ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right\}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Çağla YALÇINKAYA

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Ortaöğretim Ana Bilim Dalı

Matematik Öğretmenliği Proğramı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2008, 28 Sayfa

Jüri: Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR

Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

Yrd. Doç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremleri verdik.

İkinci bölümde maksimumlu fark denklemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verdik.

Üçüncü bölümde ise bu konudaki asıl amacımız olan $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right\}$ fark denklemini tanımladık ve sıfırdan farklı başlangıç şartları için çözümlerini inceledik.

Anahtar Kelimeler: Maksimumlu Fark Denklemi, Çözüm, Fibonacci Sayıları

ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

A STUDY ON THE SOLUTIONS OF THE DIFFERENCE EQUATION

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right\}$$

Çağla YALÇINKAYA

Selcuk University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics Education

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2008, 28 Pages

Jury: Assoc. Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR

Assist. Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

Assist. Prof. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK

This study consists of three sections. In the first section, we gave general definitions and theorems about difference equations.

In the second section, we gave information about some difference equations with maximum studied before.

In the third section, we defined the difference equation $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right\}$, which is our main aim in this subject, and investigated its solutions where initial conditions are nonzero real numbers.

Key Words : Difference Equation with Maximum, Solution, Fibonacci Numbers

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmanın birinci bölümünde, fark denklemleri ile ilgili temel tanım ve teoremler yer almaktadır. İkinci bölümde, literatür hakkında bilgi verilmektedir. Üçüncü bölümde de $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right\}$ fark denkleminin çözümleri incelenmiştir. Son bölüm ise, sonuç ve önerilerden oluşmaktadır.

Yüksek Lisans çalışmamı yönetmeyi kabul ederek, karşılaştığım güçlüklerde yardımını esirgemeyen, tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI'ya, katkılarından dolayı eşim Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA ve Ali GELİŞKEN'e teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Çağla YALÇINKAYA

Konya, 2008

İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM
FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

x bağımsız değişkenine bağlı $y(x)$ bağımlı değişkeninin sürekli olduğu aralıkta, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y^{'}(x), y^{''}(x), ..., y^{(n)}(x), ...$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x'in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde x'in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu denklemler üzerinde duracağız.

Tanım 1.1. n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişken de y olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $E(y), E^2(y)$, $E^3(y), ..., E^n(y), ...$ gibi farklarını içeren bağıntılara Fark Denklemi denir.

Birinci mertebeden fark denklemlerinin genel formu;

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) = f(n)$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden fark denklemlerinin genel formu ise;

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n+2) = g(n)$$

şeklindedir. Denklemin mertebesinin belirlenmesinde, y'nin hesaplanabilmesi için gerekli olan başlangıç şartı sayısı göz önüne alınmaktadır.

Örnek 1.1. $x_{n+1} - x_n = 5$ denklemini göz önüne alalım. Bu denklem birinci mertebeden bir fark denklemi olup, ardışık iki terim arasındaki farkın 5'e eşit olduğunu ortaya koymaktadır.

Basit iterasyon işlemi ile

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 5 + x_0 , \\
x_2 &= 5 + x_1 = 5 + 5 + x_0 , \\
x_3 &= 5 + x_2 = 5 + 5 + 5 + x_0 , \\
x_4 &= 5 + x_3 = 5 + 5 + 5 + 5 + x_0 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Buradan genel çözümün $x_n = 5n + x_0$ şeklinde olduğu görülür.

Teorem 1.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f : I^{k+1} \to I$ sürekli diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Her x_{-k}, $x_{-(k-1)}$,..., $x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}), \quad n = 0,1,2,... \tag{1.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 1.2. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için

$$x_{n+p} = x_n$$

ise, $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur. p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 1.3. Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için

$$x_{n+p} = x_n$$

ise, $\{x_n\}$ dizisine er geç p periyotludur ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 1.4. (1.1) denkleminde

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, ..., \bar{x})$$

şartını sağlayan $\bar{x}$ noktasına (1.1) denkleminin denge noktası denir.

Tanım 1.5. $\bar{x}$, (1.1) denkleminin denge noktası olmak üzere:

(a) Eğer $x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\left|x_0 - \bar{x}\right| + \left|x_{-1} - \bar{x}\right| + ... + \left|x_{-k} - \bar{x}\right| < \delta$$

iken her $n \geq 0$ için $\left|x_n - \bar{x}\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

(b) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ iken

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$$

olacak şekilde,

$$\left|x_0 - \bar{x}\right| + \left|x_{-1} - \bar{x}\right| + ... + \left|x_{-k} - \bar{x}\right| < \gamma$$

şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(c) Eğer her $x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ iken

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$$

ise, $\bar{x}$ denge noktasına çekim noktası denir.

(d) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise, $\bar{x}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.

(e) Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı değil ise, kararsızdır denir.

(f) Eğer $x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ iken

$$\left|x_0 - \overline{x}\right| + \left|x_{-1} - \overline{x}\right| + ... + \left|x_{-k} - \overline{x}\right| < r$$

ve bazı $N \geq -1$ sayıları için

$$\left|x_N - \overline{x}\right| \geq r$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, $\overline{x}$ denge noktasına repeller denir.

Tanım 1.6. (1.1) denkleminden elde edilen

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}}(\overline{x}, ..., \overline{x}) y_{n-i} \tag{1.2}$$

denkleme, $\overline{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir.

(1.2) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}}(\overline{x}, ..., \overline{x}) \lambda^{k-i} = 0 \tag{1.3}$$

dir.

Teorem 1.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)

(a) Eğer (1.3) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise, $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(b) Eğer (1.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\overline{x}$ denge noktası kararsızdır.

Tanım 1.7. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümlerinin hepsi birden $\overline{x}$ denge noktasından ne büyük ne de küçük ise, bu çözümlere $\overline{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir.

Tanım 1.8. $\{x_n - \overline{x}\}$ dizisi salınımlı ise, $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne $\overline{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır denir.

Tanım 1.9. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa, $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisine sınırlıdır denir.

Tanım 1.10. $\overline{x}$, (1.1) denkleminin denge noktası olsun. $l \geq -k$, $m \leq \infty$ olmak üzere, $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisinin her elemanı $\overline{x}$ denge noktasından büyük veya eşit, $l = -k$ veya $l > -k$ için $x_{l-k} < \overline{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} < \overline{x}$ oluyorsa, $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde, $l \geq -k$, $m \leq \infty$ olmak üzere, $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisinin her elemanı $\overline{x}$ denge noktasından küçük, $l = -k$ veya $l > -k$ için $x_{l-k} \geq \overline{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} \geq \overline{x}$ oluyorsa, $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir.

Tanım 1.11. $F(0) = F(1) = 1$ ve $j = 0,1,...$ için $F(j+2) = F(j) + F(j+1)$ şeklinde tanımlanan diziye Fibonacci dizisi, bu dizinin terimlerine de Fibonacci sayısı denir.

$F(2) = F(0) + F(1) = 1 + 1 = 2$ $\quad$ $F(3) = F(1) + F(2) = 1 + 2 = 3$

$F(4) = F(2) + F(3) = 2 + 3 = 5$ $\quad$ $F(5) = F(3) + F(4) = 3 + 5 = 8$

$F(6) = F(4) + F(5) = 5 + 8 = 13$ $\quad$ $F(7) = F(5) + F(6) = 8 + 13 = 21$ **...**

2. BÖLÜM
MAKSİMUMLU VE MİNİMUMLU FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ YAPILMIŞ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, fark denklemlerinin önemli çalışma alanlarından olan maksimum ve minimumlu fark denklemleri ile ilgili yapılmış çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Amleh (1998), G. Ladas yönetiminde yaptığı doktora tezinde; fark denklemlerinin üç farklı konusunu ele almıştır. İlk bölümde, $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-1}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin sıfırdan farklı reel sayılar olan A, B parametreleri ve x_{-1}, x_0 başlangıç şartları için periyodik olduğunu göstermiştir. İkinci bölümde, $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}x_{n-2}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2}}$ rasyonel fark denkleminin global asimptotik kararlılığını incelemiştir. Son bölümde ise, Plant-Herbivore sisteminin çözümlerinin sınırlılığı üzerine çalışmıştır.

Janowski ve arkadaşları (1998), yaptıkları çalışmada; $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n^k, A\}}{x_{n-1}}$ maksimumlu rasyonel fark denkleminin çözümlerinin sınırlılık ve salınımlılık özelliklerini incelemişlerdir. Bu fark denkleminde A, k parametreleri ve başlangıç şartlarının pozitif sayı değerleri aldıklarını varsaymışlar ve çalışma sonucunda bu denklemin çözümlerinin sınırlı ve salınımlı olma şartlarını A, k parametreleri ile başlangıç şartlarına bağlı olarak elde etmişlerdir.

Valicenti (1999), yaptığı doktora tezinde; $x_{n+1} = \frac{a_n x_n + b_n}{x_{n-1}}$ otonom olmayan Lyness fark denklemi ile $x_{n+1} = \frac{\max\{a_n x_n, b_n\}}{x_{n-1}}$ maksimumlu fark denkleminin çözümlerinin periyodikliği ve global asimptotik kararlılığı üzerine çalışmıştır.

Teixeria (2000), yaptığı doktora tezinde; ilk olarak A herhangi bir reel sayı ve başlangıç şartları sıfır olmayan reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{\max\{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir. Daha sonra, $x_{n+1} = \dfrac{a}{x_n} + \dfrac{b}{y_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{c}{x_n} + \dfrac{d}{y_n}$ fark denklem sisteminin çözümlerini analiz etmiştir. Son olarak ta $y_{n+1} = \dfrac{p + y_{n-1}}{qy_n + y_{n-1}}$ fark denkleminin pozitif parametreler ve başlangıç şartları altında global asimptotik kararlı olduğunu göstermiştir.

Papaschinopoulos ve Hatzifilippidis (2001), katsayılarını pozitif sayı dizileri ve başlangıç şartlarını pozitif sayı olarak aldıkları $x_{n+1} = \dfrac{\max\left\{a_n \left(\prod_{i=n-k+1}^{n} x_i\right), b_n\right\}}{\prod_{i=n-k}^{n} x_i}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin süreklilik, sınırlılık ve periyodiklik özelliklerini incelemişlerdir.

Mishev ve arkadaşları (2002), $x_{n+1} = \max\left\{\dfrac{A}{x_n}, \dfrac{B}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin periyodikliği üzerine yaptıkları çalışmada; A, B parametreleri ile başlangıç şartlarını pozitif sayı değerleri olarak kabul ederek denklemin bütün pozitif çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ispat etmişlerdir.

Voulov (2002), yaptığı iki çalışmadan birincisinde; G. Ladas tarafından verilen bir açık problemi çözmüştür. Bu çalışmada, A, B, C parametreleri negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $A + B + C > 0$ için $x_n = \max\left\{\dfrac{A}{x_{n-1}}, \dfrac{B}{x_{n-3}}, \dfrac{C}{x_{n-5}}\right\}$ fark denkleminin bütün çözümlerinin periyodik olduğunu göstermiştir. İkincisinde ise; A ile B parametreleri pozitif reel sayılar ve k ile m parametreleri pozitif tam sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \max\left\{\dfrac{A}{x_{n-k}}, \dfrac{B}{x_{n-m}}\right\}$ maksimumlu fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelemiştir. A, B, k ve m parametrelerine bağlı olarak denklemin bütün pozitif çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ispat etmiştir.

Papaschinopoulos ve arkadaşları (2003), yaptıkları çalışmada; daha önce Feuer tarafından çalışılmış olan $x_{n+1} = \dfrac{\max\{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümleri, çözümlerinin periyodikliği ve sabit aralığı üzerine çalışmışlardır.

Feuer (2003), $x_{n+1} = \dfrac{\max\{x_n^k, A\}}{x_n^l x_{n-1}}$ maksimumlu Lyness fark denklemi üzerinde yaptığı çalışmada; A'nın pozitif bir reel sayı, k, l ve başlangıç şartlarının da keyfi reel sayı değerleri olduğunu kabul ederek denklemin çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelemiştir.

Patula ve Voulov (2004), yaptıkları çalışmada; A_n, B_n pozitif terimli ve 3 periyotlu diziler olmak üzere, $x_{n+1} = \max\left\{\dfrac{A_n}{x_n}, \dfrac{B_n}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Çinar ve arkadaşları (2005), yaptıkları çalışmada; $A, B > 0$ olmak üzere, sıfırdan farklı başlangıç şartları için $x_{n+1} = \min\left\{\dfrac{A}{x_n}, \dfrac{B}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir. Ayrıca, bu denklemi genelleştirerek elde ettikleri $x_{n+1} = \min\left\{\dfrac{A}{x_n x_{n-1} \dots x_{n-k}}, \dfrac{B}{x_{n(k+2)} \dots x_{n-(2k+2)}}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini de incelemişlerdir.

Şimsek ve arkadaşları (2006), yaptıkları çalışmada; $x_{n+1}=\max\left\{\frac{1}{x_{n-1}},x_{n-1}\right\}$ fark denkleminin pozitif başlangıç şartları altında çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Yan ve arkadaşları (2006), yaptıkları çalışmada; $0<\alpha<1, A>0, A\leq 1$, $A>1$ ve $x_{-2},x_{-1},x_0\in(0,\infty)$ başlangıç şartları için $x_n=\max\left\{\frac{1}{x_{n-1}^{\alpha}},\frac{A}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin 4 periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

Stefanidou ve Papaschinopoulos (2006), yaptıkları çalışmada; A_0,A_1 ve başlangıç şartları pozitif fuzzy sayıları, k ve m parametreleri pozitif tam sayılar olmak üzere $x_n=\max\left\{\frac{A_0}{x_{n-k}},\frac{A_1}{x_{n-m}}\right\}$ fuzzy fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Stevic (2007), yaptığı çalışmada; $p,c\in(0,\infty)$ ve pozitif başlangıç şartları için $x_{n+1}=\max\left\{c,\frac{x_n^p}{x_{n-1}^p}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Yalçınkaya ve arkadaşları (2007), yaptıkları çalışmada; A parametresi bir reel sayı ve başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1}=\max\left\{\frac{1}{x_n},Ax_{n-1}\right\}$ maksimumlu fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Gelişken ve arkadaşları (2008), yaptıkları çalışmada; bir açık problem olan $x_{n+1}=\frac{\max\{x_n,A\}}{x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

3. BÖLÜM

$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right\}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde; x_{-1}, x_0 başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right\}, \ n = 0,1,2,... \tag{3.1}$$

maksimumlu fark denklemi tanımlanmış ve çözümleri incelenmiştir.

Teorem 3.1. p ve s herhangi iki tam sayı ve m ise k ya bağlı bir fonksiyon olmak üzere, (3.1) denkleminin genel çözümü $x_m = (\frac{x_{-1}^p}{x_0^s})^{2^k}$ şeklindedir. ($k = 0,1,...$)

İspat. **(A)** $1 < x_0$ olsun.

(A1) Başlangıç şartlarının $1 < x_0 < x_{-1}$ eşitsizliğini sağladığını kabul edelim. Ayrıca $F(j)$,

$$x_{-1}^{F(j-1)} < x_0^{F(j)} \quad \text{ve} \quad x_{-1}^{F(j)} < x_0^{F(j+1)} \tag{3.2}$$

veya

$$x_0^{F(j)} < x_{-1}^{F(j-1)} \quad \text{ve} \quad x_0^{F(j+1)} < x_{-1}^{F(j)} \tag{3.3}$$

şartlarını sağlayan en küçük Fibonacci sayısı olsun. ($F(0) = F(1) = 1$)

Eğer $F(j)$, (3.2) şartını sağlayan en küçük fibonacci sayısı ise, (3.1) denkleminin çözümleri:

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{x_{-1}}{x_0}\right\} = \frac{x_{-1}}{x_0} = \frac{x_{-1}^{F(0)}}{x_0^{F(1)}}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{x_0}{x_{-1}}, \frac{x_0^2}{x_{-1}}\right\} = \frac{x_0^2}{x_{-1}} = \frac{x_0^{F(2)}}{x_{-1}^{F(1)}}$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{x_{-1}}{x_0^2}, \frac{x_{-1}^2}{x_0^3}\right\} = \frac{x_{-1}^2}{x_0^3} = \frac{x_{-1}^{F(2)}}{x_0^{F(3)}}$$

...

$$x_{j+1} = \max\left\{\frac{x_{-1}^{F(j-1)}}{x_0^{F(j)}}, \frac{x_{-1}^{F(j)}}{x_0^{F(j+1)}}\right\} = \frac{x_{-1}^{F(j)}}{x_0^{F(j+1)}}$$

$$x_{j+2} = \max\left\{\frac{x_0^{F(j+1)}}{x_{-1}^{F(j)}}, \frac{x_0^{F(j+2)}}{x_{-1}^{F(j+1)}}\right\} = \frac{x_0^{F(j+2)}}{x_{-1}^{F(j+1)}}$$

$$x_{j+3} = \max\left\{\frac{x_{-1}^{F(j+1)}}{x_0^{F(j+2)}}, \frac{x_{-1}^{F(j+2)}}{x_0^{F(j+3)}}\right\} = \frac{x_{-1}^{F(j+1)}}{x_0^{F(j+2)}}$$

$$x_{j+4} = \max\left\{\frac{x_0^{F(j+2)}}{x_{-1}^{F(j+1)}}, \frac{x_0^{2F(j+2)}}{x_{-1}^{2F(j+1)}}\right\} = \left(\frac{x_0^{F(j+2)}}{x_{-1}^{F(j+1)}}\right)^2$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denkleminin çözümlerinin

$$x_{j+2+2k} = \left(\frac{x_0^{F(j+2)}}{x_{-1}^{F(j+1)}}\right)^{2^k} \quad \text{ve} \quad x_{j+2+2k+1} = \left(\frac{x_{-1}^{F(j+1)}}{x_0^{F(j+2)}}\right)^{2^k}, \quad k = 0,1,...$$

şeklinde olduğu görülür. Ayrıca (3.1) denkleminin ilk ($j+2$) çözümü

$$x_{2l+1} = \left(\frac{x_{-1}^{F(2l)}}{x_0^{F(2l+1)}}\right) \quad \text{ve} \quad x_{2l+2} = \left(\frac{x_0^{F(2l+2)}}{x_{-1}^{F(2l+1)}}\right), \quad l = 0,1,..., \frac{j}{2}$$

şeklinde genelleştirilebilir.

Eğer $F(j)$, (3.3) şartını sağlayan en küçük fibonacci sayısı ise, (3.1) denkleminin çözümleri:

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{x_{-1}}{x_0}\right\} = \frac{x_{-1}}{x_0} = \frac{x_{-1}^{F(0)}}{x_0^{F(1)}}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{x_0}{x_{-1}}, \frac{x_0^2}{x_{-1}}\right\} = \frac{x_0^2}{x_{-1}} = \frac{x_0^{F(2)}}{x_{-1}^{F(1)}}$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{x_{-1}}{x_0^2}, \frac{x_{-1}^2}{x_0^3}\right\} = \frac{x_{-1}^2}{x_0^3} = \frac{x_{-1}^{F(2)}}{x_0^{F(3)}}$$

...

$$x_{j+1} = \max\left\{\frac{x_0^{F(j)}}{x_{-1}^{F(j-1)}}, \frac{x_0^{F(j+1)}}{x_{-1}^{F(j)}}\right\} = \frac{x_0^{F(j+1)}}{x_{-1}^{F(j)}}$$

$$x_{j+2} = \max\left\{\frac{x_{-1}^{F(j)}}{x_0^{F(j+1)}}, \frac{x_{-1}^{F(j+1)}}{x_0^{F(j+2)}}\right\} = \frac{x_{-1}^{F(j+1)}}{x_0^{F(j+2)}}$$

$$x_{j+3} = \max\left\{\frac{x_0^{F(j+2)}}{x_{-1}^{F(j+1)}}, \frac{x_0^{F(j+3)}}{x_{-1}^{F(j+2)}}\right\} = \frac{x_0^{F(j+2)}}{x_{-1}^{F(j+1)}}$$

$$x_{j+4} = \max\left\{\frac{x_{-1}^{F(j+1)}}{x_0^{F(j+2)}}, \frac{x_{-1}^{2F(j+1)}}{x_0^{2F(j+2)}}\right\} = \left(\frac{x_{-1}^{F(j+1)}}{x_0^{F(j+2)}}\right)^2$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denkleminin çözümlerinin

$$x_{j+2+2k} = \left(\frac{x_{-1}^{F(j+1)}}{x_0^{F(j+2)}}\right)^{2^k} \quad \text{ve} \quad x_{j+2+2k+1} = \left(\frac{x_0^{F(j+2)}}{x_{-1}^{F(j+1)}}\right)^{2^k}, \quad k = 0,1,...$$

şeklinde olduğu görülür. Ayrıca (3.1) denkleminin ilk $(j+1)$ çözümü

$$x_{2l+1} = \left(\frac{x_{-1}^{F(2l)}}{x_0^{F(2l+1)}}\right) \quad \text{ve} \quad x_{2l+2} = \left(\frac{x_0^{F(2l+2)}}{x_{-1}^{F(2l+1)}}\right), \quad l = 0,1,...,\frac{j-1}{2}$$

şeklinde genelleştirilebilir.

(A2) $1 \le x_{-1} < x_0$ ise, (3.1) denkleminin çözümleri:

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{x_{-1}}{x_0}\right\} = \frac{x_{-1}}{x_0}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{x_0}{x_{-1}}, \frac{x_0^2}{x_{-1}}\right\} = \frac{x_0^2}{x_{-1}}$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{x_{-1}}{x_0^2}, \frac{x_{-1}^2}{x_0^3}\right\} = \frac{x_{-1}}{x_0^2}$$

$$x_4 = \max\left\{\frac{x_0^2}{x_{-1}}, \frac{x_0^4}{x_{-1}^2}\right\} = \frac{x_0^4}{x_{-1}^2}$$

$$x_5 = \max\left\{\frac{x_{-1}^2}{x_0^4}, \frac{x_{-1}^3}{x_0^6}\right\} = \frac{x_{-1}^2}{x_0^4}$$

$$x_6 = \max\left\{\frac{x_0^4}{x_{-1}^2}, \frac{x_0^8}{x_{-1}^4}\right\} = \frac{x_0^8}{x_{-1}^4}$$

$$x_7 = \max\left\{\frac{x_{-1}^4}{x_0^8}, \frac{x_{-1}^6}{x_0^{12}}\right\} = \frac{x_{-1}^4}{x_0^8}$$

$$x_8 = \max\left\{\frac{x_0^8}{x_{-1}^4}, \frac{x_0^{16}}{x_{-1}^8}\right\} = \frac{x_0^{16}}{x_{-1}^8}$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denkleminin genel çözümünün

$$x_{2k+2} = \left(\frac{x_0^2}{x_{-1}}\right)^{2^k} \quad \text{ve} \quad x_{2k+3} = \left(\frac{x_{-1}}{x_0^2}\right)^{2^k}, \quad k = 0,1,...$$

şeklinde olduğu görülür.

(A3) $x_{-1} \leq 1 < x_0$ $(x_{-1} \neq 0)$ ise, (3.1) denkleminin çözümleri:

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{x_{-1}}{x_0}\right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max\left\{x_0, x_0^2\right\} = x_0^2$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0^2}, \frac{1}{x_0^3}\right\} = \frac{1}{x_0^2}$$

$$x_4 = \max\left\{x_0^2, x_0^4\right\} = x_0^4$$

$$x_5 = \max\left\{\frac{1}{x_0^4}, \frac{1}{x_0^6}\right\} = \frac{1}{x_0^4}$$

$$x_6 = \max\left\{x_0^4, x_0^8\right\} = x_0^8$$

$$x_7 = \max\left\{\frac{1}{x_0^8}, \frac{1}{x_0^{12}}\right\} = \frac{1}{x_0^8}$$

$$x_8 = \max\left\{x_0^8, x_0^{16}\right\} = x_0^{16}$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denkleminin genel çözümünün

$$x_{2k} = (x_0)^{2^k} \quad \text{ve} \quad x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^{2^k}, \quad k = 0,1,...$$

şeklinde olduğu görülür.

(B) $0 < x_0 \leq 1$ olsun.

(B1) Eğer $1 \leq x_{-1}$ ise, (3.1) denkleminin çözümleri:

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{x_{-1}}{x_0}\right\} = \frac{x_{-1}}{x_0}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{x_0}{x_{-1}}, \frac{x_0^2}{x_{-1}}\right\} = \frac{x_0}{x_{-1}}$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{x_{-1}}{x_0}, \frac{x_{-1}^2}{x_0^2}\right\} = \frac{x_{-1}^2}{x_0^2}$$

$$x_4 = \max\left\{\frac{x_0^2}{x_{-1}^2}, \frac{x_0^3}{x_{-1}^3}\right\} = \frac{x_0^2}{x_{-1}^2}$$

$$x_5 = \max\left\{\frac{x_{-1}^2}{x_0^2}, \frac{x_{-1}^4}{x_0^4}\right\} = \frac{x_{-1}^4}{x_0^4}$$

$$x_6 = \max\left\{\frac{x_0^4}{x_{-1}^4}, \frac{x_0^6}{x_{-1}^6}\right\} = \frac{x_0^4}{x_{-1}^4}$$

$$x_7 = \max\left\{\frac{x_{-1}^4}{x_0^4}, \frac{x_{-1}^8}{x_0^8}\right\} = \frac{x_{-1}^8}{x_0^8}$$

$$x_8 = \max\left\{\frac{x_0^8}{x_{-1}^8}, \frac{x_0^{12}}{x_{-1}^{12}}\right\} = \frac{x_0^8}{x_{-1}^8}$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denkleminin genel çözümünün

$$x_{2k+1} = (\frac{x_{-1}}{x_0})^{2^k} \quad \text{ve} \quad x_{2k+2} = (\frac{x_0}{x_{-1}})^{2^k}, \quad k = 0,1,...$$

şeklinde olduğu görülür.

(B2) Eğer $x_{-1} \leq 1$ ($x_{-1} \neq 0$) ise, (3.1) denkleminin çözümleri:

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{x_{-1}}{x_0}\right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max\left\{x_0, x_0^2\right\} = x_0$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{1}{x_0^2}\right\} = \frac{1}{x_0^2}$$

$$x_4 = \max\left\{x_0^2, x_0^3\right\} = x_0^2$$

$$x_5 = \max\left\{\frac{1}{x_0^2}, \frac{1}{x_0^4}\right\} = \frac{1}{x_0^4}$$

$$x_6 = \max\left\{x_0^4, x_0^6\right\} = x_0^4$$

$$x_7 = \max\left\{\frac{1}{x_0^4}, \frac{1}{x_0^8}\right\} = \frac{1}{x_0^8}$$

$$x_8 = \max\left\{x_0^8, x_0^{12}\right\} = x_0^8$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denkleminin genel çözümünün

$$x_{2k+1} = (\frac{1}{x_0})^{2^k} \quad \text{ve} \quad x_{2k+2} = (x_0)^{2^k}, \quad k = 0,1,...$$

şeklinde olduğu görülür.

(C) $x_0 < 0$ olsun.

(C1) Eğer $0 < x_{-1} \le 1$ ise, (3.1) denkleminin çözümleri:

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{x_{-1}}{x_0}\right\} = \frac{x_{-1}}{x_0}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{x_0}{x_{-1}}, \frac{x_0^2}{x_{-1}}\right\} = \frac{x_0^2}{x_{-1}}$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{x_{-1}}{x_0^2}, \frac{x_{-1}^2}{x_0^3}\right\} = \frac{x_{-1}}{x_0^2} \quad \text{olur.}$$

Eğer $x_0^2 < x_{-1}$ ise,

$$x_4 = \max\left\{\frac{x_0^2}{x_{-1}}, \frac{x_0^4}{x_{-1}^2}\right\} = \frac{x_0^2}{x_{-1}}$$

$$x_5 = \max\left\{\frac{x_{-1}}{x_0^2}, \frac{x_{-1}^2}{x_0^4}\right\} = \frac{x_{-1}^2}{x_0^4}$$

...

şeklindedir. Buradan, $x_0^2 < x_{-1}$ için (3.1) denkleminin genel çözümünün

$$x_{2k+3} = (\frac{x_{-1}}{x_0^2})^{2^k} \quad \text{ve} \quad x_{2k+4} = (\frac{x_0^2}{x_{-1}})^{2^k}, \quad k = 0,1,...$$

şeklinde olduğu görülür.

Eğer $x_{-1} < x_0^2$ ise,

$$x_4 = \max\left\{\frac{x_0^2}{x_{-1}}, \frac{x_0^4}{x_{-1}^2}\right\} = \frac{x_0^4}{x_{-1}^2}$$

$$x_5 = \max\left\{\frac{x_{-1}^2}{x_0^4}, \frac{x_{-1}^3}{x_0^6}\right\} = \frac{x_{-1}^2}{x_0^4}$$

...

şeklindedir. Buradan, $x_{-1} < x_0^2$ için (3.1) denkleminin genel çözümünün

$$x_{2k+2} = (\frac{x_0^2}{x_{-1}})^{2^k} \quad \text{ve} \quad x_{2k+3} = (\frac{x_{-1}}{x_0^2})^{2^k}, \quad k = 0,1,...$$

şeklinde olduğu görülür.

(C2) Eğer $-1 \le x_0 < 0$ ve $1 \le x_{-1}$ ise, (3.1) denkleminin çözümleri:

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{x_{-1}}{x_0}\right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max\left\{x_0, x_0^2\right\} = x_0^2$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0^2}, \frac{1}{x_0^3}\right\} = \frac{1}{x_0^2}$$

$$x_4 = \max\left\{x_0^2, x_0^4\right\} = x_0^2$$

$$x_5 = \max\left\{\frac{1}{x_0^2}, \frac{1}{x_0^4}\right\} = \frac{1}{x_0^4}$$

$$x_6 = \max\left\{x_0^4, x_0^6\right\} = x_0^4$$

$$x_7 = \max\left\{\frac{1}{x_0^4}, \frac{1}{x_0^8}\right\} = \frac{1}{x_0^8}$$

$$x_4 = \max\left\{x_0^8, x_0^{12}\right\} = x_0^8$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denkleminin genel çözümünün

$$x_{2k+1} = (\frac{1}{x_0})^{2^k} \quad \text{ve} \quad x_{2k+4} = (x_0^2)^{2^k}, \quad k = 0,1,...$$

şeklinde olduğu görülür.

(C3) Eğer $x_0 \le -1$ ve $1 \le x_{-1}$ ise, (3.1) denkleminin çözümleri:

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{x_{-1}}{x_0}\right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max\left\{x_0, x_0^2\right\} = x_0^2$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0^2}, \frac{1}{x_0^3}\right\} = \frac{1}{x_0^2}$$

$$x_4 = \max\left\{x_0^2, x_0^4\right\} = x_0^4$$

$$x_5 = \max\left\{\frac{1}{x_0^4}, \frac{1}{x_0^6}\right\} = \frac{1}{x_0^4}$$

$$x_6 = \max\left\{x_0^4, x_0^8\right\} = x_0^8$$

$$x_7 = \max\left\{\frac{1}{x_0^8}, \frac{1}{x_0^{12}}\right\} = \frac{1}{x_0^8}$$

$$x_8 = \max\left\{x_0^8, x_0^{16}\right\} = x_0^{16}$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denkleminin genel çözümünün

$$x_{2k} = (x_0)^{2^k} \quad \text{ve} \quad x_{2k+1} = (\frac{1}{x_0})^{2^k}, \quad k = 0,1,...$$

şeklinde olduğu görülür.

(C4) Eğer $x_{-1} \le x_0 < 0$ ise, (3.1) denkleminin çözümleri:

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{x_{-1}}{x_0}\right\} = \frac{x_{-1}}{x_0}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{x_0}{x_{-1}}, \frac{x_0^2}{x_{-1}}\right\} = \frac{x_0}{x_{-1}}$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{x_{-1}}{x_0}, \frac{x_{-1}^2}{x_0^2}\right\} = \frac{x_{-1}^2}{x_0^2}$$

$$x_4 = \max\left\{\frac{x_0^2}{x_{-1}^2}, \frac{x_0^3}{x_{-1}^3}\right\} = \frac{x_0^2}{x_{-1}^2}$$

$$x_5 = \max\left\{\frac{x_{-1}^2}{x_0^2}, \frac{x_{-1}^4}{x_0^4}\right\} = \frac{x_{-1}^4}{x_0^4}$$

$$x_6 = \max\left\{\frac{x_0^4}{x_{-1}^4}, \frac{x_0^6}{x_{-1}^6}\right\} = \frac{x_0^4}{x_{-1}^4}$$

$$x_7 = \max\left\{\frac{x_{-1}^4}{x_0^4}, \frac{x_{-1}^8}{x_0^8}\right\} = \frac{x_{-1}^8}{x_0^8}$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denkleminin genel çözümünün

$$x_{2k+1} = (\frac{x_{-1}}{x_0})^{2^k} \quad \text{ve} \quad x_{2k+2} = (\frac{x_0}{x_{-1}})^{2^k}, \quad k = 0,1,...$$

şeklinde olduğu görülür.

(C5) Eğer $x_0 \le x_{-1} < 0$ ise, (3.1) denkleminin çözümleri:

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{x_{-1}}{x_0}\right\} = \frac{x_{-1}}{x_0}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{x_0}{x_{-1}}, \frac{x_0^2}{x_{-1}}\right\} = \frac{x_0}{x_{-1}}$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{x_{-1}}{x_0}, \frac{x_{-1}^2}{x_0^2}\right\} = \frac{x_{-1}}{x_0}$$

$$x_4 = \max\left\{\frac{x_0}{x_{-1}}, \frac{x_0^2}{x_{-1}^2}\right\} = \frac{x_0^2}{x_{-1}^2}$$

$$x_5 = \max\left\{\frac{x_{-1}^2}{x_0^2}, \frac{x_{-1}^3}{x_0^3}\right\} = \frac{x_{-1}^2}{x_0^2}$$

$$x_6 = \max\left\{\frac{x_0^2}{x_{-1}^2}, \frac{x_0^4}{x_{-1}^4}\right\} = \frac{x_0^4}{x_{-1}^4}$$

$$x_7 = \max\left\{\frac{x_{-1}^4}{x_0^4}, \frac{x_{-1}^6}{x_0^6}\right\} = \frac{x_{-1}^4}{x_0^4}$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denkleminin genel çözümünün

$$x_{2k+2} = (\frac{x_0}{x_{-1}})^{2^k} \quad \text{ve} \quad x_{2k+3} = (\frac{x_{-1}}{x_0})^{2^k}, \quad k = 0,1,...$$

şeklinde olduğu görülür ki böylece ispat tamamlanmış olur.

Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda (3.1) denklemi için bazı nümerik örnekler verilmiştir.

Örnek 3.1. (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-1}=2$, $x_0=3$ olarak alınırsa, denklemin çözümlerinin ilk 15 terimi aşağıdaki gibidir:

n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	0,6666666667	6	410,625	11	03536712681.10^{-10}
2	4,5	7	0,002438652644	12	$0,7994668140.10^{21}$
3	0,2222222222	8	168151,2539	13	$0,1250833659.10^{-20}$
4	20,25	9	$0,5947026720.10^{-5}$	14	$0,6391471866.10^{42}$
5	0,04938271605	10	$0,2827484419.10^{11}$	15	$0,1564584842,10^{-41}$

Örnek 3.2. (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-1}=3$, $x_0=2$ olarak alınırsa, denklemin çözümlerinin ilk 15 terimi aşağıdaki gibidir:

n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	1.5	6	1,248590154	11	0,4114531356
2	1,333333333	7	0,8009033203	12	5,906894950
3	1,25	8	1,558977373	13	0,1692936828
4	1,185185185	9	0,6414461283	14	34,89140795
5	0,9492187501	10	2,430410449	15	0,02866035104

Örnek 3.3. (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-1}=1/2$, $x_0=-1$ olarak alınırsa, denklemin çözümlerinin ilk 15 terimi aşağıdaki gibidir:

n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	-0,5	6	16	11	0,00001525878906
2	2	7	0,625	12	$0,4294967297.10^{10}$
3	0,5	8	256	13	$0,2328306436.10^{-9}$
4	4	9	0,00390625	14	$0,1844674408.10^{20}$
5	0,25	10	65556	15	$0,5421010861.10^{-19}$

Örnek 3.4. (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-1} = 1$, $x_0 = 1/2$ olarak alınırsa, denklemin çözümlerinin ilk 15 terimi aşağıdaki gibidir:

n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	2	6	0,625	11	$0,4294967297.10^{10}$
2	0,5	7	256	12	$0,2328306436.10^{-9}$
3	4	8	0,00390625	13	$0,1844674408.10^{20}$
4	0,25	9	65536	14	$0,5421010861.10^{-19}$
5	16	10	0,00001525878906	15	$0.3402823671.10^{39}$

Örnek 3.5. (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-1} = 1$, $x_0 = 2$ olarak alınırsa, denklemin çözümlerinin ilk 15 terimi aşağıdaki gibidir:

n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	0,5	6	256	11	$0,2328306436.10^{-9}$
2	4	7	0,00390625	12	$0,1844674408.10^{20}$
3	0,25	8	65536	13	$0,5421010861.10^{-19}$
4	16	9	0,00001525878906	14	$0.3402823671.10^{39}$
5	0,625	10	$0,4294967297.10^{10}$	15	$0,2938735876.10^{-38}$

Örnek 3.6. (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-1} = 2$, $x_0 = -2$ olarak alınırsa, denklemin çözümlerinin ilk 15 terimi aşağıdaki gibidir:

n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	-0,5	6	256	11	$0,2328306436.10^{-9}$
2	4	7	0,00390625	12	$0,1844674408.10^{20}$
3	0,25	8	65536	13	$0,5421010861.10^{-19}$
4	16	9	0,00001525878906	14	$0.3402823671.10^{39}$
5	0,625	10	$0,4294967297.10^{10}$	15	$0,2938735876.10^{-38}$

Örnek 3.7. (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-1}=1$, $x_0=-1/2$ olarak alınırsa, denklemin çözümlerinin ilk 15 terimi aşağıdaki gibidir:

n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	-2	6	0,625	11	$0,4294967297.10^{10}$
2	0,25	7	256	12	$0,2328306436.10^{-9}$
3	4	8	0,00390625	13	$0,1844674408.10^{20}$
4	0,25	9	65536	14	$0,5421010861.10^{-19}$
5	16	10	0,00001525878906	15	$0.3402823671.10^{39}$

Örnek 3.8. (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-1}=1$, $x_0=1/4$ olarak alınırsa, denklemin çözümlerinin ilk 15 terimi aşağıdaki gibidir:

n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	4	6	0,00390625	11	$0,1844674408.10^{20}$
2	0,25	7	65536	12	$0,5421010861.10^{-19}$
3	16	8	0,00001525878906	13	$0.3402823671.10^{39}$
4	0,625	9	$0,4294967297.10^{10}$	14	$0,2938735876.10^{-38}$
5	256	10	$0,2328306436.10^{-9}$	15	$0,1157920893.10^{78}$

Örnek 3.9. (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-1}=-1$, $x_0=-1/2$ olarak alınırsa, denklemin çözümlerinin ilk 15 terimi aşağıdaki gibidir:

n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	2	6	0,625	11	$0,4294967297.10^{10}$
2	0,5	7	256	12	$0,2328306436.10^{-9}$
3	4	8	0,00390625	13	$0,1844674408.10^{20}$
4	0,25	9	65536	14	$0,5421010861.10^{-19}$
5	16	10	0,00001525878906	15	$0.3402823671.10^{39}$

Örnek 3.10. (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-1} = 1$, $x_0 = -1/4$ olarak alınırsa, denklemin çözümlerinin ilk 15 terimi aşağıdaki gibidir:

n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	4	6	0,00390625	11	$0{,}1844674408.10^{20}$
2	0,25	7	65536	12	$0{,}5421010861.10^{-19}$
3	16	8	0,00001525878906	13	$0.3402823671.10^{39}$
4	0,625	9	$0{,}4294967297.10^{10}$	14	$0{,}2938735876.10^{-38}$
5	256	10	$0{,}2328306436.10^{-9}$	15	$0{,}1157920893.10^{78}$

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, sıfırdan farklı reel sayılar olan x_{-1}, x_0 başlangıç şartları için $x_{n+1} = \max\{1/x_n, x_{n-1}/x_n\}$ maksimumlu fark denklemi tanımlanmış, çözümleri incelenmiş ve farklı durumlar için genellemeler elde edilmiştir. Bu fark denkleminde, eleman sayısı artırılabileceği gibi denklemdeki elemanlar *A* ve *B* gibi katsayılar ile çarpılarak daha genel denklemler oluşturulabilir ve oluşturulan yeni fark denklemlerinin çözümleri ve periyodikliği incelenebilir. Ayrıca benzer denklemlerde *max* operatörü yerine *min* operatörü kullanılarak daha farklı denklemler yazılabilir.

KAYNAKLAR

Amleh, A. M., 1998, Boundedness Periodicity and Stability of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Çinar, C., Stevic, S. and Yalçınkaya, İ., 2005, On the positive solutions of reciprocal difference equation with minimum, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 17(1-2), 307-314.

Elaydi, S., 1996, An Introduction to Difference Equations, Spinger-Verlag, New York.

Feuer, J., 2003, Periodic solutions of the Lyness max equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 288, 147-160.

Gelişken, A., Çinar, C. and Karataş, R., 2008, A note on the periodicity of the Lyness max equation, *Advances in Difference Equations,* (in press).

Janowski, E. J., Kocic, V. L., Ladas, G. and Tzanetopoulos, G., 1998, Global behaviour of solutions of $x_{n+1} = \dfrac{\max\{x_n^k, A\}}{x_{n-1}}$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 3, 297-310.

Kulenevic, M. R. S. and Ladas, G., 2002, Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjecture, Boca Raton, London.

Mishev, D. P., Patula, W. T. and Voulov, H. D., 2002, A reciprocal difference equation with maximum, *Computers & Mathematics with Applications*, 43, 1021-1026.

Moybe, L. A., 2000, Difference Equations with Public Health Applications, New York, USA.

Papaschinopoulos, G. and Hatzifilippidis, V., 2001, On a max difference equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 258, 258-268.

Papaschinopoulos, G., Schinas, J. and Hatzifilippidis, V., 2003, Global behaviour of the solutions of a max-equation and of a system of two max-equation, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 5, 2, 237-247.

Patula, W. T. and Voulov, H. D., 2004, On a max type recursive relation with periodic coefficients, *Journal of Difference Equations and Applications*, 10, 3, 329-338.

Stefanidou, G. and Papaschinopoulos, G., 2006, The periodic nature of the positive solutions of a nonlinear fuzzy max–difference equation, *Information Sciences*, 176, 3694-3710.

Stevic, S., 2007, On the recursive sequence $x_{n+1} = \max\left\{c, \frac{x_n^p}{x_{n-1}^p}\right\}$, *Applied Mathematics Letters,* (in press).

Şimsek, D., Çinar, C. and Yalçınkaya, İ., 2006, On the solutions of the difference equation $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, x_{n-1}\right\}$, *International Journal of Contemporary Math. Sciences,* 1, 10, 481-487.

Teixeria, C. T., 2000, Existence Stability Boundedness and Periodicity of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Valicenti, S., 1999, Periodicity and Global Attractivity of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Voulov, H. D., 2002, On the periodic character of some difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 8, 799-810.

Voulov, H. D., 2002, Periodic solutions to a difference equation with maximum, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 131, 2155-2160.

Yalçınkaya, İ., Iricanin, B. D. and Çinar, C., 2007, On a max-type difference equation, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (in press).

Yan, X., Liao, X. and Li, C., 2006, On a difference equation with maximum, *Applied Mathematics and Computation*, 181, 1-5.