T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARK DENKLEMLERİNİN PERİYODİKLİĞİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Nuriye ATASEVER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ORTAÖĞRETİM ANA BİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROĞRAMI
KONYA, 2008

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FARK DENKLEMLERİNİN PERİYODİKLİĞİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Nuriye ATASEVER

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Ortaöğretim Ana Bilim Dalı

Matematik Öğretmenliği Programı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2008, 35 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Eşref HATIR

Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR

Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremleri verdik.

İkinci bölümde; fark denklemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verdik.

Üçüncü bölümde; $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-5}}{1 + x_{n-1}x_{n-3}}$ fark denkleminin çözümleri hakkında bilgi verdik.

Dördüncü bölümde ise, $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-(3k+2)}}{1 + x_{n-k}x_{n-(2k+1)}}$ fark denklemini tanımladık ve pozitif başlangıç şartları için çözümlerini inceledik.

Anahtar Kelimeler: Fark Denklemi, Çözüm, Asimptotik Periyodiklik

ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

A STUDY ON THE PERIODICITY OF THE DIFFERENCE EQUATIONS

Nuriye ATASEVER

Selcuk University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics Education

Supervisor : Assist. Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2008, 35 Pages

Jury: Prof. Dr. Eşref HATIR

Assoc. Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR

Assist. Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

This study consists of four sections. In the first section, we gave general definitions and theorems about difference equations.

In the second section, we gave information about some difference equations which is studied before.

In the third section, we gave the information about the solution of difference equation $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-5}}{1+x_{n-1}x_{n-3}}$.

In the fourth section, we defined the difference equation $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-(3k+2)}}{1+x_{n-k}x_{n-(2k+1)}}$ and investigated its solutions where initial conditions are positive real numbers.

Key Words : Difference Equation, Solution, Asymptotic Periodicity

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek Lisans çalışmamı yönetmeyi kabul ederek karşılaştığım güçlüklerde değerli yardımlarını esirgemeyen, tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA'ya, çalışmalarıma olan katkılarından dolayı Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR'a, Yrd. Doç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK'e, bir yıl boyunca yurt içi burs imkanından yararlandığım Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu'na ve aileme teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Nuriye ATASEVER

Konya, 2008

İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM
FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIMLAR

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

x bağımsız değişkeninin sürekli olduğu durumda, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y^{'}(x), y^{''}(x), ..., y^{(n)}(x), ...$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x'in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde x'in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu denklemler üzerinde duracağız.

Tanım 1.1. n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişkende y olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $E(y), E^2(y), E^3(y), ..., E^n(y), ...$ gibi farklarını içeren bağıntılara Fark Denklemi denir. Dikkat edilirse, fark denklemlerinin diferansiyel denklemler ile arasında büyük benzerlikler vardır.

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) = f(n)$$

birinci mertebeden fark denklemidir.

$$a_0 y(n-1) + a_1 y(n) + a_2 y(n+1) = g(n)$$

ikinci mertebeden fark denklemidir. Denklemin mertebesinin belirlenmesinde, y'nin hesaplanabilmesi için gerekli olan başlangıç şartı sayısı göz önüne alınmaktadır.

Tanım 1.2. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f : I \, x \, I \to I$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Her $x_{-1}, x_0 \in I$ için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0,1,2,... \tag{1.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 1.3. Eğer $\bar{x}$ noktası için (1.1) denkleminde $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x})$ ise, $\bar{x}$'e (1.1) denkleminin denge noktası denir. Eğer her $n \geq 0$ için $\bar{x} = x_n$ ise, $\bar{x}$'e f'nin sabit noktası denir.

Tanım 1.4. Eğer her $n > 0$ için $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $x_n \in J$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ alt aralığı varsa, bu aralığa (1.1) denkleminin değişmez (invariant) aralığı denir.

Tanım 1.5. $\bar{x}$, (1.1) denkleminin denge noktası olmak üzere:

(a) Eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \delta$ iken her $n \geq 0$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

(b) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde, $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası lokal olarak asimptotik kararlıdır denir.

(c) Eğer her $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise, $\bar{x}$ denge noktasına çekim noktası (global attractor) denir.

(d) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise, $\bar{x}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.

(e) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise, kararsızdır denir.

(f) Eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $\left|x_0 - \overline{x}\right| + \left|x_{-1} - \overline{x}\right| < r$ ve bazı $N \geq -1$ sayıları için $\left|x_N - \overline{x}\right| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, $\overline{x}$ denge noktasına repeller denir.

Tanım 1.6. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 1.7. Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 1.8. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} x_{pn-k} = a_{p-k}$ $(k = 0,1,2,..., p-1)$ ise, $\{x_n\}$ dizisi p asimptotik periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 1.9. (1.1) denkleminde, $f(x_n, x_{n-1})$ fonksiyonunu $f(u,v)$ şeklinde düşünelim:

$$p = \frac{\partial f(\overline{x}, \overline{x})}{\partial u} \quad \text{ve} \quad q = \frac{\partial f(\overline{x}, \overline{x})}{\partial v}$$

olmak üzere,

$$y_{n+1} = py_n + qy_{n-1} \tag{1.2}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme $\overline{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir.

(1.2) denkleminin karakteristik denklemi:

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0 \tag{1.3}$$

dır.

Teorem 1.1. (Lineer Kararlılık Teoremi)

(a) Eğer (1.3) denkleminin her iki kökü de mutlak değerce 1'den küçük ise, $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(b) Eğer (1.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\overline{x}$ denge noktası kararsızdır.

(c) (1.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şart $|p| < 1 - q < 2$ olmasıdır. Bu durumda, $\overline{x}$ denge noktası lokal olarak asimptotik kararlıdır.

(d) (1.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1'den büyük olması için gerek ve yeter şart $|q| > 1$ ve $|p| < |1-q|$ olmasıdır. Bu durumda, $\overline{x}$ denge noktası repellerdir.

(e) (1.3) denkleminin, bir kökünün mutlak değerce 1'den büyük, diğer kökünün mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şart $p^2 + 4q > 0$ ve $|p| > |1-q|$ olmasıdır. Bu durumda, $\overline{x}$ denge noktası kararsızdır.

(f) (1.3) denkleminin bir kökünün mutlak değerce bire eşit olması için gerek ve yeter şart $|p| = |1-q|$ veya $q = -1$ ve $|p| \leq 2$ olmasıdır. Bu durumda $\overline{x}$ denge noktası non-hiperbolik nokta olarak adlandırılır.

Tanım 1.10. $\overline{x}$, (1.1) denkleminin denge noktası olsun. $l \geq -1$, $m \leq \infty$ olmak üzere, $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ dizisinin her elemanı $\overline{x}$ denge noktasından büyük veya eşit, $l = -1$ veya $l > -1$ için $x_{l-1} < \overline{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} < \overline{x}$ oluyorsa, $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde, $l \geq -1$, $m \leq \infty$ olmak üzere, $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ dizisinin her elemanı $\overline{x}$ denge noktasından küçük, $l = -1$ veya $l > -1$ için $x_{l-1} \geq \overline{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için

$x_{m+1} \geq \overline{x}$ oluyorsa, $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir.

Tanım 1.11. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin hepsi birden ne pozitif ne de negatif ise, bu çözümlere sıfır civarında salınımlıdır (oscillate) denir. Aksi halde salınımlı değildir.

Tanım 1.12. $\{x_n - \overline{x}\}$ dizisi salınımlı ise, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne $\overline{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır denir.

Tanım 1.13. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır denir.

Teorem 1.2. (Clark Teoremi) $p, q \in R$ ve $k, n \in \{1,2,...\}$ olmak üzere;

$$x_{n+1} + px_n + qx_{n-k} = 0$$

fark denkleminin lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $|p| + |q| < 1$ olmasıdır.

Sonuç 1.1. $p_k \in R$, $k \in \{1,2,...\}$ ve $n \in \{0,1,2,...\}$ olmak üzere;

$$x_{n+1} + p_1 x_n + ... + p_k x_{n-k} = 0$$

fark denkleminin lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $\sum_{i=1}^{k} |p_i| < 1$ olmasıdır.

2. BÖLÜM
FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ YAPILMIŞ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde fark denklemlerinin periyodikliği ile ilgili literatürde var olan ve çalışmamızı yaparken değerlendirdiğimiz çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Camouzis ve Devault (2001) yaptıkları çalışmada; $x_0, x_{-1}, p > 0$ pozitif başlangıç şartları altında

$$x_{n+1} = p + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \; n = 0,1,2,...$$

fark denkleminin global asimptotik kararlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Patula ve Voulov (2002) yaptıkları çalışmada;

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}}, \; n = 0,1,2,...$$

fark denkleminin çözümlerinin 2 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermişlerdir.

Stevic (2002) yaptığı çalışmada; $x_{n+1} = \dfrac{Bx_{n-1}}{B + x_n}$ fark denkleminin çözümlerini incelemiş ve çözümlerin

$$x_{2n} = x_0\left(1 - x_1 \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{2j-1} \frac{1}{1+x_i}\right) \text{ ve } x_{2n+1} = x_{-1}\left(1 - \frac{x_0}{1+x_0} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j} \frac{1}{1+x_i}\right)$$

şeklinde olduğunu ortaya koymuştur.

Abu-Saris ve Devault (2003) yaptıkları çalışmada;

$$y_{n+1} = A + \frac{y_n}{y_{n-k}},\ n = 0,1,2,...$$

fark denkleminin $y_{-k}, y_{-(k-1)},..., y_0, A > 0$, $k \in \{2,3,4,...\}$ başlangıç şartları altında pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olması için gerekli olan şartları elde etmişlerdir.

Metsel (2003) yaptığı çalışmada; pozitif başlangıç şartları altında

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{x_{n-1}},\ n = 0,1,2,...$$

fark denkleminin periyodikliğini incelemiştir.

Çinar (2004) yaptığı çalışmada; $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{1 + x_n x_{n-1}}$ rasyonel fark denkleminin çözümlerini incelemiş ve

$$x_n = \begin{cases} x_{-1} \dfrac{\prod_{i=0}^{[(n+1)/2]-1} (2x_{-1}x_0 i + 1)}{\prod_{i=0}^{[(n+1)/2]-1} (2i+1)x_{-1}x_0 + 1}, & n \text{ tek} \\ x_0 \dfrac{\prod_{i=1}^{n/2} ((2i-1)x_{-1}x_0 + 1)}{\prod_{i=1}^{n/2} (2ix_{-1}x_0 + 1)}, & n \text{ çift} \end{cases}$$

eşitliğini vermiştir.

Çinar (2004) yaptığı iki çalışmadan birincisinde; $x_0, x_{-1}, a, b > 0$ şartları altında

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + a x_{n-1} x_n}$$

fark denkleminin, ikincisinde ise

$$x_{n+1} = \frac{a x_{n-1}}{1 + b x_{n-1} x_n}$$

fark denkleminin çözümlerini elde etmiştir.

El-Owaidy ve arkadaşları (2004) yaptıkları çalışmada; $\alpha \in [1, \infty)$, $k = 0,1,2,...$ ve pozitif reel sayılar olan başlangıç şartları altında

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{x_n}, \; n = 0,1,2,...$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini ve global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Stevic (2004) yaptığı çalışmada;

$$x_{n+1} = \frac{p + x_{n-(2s-1)}}{x_{n+(2l+s)} + 1}, \; n = 0,1,2,...$$

fark denkleminin çözümlerinin, $p > 1$ için $2s$ periyotlu olduğunu göstermiştir.

Abu-Saris ve Al-Jubouri (2004) yaptıkları çalışmada;

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{x_{n-1}}, \; n = 0,1,2,...$$

fark denkleminin çözümlerinin periyodik olduğunu göstermişlerdir.

Stevic (2005) yaptığı çalışmada;

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}^{p}}{x_n^{p}}, \ n = 0,1,2,...$$

fark denkleminin çözümlerinin $s, l \in N$ için asimptotikliğini, periyodikliğini, salınımlılığını ve sınırlılığını incelemiştir.

Taixiang (2005) yaptığı çalışmada;

$$x_{n+1} = p + \frac{x_{n-k}}{x_n}, \ n = 0,1,2,...$$

fark denkleminin çözümlerinin $p, x_0, x_{-1} > 0$ şartları altında sınırlılığını incelemiştir.

Papaschinopoulos ve Schinas (2005) yaptıkları çalışmada; k çift bir sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-k}}{x_n}, \ n = 0,1,2,...$$

fark denkleminin çözümlerinin $k+1$ periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

Saleh ve Aloqeili (2005) yaptıkları çalışmada;

$$y_{n+1} = A + \frac{y_n}{y_{n-k}}, \ n = 0,1,2,...$$

fark denkleminin $y_{-k}, y_{-(k+1)},..., y_0, A > 0$ başlangıç şartları altında pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Berenhaut ve Stevic (2005) yaptıkları çalışmada; $x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 > 0$ için

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n-3} x_{n-4}}, \; n = 0,1,2,...$$

fark denkleminin çözümlerinin 3 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermişlerdir.

Yan ve arkadaşları (2005) yaptıkları çalışmada; α, x_{-1}, x_0 başlangıç şartlarını reel sayı alarak

$$x_{n+1} = \alpha - \frac{x_n}{x_{n-1}}, \; n = 0,1,2,...$$

fark denkleminin çözümlerinin asimptotik kararlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Abu Saris (2006) yaptığı çalışmada; $w_{-2}, w_{-1}, w_0 > 0$ başlangıç şartları altında

$$w_{n+1} = \frac{w_n + w_{n-2}}{w_{n-1}}, \; n = 0,1,2,...$$

rasyonel fark denkleminin çözümlerinin 4 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermiştir.

Karataş ve arkadaşları (2006) yaptıkları çalışmada; $x_{-i} \in (0,\infty)$, ($i = 0,1,...,5$) olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{1 + x_{n-2} x_{n-5}}, n = 0,1,2,...$$

fark denkleminin pozitif çözümlerini incelemişlerdir.

Şimşek ve arkadaşları (2006) yaptıkları çalışmada; $x_{-i} \in (0,\infty)$, ($i = 0,1,...,5$) olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{1 + x_{n-1}x_{n-3}}, \; n = 0,1,2,...$$

fark denkleminin çözümlerini ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Berenhaut ve arkadaşları (2006) yaptıkları çalışmada; $y_{-i} > 0$, ($i = 0,1,...,4$) başlangıç şartları altında

$$y_n = \frac{y_{n-3} + y_{n-4}}{y_{n-1}}, \; n = 0,1,2,...$$

fark denkleminin çözümlerinin 2 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermişlerdir.

Aloqeili (2006) yaptığı çalışmada; $x_{-1}, x_0 \in R, a > 0$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{a - x_{n-1}x_n}, \; n = 0,1,2,...$$

rasyonel fark denkleminin çözümlerini incelemiş ve çözümleri için

$$x_n = \begin{cases} x_0 \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \dfrac{a^{2i-1}(1-a) - (1-a^{2i-1})x_{-1}x_0}{a^{2i}(1-a) - (1-a^{2i})x_{-1}x_0}, n \text{ çift ise} \\ x_{-1} \prod_{i=0}^{\frac{n+1}{2}} \dfrac{a^{2i-1}(1-a) - (1-a^{2i})x_{-1}x_0}{a^{2i+1}(1-a) - (1-a^{2i+1})x_{-1}x_0}, n \text{ tek ise} \end{cases}$$

eşitliğini vermiştir.

Aloqeili (2006) yaptığı çalışmada; $x_{-k}, x_{-(k-1)},..., x_0 > 0,\; A > 0$ ve k herhangi pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-k}}{a + x_{n-k}x_n}, \quad n = 0,1,2,...$$

fark denkleminin çözümlerini ve kararlılığını incelemiştir.

Şimşek ve arkadaşları (2008) yaptıkları çalışmada; pozitif başlangıç şartları altında

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-(5k+9)}}{1 + x_{n-4}x_{n-9}...x_{n-(5k+9)}}, \quad n = 0,1,2,...$$

fark denkleminin çözümlerini ve periyodikliğini incelemişlerdir.

3. BÖLÜM

$x_{n+1} = \dfrac{x_{n-5}}{1 + x_{n-1}x_{n-3}}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, Şimşek ve arkadaşları (2006) tarafından yapılan bir çalışma hakkında bilgi verilmiştir.

Bu çalışmada; x_{-i} $(i = 0,1,...,5)$ başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{1 + x_{n-1}x_{n-3}}, \quad n = 0,1,2,... \tag{3.1}$$

fark denkleminin çözümleri incelenmiştir.

Teorem 3.1. (3.1) denklemi için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(a) (x_{6n-i}), $(i = 0,1,...,5)$ dizileri azalandır ve $a_{i+1} \geq 0$ olmak üzere;

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n-5} = a_1,\ \lim_{n\to\infty} x_{6n-4} = a_2,\ \lim_{n\to\infty} x_{6n-3} = a_3$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n-2} = a_4,\ \lim_{n\to\infty} x_{6n-1} = a_5,\ \lim_{n\to\infty} x_{6n} = a_6$$

limitleri mevcuttur.

(b) (3.1) denkleminin çözümleri 6 asimptotik periyotludur.

(c) $a_1 a_3 a_5 = 0$ ve $a_2 a_4 a_6 = 0$ dır.

(d) $\forall n \geq n_0$ için $x_{n-3} \geq x_{n+1}$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ var ise $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dır.

(e) (3.1) denkleminin çözümleri;

$$x_{6n+1} = x_{-5}(1 - \frac{x_{-1}x_{-3}}{1+x_{-1}x_{-3}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j}\frac{1}{1+x_{2i-3}x_{2i-1}}),$$

$$x_{6n+2} = x_{-4}(1 - \frac{x_{0}x_{-2}}{1+x_{0}x_{-2}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j}\frac{1}{1+x_{2i-2}x_{2i}}),$$

$$x_{6n+3} = x_{-3}(1 - \frac{x_{-1}x_{-5}}{1+x_{-1}x_{-3}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j+1}\frac{1}{1+x_{2i-3}x_{2i-1}}),$$

$$x_{6n+4} = x_{-2}(1 - \frac{x_{0}x_{-4}}{1+x_{0}x_{-2}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j+1}\frac{1}{1+x_{2i-2}x_{2i}}),$$

$$x_{6n+5} = x_{-1}(1 - \frac{x_{-3}x_{-5}}{1+x_{-1}x_{-3}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j+2}\frac{1}{1+x_{2i-3}x_{2i-1}}),$$

$$x_{6n+6} = x_{0}(1 - \frac{x_{-2}x_{-4}}{1+x_{0}x_{-2}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j+2}\frac{1}{1+x_{2i-2}x_{2i}})$$

şeklinde genelleştirilebilir.

İspat. **(a)** (3.1) denkleminden $x_{n+1}(1+x_{n-1}x_{n-3}) = x_{n-5}$ olduğu açıktır. $x_{n-1}, x_{n-3} \in (0,\infty)$ olduğu için $1 + x_{n-1}x_{n-3} \in (1,\infty)$ olur. Buradan $\forall n \geq 0$ için $x_{n+1} < x_{n-5}$ olup,

$$0 < ... < x_{6n-5} < ... < x_{13} < x_7 < x_1 < x_{-5}$$

$$0 < ... < x_{6n-4} < ... < x_{14} < x_8 < x_2 < x_{-4}$$

$$0 < ... < x_{6n-3} < ... < x_{15} < x_9 < x_3 < x_{-3}$$

$$0 < \ldots < x_{6n-2} < \ldots < x_{16} < x_{10} < x_4 < x_{-2}$$

$$0 < \ldots < x_{6n-1} < \ldots < x_{17} < x_{11} < x_5 < x_{-1}$$

$$0 < \ldots < x_{6n} < \ldots < x_{18} < x_{12} < x_6 < x_0$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n-5} = a_1 ,\ \lim_{n\to\infty} x_{6n-4} = a_2 ,\ \lim_{n\to\infty} x_{6n-3} = a_3$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n-2} = a_4 ,\ \lim_{n\to\infty} x_{6n-1} = a_5 ,\ \lim_{n\to\infty} x_{6n} = a_6$$

limitlerinin varlığı gösterilmiş olur.

(b) (3.1) denkleminin çözümlerinin 6 asimptotik periyotlu olduğu (a) şıkkından açıktır.

(c) (3.1) denkleminden

$$x_{6n+1} = \frac{x_{6n-5}}{1 + x_{6n-1}x_{6n-3}} \tag{3.2}$$

elde edilir. (3.2) denkleminde eşitliğin her iki tarafının limiti alınırsa;

$$a_1 = \frac{a_1}{1 + a_5 a_3} \Rightarrow\ a_1 + a_1 a_3 a_5 = a_1 \Rightarrow\ a_1 a_3 a_5 = 0$$

olduğu görülür. Benzer şekilde (3.1) denkleminden,

$$x_{6n+2} = \frac{x_{6n-4}}{1 + x_{6n}x_{6n-2}} \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.3) denkleminde eşitliğin her iki tarafının limiti alınırsa;

$$a_2 = \frac{a_2}{1+a_6a_4} \Rightarrow a_2 + a_2a_4a_6 = a_2 \Rightarrow a_2a_4a_6 = 0$$

olduğu görülür.

(d) $\forall n \geq n_0$ için $x_{n-3} \geq x_{n+1}$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ var ise

$$a_1 \geq a_5 \geq a_3 \geq a_1 \geq a_5 \geq a_3$$

ve

$$a_2 \geq a_6 \geq a_4 \geq a_2 \geq a_6 \leq a_4$$

elde edilir. Buradan

$$a_1 = a_3 = a_5 \text{ ve } a_2 = a_4 = a_6$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$a_1 = a_3 = a_5 = 0 \quad \text{ve} \quad a_2 = a_4 = a_6 = 0$$

olup $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ olur.

(e) (3.1) denkleminden;

$$x_{n+1} - x_{n-5} = \frac{1}{1+x_{n-1}x_{n-3}}(x_{n-1} - x_{n-7}) \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.4) denkleminden,

$n=0$ için $x_1 - x_{-5} = x_1 - x_{-5}$

$n=1$ için $x_2 - x_{-4} = x_2 - x_{-4}$

$n=2$ için $x_3 - x_{-3} = \dfrac{1}{1+x_1x_{-1}}(x_1 - x_{-5})$

$n=3$ için $x_4 - x_{-2} = \dfrac{1}{1+x_2x_0}(x_2 - x_{-4})$

$n=4$ için $x_5 - x_{-1} = \dfrac{1}{1+x_3x_1}(x_3 - x_{-3}) = \dfrac{1}{1+x_3x_1}\dfrac{1}{1+x_1x_{-1}}(x_1 - x_{-5})$

$n=5$ için $x_6 - x_0 = \dfrac{1}{1+x_4x_2}(x_4 - x_{-2}) = \dfrac{1}{1+x_4x_2}\dfrac{1}{1+x_2x_0}(x_2 - x_{-4})$

$$\vdots$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan,

$$\forall n \geq 0 \text{ için } \begin{cases} x_{2n+1} - x_{2n-5} = (x_1 - x_{-5})\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_{2i-1}x_{2i-3}} \\ x_{2n+2} - x_{2n-4} = (x_2 - x_{-4})\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_{2i}x_{2i-2}} \end{cases} \tag{3.5}$$

olduğu görülür.

(3.5) denkleminden, $x_{2n+1} - x_{2n-5} = (x_1 - x_{-5})\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_{2i-3}x_{2i-1}}$ olup,

$n=0$ için $x_1 - x_{-5} = x_1 - x_{-5}$

$n=1$ için $x_3 - x_{-3} = (x_1 - x_{-5})\dfrac{1}{1+x_{-1}x_1}$

$n=2$ için $x_5 - x_{-1} = (x_1 - x_{-5})\dfrac{1}{1+x_{-1}x_1}\dfrac{1}{1+x_1x_3}$

$n=3$ için $x_7 - x_1 = (x_1 - x_{-5})\dfrac{1}{1+x_{-1}x_1}\dfrac{1}{1+x_1x_3}\dfrac{1}{1+x_3x_5}$

$n=4$ için $x_9 - x_3 = (x_1 - x_{-5})\dfrac{1}{1+x_{-1}x_1}\dfrac{1}{1+x_1x_3}\dfrac{1}{1+x_3x_5}\dfrac{1}{1+x_5x_7}$

$n=5$ için $x_{11} - x_5 = (x_1 - x_{-5})\dfrac{1}{1+x_{-1}x_1}\dfrac{1}{1+x_1x_3}\dfrac{1}{1+x_3x_5}\dfrac{1}{1+x_5x_7}\dfrac{1}{1+x_7x_9}$

$$\vdots$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden,

$$x_{6n+1} - x_{-5} = (x_1 - x_{-5})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j}\frac{1}{1+x_{2i-3}x_{2i-1}} \tag{3.6}$$

$$x_{6n+3} - x_{-3} = (x_1 - x_{-5})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j+1}\frac{1}{1+x_{2i-3}x_{2i-1}} \tag{3.7}$$

$$x_{6n+5} - x_{-1} = (x_1 - x_{-5})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j+2}\frac{1}{1+x_{2i-3}x_{2i-1}} \tag{3.8}$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde (3.5) denkleminden,

$$x_{2n+2} - x_{2n-4} = (x_2 - x_{-4})\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_{2i}x_{2i-2}}$$

olup,

$n=0$ için $x_2 - x_{-4} = x_2 - x_{-4}$

$n=1$ için $x_4 - x_{-2} = (x_2 - x_{-4})\dfrac{1}{1+x_0x_2}$

$n=2$ için $x_6 - x_0 = (x_2 - x_{-4})\dfrac{1}{1+x_0x_2}\dfrac{1}{1+x_2x_4}$

$n=3$ için $x_8 - x_2 = (x_2 - x_{-4})\dfrac{1}{1+x_0x_2}\dfrac{1}{1+x_2x_4}\dfrac{1}{1+x_4x_6}$

$n=4$ için $x_{10} - x_4 = (x_2 - x_{-4})\dfrac{1}{1+x_0x_2}\dfrac{1}{1+x_2x_4}\dfrac{1}{1+x_4x_6}\dfrac{1}{1+x_6x_8}$

$n=5$ için $x_{12} - x_6 = (x_2 - x_{-4})\dfrac{1}{1+x_0x_2}\dfrac{1}{1+x_2x_4}\dfrac{1}{1+x_4x_6}\dfrac{1}{1+x_6x_8}\dfrac{1}{1+x_8x_{10}}$

$$\vdots$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden de

$$x_{6n+2} - x_{-4} = (x_2 - x_{-4})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j}\frac{1}{1+x_{2i-2}x_{2i}} \tag{3.9}$$

$$x_{6n+4} - x_{-2} = (x_2 - x_{-4})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j+1}\frac{1}{1+x_{2i-2}x_{2i}} \tag{3.10}$$

$$x_{6n+6} - x_0 = (x_2 - x_{-4})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j+2}\frac{1}{1+x_{2i-2}x_{2i}} \tag{3.11}$$

olduğu görülür. Son olarak,

$$x_1 - x_{-5} = \frac{x_{-5}}{1+x_{-1}x_{-3}} - x_{-5} = -\frac{x_{-1}x_{-3}x_{-5}}{1+x_{-1}x_{-3}}$$

ve

$$x_2 - x_{-4} = \frac{x_{-4}}{1+x_0x_{-2}} - x_{-4} = -\frac{x_0x_{-2}x_{-4}}{1+x_0x_{-2}}$$

eşitlikleri (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) eşitliklerinde yerlerine yazılırsa,

$$x_{6n+1} = x_{-5}\left(1 - \frac{x_{-1}x_{-3}}{1+x_{-1}x_{-3}} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{3j} \frac{1}{1+x_{2i-3}x_{2i-1}}\right),$$

$$x_{6n+2} = x_{-4}\left(1 - \frac{x_0x_{-2}}{1+x_0x_{-2}} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{3j} \frac{1}{1+x_{2i-2}x_{2i}}\right),$$

$$x_{6n+3} = x_{-3}\left(1 - \frac{x_{-1}x_{-5}}{1+x_{-1}x_{-3}} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{3j+1} \frac{1}{1+x_{2i-3}x_{2i-1}}\right),$$

$$x_{6n+4} = x_{-2}\left(1 - \frac{x_0x_{-4}}{1+x_0x_{-2}} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{3j+1} \frac{1}{1+x_{2i-2}x_{2i}}\right),$$

$$x_{6n+5} = x_{-1}\left(1 - \frac{x_{-3}x_{-5}}{1+x_{-1}x_{-3}} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{3j+2} \frac{1}{1+x_{2i-3}x_{2i-1}}\right),$$

$$x_{6n+6} = x_0\left(1 - \frac{x_{-2}x_{-4}}{1+x_0x_{-2}} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{3j+2} \frac{1}{1+x_{2i-2}x_{2i}}\right)$$

formülleri elde edilir. Böylece ispat tanımlanır.

4. BÖLÜM

$x_{n+1} = \dfrac{x_{n-(3k+2)}}{1+x_{n-k}x_{n-(2k+1)}}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, (3.1) denkleminden faydalanılarak daha genel bir denklem tanımlanmış ve çözümleri incelenmiştir. Ayrıca, Şimşek ve arkadaşları (2006) tarafından yapılan çalışmada elde edilen sonuçlar genelleştirilmiştir.

Bu amaçla; $x_{-(3k+2)}, x_{-(3k+1)}, ..., x_{-1}, x_0$ başlangıç şartları pozitif reel sayılar ve $k = 0,1,2,...$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-(3k+2)}}{1+x_{n-k}x_{n-(2k+1)}}, \quad n = 1,2,3,... \tag{4.1}$$

fark denklemi tanımlanmış ve çözümleri incelenmiştir.

Teorem 4.1. (4.1) denklemi için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(a) $s = 0,1,...,(3k+2)$ olmak üzere $(x_{(3k+3)n-s})$ dizileri azalandır ve $\forall s$ için $a_{(3k+3)-s} \geq 0$ olmak üzere;

$$\lim_{n\to\infty} x_{(3k+3)n-s} = a_{(3k+3)-s}$$

limitleri mevcuttur.

(b) (4.1) denkleminin çözümleri $3k+3$ asimptotik periyotludur.

(c) $z = 1,2,...,(k+1)$ olmak üzere;

$$a_z a_{z+(k+1)} a_{z+(2k+2)} = 0$$

olur.

(d) $\forall n \geq n_0$ için $x_{n-(2k+1)} \geq x_{n+1}$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ var ise $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dır.

(e) (4.1) denkleminin çözümleri $b = 1,2,...,k+1$ olmak üzere;

$$x_{(3k+3)n+b} = x_{b-(3k+3)}\left(1 - \frac{x_{b-(k+1)}x_{b-(2k+2)}}{1+x_{b-(k+1)}x_{b-(2k+2)}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}}\right)$$

$$x_{(3k+3)n+(k+1)+b} = x_{b-(2k+2)}\left(1 - \frac{x_{b-(k+1)}x_{b-(3k+3)}}{1+x_{b-(k+1)}x_{b-(2k+2)}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j+1}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}}\right)$$

$$x_{(3k+3)n+b+(2k+2)} = x_{b-(k+1)}\left(1 - \frac{x_{b-(2k+2)}x_{b-(3k+3)}}{1+x_{b-(k+1)}x_{b-(2k+2)}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j+2}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}}\right)$$

şeklinde genelleştirilebilir.

İspat.

(a) (4.1) denkleminden $x_{n+1}(1+x_{n-k}x_{n-(2k+1)}) = x_{n-(3k+2)}$ olduğu açıktır. $x_{n-k}, x_{n-(2k+1)} \in (0,\infty)$ olduğu için $1+x_{n-k}x_{n-(2k+1)} \in (1,\infty)$ olur. Buradan $\forall n \geq 0$ için $x_{n+1} < x_{n-(3k+2)}$ olup,

$$0 < ... < x_{6k+7} < x_{3k+4} < x_1 < x_{-(3k+2)}$$

$$0 < ... < x_{6k+8} < x_{3k+5} < x_2 < x_{-(3k+1)}$$

$$0 < ... < x_{6k+9} < x_{3k+6} < x_3 < x_{-3k}$$

$$\vdots$$

$$0 < \ldots < x_{9k+8} < x_{6k+5} < x_{3k+2} < x_{-1}$$

$$0 < \ldots < x_{9k+9} < x_{6k+6} < x_{3k+3} < x_{0}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} x_{(3k+3)n-(3k+2)} = a_1$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{(3k+3)n-(3k+1)} = a_2$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{(3k+3)n-(3k)} = a_3$$

$$\vdots$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{(3k+3)n-1} = a_{3k+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{(3k+3)n} = a_{3k+3}$$

limitlerinin varlığı gösterilmiş olur. Bu limitler kısaca $s = 0,1,\ldots,(3k+2)$ ve $\forall s$ için $a_{(3k+3)-s} \geq 0$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} x_{(3k+3)n-s} = a_{(3k+3)-s}$$

şeklinde ifade edilebilir.

(b) (4.1) denkleminin çözümlerinin $(3k+3)$ asimptotik periyotlu olduğu (a) şıkkından açıktır.

(c) (4.1) denkleminden aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$x_{(3k+3)n+1} = \frac{x_{(3k+3)n-(3k+2)}}{1+x_{(3k+3)n-k}x_{(3k+3)n-(2k+1)}}$$

$$x_{(3k+3)n+2} = \frac{x_{(3k+3)n-(3k+1)}}{1+x_{(3k+3)n-(k-1)}x_{(3k+3)n-2k}}$$

$$x_{(3k+3)n+3} = \frac{x_{(3k+3)n-(3k)}}{1+x_{(3k+3)n-(k-2)}x_{(3k+3)n-(2k-1)}}$$

$$\vdots$$

$$x_{(3k+3)n+(k+1)} = \frac{x_{(3k+3)n-(2k+2)}}{1+x_{(3k+3)n}x_{(3k+3)n-(k+1)}}$$

Yukarıdaki denklemlerde sırasıyla limit alınırsa;

$$a_1 = \frac{a_1}{1+a_{2k+3}a_{k+2}} \Rightarrow a_1 + a_1a_{k+2}a_{2k+3} = a_1 \Rightarrow a_1a_{k+2}a_{2k+3} = 0$$

$$a_2 = \frac{a_2}{1+a_{2k+4}a_{k+3}} \Rightarrow a_2 + a_2a_{k+3}a_{2k+4} = a_2 \Rightarrow a_2a_{k+3}a_{2k+4} = 0$$

$$a_3 = \frac{a_3}{1+a_{2k+5}a_{k+4}} \Rightarrow a_3 + a_3a_{k+4}a_{2k+5} = a_3 \Rightarrow a_3a_{k+4}a_{2k+5} = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{k-1} = \frac{a_{k-1}}{1+a_{3k+1}a_{2k}} \Rightarrow a_{k-1} + a_{k-1}a_{2k}a_{3k+1} = a_{k-1} \Rightarrow a_{k-1}a_{2k}a_{3k+1} = 0$$

$$a_k = \frac{a_k}{1 + a_{3k+2}a_{2k+1}} \Rightarrow a_k + a_k a_{2k+1} a_{3k+2} = a_k \Rightarrow a_k a_{2k+1} a_{3k+2} = 0$$

$$a_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{1 + a_{3k+3}a_{2k+2}} \Rightarrow a_{k+1} + a_{k+1} a_{2k+2} a_{3k+3} = a_{k+1} \Rightarrow a_{k+1} a_{2k+2} a_{3k+3} = 0$$

olduğu görülür. Bu da $z = 1,2,...,(k+1)$ olmak üzere,

$$a_z a_{z+(k+1)} a_{z+(2k+2)} = 0$$

şeklinde ifade edilebilir.

(d) $\forall n \geq n_0$ için $x_{n-(2k+1)} \geq x_{n+1}$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ var ise

$$a_1 \geq a_{2k+3} \geq a_{k+2} \geq a_1 \geq a_{2k+3}$$

$$a_2 \geq a_{2k+4} \geq a_{k+3} \geq a_2 \geq a_{2k+4}$$

$$a_3 \geq a_{2k+5} \geq a_{k+4} \geq a_3 \geq a_{2k+5}$$

$$\vdots$$

$$a_k \geq a_{3k+2} \geq a_{2k+1} \geq a_k \geq a_{3k+2}$$

$$a_{k+1} \geq a_{3k+3} \geq a_{2k+2} \geq a_{k+1} \geq a_{3k+3}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan

$$a_1 = a_{2k+3} = a_{k+2}$$

$$a_2 = a_{2k+4} = a_{k+3}$$

$$a_3 = a_{2k+5} = a_{k+4}$$

$$\vdots$$

$$a_k = a_{3k+2} = a_{2k+1}$$

$$a_{k+1} = a_{3k+3} = a_{2k+2}$$

olduğu görülür. (c) şıkkından yararlanılarak;

$$a_1 = a_{2k+3} = a_{k+2} = 0$$

$$a_2 = a_{2k+4} = a_{k+3} = 0$$

$$a_3 = a_{2k+5} = a_{k+4} = 0$$

$$\vdots$$

$$a_k = a_{3k+2} = a_{2k+1} = 0$$

$$a_{k+1} = a_{3k+3} = a_{2k+2} = 0$$

elde edilir. Buradan $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ olduğu görülür.

(e) (4.1) denkleminden,

$$x_{n+1} - x_{n-(3k+2)} = \frac{1}{1 + x_{n-k}x_{n-(2k+1)}}(x_{n-k} - x_{n-(4k+3)}) \tag{4.2}$$

elde edilir.

$b = 1,2,...,(k+1)$ olmak üzere (4.2) denkleminden,

$n = b-1$ için,

$x_b - x_{b-(3k+3)} = x_b - x_{b-(3k+3)}$

$n = b+k$ için,

$$x_{b+k+1} - x_{b-(2k+2)} = \frac{1}{1+x_b x_{b-(k+1)}}(x_b - x_{b-(3k+3)})$$

$n = b+2k+1$ için,

$$x_{b+2k+2} - x_{b-(k+1)} = \frac{1}{1+x_{b+k+1}x_b}(x_{b+k+1} - x_{b-(2k+2)})$$
$$= \frac{1}{1+x_{b+k+1}x_b}\frac{1}{1+x_b x_{b-(k+1)}}(x_b - x_{b-(3k+3)})$$

$n = b+3k+2$ için,

$$x_{b+3k+3} - x_b = \frac{1}{1+x_{b+2k+2}x_{b+k+1}}(x_{b+2k+2} - x_{b-(k+1)})$$
$$= \frac{1}{1+x_{b+2k+2}x_{b+k+1}}\frac{1}{1+x_{b+k+1}x_b}\frac{1}{1+x_b x_{b-(k+1)}}(x_b - x_{b-(3k+3)})$$

$$\vdots$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $\forall n \geq 0$ ve $b = 1,2,...,(k+1)$ için,

$$x_{(k+1)n+b} - x_{(k+1)n+b-(3k+3)} = (x_b - x_{b-(3k+3)})\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}} \qquad (4.3)$$

olduğu görülür. (4.3) denkleminden,

$n = 0$ için $x_b - x_{b-(3k+3)} = (x_b - x_{b-(3k+3)})$

$$n=3 \text{ için } \quad x_{3k+3+b}-x_b=(x_b-x_{b-(3k+3)})\prod_{i=1}^{3}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}}$$

$$n=6 \text{ için } \quad x_{6k+6+b}-x_{3k+3+b}=(x_b-x_{b-(3k+3)})\prod_{i=1}^{6}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}}$$

$$n=9 \text{ için } \quad x_{9k+9+b}-x_{6k+6+b}=(x_b-x_{b-(3k+3)})\prod_{i=1}^{9}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}}$$

$$\vdots$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden $\forall n \geq 0$ için,

$$x_{(3k+3)n+b}-x_{b-(3k+3)}=(x_b-x_{b-(3k+3)})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}} \qquad (4.4)$$

olduğu görülür. (4.3) denkleminden,

$$n=1 \text{ için } \quad x_{(k+1)+b}-x_{b-(2k+2)}=(x_b-x_{b-(3k+3)}\prod_{i=1}^{1}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}})$$

$$n=4 \text{ için } \quad x_{(4k+4)+b}-x_{b+(k+1)}=(x_b-x_{b-(3k+3)}\prod_{i=1}^{4}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}})$$

$$n=7 \text{ için } \quad x_{(7k+7)+b}-x_{b+(4k+4)}=(x_b-x_{b-(3k+3)}\prod_{i=1}^{7}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}})$$

$$\vdots$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden $\forall n \geq 0$ için,

$$x_{(3k+3)n+(k+1)+b} - x_{b-(2k+2)} = (x_b - x_{b-(3k+3)})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j+1}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}} \quad (4.5)$$

olduğu görülür. Benzer şekilde (4.3) denkleminden,

$n=2$ için $\quad x_{(2k+2)+b} - x_{b-(k+1)} = (x_b - x_{b-(3k+3)}\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}})$

$n=5$ için $\quad x_{(5k+5)+b} - x_{b+(2k+2)} = (x_b - x_{b-(3k+3)}\prod_{i=1}^{5}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}})$

$n=8$ için $\quad x_{(8k+8)+b} - x_{b+(5k+5)} = (x_b - x_{b-(3k+3)}\prod_{i=1}^{8}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}})$

$$\vdots$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden $\forall n \geq 0$ için,

$$x_{(3k+3)n+(2k+2)+b} - x_{b-(k+1)} = (x_b - x_{b-(3k+3)})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j+2}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}} \quad (4.6)$$

olduğu görülür. (4.1) denkleminden,

$$x_b = \frac{x_{b-(3k+3)}}{1+x_{b-(k+1)}x_{b-(2k+2)}}$$

$$x_b - x_{b-(3k+3)} = -\frac{x_{b-(k+1)}x_{b-(2k+2)}x_{b-(3k+3)}}{1+x_{b-(k+1)}x_{b-(2k+2)}} \quad (4.7)$$

eşitliği elde edilir. (4.7) sırasıyla (4.4), (4.5), (4.6) denklemlerinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa $\forall n \geq 0$ ve $b = 1,2,...,(k+1)$ için,

$$x_{(3k+3)n+b} = x_{b-(3k+3)}\left(1-\frac{x_{b-(k+1)}x_{b-(2k+2)}}{1+x_{b-(k+1)}x_{b-(2k+2)}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}}\right)$$

$$x_{(3k+3)n+(k+1)+b} = x_{b-(2k+2)}\left(1-\frac{x_{b-(k+1)}x_{b-(3k+3)}}{1+x_{b-(k+1)}x_{b-(2k+2)}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j+1}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}}\right)$$

$$x_{(3k+3)n+(2k+2)+b} = x_{b-(k+1)}\left(1-\frac{x_{b-(2k+2)}x_{b-(3k+3)}}{1+x_{b-(k+1)}x_{b-(2k+2)}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{3j+2}\frac{1}{1+x_{(k+1)i+b-(k+1)}x_{(k+1)i+b-(2k+2)}}\right)$$

formülleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-(3k+2)}}{1 + x_{n-k}\,x_{n-(2k+1)}}$ fark denklemi tanımlanmış ve pozitif başlangıç şartları altında çözümleri incelenmiştir. Denklemin katsayıları reel sayı, dizi veya fonksiyon alınarak yeni denklemler tanımlanabilir ve çözümleri bu çalışmada verilen yöntemle incelenebilir. Ayrıca bu denklemlerin sınırlılığı ve kararlılığıda çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Abu-Saris, R. M. and Devault, R., 2003, Global stability of $y_{n+1} = A + y_n / y_{n-k}$, *Applied Mathematics Letters,* 16, 173-178.

Abu-Saris, R. M. and Al-Jubouri, N. K., 2004, Characterization of rational periodic sequences II, *Journal of Difference Equations and Applications,* 10, 4, 409-418.

Abu-Saris, R. M., 2006, A note on the attractivity of period-four solutions of third-order rational difference equation, *Journal of Difference Equations and Applications,* 12, 2, 233-235.

Aloqeili, M., 2006, Dynamics of a rational difference equation, *Applied Mathematics and Computation,* 176, 768-774.

Aloqeili, M., 2006, Dynamics of a *kth* order rational difference equation, *Applied Mathematics and Computation,* 181, 1328-1335.

Berenhaut, K. S. and Stevic, S., 2005, A note on the difference equation $x_{n+1} = 1/x_n x_{n-1} + 1/x_{n-3} x_{n-4}$, *Journal of Difference Equations and Applications,* 11, 14, 1225-1228.

Berenhaut, K. S., Dice, J. E., Foley, J. D. and Stevic, S., 2006, Periodic solutions of the rational difference equation $y_n = (y_{n-3} + y_{n-4}) / y_{n-1}$, *Journal of Difference Equations and Applications,* 12, 2, 183-189.

Camouzis, E. and Devault, R., 2001, Asymptotic behaviour of solutions of $x_{n+1} = p + (x_{n-1} / x_n)$, *Journal of Difference Equation Aplications,* 7, 477-482.

Çağal, B., 2000, Sayısal Analiz, Birsen Yayınevi Ltd. Şti., ISBN: 975-511-172-7, İstanbul.

Çinar, C., 2004, On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = x_{n-1}/(1+x_{n-1}x_n)$, *Applied Mathematics and Computation,* 150, 1, 21-24.

Çinar, C., 2004, On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = x_{n-1}/(1+ax_{n-1}x_n)$, *Applied Mathematics and Computation,* 158, 3, 809-812.

Çinar, C., 2004, On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = ax_{n-1}/(1+bx_{n-1}x_n)$, *Applied Mathematics and Computation,* 156, 2, 587-590.

Elaydi, S., 1995, A Introduction to Difference Equations, Springer-Verlag, New York.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Mousa, M. S., 2004, On asymptotic behaviour of the difference equation $x_{n+1} = \alpha + \left(x_{n-k}/x_n\right)$, *Applied Mathematics and Computation,* 147, 1, 163-167.

Karataş, R., Çinar, C., Şimek, D., 2006, On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = x_{n-5}/(1+x_{n-2}x_{n-5})$, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences,* 1, 9-12, 495-500.

Kulenevic, M. R. S. and Ladas, G., 2002, Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjecture, Boca Raton, London.

Metsel, B. D., 2003, On globally periodic solutions of the difference equation $x_{n+1} = f(x_n)/x_{n-1}$, *Journal of Difference Equations and Applications,* 9, 2, 201-209.

Moybe, L. A. , 2000, Difference Equations with Public Health Applications, New York, U.S.A.

Patula, W. T. and Voulov, H. D., 2002, On the oscillation and periodic charecter of a third-order rational difference equation, *Proceedings of the American Mathematical Society,* 131, 3, 905-909.

Papaschinopoulos, G. and Schinas, J., 2005, On a (*k+1*)-th order difference equation with a coefficient of period *k+1*, *Journal of Difference Equation and Applications,* 11, 3, 215-225.

Saleh, M. and Aloqeili, M., 2005, On the rational difference equation $y_{n+1} = A + y_n / y_{n-k}$, *Applied Mathematics and Computation,* 177, 11, 189-193.

Şimsek, D., Çinar, C. and Yalçınkaya, İ., 2006, On the recursive sequence $x_{n+1} = x_{n-5}/(1 + x_{n-1}x_{n-3})$, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 28, 1, 117-124.

Şimsek, D., Çinar, C. and Yalçınkaya, İ., 2008, On the recursive sequence $x_{n+1} = x_{n-(5k+9)}/(1 + x_{n-4}x_{n-9}...x_{n-(5k+9)})$, *Taiwanese Journal of Mathematics*, (in press).

Stevic, S., 2002, On the recursive sequence $x_{n+1} = x_{n-1}/g(x_n)$, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 6(3), 405-414.

Stevic, S., 2004, A note on periodic character of a difference equation, *Journal of Difference Equations and Applications,* 10, 10, 929-932.

Stevic, S., 2005, On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + \left(x_{n-1}^p / x_n^p\right)$, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 18(1-2), 229-234.

Taixiang, S., 2005, On non-oscillatory solutions of the recursive sequence $x_{n+1} = p + (x_{n-k}/x_n)$, *Journal of Difference Equations and Applications,* 11, 6, 483-485.

Yan, X., Li, W. and Zhao, Z., 2005, On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha - (x_n / x_{n-1})$, *Journal of Applied Mathematics and Computing,* 17(1-2), 269-282.