KONİK KONVEKS METRİK UZAYLARDA DÜZGÜN QUASI LIPSCHITZIAN DÖNÜŞÜM SINIFLARI İÇİN İTERASYON ŞEMASI

Gamze ÖZKAN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı
Dr. Öğr. Üyesi Süheyla ELMAS
2020

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KONİK KONVEKS METRİK UZAYLARDA DÜZGÜN QUASI LIPSCHITZIAN DÖNÜŞÜM SINIFLARI İÇİN İTERASYON ŞEMASI

Gamze ÖZKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

ERZURUM
2020

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

TEZ ONAY FORMU

KONİK KONVEKS METRİK UZAYLARDA DÜZGÜN QUASI LIPSCHITZIAN DÖNÜŞÜM SINIFLARI İÇİN İTERASYON ŞEMASI

Dr. Öğrt. Üyesi Süheyla ELMAS danışmanlığında, Gamze ÖZKAN tarafından hazırlanan bu çalışma, tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak **oybirliği/~~oy çokluğu~~(..../....)** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Halit Orhan İmza :

Üye : Prof. Dr. Seyfullah Hızarcı İmza :

Üye : Dr. Öğrt. Üyesi Süheyla Elmas İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu'nun 30.01./2020 tarih ve ...05.../...46..... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet KARAKAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONİK KONVEKS METRİK UZAYLARDA DÜZGÜN QUASI LIPSCHITZIAN DÖNÜŞÜM SINIFLARI İÇİN İTERASYON ŞEMASI

Gamze ÖZKAN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Süheyla ELMAS

Yapılan bu çalışmada ilk önce konveks metrik ve konik konveks metrik uzaylar tanıtıldı. Konik konveks metrik uzayda yapılan bazı sabit nokta teoremlerine yer verildi. Son olarak bazı dönüşüm sınıfları için üç adım iterasyonunun, konik konveks metrik uzayda yakınsaması üzerine çalışmalardan bahsedildi.

2019, 79 sayfa

Anahtar Kelimeler: Konik konveks metrik uzay, sabit nokta, üç adım iterasyonu

ABSTRACT

MS Thesis

THE ITERATION METHOD FOR CLASS OF UNIFORMLY QUASI-LIPSCHITZIAN MAPPINGS IN CONE CONVEX METRIC SPACES

Gamze ÖZKAN

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Analysis and Theory of Functions
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Süheyla ELMAS

In this study, first of all convex metric spaces are presented. Some fixed point theorems in cone convex metric space are given. Lastly convergence of three-step iteration method for some class of mappings in cone convex metric spaces have been denoted.

2019, 79 pages

Keywords: Cone convex metric space, Fixed point, Three step iteration

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanma sürecinde yardımcı olan danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Süheyla ELMAS'a en içten dileklerimle teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayrıca, bana maddi manevi her türlü desteğini veren anneme, babama ve kardeşime teşekkür ederim.

Gamze ÖZKAN
Ocak, 2020

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\|\ \ \|_C$	Konik Norm
$\|\ \ \|$	Norm
$(X\ , d, W)$	Konveks metrik uzay
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
P	Konik
$x \leq y$	$y - x \in P$

1. GİRİŞ

Düşünen insan, önce yapacağı işe göre ortamı hazırlamak zorundadır. Çünkü yapacağı işe göre ortamı hazırlamak zorundadır. Çünkü iş ne olursa olsun; o iş belli bir mekânda veya belli bir yapıya sahip ortamda yapılır. Matematikçi de matematiksel olarak yapacağı işler için genel olarak uzay diye adlandırılan kümenin üzerinde hangi yapılara ihtiyaç duyacağını belirleyerek işe başlar. Boştan farklı bir küme üzerine birden çok matematiksel yapılar konulabilir. Bunlara topolojik, cebirsel, cebirsel-topoloji ve konvekslik gibi yapılar örnek verilebilir. Bir küme üzerinde dört işlem yapılacaksa, kümenin cebirsel yapı olarak cisim olması gerekir. Eğer küme üzerinde tanımlanan herhangi bir fonksiyonun limiti, sürekliliği ve türevi veya tanımlanan bir dizinin yakınsaklığı incelenecekse, kümenin metrik veya topolojik uzay olma özelliğine sahip olup olmadığına bakılır. Bazı durumlarda kümenin aynı anda birden fazla yapıya sahip olması gerekir. Örneğin, bir serinin yakınsaklığı incelenirken cebirsel özelliklerin yanında kümenin herhangi iki elemanının arasındaki uzaklığının bilinmesine ihtiyaç vardır. Bu da bizi klasik analizde metrik diye adlandırılan kavrama götürür.

Metrik uzay, dizilerin yakınsaklığı ve fonksiyonların sürekliliği gibi temel analiz kavramları incelemek için ortaya çıkan soyut bir kavramdır. Bu nedenle analiz ve geometride olduğu gibi matematiğin birçok dalında soyut bir kümenin elemanları için bir uzaklık kavramına ihtiyaç duyulmuş ve bunun için gerekli araç bir uzaklık fonksiyonu veya "metrik"tir.19.ncu yüzyıl boyunca yavaş yavaş ulaşılan fikir ve metotlara 1900 ve 1910 yılları arasında ani olarak açıklık getirildi. Bu, temel olarak dört önemli yayının ortaya çıkışıyla oldu.

1. İntegral denklemler üzerine Frendholm'un 1900 yılındaki yayını
2. Lebesque'nin integrasyon üzerine olan 1902 yılındaki tezi
3. Spektral tezi üzerine Hilbert'in 1906 yılındaki yayını
4. Frechet'in metrik uzaylar üzerine olan 1906 yılındaki tezi

Tarihsel olarak sabit nokta teorisi Brouwer ile başlandığı bilinse de Analizde önemli olan sabit nokta teorisi 19.ncu yüzyılın son döneminde diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan yaklaşım yöntemlerine dayanmaktadır. Burada kullanılan yaklaşım yöntemleri Liouville (1836) Cauchy (1884), Peano (1885-1886-1889), Lipschitz (1877) ve Picard (1890) olarak söylenir.

Sabit nokta çalışmaları üç ayrı başlıkta toplanabilir.

1. Topolojik sabit nokta teorisi
2. Metrik sabit nokta teorisi
   a. Tek değerli fonksiyonlar için sabit nokta teorisi
   b. Çoğul değerli fonksiyonlar için sabit nokta teorisi

3. Ayrık sabit nokta teorisi

Bunların ortaya çıkış teoremleri sırasıyla

1. Brouwer
2. Banach
3. Tarski

olarak verilebilir.

Sabit nokta teorisi matematiğin potansiyel teori, yaklaşım teorisi, lineer olmayan fonksiyonel analiz, diferansiyel denklemler, fonksiyonel analiz, genel topoloji potansiyel teori ve oyun teorisi gibi birçok alanında uygulamaları vardır. Bunların dışında mühendislik ve istatistik gibi alanlarda uygulamaları vardır.

Sabit nokta üzerine yapılan çalışmalardan sonra sabit nokta teorisi üzerine çalışılabilecek başka bir uzayın olup olmadığı sorusu soruldu.

Ardından Zhang ve Huang sabit nokta için metrik uzayların tamamen yeterli olmadığını ve metrik uzaydan başka bir uzayın olabileceğini gördüler. Bu uzaya ise konik metrik uzay adını verdiler.

Bu tezde ise metrik uzay, sabit nokta ilgili teoremleri, konik metrik uzayın bazı temel özellikleri, konik metrik uzayda bazı sabit nokta teoremleri bunların ispatı ve konveks konik metrik uzayda tanımlanan iterasyon dizisinin konik konveks metrik uzayda yazmaya çalışıp yakınsaması üzerinde durulacaktır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Aşağıdaki tanımda bir uzaklık fonksiyonunun temel özellikleri listelenmiştir.

Tanım 2.1.1 Bir X kümesi üzerinde tanımlı bir **metrik** $\forall\ x, y, z \in \mathrm{X}$ için

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ **(simetri özelliği)**
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ **(üçgen eşitsizliği)**

özelliklerini sağlayan bir $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonudur. Eğer d, X üzerinde bir metrik ise o zaman (X, d) çiftine bir **metrik uzay** denir. Verilen herhangi bir X kümesi (X kümesi bir elemanlı bir küme olmadıkça) birden çok metriğe sahip olabilir. Genel olarak hangi metriğin kullanıldığı açık olarak biliniyorsa "$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d})$ **metrik uzayı**" yerine "$\boldsymbol{X}$ **metrik uzayı**" yazılır.

1.Aksiyom bir noktanın diğer bir noktaya uzaklığının negatif olamayacağını,2.aksiyom bir noktanın kendisine olan uzaklığının sıfır olduğunu,3.aksiyom ise x noktasının y ye uzaklığı,y nin x e uzaklığına eşit olduğunu ifade eder. Üçgen eşitsizliği olarak bilinen 4.aksiyom düzlemde aynı doğru üzerinde olmayan üç farklı nokta bir üçgen oluşturduğunu ve bu üçgende iki kenarın uzunlukları toplamı, üçüncü kenarın uzunluğundan daima büyük olduğunu ifade eder. Eğer noktalar aynı doğru üzerinde ise

$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$$

olur. Metrik aksiyomları birbirinden bağımsız değildir. Şöyle ki;

$$d(x,z) = d(x,y) + d(y,z) \Longrightarrow 0 = d(x,x) \leq d(x,z) = d(x,y) + d(y,z) = 2d(x,y)$$

$$\Longrightarrow d(x,y) \geq 0$$

(4.aksiyoma önce 2. aksiyomu sonrada 3. aksiyomu uygulayarak 1. aksiyomu elde edilir.)

2.1.2. Örnek:

- $\mathbb{R}$ üzerinde her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\mathrm{d}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathrm{d}(x,y) = |x-y|$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonunun metrik şartlarını sağladığı açıktır. Bu metriğe reel sayıların(reel doğrunun) **mutlak değer** ya da **alışılmış metriği** denir.
- Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y) = (x-y)^2$ biçiminde tanımlanan dönüşümü metriğin ilk iki aksiyomunun sağlanacağı açıktır. Fakat bu dönüşüm üçgen eşitsizliğini sağlamaz. Doğrudan da $x = 3, y = 5$ ve $z = 4$ sayıları için

$$d(x,y) = 4 > 1 + 1 = d(x,z) + d(z,y)$$

4.aksiyomu sağlamadığı görülür. Buna göre dönüşüm bir metrik değildir.

- $\mathrm{X} \neq \emptyset$ Herhangi bir küme ve $\forall x, y \in X$ için

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases} \tag{1.1}$$

şekilde tanımlanan $d: X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü için metriğin birinci ve ikinci aksiyomlarının sağlandığı (1) tanımından açıktır. Metriğin üçüncü aksiyomunun sağlandığını gösterelim. Her $x, y, z \in X$ için

1. $x = y, z \neq x$ (1) tanımından $0 < 1 + 1$ olduğundan

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

olur.

2. $z = y, z \neq x$ ise 1.ye benzer olarak

$$d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,y) = d(x,z) + d(z,y)$$

elde edilir.

3. $z = x, y \neq z$ ise yine $d(x,y) \leq d(x,x) + d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$ olduğu elde edilir.

Dolayısıyla, $x, y, z \in X$ vektörlerinden herhangi ikisinin eşit olması durumunda metriğin üçüncü aksiyomunun sağlandığını görürüz. $x, y, z \in X$ noktalarının üçünün de farklı olması durumunda üçüncü aksiyomun olacağı açıktır.

2.1.3. Tanım: $f\colon (\mathrm{X}, d) \to (Y, d')$ fonksiyonunun $\boldsymbol{x_0}$ **noktasında sürekli** olması için gerek ve yeter şart

$$d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow d'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

olacak şekilde x_0 noktasına ve ε sayısına bağlı bir $\delta > 0$ sayısının var olmasıdır. Yani

$$f, x_0 \in \mathrm{X} \text{ da sürekli} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \text{ için } \exists\delta(\varepsilon) > 0 \ d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon,$$

olur.

2.1.4. Tanım: (X, d) metrik uzayı, bir $a \in \mathrm{X}$ noktası ve $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayısı verilsin.

- $B(a, \varepsilon) = \{x \in X\colon d(a, x) < \varepsilon\}$

alt kümesine, a merkezli ε yarıçaplı **açık yuvar**

- $B[a,\varepsilon] = \{x \in \mathrm{X}: d(a,x) \leq \varepsilon\}$

alt kümesine, a merkezli ε yarıçaplı **kapalı yuvar**

- $S(a,\varepsilon) = \{x \in X: d(a,x) = \varepsilon\}$

kümesine a merkezli ve ε yarıçaplı **yuvar yüzeyi** ya da **küre(sphere)** denir.

2.1.5. Tanım: (X,d) bir metrik uzayı ve $A \subset X$ olsun $a \in A$ noktası için $B(a,\varepsilon) \subset A$ olacak biçimde $\varepsilon > 0$ varsa a ya A nın bir **iç noktası** denir. A nın bütün iç noktalarının kümesi A^0 ile gösterilir.A nın her noktası bir iç nokta ise A bir **açık kümedir** denir.

2.1.6. Tanım: (X,d) bir metrik uzayı ve $A \subset X$ olsun. $X \backslash A$ kümesi açık ise A **kapalıdır** denir.

2.1.7. Tanım: X bir küme olsun. $f: \mathbb{N} \to X$ fonksiyonu, her $n \in \mathbb{N}$ sayısı için, $f(n) = x_n$ şeklinde tanımlansın.f fonksiyonuna X kümesi içinde bir **dizi** denir. ve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ya da (x_n) şeklinde gösterilir.

2.1.8. Tanım: (X,d) metrik uzayında bir dizi (x_n) olsun $x_0 \in X$ olmak üzere $\forall\, r > 0$ sayısına karşılık $n \geq N$ İken $d(x_n, x_0) < r$ olacak şekilde r ye bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (x_n) dizisi $x_0 \in X$ e **yakınsar** denir ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

veya

$$x_n \to x$$

şeklinde yazılır. Bu durumda,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \forall r > 0\ \exists n_0(r) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_0) < r$$

$$\Leftrightarrow \forall B(x_0, r), \exists n_0(r) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Longrightarrow x_n \in B(x_0, r)$$

olur. Verilen dizinin n_0. terimden sonraki dizinin bütün elemanlar x_0 ın r −komşuluğu içinde kalıyor iken, dizinin sonlu sayıdaki terimi x_o ın r komşuluğu dışında kalır.

2.1.9 Örnek: $\mathbb{R}^2$de $(x_n) = \left(1, \frac{1}{n}\right)$ dizisi alışılmış metriğe göre $(1,0)$ noktasına yakınsar.

2.1.10. Tanım: (X, d) metrik uzayında (x_n) dizisi verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0, \forall m, n \geq n_o$ doğal sayıları için, $d(x_m, x_n) < \epsilon$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi bir **Cauchy dizisidir** denir.

2.1.11. Örnek: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerindeki alışılmış metriğe göre, doğal sayılardan oluşan $(x_n) = (n)$ dizisi, bir Cauchy dizisi değildir. Çünkü tanımdaki a , b doğal sayıları ne kadar büyük seçilirse seçilsin, $a \neq b$ olduğundan, $d(a, b) = |a - b| \geq 1$ olur.

Bir dizinin Cauchy dizisi olması metrik bir özelliktir. Bir metriğe göre Cauchy dizisi olan başka bir metriğe göre Cauchy dizisi olmayabilir.

2.1.12. Örnek: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde,

$$d(x, y) = \left|\frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|}\right|$$

metriği tanımlansın.$\mathbb{N}$ doğal sayılardan oluşan $(x_n) = (n)$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Şöyle ki,

$\varepsilon > 0$ ve $m < n$ olsun.

$$d(m,n) = \left|\frac{m}{1+m} - \frac{n}{1+n}\right|$$
$$\leq \frac{1}{1+n}$$

olur. $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} < \mathrm{n}_0$ olacak şekilde bir n_o doğal sayısı seçerek, $\forall m,n \geq n_0$ için

$$d(x_m,x_n) = d(m,n) < \epsilon$$

olup, $(x_n) = (n)$ doğal sayılar dizisi Cauchy dizisidir.

2.1.13. Teorem: (X,d) metrik uzayında, yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

$(x_n) \longrightarrow x \in X, \forall \varepsilon > 0, \forall n \geq n_0$ ve $m \geq n_1$ sayısı için, $d(x_m,x) < \frac{\varepsilon}{2}, d(x_n,x) < \frac{\epsilon}{2}$ olacak biçimde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. $k = max\{n_0,n_1\}$ için $\forall\, m,n \geq k$ sayıları için metrik aksiyomun üçgen eşitsizliğinden,

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x) + d(x,x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

olup (x_n) dizisi Cauchy dizisidir. Her Cauchy dizisi yakınsak olmayabilir.

2.1.14. Örnek: $(\mathbb{R}-\{0\},|.|)$ uzayında $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi bir Cauchy dizisidir, fakat (x_n) dizisi $\mathbb{R}-\{0\}$ uzayında yakınsak değildir.

2.1.15. Teorem: (X,d) metrik uzayında (x_n) yakınsak bir dizi olsun. O zaman (x_n) bir Cauchy dizisidir.

2.1.16. Teorem: (X, d) metrik uzayında her (x_n) Cauchy dizisi sınırlıdır. O halde (X, d) metrik uzayında, yakınsak her dizi sınırlıdır. (X, d) metrik uzayında yakınsak bir dizinin her alt dizisi de yakınsaktır.

2.1.17. Tanım: (X, d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya **tamdır** denir. $A \subset X$ içinde bulunan her Cauchy dizisi A nın bir elemanına yakınsarsa A ya **tamdır** denir.

Bir uzayın tam olması topolojik bir özellik değildir, metrik bir özelliktir, yani metrik değiştikçe uzayın tam olması da değişmektedir.

2.1.18. Tanım: (X, d) metrik uzay olsun. Bir $A \subset X$ kümesindeki her (x_n) dizisi A nın bir elemanına yakınsayan bir alt diziye sahipse A ya **kompakt (ya da dizisel kompakt) küme** denir. Eğer X kümesinin kendisi kompakt ise (X, d)'ye bir **kompakt metrik uzay** denir.

Bu kompaktlığa denk başka kompaktlık tanımları vardır: "Bir küme kompakttır ancak ve ancak her sonsuz A altkümesi bir limit noktasına sahipse (limit noktasının A altkümesine ait olması gerekmez)","Bir küme kompakttır ancak ve ancak her açık örtüsü sonlu örtüye sahipse" gibi. Kompaktlık çok güçlü ve yararlı bir özelliktir.

Dizisel kompakttık topolojik özelliktir, kalıtsal özellik değildir. Bir metrik uzayın kompakt olması bu metrik uzayın tam ve tamamen sınırlı olmasına bağlıdır. Örneğin;

- Alışılmış metrikle (kendisinin bir alt kümesi olarak) $\mathbb{R}$ kompakt değildir çünkü

$$(x_n) = (n) = (1,2,3, \dots)$$

dizisi yakınsak bir alt diziye sahip değildir.

- $(0,1) \subset \mathbb{R}$ kümesi kompakt değildir çünkü $(x_n) = 1 - \frac{1}{n}$ dizisi $(0,1)$ kümesi içinde yakınsak bir alt diziye sahip değildir: her alt dizi $(0,1)$ içinde olmayan 1'e yakınsar ve bu nedenle hiçbir altdizi $(0,1)$ içinde yakınsamaz
- $[0,1] \subset \mathbb{R}$ kümesi kompakttır.

Genel olarak bir metrik uzayda kapalı ve sınırlı bir altküme kompakt olmayabilir.

2.1.19. Tanım: X boştan farklı bir küme ve τ $P(X)$ kuvvet kümesinin bir alt kümesi olsun. τ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X üzerinde bir **topoloji** denir.

- $\emptyset, X \in \tau$
- $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau$ için $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$,
- $\forall \{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$ için $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ dır.

2.1.20. Tanım: X, F üzerinde vektör uzay olsun.$\forall x \in X$ vektörünü $\|x\|$ reel sayısına dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli $\|.\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna norm denir. Her $x, y \in X$ ve her $\lambda \in F$ için

- $\|x\| > 0$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(X, \|.\|)$ ikilisine **normlu uzay** denir.

Bir vektörün normu bir vektörün uzunluğunun bir genellemesi olduğundan her normlu uzayın çok doğal bir yolla bir metrik uzay olması sürpriz olmamalıdır.

2.1.21. Tanım: Eğer $(X, \|.\|)$ bir normlu vektör uzay ve $d, d(x, y) = \|x - y\|$ ile tanımlı metrik ise o zaman d ye $\|.\|$ normu tarafından **indirgenen (genelleştirilen, üretilen) metrik** adı verilir.

2.1.22. Tanım: Bir normlu vektör uzayı, normdan indirgenen metrik ile tam ise **Banach uzayı** olarak adlandırılır.

Uzunluk kavramında olduğu gibi $\mathbb{R}^3$ deki nokta çarpımı ve diklik gibi önemli bazı özelliklerin vektör uzaylarına genelleştirilmesi iç çarpım uzaylarında ve Hilbert uzaylarında olur. Tarihi olarak iç çarpım uzayları normlu uzaylardan daha eskidir.

2.1.22. Tanım: X bir reel vektör uzayı olsun.X üzerinde bir iç çarpım aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$(.,.): X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyondur. Her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

- $(x, x) \geq 0;$
- $(x, x) = 0$ ancak ve ancak $x = 0;$
- $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z);$
- $(x, y) = (y, x)$

Bir $\big(X, (.,.)\big)$ iç çarpım uzayı verildiğinde iç çarpımın indirgediği norm

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

ve bu normun indirgediği metrik

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

dir.

2.1.23. Tanım: Bir iç çarpım uzayı, iç çarpımın indirgediği normdan indirgenen metriğe göre tam ise bu uzaya bir **Hilbert uzayı** adı verilir.

Buna göre Hilbert uzayları, özel Banach uzayları olduğu anlaşılmaktadır.

2.1.24. Tanım: X bir vektör uzayı olsun.X in boştan farklı bir A alt kümesi için $x, y \in A$ iken x, y noktalarını birleştiren doğru parçası yine A ya ait oluyorsa yani $0 \leq t \leq 1$ için

$$(1-t)x + ty \in A$$

ise veya denk olarak $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ olmak üzere $\lambda + \mu = 1$ için $\lambda x + \mu y \in A$ ise A ya **dışbükey** veya **konveks küme** denir.

X içinde bir A konveks kümesi ve bir $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1$ olmak üzere $x, y \in A$ olduğunda

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y)$$

sağlanırsa o zaman f, A üzerinde bir **konveks fonksiyondur** denir.

Ayrıca çalıştığımız iterasyon metotları da konveks yapıda olduğu için dönüşümlerin alındığı kümelerde konveks metrik uzayın altkümeleridir.

2.1.25. Tanım:(X, d) metrik uzay verilsin. $W: X \times X \times [0,1] \longrightarrow X$ dönüşümü her $x, y, u \in X$; $\lambda \in [0,1]$ için

$$d\big(u, W(x,y;\lambda)\big) \leq \lambda d(u,x) + (1-\lambda)d(u,y)$$

sağlıyorsa W, X üzerinde **konveks yapı** oluşturur denir. W ile (X,d) metrik uzayına da **konveks metrik uzay** denir ve (X,d,W) ile gösterilir.

2.1.26. Tanım:(X,d) metrik uza.$W: X^3 \times [0,1]^3 \rightarrow X$ dönüşümü

$$\forall(x,y,z;a,b,c) \in X^3 \times [0,1]^3, u \in X \text{ ve } a+b+c=1 \text{ için}$$
$$d(W(x,y,z;a,b,c),u) \leq ad(x,u) + bd(y,u) + cd(z,u)$$

sağlıyorsa W, X üzerinde **konveks yapı** oluşturur denir. W ile (X,d) metrik uzayına da **konveks metrik uzay** denir.(X,d,W) şeklinde gösterilir.

(X,d,W) Konveks metrik uzay,E de X in boş olmayan bir alt kümesi olsun.

$$a+b+c=1$$

olmak üzere $\forall(x,y,z;a,b,c) \in E^3 \times [0,1]^3$ için $W(x,y,z;a,b,c) \in E$ ise E ye X in **konveks alt kümesi** denir.

2.1.27. Tanım:(X,d,W) konveks metrik uzayı $\epsilon > 0$ ve $r > 0$ için

$$d(z,x) \leq r, d(z,y) \leq r, d(x,y) \geq r\varepsilon$$

şartını sağlayan her $x,y,z \in X$ için

$$d\left(z, W\left(x,y,\frac{1}{2}\right)\right) \leq \big(1-\delta(\varepsilon)\big)r$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon)$ sayısı varsa, X e **düzgün konveks metrik uzay** denir.

Bir (X,d,W) konveks metrik uzayı $\lambda \in [0,1]$ ve $x,y \in X$ için aşağıdaki özellikleri sağlıyordur.

- $W(x,x,\lambda) = x, W(x,y,0) = y, W(x,y,1) = x$
- $d\big(x,W(x,y,\lambda)\big) = (1-\lambda)d(x,y) \quad d\big(y,W(x,y,\lambda)\big) = \lambda d(x,y)$
- $d(x,y) = d\big(x,W(x,y,\lambda)\big) + d(W(x,y,\lambda),y)$

2.2. Sabit Nokta Teorisi

Sabit nokta teorisi, yeni uygulama alanlarıyla sürekli gelişen matematiğin en önemli alanlarından birisidir. Özel olarak sabit nokta teorisi Fizik, Ekonomi, Oyun teorisi Optimizasyon problemleri denge problemleri gibi birçok alanda uygulaması olan bir teoridir. Bu alanda ilk çalışmayı 1886 yılında Peano yapmıştır. Ardından 1912 yılında Brouwer $\boldsymbol{f(x) = x}$ denkleminin çözümünün bulunması ile Brouwer sabit nokta teoremini ispatlamıştır. Aynı yıllarda fonksiyonal analizin temel teoremlerinden biri olan Banach sabit nokta teoremini ispatlamıştır. Banach tam metrik uzayda tanımlı daraltan dönüşümlerin tek bir sabit noktaya sahip olduğunu göstermiştir

2.2.1. Tanım: $X \neq \emptyset$ ve $T: X \to X$ tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktasına T nin **sabit noktası** denir.

2.2.2. Örnek:

- $X = [0,\infty)$ ve $T: X \to X$, $Tx = \frac{x}{4}$ dönüşümünün sabit noktası $x = 0$ dır
- $X = [1,\infty)$ ve $T: X \to X$, $Tx = x^2$ dönüşümünün sabit noktası $x = 1$ dır
- $X = (1,\infty)$ ve $T: X \to X$, $Tx = x^2 + b$ dönüşümünün sabit noktası yoktur
- $X = (-\infty,\infty)$ ve $T: X \to X, Tx = x^3$ dönüşümünün sabit noktası

$$x = 1\,, x = 0, x = -1$$

dir.

2.2.3. Tanım: (Lipschitzian Dönüşüm)

(X, d) metrik uzayı ve bir $T: X \to X$ fonksiyonu verilsin.$\forall x, y, z \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$$

olacak biçimde bir $r \geq 0$ sabiti varsa, T ye **Lipschitzian dönüşüm** denir. Bu şartı sağlayan en küçük r reel sayısına da **Lipschitzian sabiti** denir.

2.2.4. Tanım: (Daraltan Dönüşüm)

(X, d) metrik uzayı ve $T: X \to X$ fonksiyonu verilsin. $\forall x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$$

olacak biçimde x ve y noktalarından bağımsız bir $0 \leq r < 1$ reel sayısı varsa, T fonksiyonuna bir **daraltan dönüşümü** denir.

2.2.5. Tanım: (Kesin Daraltan Dönüşüm)

(X, d) metrik uzayı ve $T: X \to X$ fonksiyonu verilsin. $\forall x, y \in X, x \neq y$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

oluyorsa T ye **kesin daraltan dönüşüm** denir.

2.2.6. Tanım: (Genişlemeyen Dönüşüm)

(X, d) metrik uzay ve $T: X \to X$ fonksiyonu verilsin. $\forall x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

oluyorsa T ye **genişlemeyen dönüşüm** denir.

2.2.7. Tanım: (Düzgün Lipschitzian Dönnüşüm)

(X, d) metrik uzayı, K, X' in boş olmayan bir alt kümesi ve $T: K \to K$ fonksiyonu verilsin

$\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x, y \in K$ için

$$d(T^n x, T^n y) \leq L d(x, y)$$

olacak biçimde $L > 0$ reel sayısı varsa, T ‘ye **düzgün Lipschitzian dönüşüm** denir.

2.2.8. Tanım: (Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm)

(X, d) metrik uzayı, K, X' in boş olmayan bir alt kümesi ve $T: K \to K$ fonksiyonu verilsin $\forall x, y \in K$ için

$$d(T^n x, T^{\,n} y) \leq k_n d(x, y)$$

olacak şekilde $k_n \to 1$ şartını sağlayan $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa, T’ye **asimptotik genişlemeyen dönüşüm** denir.

2.2.9. Tanım: (Quasi Genişlemeyen Dönüşüm)

(X,d) metrik uzayı, K, X' in boş olmayan bir alt kümesi ve $T: K \to K$ fonksiyonu verilsin. $\forall x \in K$ ve $p \in F(T) \neq \emptyset$ için

$$d(Tx,p) \leq d(x,p)$$

şartını sağlıyorsa T ‘ ye **quasi Genişlemeyen dönüşüm** denir.

2.2.10. Tanım: (Asimptotik Quasi Genişlemeyen Dönüşüm)

(X,d) metrik uzayı, K, X' in boş olmayan bir alt kümesi ve $T: K \to K$ fonksiyonu verilsin. $F(T) \neq \emptyset$ olsun. $\forall x \in K$ ve $p \in F(T)$ için

$$d(T^n x,p) \leq k_n d(x,p)$$

olacak şekilde $k_n \to 1$ şartını sağlayan $\{k_n\} \subset [1,\infty)$ dizisi varsa, T ye **Asimptotik quasi genişlemeyen dönüşüm** denir.

2.2.11. Tanım:(Düzgün Quasi-Lipschitzian Dönüşüm)

(X,d) metrik uzayı, K, X' in boştan farklı bir alt kümesi ve $T: K \to K$ fonksiyonu verilsin. ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. $x \in K$ ve $p \in F(T) \neq \emptyset$ için

$$d(T^n x,p) \leq Ld(x,p)$$

olacak biçimde $L > 0$ reel sayısı varsa, T ‘ye **düzgün quasi -lipschitzian dönüşüm** denir.

2.2.12. Örnek:

- $X=\mathbb{R}, d(x,y)=|x-y|, T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, Tx=3x$ olsun. Bu durumda

$$d=(Tx,Ty)=|3x-3y|=3|x-y|=3d(x,y)$$

$k\geq 3$ için T fonksiyonu Lipschitz şartını sağlar. Aynı zamanda daraltan bir dönüşümdür.

- $X=\mathbb{R}, d(x,y)=|x-y|, T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, Tx=x-\frac{1}{2}\cos x$

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty)=|Tx-Ty| &= \left|x-\frac{1}{2}\cos x-y+\frac{1}{2}\cos y\right| \\ &\leq |x-y|+\tfrac{1}{2}|\cos x-\cos y| \\ &= |x-y|+\tfrac{1}{2}2\left|\sin\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{x-y}{2}\right| \\ &\leq |x-y|+\left|\sin\tfrac{x-y}{2}\right| \\ &\leq |x-y|+\tfrac{1}{2}|x-y|=\tfrac{3}{2}|x-y| \end{aligned}$$

$\frac{3}{2}-$daraltandır.

- $X=R, d(x,y)=|x-y|, T:R\to R, Tx=1+\ln(2+e^x)$ olsun.

$$T'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}<1$$

ve Ortalama Değer Teoreminden

$$T'(x_0)=\frac{T(x)-T(y)}{x-y}$$

olup, $T'(x_0) < 1$ dir. Yani,

$$T'(x_0) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y} < 1 \Rightarrow |T(x) - T(y)| < |x - y|$$

olur. Bu da T‘nin kesin daraltan bir dönüşüm olduğunu gösterir.

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan dönüşümlerin sabit noktası olması gerekmez. Lipschitzian şartını sağlayan her dönüşüm düzgün süreklidir. O halde daraltan dönüşümlerde düzgün süreklidir. Verilen dönüşüm sürekli değilse daraltan dönüşüm olamaz. Kesin daraltan dönüşümlerin sabit noktasını garantilemek için çalışılan uzayın kompakt olması gerekir.

Dönüşümler arasındaki bağlantı şu şekildedir:

$$T - daraltan \Rightarrow T - kesin\ daraltan \Rightarrow T - genişlemeyen \Rightarrow T - lipschitzian$$

$$genişlemeyen\ dönüşüm \Rightarrow asimptotik\ genişlemeyen \Rightarrow düzgün\ lischitzian$$

- $X = R, T: R \to R, d(x, y) = |x - y|\ \ Tx = x - 3$ olsun.

$$d(Tx, Ty) = |x - 3 - y + 3|$$
$$= |x - y| = d(x, y)$$

ise bu dönüşüm genişlemeyen dönüşümdür. Ama bu dönüşüm ne daraltan ne de kesin daraltandır.

Banach uzayında bazı genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktası olması gerekmez. Genişlemeyen dönüşüm düzgün konveks bir Banach uzayının sınırlı, kapalı ve konveks altkümesi üzerinde tanımlı ise bu dönüşümün sabit noktası vardır.

2.3. Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Aşağıdaki teoremler Lipschitzian, genişlemeyen, daraltan ve kesin daraltan gibi dönüşümlerin belirli şartlar altında sabit noktasının var ve tek olduğunu gösterir.

2.3.1. Brouwer sabit nokta teoremi

$B, \mathbb{R}^n$ kapalı bir küre ve $\mathbb{R}^n$ nin bir konveks kompakt alt kümesi olması durumunda $f: B \to B$ tanımlanan sürekli dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

2.3.2. Schauder sabit nokta teoremi

B bir Banach uzayı K, B' nin boştan farklı konveks kompakt bir altkümesi olsun. Bu durumda $f: K \to K$ tanımlanan sürekli dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir.(Khamsi and Kirk 2001)

2.3.3. Banach Daralma İlkesi

(X, d) tam metrik uzayı ve $T: X \to X$ daraltma dönüşümü verilsin. Bu taktirde T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir, yani; $Tx = x$ olacak şekilde bir tek $x \in X$ noktası vardır (Maddox 1988).

İspat: (X, d) tam metrik uzayı, T daraltma dönüşümü ve $x_0 \in X$ noktası verilsin.

$$T^n = ToT^{n-1}$$

olmak üzere

$$x_1 = Tx_0$$

$$x_2 = Tx_1 = T^2 x_0$$

$$x_3 = Tx_2 = T^3 x_0$$

$$\vdots$$

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$$

biçiminde bir (x_n) dizisi oluşturulabilir. Şimdi bu dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(T^m x_0, T^n x_0) = d(T^m x_0, T^m o T^{n-m} x_0) \\ &\leq r^m d(x_0, T^{n-m} x_0) = r^m d(x_0, x_{n-m}) \\ &\leq r^m \big(d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{n-m-1}, x_{n-m})\big) \\ &\leq r^m d(x_0, x_1)(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-m-1}) \\ &\leq \frac{r^m}{1-r} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

yazılabilir. $0 \leq r < 1$ olduğundan, m sayısı yeterince büyütülerek sağ yan istenildiği kadar küçültülebilir. Böylece (x_n) dizisi, bir Cauchy dizisidir. (X, d) tam uzay olduğundan, $x_n \to p \in X$ noktası vardır. Şimdi, $Tp = p$ olduğunu gösterelim. T dönüşümü sürekli olduğundan, dizisel süreklidir. Dolayısıyla

$$Tp = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p$$

olur. Son olarak p noktasının tekliğini gösterelim. Varsayalım ki

$$Tp = p \text{ ve } Tq = q$$

olacak şekilde p, q gibi iki sabit nokta olsun. O zaman

$$d(p,q) = d(Tp,Tq) \leq rd(p,q)$$

olur. $r < 1$ olduğundan, $d(p,q) = 0$ ve dolayısıyla $p = q$ bulunur. O halde T dönüşümü, bir tek sabit noktaya sahiptir.

2.3.4. Teorem:

$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d})$ bir tam metrik uzayı ve $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ için $\boldsymbol{T^n}$ bir daraltan dönüşüm olacak biçimde bir $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ dönüşümü verilsin. O halde $\boldsymbol{T}$ tek bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

2.3.5. Teorem:

$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d})$ bir kompakt metrik uzay ve $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ kesin daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\boldsymbol{T}$ bir tek $\boldsymbol{p}$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ için

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = p$$

dir (Khamsi and Kirk 2001).

Goebel ve Kirk düzgün konveks bir Banach uzayında tanımlı asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaya sahip olduğu aşağıdaki teoremle ispatlanmıştır.

2.3.6. Teorem:

$\boldsymbol{X}$ uniformly konveks Banach uzayı,$\boldsymbol{K} \neq \emptyset$ konveks, kapalı, sınırlı bir alt kümesi ve $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{K} \to \mathbf{K}$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{K}$ da sabit noktası vardır (Goebel and Kirk 1972).

2.4. İterasyon Yöntemleri

Bir dönüşümün sabit noktasını veya noktalarını bulurken çeşitli iterasyon metotları kullanılır.

2.4.1. Picard İterasyonu: (X, d) bir metrik uzay, $K \subseteq X$ kapalı bir alt küme ve $T: K \to K$ dönüşüm olsun. $x_0 \in X$'in T altındaki n'inci iterasyonu

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \qquad n = 1,2, \ldots$$

şeklindedir. Buna x_0 başlangıç değerli **ardışık yaklaşımlar dizisi** veya **Picard iterasyonu** denir (Picard 1890).

2.4.2. Krasnoselskij İterasyonu: $(N, \|.\|)$ Bir normlu uzay, K, X' in boştan farklı alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşümü verilsin. $x_0 \in N$, $\lambda \in [0,1]$ için Krasnoselskij iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda T x_n$$

şeklindedir (Krasnoselskij 1955)

2.4.3. Kirk İterasyonu: $(N, \|.\|)$ bir normlu uzay, K; X'in boş olmayan konveks altkümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşümü verilsin. Kirk iterasyonu, $x_0 \in N$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 T x_n + \alpha_2 T^2 x_n + \cdots + \alpha_k T^k x_n$$

şeklindedir. Burada $i = 0,1,2, \ldots, m$ için $\alpha_1 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ olmak üzere

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m = 1$$

dir (Kirk 1971).

2.4.4. Mann İterasyonu: $(N, \|.\|)$ Bir normlu uzay, $K;\ X'$ in boş olmayan konveks alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşümü verilsin. $x_0 \in K$ herhangi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n, n = 0,1,2, \dots$$

şeklindedir. Burada $\{\alpha_n\}$, $(0,1)$ aralığında

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\ , \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

şartları sağlayan bir dizidir (Mann 1953).

2.4.5. Ishikawa İterasyonu: $(N, \|.\|)$ Bir normlu uzay, ,$K; X'$ in boş olmayan konveks alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşümü verilsin. $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n\ , n = 0,1,2, \dots \end{cases}$$

şeklindedir. Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\} \in (0,1)$ dizileri

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\ , \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

şartlarını sağlar (Ishikawa 1974).

2.4.6. Noor iterasyonu: $(N, \|.\|)$ bir normlu uzay, K; X' in boş olmayan konveks alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşümü verilsin. $x_0 \in K$ herhangi bir nokta olmak üzere Noor iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T z_n, \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n, n = 0,1,2, \ldots \end{cases}$$

şeklindedir. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in (0,1)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0, \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

dur (Noor 2000).

Xu ve Noor, iterasyonunun düzgün konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinden kendi üzerine tanımlanmış asimptotik genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya yakınsaklığını çalışmışlardır (Xu and Noor 2002).

2.4.7. n-Adım İterasyonu (Multistep İteration): $(N, \|.\|)$ Bir normlu uzay, $\emptyset \neq K \subseteq X$ konveks alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşümü verilsin. $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere n-adım iterasyonu $p \geq 2$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n^1, \\ y_n^i = \left(1-\beta_n^i\right)x_n + \beta_n^i T z_n^{i+1}, \\ z_n^{p-1} = \left(1-\beta_n^{p-1}\right)x_n + \beta_n^{p-1} T, i = 1,2, \ldots, p-1 \end{cases}$$

şeklindedir. Burada

$$\{\alpha_n\} \subset (0,1), \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

ve $\{\beta_n^i\} \subset [0,1), 1 \leq i \leq p-1, \lim_{n\to\infty} \beta_n^1 = 0$ dır (Rhoades and Şoltuz 2004).

2.4.8. Picard-Mann Hibrit İterasyonu: $(N, \|.\|)$ bir normlu uzay, $\emptyset \neq K \subseteq X$ konveks alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşümü verilsin. $x_1 \in K$ bir nokta olmak üzere Picard-Mann Hibrit iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n, \\ y_{n=}(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

şeklindedir. Burada $(\alpha_n) \in (0,1)$ dir (Khan 2013).

Bu iterasyonlar çeşitli şartlar altında birbirlerine dönüştürülebilir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Sabit noktayı incelemek için metrik uzayların yeterli olmaması sabit nokta teorisinin uygulanabileceği daha kapsamlı bir uzayın olup olmadığı sorusunun sorulmasına sebep olmuştur.

2007 yılında Çinli matematikçiler Zang ve Huang sabit noktayı incelemek için metrik uzayların bütünüyle yeterli olmadığını ve metrik uzaylardan daha kapsamlı bir uzayın olabileceğini gördüler ve bunun için de bu sorunun üstesinden gelmek için konik metrik uzay kavramını verdiler. Her iki uzayda da reel sayılar kümesi yerine E banach uzayını aldılar Aşağıda konik metrik uzay özelliklerine geçmeden önce konik kavramının uzayda tanımlanabilen bir yüzey olduğunu ve literatürde koniği, çok yüzlü koni kavramlarının kullanıldığını söyleyebiliriz. Çok yüzlü koniği “$C, \mathbb{R}^n$ de bir koni olsun.

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$$

olacak şekilde bir $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisi varsa C konisine $\mathbb{R}^n$ de bir çok yüzlü koni vardır “ şeklinde ifade edilmektedir. Çokyüzlü anlamında bir koni sonlu sayıda vektörle gerilebilir, yani $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ için $\mathbb{R}^n$ nın öyle bir sonlu altkümesi X vardır ki

$$\{x: Ax \leq 0\} = \left\{\sum_{i=1}^{s} c_i v_i : c_i \in \mathbb{R}, c_i \geq 0, v_i \in X, s \in \mathbb{Z}^+\right\}$$

tanımlanmaktadır.

3.1. Konik Metrik Uzayların Temel Özellikleri

3.1.1 Tanım: E bir gerçel Banach uzayı ve $P \subset E$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan P' ye **koniktir** denir.

i. $P \neq \emptyset$,kapalı ve $P \neq \{0\}$

ii. $a, b \in \mathbb{R}, 0 \leq a, b \quad x, y \in P \Rightarrow by + ax \in P$

iii. $x \in P\,, -x \in P \Rightarrow x = 0$

Burada $'' \leq ''$ $x, y \in E$ için $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P$ tanımlanan E üzerinde kısmı sıralama bağıntısıdır. $x < y$ olduğunda bu $x \leq y$ fakat $x \neq y$ demektir. Bundan sonra E daima bir gerçel Banach uzayını, $P \neq \{0\}$ ve P, E' de bir koniki temsil edecektir.

3.1.2. Önerme: E üzerinde P' ye göre $\forall x, y \in E$ için $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P$ biçiminde tanımlanan $'' \leq ''$ bağıntısı bir kısmı sıralama bağıntısıdır.

İspat:

i. $\forall x \in E\,, x - x = 0 \in P \Rightarrow x \leq x$

ii. $x \leq y, y \leq x \Rightarrow y - x \in P\,, x - y = -(y - x) \in P \Rightarrow y - x = 0 \Rightarrow y = x$

iii. $x \leq y, y \leq z \Rightarrow y - x \in P, z - y \in P \Rightarrow y - x + z - y = z - x \in P \Rightarrow x \leq z$

olduğuna göre $'' \leq ''$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

3.1.3. Tanım: E bir gerçel Banach uzayı ve $P \subseteq E$ bir konik olsun. Eğer her $x, y \in E$ için $0 \leq x \leq y$ olduğunda $\|x\| \leq K\|y\|$ olduğunda $0 < K$ varsa P koniğine **normal konik** denir. Bu ifadeye denk olarak P nin E de koni olması için $\forall x, y \in E$ için

$$inf\{\|x + y\|: x, y \in P, \|x\| = 1 = \|y\|\}$$

şartını sağlamasıdır. $\|x\| \leq K\|y\|$ eşitsizliğindeki en küçük pozitif K sayısına P' nin **normal sabiti** denir (Deimling 1985).

3.1.4. Örnek: $E = \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$$

E de bir konidir. Örnekte verilen P konisi, normal sabiti $K = 1$ olan $\mathbb{R}^2$ de bir normal konidir.

3.1.5. Teorem: $K < 1$ normal sabiti olan normal bir koni yoktur (Rezapour and Hamlbarani 2008).

3.1.6. Teorem: Her $k > 1$ için,$K > k$ olacak şekilde normal sabiti K olan normal bir koni vardır (Rezapour and Hamlbarani 2008). Normal olmayan konilerde vardır.

3.1.7. Teorem:P konisinin E de normal olmaması için gerekli ve yeter şart

$$0 \leq x_n \leq x_n + y_n, x_n + y_n \longrightarrow 0 \text{ ama } x_n \nrightarrow 0$$

sağlayacak şekilde P içinde $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerinin olmasıdır (Jankovic 2009).

3.1.8. Tanım: E bir gerçel Banach uzayı ve P de E de bir koni olsun. Eğer E de üsten sınırlı artan ya da alttan sınırlı azalan her dizi yakınsak ise P ye **düzenli koni (regüler koni)** denir. Yani

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \leq y$$

olacak şekilde $\{x_n\} \subset E$ dizisi ve $y \in E$ için

$$\|x_n - x\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

olacak şekilde bir $x \in E$ vardır.

3.1.9. Teorem: Her düzenli koni normaldir. Ama normal bir koni düzenli olmayabilir.

3.1.10. Tanım: $X \neq \emptyset$ herhangi bir X kümesi ve $d: X \times X \to E$ dönüşümü olsun.

d dönüşümü $\forall x, y, z \in X$ için;

i. $d(x,y) \geq 0, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
ii. $d(x,y) = d(y,x)$
iii. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

şartlarını sağlıyorsa d ye X kümesi üzerinde bir **koni metrik** ve (X,d) ikilisine de bir **koni metrik uzay** denir (Huang and Zhang 2007).

Burada E bir reel Banach uzayı, P, E de $P^0 \neq \emptyset$ olan bir konidir.

$E = \mathbb{R}$ ve $P = [0,\infty)$ alınırsa, d nin metrik olduğu açıktır. O halde her metrik bir konik metriktir. Ama tersi doğru değildir.

3.1.11. Örnek:

$E = \mathbb{R}^2, P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2, X = \mathbb{R}$ $d: X \times X \to E$ ve $d: X \times X \to E$ ve

$$d(x,y) = (|x-y|, \alpha|x-y|), \alpha \geq 0 \text{ bir sabit olsun.}$$

1) P bir koniktir şöyle ki,

i. P kapalı ve $\theta \in P$ olduğundan $P \neq \emptyset$ $(x,y) = (1,0) \in P$ ise $P \neq \{\theta\}$
ii. $a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0, z = (x_1, y_1), t = (x_2, y_2) \in P$ olsun. Bu durumda

$$x_1, y_1 \geq 0 \quad x_2, y_2 \geq 0 \Rightarrow ax_1 \geq 0, ay_1 \geq 0, bx_2 \geq 0, by_2 \geq 0$$

$$\Rightarrow ax_1 + bx_2 \geq 0 \text{ ve } ay_1 + by_2 \geq 0$$

$$\Rightarrow az + bt = a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2)$$

$$= ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2$$

iii. $z = (x, y), -z = (-x, -y) \in P$ olsun. Bu durumda

$$x, y \geq 0 \quad -x, -y \geq 0 \Rightarrow x \geq 0, -x \geq 0 \text{ ve } y \geq 0, -y \geq 0$$

$$\Rightarrow x = 0, y = 0$$

$$\Rightarrow z = (0,0) = \theta \in P$$

olur. Bu durumda koniklik şartları sağlanır.

2) (X, d) bir konik metrik uzaydır. Şöyle ki;

i. $d(x, y) - \theta = (|x - y|, \alpha|x - y|) - (0,0) = (|x - y|, \alpha|x - y|) \in P$

$$\Rightarrow d(x, y) \geq \theta \text{ ve}$$

$$d(x, y) = \theta \Leftrightarrow (|x - y|, \alpha|x - y|) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow |x - y| = 0 \,, \alpha|x - y| = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y \text{ veya } \alpha = 0$$

ii. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d(x,y) = (|x-y|, \alpha|x-y|)$$

$$= (|y-x|, \alpha|y-x|) = d(y,x)$$

iii. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$d(x-y) = (|x-y|, \alpha|x-y|)$$

$$= (|x-z+z-y|, \alpha|x-z+z-y|)$$

$$\leq \big(|x-z| + |z-y|, \alpha(|x-z| + |z-y|)\big)$$

$$\leq d(x,z) + d(z,y)$$

olur. (Huang and Zhang 2007).

3.1.2. Örnek: $E = C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ üzerinde, supremum normu ile tanımlansın yani

$$\|x\|_\infty = sup_{a\in[0,1]}|x(a)|$$

$$\|x\| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$$

normu verilsin.$P = \{x \in E : x(a) \geq 0, a \in [0,1]\}$, E de normal konidir.

$\theta \leq f \leq g$ olacak şekilde $f, g \in E$ olsun.

$$\|f\| = sup_{a\in[0,1]}|f(a)|, \ \ \|g\| = sup_{a\in[0,1]}|g(a)|$$

olduğundan $g - f \in P$, $g - f \in \theta$ dır $\forall\ a \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} f(a) \leq g(a) &\Rightarrow |f(a)| \leq |g(a)| \\ &\Rightarrow sup_{a\in[0,1]}|f(a)| \leq sup_{a\in[0,1]}[g(a)] \\ &\Rightarrow \|f\| \leq \|g\| \end{aligned}$$

olur. Bu ise

$$\|f\| \leq K\|g\| \ \Rightarrow K = 1$$

P normal bir koniktir($K = 1$ normal sabiti ile).ama regüler bir konik değildir.

E nin elemanlarını $x \in [0,1]$ olmak üzere $f_n(x) = x^n$ şeklinde tanımlı alttan sınırlı azalan bir $\{f_n(x)\}$ dizisini alalım

$$x \geq x^2 \geq x^3 \geq x^4 \geq \cdots \geq \theta$$

ise bu dizi alttan θ ile sınırlıdır. Fakat E içinde bu dizi yakınsak değildir. Farz edelim ki bu dizi E içinde θ ya yakınsasın.$\forall\epsilon > 0$ için $\exists n \in \mathbb{N}$ var öyleki,$\forall n > \mathbb{N}$ için

$$\|f_n(x) - \theta\| = \|x^n - \theta\| < \epsilon$$

olmalıdır.

Fakat $f_n(1) = 1^n = 1 \in E$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ iken $\|f_n(1) - \theta\| = 1 < \frac{1}{2}$ bir çelişkidir o halde seçilen dizi yine E de yakınsak değildir. Bu durum normal konik olmanın regüler konik olmayı gerektirmediğini gösterir.

3.1.13. Tanım: (X, d) bir konik metrik uzay, $\{x_n\}$ X de bir dizi $x \in X$ olsun.

Eğer $\forall c \in E, 0 << c$ ye karşılık $\forall n \geq n_0$ için $d(x_n, x) << c$

olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ **dizisi x noktasına yakınsıyor** denir.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ veya } x_n \to x \ (n \to \infty)$$

biçiminde gösterilir (Huang and Zhang 2007).

3.1.14. Tanım: (X, d) konik metrik uzayı, $\{x_n\}$ X de ve dizi $x \in X$ olsun.

Eğer her $c \in E, 0 << c$ ye karşılık $\forall n, m \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) << c$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, $\{x_n\}$ dizisine X de bir **Cauchy dizisi** denir (Huang and Zhang).

3.1.15. Tanım: (X, d) bir konik metrik uzay olsun. Eğer X de ki her cauchy dizisi X içindeki bir elemana yakınsıyorsa (X, d) ye **tam koni metrik uzay** denir.

3.1.16. Tanım: E ve F reel Banach uzayları P ile Q sırasıyla E ve F de koniler ve

$d: X \times X \to E, \rho: Y \times Y \to F$ olmak üzere (X, d) ve (Y, ρ) koni metrik uzaylar olsun. Bir $f: X \to Y$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ verilsin. Eğer $\forall\, c \in F, 0 << c$ ye karşılık

$$d(x, x_0) << b \ (\forall x \in X) \text{ için } \rho\big(f(x), f(x_0)\big) << c$$

olacak şekilde bir $b \in E, 0 << b$ varsa f fonksiyonu $\boldsymbol{x_0}$ **noktasında süreklidir** denir.

3.1.17. Teorem: (X, d) ve (Y, ρ), 3.1.16 Tanım'da ki gibi iki konik metrik uzay olsun. Bir $f: X \to Y$ fonksiyonunun bir $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul X de x_0 noktasına yakınsayan her $\{x_n\}$ dizisi için Y de $\{f(x_n)\}$ dizisinin $f(x_o)$ noktasına yakınsamasıdır.

3.1.18. Tanım: (X, d) bir koni metrik uzay olsun. Eğer X de ki her bir $\{x_n\}$ dizisi için, $\{x_n\}$'in X de yakınsak bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi varsa, (X, d) ye **dizisel kompakt koni metrik uzay** denir.

(X, d) ye dizisel kompakt koni metrik uzay ise o zaman tam koni metrik uzaydır. Şöyle ki; $\{x_n\}$ X de herhangi bir Cauchy dizisi olsun. X dizisel kompakt olduğundan, $\{x_n\}$ in X'deki bir x noktasına yakınsayan bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Bu durumda " (X, d) bir koni metrik uzay, $\{x_n\}$ X de bir Cauchy dizisi ve $x \in X$ olsun. Eğer $\{x_n\}$ dizisinin x' e yakınsayan bir alt dizisi varsa, $\{x_n\}$ de x'e yakınsar." teoreminden $x_n \to x \in X$ olur. O halde (X, d) tamdır.

3.1.19. Tanım: (X, d) konik metrik uzay ve $T: (X, d) \to (X, d)$ dönüşüm olsun.

1. $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \preccurlyeq d(x, y)$$

ise T dönüşümüne **genişlemeyen dönüşüm** denir.

2. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$ ve $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, p) \preccurlyeq d(x, p)$$

ise T' ye **quasi-genişlemeyen dönüşüm** denir

3. $\forall x, y \in X$ için

$$d(T^n x, T^n y) \preccurlyeq k_n . d(x, y)$$

olacak şekilde $k_n \longrightarrow 1$ şartını sağlayan $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa T'ye **asimptotik genişlemeyen dönüşüm** denir.

4. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$ ve $\forall x, y \in X$ için

$$d(T^n x, p) \preccurlyeq k_n . d(x, p)$$

olacak şekilde $k_n \to 1$ şartını sağlayan $\{k_n\} \subset [1,\infty)$ dizisi varsa T'ye **asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm** denir.

5. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$ ve $\forall x, y \in X$ için

$$d(T^n x, p) \preccurlyeq L . d(x, p)$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı varsa,T dönüşümüne **düzgün quasi-Lipschitzian dönüşüm** denir.

3.1.20. Tanım: (X, d, W) konik metrik uzay olsun. $W: X \times X \times [0,1] \to X$ dönüşümü

$\forall x, y, u \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$d\big(u, W(x, y; \lambda)\big) \preccurlyeq \lambda d(u, x) + (1 - \lambda) d(u, y)$$

şartını sağlıyorsa W, X üzerinde konveks yapı oluşturuyor denir. W ile birlikte (X, d) konik metrik uzayına da **konveks konik metrik uzay** denir.

3.1.21. Tanım: (X, d, W) konik metrik uzay olsun. $W: X^3 \times [0,1]^3 \longrightarrow X$ dönüşümü $\forall (x, y, z; a, b, c) \in X^3 \times [0,1]^3, u \in X$ ve $a_n + b_n + c_n = 1$ için

$$d(W(x, y, z; a_n, b_n, c_n), u) \preccurlyeq a_n d(x, u) + b_n d(y, u) + c_n d(z, u)$$

şartını sağlıyorsa bu durumda W, X üzerinde konveks yapı oluşturuyor denir. Şayet $W, (X, d)$ konik metrik uzayı üzerinde konveks yapı oluşturuyorsa (X, d)'ye **konveks konik metrik uzay** denir.

Huang ve Zhang (2007) tarafından tanımlanan koni metrik uzaylardaki metrik fonksiyonu bir koni ile sıralanan Banach uzayının sıra yapısının getirdiği koninin iç noktaları yardımıyla yakınsaklığı tanımlamış ve bu teoriyi ilerletmiştir. Bu tanımlama ile birlikte metrik uzaylarda bilinen sonuçlara paralel sonuçlar elde edilmiş ve bu sonuçlar sabit nokta teoremlerine uygulanmıştır.

Bu bölümde daraltan dönüşüm sınıfları için tam konik metrik uzaylarda bazı şartlar eklenerek sabit noktası olması sağlanabilir.

3.2. Konik Metrik Uzaylarda Daraltan Dönüşümler İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri

3.2.1 Teorem: (X, d) bir tam konik metrik uzay P normal K sabitiyle birlikte normal bir konik olsun.$T: X \to X$ dönüşümü aşağıdaki daraltma şartlarını sağlasın.

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \ \ \forall x, y \in X, k \in [0,1)$$

O zaman T X' de sabit tek noktaya sahiptir ve her $x \in X$ için $(T^n x)$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

İspat:

$x_0 \in X$ olsun (x_n) dizisi için

$$x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, x_3 = Tx_2 = T^3 x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1} x_o$$

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq k^n d(x_1, x_0)$$

elde edilir.

$\forall n > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + d(x_{n-2}, x_{n-3}) + \cdots d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + k^{n-3} + \cdots + k^m) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq \frac{k^m}{1-k} K \|d(x_1, x_0)\|$$

elde edilir. Bu da $d(x_n, x_m) \to 0$ $(n, m \to \infty)$ ile olur. Yani; (x_n) bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $x_n \to x^* \Rightarrow x^* \in X$ vardır. Ayrıca

$$d(Tx^*, x^*) \leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \leq kd(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)$$

olur. Normal konik olduğundan

$$\|d(Tx^*, x^*)\| \leq K(k\|d(x_n, x^*)\| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) \to 0$$

$$\Longrightarrow \|d(Tx^*, x^*)\| = 0 \Longrightarrow Tx^* = x^*$$

Bu da x^*bir sabit noktasıdır.T nin x^* ve y^* iki sabit noktası olsun. O zaman

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq kd(x^*, y^*) \Longrightarrow \|d(x^*, y^*)\| = 0 \text{ ve } x^* = y^*$$

sonuç olarak T'nin sabit noktası tektir.

3.2.2. Not: 3.2.1 teoreminde T dönüşümü süreklidir. Gerçekten $c \in E, 0 \ll c$ verildiğinde $b = \frac{c}{k}$

seçilirse $k > 0$ olduğunda $\frac{c}{k} \in E \Longrightarrow 0 \ll \frac{c}{k}$ dir. O zaman

$$d(x, y) \ll b \quad d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \ll k\frac{c}{k} = c$$

olur.

3.2.3.Teorem: (X, d) bir tam konik metrik uzay, P normal K sabitiyle birlikte normal konik olsun. $0 \ll c$ olacak şekilde bir $c \in E$ ve $x_0 \in X$ için

$$B(x_o, c) = \{x \in X: d(x_0, x) \leq c\}$$

olsun. $T: X \to X$ daraltan dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \forall x, y \in B(x_0, c), k \in [0,1)$$

$d(Tx_0, x_0) \leq (1 - k)c$ O halde $T, B(x_0, c)$ de tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $B(x_0,c)$'nin tam olduğunu göstermek ispatı tamamlar. Bunun için $\forall x \in B(x_0,c)$

için $Tx \in B(x_0,c)$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. $(x_n), X$'te de bir Cauchy dizisi olsun X tam olduğundan bir $x \in X$ için $x_n \to x\ (n \to \infty)$ olur.

$$d(x_0,x) \leq d(x_n,x_0) + d(x_n,x) \leq d(x_n,x) + c \;\; x_n \to x, (n \to \infty) \Longrightarrow d(x_n,x) \to 0$$

Böylece $d(x_0,x) \leq c$ ve $x \in B(x_0,c)$ dir. Yani $(x_n), B(x_0,c)'$de yakınsak bir dizidir. Bu durum $B(x_0,c)$'nin tam konik metrik olduğunu gösterir. $\forall x \in B(x_0,c)$ için

$$d(x_0,Tx) \leq d(Tx_0,x_0) + d(Tx_o,Tx) \leq (1-k)c + kd(x_0,x) \leq (1-k)c + kc = c$$

olur. Öyleyse $Tx \in B(x_0,c)$ dir.

3.2.4.Teorem: (X,d) bir tam konik metrik uzay,P normal K $s$abitiyle birlikte normal bir konik olsun. $T: X \to X$ daraltan dönüşümü $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^n x, T^n y) \leq kd(x,y), \forall x,y \in X, k \in [0,1)$$

şartlarını sağlasın. Böylece T X de tek bir sabit noktaya sahiptir.

3.2.5. Teorem: (X,d) dizisel kompakt konik metrik uzay ve P düzgün konik olsun.$T: X \to X$ dönüşümü zayıf daraltan dönüşüm olsun. Yani $\forall\, x,y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(Tx,Ty) < d(x,y)$$

ise o zaman T'nin X'de tek bir sabit noktası vardır.

İspat: $x_0 \in X$ olsun

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0, \dots.$$

bazı n'ler için $x_{n+1} = x_n$ olursa x_n, T' nin bir sabit noktasıdır. Bu yüzden

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \neq x_n$ olsun ve $d_n = (x_n, x_{n+1})$ olsun.

$$d_{n+1} = d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(Tx_n, Tx_{n+1}) < d(x_n, x_{n+1}) = d_n$$

Yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için (d_n) alttan sınırlı ve monoton azalan bir dizidir. $(0 \leq d_n)$ P düzgün olduğundan $n \to \infty, d_n \to d^*$ olacak şekilde bir $d^* \in E$ vardır. X dizisel kompakt ise X deki her dizi yakınsak alt dizisi vardır. Yani (x_{n_i}); (x_n) alt dizisi olup $x_{n_i} \to x^*(i \to \infty)$ için $x^* \in X$ vardır. Her regüler konik aynı zamanda bir normal konik olduğundan

$$\left\| d\left(Tx_{n_i}, Tx^*\right) \right\| \leq \left\| d\left(x_{n_i}, x^*\right) \right\| \to 0$$

olacak şekilde $K > 0$ sayısı vardır.” (X, d) bir konik metrik uzay, P normal sabit K ile bir normal konik ve $(x_n), X$ içinde bir dizi olsun. (x_n) ve $(y_n), X$ içinde iki dizi ve $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ olsun. O zaman $n \to \infty$ iken $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$olur.” ifadesinden;

$i \to \infty, d\left(x_{n_i}, x^*\right) \to 0$ olduğundan $i \to \infty, d\left(Tx_{n_i}, Tx^*\right) = 0$ olur.

Bu da $i \to \infty, Tx_{n_i} = Tx^*$ demektir. Benzer şekilde

$T^2x_{n_i} \to T^2x^*, (i \to \infty)$ den

$$d\left(Tx_{n_i}, x_{n_i}\right) = d(Tx^*, x^*), \qquad d\left(T^2x_{n_i}, Tx_{n_i}\right) = d(T^2x^*, Tx^*) \ \ (i \to \infty)$$

elde edilir. Şimdi $Tx^* = x^*$olduğunu gösterelim. $Tx^* \neq x^*$olsun. O zaman $d^* \neq 0$ elde edilir. Böylece

$$d^* = d(T^2x^*, Tx^*) > d(T^2x^*, Tx^*) = \lim_{i\to\infty} d_{n_{i+1}} = d^*$$

Bu bir çelişkidir. Yani $Tx^* = x^*$olmalıdır. Sonuç olarak x^*, T' nin sabit bir noktasıdır. Sabit noktanın tekliği açıktır.

3.2.6. Teorem: (X, d) bir tam konik metrik uzay, P normal K sabitiyle birlikte normal bir konik olsun.$T: X \to X$ aşağıdaki daraltma şartlarını sağlasın.

$$d(Tx, Ty) \leq k\big(d(Tx, x) + d(Ty, y)\big)$$

$\forall x, y \in X, k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$. O zaman T, X'de tek bir sabit noktaya sahiptir ve $\forall x \in X$ için $(T^n x)$ öteleme (iterative) dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

İspat:

$x_0 \in X$ olsun.

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0, \dots$$

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq k\big(d(Tx_n, x_n) + d(Tx_{n-1}, x_{n-1})\big)$$
$$= k\big(d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1})\big)$$

Buradan

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1}) = hd(x_n, x_{n-1}) \quad \left(h = \frac{k}{1-k}\right)$$

elde edilir.$n > m$ için

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\
&\leq (h^{n-1} + h^{n-2} + \cdots + h^m) d(x_1, x_0) \\
&\leq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0)
\end{aligned}
$$

olur.

$d(x_n, x_m) \to \infty, (n, m \to \infty)$ Yani (x_n) X de bir Cauchy dizisidir. X tam konik metrik uzay (x_n) X' de yakınsaktır. $x^* \in X, x_n \to x^*, n \to \infty$ olsun.

$$
\begin{aligned}
d(Tx^*, x^*) &\leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \\
&\leq k\big(d(Tx_n, x_n) + d(Tx^*, x^*)\big) + d(x_{n+1}, x^*)
\end{aligned}
$$

$$
d(Tx^*, x^*) \leq \frac{1}{1-k}\big(kd(Tx_n, x_n) + d(x_{n+1}, x^*)\big)
$$

ise

$$
\|d(Tx^*, x^*)\| \leq K\frac{1}{1-k}(k\|d(x_{n+1}, x_n)\| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) \to 0
$$

olur. Yani $\|d(\mathrm{T}x^*, x^*)\| = 0$ dır. Bu da $Tx^* = x^*$ olmasını gerektirir. O halde x^*, T' nin bir sabit noktasıdır. Sabit noktanın tek olduğunu gösterelim.y^*, T' nin başka bir sabit noktası olsun.

$$
d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq k\big(d(Tx^*, x^*) + d(Ty^*, y^*)\big) = 0
$$

Böylece $x^* = y^*$elde edilir. Bu da sabit noktanın tek olduğunu gösterir.

3.2.7.Teorem: (X,d) bir tam konik metrik uzay, P normal K $s$abitiyle birlikte normal bir konik olsun. $T: X \to X$ aşağıdaki daraltma şartlarını sağlasın.

$$d(Tx,Ty) \leq k\big(d(Tx,y)+d(x,Ty)\big), \forall x,y \in X, k \in [0,\frac{1}{2}\Big)$$

O zaman T, X'de tek bir sabit noktaya sahiptir ve $\forall x \in X$ için $(T^n\,x)$ öteleme (iterative) dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

İspat:

$x_0 \in X$ olsun.

$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0, \dots$

$$\begin{aligned} d(x_{n+1},x_n) &= d(Tx_n,Tx_{n-1}) \\ &\leq k\big(d(Tx_n,x_{n-1})+d(Tx_{n-1},x_n)\big) \\ &\leq k\big(d(x_{n+1},x_n)+d(x_n,x_{n-1})\big) \end{aligned}$$

olur.

$$d(x_{n+1},x_n) \leq \frac{k}{1-k}d(x_n,x_{n-1}) = hd(x_n,x_{n-1}), \quad \left(h = \frac{1}{1-k}\right)$$

$n > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\leq d(x_n,x_{n-1})+d(x_{n-1},x_{n-2})+\cdots+d(x_{m+1},x_m) \\ &\leq (h^{n-1}+h^{n-2}+\cdots+h^m)d(x_1,x_0) \leq \tfrac{h^m}{1-h}d(x_1,x_0) \end{aligned}$$

olur.

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq \frac{h^m}{1-h} K \|d(x_1, x_0)\|.$$ Bu da $d(x_n, x_m) \to 0$ $(n, m \to \infty)$.

Yani (x_n) X de bir Cauchy dizisidir.X tam konik metrik uzay (x_n) X' de yakınsaktır.

$x^* \in X, x_n \to x^*$ $(n \to \infty)$ olsun.

$$\begin{aligned} d(Tx^* x^*) &\leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \\ &\leq k\big(d(Tx^*, x_n) + d(Tx_n, x^*)\big) + d(x_{n+1}, x^*), \\ &\leq k\big(d(Tx^*, x^*) + d(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)\big) + d(x_{n+1}, x^*) \end{aligned}$$

$$d(Tx^*, x^*) \leq \frac{1}{1-k}\Big(k\big(d(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)\big) + d(x_{n+1}, x^*)\Big),$$

$$\|d(Tx^*, x^*)\| \leq K \frac{1}{1-k}(k(\|d(x_n, x^*)\| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) \to 0.$$

Yani $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$. Bu da $Tx^* = x^*$ olmasını gerektirir.x^*, T'nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi sabit noktanın tek olduğunu gösterelim.y^*, T' nin başka bir sabit noktası olsun.

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq k\big(d(Tx^*, x^*) + d(Ty^*, y^*)\big) = 0$$

olduğundan $d(x^*, y^*) = 0$ ve buradan $x^* = y^*$ olur. Bu da sabit noktanın tek olduğunu gösterir.

3.2.8. Örnek:

$E = \mathbb{R}^2$ $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ konisi verilsin ve

$$X = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$$

olsun.$d: X \times X \to E$,

$d((x,0),(y,0)) = \left(\frac{4}{3}|x-y|,|x-y|\right),$

$d((0,x),(0,y)) = \left(|x-y|,\frac{2}{3}|x-y|\right),$

$d((x,0),(0,y)) = d((0,y),(x,0)) = \left(\frac{4}{3}x+y,x+\frac{2}{3}y\right).$

biçiminde tanımlansın. d, X üzerinde bir koni metrik olup (X,d) tam koni metrik uzaydır

$T: X \to X$ dönüşümü,

$$T((x,0)) = (0,x) \text{ ve } T((0,x)) = \left(\tfrac{1}{2}x,0\right)$$

olarak verilsin.T dönüşümü,$k = \frac{3}{4} \in [0,1)$ olmak üzere $\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in X$ için

$$d(T((x_1,x_2)),T((y_1,y_2))) \le kd((x_1,x_2),(y_1,y_2))$$

daraltanlık koşulunu sağlar, fakat T dönüşümü,X üzerindeki euclid metriğine göre daraltan bir dönüşüm değildir.

3.3. Koni Normlu Uzaylar ve Fonksiyonların Sabit Noktaları

Koni Normlu Uzaylar

E bir reel Banach uzayı, P E'de $P^0 \neq \emptyset$ olan bir koni ve " $\le$ " E üzerinde P ye göre bir kısmi sıra bağıntısı olarak alınacaktır.

3.3.1. Tanım: Bir X vektör uzayı ve $\|.\|_C: X \to E$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\|.\|_C, \forall x,y \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

1. $0 \leq \|.\|_C$
2. $\|x\|_C = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\|\lambda x\|_C = |\lambda|\|x\|_C$
4. $\|x + y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C$

koşullarını sağlıyorsa $\|.\|_C$ ye X kümesi üzerinde bir **koni norm** ve (X, d) ikilisine de bir **koni normlu uzay** denir (Zabrejko 1997).

3.3.2. Önerme: X bir vektör uzayı ve $\|.\|_C: X \to E$ bir koni norm olsun. O zaman

$$d: X \to X, d(x, y) = \|x - y\|_C \quad (x, y \in X)$$

biçiminde tanımlanan d, X üzerinde bir koni metriktir. Bu durumda $d, \forall x, y, z \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

1. $d(x + z, y + z) = d(x, y)$
2. $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$

özelliklerini sağlar.

İspat:

Önce d nin bir koni metrik olduğu gösterilecektir.$\forall x, y, z \in X$ alındığında

1. $d(x, y) = \|x - y\|_C \geq 0$ $d(x, y) = \|x - y\|_C = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

2. $d(x, y) = \|x - y\|_C = \|(-1)(y - x)\|_C = |-1|\|y - x\|_C = \|y - x\|_C = d(y, x)$
3. $d(x, y) = \|x - y\|_C = \|x - z + z - y\|_C \leq \|x - z\|_C + \|z - y\|_C$

$$= d(x, z) + d(y, z)$$

koşulları sağlandığında d X üzerinde bir koni metriktir.

Ayrıca $\forall x, y, z \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$d(x+z, y+z) = \|(x+z)-(y+z)\|_C = \|x-y\|_C = d(x,y)$$

$$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\|_C = \|\lambda(x-y)\|_C = |\lambda|\|x-y\|_C = |\lambda| d(x,y)$$

olduğundan özellikleri sağlar.

Koni Normlu Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri:

3.3.3. Tanım:$(X, \|.\|_C)$ bir koni normlu uzay,C X in konveks bir alt kümesi ve $S, T: C \to C$ iki dönüşüm olsun.$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$;

1. $n \geq 0$ için $0 \leq \alpha_n \leq 1, 0 \leq \beta_n \leq 1$,

2. $\lim_{n\to\infty} inf \alpha_n = \alpha > 0$

koşullarını sağlayan $\mathbb{R}$ de iki dizi olmak üzere,$\{x_n\} \subset X$ dizisi aşağıdaki biçimde tanımlansın.

1. $x_0 \in C$
2. $n \geq 0$ için $y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n S x_n$
3. $n \geq 0$ için $x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n$

Bu biçimde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisine S ve T ile oluşturulmuş **Ishikawa İterasyon dizisi** denir (Ishikawa 1974).

3.3.4. Teorem: $(X, \|.\|_C)$ bir koni normlu uzay,C X in dizisel kapalı ve konveks bir alt kümesi,$S, T: C \rightarrow C, 0 \leq q < 1$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$\|Sx - Ty\|_C \leq q \vee \{\|x - y\|_C, \|x - Sx\|_C, \|y - Ty\|_C, \|x - Ty\|_C, \|y - Sx\|_C\}$$

koşulunu sağlayan dönüşümler ve $\{x_n\}$ de 3.3.3 Tanım ile verilen Ishıkawa iterasyon dizisi olsun. Eğer $\{x_n\}$ dizisi bir z noktasına yakınsıyorsa, o zaman z S ve T nin ortak bir sabit noktasıdır ve bu nokta tektir.

İspat:

$\{x_n\}$ dizisi z noktasına yakınsadığından o halde $\{x_n\}$ C de bir Cauchy dizisidir. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} inf \alpha_n = \alpha > 0$ olduğundan bir $c \in E, 0 \ll c$ alındığında,

$$\forall n \geq \mathbb{N} \text{ için } \frac{\alpha}{2} = \alpha_n,\ \|x_{n+1} - x_n\|_C \ll \frac{(1-q)^2 c\alpha}{4} \text{ ve } \|x_n - z\|_C \ll \frac{(1-q)c}{2}$$

olacak biçimde yeteri kadar büyük bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

$$n \geq 0 \text{ için } x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n$$

eşitliğinden

$$(x_{n+1} - x_n) = \alpha_n(Ty_n - x_n)$$

elde edilir."E bir reel Banach uzayı ve P de E de bir koni olsun. O zaman,$x, y \in P$ ve

$a, b \in \mathbb{R}$ için $x \leq y$ ve $0 \leq a \leq b$ ise $ax \leq by$ dir" ifadesinden $\forall n \geq \mathbb{N}$ için

$$\|x_{n+1}-x_n\|_C=\alpha_n\|Ty_n-x_n\|_C\geq\frac{\alpha}{2}\|Ty_n-x_n\|_C$$

$$\|Ty_n-x_n\|_C\leq\frac{2}{\alpha}\|x_{n+1}-x_n\|_C\ll\frac{2}{\alpha}\frac{(1-q)^2c\alpha}{4}=\frac{(1-q)^2c}{2}$$

elde edilir.

$$\|Sx_n-Ty_n\|_C\leq q\{\|x_n-y_n\|_C,\|x_n-Sx_n\|_C,\|y_n-Ty_n\|_C,\|x_n-Ty_n\|_C,\|y_n-Sx_n\|_C\}$$

Burada beş durum söz konusudur.

1.Durum:

$\|Sx_n-Ty_n\|_C\leq q\|x_n-y_n\|_C$ ise

$n\geq 0$ için $y_n=(1-\beta_n)\,x_n+\beta_n\,Sx_n$ ve $\|x+y\|_C\leq\|x\|_C+\|y\|_C,\ 0\leq\beta_n\leq 1$

koşullarından

$$\begin{aligned}\|Sx_n-Ty_n\|_C\leq q\|x_n-y_n\|_C &= q\|y_n-x_n\|_C\\ &= q\|x_n-\beta_nx_n+\beta_nSx_n-x_n\|_C\\ &= q\|\beta_n(Sx_n-x_n)\|_C\\ &= q\beta_n\|Sx_n-x_n\|_C\\ &\leq q\|Sx_n-x_n\|_C\\ &\leq q\|Sx_n-Ty_n\|_C+q\|Ty_n-x_n\|_C\end{aligned}$$

O halde

$$\|Sx_n - Ty_n\|_C \leq \frac{q}{1-q}\|Ty_n - x_n\|_C$$

olur.

<u>2.Durum:</u>

$\|Sx_n - Ty_n\|_C \leq q\|x_n - Sx_n\|_C$ ise,

$\|x + y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C$ ifadesinden

$$\|Sx_n - Ty_n\|_C \leq q\|x_n - Ty_n\|_C + q\|Ty_n - Sx_n\|_C$$

olur. Buradan

$$\|Sx_n - Ty_n\|_C \leq \frac{q}{1-q}\|Ty_n - x_n\|_C$$

elde edilir.

<u>3.Durum:</u>

$\|Sx_n - Ty_n\|_C \leq q\|y_n - Ty_n\|_C$ ise,

$y_n = (1 - \beta_n\ )x_n + \beta_n\, Sx_n$,$\|x + y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C$ ifadelerinden

$$\begin{aligned}\|Sx_n - Ty_n\|_C \leq q\|y_n - Ty_n\|_C &= q\|x_n - \beta_n x_n + \beta_n Sx_n - Ty_n\|_C \\ &= q\|x_n - \beta_n x_n + \beta_n Sx_n - Ty_n + \beta_n Ty_n - \beta_n Ty_n\|_C\end{aligned}$$

$$= q\|\beta_n(Sx_n - Ty_n) + (1-\beta_n)(x_n - Ty_n)\|_C$$

$$\leq q\|\beta_n(Sx_n - Ty_n)\|_C + q\|(1-\beta_n)(x_n - Ty_n)\|_C$$

$$\leq q\beta_n\|Sx_n - Ty_n\|_C + q(1-\beta_n)\|x_n - Ty_n\|_C$$

$$\leq q\|Sx_n - Ty_n\|_C + q\|x_n - Ty_n\|_C$$

olur. Buradan

$$\|Sx_n - Ty_n\|_C \leq \frac{q}{1-q}\|Ty_n - x_n\|_C$$

elde edilir.

4.Durum:

$$\|Sx_n - Ty_n\|_C \leq q\|y_n - Sx_n\|_C \text{ ise}$$

$$\|Sx_n - Ty_n\|_C \leq q\|x_n - Ty_n\|_C + q\|Sx_n - Ty_n\|_C$$

olur. Buradan

$$\|Sx_n - Ty_n\|_C \leq \frac{q}{1-q}\|Ty_n - x_n\|_C$$

elde edilir.

5.Durum:

$\|Sx_n - Ty_n\|_C \leq q\|y_n - Sx_n\|_C$ ise,

$y_n = (1-\beta_{\ n})x_n + \beta_n\ Sx_n,\quad 0 \leq \beta_n \leq 1$ olup ve $\|x+y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C$ ifadesinden

$$\begin{aligned}
\|Sx_n - Ty_n\|_C \leq q\|y_n - Sx_n\|_C &= \|x_n - \beta_n x_n + \beta_n Sx_n - Sx_n\|_C \\
&= q\|(1-\beta_n)x_n - (1-\beta_n)Sx_n\|_C \\
&= q\|(1-\beta_n)(x_n - Sx_n)\|_C \\
&= q(1-\beta_n)\|x_n - Sx_n\|_C \\
&\leq q\|x_n - Sx_n\|_C \\
&\leq q\|x_n - Ty_n\|_C + q\|Ty_n - Sx_n\|_C
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\|Sx_n - Ty_n\|_C \leq \frac{q}{1-q}\|Ty_n - x_n\|_C$$

elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = Tz$$

olur. Burada

$$\|Sx - Ty\|_C \leq q \vee \{\|x-y\|_C, \|x-Sx\|_C, \|y-Ty\|_C, \|x-Ty\|_C, \|y-Sx\|_C\}$$

eşitsizliği kullanıldığında,

$$\|Sx_n - Tz\|_C \leq q \vee \{\|x_n - z\|_C, \|x_n - Sx_n\|_C, \|z - Tz\|_C, \|x_n - Tz\|_c, \|z - Sx_n\|_C\}$$

elde edilir. Burada $\forall n \geq \mathbb{N}$ için beş durum vardır.

1.Durum:

$\|Sx_n - Tz\|_C \leq q\|x_n - z\|_C$ ise,

$$\|Sx_n - Tz\|_C \leq q\|x_n - z\|_C \ll q\frac{(1-q)c}{2} \leq \frac{c}{2} \leq c$$

olur.

2.Durum:

$\|Sx_n - Tz\|_C \leq q\|x_n - Sx_n\|_C$ İfadesinde

$\|x + y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C$ Koşulu ve $\|Sx_n - Ty_n\|_C \leq \frac{q}{(1-q)}\|Ty_n - x_n\|_C$ eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}\|Sx_n - Tz\|_C &\leq q\|x_n - Ty_n\|_C + q\|Ty_n - Sx_n\|_C \\ &\leq q\|x_n - Ty_n\|_C + q\tfrac{q}{1-q}\|Ty_n - x_n\|_C \\ &= \left(q + \tfrac{q^2}{1-q}\right)\|Ty_n - x_n\|_C \\ &= \tfrac{q}{1-q}\|Ty_n - x_n\|_C\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\|Ty_n - x_n\|_C \leq \frac{2}{\alpha}\|x_{n+1} - x_n\|_C \ll \frac{2}{\alpha}\frac{(1-q)^2 c\alpha}{4} = \frac{(1-q)^2 c}{2}$$

Eşitsizliği kullanıldığında

$$\|Sx_n - Tz\|_C \leq \frac{q}{1-q}\|Ty_n - x_n\|_C \ll \frac{q}{1-q}\frac{(1-q)^2 c}{2} = \frac{q(1-q)c}{2} \leq \frac{c}{2} \leq c$$

elde edilir.

<u>3.Durum</u>:

$|Sx_n - Tz|_C \leq q\|z - Tz\|_C$ ifadesinde

$\|x+y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C$ koşulu ve $\|Sx_n - Ty_n\|_C \leq \frac{q}{1-q}\|Ty_n - x_n\|_C$ eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}\|Sx_n - Tz\|_C &\leq q\|z - Ty_n\|_C + q\|Ty_n - Sx_n\|_C + q\|Sx_n - Tz\|_C\\ &\leq q\|z - Ty_n\|_C + q\frac{q}{1-q}\|Ty_n - x_n\|_C + q\|Sx_n - Tz\|_C\\ &\leq q\|z - x_n\|_C + q\|x_n - Ty_n\|_C + \frac{q^2}{1-q}\|Ty_n - x_n\|_C + q\|Sx_n - Tz\|_C\\ &= q\|z - x_n\|_C + \left(q + \frac{q^2}{1-q}\right)\|x_n - Ty_n\|_C + q\|Sx_n - Tz\|_C\\ &= q\|z - x_n\|_C + \frac{q}{1-q}\|x_n - Ty_n\|_C + q\|Sx_n - Tz\|_C\end{aligned}$$

olur.

$$\|Ty_n - x_n\|_C \leq \frac{2}{\alpha}\|x_{n+1} - x_n\|_C \ll \frac{2}{\alpha}\frac{(1-q)^2 c\alpha}{4} = \frac{(1-q)^2 c}{2}$$

eşitsizliğinden

$$\|Sx_n - Tz\|_C \leq \frac{q}{1-q}\|z - x_n\|_C + \frac{q}{(1-q)^2}\|Ty_n - x_n\|_C$$

$$\ll \frac{q}{1-q}\frac{(1-q)c}{2} + \frac{q}{(1-q)^2}\frac{(1-q)^2c}{2} = \frac{qc}{2} + \frac{qc}{2} = qc \leq c$$

elde edilir.

<u>4.Durum:</u>

$\|Sx_n - Tz\|_C \leq q\|x_n - Tz\|_C$ ifadesinde

$\|x+y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C$ koşulu ve $\|Sx_n - Ty_n\|_C \leq \frac{q}{1-q}\|Ty_n - x_n\|_C$ eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}\|Sx_n - Tz\|_C &\leq q\|x_n - Ty_n\|_C + q\|Ty_n - Sx_n\|_C + q\|Sx_n - Tz\|_C \\ &\leq q\|x_n - Ty_n\|_C + q\frac{q}{1-q}\|Ty_n - x_n\|_C + q\|Sx_n - Tz\|_C \\ &= \left(q + \frac{q^2}{1-q}\right)\|Ty_n - x_n\|_C + q\|Sx_n - Tz\|_C \\ &= \frac{q}{1-q}\|Ty_n - x_n\|_C + q\|Sx_n - Tz\|_C\end{aligned}$$

olur.

$$\|Sx_n - Tz\|_C \leq \frac{q}{(1-q)^2}\|Ty_n - x_n\|_C \ll \frac{q}{(1-q)^2}\frac{(1-q)^2c}{2} = \frac{qc}{2} \leq c$$

elde edilir.

<u>5.Durum</u>:

$\|Sx_n - Tz\|_C \leq q\|z - Sx_n\|_C$ ifadesinde,

$\|x+y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C$ koşulu ve $\|Sx_n - Ty_n\|_C \leq \frac{q}{1-q}\|Ty_n - x_n\|_C$ eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}\|Sx_n - Tz\|_C &\leq q\|z - x_n\|_C + q\|x_n - Ty_n\|_C + q\|Ty_n - Sx_n\|_C \\ &\leq q\|z - x_n\|_C + q\|x_n - Ty_n\|_C + q\frac{q}{1-q}\|Ty_n - x_n\|_C \\ &= q\|z - x_n\|_C + \left(q + \frac{q^2}{1-q}\right)\|x_n - Ty_n\|_C \\ &= q\|z - x_n\|_C + \frac{q}{1-q}\|x_n - Ty_n\|_C\end{aligned}$$

olur.

$$\|Sx_n - Ty_n\|_C \leq \frac{q}{1-q}\|Ty_n - x_n\|_C$$

eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\|Sx_n - Tz\|_C &\leq q\|z - x_n\|_C + \frac{q}{1-q}\|x_n - Ty_n\|_C \\ &\ll q\frac{(1-q)c}{2} + \frac{q}{1-q}\frac{(1-q)^2c}{2} = q\frac{(1-q)}{2}c + q\frac{(1-q)}{2}c \\ &= q(1-q)c \leq c\end{aligned}$$

elde edilir.

Her beş durumda da $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|Sx_n - Tz\|_C \ll c$ olur. Böylece $Sx_n \to Tz$ $(n \to \infty)$ olur.

$$\|z - Sx_n\|_C \leq \|z - x_n\|_C + \|x_n - Ty_n\|_C + \|Ty_n - Sx_n\|_C$$

$$\leq \|z - x_n\|_c + \|x_n - Ty_n\|_C + \frac{q}{(1-q)}\|x_n - Ty_n\|_C$$

$$\leq \|z - x_n\|_C + \left(1 + \frac{q}{1-q}\right)\|x_n - Ty_n\|_C$$

$$= \|z - x_n\|_C + \frac{1}{1-q}\|x_n - Ty_n\|_C$$

olur. $\forall n \geq \mathbb{N}$ için

$$\|z - Sx_n\|_C \leq \|z - x_n\|_C + \frac{1}{1-q}\|x_n - Ty_n\|_C$$

$$\ll \frac{(1-q)c}{2} + \frac{1}{1-q}\frac{(1-q)^2}{2}c$$

$$= \frac{(1-q)c}{2} + \frac{(1-q)c}{2} = (1-q)c \ll c$$

bulunur. Bu ise $Sx_n \to z \quad (n \to \infty)$ olmasını verir. Bu durumda $Sx_n \to Tz \quad (n \to \infty)$ olup yakınsak bir dizinin limiti tek olduğundan $Tz = z$ olup z, T'nin bir sabit noktası olur.

$$\|Sx - Ty\|_C \leq q \vee \{\|x - y\|_C, \|x - Sx\|_C, \|y - Ty\|_C, \|x - Ty\|_C, \|y - Sx\|_C\}$$

eşitsizliği kullanıldığında

$$\|Sz - z\|_C = \|Sz - Tz\|_C \leq q \vee \{\|z - z\|_C, \|z - Sz\|_C, \|z - Tz\|_C\}$$

$$= q \vee \{0, \|z - Sz\|_C\}$$

olur. Burada iki durum vardır. Eğer

$$\|Sz - z\|_C \leq q.0 \Rightarrow Sz = z$$

olur. Eğer

$$\|Sz - z\|_C \leq q\|Sz - z\|_C$$

ise,$q < 1$ için "P bir koni $x \in P, \alpha \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $x \leq \alpha x \Rightarrow x = 0$" ifadesinden

$$\|Sz - z\|_C = 0 \Rightarrow Sz = z$$

elde edilir.

Bu durumda z, S ve T nin ortak sabit noktalarıdır.

T ve S dönüşümlerin z den başka sabit noktası a olduğunu kabul edelim.o halde

$$\begin{aligned}\|z - a\|_C &= \|Sz - Ta\|_C \\ &\leq q \vee \{\|z - a\|_C, \|z - Sz\|_C, \|a - Ta\|_C, \|z - Ta\|_C, \|a - Sz\|_C\} \\ &\leq q \vee \{\|z - a\|_C, 0\}\end{aligned}$$

olur.

Eğer $\|z - a\|_C \leq q\|z - a\|_C$ ise

$q < 1$ için "P bir koni $x \in P, \alpha \in R, 0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $x \leq \alpha x \Rightarrow x = 0$" ifadesinden

$$\|z - a\| = 0$$

olur. Bu ise $z = a$ olmasını verir.

Eğer $\|z-a\|_C \leq q.0 \Rightarrow z=a$ olur.

O halde S ve T dönüşümlerin sabit noktası tektir.

3.3.4. Teorem: $(X,\|.\|)$ Bir normlu uzay, C, X in kapalı ve konveks bir alt kümesi,

$S,T: C \to C, 0 \leq q < 1, \forall x,y \in X$ için

$$\|Sx-Ty\| \leq qmax\{\|x-y\|,\|x-Sx\|,\|y-Ty\|,\|x-Ty\|,\|y-Sx\|\}$$

koşulunu sağlayan dönüşümler ve $\{x_n\}$ de 3.3.3 tanım ile verilen Ishikawa iterasyon dizisi olsun. Eğer $\{x_n\}$ dizisi bir z noktasına yakınsıyorsa, z S ve T nin ortak sabit noktasıdır ve bu nokta tektir.

3.4. Reel Diziler için Bazı Lemmalar

Bu kısımda teoremlerimizde kullanacağımız bazı önemli lemmalara yer verilmiştir.

3.4.1. Lemma:$\{r_n\}$ ve $\{t_n\}$,

$$r_{n+1} \leq (1+t_n)r_n, n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliğini sağlayan ve negatif olmayan reel sayı dizileri olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < \infty$ ise,

$$\lim_{n\to\infty} r_n$$

limiti vardır (Zhou et al.2002).

İspat: $m,n \in \mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
r_{n+m+1} &\leq (1+t_{n+m})r_{n+m} \\
&\leq (1+t_{n+m})(1+t_{n+m-1})r_{n+m-1} \\
&\quad \vdots \\
&\leq \left(\prod_{i=n}^{n+m}(1+t_i)\right)r_n
\end{aligned}
$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece

$$limsup_{m\to\infty} r_m \leq \left(\prod_{i=n}^{\infty}(1+t_i)\right) r_n$$

olur.$\sum_{n=1}^{\infty} t_n < \infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=n}^{\infty}(1+t_i) = 1$ elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikten

$$limsup_{n\to\infty} r_n \leq liminf_{n\to\infty} r_n$$

eşitsizliği yazılabilir. O halde

$$\lim_{n\to\infty} r_n$$

vardır.

3.4.2. Lemma:$\{a_n\}, \{b_n\}, \{\delta_n\} \in \mathbb{R}^+$ ve

$$a_{n+1} \leq (1+\delta_n)a_n + b_n, n \geq 1$$

eşitsizliğini sağlayan diziler olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ ise, $\lim_{n\to\infty} a_n$ limiti vardır (Tan and Xu 1993).

İspat:

$m, n \geq 1$ için $a_{n+m+1} \leq (1 + \delta_{n+m})a_{n+m} + b_{n+m}$

$$\leq (1 + \delta_{n+m})(a_{n+m} + b_{n+m})$$
$$\leq (1 + \delta_{n+m})\big((1 + \delta_{n+m-1})(a_{n+m-1} + b_{n+m-1}) + b_{n+m}\big)$$
$$\vdots$$
$$\leq (\prod_{i=n}^{n+m}(1 + \delta_i))(a_n + \sum_{i=1}^{n+m} b_i)$$

yazılabilir.

$$\lim_{n\to\infty} sup a_n \leq \left(\prod\nolimits_{i=n}^{\infty}(1 + \delta_i)\right)\left(a_n + \sum_{i=n}^{\infty} b_i\right)$$

olur.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=n}^{\infty}(1 + \delta_i) = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} b_i = 0$ elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty} sup a_n \leq \left(\prod_{i=n}^{\infty}(1 + \delta_i)\right)\left(a_n + \sum_{i=n}^{\infty} b_i\right)$$

ifadesinden

$$limsup_{n\to\infty} a_n \leq liminf_{n\to\infty} a_n$$

yazılır. O halde $\lim_{n\to\infty} a_n$ limiti vardır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Konik Ve Konveks Yapılarının Kavramsal Gelişimi

Öncelikle yakınsaması üzerinde durulan iterasyonun ele alındığı uzayın konik ve konvekslik kavramlarının basit düzeyde matematiksel olarak ne ifade ettiğine değinelim. Konik ilk kez bir küpün hacminin iki katına çıkarılması probleminde ortaya çıkmıştır. Yunan Kralı Minos bir türbe inşa ettirmek için emir vermiş, fakat küp şeklinde olan bu türbenin hacminin mevcut küp şeklindeki türbenin hacminin iki katı olması gerektiğini söylemiştir. O zamanın birçok matematikçisi bu problemin çözümü için uğraşmasına rağmen ancak Plato Akademisi üyelerinden Menaechmus (M.Ö.380-M.Ö 320) adlı bir matematikçi bu probleme çözüm getirebilmiştir. Euclid ve Aristotelesin de içlerinde bulunduğu başka birçok matematikçi konikler hakkında araştırma ve incelemeler yapmıştır. Euclid'in konikler üzerine yaptığı araştırmalara dair bir kanıt bulunmamasına rağmen, birçok bilim adamı Archimedes'in konikler üzerine yayınlanmış eserlerine onun araştırmalarının ilham verdiğine inanmaktadır.

Antalyalı Apollonius çalışmalarında koniklerle ilgili mevcut bilgilere birçok bilgi daha eklemiştir. Ayrıca bu konuda "konikler" adında 487 tane önermeyi barındıran 8 ciltlik bir kitabı yazmıştır. Bunlardan ilk dördü Yunancadır. Beşinci, altıncı ve yedinci ciltlerin Arapçaya çevrilmiş halleri bulunurken sekizinci cilt asla bulunamamıştır. Apollonius'tan sonra konikler ile uğraşan iki matematikçi Pappus ve Proclus olmuştur. Pappus ve Proclus beşinci yüzyılda kendilerinden önce gelen matematikçilerin konikler üzerinde yaptıkları çalışmalara bir çok yorum getirmişlerdir. Bu iki matematik tarihçisinden sonra 15.yüzyıla kadar genelde Yunan kültürü ve bilgisi; özelde de konikler hakkında bir canlanma yaşanmamıştır. Konikliğe katkıda bulunan matematikçilerden bazılarına Newton, Poncelet, Steiner, Dandelin, Dupin ,Gergonne,Brianchon örnek verilebilir.

Koni uzayda ifade edilebilen bir yüzeydir. Literatürde koni, çok yüzlü koni kavramları sıklıkla lineer programlama, optimizasyon ve su şebekeleri ile ilgili problem ve çözümlerde gözükmektedir. Ayrıca makinalar, ev araçları, süslemeler gibi pek çok üretim sektöründe de kullanılan yüzey çeşitlerinden biridir. Diğer taraftan özel eğrilerden olan parabol, elips, çember ve hiperbol gibi eğriler koni ile düzlemlerin kesişmesiyle oluşmaktadır.

Konveksite de geometride olduğu gibi matematiğin diğer dallarında geniş ölçüde kullanılan temel bir kavramdır. Konveksite fonksiyonel analiz, kompleks analiz, salınımların analizi, kısmı türevli diferansiyel denklemler, diskret(ayrık) matematik, cebirsel geometri, olasılık teorisi, kodlama teori,kristallografi ve diğer pek çok alanda genellikle gizli(dolaylı) olarak yer almaktadır. Konveksite matematiğin dışında fizik, kimya, biyoloji ve diğer pek çok alanlarda da önemli bir rol oynamaktadır. Ayrıca konvekslikle ilgili çalışmalar bilim ve teknolojiye pek çok katkı sağlamaktadır. Konveks kümelerin farklı tanımları bulunmasına karşın en kullanışlı olanı “arada olmaya” dayanan tanımıdır.

Konveksite Yunanlı filozoflar tarafından incelenmiştir ve muhtemelen eski Mısır ve Babil döneminde de izi sürülmüştür. Belki de bu kavram sayıların geçmişi kadar eski değildir. Fakat çemberler üçgenler gibi temel geometrik şekillerin çizimi insanlık medeniyetinin başlangıcına kadar geri gider. Yunanlı bilim insanlarının yaptığı en önemli katkı geometriye yaptığı katkılar olduğu bilinmektedir bu hususta ilk sistematik ve ciddi eserin 13 ciltlik Euclid’in Elements olduğu iyi bilinmektedir. Konveksite kavramınının ilk kim ya da kimlerin gündeme getirdiğini söylemek pratikte mümkün gözükmemektedir.

Konvekslikle ilgili ilk sistematik ve özenli tanımı On the sphere and cylinder adlı bilimsel eserinde Archimedes’in yaptığı gözükmektedir. **(Archimedes:** Başlangıç noktaları bir doğru üzerinde bulunan ve doğrunun oluştuğu yarı düzlemlerden sadece bir tarafında yer alan veya diğer yarı düzlemde parçası olmayan düzlemde bükülmüş belli doğru parçaları vardır) Archimedes in bu tanımı iki bin yıl boyunca duyulmamış ve üzerine çalışılmamıştır. Elbette bunlar matematikçiler özellikle 17. yüzyıl matematikçileri tarafından bilinmektedir. Bununla birlikte o zaman konvekslikle ilgili problemlerin önceliği yoktur. Öncelikle analizin gelişimi katkıda bulunan limit, süreklilik ve türev gibi kavramlardan kaynaklanan problemlerdir.

Konvekslikle ilgili daha sonraki sistematik ilk çalışma Minkowski (1864-1909) tarafından yapılmıştır ve bu çalışmalar bu kavramla ilgili en temel ve önemli fikirleri içermektedir. Konveksite teorisinde en erken gelişmeler sonlu boyutlu ve nicel problemlerin çözümlerine yönelmiştir. Bu çalışmalar ile ilgili ilk ciddi inceleme Bonnesen (1873-1935) ve Fenchel (1905-1988) tarafından yapılmıştır. 1940 dan beri matematiğin diğer alanlarında uygulamalarından dolayı konveksliğin kombinatorik nitel ve teorinin boyuttan bağımsız kısmı üzerinde çalışma eğilimi arttı Bu kavramla ilgili en son tartışmalar niteldir ve sonsuz boyutlu topolojik vektör uzayları üzerindeki konveksliğe kaymıştır.

Koni ve Konveks Koni kavramlarının matematiksel tanımı şu şekildedir:

“$C \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer her $x \in C, \lambda \geq 0$ reel sayıları için $\lambda x \in C$ ise o zaman C ye bir **koni** denir. Eğer her $x_1, x_2 \in C$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ reel sayı çiftleri için $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$ ise o zaman C ye bir **konveks koni** denir.” Yani;

$C, \mathbb{R}^n$ ait boş kümeden farklı alt kümesi verilsin

- C den alınan iki noktanın toplamı yine C de kalıyorsa,
- C de alınan bir noktanın negatif olmayan bir reel sayı ile çarpımı yine C ye aitse
- C kümesi her zaman orjini içeriyorsa

C kümesine **konveks konik** denir.

4.2 Konveks Konik Metrik Uzayın Düzgün Quasi Lipschitzian Dönüşümleri İçin Üç Adımlı İterasyon Şeması

Bu kısımda materyal yöntemde ifade edilen uniform quasi-Lipschitzian dönüşümlerin konveks konik metrik uzaydaki yakınsaması üzerine durulacaktır

(X, d, W) Tam konveks konik metrik uzay,P normal sabiti k olan E de normal bir koni olsun. $\emptyset \neq C \subset X$ konveks kapalı altkümesi; $T_i, R_i, S_i: C \to C$ sırasıyla

$0 < L_i, 0 < L_i', 0 < L_i''$ uniform quasi-Lipschitzian dönüşümler olsun

$$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}, \{e_n\}, \{l_n\}$$

dizileri [0,1] aralığında alınmak üzere

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = a_n + b_n + c_n = d_n + e_n + l_{n=1}$$

şartını sağlasın. Bu durumda

$$F = \left(\cap_{i=1}^{\infty} F(T_i)\right) \cap \left(\cap_{i=1}^{\infty} F(R_i)\right) \cap \left(\cap_{i=1}^{\infty} F(S_i)\right) \neq \emptyset$$

ve $x_1 \in C$ olmak üzere uniform quasi-Lipschitzian dönüşümlerin üç sonsuz ailesi için $\{x_n\}$ dizisini

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= W(x_n, T_n^n y_n, u_n; \alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \\ y_n &= W(R_n^n x_n, S_n^n z_n, v_n; a_n, b_n, c_n) \qquad (4.2.1) \\ z_n &= W(S_n^n x_n, R_n^n x_n, w_n; d_n, e_n, l_n) \end{aligned}$$

şeklinde olsun. Burada $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}, C$ de sınırlı dizilerdir. Iterasyonda $e_n = 1, d_n = l_n = 0$ ve $R_i = I$ olarak alınırsa,

$$x_{n+1} = W(x_n, T_n^n y_n, u_n; \alpha_n, \gamma_n, \beta_n)$$
$$y_n = W(x_n, S_n^n x_n, v_n; a_n, b_n, c_n) \tag{4.2.2}$$

şeklinde Ishikawa tipi iterasyon elde edilir.

iterasyonda $e_n = b_n = 1, d_n = I_n = 0, a_n = c_n = 0$ ve $R_i = S_i = I$ alınırsa,

$$x_{n+1} = W(x_n, T_n^n y_n, u_n; \alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \tag{4.2.3}$$

bu iterasyon Mann tipi iterasyondur.

Lemma 4.2.1: (X, d, W) konik konveks metrik uzay, $\emptyset \neq C \subset X$ olsun.$i = 1,2, \ldots$ için $T_i, R_i, S_i: C \to C$ sırasıyla $L_i > 0, L'_i > 0, L''_i > 0$ Lipschitz sabitleri ile uniform quasi-Lipschitzian dönüşümler olsun. Ayrıca $F \neq \emptyset$ ve sınırlı bir küme olsun. Bu durumda $\forall x \in C, p \in F$ ve $n = 1,2, \ldots$ için

$$d(T_i^n x, p) \leq Ld(x, p)$$
$$d(R_i^n x, p) \leq Ld(x, p)$$
$$d(S_i^n x, p) \leq Ld(x, p)$$

olacak biçimde bir $L \geq 0$ sayısı vardır.

Lemma 4.2.2: C , $k = 1$ normal sabiti ile normal solid konik ve (X, d, W) tam konveks konik metrik uzayının boştan farklı konveks kapalı altkümesi olsun $T_i, R_i, S_i: C \to C$, sırasıyla

$$L_i > 0, L_i' > 0, L_i'' > 0$$

Lipschitz sabitleri ile uniform quasi-Lipschitzian dönüşümler olsun.

$$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}, \{e_n\}, \{l_n\}$$

dizileri [0,1] aralığında alınmak üzere

$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = a_n + b_n + c_n = d_n + e_n + l_n = 1$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n + \gamma_n) < \infty$

sağlasın.$\{L_i\}, \{L_i'\}, \{L_i''\}$ dizileri sınırlı olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.2.1) deki gibi tanımlansın. O halde

a) $\forall p \in F$ için

$$d(x_{n+1}, p) \leq [1 + \beta_n L^2(1 + L)]d(x_n, p) + \eta_n M_0$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$L = max\{sup_{i\geq 1}\{L_i\}, sup_{i\geq 1}\{L'_i\}, sup_{i\geq 1}\{L''_i\}\}, \eta_n = \beta_n + \gamma_n$$

ve

$$M_0 = sup_{p\in F, n\geq 1}\{d(u_n, p) + Ld(v_n, p) + L^2 d(w_n, p)\}$$

dir.

b) $\forall p \in F, m, n \geq 1$ için

$$d(x_{n+m},p) \leq M_1 d(x_n,p) + M_0 M_1 \sum_{k=n}^{n+m-1} \eta_k$$

dir. Burada $M_1 = e^{L^2(1+L)\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k}$ dır.

İspat: Tanım 3.1.21,(4.2.1) İterasyonu Lemma 3.4.2 ve Lemma 4.2.1 den

a)

$$\begin{aligned} d(x_{n+1},p) &= d(W(x_n,T_n^n y_n,u_n;\alpha_n,\beta_n\gamma_n),p) \\ &\preccurlyeq \alpha_n d(x_n,p) + \beta_n d(T_n^n y_n,p) + \gamma_n d(u_n,p) \\ &\preccurlyeq \alpha_n d(x_n,p) + \beta_n L d(y_n,p) + \gamma_n d(u_n,p) \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

$$\begin{aligned} d(y_n,p) &= d(W(R_n^n x_n,S_n^n z_n,v_n;a_n,b_n,c_n),p) \\ &\preccurlyeq a_n d(R_n^n x_n,p) + b_n d(S_n^n z_n,p) + c_n d(v_n,p) \\ &\preccurlyeq a_n L d(x_n,p) + b_n L d(z_n,p) + c_n d(v_n,p) \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

$$\begin{aligned} d(z_n,p) &= d(W(S_n^n x_n,R_n^n x_n,w_n;d_n,e_n,l_n),p) \\ &\preccurlyeq d_n d(S_n^n x_n,p) + e_n d(R_n^n x_n,p) + l_n d(w_n,p) \\ &\preccurlyeq d_n L d(x_n,p) + e_n L d(x_n,p) + l_n d(w_n,p) \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

olur. (4.2.6) ifadesini (4.2.5) de yerine yazarsak;

$$d(y_n,p) \preccurlyeq a_n L d(x_n,p) + b_n L[d_n L d(x_n,p) + e_n L d(x_n,p) + l_n d(w_n,p)] + c_n d(v_n,p)$$

$$= a_n L d(x_n,p) + b_n L[(d_n+e_n) L d(x_n,p) + l_n d(w_n,p)] + c_n d(v_n,p)$$

$$\preccurlyeq a_n L d(x_n,p) + b_n L[L d(x_n,p) + l_n d(w_n,p)] + c_n d(v_n,p)$$

$$= (a_n + b_n L) L d(x_n,p) + b_n l_n L d(w_n,p) + c_n d(v_n,p)$$

$$\preccurlyeq L(1+L)d(x_n,p) + Ld(w_n,p) + d(v_n,p) \tag{4.2.7}$$

olur. (4.2.7) ifadesi (4.2.4) de yazarsak

$$d(x_{n+1},p) \preccurlyeq \alpha_n d(x_n,p) + \beta_n L[L(1+L)d(x_n,p) + Ld(w_n,p) + d(v_n,p)] + \gamma_n d(u_n,p)$$

$$= \left(\alpha_n + \beta_n L^2(1+L)\right)d(x_n,p) + \beta_n L^2 d(w_n,p) + \beta_n L d(v_n,p) + \gamma_n d(u_n,p)$$

$$= \left(1 + \beta_n L^2(1+L)\right)d(x_n,p) + [d(u_n,p) + Ld(v_n,p) + L^2 d(w_n,p)](\beta_n + \gamma_n)$$

$$= \left(1 + \beta_n L^2(1+L)\right)d(x_n,p) + M_0\eta_n \tag{4.2.8}$$

olarak bulunur.

b) $\forall x \geq 0$ için $1 + x \leq e^x$ ifadesinden ve (4.2.8) eşitsizliğinden,$\forall p \in F\ m,n \geq 1$

için

$$d(x_{n+m},p) \preccurlyeq [1 + \beta_{n+m-1}L^2(1+L)]d(x_{n+m-1},p) + M_0\eta_{n+m-1}$$

$$\preccurlyeq e^{\beta_{n+m-1}L^2(1+L)}d(x_{n+m-1},p) + M_0\eta_{n+m-1}$$

$$\preccurlyeq e^{\beta_{n+m-1}L^2(1+L)}\left[\left(1 + \beta_{n+m-2}L^2(1+L)\right)d(x_{n+m-2},p) + M_0\eta_{n+m-2}\right]$$

$$+M_0\eta_{n+m-1}$$

$$\preccurlyeq e^{(\beta_{n+m-1}+\beta_{n+m-2})L^2(1+L)}d(x_{n+m-2},p) + M_0[\eta_{n+m-2} + \eta_{n+m-1}]$$

$\vdots$

$\preccurlyeq M_1 d(x_n, p) + M_1 M_0 \sum_{k=n}^{n+m-1} \eta_k$

olur. Burada $M_1 = e^{L^2(1+L)\sum^{\infty}\beta_k}$ dir

Teorem.4.2.3: $C, k = 1$ normal sabiti ile solid normal konik ve (X, d, W) konik tam konveks metrik uzayın boştan farklı konveks kapalı alt kümesi olsun. $n = 1,2, \ldots$ için $T_i, R_i, S_i: C \to C$ sırasıyla $L_i > 0, L'_i > 0, L''_i > 0$ Lipschitz sabitleri ile uniform quasi-Lipschitzian dönüşümler olmak üzere $F \neq \emptyset$ ve sınırlı bir küme olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}, \{e_n\}, \{l_n\}$ dizileri [0,1] aralığında alınmak üzere

$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = a_n + b_n + c_n = d_n + e_n + l_n = 1$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n + \gamma_n) < \infty$

şartları sağlansın. $\{L_i\}, \{L'_i\}, \{L''_i\}$ dizileri sınırlı ve $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ dizileri (4.2.1) deki şekilde tanımlansın.

$$F = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} F(R_i)\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i)\right)$$

T_i, R_i, S_i dönüşümlerinin boştan farklı ve sınırlı ortak sabit noktası olsun. Bu durumda

$\{y_n\} \subseteq F$ olacak şekilde $\{y_n\}$ dizisi olması için ancak ve ancak $\lim_{n\to\infty} \|d(x_n, y_n)\| = 0$

olmasıdır.

İspat:

$x_n \to y \in F$ olsun. Yakınsamanın tanımından $d(x_n, y) \to \theta$ ve bundan dolayı $\|d(x_n, y)\| \to 0$ dir.

$p \in F$ ve $\{x_n\}$ dizisinin tanımından

$$d(x_{n+1}, p) = d(W(x_n, T_n^n y_n, u_n; \alpha_n, \beta_n, \gamma_n), p)$$

$$\preccurlyeq \alpha_n d(x_n, p) + \beta_n d(T_n^n y_n, p) + \gamma_n d(u_n, p)$$

$$\preccurlyeq \alpha_n d(x_n, p) + \beta_n L d(y_n, p) + \gamma_n d(u_n, p)$$

$$\preccurlyeq a_n L d(x_n, p) + b_n L d(z_n, p) + c_n d(v_n, p)$$

ve

$$d(z_n, p) = d(W(S_n^n x_n, R_n^n x_n, w_n; d_n, e_n, l_n), p)$$

$$\preccurlyeq d_n L d(x_n, p) + e_n L d(x_n, p) + l_n d(w_n, p)$$

olur.

$L = max\{sup_{i\in\mathbb{N}} L'_i, sup_{i\in\mathbb{N}} L''_i\}$ için

$$d(x_{n+1}, p) \preccurlyeq \alpha_n d(x_n, p) + \beta_n L\left(a_n L d(x_n, p) + b_n L\big(d_n L d(x_n, p) + e_n L d(x_n, p) + l_n d(w_n, p)\big)\right) + c_n d(v_n, p) + \gamma_n d(u_n, p)$$

$$\preccurlyeq d(x_n,p)\big(1+\beta_n L^2(1+2L)\big)+(\beta_n+\gamma_n)\big(L^2 d(w_n,p)+Ld(v_n,p)+d(u_n,p)\big)$$

$\{u_n\},\{v_n\},\{w_n\}$ sınırlı dizilerinden dolayı herhangi bir $n\in\mathbb{N}$ ve $p\in F$ ve $u\in P\backslash\{\theta\}$ için $L^2 d(w_n,p)+Ld(v_n,p)+d(u_n,p)\preccurlyeq u$ olur.

$\forall x\geq 0$ için $1+x\leq e^x$ dikkate alınarak

$$\|d(x_{n+1},p)\|\leq\big(1+\beta_n L^2(1+2L)\big)\|d(x_n,p)\|+(\beta_n+\gamma_n)\|u\|$$
$$\leq e^{\beta_n L^2(1+2L)}\|d(x_n,p)\|+(\beta_n+\gamma_n)\|u\|$$

$$\|d(x_{n+m},p)\|\leq e^{L^2(1+2L)\beta_{n+m-1}}\|d(x_{n+m-1},p)\|+\|u\|(\beta_{n+m-1}+\gamma_{n+m-1})$$

$$\leq e^{L^2(1+2L)\beta_{n+m-1}}\big[e^{L^2(1+2L\beta_{n+m-2})}\|d(x_{n+m-2},p)\|+\|u\|(\beta_{n+m-2}+\gamma_{n+m-2})\big]$$

$$+\|u\|(\beta_{n+m-1}+\gamma_{n+m-1})$$

$$\leq e^{L^2(1+2L)\sum_{j=1}^{2}\beta_{n+m-j}}\|d(x_{n+m-2},p)\|+e^{L^2(1+2L)\beta_{n+m-1}}\|u\|\sum_{j=1}^{2}\big(\beta_{n+m-j}+\gamma_{n+m-j}\big)$$

$$\vdots$$

$$\leq e^{L^2(1+2L)\sum_{j=1}^{m}\beta_{n+m-j}}\|d(x_n,p)\|$$
$$+e^{L^2(1+2L)\sum_{j=1}^{n-1}\beta_{n+m-j}}\|u\|\sum_{j=1}^{m}\big(\beta_{n+m-j}+\gamma_{n+m-j}\big)$$

$$\leq e^{L^2(1+2L)\beta}\left[\|d(x_n,p)\|+\|u\|\sum_{k=n}^{n+m-1}(\beta_k+\gamma_k)\right]$$

$$= M\|d(x_n, p)\| + M\|u\| \sum_{k=n}^{n+m-1} (\beta_k + \gamma_k)$$

olur. Burada $M = e^{L^2(1+2L)\beta}, \beta = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ olup teorem koşullarını sağlar.

$\lim_{n\to\infty} \|d(x_n, y_n)\| = 0$ eşitliğinden bazı $\{x_{n_k}\}$ dizisi $d(x_{n_k}, y_{n_k}) \to \theta$ sağlar Yakınsak serisi

$\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n + \gamma_n)$; herhangi $\epsilon > 0$ ve $N_0 \in \mathbb{N}$ olacak şekilde herhangi $k \geq N_0$ için sağlar.

$\|d(x_{n_k}, y_{n_k})\| < \frac{\epsilon}{4M}$ ve $\sum_{j=n_k}^{\infty}(\beta_j + \gamma_j) < \frac{\varepsilon}{4\|u\|M}$ dır. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

$q > n_{N_o}, m \in \mathbb{N}$ bu durumda

$$\|d(x_{q+m}, x_q)\| \leq \left\|d\left(x_{q+m}, y_{n_{N_o}}\right)\right\| + \left\|d\left(y_{n_{N_0}}, x_q\right)\right\|$$

$$\leq M\left\|d\left(x_{n_{N_0}}, y_{n_{N_0}}\right)\right\| + M\|u\| \sum_{j=n_{N_0}}^{q+m-1}(\beta_j + \gamma_j) +$$
$$M\left\|d\left(x_{n_{N_0}}, y_{n_{N_0}}\right)\right\| + M\|u\| \sum_{j=n_{N_0}}^{q-1}(\beta_j + \gamma_j)$$

$$\leq 2M\left\|d\left(x_{n_{N_0}}, y_{n_{N_0}}\right)\right\| + 2M\|u\| \sum_{j=n_{N_0}}^{\infty}(\beta_j + \gamma_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

X tam olduğundan $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ olacak şekilde $x_0 \in C$ vardır: Şimdi $y_{n_k} \to x_0$ gösterelim. Gerçekten

$$d(y_{n_k}, x_0) \leq d(y_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) \to \theta(k \to \infty)$$

olur. Bu da $\{y_{n_k}\}$ dizisinin x_0 yakınsadığını gösterir.

$x_0 \in F \; ve \; p_k \to p_0 (k \to \infty)$ olacak şekilde $\{p_k\} \subset F$ yakınsak dizisi verilsin.

$$d\big(p_0, T_i(p_o)\big) \preccurlyeq d(p_0, p_k) + d\big(p_k, T_i(p_0)\big)$$

$$\preccurlyeq (1 + L) d(p_0, p_k) \to \theta$$

olur. Buradan

$p_o \in T_i(p_o)$ yani $p_0 \in F(T_i)$ benzer şekilde $p_0 \in F(R_i)$ ve $p_0 \in F(S_i)$ $(i \in \mathbb{N})$ elde edilir. Bu nedenle $p_o \in F$ dır.

X ile gösterdiğimiz konik konveks metrik uzay üzerinde tanımlanan dönüşümü bu uzaydaki noktalar arasındaki uzaklığı belli oranda daraltması veya büzüştürmesi Banach sabit nokta teoreminin ana fikridir. Ancak bu büzüşme verilen noktalardan bağımsız bir oranda olmalıdır. Örnek olarak $X = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 1\}$ uzayı üzerinde $C(x) = x + x^{-1}$ ile tanımlanan dönüşümüne bakalım.X uzayından seçeceğimiz farklı iki x ve y noktası için

$$|C(x) - C(y)| < |x - y|$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolayca görülür ama bu dönüşümün sabit noktası yoktur. Demek ki farklı iki nokta x ve y için $C: X \to X$ dönüşümünün

$$d\big(C(x), C(y)\big) < d(x, y)$$

koşulunu sağlaması bu dönüşümün sabit noktası için yeterli değildir. Banach sabit nokta teoremi aracılığıyla çözmek için esas zorluk X olarak uygun metrik uzay tanımlamaktır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

İlk bölümde metrik uzayların bazı özellikleri, sabit nokta teoremlerinin ve konik metrik uzayların gelişimi hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda metrik uzay tanımı ve bu uzayın bazı özellikleri ifade edilmiş, ikinci kısımda sabit nokta tanımı ve özel dönüşüm sınıfları incelenmiş, üçüncü kısımda hangi tür dönüşümlerin sabit noktalarının var ve bu noktaların hangi şartlar altında tek olduğunu gösteren teoremlerden bahsedilmiş, dördüncü kısımda bir dönüşümüm sabit noktasını veya noktalarını bulurken kullanılan iterasyon metotları incelenmiştir.

Üçüncü bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda konik tanımı, çeşitleri ve bazı özellikleri ifade edilmiş, ikinci kısımda konik metrik uzaylarda daraltan dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri incelenmiş, üçüncü kısımda koni normlu uzaylar ve fonksiyonların sabit noktaları ifade edilmiş, dördüncü kısımda ise reel diziler için bazı lemmaların ispatı verilmiştir.

Dördüncü bölümde konveks konik metrik uzayda düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümlerin üç sonsuz ailesi için bir iterasyon şeması teşkil edilerek bu iterasyonun ortak sabit noktaya yakınsadığı görülmüştür.

Kısa zamanda konik metrik uzaylar metrik uzaydaki bazı kavramları genelleyerek geniş bir çalışma alanı oluşturmuştur. Günümüzde de matematik dünyasında geliştirmeye uygun bir alan olarak düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Abuloha, M., 2009. Konik metrik uzaylar ve bazı sabit nokta teoremleri. Doktora tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., Halıcıoğlu, S., 2020. Temel Matematik Kavramların Künyesi. Palme Yayınevi, Ankara

Bayraktar, M., 2006. Fonksiyonel Analiz. Gazi Kitapevi, 320s, Ankara.

Bilgili, N., 2009. Konik metrik uzaylarda büzülme dönüşümü prensibi ve sabit nokta teoremleri. Yüksek lisans tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Byung, S.L., 2013. Approximating Common Fixed Points of Two Sequences of Uniformly Quasi-lipschitzian Mappings in Convex Cone Metric Spaces. Universal Journal of Applied Mathematics, 1(3), 166-171.

Elmas, S., 2014. Düzgün Quasi-Lıpschitzian Dönüşümlerin Sonsuz Ailelerinin Ortak Sabit Noktalarına yeni yaklaşım metotları. Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Elmas, S., Ozdemir, M., 2013. Convergence of a general iterative scheme for three infinite families of uniformly quasi-lipschitzian mappings ın convex metric spaces. Advances in Fixed Point Theory, 3(2), 406-417.

Fomenko, T.N., Yastrebov, K.S., 2016. Convergence of Noor-type Iteration Scheme with Errors in a Convex Cone Metric Space.Moscow University Mathematics Bulletin, 71(1),39-42.

Huang, L. G., Zhang, X., 2007. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings. J. Math. Anal. Appl., 332 (2), 1468-1476.

Khan, A.R., Domlo, A.A. and Fukhar-ud-din, H., 2010. Approximating Fixed Points of Some Maps in Uniformly Convex Metric Spaces. Hindawi Publishing Corporation Fixed Point Theory and Applications,1-11.

Kim, J.K., Kim, K.H. and Kim, K.S., 2004. Three-step iteratie sequences with errors for asymptotically quasi-nonexpansive mappings ın convex metric spaces (nonlinear analysis and convex analysis). Kyoto University Research Information Repository, 2004(1), 156-165

Kurag, A., 2014. Konik metrik uzayların temel özellikleri. Yüksek lisans tezi, T.C Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Nevşehir.

Mustafa, N., 2016. Çözümlü problemlerle Fonksiyonel Analiz. Seçkin yayıncılık, 479s, Ankara.

Rafiq, A., Zafar, S., 2006. On the Convergence of implicit Ishikawa Iterations with Errors to a Common Fixed Point of Two Mappings in Convex Metric Spaces. General Mathematics,14(2),95-108.

Rezapour, Sh., Hamlbarani, R., 2008. Some notes on the paper "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings". J. Math. Anal. Appl., 345 (2),719-714.

Siddiqui, R.A., Tripathi, B.P., 2018. Three step Iteration with Errors in Convex Cone Metric Spaces. Global Journal of Mathematical Sciences: Theory and Practical, 10(1), 15-29.

Soykan, Y., 2012. Fonksiyonel Analiz. Nobel yayınevi, 531s, Ankara.

Şahin, İ., 2009. Konik metrik uzaylarda dönüşümlerin sabit noktaları. Doktora tezi, Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Edirne.

Terzioğlu, T., 2013. Bir Analizcinin Defterinden Seçtikleri. Nesin Matematik Köyü,186s, İstanbul.

Yıldız, C., 2005. Genel Topoloji. Gazi Kitapevi, 336s,Ankara.

Yüksel, Ş., 2008. Genel Topoloji. Eğitim Kitapevi Yayınları,490s,Konya.

Zhou, H., Kang, J.I., Kang, S. M. and Cho, Y.J., 2003. Convergence theorems for uniformly quası-lipschitzian mappings. .Hindawi Publishing Corp, 2014(15),763-775.

ÖZGEÇMİŞ

Erzurum'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Halen Yağan Çok Programlı Anadolu Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.