T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$x^2 - 5y^2 = \mp 1$ ve $x^2 - py^2 = 1$ PELL DENKLEMLERİNİN GAUSS TAMSAYILARINDA ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

MEHMET DURAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Konya, 2008

T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$x^2 - 5y^2 = \mp 1$ ve $x^2 - py^2 = 1$

PELL DENKLEMLERİNİN

GAUSS TAMSAYILARINDA ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Mehmet DURAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez ….. / ….. / ……. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hasan ŞENAY	**Doç.Dr.Cengiz ÇINAR**	**Yrd.Doç.Dr.Ahmet ERDOĞAN**
(Danışman)	**(Üye)**	**(Üye)**

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

$x^2 - 5y^2 = \mp 1$ ve $x^2 - py^2 = 1$

PELL DENKLEMLERİNİN

GAUSS TAMSAYILARINDA ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Mehmet DURAN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hasan ŞENAY

2008, 44 Sayfa

Jüri: Prof.Dr.Hasan ŞENAY

Doç.Dr.Cengiz ÇINAR

Yrd.Doç.Dr.Ahmet ERDOĞAN

James T. Cross (1986) $x^2 + y^2 = z^2$ Diophantine Denkleminin Gauss Tamsayılarındaki çözümünü vermişti. Biz de bu çalışmamızda Cross'un (1986) bu makalesinden esinlenerek $x^2 - 5y^2 = z^2$ Diophantine Denkleminin Gauss Tamsayılarındaki çözümü ile bu denklemin özel durumları olan $x^2 - 5y^2 = \mp 1$ ve p, $4k+1$ biçiminde bir asal sayı olmak üzere $x^2 - py^2 = 1$ Pell Denklemlerinin Gauss Tamsayılarındaki çözümleri üzerine çalışarak bazı sonuçlar elde ettik.

Anahtar Kelimeler: Pell Denklemleri, Gauss Tamsayıları, Temel Çözüm

ABSTRACT

Master Thesis

ON THE SOLUTIONS OF $x^2 - 5y^2 = \mp 1$ and $x^2 - py^2 = 1$ PELL EQUATIONS IN GAUSSIAN INTEGERS

Mehmet DURAN

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Deparment of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hasan ŞENAY

2008, 44 Page

Jury: Prof.Dr.Hasan ŞENAY

Doç.Dr.Cengiz ÇINAR

Yrd.Doç.Dr.Ahmet ERDOĞAN

James T. Cross (1986) provided solution in Gauss Integers of $x^2 + y^2 = z^2$ Diophantine Equation. Being inspired from this article of Cross (1986) in our study, we worked on solution in Gaussian integers of $x^2 + y^2 = z^2$ Diophantine Equation and its special case $x^2 - 5y^2 = \mp 1$ and also solutions in Gaussian integers of $x^2 - py^2 = 1$ Pell Equations where p is a prime number $4k + 1$.

Key Words: Pell Equations, Gaussian İntegers, Basic Solution

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak hazırladığım bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Pell denklemlerinin tarihi gelişimi, Diophantine denklemleri ve Gauss tamsayıları hakkında genel bilgiler verildi.

İkinci bölümde $x^2 - Dy^2 = \mp 1$ Pell denklemlerinin çözümü hakkında geniş bilgiler verilip, tezimize ışık tutması amaçlandı.

Üçüncü bölümde ise $x^2 - 5y^2 = \mp 1$ ve $x^2 - py^2 = 1$ (p, $4k+1$ biçiminde bir asal sayı) Pell denklemlerinin Gauss tamsayılarında çözümü araştırılıp bunlarla ilgili olarak dört teorem verildi.

Bana çalışmalarım sırasında yardımcı olan ve gerekli yardımlarını hiç esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Hasan ŞENAY'a ve sevgili eşim Esin DURAN'a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Mehmet DURAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar cümlesi
$\mathbb{Z}[i]$	: Gauss tamsayıları cümlesi
$(a,b)=d$	: a ile b nin en büyük ortak böleni d dir.
$(a,b)=1$	: a ile b aralarında asaldır.
$\overline{\alpha}$	: $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ nin eşleniği
N	: Norm
$\mid$	: Böler işareti

1. BÖLÜM

1. GİRİŞ

Pell denklemleri, Sayılar Teorisi'nin en önemli konularından biridir. Kare olmayan herhangi bir D pozitif tamsayısı için $\sqrt{D}$ irrasyonel sayısının rasyonel yakınsayanlarının bulunması problemi bizi

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

Diophantine denkleminin çözümlerinin bulunmasına götürür.

Katsayıları tam olan ve birden fazla bilinmeyeni kapsayan Diophantine denklemlerinin bazı özel durumlarını, kökeni Archimedes'e kadar uzanan ve D bir tam kare olmamak üzere $x^2 - Dy^2 = 1$ Pell Denkleminin çözümlerini buna bağlı olarak da $x^2 - 5y^2 = \mp 1$ Pell Denklemleri ile p, $4k+1$ şeklinde bir asal olmak üzere $x^2 - py^2 = 1$ Pell denkleminin Gauss Tamsayılarında çözümlerini inceleyelim.

1.1.Pell Denklemlerinin Tarihi Gelişimi

Kare olmayan herhangi bir D pozitif tamsayısı için $\sqrt{D}$ irrasyonel sayısının rasyonel yakınsayanlarının bulunması problemi bizi

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

Diophantine denkleminin çözümlerinin bulunmasına götürür. Gerçekten $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ ikilisi bu denklemin $y \neq 0$ olan bir çözümü ise, $(x/y)^2 = D + 1/y^2$ olup burada y ne kadar büyük olursa x/y kesrinin $\sqrt{D}$ ye o kadar yakın olacağı açıktır.

Aslında kökeni Archimedes'e kadar uzanan $x^2 - Dy^2 = 1$ denklemine; Euler muhtemelen bir yanlışlıkla, bu denklemle çok az ilgilenmiş olmasına rağmen İngiliz Matematikçisi John Pell'in (1611-1685) adını vermiştir. Pell denkleminin ortaya çıkışı ile ilgili en eski ve en ünlü problem Archimedes'in "Sürahi Problemi" olup bu bizi $x^2 - 4729494\,y^2 = 1$ denklemine götürür. Bu denklemin 1880 yılında Amthor tarafından bulunan en küçük pozitif çözümünde $y \in \mathbb{Z}$'nin 41 rakamlı bir tamsayı olduğuna ilgi çekilmelidir.

Pell denklemleri ile ilgili ilk ayrıntılı incelemelere Hintli Matematikçiler Brahmagupta (M.S. 600) ve Bhaskara'nın (M.S. 1100) çalışmalarına rastlanır. Brahmagupta özel olarak $x^2 - 92y^2 = 1$ denklemini bir yıl içerisinde çözecek kişinin bir matematikçi olacağını ifade ederek bu tür denklemlerin önemini daha o zamanlarda vurgulamıştır.

Pell denklemiyle ciddi olarak ilgilenen ilk Avrupalı matematikçi Fermat olmuştur. Fermat 1657 de İngiliz matematikçi John Wallis (1616-1703) ve onun hocası Lord William Brouncker'e (1620-1685) yazdığı bir mektupta $x^2 - 61y^2 = 1$ ve $x^2 - 109y^2 = 1$ denklemlerinin $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ çözüm ikililerini bulmalarını isteyerek adeta meydan okumuştur. Brounchker, Fermat'a cevabında Pell denklemini çözmek için çok etkili bir metodunun bulunduğunu ve bu yöntemle $x^2-109y^2=1$ denkleminin bir çözümünde $x\in\mathbb{Z}$'nin tam 15 rakamlı bir tamsayı olduğunu bildirmiştir. Euler 1759'da Brouncker'in yönteminin, $\sqrt{D}$'nin sürekli kesir açılımının belirtilmesine benzeyen bir metot olduğuna ilgi çekmiştir ki, aslında Bhaskara, "Varga Prakrit" adını verdiği ve buna denk olan metodu ile Brouncker'den yaklaşık beş yüz yıl önce bu denklemi çözmüştür. Euler $x^2-Dy^2=1$ denkleminin en küçük pozitif çözümünü bulmak için $\sqrt{D}$'nin sürekli açılımını kullandı ve diğer çözümlerin verilen bir çözümden bir indirgeme formülüyle nasıl üretilebileceğini gösterdi.

Fermat ve Wallis'in her ikisi de doğru bir şekilde, Pell denkleminin daima bir çözümünün mevcut olacağını (gerçekte sonsuz sayıda) tahmin etmişlerdi. Gerçekte Euler $x^2-Dy^2=1$ denkleminin bütün çözümlerinin, $\sqrt{D}$'nin sürekli kesir açılımından elde edilebileceğini Langrange'dan en az on yıl önce fark etmiş olmasına rağmen, 1768'de Langrange bu iddianın ilk tam ispatını ve her çözümün $\sqrt{D}$'nin sürekli kesir açılımından elde edilebileceğini yayınladığı seri makalelerle gösterdi (Şenay 2007).

Tabii ki Pell denklemlerinin sadece tamsayılar ile çözümü üzerine değil Gauss tamsayıları ile çözümü üzerine de bir takım çalışmalarda bulunulmuştur. Bizde bu çalışmaların ışığında $x^2-5y^2=\mp 1$ ve $p, 4k+1$ biçiminde bir asal sayı olmak üzere $x^2-py^2=1$ Pell denklemlerinin Gauss tamsayılarında çözümlerini inceleyelim.

1.2. Diophantine Denklemleri

1.2.1. Bir bilinmeyenli denklemler

$a_0, a_1\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $a_1x+a_0=0$ şeklindeki denklemin $x=-a_0/a_1$ çözümünün ancak a_1'in a_0'ı bölmesi durumunda bir tamsayı olacaktır. Bu denklemin tamsayı çözümleri her zaman mevcut olmayabilir. Örneğin, $5x-2=0$ denkleminin tamsayılı çözümü olması için $x=2/5$'in tamsayı olması gerekmektedir. Halbuki $2/5\notin\mathbb{Z}$ olduğundan $5x-2=0$ denkleminin tamsayılı çözümü mevcut değildir.

Bu durumu birinci dereceden daha yüksek dereceli denklemlerde de görebiliriz:

İkinci dereceden $x^2-2x+1=0$ denklemi $x_1=1$ ve $x_2=1$ tamsayı çözümlerine sahip fakat $x^2-4x+2=0$ denkleminin ise $x_{1,2}=2\pm\sqrt{2}$ kökleri irrasyonel olup hiçbir tamsayılı çözümü mevcut değildir.

Tam sayılı n.dereceden bir bilinmeyenli denklem

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0 \quad (n\geq 1)$$

in çözümü gayet kolaydır. Gerçekten eğer $a\in\mathbb{Z}$ tamsayısı bu denklemin bir çözümü ise denklemi sağlar. Yani

$$a_0+a_1a+a_2a^2+\ldots+a_na^n=0$$

$$a_0=-a\left(a_na^{n-1}+a_{n-1}a^{n-2}+\ldots+a_1\right)$$

olur. Buradan a_0'ın a ile kalansız bölündüğü anlaşılır. Neticede denklemin her tamsayılı çözümü bu denklemin sabit terimini böler. Bir denklemin tamsayılı çözümlerini bulmak için a_0'ın öyle bölenleri aranmalı ki, denklemde yerine koyunca onu bir özdeşliğe çevirsin. Örneğin;

$x^{10}+x^7+2x^3+2=0$ denkleminin tamsayılı çözümlerini sabit terim olan 2'nin bölenleri arasında aramak gerekir. Yani -1, 1, -2, 2 sayıları arasında aranmalıdır. Bu tamsayılardan sadece $x=-1$ bu denklemi sağlar.

1.2.2. Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemler

a, b tamsayıları sıfırdan farklı ve c keyfi bir tamsayı olmak üzere birinci dereceden iki bilinmeyenli bir

$$ax + by + c = 0$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklemde $(a, b) = 1$ almak genelliği bozmayacaktır. $(a, b) = d > 1$ olduğunda

$$a = a_1 d \quad b = b_1 d \quad \text{ve} \quad c = c_1 d$$

olacak şekilde $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{Z}$ tamsayıları bulunabildiği takdirde denklemin tamsayılı çözümleri bulunabilir.

$$a_1 dx + b_1 dy + c_1 d = 0$$

Denkleminin her tarafını d ile böldüğümüzde

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad \left(c_1 = \frac{c}{d}\right)$$

denklemini elde ederiz.

1) İlk olarak $c = 0$ halini göz önüne aldığımızda denklemimiz

$$ax + by = 0$$

şekline gelir. Bu denklemi x'e göre çözersek

$$x = -\frac{b}{a} y$$

elde ederiz. Buradan x'in tamsayılı değerler alabilmesi için y'nin a ile kalansız bölünebilmesinin gerek ve yeter şart olması aşikârdır. t bütün tamsayılı değerler olmak üzere $y = at \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ise

$x = -\frac{b}{a}at$ ise $x = -bt$ elde edilir.

2) İkinci olarak $c \neq 0$ halini göz önüne alalım.

(x_0, y_0) denklemin bir çözümü olsun.

$ax + by + c = 0$

$ax_0 + by_0 + c = 0$ olup buradan

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

$y - y_0 = \frac{a(x_0 - x)}{b}$ bulunur ki, $y - y_0$'ın bir tamsayı olması, ancak ve ancak $x_0 - x$'in b'nin bir katı olması durumunda mümkün olabileceğini ifade edebiliriz.

$(t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ t bütün tamsayı değerlerini almak üzere

$x_0 - x = bt$ ise $x = x_0 - bt$

$y - y_0 = a.bt/b$ ise $y - y_0 = at$ ise $y = y_0 + at$

elde edilir. $x = x_0 - bt,\ y = y_0 + at\ (t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ formülleri $ax + by + c = 0$ denkleminin bütün çözümlerini verir.

Daha önce ele aldığımız $c = 0$ durumu için bulunan

$x = -bt$ ve $y = at$ çözüm formülleri;

$x = x_0 - bt$ ve $y = y_0 + at$ formüllerinden $x_0 = y_0 = 0$ almakla elde edilir.

1.2.3. İkinci dereceden üç bilinmeyenli denklemler

$x^2+y^2=z^2$ ikinci dereceden üç bilinmeyenli denklemini ele alalım. Bu denklemin bütün tamsayılı çözümlerini bulmak probleminin geometrik anlamı; kenarları ve hipotenüsü tamsayılar olan dik üçgenleri bulmaktır.

x ve y sayılarının en büyük ortak bölenini d ile gösterecek olursak;

$x=x_1d$ ve $y=y_1d$ ve denklem

$$x_1^2d^2+y_1^2d^2=z^2$$

şeklini alır. Buradan z^2'nin d^2 ile bölünebildiği neticesi çıkar ki bu da z nin d nin bir katı olması demektir. $z=z_1d$ dir.

Şimdi

$$x_1^2d^2+y_1^2d^2=z_1^2d^2$$

şekline gelen denklemin her tarafını d^2 ile bölersek

$$x_1^2+y_1^2=z_1^2$$

elde ederiz.

Bu şekilde başlangıçtaki denkleme benzeyen bir denklem oluşturduk. Burada $(x_1,y_1)=1$ dir. O halde başlangıçtaki denklemi $(x,y)=1$ olmak üzere irdeleyelim. Bu taktirde x ve y sayılarından en az birisi tektir. (Mesela x tek olsun.)

$$x^2+y^2=z^2 \tag{1.1}$$

ise

$$x^2=z^2-y^2 \quad ; \quad x^2=(z+y).(z-y) \tag{1.2}$$

elde ederiz. (1.2) deki çarpanların en büyük ortak bölenini d_1 ile göstereceğiz. $(a,b)=1$ olmak üzere

$$z + y = ad_1 \quad z - y = bd_1$$

dir. Bu değerleri (1.2) de yerine yazarsak

$$x^2 = abd_1^2$$

elde ederiz. $(a, b) = 1$ olduğundan ve aralarında asal iki sayının çarpımı, ancak her çarpanın bir kare olması halinde kare olabileceğinden $a = u^2$, $b = v^2$ şeklindedir. Bu taktirde ise

$$x^2 = u^2 v^2 d_1^2$$

ve

$$x = uvd_1 \tag{1.3}$$

olur. y ve z,

$$z + y = ad_1 \quad , \quad z - y = bd_1$$

denklemlerinden

$$y = \frac{u^2 - v^2}{2} d_1 \quad , \quad z = \frac{u^2 + v^2}{2} d_1 \tag{1.4}$$

olarak bulunur. x tek olduğundan ve (1.3)'den u, v ve d_1'in de tek oldukları neticesi çıkar. Bundan başka $d_1 = 1$'dir. Çünkü $(x, y) = 1$ olduğundan

$$x = uvd_1 \quad , \quad y = \frac{u^2 - v^2}{2} d_1 \tag{1.5}$$

eşitliklerinden $d_1 = 1$ olarak bulunur. u ve v sayıları aralarında asal olan a ve b sayılarına $a = u^2$, $b = v^2$ ifadesiyle bağlı olduklarından u ve v aralarında asaldır. $b < a$ ve $v < u$'dur.

Bütün bunlardan,

$$x = uv \quad , \quad y = \frac{u^2 - v^2}{2} \quad , \quad z = \frac{u^2 + v^2}{2} \tag{1.6}$$

formüllerini elde ederiz. Bu formüller u, v aralarında asal ve tek olmak üzere $(v < u)$ $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini sağlayan ortak bölensiz x, y ve z üçlülerini verirler.

Yukarıda yapılan incelemeler aşağıdaki teoremin bir ispatıdır.

Teorem 1.1. $x^2 + y^2 = z^2$ $\left((x, y) = 1\right)$ Diophantine denkleminin trivial çözümü dışındaki bütün çözümleri, $(u, v) = 1$ ve her ikisi tek $v < u$ şeklindeki tamsayılar olmak üzere

$$x = uv \quad , \quad y = \frac{u^2 - v^2}{2} \quad , \quad z = \frac{u^2 + v^2}{2} \tag{1.7}$$

formülleri ile verilir (Gelfond 1962).

Bu teoremin geometrik yorumu; trivial olan çözümü dışında $(x = y = z = 0)$, bütün tamsayı çözümlerini bulma problemi, dikkenarları ve hipotenüsleri tamsayı olan diküçgenleri bulma problemine denktir. u ve v nin

$(u, v) = 1 \quad , \quad v < u \quad (u, v \text{ tek})$ şartı altında ilk değeri

$v = 1 \quad , \quad u = 3 \quad$ için $\quad x = 3, y = 4, z = 5$

$v = 1 \quad , \quad u = 5 \quad$ için $\quad x = 5, y = 12, z = 13$

$v = 3 \quad , \quad u = 5 \quad$ için $\quad x = 15, y = 8, z = 17$

……………………………………………

olur.

1.2.4. $x^2+5y^2=z^2$ Diophantine denklemi

Şimdi $x^2+5y^2=z^2$ denkleminin tamsayılardaki çözümünü inceleyelim.

$$x^2+5y^2=z^2$$

denklemini

$$5y^2=z^2-x^2$$

ve buradan

$$y^2=(z-x)(z+x)/5$$

olarak yazabiliriz.

Buna göre çarpanlar

ya

$$z-x/5 \quad , \quad z+x$$

ya da

$$z-x \quad , \quad z+x/5$$

olur.

$$z+x=2m^2 \quad , \quad z-x/5=2n^2$$

alırsak

$$x=m^2-5n^2 \quad , \quad y=2mn \quad , \quad z=m^2+5n^2$$

olarak bulunur.

Böylece tamsayılardaki her ikiliyi yine tamsayılarda çözüm olan (x,y,z) üçlüsüne götürmüş oluruz.

1.3. Gauss Tamsayıları

1.3.1. Gauss tamsayılarının temel özellikleri

Tanım 1.1. Herhangi $a,b \in \mathbb{Z}$ ve $i=\sqrt{-1}$ olmak üzere $a+bi$ biçimindeki bütün sayılara Gauss Tamsayıları denir. Bu tür sayıların cümlesini $\mathbb{Z}[i]$ ile göstereceğiz.

$$\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$$

Not 1.1. $\mathbb{Z}[i]$ bir tamlık bölgesi olup kesirler cismi $Q(i)$ dir.

Tanım 1.2. $a,b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\alpha=a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ sayısının eşleniği $a-bi$ şeklinde tanımlanıp, $\overline{\alpha}$ ile gösterilir. Bir $\alpha=a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ sayısının normu $N(a+bi)=\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2 \in \mathbb{Z}$ dir.

Önerme 1.1. Norm fonksiyonunun şu özellikleri vardır (Şenay 2007).

1) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}[i]$ için $N(\alpha) \geq 0$

2) $N(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=0$

3) $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{Z}[i]$ için $N(\alpha.\beta)=N(\alpha).N(\beta)$ dır.

4) $\alpha=a+bi, \beta=c+di \in \mathbb{Z}[i]$ $(a,b,c,d \in \mathbb{Z})$ olmak üzere,

a) $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\overline{\beta}$

b) $\overline{(\alpha+\beta)}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

Not 1.2. $N(a+bi)=a^2+b^2$ norm fonksiyonu tamsayıların iki kare toplamı olarak temsil edilmeleri açısından çok önemlidir. $\mathbb{Z}[i]$ deki bölünebilirlikle ilgili temel kavramlar $\mathbb{Z}$ için yapılanlara benzerdir.

Tanım 1.3. $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}[i]$ olmak üzere, $\alpha=\beta\gamma$ olacak biçimde $\exists\gamma\in\mathbb{Z}[i]$ varsa β, α'yı böler denir ve $\beta|\alpha$ yazılır.

Lemma 1.1. $\alpha|\beta\Rightarrow N(\alpha)|N(\beta)$ dır (Ireland ve Rosen 1990).

İspat: Eğer $\alpha|\beta$ ise, Tanım 1.3'e göre, $\beta=\alpha.z$ olacak şekilde $\exists z\in\mathbb{Z}[i]$ dir. Eşitliğin her iki tarafın normunu alırsak, $N(\beta)=N(\alpha.z)$ olur. Norm özelliklerinden, $N(\beta)=N(\alpha).N(z)$ olup, $N(\alpha)|N(\beta)$ olur.

Tanım 1.4. $\forall\alpha\in\mathbb{Z}[i]$ için, $u|\alpha$ olacak şekilde bir u tamsayısı varsa buna $\mathbb{Z}[i]$'nin bir tersinir elemanı denir.

Önerme 1.2. $\alpha\in\mathbb{Z}[i]$'nin tersinir olması için gerek ve yeter şart $N(\alpha)=1$ olmasıdır. Şu halde $\mathbb{Z}[i]$'nin tersinir elemanları $\mp1, \mp i$'lerdir (Çallıalp 1999).

İspat: $\alpha\in\mathbb{Z}[i]$ tersinir $\Leftrightarrow \alpha, \dfrac{1}{\alpha}\in\mathbb{Z}[i]$ demektir.

$$1=\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\Rightarrow N(1)=N(\alpha).N\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad \text{ve} \quad N(\alpha)\in Z, N(\alpha)\geq 0$$

olduğundan, eğer α tersinir eleman ise, $N(\alpha)=1$ olmalıdır.

Tersine olarak, $\alpha=a+bi\in\mathbb{Z}[i]$ için, $N(\alpha)=1=\alpha.\overline{\alpha}$ ise, $\frac{1}{\alpha}=\overline{\alpha}=a-bi\in\mathbb{Z}[i]$ bulunur.

$N(\alpha)=a^2+b^2=1\Leftrightarrow a=\mp1, b=0$ veya $a=0, b=\mp1$ anlamını taşıdığından $\mathbb{Z}[i]$'deki birimlerin $\mp1,\mp i$ olduğu anlaşılır.

Tanım 1.5. u, $\mathbb{Z}[i]$ nin herhangi bir tersinir elemanı olmak üzere, herhangi $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}[i]$ elemanları için $\alpha=u.\beta$ eşitliği geçerli ise α ve β elemanlarına ilgili elemanlar denir ve bu durum $\alpha\approx\beta$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.6. $\alpha\in\mathbb{Z}[i]$ elemanına eğer α'nın $\mathbb{Z}[i]$deki her böleni ya kendisinin bir ilgilisi ya da bir tersinir eleman ise indirgenemez denir.

Tanım 1.7. $\mathbb{Z}[i]$nin tersinir olmayan sıfırdan farklı bir π tamsayısına; herhangi $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}[i]$ tamsayıları için, $\pi|\alpha\beta$ olması ya $\pi|\alpha$ veya $\pi|\beta$ olmasını gerektiriyorsa asal denir.

Not 1.3. $\mathbb{Z}[i]$ bir öklid bölgesidir. Her Öklid bölgesi bir tek çarpanlama bölgesi olduğundan $\mathbb{Z}[i]$ tek çarpanlama bölgesidir. $\mathbb{Z}[i]$'nin her indirgenemez elemanı aynı zamanda bir asal elemanıdır.

Önerme 1.3. $\pi \in \mathbb{Z}[i]$ ve $N(\pi)$ bir rasyonel asal ise π asal Gauss tamsayısıdır (Çallıalp 1999).

İspat: $\alpha, \pi \in \mathbb{Z}[i]$ olmak üzere,

$\alpha | \pi \Rightarrow \exists \beta \in \mathbb{Z}[i]$, $\pi = \alpha.\beta \Rightarrow N(\pi) = N(\alpha).N(\beta)$ olacağından $N(\pi)$de bir rasyonel asal olduğundan $N(\pi) = N(\alpha).N(\beta)$ eşitliğinde $N(\alpha)$ veya $N(\beta)$dan biri 1 olmalıdır. Önerme 1.2.'ye göre α veya β'lardan biri tersinir olmalıdır. Buna göre π'nin her iki durumda da tersinir elemanlardan ve kendisinden başka böleni bulunmadığından π asal olmak durumundadır.

Teorem 1.2. ($\mathbb{Z}[i]$ için Aritmetiğin Temel Teoremi) Her biri sıfırdan farklı ve tersinir olmayan bir $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ bir takım Gauss asallarının çarpımı olarak yazılabilir ve bu yazılış sıra ve ilgililik düşünülmezse tek türlüdür. Yani, eğer u bir tersinir eleman ise π ve $u\pi$ aynı elemanlardır (Flanders 1985).

Buraya kadar verdiğimiz bilgiler yardımıyla biz $\mathbb{Z}$'nin çarpımsal aritmetiği ile $\mathbb{Z}[i]$'nin çarpımsal aritmetiğine aynı gözle bakabiliriz. Şimdi $\mathbb{Z}$ ile $\mathbb{Z}[i]$'nin asalları arasında var olan bağıntıya daha detaylı bakalım.

π, $\mathbb{Z}[i]$ de bir asal ise, $N(\pi) = \pi.\overline{\pi}$, $\mathbb{Z}$'nin bir pozitif elemanıdır. Açık olarak $N(\pi) \neq 1$ dir. Çünkü π asal olduğu için tersinir olamayacaktır. $\mathbb{Z}$ de aritmetiğin temel teoremine göre,

$$N(\pi) = \pi.\overline{\pi} = p_1 p_2 \ldots p_r \quad (p_i \text{ ler rasyonel asal}) \tag{1.8}$$

yazılır. Ayrıca buradan $\pi | N(\pi)$ olur ki $\pi | p_1 p_2 \ldots p_r$ olup Not 1.3'e göre bir i indisi için $\pi | p_i$ olacaktır. O halde Gauss asallarını ararken rasyonel asalların bölenlerine bakmak yeterli olacaktır.

Önerme 1.4. π bir Gauss asalı olsun. O halde $\pi | p$ olacak şekilde bir tek p rasyonel asalı vardır. Üstelik ya $N(\pi) = p$ ya da $N(\pi) = p^2$ dır (Flanders 1985).

İspat: Önerme 1.2. ve (1.8) eşitliği yardımıyla, $\pi \in \mathbb{Z}[i]$ asalının bir p rasyonel asalını böldüğünü söyleriz. Burada p tektir. Çünkü tek olmasaydı $\pi | q$ gibi p den farklı bir q rasyonel asalı olması gerekirdi. Fakat hem p hem de q asal olduklarından $1 = (p,q) = px + qy \quad (x, y \in \mathbb{Z})$ olacağından $\mathbb{Z}[i]$ de, $\pi | (px + qy) = 1$ olması açık olarak imkansızdır. Şimdi $\pi | p$ ve Lemma 1.1.'den $\pi | p \Rightarrow N(\pi) | N(p) = p^2$ olup $\mathbb{Z}$ de aritmetiğin temel teoremi gereği ya $N(\pi) = p$ ya da $N(\pi) = p^2$ dir. (π asal olduğundan $N(\pi) \neq 1$ dir.) Buradan $\pi = x + yi (x, y \in \mathbb{Z})$ ise, $p = x^2 + y^2$ veya $p^2 = x^2 + y^2$ olur.

Önerme 1.5. π gibi bir Gauss asalı farklı iki rasyonel asalı bölmez (Şenay 2007).

İspat: Herhangi iki rasyonel p ve q asalları için $px + qy = 1$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır. Eğer $\pi | p$ ve $\pi | q$ olsaydı bölünebilmenin lineerlik özelliğinden $\pi | 1$ elde edilirdi. Bu ise π'nin $\mathbb{Z}[i]$ de tersinir olmasını gerektirir ki, bu π'nin $\mathbb{Z}[i]$ de asal oluşu kabulümüzle çelişir.

$N(\pi) = p$ olması durumunda $\pi.\bar{\pi} = p$ dir. Buradan, p nin $\mathbb{Z}[i]$ de tam tamına iki tane asal çarpanı vardır.

$N(\pi) = p^2$ olması durumunda $\mathbb{Z}[i]$ deki aritmetiğin temel teoremi $\pi.\bar{\pi} = p^2$ ye uygularsak, u tersinir bir eleman olmak üzere p nin, $\pi = u.p$ olacak şekilde bir Gauss asalı olduğunu görürüz. Şimdi bunun aksini iddia edelim. Yani p bir rasyonel asal olsun ve $\mathbb{Z}[i]$ de bir p çarpanı olsun. O halde p nin $\mathbb{Z}[i]$ de en azından bir π çarpanı vardır. Fakat bu da $\pi | p$ anlamına gelip buradan ya $N(\pi) = p$ ve $\pi.\bar{\pi} = p$ ya da $N(\pi) = p^2$ ve p bir Gauss asalıdır. Açık olarak, biz hangi p nin bir Gauss asalı olarak kaldığı ve hangisinin $\pi.\overline{\pi} = p$ şeklinde çarpanlarının olduğu problemi ile karşı karşıya kaldık.

$N(\pi) = p$ olduğunu göz önüne alalım ve $\pi = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{Z})$ olsun. O halde, $p = N(\pi) = \pi.\overline{\pi} = x^2 + y^2$. O halde p, iki kare toplamı şeklinde yazılabiliyor demektir. Açık olarak ne $x = 0$ ve ne de $y = 0$ dır. Veya p bir tam kare olsaydı bir Gauss asalı olmazdı.

Tersine, p nin bir rasyonel asal olduğunu ve $x \neq 0, y \neq 0$ olmak üzere $p = x^2 + y^2$ olduğunu düşünelim. O halde, $p = \alpha.\overline{\alpha}(\alpha = x + yi)$. Açık olarak α tersinir değildir. π, α'nın bir Gauss asal çarpanı olsun. O halde $N(\pi) | N(\alpha) = p$. Bu yüzden p, π'nin rasyonel asalı ile ilgilidir ve $\alpha = u\pi,\ p = \pi.\overline{\pi}$.

Not 1.4. p, bir rasyonel asal olsun. O halde ya p bir Gauss asalıdır ya da π ve $\overline{\pi}$ Gauss asalları olmak üzere $p = \pi.\overline{\pi}$ dir. Bu durum ancak ve ancak $p^2 = x^2 + y^2$ olması halinde $\mathbb{Z}$ de çözülebilir. O halde $N(\pi) = p$ dir ve $\pi = x + yi$ şeklinde alabiliriz. Böylece Gauss asallarını bulmak için rasyonel asalları inceleriz ve karelerin toplamlarını test ederiz.

Şimdi ilk asalları deneyelim:

$p = 2$ için, $2 = 1^2 + 1^2 = (1+i).(1-i) = \pi.\overline{\pi}$ dır. Burada bazı özel durumlar vardır.

$$\pi = 1 - i = -i(1+i) = -i\overline{\pi}$$

olur.

Böylece 2 bir birime bağlı olarak π^2'ye denktir. (2, $\mathbb{Z}[i]$ de dallanmaktadır. Yani 2, bir asalın karesiyle bölünebilmektedir.)

$p = 3$ için, $3 \neq x^2 + y^2$ olduğu kolayca görülebilir. Bu yüzden 3 bir $\mathbb{Z}[i]$ asalıdır.

$p=5$ için, $5=2^2+1=(2+i).(2-i)=\pi.\bar{\pi}$ dır.

$p=7$ ve 11 için her ikisi de karelerin toplamı değil ve bu yüzden ikisi de $\mathbb{Z}[i]$ asalıdır.

$p=13$ için, $13=3^2+2^2$, $p=\pi.\bar{\pi}$ ve $\pi=3+2i$ dir.

$p=17$ için, $17=4^2+1^2$, $p=\pi.\bar{\pi}$ ve $\pi=4+i$ dir.

Sadece $p=2$ çift asalını dikkate aldık. Şimdi tek asallara yönelelim. 3, 7 ve 11 $\mathbb{Z}[i]$ nin tek asallarıdır. Fakat bunu açıklamak için kongrüansları kullanmalıyız. Eğer $x\in\mathbb{Z}$ ise o zaman $x=2n$ veya $x=2n+1$ şeklindedir.

Birinci durumda $x^2=4n^2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,4)$ ve ikinci durumda

$x^2=(2n+1)^2=4n(n+1)+1\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)$ dür.

Bundan dolayı eğer x ve y $\mathbb{Z}$ de ise o zaman $x^2+y^2\equiv 0{,}1$ veya 2 (mod 4)dür. Böylece iki karenin toplamı asla (mod 4)'e göre 3'e kongruent değildir.

2. BÖLÜM

2. $x^2 - Dy^2 = \mp 1$ PELL DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Genel olarak bu tür denklemlerin çözümlerinin bulunmasına geçmeden önce, özel olarak $D=5$ için, denklemi çözmede sonsuz basit sürekli kesirlerin nasıl kullanılabileceğini değerlendirelim.

$\sqrt{5}$ sayısını bir sonsuz basit sürekli kesir olarak açalım.

Bunun için $\left(\sqrt{5}-2\right).\left(\sqrt{5}+2\right)=1$ özdeşliğinden yararlanılır.

$$\left(\sqrt{5}-2\right).\left(\sqrt{5}+2\right)=1$$

$$\sqrt{5}-2=\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\frac{1}{4+\sqrt{5}-2}=\frac{1}{4+\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}}$$

bulunur.

Böyle devam edilirse;

$$\sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\sqrt{5}+2}}}$$

$$\sqrt{5}=[2,4,4,4,\ldots]=\left[2,\overline{4}\right]$$

elde edilir. Şimdi sürekli kesir teorisinde önemli bir kavram olan ve Pell denklemlerinin çözümünde çok pratik bir araç oluşturan yakınsayan kavramını; $0 \le k \le n$ olmak üzere $C_k=[a_0,a_1,a_2,\ldots,a_k]$ sayısına $[a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n]$ sürekli kesrinin k. yakınsayanı şeklinde verebiliriz. Aşağıdaki teorem yakınsayanların hesaplanmasıyla ilgili basit bir yöntem verir.

Teorem 2.1. (p_k) ve (q_k) dizileri

$$p_0 = a_0 \quad , \quad p_1 = a_1.a_0 + 1 \quad , \quad p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$$

$$q_0 = 1 \quad , \quad q_1 = a_1 \quad , \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad (2 \le k \le n)$$

şeklinde tanımlanmış olsunlar. O zaman;

$$c_k = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$$

olur (Şenay 2007).

$\sqrt{5} = [2, \overline{4}]$ olduğunu göz önüne alarak Teorem 2.1.'e göre aşağıdaki tabloyu oluşturalım.

k	a_k	p_k	q_k	$p_k^2 - 5q_k^2$
0	2	2	1	-1
1	4	9	4	1
2	4	38	17	-1
3	4	161	72	1
4	4	682	305	-1
5	4	2889	1292	1
6	4	12238	5473	-1
7	4	51841	23184	1
8	4	219602	98209	-1
9	4	930249	416020	1

Tablo 2.1. $\sqrt{5}$ in ilk on yakınsayanlarının tablosu

Bu tablodan $\sqrt{5}$ in ilk on yakınsayanını; 2/1, 9/4, 38/17, 161/72, 682/305, 2889/1292, 12238/5473, 51841/23184, 219602/98209, 930249/416020 olarak elde ederiz. $\sqrt{5}$ in sürekli kesir açılımının periyodu 1 olduğundan p_{2t-1}/q_{2t-1} biçimindeki herhangi bir yakınsayanın pay ve paydası $x^2-5y^2=1$ denkleminin çözümü olacaktır.

Buna göre $p_1/q_1=9/4$, $p_3/q_3=161/72$, $p_5/q_5=2889/1292$, $p_7/q_7=51841/23184$, $p_9/q_9=930249/416020$ sayıları (9,4), (161,72), (2889,1292), (51841, 23184), (930249, 416020)$\in \mathbb{Z}^2$ çözümlerini verir.

Yani $(x,y)=(p_{2t-1},q_{2t-1})$ olur.

Ayrıca yine yukarıdaki tabloya göre $t=1,3,5,\ldots$ için $p_k^2-5q_k^2=-1$ eşitliğini sağlayan $\sqrt{5}$'in p_k/q_k yakınsayanları, $x^2-5y^2=-1$ denkleminin $(p_{t-1},q_{t-1})\in Z^2$ şeklindeki çözümleridir.

Şimdi D pozitif ve kare olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$x^2-Dy^2=1 \tag{2.1}$$

denkleminin bütün x,y tamsayı çözümlerinin nasıl bulunabileceğini ele alabiliriz. (2.1.) denkleminin çözüm takımı bilindiğinde, diğer bütün çözümler bundan kolaylıkla elde edilir. Öncelikle $x^2-5y^2=1$ örneğinde de bu tür denklemlerin bütün tamsayı çözümlerinin temel çözüm diyebileceğimiz belirli bir çözümden nasıl elde edebileceğimiz problemini ele alacağız.

Tanım 2.1. Eğer $x=x_0,\ y=y_0$ için $x+y\sqrt{D},\left(\sqrt{D}>0\right)$ iki terimlisi (2.1.) denkleminin bütün (x,y) pozitif çözümleri için aldığı değerler arasında mümkün olan en küçük değeri alıyorsa, bu (x_0,y_0) çözümüne denklemin en küçük pozitif çözümü veya temel çözümü denir.

$x^2 - 5y^2 = 1$ denklemini temel çözümü (9,4) dür. Bundan sonra gelen büyüklük bakımından çözümü (161,72) olup açık olarak $161 + 72\sqrt{5} > 9 + 4\sqrt{5}$ dir.

Sonuç 2.1. $x^2 - Dy^2 = 1$ denkleminin bir tek en küçük çözümü vardır.

İspat: Gerçekten $x^2 - Dy^2 = 1$ denkleminin $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ ve $x_1 \neq x_2$ ve $y_1 \neq y_2$ olan iki farklı temel çözümünün bulunduğunu varsayalım. Bu kabulle tanım gereği $x + y\sqrt{D}$ iki terimlisinin bu çözümler için aldığı değerler eşit olmalıdır. Böylece

$$x_1 + y_1\sqrt{D} = x_2 + y_2\sqrt{D}$$

olup, buradan $x_1 - x_2 = (y_2 - y_1)\sqrt{D}$ elde edilir.

Oysa bu eşitlikte $x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$, $\sqrt{D}$ 'nin irrasyonel olduğu göz önüne alınırsa eşitliğin ancak ve ancak $x_1 - x_2 = 0$ ve $y_2 - y_1 = 0$ veya $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olması durumunda mümkün olacağı açıktır. Buna göre mevcut olduğunda temel çözüm tektir.

Sonuç 2.2. $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$, $x^2 - Dy^2 = 1$ denkleminin temel çözümü olsun. Bu taktirde bu denklemin diğer çözümleri

$$\left(x_0 + y_0\sqrt{D}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{D}$$

$$\left(x_0 - y_0\sqrt{D}\right)^n = x_n - y_n\sqrt{D}$$ olmak üzere $(x_n, y_n) \in \mathbb{Z}^2$ şeklindedir.

İspat: $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ (2.1.)'in temel çözümü olduğundan denklem sağlanır.

Yani $x_0^2 - Dy_0^2 = 1$ ise $\left(x_0 + y_0\sqrt{D}\right)\left(x_0 - y_0\sqrt{D}\right) = 1$

n'inci kuvvet alırsak

$$\left(x_0 + y_0\sqrt{D}\right)^n \left(x_0 - y_0\sqrt{D}\right)^n = 1$$

elde edilir.

$$\left(x_0+y_0\sqrt{D}\right)^n = x_0^n + nx_0^{n-1}y_0\sqrt{D} + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}y_0^2D + \ldots + y_0^n\left(\sqrt{D}\right)^n$$

Bu açılımda tek numaralı tüm terimler bir tamsayı olup, bunu x_n gibi bir tamsayı ile gösterebiliriz.

Açılımdaki çift numaralı terimler ise; $\sqrt{D}$ parantezinde yine tamsayıların toplamı olarak yazılabileceğinden $y_n\sqrt{D}$ olur.

Yani $\left(x_0+y_0\sqrt{D}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{D}$

Benzer düşünceyle ikinci çarpan içinde

$$\left(x_0-y_0\sqrt{D}\right)^n = x_n - y_n\sqrt{D}$$

yazabiliriz.

$$\left(x_0+y_0\sqrt{D}\right).\left(x_0-y_0\sqrt{D}\right)=1$$

idi.

$\left(x_n+y_n\sqrt{D}\right).\left(x_n-y_n\sqrt{D}\right)=x_n^2-Dy_n^2=1$ olup bu da bize genel Pell denkleminin çözüm takımının $\left(x_n,y_n\right)\in\mathbb{Z}^2$ olduğunu gösterir.

Teorem 2.2. D tam kare olmayan bir tamsayı ve $\left(x_0,y_0\right)\in\mathbb{Z}^2$, $x^2-Dy^2=1$ denkleminin temel çözümü olsun. Bu takdirde genel Pell denkleminin diğer bütün çözümleri;

$$x_n = 1/2\left[\left(x_0+y_0\sqrt{D}\right)^n + \left(x_0-y_0\sqrt{D}\right)^n\right]$$

$$y_n = 1/2\sqrt{D}\left[\left(x_0+y_0\sqrt{D}\right)^n - \left(x_0-y_0\sqrt{D}\right)^n\right]$$

olmak üzere $\left(\pm x_n, \pm y_n\right)$ dir (Gelfond 1962).

İspat: Sonuç 2.2.'ye göre

$$\left(x_0 + y_0\sqrt{D}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{D}$$

$$\left(x_0 - y_0\sqrt{D}\right)^n = x_n - y_n\sqrt{D}$$

olduğunu biliyoruz.

Bu eşitlikler bir kere taraf tarafa toplanıp, bir kerede taraf tarafa çıkarılırsa;

$$x_n = 1/2\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{D}\right)^n + \left(x_0 - y_0\sqrt{D}\right)^n\right]$$

$$y_n = 1/2\sqrt{D}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{D}\right)^n - \left(x_0 - y_0\sqrt{D}\right)^n\right]$$

olduğunu görürüz.

Bu da bize teoremi ispatlar.

Örnek 2.1. $x^2 - 5y^2 = 1$ denkleminin temel çözümü (9,4) olup, bu denklemin diğer bütün pozitif çözümleri

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(9 + 4\sqrt{5}\right)^n + \left(9 - 4\sqrt{5}\right)^n\right]$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(9 + 4\sqrt{5}\right)^n - \left(9 - 4\sqrt{5}\right)^n\right]$$

formülleri ile verilir.

n = 1 için (9, 4) olur.

n = 2 için (161, 72)

n = 3 için (2889, 1292)

Not 2.1. $x^2 - Dy^2 = 1$ denkleminde olduğu gibi $x^2 - Dy^2 = -1$ denkleminin çözümleri, $\sqrt{D}$ nin yakınsayanları hesaplanmadan temel çözüm yardımıyla bulunabilir.

Yine $x^2 - Dy^2 = -1$ Pell denkleminin çözümlerine ilişkin Lagrange tarafından verilen aşağıdaki teoremin de önemi büyüktür.

Teorem 2.3. Eğer p, 4k + 1 biçiminde bir asal ise $x^2 - py^2 = -1$ denkleminin bir çözümü vardır. Başka bir deyişle özdeş olarak $\sqrt{p}$ nin sürekli kesir açılımının periyodu tektir.

3. BÖLÜM

3. $x^2-5y^2=\mp 1$ ve $x^2-py^2=1$ PELL DENKLEMLERİNİN GAUSS TAMSAYILARINDA ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

3.1. $x^2-5y^2=z^2$ Diophantine Denkleminin Gauss Tamsayılarında Çözümü

James T. Cross (1986) $x^2+y^2=z^2$ Diophantine denklemini sağlayan çözümleri araştırmış ve tamsayı çözümlerinden Gauss tamsayı çözümlerine geçiş üzerine çalışmalar yapmıştır.

Bizde bu bölümde bundan faydalanarak $x^2-5y^2=z^2$ Diophantine denkleminin çözümlerini elde ederek aynı zamanda Diophantine denklemi olan $x^2-5y^2=\mp 1$ ve $x^2-py^2=1$ Pell denklemlerinin Gauss tamsayılarında çözümlerini araştıracağız.

$x^2+y^2=z^2$ denklemi geometrik olarak dik kenarları ve hipotenüsü bilinen bütün dik üçgenlerin bulunması şeklindedir. Tamsayılarda (3, 4, 5) ve ona orantılı tamsayı üçlülerinin $x^2+y^2=z^2$ denklemini sağladığını biliyoruz.

$x^2-5y^2=z^2$ denklemi geometrik olarak buna benzer bir sınıflandırma yapamayız. Fakat tamsayı çözümleri üzerinde, (9, 4, 1) ve ona orantılı tamsayı üçlülerinin $x^2-5y^2=z^2$ denklemini sağladığını görebiliriz.

Şimdi $x^2-5y^2=z^2$ denkleminin tamsayılardaki çözümünü inceleyelim.

$$x^2-5y^2=z^2 \tag{3.1}$$

denklemini

$$5y^2=x^2-z^2$$

$$y^2 = x^2 - z^2/5$$

$$y^2 = \frac{(x-z).(x+z)}{5} \tag{3.2}$$

olarak yazabiliriz. Buna göre çarpanlar

ya

$$(x-z)/5 \quad , \quad (x+z) \tag{3.3}$$

ya da

$$(x-z) \quad , \quad (x+z)/5$$

olur.

İlk duruma göre

$$x - z/5 = 2n^2 \quad , \quad x + z = 2m^2$$

alınırsa

$$x - z = 10n^2 \quad , \quad x + z = 2m^2 \tag{3.4}$$

olur.

Bulunan bu değerler (3.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$y = 2mn$$

bulunur.

(3.4) eşitlikleri bir kere taraf tarafa toplanıp, bir kerede taraf tarafa çıkarılırsa

$$x = m^2 + 5n^2 \quad , \quad z = m^2 - 5n^2$$

elde edilir. böylece tamsayılardaki her ikiliyi yine tamsayılarda çözüm olan $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ üçlüsüne götürmüş oluruz.

Şimdi bir dönüşüm yardımıyla tamsayılardaki bu çözümü Gauss tamsayılarına taşımaya çalışalım.

A, bütün $m, n \in \mathbb{Z}[i]$ Gauss tamsayı ikilisi (m, n)'lerden oluşan cümle olsun. Yani

$$A = \{(m, n) | m, n \in \mathbb{Z}[i]\}$$

dir.

A* da, $m, n \in A$ olmak üzere bütün

$$f(m, n) = \left(m^2 + 5n^2,\ 2mn,\ \pm\left(m^2 - 5n^2\right)\right)$$

üçlülerinin cümlesi olsun.

A dan A* üzerine tanımlanan bu f dönüşümü (1-1) birebirdir.

A ve A*'ın oluşturuluşu gereği A daki her (m, n) ikilisine karşılık A*'da bir (x, y, z) üçlüsü bulunur.

A* daki her eleman için de A da bir (m, n) ikilisi vardır.

Böylece aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.1. Her $m, n \in \mathbb{Z}[i]$ için f dönüşümü altındaki Gauss üçlüleri; $x^2 - 5y^2 = z^2$ denkleminin birer çözümleridir.

İspat: Her $(m, n) \in A$ ikilisinin $x^2 - 5y^2 = z^2$ denklemini sağladığını gösterelim.

$$m = a + ib \quad , \quad n = c + id$$

olsun. Bu durumda

$$f(m, n) = f(a + ib, c + id)$$

$$= \left[(a + ib)^2 + 5(c + id)^2, 2(a + ib)(c + id), (a + ib)^2 - 5(c + id)^2\right]$$

$$x = (a + ib)^2 + 5(c + id)^2 = a^2 - b^2 + 5c^2 - 5d^2 + 2abi + 10cdi$$

$$y = 2(a + ib)(c + id) = 2ac - 2bd + 2adi + 2bci$$

$$z=(a+ib)^2-5(c+id)^2=a^2-b^2-5c^2+5d^2+2abi-10cdi$$

$$f(m,n)=(x,y,z)$$

bulunur.

Şimdi (x,y,z) Gauss üçlüsünü $x^2-5y^2=z^2$ denkleminde yerine yazarsak;

$$\left(a^2-b^2+5c^2-5d^2+2abi+10cdi\right)^2-5\left(2ac-2bd+2adi+2bci\right)^2=$$

$$\left(a^2-b^2-5c^2+5d^2+2abi-10cdi\right)^2$$

açılımları yapılıp, gerekli sadeleştirmelerden sonra eşitliğin sol yanı;

$$\left(a^4+b^4+25c^4+25d^4-6a^2b^2-10a^2c^2+10a^2d^2+10b^2c^2-10b^2d^2-150c^2d^2+40abcd\right)$$
$$+i\left(4a^3b-4ab^3-20a^2cd+20b^2cd-20adc^2+20abd^2+100c^3d-100cd^3\right)$$

eşitliğin sağ yanı;

$$\left(a^4+b^4+25c^4+25d^4-6a^2b^2-10a^2c^2+10a^2d^2+10b^2c^2-10b^2d^2-150c^2d^2+40abcd\right)$$
$$+i\left(4a^3b-4ab^3-20a^2cd+20b^2cd-20adc^2+20abd^2+100c^3d-100cd^3\right)$$

olarak bulunur. İki Gauss tamsayısının eşitliğinden reel kısımların ve imajiner kısımların karşılıklı birbirine eşit oldukları görülür. A'nın her elemanı f dönüşümü altında $x^2-5y^2=z^2$ denkleminin bir çözümüne dönüşür. Buradan A*'ın her elemanı $x^2-5y^2=z^2$ denkleminin bir çözümü olduğu sonucuna varabiliriz.

Teoremi bir örnekle elemanter olarak görelim.

Örnek 3.1.

$m=1+2i$, $n=3i$ olmak üzere (m,n) ikilisinin f altındaki görüntüsü

$$f(1+2i,3i)=\left[(1+2i)^2+5(3i)^2,2(1+2i)(3i),(1+2i)^2-5(3i)^2\right]$$

$x=(1+2i)^2+5(3i)^2=-48+4i$

$y=2(1+2i)(3i)=-12+6i$

$z=(1+2i)^2-5(3i)^2=42+4i$

$f(1+2i,3i)=(-48+4i,\ -12+6i,\ 42+4i)=(x,y,z)$

Üçlüsünü (3.1) denkleminde yerine yazarsak

$$(-48+4i)^2-5(-12+6i)^2=(42+4i)^2$$

$$1748+336i=1748+336i$$

eşitliği görülür.

3.2. $x^2-5y^2=1$ Pell Denkleminin Gauss Tamsayılarında Çözümü

Her $m,n\in\mathbb{Z}[i]$ için

$f(m,n)=(x,y,z)=(m^2+5n^2,\ 2mn,\ m^2-5n^2)$ üçlüsünün $x^2-5y^2=z^2$ denkleminin bir çözümü olduğunu biliyoruz.

$z^2=1$ $(z=\mp1)$ aldığımızda $m^2-5n^2=1$ olduğu görülür. Bu durumda problemimiz $m^2-5n^2=1$ eşitliğini sağlayan $m,n\in\mathbb{Z}[i]$ tamsayılarını bulma problemine dönüşür.

$m=a+ib$, $n=c+id\in\mathbb{Z}[i]$ elemanları alıp $x^2-5y^2=1$ denkleminde yerine yazarsak,

$$(a+ib)^2-5(c+id)^2=1$$

$$a^2+2abi-b^2-5(c^2+2cdi-d^2)=1$$

$$a^2 + 2abi - b^2 - 5c^2 - 10cdi + 5d^2 = 1$$

$$\left(a^2 - b^2 - 5c^2 + 5d^2\right) + i\left(2ab - 10cd\right) = 1 + 0i$$

olur.

İki Gauss tamsayısının eşitliğinden

$$2ab - 10cd = 0 \tag{3.5}$$

ve

$$a^2 + 5d^2 - b^2 - 5c^2 = 1 \tag{3.6}$$

olduğu görülür. (3.5) eşitliğinden

$$a = \frac{5cd}{b}$$

olur. a'yı (3.6)'da yerine yazarsak;

$$\frac{25c^2d^2}{b^2} + 5d^2 - b^2 - 5c^2 = 1$$

bulunup, gerekli düzenleme yapılırsa

$$\left(b^2 + 5c^2\right)\left(5d^2 - b^2\right) = b^2 \tag{3.7}$$

olduğu görülür. (3.7)'deki aralarında asal çarpanları irdelersek

1) $b^2 + 5c^2 = 1$ ve $5d^2 - b^2 = b^2$

2) $b^2 + 5c^2 = b^2$ ve $5d^2 - b^2 = 1$

olması durumları ile karşı karşıya kalırız.

1'inci durumda $b^2 + 5c^2 = 1$ eşitliği ancak ve ancak b = 1 c = 0 durumunda gerçekleşir. $5d^2 - b^2 = b^2$ eşitliğinde b = 1 değerini yazdığımızda $d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ elde edilir ki $d \notin \mathbb{Z}$ olduğundan bu imkansızdır.

2'inci durumda $b^2+5c^2=b^2$ eşitliğinde c = 0 olduğu aşikârdır. $5d^2-b^2=1$ eşitliğinin de her iki tarafını (-1) ile çarparsak, $b^2-5d^2=-1$ pell denklemini elde ederiz. Bu Pell denkleminin tam sayılardaki en küçük çözümü $(2,1)\in\mathbb{Z}^2$ (Bkz. Tablo 2.1.) olduğundan b = 2 ve d = 1 dir.

$a=5cd/b$ eşitliğinde b, c ve d tamsayılarını yerine koyduğumuzda a = 0 olarak buluruz.

Şimdi bulduğumuz a = 0, b = 2, c = 0 ve d = 1 değerlerini $m=a+ib$, $n=c+id$ 'de yerine yazarsak $m=2i$ ve $n=i$ olduğunu görürüz.

Bu $(m,n)=(2i,i)$ ikilisini $x^2-5y^2=1$ denkleminde yerine yazarsak,

$$(2i)^2-5(i)^2=1$$

$$-4+5=1$$

$$1=1$$

eşitliğini elde ederiz.

Böylece $(m,n)=(x_0,y_0)$ olarak adlandırdığımızda yukarıda yapılan irdelemeler aşağıdaki teoremin bir ispatıdır.

Teorem 3.2. $x^2-5y^2=1$ Pell denkleminin Gauss tamsayılarında en küçük çözümü $(x_0,y_0)=(2i,i)$ ikilisidir.

Sonuç 3.1.

$(x_0,y_0)=(2i,i)$ $x^2-5y^2=1$ Pell denkleminin temel çözümü olmak üzere; Gauss tamsayılarındaki diğer bütün çözümler her $n\in N$ için;

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{5}\right)^n + \left(x_0 - y_0\sqrt{5}\right)^n\right]$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{5}\right)^n - \left(x_0 - y_0\sqrt{5}\right)^n\right]$$

formülleriyle verilir.

İspat: İspatı n üzerinde indüksiyonla yapalım.

n = 1 için

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[\left(2i + i\sqrt{5}\right)^1 + \left(2i - i\sqrt{5}\right)^1\right]$$

$$= 2i$$

$$y_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(2i + i\sqrt{5}\right)^1 - \left(2i - i\sqrt{5}\right)^1\right]$$

$$= i$$

olup $(x_1, y_1) = (2i, i) = (x_0, y_0)$ olur ki, bu denklemi sağlar.

n = 2 için

$$x_2 = \frac{1}{2}\left[\left(2i + i\sqrt{5}\right)^2 + \left(2i - i\sqrt{5}\right)^2\right]$$

$$= -9$$

$$y_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(2i + i\sqrt{5}\right)^2 - \left(2i - i\sqrt{5}\right)^2\right]$$

$$= -4$$

olup $(x_2, y_2) = (-9, -4)$ bulunur. Bunu denklemde yerine yazarsak

$$x^2 - 5y^2 = 1$$

$$(-9)^2 - 5(-4)^2 = 1$$

$$81-80=1$$

$$1=1$$

eşitliğinin sağlandığını görürüz. Daha iyi karar verebilmek için n = 3 içinde denklemin doğruluğunu gösterelim.

n = 3 için

$$x_3=\frac{1}{2}\left[\left(2i+i\sqrt{5}\right)^3+\left(2i-i\sqrt{5}\right)^3\right]$$

$$=-38i$$

$$y_3=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(2i+i\sqrt{5}\right)^3-\left(2i-i\sqrt{5}\right)^3\right]$$

$$=-17i$$

olup $\left(x_3,y_3\right)=\left(-38i,-17i\right)$ ikilisini denklemde yerine yazarsak,

$$\left(-38i\right)^2-5\left(-17i\right)^2=1$$

$$-1444+1445=1$$

$$1=1$$

olup, bu da bize $\left(x_3,y_3\right)$ ikilisinin denklemi sağladığını gösterir.

n = n – 1 için iddianın doğruluğunu kabul edip

n = n için ispat edelim. Kabulümüz gereği $\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)$ ikilisi denklemi sağlar. Yani

$$\left(x_{n-1}\right)^2-5\left(y_{n-1}\right)^2=1 \tag{3.8}$$

dir. Bu eşitliği;

$x_1^2-5y_1^2=x_0^2-5y_0^2=1$ ile taraf tarafa çarparsak

$$\left(x_{n-1}^2-5y_{n-1}^2\right).\left(x_0^2-5y_0^2\right)=1 \tag{3.9}$$

halini alır. Bütün çözümler temel çözümden elde edildiği için

$$x_{n-1}^2 - 5y_{n-1}^2 = \left(x_0^2 - 5y_0^2\right)^{n-1} \tag{3.10}$$

alabiliriz. (3.10) ifadesini (3.9) da yerine yazarsak

$$\left(x_{n-1}^2 - 5y_{n-1}^2\right).\left(x_0^2 - 5y_0^2\right) = 1$$

$$\left(x_0^2 - 5y_0^2\right)^{n-1}.\left(x_0^2 - 5y_0^2\right) = 1$$

$$\left(x_0^2 - 5y_0^2\right)^{n} = 1$$

elde edilir ki bu da bize,

$$x_n^2 - 5y_n^2 = 1$$

olduğunu gösterir. Her $n \in N$ için teoremin hipotezi doğrudur.

3.3. $x^2 - 5y^2 = -1$ Pell Denkleminin Gauss Tamsayılarında Çözümü

Her $m, n \in \mathbb{Z}[i]$ için

$f(m,n) = (x,y,z) = \left(m^2 + 5n^2,\ 2mn,\ m^2 - 5n^2\right)$ üçlüsünün $x^2 - 5y^2 = z^2$ denkleminin bir çözümü olduğunu önceki bölümümüzden biliyoruz.

$z = \pm i$ aldığımızda $z^2 = -1$ ve $m^2 - 5n^2 = -1$ olduğu görülür. Buna göre $m^2 - 5n^2 = -1$ eşitliğini sağlayan $m, n \in \mathbb{Z}[i]$ Gauss tamsayılarını bulmaya çalışalım.

$m = a + ib$, $n = c + id \in \mathbb{Z}[i]$ elemanları alıp $x^2 - 5y^2 = -1$ denkleminde yerine koyalım.

$$(a+ib)^2 - 5(c+id)^2 = -1$$

$$a^2 + 2abi - b^2 - 5c^2 - 10cdi + 5d^2 = -1$$

$$\left(a^2+5d^2-b^2-5c^2\right)+i\left(2ab-10cd\right)=-1+0i$$

olur.

İki Gauss tamsayısının eşitliğinden

$$2ab-10cd=0 \tag{3.11}$$

ve

$$a^2+5d^2-b^2-5c^2=-1 \tag{3.12}$$

olduğu görülür. (3.11) eşitliğinden

$$a=\frac{5cd}{b}$$

olur. a'yı (3.12)'de yerine yazarsak;

$$\frac{25c^2d^2}{b^2}+5d^2-b^2-5c^2=-1$$

bulunup, gerekli düzenleme yapılırsa

$$\left(b^2+5c^2\right)\left(5d^2-b^2\right)=-b^2 \tag{3.13}$$

olduğu görülür. (3.13)'deki aralarında asal çarpanları incelersek

1) $b^2+5c^2=-1$ ve $5d^2-b^2=b^2$

2) $b^2+5c^2=b^2$ ve $5d^2-b^2=-1$

olması durumları ile karşılaşırız.

1'inci durumda $b^2+5c^2=-1$ olması $b,c\in\mathbb{Z}$ olduğundan imkansızdır.

2'inci durumda $b^2+5c^2=b^2$ eşitliğinde c = 0 olduğu aşikârdır. $5d^2-b^2=-1$ eşitliğinin de her iki tarafını (-1) ile çarparsak, $b^2-5d^2=1$ pell denklemini elde ederiz. Bu Pell denkleminin tam sayılardaki temel çözümü $\left(9,4\right)\in\mathbb{Z}^2$ (Bkz. Tablo 2.1.) olduğundan b = 9 ve d = 4 tür.

$a = 5cd/b$ eşitliğinde b, c ve d tamsayılarını yerine koyduğumuzda a = 0 olduğu görülür.

Bulduğumuz a = 0, b = 9, c = 0 ve d = 4 değerlerini $m = a + ib$, $n = c + id$ 'de yerine yazarsak $m = 9i$ ve $n = 4i$ olduğunu görürüz.

Bu $(m,n) = (9i,4i)$ ikilisini $x^2 - 5y^2 = -1$ denkleminde yerine yazarsak,

$$(9i)^2 - 5(4i)^2 = -1$$

$$-81 + 80 = -1$$

$$-1 = -1$$

eşitliğini elde ederiz.

Yukarıda yaptığımız incelemeler aşağıdaki teoremin bir ispatıdır.

Teorem 3.3. $x^2 - 5y^2 = -1$ Pell denkleminin Gauss tamsayılarında temel çözümü $(x_0, y_0) = (9i, 4i)$ ikilisidir.

Sonuç 3.2.

$(x_0, y_0) = (9i, 4i)$ $x^2 - 5y^2 = -1$ Pell denkleminin temel çözümü olmak üzere; Gauss tamsayılarındaki diğer bütün çözümler her n tek doğal sayısı için;

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{5}\right)^n + \left(x_0 - y_0\sqrt{5}\right)^n\right]$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{5}\right)^n - \left(x_0 - y_0\sqrt{5}\right)^n\right]$$

formülleriyle verilir.

İspat: İspatı n üzerinde indüksiyonla yapalım.

n = 1 için

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[\left(9i+4i\sqrt{5}\right)^1 + \left(9i-4i\sqrt{5}\right)^1\right]$$

$$= 9i$$

$$y_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(9i+4i\sqrt{5}\right)^1 - \left(9i-4i\sqrt{5}\right)^1\right]$$

$$= 4i$$

olup $(x_1, y_1) = (x_0, y_0) = (9i, 4i)$ temel çözüm olup, denklemi sağlar.

n = 3 için

$$x_3 = \frac{1}{2}\left[\left(9i+4i\sqrt{5}\right)^3 + \left(9i-4i\sqrt{5}\right)^3\right]$$

$$= -2889i$$

$$y_3 = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(9i+4i\sqrt{5}\right)^3 - \left(9i-4i\sqrt{5}\right)^3\right]$$

$$= -1292i$$

olup $(x_3, y_3) = (-2889i, -1292i)$ bulunur. Bunu denklemde yerine yazarsak

$$x^2 - 5y^2 = -1$$

$$(-2889i)^2 - 5(-1292i)^2 = -1$$

$$-8346321 + 8346320 = -1$$

$$-1 = -1$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

Şimdi $n = n-2$ için iddianın doğruluğunu kabul edip, $n = n$ için ispat edelim. Kabulümüz gereği (x_{n-2}, y_{n-2}) ikilisi denklemi sağlar. Yani,

$$\left(x_{n-2}\right)^2-5\left(y_{n-2}\right)^2=-1 \tag{3.14}$$

dir. Bu eşitliği;

$\left(x_0^2-5y_0^2\right)^2=1$ ile taraf tarafa çarparsak

$$\left(x_{n-2}^2-5y_{n-2}^2\right).\left(x_0^2-5y_0^2\right)^2=-1 \tag{3.15}$$

şeklini alır. Bütün çözümler temel çözümden elde edildiği için

$$x_{n-2}^2-5y_{n-2}^2=\left(x_0^2-5y_0^2\right)^{n-2} \tag{3.16}$$

almakta bir sakınca yoktur. (3.16) ifadesini (3.15) de yerine yazarsak

$$\left(x_{n-2}^2-5y_{n-2}^2\right).\left(x_0^2-5y_0^2\right)^2=-1$$

$$\left(x_0^2-5y_0^2\right)^{n-2}.\left(x_0^2-5y_0^2\right)^2=-1$$

$$\left(x_0^2-5y_0^2\right)^{n}=-1$$

elde edilir ki bu da bize,

$$x_n^2-5y_n^2=-1$$

olduğunu gösterir. Her n tek doğal sayısı için teorem ispatlanmış olur.

3.4. $x^2-py^2=1$ Pell Denkleminin Gauss Tamsayılarında Çözümü (p, 4k + 1 Biçiminde Bir Asal Sayıdır.)

Bu bölümde daha genel bir Pell Denklemi olan $x^2-py^2=1$ (p 4k + 1 biçiminde bir asal sayı) Pell Denkleminin Gauss tamsayılarında çözümlerini inceleyeceğiz.

Bölüm 3.1'den hareketle; her $m, n \in \mathbb{Z}[i]$ için ve p 4k + 1 biçiminde bir asal sayı olmak üzere

$$f(m,n) = (x,y,z) = \left(m^2 + pn^2, 2mn, m^2 - pn^2\right)$$

üçlüsünün $x^2 - py^2 = z^2$ denkleminin bir çözümü olacağını söyleyebiliriz.

$z^2 = 1$ $(z = \pm 1)$ aldığımızda $m^2 - pn^2 = 1$ olduğu görülür. Şimdi $m^2 - pn^2 = 1$ eşitliğini sağlayan $m, n \in \mathbb{Z}[i]$ tamsayılarını bulmaya çalışalım.

$m = a + ib$, $n = c + id \in \mathbb{Z}[i]$ elemanlarını $x^2 - py^2 = 1$ denkleminde yerine yazarsak,

$$(a+ib)^2 - p(c+id)^2 = 1$$

$$a^2 + 2abi - b^2 - p\left(c^2 + 2cdi - d^2\right) = 1$$

$$a^2 + 2abi - b^2 - pc^2 - 2pcdi + pd^2 = 1$$

$$\left(a^2 + pd^2 - b^2 - pc^2\right) + i(2ab - 2pcd) = 1 + 0i$$

olur.

İki Gauss tamsayısının eşitliğinden

$$2ab - 2pcd = 0 \tag{3.17}$$

ve

$$a^2 + pd^2 - b^2 - pc^2 = 1 \tag{3.18}$$

olduğu görülür. (3.17) eşitliğinden

$$a = \frac{pcd}{b}$$

olur. a'yı (3.18)'de yerine yazarsak;

$$\frac{p^2c^2d^2}{b^2}+pd^2-b^2-pc^2=1$$

bulunup, gerekli düzenleme yapılırsa

$$\left(b^2+pc^2\right)\left(pd^2-b^2\right)=b^2$$

$$\left(b^2+pc^2\right)\left(b^2-pd^2\right)=-b^2 \tag{3.19}$$

olduğu görülür. (3.19)'daki aralarında asal çarpanları irdelersek

1) $b^2+pc^2=-1$ ve $b^2-pd^2=b^2$

2) $b^2+pc^2=b^2$ ve $b^2-pd^2=-1$

olması durumları ile karşılaşırız.

1'inci durumda $b^2+pc^2=-1$ olması $b,c\in\mathbb{Z}$ olduğundan imkansızdır.

2'inci durumda $b^2+pc^2=b^2$ eşitliğinde c = 0 olacağı açıktır. $b^2-pd^2=-1$ Pell denkleminin, p 4k + 1 şeklinde bir asal sayı olduğundan teorem 2.3.'e göre $\left(r,s\right)\in\mathbb{Z}^2$ gibi bir temel çözümü bulunur. Bu taktirde b = r ve d = s dir.

$a=pcd/b$ eşitliğinde b, c ve d tamsayılarını yerine koyduğumuzda a = 0 olduğu görülür.

Bulduğumuz a = 0, b = r, c = 0 ve d = s değerlerini $m=a+ib,\ \ n=c+id$'de yerine yazarsak $m=ri$ ve $n=si$ olduğunu görürüz.

Yukarıda yaptığımız bu irdelemeler aşağıdaki teoremin bir ispatıdır.

Teorem 3.4. p, 4k + 1 biçiminde bir asal sayı olmak üzere $x^2-py^2=1$ Pell denkleminin Gauss tamsayılarında temel çözümü $\left(x_0,y_0\right)=\left(ri,si\right)$ ikilisidir.

Sonuç 3.3. $\left(x_0, y_0\right)=\left(ri, si\right)$ $x^2-py^2=1$ Pell denkleminin temel çözümü olmak üzere; Gauss tamsayılarındaki diğer bütün çözümler her $n \in N$ için;

$$x_n=\frac{1}{2}\left[\left(x_0+y_0\sqrt{p}\right)^n+\left(x_0-y_0\sqrt{p}\right)^n\right]$$

$$y_n=\frac{1}{2\sqrt{p}}\left[\left(x_0+y_0\sqrt{p}\right)^n-\left(x_0-y_0\sqrt{p}\right)^n\right]$$

formülleriyle verilir.

İspat: İspatı n üzerinde indüksiyonla yapalım.

n = 1 için

$$x_1=\frac{1}{2}\left[\left(ri+si\sqrt{p}\right)^1+\left(ri-si\sqrt{p}\right)^1\right]$$

$$=ri$$

$$y_1=\frac{1}{2\sqrt{p}}\left[\left(ri+si\sqrt{p}\right)^1-\left(ri-si\sqrt{p}\right)^1\right]$$

$$=si$$

olup $\left(x_1, y_1\right)=\left(ri, si\right)=\left(x_0, y_0\right)$ olur ki, bu denklemi sağlar.

n = 2 için

$$x_2=\frac{1}{2}\left[\left(ri+si\sqrt{p}\right)^2+\left(ri-si\sqrt{p}\right)^2\right]$$

$$=-r^2-ps^2$$

$$y_2=\frac{1}{2\sqrt{p}}\left[\left(ri+si\sqrt{p}\right)^2-\left(ri-si\sqrt{p}\right)^2\right]$$

$$=-2rs$$

olup $\left(x_2, y_2\right)=\left(-r^2-ps^2, -2rs\right)$ bulunur. Bunu denklemde yerine yazarsak

$$x^2 - py^2 = 1$$

$$\left(-r^2 - ps^2\right)^2 - p\left(-2rs\right)^2 = 1$$

$$r^4 + 2pr^2s^2 + p^2s^4 - 4pr^2s^2 = 1$$

$$r^4 - 2pr^2s^2 + p^2s^4 = 1$$

$$\left(-r^2 + ps^2\right)^2 = 1 \quad \left(-r^2 + ps^2 = 1 \text{ temel çözüm}\right)$$

$$1^2 = 1$$

$$1 = 1$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Yani $\left(x_2, y_2\right)$ denklemi sağlar.

$n = n - 1$ için iddianın doğruluğunu kabul edip,

$n = n$ için ispat edelim. Kabulümüz gereği $\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right)$ ikilisi denklemi sağlar. Yani

$$\left(x_{n-1}\right)^2 - p\left(y_{n-1}\right)^2 = 1 \tag{3.20}$$

dir. Bu eşitliği;

$x_0^2 - py_0^2 = 1$ ile taraf tarafa çarparsak

$$\left(x_{n-1}^2 - py_{n-1}^2\right).\left(x_0^2 - py_0^2\right) = 1 \tag{3.21}$$

olur. Bütün çözümler temel çözümden elde edildiği için

$$x_{n-1}^2 - py_{n-1}^2 = \left(x_0^2 - py_0^2\right)^{n-1} \tag{3.22}$$

alabiliriz. (3.22) ifadesini (3.21) de yerine yazarsak

$$\left(x_0^2 - py_0^2\right)^{n-1}.\left(x_0^2 - py_0^2\right) = 1$$

$$\left(x_0^2 - py_0^2\right)^n = 1$$

elde edilir ki bu da bize,

$$x_n^2 - py_n^2 = 1$$

olduğunu gösterir. Böylece her $n \in N$ için teoremi ispatlamış oluruz.

KAYNAKLAR

[1] CROSS, James T., 1986, Primitive Pythagoren Triples of Gaussian Integers. Mathematics Magazine, Vol 59, pp. 106-110.

[2] ÇALLIALP, F., 1999, Sayılar Teorisi, Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi, İstanbul.

[3] FLANDERS, H., 1985, A Tale of Two Squares and Two Rings, Mathematics Magazine, Vol 58, pp.3-11.

[4] GELFOND, A.O., Diophantine Denklemler, Çeviri: Orhan İçen, 1962, Türk Matematik Derneği Yayınları.

[5] IRELAND, K., ROSEN, M. 1990, A Classical Introduction to Modern Number Theory, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.

[6] ŞENAY, Hasan, 2007, Sayılar Teorisi Dersleri, Dizgi Ofset Matbaacılık, Konya.

[7] YAVUZ, Üzeyir, 1991, $x^2-2y^2=1$ Pell Denkleminin Gauss Tamsayılarında Çözümü Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.