntemdir. Diğer yöntemlerde karşılaşılan karmaşık integrallerin yerine bu yöntemde cebirsel denklemler elde edilir ve bu cebirsel denklemler ile denklem kolayca bilgisayara tanıtılıp çözümler hesaplanabilir.

8 TABLO VE MAPLE KODLARI

Tablo 8.1

	Fonksiyon	<i>Diferansiyel Dönüşüm Fonksiyonu</i>
1	$w(x)$	$W(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} w(x) \right]_{x=0}$
2	$w(x) = u(x) \pm v(x)$	$W(k) = U(k) \pm V(k)$
3	$w(x) = c u(x) \ (c \in \mathbb{R})$	$W(k) = c U(k) \ (c \in \mathbb{R})$
4	$w(x) = \frac{d}{dx} u(x)$	$W(k) = (k+1)U(k+1) = \frac{(k+1)!}{k!} U(k+1)$
5	$w(x) = \frac{d^r}{dx^r} u(x)$	$W(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)U(k+r) = \frac{(k+r)!}{k!} U(k+r)$
6	$w(x) = \frac{d^{r/q}}{dx^{r/q}} u(x)$	$W_q(k) = U_q(k+r) \frac{\Gamma\left(\frac{k+q+r}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+q}{q}\right)}$
7	$w(x) = u(x)v(x)$	$W(k) = U(k) \otimes V(k) = \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$
8	$w(x) = u(x) \frac{d^{r/q}}{dx^{r/q}} v(x)$	$W_q(k) = \sum_{s=0}^k U_q(s+r)V_q(k-s+1) \frac{\Gamma\left(\frac{k-s+q+1}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-s+q}{q}\right)}$
9	$w(x) = u(x)v(x)s(x)$	$W(k) = U(k) \otimes V(k) \otimes S(k)$ $S(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} U(r)V(t)S(k-r+t)$
10	$w(x) = u(x)$ $\frac{d^2}{dx^2} v(x) = u(x)v''(x)$	$W(k) = \sum_{r=0}^k (k-r+1)(k-r+2)U(r)V(k-r+2)$
11	$w(x) = u'(x)v'(x)$	$W(k) = \sum_{r=0}^k (r+1)(k-r+1)U(r+1)V(k-r+1)$

12	$w(x)=u(x)v(x)\frac{d^2}{dx^2}s(x)$	$W(k)=U(k)\otimes V(k)\otimes(k+1)(k+2)S(k+2)$
13	$w(x)=x^m$	$W(k)=\delta(k-m)=\begin{cases} 1, & k=m \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$
14	$w(x)=x^{\frac{m}{n}}$	$W_q(k)=\delta\left(\frac{k}{q}-\frac{m}{n}\right)=\begin{cases} 1, & k=m.q/n \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$
15	$w(x)=a, \quad a \in R$	$W(k)=a\delta(k)$
16	$w(x)=ax, \quad a \in R$	$W(k)=a\delta(k-1)$
17	$w(x)=ax^2, \quad a \in R$	$W(k)=a\delta(k-2)$
18	$w(x)=ax^3+bx^2+cx,$ $a,b,c \in R$	$W(k)=a\delta(k-3)+b\delta(k-2)+c\delta(k)$
19	$w(x)=(1+x)^m$	$W(k)=\begin{cases} \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}, & m \neq k \text{ ve } m > k \\ 1, & m = k \end{cases}$
20	$w(x)=\sin(ax+b)$	$W(k)=\frac{a^k}{k!}\sin\left(\frac{\pi}{2}k+b\right)$
21	$w(x)=\cos(ax+b)$	$W(k)=\frac{a^k}{k!}\cos\left(\frac{\pi}{2}k+b\right)$
22	$w(x)=\alpha^{ax}$	$W(k)=\frac{a^k(\ln \alpha)^k}{k!}$
23	$w(x)=e^{ax}$	$W(k)=\frac{a^k}{k!}$
24	$w(x)=e^{ax+b}$	$W(k)=\frac{a^k}{k!}e^b$
25	$w(x)=\ln(ax+b), \quad a>0,$ $b>1$	$W(k)=\frac{(-1)^{k+1}a^k b^{-k}}{k}, \quad k>0$

26	$w(x)=\sinh(ax+b)$	$W(k)=\begin{cases} \frac{a^k}{k!}e^b & , k \text{ tek ise} \\ 0 & , k \text{ çift ise} \end{cases}$
27	$w(x)=\cosh(ax+b)$	$W(k)=\begin{cases} 0 & , k \text{ tek ise} \\ \frac{a^k}{k!}e^b & , k \text{ çift ise} \end{cases}$
28	$w(x)=\int_{x_0}^x u(t)dt$	$W(k)=\frac{U(k-1)}{k}=\frac{(k-1)!}{k!}U(k-1)$
29	$w(x)=v(x)\int_{x_0}^x u(t)dt$	$W(k)=V(k)\otimes\frac{(k-1)!}{k!}U(k-1)=\sum_{r=0}^k V(r)\frac{U(k-r-1)}{k-r}$
30	$w(x)=\int_{x_0}^x u(t)v(t)dt$	$W(k)=\frac{(k-1)!}{k!}(U(k-1)\otimes V(k-1))$
31	$w(x)=\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_1} u(t)dt$	$W(k)=\frac{(k-2)!}{k!}U(k-2)$
32	$w(x)=\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{x_1} u(t)dt$	$W(k)=\frac{(k-n)!}{k!}U(k-n)$
33	$w(x,y)$	$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial h^h} w(x,y)\right]_{(0,0)}$
34	$w(x,y)=u(x,y)\pm v(x,y)$	$W(k,h)=U(k,h)\pm V(k,h)$
35	$w(x,y)=c u(x,y) (c\in R)$	$W(k,h)=c U(k,h) (c\in R)$
36	$w(x,y)=\frac{\partial}{\partial x} u(x,y)$	$W(k,h)=(k+1)U(k+1,h)=\frac{(k+1)!}{k!}U(k+1,h)$
37	$w(x,y)=\frac{\partial^r}{\partial x^r} u(x,y)$	$W(k,h)=(k+1)(k+2)\dots(k+r)U(k+r,h)=\frac{(k+r)!}{k!}U(k+r,h)$
38	$w(x,y)=\frac{\partial}{\partial y} u(x,y)$	$W(k,h)=(h+1)U(k,h+1)=\frac{(h+1)!}{h!}U(k,h+1)$
39	$w(x,y)=\frac{\partial^s}{\partial y^s} u(x,y)$	$W(k,h)=(h+1)(h+2)\dots(h+s)U(k,h+s)=\frac{(h+s)!}{h!}U(k,h+s)$
40	$w(x,y)=u(x,y)v(x,y)$	$W(k,h)=U(k,h)\otimes V(k,h)=\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h V(r,h-s)U(k-r,s)$

41	$w(x,y)=x^m y^n$	$W(k,h)=\delta(k-m,h-n)=\begin{cases} 1, & k=m \text{ ve } h=n \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$
42	$w(x,y)=axy^2, \quad a \in \mathbb{R}$	$W(k,h)=a\delta(k-1,h-2)$
43	$w(x,y)=ax^5 y^7, \quad a \in \mathbb{R}$	$W(k,h)=a\delta(k-5,h-7)$
44	$w(x,y)=axy+bxy^6+cy^5,$ $a,b,c \in \mathbb{R}$	$W(k,h)=a\delta(k-1,h-1)+b\delta(k-1,h-6)+c\delta(k,h-5)$
45	$w(x,y)=u(x,y)v(x,y)s(x)$	$W(k,h)=(U(k,h) \otimes V(k,h)) \otimes S(k,h)$
46	$w(x,y)=u(x,y) \frac{\partial^2}{\partial x^2}$	$W(k,h)=\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+2)(k-r+1) U(r,h-s)V(k-r,s)$
47	$w(x,y)=\frac{\partial}{\partial x} u(x,y)$	$W(k,h)=\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1) U(r+1,h-s)V(k-r,s)$
48	$w(x,y)=\frac{\partial}{\partial y} u(x,y)$	$W(k,h)=\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (s+1)(h-s+1) U(r,h-s+1)V(k-r,s)$
49	$w(x,y)=\frac{\partial}{\partial x} u(x,y)$	$W(k,h)=\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(h-s+1) U(k-r,s)$
50	$w(x,y)=e^{ax+by+c}$	$W(k,h)=\frac{a^k}{k!} \frac{b^h}{h!} e^c$
51	$w(x,y)=\alpha^{ax+by+c}$	$W(k,h)=\frac{a^k}{k!} \frac{b^h}{h!} \ln(\alpha)^{k+h}$
52	$w(x,y)=\sin(ax+by+c)$	$W(k,h)=\frac{a^k}{k!} \frac{b^h}{h!} \sin\left(\frac{\pi}{2}(k+h)+c\right)$
53	$w(x,y)=\cos(ax+by+c)$	$W(k,h)=\frac{a^k}{k!} \frac{b^h}{h!} \cos\left(\frac{\pi}{2}(k+h)+c\right)$
54	$w(x,y)=\sinh(ax+by+c)$	$W(k,h)=\begin{cases} \frac{a^k}{k!} \frac{b^h}{h!} e^c, & k \text{ tek ise} \\ 0, & k \text{ çift ise} \end{cases}$
55	$w(x,y)=\cosh(ax+by+c)$	$W(k,h)=\begin{cases} 0, & k \text{ tek ise} \\ \frac{a^k}{k!} \frac{b^h}{h!} e^c, & k \text{ çift ise} \end{cases}$

56	$w(x,y,t)$	$W(k,h,m) = \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} w(x,y,t) \right]_{(0,0,0)}$
57	$w(x,y,t) = u(x,y,t) \pm v(x,y,t)$	$W(k,h,m) = U(k,h,m) \pm V(k,h,m)$
58	$w(x,y,t) = c u(x,y,t),$ $c \in \mathbb{R}$	$W(k,h,m) = c U(k,h,m)$
59	$w(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,y,t)$	$W(k,h,m) = (k+1)U(k+1,h,m) = \frac{(k+1)!}{k!} U(k+1,h,m)$
60	$w(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial y} u(x,y,t)$	$W(k,h,m) = (h+1)U(k,h+1,m) = \frac{(h+1)!}{h!} U(k,h+1,m)$
61	$w(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,y,t)$	$W(k,h,m) = (m+1)U(k,h,m+1) = \frac{(m+1)!}{m!} U(k,h,m+1)$
62	$w(x,y,t) = \frac{\partial^{r+s+p}}{\partial x^r \partial y^s \partial t^p}$	$W(k,h,m) = \frac{(k+r)!}{k!} \frac{(h+s)!}{h!} \frac{(m+p)!}{m!} U(k+r,h+s,m+p)$
63	$w(x,y) = u(x,y,t)v(x,y,t)$	$W(k,h,m) = U(k,h,m) \otimes V(k,h,m)$ $W(k,h,m) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m U(r,h-s,m-p)V(k-r,s,p)$
64	$w(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,y,t) \frac{\partial}{\partial y} v(x,y,t)$	$W(k,h,m) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1,s,p)V(r,s+1,m-p)$
65	$w(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$W(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!}$ $\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} w(x_1, x_2, \dots, x_n) \right]_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0 \\ \dots \\ x_n=0}}$
66	$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \pm v(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$W(k_1, k_2, \dots, k_n) = U(k_1, k_2, \dots, k_n) \pm V(k_1, k_2, \dots, k_n)$

67	$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ $u(x_1, x_2, \dots, x_n), c \in R$	$W(k_1, k_2, \dots, k_n) = c U(k_1, k_2, \dots, k_n)$
----	---	---

KULLANILAN MAPLE KODLARI

EK 1.a Bagley-Torvik denkleminin nümerik olarak elde edilmesi için yazılan Maple programı

```

> restart:
h:=0.1:A:=1:B:=0.5:C:=0.5:
y[1]:=0:y[0]:=0:
for n from 0 to 10 do
  f[n]:=8:
od:
for m from 2 to 10 do
  t[m]:=0:
  for j from 1 to m do
    t[m]:=t[m]+(-1)^j*binomial(3/2,j)*y[m-j]:
  od:
  y[m]:=h^2*(f[m]-C*y[m-1])+A*(2*y[m-1]-y[m-2])-
  B*sqrt(h)*t[m]/(A+B*sqrt(h)):
  print(m*h,y[m]):
od:
for n from 11 to 500 do
  f[n]:=0:
od:
for m from 11 to 500 do
  t[m]:=0:
  for j from 1 to m do
    t[m]:=t[m]+(-1)^j*binomial(3/2,j)*y[m-j]:
  od:
  y[m]:=h^2*(f[m]-C*y[m-1])+A*(2*y[m-1]-y[m-2])-
  B*sqrt(h)*t[m]/(A+B*sqrt(h)):
  print(m*h,y[m]):
od:
>

```


Ek 1.b Bagley-Torvik denkleminin Diferansiyel Dönüşüm yöntemiyle çözümüne ilişkin Maple Programı

```

> restart:
Digits:=10:
y[0,0]:=0:y[0,1]:=0:y[0,2]:=0:
for k from 0 to 10 do
v[k]:=coeftayl(8,x=0,k):
od:
for k from 0 to 10 do
l:=2*k:
f[l]:=v[k]:
f[(l+1)]:=0:
od:
f[-1]:=0:
for j from 0 to 1.0 by 0.2 do
y[j,3]:=y[j,2]*GAMMA(2.)/GAMMA(5/2.)/2.:
for k from 0 to 10 do
y[j,k+4]=(f[k]-y[j,k])/2.-
GAMMA((k+5)/2.)*y[j,k+3]/GAMMA((k+2)/2.)/2.*GAMMA((k+2)/2.)/GAMMA(
(k+6)/2.):
od:
t[j]:=0:
for k from 0 to 10 do
t[j]:=t[j]+y[j,k]*(x-j)^(k/2.):
od:
print(T[j],t[j]):
y[j,0]:=subs(x=j,t[j]):
y[j+0.2,0]:=subs(x=j+0.2,t[j]):
y[j+0.2,1]:=-y[j,0]/4:
y[j+0.2,2]:=subs(x=j+0.2,diff(t[j],x)):
print("onceki nokta" ,j,y[j,0]):
print("ilerki nokta" ,j+0.2,y[j+0.2,0]):
print("turev" ,j+0.2,y[j+0.2,2]):
od:
for j from 1.2 to 10 by 0.2 do
y[j,-1]:=0:
for k from -1 to 20 do
y[j,k+4]=(-y[j,k])/2.-
GAMMA((k+5)/2.)*y[j,k+3]/GAMMA((k+2)/2.)/2.*GAMMA((k+2)/2.)/GAMMA(
k+6)/2.):
od:
t[j]:=0:
for k from 0 to 10 do
t[j]:=t[j]+y[j,k]*(x-j)^(k/2.):
od:
print(T[j],t[j]):
y[j,0]:=subs(x=j,t[j]):

```

```
y[j+0.2,0]:=subs(x=j+0.2,t[j]):
y[j+0.2,1]:=-y[j,0]/4:
y[j+0.2,2]:=subs(x=j+0.2,diff(t[j],x)):
print("onceki nokta",j,y[j,0]):
print("ilerki nokta",j+0.2,y[j+0.2,0]):
print("turev",j+0.2,y[j+0.2,2]):
od:
for k from 0 to 10 by 0.2 do
f[k]:=piecewise(x<k+0.2 and x>k,t[k],x=k+0.2,t[k+0.2]):
od:
g:=0:
for k from 0 to 10 by 0.2 do
g:=g+f[k]:
od:
plot(g,x=0..10);
```

Kaynaklar

Abdel-Halim Hassan, I.H. “*On solving eigenvalue problems by using a differential transformation*”, Applied Mathematics and Computation; 127, 1-22, 2002.

Abdel- Halim Hassan, I.H. “*Different Applications for the differential transformation in differential equations*”, Applied Mathematics and Computation; 129, 183-221, 2002.

Abdel- Halim Hassan, I.H. “*Differential Transformation technique for solving higher-order initial value problems*”, Applied Mathematics and Computation; 154, 299-311, 2004.

A.M.A. El-Sayed, A.E.M. El-Mesiry, H.A.A. El-Saka “*Numerical solution for multiterm fractional (arbitrary) orders differential equations*” Computational and Applied Mathematics, 23, 33-54, 2004

Arikoğlu, A., Özkol I. “*Solution of boundry value problems for integro-differential equations by using differential transform method*”, Applied Mathematics and Computation, 2004.

Arikoğlu, A., Özkol I. “*Solution of differential–difference equations by using differential transform method*”, Applied Mathematics and Computation, 181,1, 2006, 153-162.

C. Trinks, P. Ruge, “*Treatment of dynamic systems with fractional derivatives without evaluating memory-integrals*”, Computational Mechanics, 29, 2002, 471-476

Chen, C.K., Ho, S.H. “*Application of differential transformation to eigenvalue problems*”, Applied Mathematics and Computation; 79, 179-188, 1996.

Chen, C.L., Liu, Y.C. “*Differential transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems*”, Applied Mathematics and Computation; 95, 155-164, 1998.

Daftardar-Gejji V., Babakhani A. “*Analysis of a system of fractional differential equations*” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 293, Issue 2, 15 May 2004, Pages 511-522.

El-Sayed A.M.A. “*On the fractional differential equations*”, *Applied Mathematics and Computation.*, 49 1992, 205–213.

El-Sayed A.M.A. “*Linear differential equations of fractional orders*”, *Applied Mathematics and Computation*, 55, 1993, 1-12.

Ertürk V. S., Momani S., Odibat Z. “*Application of generalized differential transform method to multi-order fractional differential equations*” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, In Press, Corrected Proof, Available online 24 February 2007.

Ertürk V. S., Momani S., Odibat Z. “*Generalized differential transform method: Application to differential equations of fractional order*” *Appl. Math. Comput.*, Submitted.

Gorenflo R., Mainardi F. “*Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order*”, ISBN 3-221-82913-X. Volume No. 378 of the series CISM Lecture Notes, International Centre for the Mechanical Science Palazzo del Torso, Piazza Garibaldi, Udine, Italy.

Jafari H., Daftardar-Gejji V. “*Solving a system of nonlinear fractional differential equations using Adomian decomposition*” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 196, Issue 2, 15 November 2006, Pages 644-651

Jafari H., Daftardar-Gejji V. “*Analysis of a system of nonautonomous fractional differential equations involving Caputo derivatives*” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 328, Issue 2, 15 April 2007, Pages 1026-1033.

Jafari H., Daftardar-Gejji V. “*Revised Adomian decomposition method for solving systems of ordinary and fractional differential equations*” *Applied Mathematics and Computation*, Volume 181, Issue 1, 1 October 2006, Pages 598-608.

Jafari H., Daftardar-Gejji V. “*Solving a multi-order fractional differential equation using adomian decomposition*” Applied Mathematics and Computation, 189, 2007, 541-548

Jafari H., Daftardar-Gejji V. “*Adomian decomposition: a tool for solving a system of fractional differential equations*” Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 301, Issue 2, 15 January 2005, Pages 508-518.

Jang, M.J., Chen, C.L., Liu, Y.C. “*On the solving initial value problems using the differential transform method*”, Applied Mathematics and Computation; 115, 145-160, 2000.

John T. Edwards, Neville J .Ford, A. Charles Simpson, “The numerical solution of linear multiterm fractional differential equations” Journal of Computational and Applied Mathematics, 148,(2002), 410-418

Keskin Y., Kurnaz A., Kiriş, M.E., Oturanç, G. “*Approximate solution of Generalized Pantograph Equations by the differential transform method*”, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 8, 2, 2007.

Kurnaz A., Oturanç, G. “*The differential transform approximation for the system of ordinary differential equation*”, International Journal of Computer Mathematics, 82 2005, 709-719.

Lu J. G., Chen G. “*A note on the fractional-order Chen system*”. Chaos, Solitons & Fractals, 27, 2006, 3,685–688.

Luchko Y., Srivastava H.M. “*The exact solution of certain differential equations of fractional order by using operational calculus*”, Comput. Math. Appl. 29, 1995, 73–85.

Luchko Y., Gorenflo R. “*The initial value problem for some fractional differential equations with the Caputo derivative*”, Preprint Series A08-98, Fachbereich Mathematik und Informatik, Freie Universitat Berlin, 1998.

Momani S. and Odibat Z. “*Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order*” Chaos, Solitons & Fractals, Volume 31, Issue 5, March 2007, Pages 1248-1255.

Momani S., Shawagfeh N. “*Decomposition Method for solving fractional Riccati differential equations*” Applied Mathematics and Computation, 182, 2007, Pages 1083-1092.

Momani S., Noor M. A. “*Numerical methods for fourth-order fractional integro- differential equations*” Applied Mathematics and Computation, 182, 2006, Pages 754-760

Momani S. and Odibat Z. “*Numerical methods for nonlinear partial differential equations of fractional order*” Applied Mathematics and Computation, ***, 2006, ***-***

Odibat Z., Shawagfeh N. T. “*Generalized Taylor’s Formula*” Applied Mathematics and Computation, Volume 186, Issue 1, 1 March 2007, Pages 286-293.

Odibat Z., Momani S. “*Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order*”, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 7, 2006, 1, 27-34.

Ockendon J.R., Tayler A.B. “*The dynamics of a current collection system for an electric locomotive*” Proc. Royal Soc. London Ser. A 322 (1971), 447-468.

Oldham K.B., Spanier J. “*The Fractional Calculus*”, Academic Press, New York, 1974.

Oturanc G., Kurnaz A., Keskin Y. “*A new Analytical Approximate Method for the Solution of Fractional Differential Equation*” International Journal of Computer Mathematics 2007.(In Press).

Ray S.S., Bera R.K. “*An approximate solution of a nonlinear fractional differential equation by Adomian decomposition method*”, Applied Mathematics and Computation, 167, 2005, 1, 561-571.

Shawagfeh N.T. “*Analytical approximate solutions for nonlinear fractional differential equations*”, Applied Mathematics and Computation, 131, 2002, 2-3, 517-529.

Ertürk V.S., S. Monami, Z. Obidat, “*Application of generalized differential transform method to multi order fractional differential equations*”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, ***, (2007), ***