T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

A, A^* LEONARD ÇİFTLERİ VE MATEMATİKSEL UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. HASAN KÖSE
HAZIRLAYAN
DUYGU DEMİR

KONYA- 2009

ÖNSÖZ

Bu çalışma bir derleme olup, Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Yrd.Doç.Dr.Hasan KÖSE yönetiminde yapılarak,Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Tez çalışmamı büyük bir titizlikle ve sabırla takip ederek çalışmamın her safhasında daima bana yol gösteren sayın hocam Yrd.Doç.Dr.Hasan KÖSE' ye sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunar, ayrıca bana her zaman destek olan aileme de teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Duygu DEMİR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

A , A^* LEONARD ÇİFTLERİ VE MATEMATİKSEL UYGULAMALARI

DUYGU DEMİR

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Hasan Köse
2009

Jüri: Prof.Dr.Durmuş BOZKURT
Yrd.Doç.Dr.Hasan KÖSE
Yrd.Doç.Dr.Aynur YALÇINER

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; tez de kullanılan genel bilgileri verdik.

İkinci bölümde; q-analog teorisini [13], tezin içeriği için gerekli olan Leonard çifti [23, 26] ve bu çift ile bağlantılı daha genel olan Leonard sistemin yapısını oluşturan elemanları [24] cebirsel yönden inceledik ve yorumladık.

Üçüncü bölümde; Leonard çiftlerinin polinomlardan oluşan lineer cebir nesneleri olduğunu detaylı şekilde açıkladık ve Leonard sistemi oluşturan tabanları [19, 26] verdik.

Dördüncü bölümde; Leonard çiftlerinin özel fonksiyonların [1] ortogonal polinom [17] çözümlerinde fayda sağladığını araştırdık ve quantum cebirinin [4], Askey sisteminin [12] karşılaştırmalarını yapıp, yorumladık.

Beşinci bölümde; Leonard çiftlerinin matematiksel uygulamalarını ve determinant kavramını açıkladık. Ayrıca [27] de verilen determinantı yorumladık. A, A^{*} ın farklı durumları için determinant hesaplarını yapıp , öz değerleri inceledik.

Anahtar Kelimeler : Leonard çift, Leonard sistem, özel fonksiyonlar, determinant, Askey sistem, ortogonal polinomlar, öz değer, q-racah polinomu.

ABSTRACT

Phd Thesis

A , A^* LEONARD PAIRS AND THEIRS MATHEMATICALLY APPLICATIONS

DUYGU DEMİR

Selçuk University

Graduate School of Natural And Applied Sciences

Mathematic Brabch

Advisor: Yrd.Doç.Dr. Hasan KÖSE

2008

Jury :Prof.Dr.Durmuş BOZKURT

Assoc.Prof.Dr.Hasan KÖSE

Assoc.Prof.Dr.Aynur YALÇINER

This study consist of five sections. In the first section; we have presented basic concepts which used in thesis.

In the second section; we have examined and commented on the theory of q-analog [13], Leonard pair that is necessary for content of thesis [23,26] and

associated with this pair, entry that construct structures of Leonard systems [24] with the aspect of algebraic.

In the third section; we have detailed studied Leonard pairs that are constructed with polynomials is the objects of Linear Algebras. We have given basis of Leonard systems.

In the fourth section; we have searched the solitions of orthogonal polynomials that are used in special functions of Leonard pairs, and commented on comparisons of quantum algebra [4] , Askey system [12] , and characteristics of these concepts.

In the fifth section; we have presented mathematical apply of Leonard pairs and determinant concept. Besides , we have commented on determinant given in [27]. We have studied calculations of determinat for different types of A , A^* and examined their eigen values.

KEY WORDS : Leonard pairs, Leonard systems, special functions, determinant, orthogonal polynomials, Askey system, q-Racah polynomial, eigen value.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Leonard çifti, P. Terwilliger tarafından ortaya atılmıştır . Bu çift; D. Leonard teoremiyle, q-Racah polinomlarının oluşturduğu ortogonal polinom aileleriyle ve Askey görüşündeki polinomlarla bağlantılıdır. Yani polinomların oluşturduğu bir cebirdir.

Paul Terwilliger; kombinatorik, cebir ve özel fonksiyonlarla ilgilenmiştir. Bununla beraber birkaç yıl öncesinde ‘’ Leonard çift’’ olarak adlandırdığı cebirsel nesnelerle ilgilenmeye başlamıştır. Leonard çift olarak adlandırdığı bu cebirsel nesneler kombinatorik ve özel fonksiyonlardan gelmiştir. Bu fikir basit olarak aşağıdaki gibi tanımlanır [**28**].

K bir cisim ve V , K cismi üzerinde sonlu pozitif boyutlu bir vektör uzay olsun. A : $V \rightarrow V$ ve B : $V \rightarrow V$ lineer dönüşüm çifti

(i) A, bir köşegen matris ve B de bir indirgenemez üçlü bant matris olacak şekilde V için bir taban,

(ii) B, bir köşegen matris ve A da bir indirgenemez üçlü bant matris olacak şekilde V için bir taban (Alt ve üst köşegen elemanları sıfır olmayan A üçlü bant matrisine indirgenemez denir.)

şartlarını sağlasın, bu gibi A, B çiftine ‘’ Leonard çift ‘’ denir (Bu ismi q- Racah polinomlarını içeren Leonard teoreminden faydalanarak bulmuştur **[21]**).

Burada tanımlanan Leonard çiftin birçok özelliği vardır. İlk olarak, birinci sınıf lineer cebirsel nesnelerdir. İkinci olarak, q-Racah polinomlarının oluşturduğu ortogonal polinom aileleriyle bağlantılıdır **[30]**. q-Racah polinomları da ; quantum (Sl_2) cebirinde ki Racah katsayılarını tanımlar. Üçüncü olarak, üçlü bant cebiri olarak adlandırılan indirgenemez cebirle bağlantılıdır. Dördüncü olarak, düzgün-uzaklık grafiğinde meydana çıkar **[7]**. Düzgün-uzaklık grafiği de üçlü bant cebirinin gösterimini destekler ve bu gösterim Leonard çiftini verir. Ayrıca Leonard çiftleri; matrisler için klasik mekaniği genelleştirebilmeyi önerir ve $A\,,A^{*}$ Leonard çiftinin uygun komütatörle cebir ilişkisini sağladığını gösterir.

I. BÖLÜM

LEONARD ÇİFTLERİ İÇİN TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm de ; tezde kullanılan genel bilgiler verilecektir.

1.1 GENEL BİLGİLER

Tanım 1.1.1. (Cebir): Bir M cümlesi bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve ayrıca $M \times M \to M$ çarpma işlemide

(i) $A(B+C) = AB + AC$

(ii)$(AB)C = A(BC)$

(iii)$(CA)B = A(CB) = C(AB)$

şartlarını sağlıyorsa bu M cümlesine K cismi üzerinde cebirdir denir.

Tanım 1.1.2. (İndirgenemez matris): P permütasyon matris olmak üzere, $P^T AP$ matrisi blok üst üçgen ise A $(n \times n)$ kare matrisi indirgenebilir matristir. Eğer kare matris indirgenebilir değilse o halde indirgenemez matristir.

Tanım 1.1.3. (Üçlü bant matris): $|\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}| > \mathbf{1}$ iken $a(i,j) = 0$ ise A ya üçlü bant matris denir. Yani ;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 1.1.4. (Modül): M boş olmayan bir küme ve K, birimli, değişmeli bir halka olsun. Aşağıdaki önermeler doğru ise M kümesi K halkası üstünde bir modüldür denir.

(M1) M kümesinde $+$ ile gösterilen ve adına toplama denilen bir işlem tanımlanmış olan $(M, +)$ değişmeli gruptur.

(M2) $K \times M \to M$

$(a, x) \to ax$

biçiminde, adına skalerle çarpma işlemi denilen bir fonksiyon tanımlanmıştır ve bu fonksiyon aşağıdaki önermeleri doğrular.

a) Her $a \in K$, her $x, y \in M$ için $a(x + y) = ax + ay$
b) Her $a, b \in K$, her $x \in M$ için $(a + b)x = ax + bx$
c) Her $a, b \in K$, $x \in M$ için $(ab)x = a(bx)$
d) K nın çarpmaya göre birim elemanı 1 olduğuna göre, M nin her x elemanı için, $1x = x$ tir.

Tanım 1.1.5. (İkiköşegen): i$\neq j$ yada i$\neq j-1$ iken $a(i,j)=0$ ise A matrisine üst ikiköşegen. i$\neq j$ yada i$\neq j+1$ iken $a(i,j)=0$ ise A matrisine alt ikiköşegen denir.

Tanım 1.1.6. (Germe): Alt uzayın bir germesi v_1, v_2 vektörlerinden üretilir. $v_1, v_2 \in V$ için germe $(v_1, v_2) = \{ rv_1 + sv_2 : r, s \epsilon \Re \}$ dir.

Tanım 1.1.7. (Sıfır uzay) : T, $\Re^n$ 'nin lineer dönüşümü ise, sıfır uzay bütün X vektörlerinin kümesidir ki $T(x)=0$ dır. $\mathcal{N}ull(T) = \{X : T(x) = 0\}$ dır.

Tanım 1.1.8. (Racah ve q-Racah polinomları): Racah polinomları; ortagonal polinomlardır ve bu ortagonal polinomların ortagonallik ilişkisiyle, Racah katsayılarının ortagonallik ilişkisi birbirine eşittir.

[33] Racah polinomları; n= 0,1,2,…,N için ${}_4F_3(a,b,c,d;e,f,g:x)$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar olmak üzere;

$$R_n(\lambda(x);\propto,\beta,\delta,\gamma) = {}_4F_3\left({-n,n+\propto+\beta+1,-x+\gamma+\delta+1 \atop \propto+1,\beta+\delta+1,\gamma+1};1\right) \tag{1}$$

ifadesi ortogonal polinomların hipergeometrik sınıfından elde edilir.

$$\lambda(x) = \lambda(x+\gamma+\delta+1) \tag{2}$$

ve

$\propto +1 = -N$

$\beta + \delta + 1 = -N$

$\gamma + 1 = -N$

eşitliklerin her biri sağlanır.(N_a negatif olmayan bir tamsayıdır.)

q- Racah polinomları ise;

$$p_n(q^{-x} + q^{x+1}cd; a, b, c, d; q) = \emptyset_3 \left[\begin{matrix} q^{-n} \; abq^{n+1} \; q^{-x} \; q^{x+1}cd \\ aq \quad bdg \quad cq \end{matrix} ; q; q \right]$$

şeklinde verilen temel hipergeometrik seriden bulunur (Askey ve Wilson, 1979).

II.BÖLÜM

LEONARD ÇİFTLERİ

Bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısımda q-analog teorisi, ikinci kısımda Leonard çiftleri , üçüncü kısımda Leonard sistemleri , dördüncü kısımda skalerler ve polinom çeşitleri detaylı bir şekilde açıklanacak ve incelenecektir.

2.1. q-analog Teorisi

Tanım 2.1.1.(q-analogu): [1, 13] q-analogu; özel fonksiyonlar da teorem veya birimin q-serisi için $q \to 1^{-}$ limit durumunda sonuç verir. Ve q-analogu; temel hipergeometrik seride, quantum grubunda karşımza çıkar. q-analogu ;

$$\lim_{q\to 1} \frac{1-q^{\propto}}{1-q} \tag{3}$$

ifadesine dayanır ve $\left.(1-q^{\propto})\middle/(1-q)\right.$ sayısı $[\propto]$ temel sayısı olarak adlandırılır.

(Koekoek ve Swarttouw, 1998). q-analogu; ortogonal polinomların Askey- Wilson sınıflaması için taban oluşturur.

O halde ; $0 < q < 1$ olduğu kabul edilirse ,

$$\lim_{q\to\propto} \frac{(q^{\propto};q)_k}{(1-q)^k} = (\propto)_k \tag{4}$$

dir.

2.2. Leonard Çifti

Tanım 2.2.1. [28] V , K cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzay olsun.

A : $V\rightarrow V$ ve B : $V\rightarrow V$ lineer dönüşüm çifti

(i) A köşegen matris ve B de indirgenemez üçlü bant matris olacak şekilde V için bir taban

(ii) B köşegen matris ve A indirgenemez üçlü bant matris olacak şekilde V için bir taban (Alt ve üst köşegen elemanları sıfır olmayan A üçlü bant matrisine indirgenemez denir.)

şartları sağlanırsa A, B ye V de Leonard çift denir.

Tanımlanan ‘’Leonard çift’’ ismi Askey sisteminin bağlantılı polinomlarından **[19,22]** ve q-Racah polinomu içeren **[21]** Leonard teoreminin ilişkisinden ortaya çıkmıştır.

Örnek 2.2.2.

V=K^4 (sütun vektörleri) alalım. A ve B matrisleri

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

şeklinde olsun. A, B; V vektör uzayında lineer dönüşümdür. K’nın karakteristiği 2 ve 3’ ten farklıdır. Yani A matrisi indirgenemezdir. O halde A, B çifti V’de Leonard çifttir. Gerçekten buradan Leonard çiftinin (i) şartının sağlandığı görülür. Şimdi de (ii) şartını doğrulamak için P ters matrisini bulalım. P ters matrisini bulmak için öz değeleri ve bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörleri bulalım. Daha sonra bu Öz vektörlerin oluşturduğu matrisin transpozesini alıp P matrisi elde edelim. Yani

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+3 \end{pmatrix} = 0\,, \qquad (\lambda+3)\,(\lambda-1)\,(\lambda+1)\,(\lambda-3) = 0$$

olduğundan $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 1$ olur.

Bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörler ise ;

$V_1=[1\ 3\ 3\ 1]^T$, $V_2=[1\ 1\ -1\ -1]^T$, $V_3=[1\ -1\ -1\ 1]^T$, $V_4=[1\ -3\ 3\ -1]^T$ olur. Buradan

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

bulunur. $P^{-1} = \frac{adj(P)}{det(P)}$

Buradan da

$$P^{-1}=\frac{1}{64}\begin{pmatrix} 8 & 24 & 24 & 8 \\ 8 & 8 & -8 & -8 \\ 8 & -8 & -8 & 8 \\ 8 & -24 & 24 & -8 \end{pmatrix}$$

olur.

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

olur.

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

olur. P matrisi

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$$P^{-1}AP = B \;\; \Rightarrow \;\; AP = PB \qquad (5)$$

dir.

Şimdi de **[25]** de verilen ifadeye dönelim. K cisminin karakteristiği 0 veya d' den daha büyük ilk çift sayı olması şartı ile herhangi bir d tamsayısı için

$$A=\begin{pmatrix} 0 & d & & & & 0 \\ 1 & 0 & d-1 & & & \\ & 2 & . & . & & \\ & & . & . & . & \\ & & & . & . & 1 \\ & & & & d & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\text{köş}\,(d, d-2, d-4, ..., d) \qquad (6)$$

çifti K^{d+1} vektör uzayında Leonard çift olur . Bu ispat d$=3$ için ispatlanır.

$P^2 = 2^d I$ ve AP$= PB$ dir. P matrisinin ij elemanı

$$P_{ij} = \binom{d}{j} \sum_{n=0}^{d} \frac{(i)_n(-j)_n 2^n}{(-d)_n n!} \quad (0 \leq i,j \leq d) \tag{7}$$

şeklinde ifade edilir. (7) ifadesinin sağındaki toplam hipergeometrik seriyi verir.

${}_2F_1 = \left(\begin{matrix} -i,-j \\ -d \end{matrix}\middle| 2\right)$ negatif olmayan r,s tamsayıları için hipergeometrik serinin varolan analogları ${}_rF_s$; hipergeometrik seri olarak adlandırılır **[11]**. Üstelik var olan bu q- analogları ${}_r\emptyset_s$; hipergeometrik seri olarak adlandırılır **[13, 15]** . Buradaki ${}_rF_s$ serisi $\alpha_0 = 1$ ve

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_p)}{(n+b_1)(n+b_2)\ldots(n+b_q)}$$

olmak üzere ,

$${}_rF_s(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n z^n}{n!}$$

şeklinde bir hipergeometrik seri ifade eder.

2.3. Leonard sistemleri

Leonard çiftleri ile çalışırken, Leonard sistemi olarak adlandırılan daha genel nesneleri düşünmek gerekir **(** Lemma 2.3.1.[**28])**V, K cismi üzerinde sonlu pozitif boyutlu vektör uzay olsun ve A, A^* matrisleri de V vektör uzayında Leonard çift ifade etsin. O halde A' nın öz değerleri K cisminden alınır ve bu öz değerler birbirinden farklı olur. Aynı zamanda A^*' nın da öz değerleri K cisminden alınır ve bu öz değerler de birbirinden farklı olur**[28]**.

Leonard sistemini tanımlamak için lineer cebirden birkaç kavram hatırlayalım. d negatif olmayan bir tamsayı ve mat_{d+1}(K) elemanları K da olan $(d+1\times d+1\ )$ matrislerinin oluşturduğu K-cebiri olsun. Satır ve sütunları 0,1,2….d' den alalım. K^{d+1} de ,$(1\times d+1)$ matrisininin oluşturduğu K-vektör uzayı olsun. K^{d+1} ,

mat_{d+1}(K) için sol modüldür ve bu sol modül indirgenemezdir[28,27]. $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ da , mat_{d+1}(K)' ya izomorf olan K-cebirini ifade edecektir.

V indirgenemez $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-modül olsun. V, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-modülünün tek izomorfu olur ve V vektör uzayı 1 boyutlu olur**[25].** $v_0, v_1, \dots v_d$; V vektör uzayının bir tabanı olsun.

X $\epsilon\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ve Y $\in mat_{d+1}$(K) için X$v_j = \sum_{i=0}^{d} y_{ij}\, v_i \quad 0 \leq j \leq d$ olur. Bir de A$\in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ olsun. A nın K cismindeki birbirinden farklı öz değerlerinin sayısı d+1 ise A' ya katlı serbest denir.

A , $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ nın katlı serbestini ve $\theta_0, \theta_1, \dots \theta_d$ da A nın öz değerlerini ifade etsin**[25]**. $0 \leq i \leq d$ için $\boldsymbol{\mathcal{A}}$' nın birimi I olmak üzere ;

$$E_i = \prod_{\substack{0 \leq j \leq d \\ j \neq i}} \frac{A - \theta_i I}{\theta_i - \theta_j} \tag{8}$$

olur.

Buradan da

(i) A$E_i = \theta_i E_i \ \ (0 \leq i \leq d)$

(ii) $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$

(iii) $\sum_{i=0}^{d} E_i = I$

(iv) $A = \sum_{i=0}^{d} \theta_i E_i$

olur **[25,26]**.

$\boldsymbol{\mathcal{D}}$, A tarafından üretilen $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ nın alt cebiri olsun.(i)-(iv) i kullanarak K-vektör uzayı $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ için $E_0, E_1, \dots E_d$ dizisi bulunur. Buradaki E_i ye θ_i ile bağlantılı A nın ilkel idempotenti denir. Bu ifade

$V = E_0 V + E_1 V + \cdots + E_d V \quad (direkt\ toplam)$

yi düşünmemize yardım eder. $0 \leq i \leq d$ için $E_i V\ (1\ boyutlu)$ uzayı V vektör uzayında θ_i ile bağlantılı A' nın öz uzayı olur. $\{A^i \backslash 0 \leq i \leq d\}$ kümesi K-vektör uzayı $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ için taban ve $\prod_{i=0}^{d}(A - \theta_i I) = 0$ olur. $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ daki Leonard çiftten, A dan gelen sıralı ikililer anlaşılır ki bu sıralı ikililer V vektör uzayında Leonard çift oluşturur.

Buradaki $\mathcal{A}$, Leonard çiftin **ambient cebiri** olur**[24]** ve bu çift K cismi üzerindedir. Şimdi de ambient cebirinin tanımını inceleyelim.

Tanım 2.3.2. [28] $\mathcal{A}$ daki Leonard çiftten $\Phi := (A, A^*; \{E_i\}_{i=0}^{d}; \{E_i^*\}_{i=0}^{d})$ dizisi;

(i) A, A^*' ın her biri $\mathcal{A}$' da katlı serbestir.

(ii) $E_0, E_1, \dots, E_d$ A^*' ın ilkel idempotent sıralamasıdır.

(iii) $E_0^*, E_1^*, \dots, E_d^*$ A nın ilkel idempotent sıralamasıdır.

(iv) $E_i A^* E_j = \begin{Bmatrix} |i-j| > 1 \; ise \,, \; 0 \\ |i-j| = 1 \; ise \,, \; \neq 0 \end{Bmatrix} (0 \le i, j \le d)$

(v) $E_i^* A E_j^* = \begin{Bmatrix} |i-j| > 1 \; ise \,, \; 0 \\ |i-j| = 1 \; ise \,, \; \neq 0 \end{Bmatrix} \; (0 \le i, j \le d)$

şartlarını sağlarsa $\mathcal{A}$ ya Φ- ambient cebiri denir.

Şimdi de Leonard çiftle Leonard sistem arasındaki bağıntıyı inceleyelim. V vektör uzayı indirgenemez $\mathcal{A}$-modül, $\Phi := (A, A^*; \{E_i\}_{i=0}^{d}; \{E_i^*\}_{i=0}^{d})$ $\mathcal{A}$' da Leonard sistem ve $0 \le i \le d$ için v_i; $E_i V$ de sıfırdan farklı vektör olsun. Öyleki $v_0, v_1, \dots v_d$ vektörleri V vektör uzayı için bir tabandır ve Leonard çift tanımındaki (ii) şartını sağlar. $0 \le i \le d$ için v_i^* ; $E_i^* V$ de sıfırdan farklı vektör olsun. Öyleki $v_0^*, v_1^*, \dots, v_d^*$ vektörleri de V vektör uzayı için bir tabandır ve Leonard çift tanımındaki (i) şartını sağlar. Bu şartlar sağladığından dolayı A, A^* çiftine Leonard çift denir.

Tanım 2.3.3. [26] Φ Tanım 2.3.2 den Leonard sistem olsun. . $0 \le i \le d$ için $\theta_i(\theta_i^*)$; E_i (E_i^*) ile bağlantılı A (A^*) ' ın öz değeri olsun. Buradan $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_d$ ' ye Φ' nin öz değer dizisi denir. $\theta_{0,}^* \theta_1^*, \dots, \theta_d^*$ ' ye de Φ' nin dual öz değer dizisi denir. $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_d$ öz değerleri birbirinden farklıdır, benzer olarak $\theta_{0,}^* \theta_1^*, \dots, \theta_d^*$ öz değerleri de birbirinden farklıdır.

Tanım 2.3.4. [26] Φ Tanım 2.3.2 deki Leonard sistem olsun. Öyleki $A\,, E_0^*$ elemanları ve A, A^* elemanları birlikte $\mathcal{A}$ yı oluşturur. Bununla beraber E_0^* da A^* da polinom olur.

Tanım 2.3.5. [26] Bir tane verilen Leonard sistemden birçok yeni Leonard sistem düzenlenebilir. Φ Tanım 2.3.2 deki Leonard sistem ve $\propto, \propto^*, \beta, \beta^*$ da K cismindeki skalerler olmak üzere

$$\left(\propto A+\beta I; \propto^* A^*+\beta^* I; \{E_i\}_{i=0}^{d}; \{E_i^*\}_{i=0}^{d}\right)$$

dizisi $\mathcal{A}$ da Leonard sistemdir.

$$\Phi^* := \left(A^*; A; \{E_i^*\}_{i=0}^{d}; \{E_i\}_{i=0}^{d}\right),$$

$$\Phi^{\downarrow} := \left(A; A^*; \{E_i\}_{i=0}^{d}; \{E_{d-i}^*\}_{i=0}^{d}\right),$$

$$\Phi^{\Downarrow} := \left(A; A^*; \{E_{d-i}\}_{i=0}^{d}; \{E_i^*\}_{i=0}^{d}\right)$$

şeklinde belirtilen üç dizi de $\mathcal{A}$ da Leonard sistem olur.

$*, \downarrow, \Downarrow$ ler bütün Leonard sistem kümelerinde permütasyon gibi davranır.

$$*^2 = \downarrow^2 = \Downarrow^2 = 1, \tag{9}$$

$$\Downarrow * = * \downarrow, \quad \downarrow * = * \Downarrow, \quad \downarrow \Downarrow = \Downarrow \tag{10}$$

eşitlikleri vardır **[28]**. (9),(10)' la bağlantılı $*, \downarrow, \Downarrow$ sembollerinden üretilen grup, D_4 dihedral grubudur. D_4 dihedral grup; kare simetrik gruptur ve 8 elemanı vardır.

Tanım 2.3.6. Φ Leonard sistem olsun. D_4 grubunda ki herhangi bir g ve Φ Leonard sistemi ile bağlantılı herhangi bir f elemanı için ; $f^g ; \Phi^{g^{-1}}$ elemanları benzerdir. Bu baştan beri kabul edilen uygulamadan dolayı , $E_i^*(\Phi) = E_i(\Phi^*)$ ‘ dir **[24].**

2.4. Skalerler ve Polinomlar

[29]’ da, Leonard sisteminin; polinom sistemlerinin cebir versiyonu olduğundan bahsedilmiştir. Bu kısımda da Leonard sistemini oluşturan skalerler ve polinomlardan bahsedilecektir.

Tanım 2.4.1. [25, 28] Φ Leonard sistem ve $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{d+1}$ polinom dizisi

$$\rho_0 = 1 \tag{11}$$

$$\lambda\rho_i = \rho_{i+1} + a_i\rho_i + \chi_i\rho_{i-1} \quad (0 \leq i \leq d) \tag{12}$$

şeklinde ifade edilir. $0 \leq i \leq d + 1$ için buradaki ρ_i polinomu í. derece monik polinom olur.

Tanım 2.4.2. [28] Φ Leonard sistem olsun.

$$\lambda\rho_i = \rho_{i+1} + a_i\rho_i + \chi_i\rho_{i-1} \tag{13}$$

den yararlanılarak

$$\boldsymbol{a_i = iz(E_i^* A) \quad (0 \leq i \leq d)} \tag{14}$$

ve

$$\boldsymbol{\chi_i = iz(E_i^* A E_{i-1}^* A) \quad (1 \leq i \leq d)} \tag{15}$$

skalerleri bulunur.

Lemma 2.4.3. [28] Φ Leonard sistem ve ρ_i Tanım 2.4.1.' de ki polinom olsun. V, indirgenemez $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-modül ve υ, E_0^*V de sıfırdan farklı bir vektör olsun. O halde $0 \leq i \leq d$ için $\rho_i(A)\upsilon = E_i^*A^i\upsilon$ ve $\rho_{d+1}(A)\upsilon = 0$ olur.

İspat : $(0 \leq i \leq d+1)$ için $v_i = \rho_i(A)\upsilon$ olsun. $0 \leq i \leq d$ için $v_i^{'} = E_i^*A^i\upsilon$ ve $v_{d+1}^{'} = 0$ olarak ifade edilir. $(0 \leq i \leq d+1)$ için $v_i = v_i^{'}$ olduğunu gösterelim. $v_0 = v$ ve $v_0^{'} = v$' dır. Bu yüzden $v_0 = v_0^{'}$ dır. (13) deki eşitlikten

$Av_i = v_{i+1} + a_i v_i + x_i v_{i-1}$

ve

$Av_i^{'} = v_{i+1}^{'} + a_i v_i^{'} + x_i v_{i-1}^{'}$

ifadelerinden $v_{-1} = v_{-1}^{'} = 0$ olur. Bu ifadeleri ve $v_0 = v_0^{'}$ ‘ ı kullanarak $v_i = v_i^{'}$ olduğu bulunur **[25,27]**.

Tanım 2.4.4. [24, 28] Φ Leonard sistem ve ρ_{d+1} Tanım 2.4.3'de ki polinom olsun. O halde aşağıdaki ;

(i) ρ_{d+1} , A' nın karakteristik ve minimal polinomudur.
(ii) $\rho_{d+1} = \prod_{i=0}^{d}(\lambda - \theta_i)$ ‘ dir..

şartları sağlanır.

İspat : ilk olarak ρ_{d+1} in A nın minimal polinomuna eşit olduğunu gösterelim. $I, A, \ldots, A^d$ lineer bağımsızdır ve ρ_{d+1}; $d+1$ dereceli moniktir.

$\rho_{d+1}(A) = 0$ olduğunu gösterelim. V, indirgenemez $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-modül ve υ, E_0^*V de sıfırdan farklı bir vektör olsun. Lemma 2.4.3. den $\rho_{d+1}(A) = 0$ olduğu bulunur. $\rho_{d+1}(A)E_0^*V = 0$ dır ,böylece $\rho_{d+1}(A)E_0^* = 0$ olduğu bulunur. Karakteristik polinom tanımından $A = det(\lambda I - A)$ dır. Bu polinom $d+1$ dereceli moniktir ve

ρ_{d+1} ‘ e eşittir. $0 \leq i \leq d$ için θ_i skaleri A ‘ nın öz değeridir ve bu yüzden A ‘ nın karakteristik polinomunun köküdür.

Lemma 2.4.5. [24] Φ Leonard sistem olsun. $0 \leq i \leq d$ için v_i, E_i^*V de sıfırdan farklı bir vektör ve $v_0, v_1, \ldots v_d$; V vektör uzayı için bir taban olsun. B matrisi , mat_{d+1}(K) da A ya eşit matris olsun. B matrisinin indirgenemez üçlü bant olduğunu ifade edelim. Böylece bu B matrisi

(i) $B_{ii} = a_i$ $\quad (0 \leq i \leq d)$

(ii) $B_{i,i-1}B_{i-1,i} = \chi_i$ $\quad (1 \leq i \leq d)$

(iii) $\chi_i \neq 0$ $\quad (1 \leq i \leq d)$ (16)

şartlarını sağlar.

İspat: (i)-(ii) [23, 24] $(0 \leq i \leq d)$ için $v_0, v_1, \ldots v_d$ ile bağlantılı E_i^* i ifade eden mat_{d+1}(K) da ki matrisin ii. elemanı 1, diğer elemanları 0 olur. Tanım 2.4.2 deki ifadeler kullanılarak sonuç elde edilir.

Teorem 2.4.6. [25] Φ Leonard sistem , ρ_i polinom ve χ_i skaler olsun. Öyleki

$$E_i^* = \frac{\rho_i(A)E_0^*\rho_i(A)}{\chi_1\chi_2\cdots\chi_i} \qquad (0 \leq i \leq d) \tag{17}$$

olur.

İspat : [32] t : $\boldsymbol{\mathcal{A}} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$ antiotomorfizm olsun. $\rho_i(A)E_0^* = E_i^*A^iE_0^*$ dır. Bu ifade t ye uygulanarak $E_0^*\rho_i(A) = E_0^*A^iE_i^*$ olduğu bulunur.

Bu ifadeler kullanılarak

$\rho_i(A)E_0^*\rho_i(A) = E_i^*A^iE_0^*A^iE_i^*$

$= x_1x_2 \dots x_iE_i^*$

bulunur.

Tanım 2.4.7. [25] Φ Leonard sistem ve $\flat: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{mat_{d+1}(K)}$ **[29]** olsun. $0 \le i \le d-1$ için $A^\flat$ nin i, i+1 inci elemanı b_i ve i, i−1 inci elemanı c_i olsun. O halde

$$A^\flat = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & . & . & . & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & . & . & . \\ . & c_2 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & b_{d-1} \\ 0 & . & . & . & c_d & a_d \end{pmatrix} \tag{18}$$

olduğu belirtilirse $b_d = 0$ ve $c_d = 0$ olur, ayrıca

(i) $b_{i-1}c_i = x_i \ \ (1 \le i \le d)$

(ii) $c_i + b_i + a_i = \theta_0 \ \ (0 \le i \le d)$

(iii)$b_0b_1 \dots b_{i-1} = \rho_i(\theta_0) \ \ (0 \le i \le d+1)$

şartları sağlanır.

Teorem 2.4.8. [26, 28] Φ Leonard sistem ve ρ_i Tanım 2.4.5 deki polinom ve θ_0, A nın E_i ile bağlantılı öz değeri olsun. 0≤ $i \le d$ için $\rho_i(\theta_0) \neq 0$ dır. O halde b_i ve c_i skalerler olmak üzere

$$\mathrm{b_i} = \frac{\rho_{i+1}(\theta_0)}{\rho_i(\theta_0)} \ \ (0 \le i \le d) \tag{19}$$

ve

$$\mathrm{c_i} = \frac{x_i\rho_{i-1}(\theta_0)}{\rho_i(\theta_0)} \ \ (1 \le i \le d) \tag{20}$$

olur.

Tanım 2.4.9. [26] Φ Leonard sistem ve ρ_i Tanım 2.4.5 deki polinom olsun. ρ_i polinomunun 2. normalizasyonuna u_i polinomu denir. u_i polinomu ;

$$u_i = \frac{\rho_i}{\rho_i(\theta_0)} \tag{21}$$

şeklindedir , $u_0 = 1$ ve $u_i(\theta_0) = 1$ $(0 \leq i \leq d)$ dır.

Lemma 2.4.10. [17, 25] Φ Leonard sistem ve u_i Tanım 2.4.9 da ki polinom olsun. a_i , b_i ve c_i skalerler olsun. O halde

$$u_{-1} = 0 \tag{22}$$

olmak üzere

$$\lambda u_i = b_i u_{i+1} + a_i u_i + c_i u_{i-1} \quad (0 \leq i \leq d-1) \tag{23}$$

olur.

Sonuç 2.4.11. [24] Φ Leonard sistem ve u_i Tanım 2.4.9 da ki polinom ve θ_i skaler olsun. O halde 0≤ $i, j \leq d$ için $u_{-1} = 0$ ve $u_{d+1} = 0$ olmak üzere

$$\theta_j u_i(\theta_j) = b_i u_{i+1}(\theta_j) + a_i u_i(\theta_j) + c_i u_{i-1}(\theta_j) \tag{24}$$

olur.

Teorem 2.4.12. [17] Φ Leonard sistem , u_i Tanım 2.4.9 da ki polinom ve u_i^* , Φ^* için polinom olsun. O halde

$$u_i(\theta_j) = u_j^*(\theta_i^*) \quad (0 \leq i, j \leq d) \tag{25}$$

dır.

İspat: $E_0 E_i^* E_j E_0^{*t} = E_0^* E_j E_i^* E_0$ (26)

dır. Burada her iki tarafın iz fonksiyonu alınarak

iz $E_0 E_i^* E_j E_0^*$ =iz $E_0^* E_j E_i^* E_0$ (27)

bulunur. Bunlar düzenlenince de teorem ispat edilmiş olur. **[25]**.

Teorem 2.4.13. [25] Φ Leonard sistem ve ρ_i polinom olsun.

$$\frac{\rho_i(\theta_j)}{\rho_i(\theta_0)} = \frac{\rho_j^*(\theta_i^*)}{\rho_j^*(\theta_0^*)} \tag{28}$$

dır.

İspat : Teorem 2.4.12 den bu teorem ispatlanır **[28]**.

Lemma 2.4.14. [27] Φ Leonard sistem ve u_i Tanım 2.4.9 da ki polinom olsun. O halde $0 \le i \le d$ için

$$\theta_i u_i(\theta_j) = b_j^* u_i(\theta_{j+1}) + a_j^* u_i(\theta_j) + c_j^* u_i(\theta_{j-1}) \tag{29}$$

elde edilir **[25]** . (29)' a u_i nin fark denklemi denir.

Lemma 2.4.15. [29] Φ Leonard sistem ve $d \ge 1$ olduğu kabul edilirse aynı zamanda u_i Tanım 2.4.9 da ki polinom olarak alınırsa

$$u_i(\theta_1) = \frac{\theta_i^* - a_0^*}{\theta_0^* - a_0^*} \tag{30}$$

olur.

İspat : [29] $u_i(\theta_j) = u_j^*(\theta_i^*)$ (31)

dır. Çünkü ;

$$u_i(\theta_j) = m_i^{-1} m_j^{-1} \text{ iz} E_0 E_i^* E_j E_0^* \tag{32}$$

a Φ^* uygulanınca

$$u_j^*(\theta_i^*) = m_i^{-1} m_j^{*-1} \text{iz} E_0^* E_i E_j^* E_0 \tag{33}$$

bulunur. (31) da i ve j nin yerleri değiştirilirse

$$u_j^*(\theta_i^*) = m_i^{*-1} m_j^{-1} \text{iz} E_0^* E_j E_i^* E_0 \tag{34}$$

olur.

$$E_0^* E_i E_j^* {E_0}^t = E_0^* E_j E_i^* E_0$$

dır. İki tarafın da iz fonksiyonu alınınca

$$\text{iz} E_0^* E_i E_j^* E_0 = \text{iz} E_0^* E_j E_i^* E_0$$

olduğu bulunur. (32), (33), (34) düzenlenerek (30) eşitliği bulunur. Buradan yola çıkarak teoremi ispatlamaya çalışalım. (31) de j= 1 alalım.

$$u_i(\theta_1) = u_1^*(\theta_i^*)$$

olduğundan

$$u_i(\theta_1) = m_i^{*-1} m_1^{-1} \text{iz} E_0 E_i^* E_1 E_0^*$$

dır.

$$u_i = \frac{\rho_i}{\rho_i(\theta_0)}$$

ye Φ^* uygulanarak

$$u_1^* = \frac{\rho_1^*}{\rho_1^*(\theta_0^*)}$$

olduğu bulunur.

$$\rho_1(\theta_0) = m_0^{-1}\mathrm{iz}E_0E_1^*A^1E_0^*$$

$$\rho_1(\theta_0)m_0 = \mathrm{iz}E_0E_1^*A^1E_0^*$$

dır.

$\lambda\rho_i = \rho_{i+1} + a_i\rho_i + x_i\rho_{i-1}$ e Φ^* uygulanarak

$$\rho_1^* = \lambda - a_0^*$$

bulunur. Verilenler düzenlenerek

$$u_i(\theta_1) = \frac{\theta_i^* - a_0^*}{\theta_0^* - a_0^*}$$

bulunur.

Lemma 2.4.16. [28] Φ' nin Leonard sistem olduğu ve d≥ 1 olduğu kabül edilsin .O halde

$$b_i\theta_{i+1}^* + a_i\theta_i^* + c_i\theta_{i-1}^* = \theta_1\theta_i^* + a_0^*(\theta_0 - \theta_1) \ \ (0 \le i \le d)$$

olur.

Şimdi de u_i ve ρ_i polinomlarının ortogonallik ilişkisini sağladığını gösterelim.

Teorem 2.4.17. [17, 28] Φ Leonard sistem ve u_i Tanım 2.4.9 da ki polinom olsun. O halde ;

$$\sum_{r=0}^{d} u_i(\theta_r)u_j(\theta_r)k_r^* = \delta_{ij}vk_i^{-1}$$

$$\sum_{i=0}^{d} u_i(\theta_r)u_i(\theta_s)k_i = \delta_{rs}vk_r^{*-1}$$

ve

$$\sum_{r=0}^{d} \rho_i(\theta_r)\rho_j(\theta_r)m_r = \delta_{ij}x_1x_2 \dots x_i$$

$$\sum_{i=0}^{d} \frac{\rho_i(\theta_r)\rho_i(\theta_s)}{x_1x_2 \dots x_i} = \delta_{rs}m_r^{-1}$$

toplamları bulunur. $(0 \leq i, j \leq d)$ ve $(0 \leq r, s \leq d)$ dir.

Tanım 2.4.18. [28] Φ Leonard sistem ve m_i skaler olsun. $(0 \leq i \leq d)$ için

$$m_i = \mathrm{iz} E_i E_0^* \tag{35}$$

olur.

Lemma 2.4.19. [5] Φ Leonard sistem olsun. O halde

(i) $E_i E_0^* E_i = m_i E_i$

(ii) $E_0^* E_i E_0^* = m_i E_0^*$

(iii) $m_i \neq 0$

(iv) $\sum_{i=0}^{d} m_i = 1$

(v) $m_0 = m_0^*$

şartları sağlanır.

İspat : (i). E_i ; $E_i\boldsymbol{\mathcal{A}E_i}$ için bir tabandır. $E_iE_0^*E_i$; $E_i\boldsymbol{\mathcal{A}E_i}$ de ihtiva edilir , $\propto_i\in K$ vardır ve $E_iE_0^*E_i = \propto_i E_i$ dir. Bu eşitliğin her iki tarafının izi alınarak ve $\mathrm{iz}(xy) = \mathrm{iz}(yx)$ kullanılarak $\mathrm{iz}(E_i) = 1$, $\propto_i = m_i$ bulunur.

(ii). (i)' in ispatıyla benzerdir.

(iii). (i) den $m_iE_i = E_iE_0^*E_i$ dir ve $E_iE_0^*E_i \neq 0$ dır. Buradan $m_iE_i \neq 0$ dır, böylece $m_i \neq 0$ olur.

(iv) $\sum_{i=0}^{d} E_i = I$ ifadesini sağdan E_0^* ile çarparak ve sonra bu eşitliğin iz fonksiyonu alınarak sonuç elde edilir.

(v). $E_0E_0^*$ ve $E_0^*E_0$ elemanları aynı iz fonksiyonuna sahiptir.

Tanım 2.4.20. [25] Φ Leonard sistem olsun. $m_0 = m_0^*$ olduğu kabul edelim. Lemma 2.4.19 dan , v skaleri bu değerin çarpımsal tersini ifade etsin. O halde $\mathrm{v} = v_0^*$ olur. Ayrıca;

$$\mathrm{iz}\ E_0E_0^* = v^{-1}$$

olur.

Lemma 2.4.21. [29] Φ Leonard sistem ve v Tanım 2.4.20 de ki gibi skaler olsun. O halde

(i). $vE_0E_0^*E_0 = E_0$

(ii). $vE_0^*E_0E_0^* = E_0^*$

şartları sağlanır.

Tanım 2.4.22. [32] Φ Leonard sistem olsun.

$$k_i = m_i^*v \quad (0 \leq i \leq d) \qquad (36)$$

olmak üzere

(i) $k_0 = 1$

(ii) $k_i \neq 0$

(iii) $\sum_{i=0}^{d} k_i = v$

şartları sağlanır.

İspat : (i). (35) de i$=0$ alalım ve $m_0^* = v^{-1}$ olduğunu hatırlatalım.

(ii). Lemma 2.4.19 (iii) e Φ^* uygulanarak $m_i^* \neq 0$ bulunur. Tanım 2.4.20 den v$\neq 0$ olduğu bulunur.

Lemma 2.4.23. [32] Φ Leonard sistem ve k_i skaler olsun. b_i , c_i skalerler olsun. O halde

$$k_i = \frac{b_0 b_1 \ldots b_{i-1}}{c_1 c_2 \ldots c_i} \tag{37}$$

dır.

Tanım 2.4.24. [28] Φ Leonard sistem ve p_i polinom olsun. $(0 \leq i \leq d)$ için v_i polinomu;

$$v_i = \frac{p_i}{c_1 c_2 \ldots c_i} \tag{38}$$

olur , ayrıca $v_0 = 1$ dir.

Lemma 2.4.25. [28] Φ Leonard sistem ve v_i polinom olsun. θ_i , k_i skalerler olsun. O halde ,

$$v_i(\theta_0) = k_i \tag{39}$$

dır.

Teorem 2.4.26. [29] Φ Leonard sistem , v_i polinom , V indirgenemez $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-modül ve u , E_0V de sıfırdan farklı vektör olsun. O halde,

$$v_i(A)E_0^*u = E_i^*u \tag{40}$$

olur.

İspat : $(0 \leq i \leq d)$ için $w_i = v_i(A)E_0^*u$ ve $w_i' = E_i^*u$ yi olarak alalım. $w_i = w_i'$ olduğunu gösterelim. Her bir w_0, w_0' E_0^*u a eşittir böylece $w_0 = w_0'$ dır.

$$\mathrm{A}w_i = c_{i+1}w_{i+1} + a_iw_i + b_{i-1}w_{i-1} \tag{41}$$

$w_{-1} = 0$ ve $b_{-1} = 0$ dır.

$$\mathrm{A}w_i' = c_{i+1}w_{i+1}' + a_iw_i' + b_{i-1}w_{i-1}' \quad (0 \leq i \leq d-1) \tag{42}$$

ve $w_{-1}' = 0$ dır.

(41) ve (42) düzenlenirse ve $w_0 = w_0'$ i kullanılırsa $(0 \leq i \leq d)$ için $w_i = w_i'$ bulunur. Buradaki w_0', w_1',...,w_d' ; Φ-standart tabanı ifade eder. Daha sonraki bölümler de bu tabanı daha detaylı bir şekilde açıklayacağız.

III. BÖLÜM

LEONARD SİSTEMİNİN TABANI VE PARAMETRİK GÖSTERİMİ

Bu bölüm üç kısıma ayrılacaktır. Birinci kısımda standart taban, ikinci kısımda split taban, üçüncü kısımda parametre dizisi ve sınıflanan uzay detaylı bir şekilde açıklanacak ve araştırılacaktır.

3.1. STANDART TABAN

Lemma 3.1.1. [28] Φ Leonard sistem ve V indirgenemez $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-modül olsun. O halde

$$E_i^*V = E_i^*E_0V\ , \quad (0 \leq i \leq d) \tag{43}$$

dir. E_i^*V uzayı $E_i^*E_0V$' yı ihtiva eden 1 boyutlu uzay olsun. $E_i^*E_0V \neq 0$ olduğunu gösterelim. $E_rE_0^*E_s$ 0≤ $r, s \leq d$ elemanları K- vektör uzayı $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ için tabandır **[25]**. Buna Φ^* uygulanarak $E_i^*E_0 \neq 0$ bulunur. $E_i^*E_0V \neq 0$ olur. Böylece $E_i^*V = E_i^*E_0V$'ı sonuçlandırılmış olur.

Lemma 3.1.2. [28] Φ Leonard sistem ve V indirgenemez $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-modül , u ; E_0V de sıfırdan farklı vektör olsun. O halde $(0 \leq i \leq d)$ için $E_i^*u \neq 0$ dır ve E_i^*V için bir taban olur. Üstelik ;

$$E_0^*u, E_1^*u, \dots, E_d^*u \tag{44}$$

dizisi V için bir taban olur.

İspat : i tamsayı olsun. $E_i^* u \neq 0$ olduğunu gösterelim. $E_0 V$ ın boyutu 1' dir ve u, $E_0 V$ de sıfırdan farklı vektördür. Böylece u vektörü $E_0 V$ yi gerer. Buna E_i^* uygulanarak $E_i^* u$ ' ın $E_i^* E_0 V$ ' ı gerdiği bulunur. Lemma 3.1.1' den $E_i^* E_0 V$ uzayının sıfırdan farklı olduğu bulunur ve $E_i^* u \neq 0$ olduğu ispatlanmış olur.

Tanım 3.1.3. [29] Φ Leonard sistem ve V indirgenemez $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-modül olsun.
$E_0^* u, E_1^* u, \dots, E_d^* u$

dizisi V için Φ-standart tabandır. u ; $E_0 V$ de sıfırdan farklı bir vektördür.

Lemma 3.1.4. [29] Φ Leonard sistem ve V indirgenemez $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-modül olsun. $v_0, v_1, \dots, v_d$ V de vektör dizisi olsun. O halde bu dizi ;

(i) $v_i \in E_i^* V$ dir.$(0 \leq i \leq d)$

(ii) $\sum_{i=0}^{d} v_i \in E_0 V$

şartlarını sağlarsa V için Φ-standart taban olur.

İspat : $v_0, v_1, \dots, v_d$; V için Φ-standart taban olsun. Tanım 3.1.3' den $E_0 V$ da sıfırdan farklı bir u vektörü vardır ve $(0 \leq i \leq d)$ için $v_i = E_i^* u$, $v_i \in E_i^* V$ dir. Buradan da görüldüğü gibi (i) şartı sağlanmış olur. I, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$' nın birimi olmak üzere

I= $\sum_{i=0}^{d} E_i^*$ olsun. Bu, u vektörüne uygulanarak $u = \sum_{i=0}^{d} v_i$ olduğu bulunur ve (ii) şartı sağlanmış olur. Şimdi de $v_0, v_1, \dots, v_d$ nin (i) ve (ii)' yi sağladığı kabul edilsin. u vektörü $u = \sum_{i=0}^{d} v_i$ şeklinde ve $u \in E_0 V$ şeklinde olsun. (i) kullanılarak $E_i^* v_j = \delta_{ij} v_j$ olduğu bulunur , $(0 \leq i \leq d)$ için $v_i = E_i^* u$ olur. $v_0, v_1, \dots, v_d$ vektörlerinden en az biri sıfırdan farklı olduğundan dolayı u$\neq$ 0 olur. Tanım 3.1.3' den $v_0, v_1, \dots, v_d$ vektörler dizisi V vektör uzayı için Φ- standart taban olur.

Şimdi bazı notasyonları hatırlayalım. d$\in \mathbb{Z}^+$, B $mat_{d+1}(K)$ da matris $\propto$, K da skaler olsun. O halde $(0 \le i \le d)$ için $B_{i0} + B_{i1} + \cdots + B_{id} = \propto$ olmak üzere B matrisine $\propto$ satır toplamına sahiptir denir **[25, 28].**

Lemma 3.1.5. [25, 16] Φ Leonard sistem ve θ_i,θ_i^* skalerler olsun. V indirgenemez $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-modül ve $v_0, v_1, \ldots, v_d$ vektörleri V için taban olsun. Aynı zamanda B, B^* matrisleri $mat_{d+1}(K)$ da A matrisini ifade etsin.

(i) B, θ_0 sabit satır toplamına sahiptir.

(ii) $B^* = köşegen(\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*)$ dır.

şartları birlikte sağlanırsa $v_0, v_1, \ldots, v_d$ vektörleri V için Φ- standart taban olur.

3.2.Split Tabanlar ve Split Parçalanma

Tanım 3.2.1. [23] Φ Leonard sistem ve V indirgenemez $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-modül olsun. V' nin 1 boyutlu alt uzaylarından oluşan $U_0, U_1, \ldots, U_d$ dizisine V' nin parçalanması denir ve V vektör uzayı

$$V = U_0 + U_1 + \cdots + U_d (direkt\ toplam) \tag{45}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.2.2. [23] Tanım 3.2.1' den

$$(A - \theta_i I)U_i \subseteq U_{i+1} (0 \le i \le d), (A - \theta_d I)U_d = 0 \tag{46}$$

$$(A^* - \theta_i^* I)U_i \subseteq U_{i-1} (1 \le i \le d), (A^* - \theta_0^* I)U_0 = 0 \tag{47}$$

olmak üzere V vektör uzayının $U_0, U_1, \ldots, U_d$ parçalanmasına Φ-split parçalanma denir.

Tanım 3.2.3. [32]

$V_{ij} = \sum_{h=0}^{i} E_h^* V \ \cap \sum_{k=j}^{d} E_k V$ (48)

olur.

Lemma 3.2.4. [32]

$$V_{i0} = E_0^* V + E_1^* V + \cdots + E_i^* V \ \ (0 \le i \le d)$$

$$V_{dj} = E_j V + E_{j+1} + \cdots + E_d V \ \ (0 \le j \le d)$$

dir.

Lemma 3.2.5. [28] i≤ j ise 0≤ $i, j \le d$

$V_{ij} = 0$ (49)

dır.

Lemma 3.2.6. [28, 32] $U_0, U_1, \dots, U_d$ V nin alt uzayları olsun.

(i) $U_i = (E_0^* V + E_1^* V + \cdots + E_i^* V) \cap (E_i V + E_{i+1} V + \cdots + E_d V)$

(ii) $U_0, U_1, \dots, U_d$ V nin Φ-split parçalanmasıdır.

(iii) $(0 \le i \le d)$ için

$U_i + U_{i+1} + \cdots + U_d = E_i V + E_{i+1} V + \cdots + E_d V$ (50)

$U_0 + U_1 + \cdots + U_i = E_0^* V + E_1^* V + \cdots + E_i^* V$ (51)

şartları denktir.

Tanım 3.2.7. [23] Φ Leonard sistem, V indirgenemez $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-modül ve $U_0, U_1, \dots, U_d$ V nin Φ-split parçalanması olsun. i∈ $\mathbb{Z}^+$ olsun. $(A^* - \theta_i^* I)U_i = U_{i-1}$ ve $(A - \theta_{i-1} I)U_{i-1} = U_i$ elde edilir. Görülüyor ki U_i ; $(A - \theta_{i-1} I)$, $(A^* - \theta_i^* I)$ için öz uzaydır ve K cisminden alınan bu öz değerler sıfırdan farklıdır . Bu öz değeri φ_i olarak ifade edersek φ_i öz değeri V için bir taban olur. Lemma 3.2.6(i)' de i= 0 alırsak $U_0 = E_0^* V$ olur.$(0 \leq i \leq d)$ için $(A - \theta_{i-1} I) \dots (A - \theta_0 I)V$ U_i için taban olur . Buradan ve $U_0, U_1, \dots, U_d$ V nin parçalanması olduğundan

$$(A - \theta_{i-1} I) \dots (A - \theta_0 I)V \tag{52}$$

dizisi V için bir taban olur. Bu tabandan oluşan A , A^* matrisleri

$$\begin{pmatrix} \theta_0 & . & . & . & . & 0 \\ 1 & \theta_1 & . & . & . & . \\ . & 1 & \theta_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 1 & \theta_d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \theta_0^* & \varphi_1 & . & . & . & 0 \\ . & \theta_1^* & \varphi_2 & . & . & . \\ . & . & \theta_2^* & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & \varphi_d \\ 0 & . & . & . & . & \theta_d^* \end{pmatrix} \tag{53}$$

şeklinde olur. (53)' e V için Φ-split taban olur ki v≠ 0 ∈ $E_0^* V$ olur. $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d$ ye Φ' nin ilk split dizisi denir. $\emptyset_1, \emptyset_2, \dots, \emptyset_d$ de $\Phi^{\Downarrow}$ nin ilk split dizisi olsun ve bu diziye de Φ' nin ikinci split dizisi denir. Notasyonel uygunluk için $\varphi_0 = 0$, $\varphi_{d+1} = 0$, $\emptyset_0 = 0$, $\emptyset_{d+1} = 0$ olarak ifade edilir.

Tanım 3.2.8. [30] V, K üzerinde sonlu pozitif boyutlu vektör uzay ve A, B matrisleri de V de Leonard çift olsun. Bu çift için A indirgenemez üçlü bant matris ve B köşegen matris olsun. $v_0, v_1, \dots, v_d$ A, B çifti için standart taban ; $v_d, v_{d-1}, \dots, v_0$ da A, B çifti için standart tabandır.

Bu ifadelere geçmeden önce II. Bölümde açıkladığımız kare matris için alt ikiköşegen ve üst ikiköşegen kavramlarını hatırlayalım.

Tanım 3.2.9. [30] V, K üzerinde sonlu pozitif boyutlu vektör uzay ve A, B V de Leonard çift olsun. Bu çift için A indirgenemez alt ikiköşegen ve B indirgenemez üst ikiköşegendir. $u_0, u_1, \ldots, u_d$; A, B çifti için split tabandır o halde $u_d, u_{d-1}, \ldots, u_0$ de B, A Leonard çifti için split tabandır.

Her bir Leonard çift birçok split tabana sahip olabilir ve aşağıdaki gibi elde edilebilir. $v_0, v_1, \ldots, v_d$; A, B çifti için standart taban ve $v_0^*, v_1^*, \ldots, v_d^*$ de B, A Leonard çifti için standart taban olsun.

$(0 \leq i \leq d)$ için

$$\mathrm{span}(v_0, v_1, .., v_d) \cap \mathrm{span}(v_i^*, v_{i+1}^*, \ldots, v_d^*)$$

uzayı 1 boyutlu olur. **[28]** u_i bu uzayda sıfırdan farklı bir vektör olarak alınırsa $u_0, u_1, \ldots, u_d$ dizisi A, B için split taban olur. Burada gösterildiği gibi **[28]** A, B çifti için bütün split tabanlar bu yolla elde edilebilir.

A, B çifti için split tabanlı matrisler

$$A = \begin{pmatrix} d & . & . & . & . & 0 \\ -1 & d-2 & . & . & . & . \\ . & -2 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & -d & -d \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} d & 2d & . & . & . & 0 \\ . & d-2 & 2d-2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 2 \\ 0 & . & . & . & . & -d \end{pmatrix}$$

şeklinde olur.

3.3. Parametre Dizisi ve Sınıflanan Uzay

Bu kısımda öz değer dizisi, dual öz değer dizisi, ilk split dizi ve ikinci split dizi arasındaki bağıntı ifade edilecektir. Bu yüzden aşağıda belirtilen kavramlar kullanılacaktır.

Tanım 3.3.1. [29] d∈ $\mathbb{Z}^{+}$ olsun. K dan alınan $\left(\theta_i, \theta_i^*, i = 0 \ldots d; \varphi_j, \emptyset_j, j = 1 \ldots d\right)$ skaler dizisine d nin K üzerindeki parametre dizisi denir.

(PA1) i≠j ise 0≤ $i, j \leq d$ $\theta_i \neq \theta_j$, $\theta_i^* \neq \theta_j^*$

(PA2) $\varphi_i \neq 0$, $\emptyset_i \neq 0$ 1≤ $i \leq d$

(PA3) $\varphi_i = \emptyset_1 \sum_{h=0}^{i-1} \frac{\theta_h - \theta_{d-h}}{\theta_0 - \theta_d} + (\theta_i^* - \theta_0^*)(\theta_{i-1} - \theta_d)$

(PA4) $\emptyset_i = \varphi_1 \sum_{h=0}^{i-1} \frac{\theta_h - \theta_{d-h}}{\theta_0 - \theta_d} + (\theta_i^* - \theta_0^*)(\theta_{d-i+1} - \theta_0)$

(PA5) $\frac{\theta_{i-2} - \theta_{i+1}}{\theta_{i-1} - \theta_i}$, $\frac{\theta_{i-2}^* - \theta_{i+1}^*}{\theta_{i-1}^* - \theta_i^*}$

ifadeleri eşittir ve 2≤ $i \leq d - 1$ için i den bağımsızdır.

şartları birlikte sağlanırsa $v_0, v_1, \ldots, v_d$ vektörleri V için Φ- standart tabandır ;

Teorem 3.3.2. [28] d∈ $\mathbb{Z}^{+}$ ve $\left(\theta_i, \theta_i^*, i = 0 \ldots d; \varphi_j, \emptyset_j, j = 1 \ldots d\right)$ K dan alınan skaler dizisi olsun. O halde

(i) $\left(\theta_i, \theta_i^*, i = 0 \ldots d; \varphi_j, \emptyset_j, j = 1 \ldots d\right)$ dizisi K üzerinde parametre dizisidir.

(ii) K üzerinde $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_d$ öz değer, $\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*$ dual öz değer, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_d$ ilk split ve $\emptyset_1, \emptyset_2, \ldots, \emptyset_d$ ikinci split diziye sahip Φ Leonard sistem vardır.

ifadeleri birbirine denktir.

Tanım 3.3.3. [29] Φ Leonard sistem olsun ve $(\theta_i, \theta_i^*, i = 0 \ldots d; \varphi_j, \emptyset_j, j = 1 \ldots d)$ parametre dizisi verilsin. Teorem 3.3.2. den K üzerindeki parametre dizisi K üzerindeki Leonard sistem için sınıflanan uzayın aynısıdır.

Teorem 3.3.4.[32] Φ $(\theta_i, \theta_i^*, i = 0 \ldots d; \varphi_j, \emptyset_j, j = 1 \ldots d)$ parametre dizisine sahip bir Leonard sistem olsun. O halde

(i)Φ^* ın parametre dizisi $(\theta_i^*, \theta_i, i = 0 \ldots d; \varphi_j, \theta_{d-j+1}, j = 1 \ldots d)$ dir.

(ii)$\Phi^{\downarrow}$ ın parametre dizisi $(\theta_i, \theta_{d-i}^*, i = 0 \ldots d; \emptyset_{d-j+1}, \varphi_{d-j+1}, j = 1 \ldots d)$ dir.

(iii)$\Phi^{\Downarrow}$ ın parametre dizisi $(\theta_{d-i}, \theta_i^*, i = 0 \ldots d; \emptyset_j, \varphi_j, j = 1 \ldots d)$ dir.

şartları sağlanır.

Tanım 3.3.5. [29] $d \geq 1$ tamsayısı verilmiş olsun ve K dan $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_d$; $\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*$ skaler iki dizi alınsın. $0 \leq i \leq d + 1$ için

$$\tau_i = \prod_{h=0}^{i-1} \lambda - \theta_h \text{ , } \tau_i^* = \prod_{h=0}^{i-1} \lambda - \theta_h^* \tag{54}$$

$$\eta_i = \prod_{h=0}^{i-1} \lambda - \theta_{d-h}, \;\; \eta_i^* = \prod_{h=0}^{i-1} \lambda - \theta_{d-h}^* \tag{55}$$

K[λ] da polinom olsun . Buradaki her bir polinom i. dereceden monik polinomdur.

Teorem 3.3.6. [28] Φ Leonard sistem olsun ve

$(\theta_i, \theta_i^*, i = 0 \ldots d; \varphi_j, \emptyset_j, j = 1 \ldots d)$ parametre dizisi olsun. u_i polinom olmak üzere

$$u_i = \sum_{h=0}^{i} \frac{\tau_h^*(\theta_i^*)}{\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_h} \tau_h \tag{56}$$

dir.

İspat : [27,28] i bir tamsayı olsun. u_i , i. dereceden bir polinomdur ve $\propto_0, \propto_1, \dots, \propto_d$ ler K dan alınan skalerler olmak üzere

$$u_i = \sum_{h=0}^{i} \propto_h \tau_h \tag{57}$$

olur.

$$\propto_h = \frac{\tau_h^*(\theta_i^*)}{\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_h}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için $\propto_0 = 1$ ve $0 \leq h \leq i-1$ için $\propto_{h+1} \varphi_{h+1} = \propto_h (\theta_i^* - \theta_h^*)$ olduğunu gösterelim.(57) de λ= θ_0 yazılarak $u_i(\theta_0) = \sum_{h=0}^{i} \propto_h \tau_h(\theta_0)$ olduğu bulunur. $u_i(\theta_0) = 1$ olduğunu hatırlatalım. (54) kullanılarak $\tau_h(\theta_h) = 1$ olur. h= 0 ve $1 \leq h \leq i$ için $\tau_h(\theta_0) = 0$ dır. Bu açıklamalardan $\propto_0 = 1$ olduğu bulunur. Şimdi de $0 \leq h \leq i-1$ için $\propto_{h+1} \varphi_{h+1} = \propto_h (\theta_i^* - \theta_h^*)$ olduğunu gösterelim. V indirgenemez $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-modül olsun. **v**, E_0^*V de sıfırdan farklı vektör ve $0 \leq i \leq d$ için $e_i = \tau_i(A)v$ olsun. $e_0, e_1, \dots, e_d$ dizisi V vektör uzayı için bir tabandır. Buradan hareketle $(A^* - \theta_j^*)e_j = \varphi_j e_{j-1}$ $1 \leq j \leq d$ ve $(A^* - \theta_0^* I)e_0 = 0$ bulunur. $u_i(A)E_0^*V = E_i^*V$ dir. Buradan ve $\mathbf{v} \in E_0^*V$ den $u_i(A)v \in E_i^*V$ bulunur. $u_i(A)v$; A^* için θ_i öz değerli öz vektördür,

$$0 = A^* - \theta_i^* \mathrm{I} u_i(A)v$$

$$0 = A^* - \theta_i^* \mathrm{I} \sum_{h=0}^{i} \propto_h \tau_h(A)v$$

$$= A^* - \theta_i^* \mathrm{I} \sum_{h=0}^{i} \propto_h e_h$$

$$= \sum_{h=0}^{i-1} e_h \left(\propto_{h+1} \varphi_{h+1} - \propto_h (\theta_i^* - \theta_h^*)\right)$$

olur. Buradan $e_0, e_1, \dots, e_d$; lineer bağımsız olduğundan $0 \leq h \leq i-1$ için $\propto_{h+1} \varphi_{h+1} = \propto_h (\theta_i^* - \theta_h^*)$ bulunur.

Lemma 3.3.7. [17] $0 \leq i \leq d$ için

$$p_i(\theta_0) = \frac{\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_h}{\tau_i^*(\theta_i^*)} \tag{58}$$

olur.

Teorem 3.3.8. [17, 28] Φ Leonard sistem ve

$(\theta_i, \theta_i^*, i = 0 \dots d; \varphi_j, \emptyset_j, j = 1 \dots d)$ parametre dizisi olsun. b_i , c_i skalerleri

(i) $\quad b_i = \frac{\tau_i^*(\theta_i^*)}{\tau_{i+1}^*(\theta_{i+1}^*)} \quad 0 \leq i \leq d-1$

(ii) $\quad c_i = \frac{\eta_{d-i}^*(\theta_i^*)}{\eta_{d-i+1}^*(\theta_{i-1}^*)} \quad 1 \leq i \leq d$

şartını sağlar.

Teorem 3.3.9. [28] Φ Leonard sistem , $(\theta_i, \theta_i^*, i = 0 \dots d; \varphi_j, \emptyset_j, j = 1 \dots d)$ parametre dizisi ve p_i bir polinom olsun.

O halde p_i polinomu;

$$p_i = \sum_{h=0}^{i} \frac{\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_d}{\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_h} \frac{\tau_h^*(\theta_i^*)}{\tau_i^*(\theta_i^*)} \tau_h \quad 0 \leq i \leq d$$

şeklindedir.

İspat : $p_i = p_i(\theta_0)u_i$ dir. Bu eşitlikte (58)' u kullanarak $p_i(\theta_0)$ değerlendirilir ve sonuca ulaşılır **[28]**.

Teorem 3.3.10. [29] Φ Leonard sistem olsun. O halde a_i skaleri

$$a_i = \theta_i + \frac{\varphi_i}{\theta_i^* - \theta_{i-1}^*} + \frac{\varphi_{i+1}}{\theta_i^* - \theta_{i-1}^*} \quad 0 \le i \le d \tag{59}$$

şeklindedir.

İspat : $p_0, p_1, \dots, p_{d+1}$ polinomlar ve i bir tamsayı olsun.

$$\lambda p_i - p_{i+1} \tag{60}$$

polinomunu düşünelim. Bu polinom ifadesinden $a_i p_i + x_i p_{i-1} = \lambda p_i - p_{i+1}$ olduğu bulunur.

Teorem 3.3.11. [23] x_i skaleri polinomlarla

$$x_i = \varphi_i \emptyset_i \frac{\tau_{i-1}^*(\theta_{i-1}^*)\eta_{d-i}^*(\theta_i^*)}{\tau_i^*(\theta_i^*)\eta_{d-i+1}^*(\theta_{i-1}^*)} \quad , \quad 1 \le i \le d \tag{61}$$

şeklinde ifade edilir.

IV. BÖLÜM

LEONARD SİSTEMİ VE POLİNOMLAR

4.1. Askey Sistemi ve Bazı Polinomlar

İlk olarak u_i nin Krawtchouk polinomuna nasıl dönüşeceği gösterilecektir. $d \in \mathbb{Z}^+$ olsun ve K nın aşağıda belirtilen elemanlarını düşünelim;

$$\theta_i = d - 2i \,, \theta_i^* = d - 2i \quad 0 \leq i \leq d \tag{62}$$

$$\varphi_i = -2i(d - i + 1), \emptyset_i = 2i(d - i + 1) \quad 1 \leq i \leq d \tag{63}$$

Buradaki K cisminin karakteristiği sıfır yada d den daha büyük bir tek sayıdır. **[30]** dan K üzerinde $\left(\theta_i, \theta_i^*, i = 0 \ldots d; \varphi_j, \emptyset_j, j = 1 \ldots d\right)$ parametre dizili Φ Leonard sisteminin olduğu bulunur. a_i ,Φ için skaler olmak üzere

$$a_i = 0 \qquad 0 \leq i \leq d \tag{64}$$

olur.

b_i , c_i Φ için skaler olmak üzere

$$b_i = d - i \,, \quad c_i = i \qquad 0 \leq i \leq d \tag{65}$$

olur. O halde $0 \leq i, j \leq d$ için i, j yi herhangi bir tamsayı alalım . Teorem 3.3.6 ya Φ Leonard sistemi uygulanarak

$$(a)_n = a(a+1)(a+2) \ldots (a+n-1) \qquad n = 0,1, \ldots$$

olmak üzere

$$u_i(\theta_j) = \sum_{n=0}^{d} \frac{(-i)_n(-j)_n 2^n}{(-d)_n n!} \tag{66}$$

eşitliği bulunur. Burada ifade edilen hipergeometrik seriler **[1]'** de ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Bu tanımdan (66) da ki sağdaki toplam

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}-i,-j\\ -d\end{matrix}\middle|2\right) \tag{67}$$

hipergeometrik serisidir. Krawtchouk polinomları da **[1, 11]** de detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Bu tanım, (66) ve (67) ifadeleriyle beraber düzenlenerek genel olmayan u_i Krawtchouk polinomları bulunur.

İkinci olarak u_i polinomlarının q-Racah polinomlarına dönüştüğünü bulalım. d$\in \mathbb{Z}^+$ olsun ve

$$\theta_i = \frac{\theta_0 + h(1-q^i)(1-sq^{i+1})}{q^i} \tag{68}$$

$$\theta_i^* = \frac{\theta_0^* + h^*(1-q^i)(1-s^*q^{i+1})}{q^i} \tag{69}$$

elemanlarını düşünelim. $0 \leq i \leq d$ ve $1 \leq i \leq d$ için

$$\varphi_i = hh^*q^{1-2i}(1-q^i)(1-q^{i-d-1})(1-r_1q^i)(1-r_2q^i) \tag{70}$$

$$\emptyset_i = \frac{hh^*q^{1-2i}(1-q^i)(1-q^{i-d-1})(r_1-s^*q^i)(r_2-q^i)}{s^*} \tag{71}$$

dır. $h^*, h, q, r_1, r_2, s^*, s$ K' nın cebirsel kapanışındaki sıfırdan farklı skalerler ise $r_1r_2 = ss^*q^{d+1}$ olur. $1 \leq i \leq d$ için q^i, r_1q^i, r_2q^i, ${s^*q^i}/{r_1}$, ${s^*q^i}/{r_2}$ lerin ve

$2 \leq i \leq 2d$ için sq^i, s^*q^i ların her biri 1' den farklıdır.

[28]'den Φ, K cismi üzerinde $(\theta_i, \theta_i^*, i = 0 \dots d; \varphi_j, \emptyset_j, j = 1 \dots d)$ dizisine sahip Leonard sistem ve b_i , c_i Φ ' de skalerler olsun. Teorem 3.3.6 'a Φ Leonard sistem uygulanarak

$$b_0 = \frac{h(1-q^{-d})(1-r_1q)(1-r_2q)}{1-s^*q^2}$$

$$b_i = \frac{h\left(1-q^{i-d}\right)\left(1-s^*q^{i+1}\right)\left(1-r_1q^{i+1}\right)\left(1-r_2q^{i+1}\right)}{(1-s^*q^{2i+1})(1-s^*q^{2i+})}$$

$$c_i = \frac{h\left(1-q^{i}\right)\left(1-s^*q^{i+d+1}\right)\left(r_1-s^*q^{i}\right)\left(r_2-s^*q^{i}\right)}{s^*q^d(1-s^*q^{2i})(1-s^*q^{2i+1})}$$

$$c_d = \frac{h(1-q^d)(r_1-s^*q^d)(r_2-s^*q^d)}{s^*q^d(1-s^*q^{2d})}$$

skalerleri elde edilir .

0≤ $i,j \leq d$ için i,j herhangi bir tamsayı olsun. Teorem 3.3.6 ya Φ uygulanarak

$(a;q)_n = (1-a)(1-aq)\ldots(1-aq^{n-1})$ n= 0,1, ...

olmak üzere

$$u_i\left(\theta_j\right) = \sum_{n=0}^{d}(q^{-i};q)_n(s^*q^{i+1};q)_n(q^{-j};q)_n(sq^{j+1};q)_n \tag{72}$$

bulunur. **[11]** inci makale de temel hipergeometrik seriler açıklanmıştır. Bu tanımdan (72) de ki sağdaki toplam

$${}_4\emptyset_3\left(\begin{matrix} q^{-i},s^*q^{i+1},q^{-j},sq^{j+1} \\ r_1q,r_2q,q^{-d} \end{matrix}\Big/ q,q\right) \tag{73}$$

temel hipergeometrik serisini verir. **[2]** ve [**29]** makalelerinde q-Racah polinomu daha detaylı açıklanmıştır. Bu tanımla beraber (73) , (74) düzenlenerek ve

$r_1r_2 = ss^*q^{d+1}$ eşitliği göz önüne alınarak u_i nin q-Racah polinomu olduğu bulunur.

4.2. Leonard Sistemin Karakteristiği

Φ Leonard sistem ve $p_0, p_1, \ldots, p_{d+1}$ polinom olsun. $p_0^*, p_1^*, \ldots, p_d^*$; Φ^* için polinomdur. Ayrıca $p_0, p_1, \ldots, p_{d+1}$; Φ nın monik polinom dizisi (MPS). $p_0^*, p_1^*, \ldots, p_d^*$ da Φ nin dual MPS sidir.

x_0 , x_0^* , p_{-1} , p_{-1}^* nin sıfır ve

$a_i = \text{iz}(E_i^* A)$, $a_i^* = \text{iz}(E_i A^*)$ $\quad 0 \leq i \leq d$

$x_i = \text{iz}(E_i^* A E_{i-1}^* A)$, $x_i^* = \text{iz}(E_i A^* E_{i-1} A^*)$ $\quad 1 \leq i \leq d$

olduğu yerde

$$p_0 = 1 \ , \ \ p_0^* = 1 \tag{74}$$

$$\lambda p_i = p_{i+1} + a_i p_i + x_i p_{i-1} \qquad 0 \leq i \leq d \tag{75}$$

$$\lambda p_i^* = p_{i+1}^* + a_i^* p_i^* + x_i^* p_{i-1}^* \tag{76}$$

ve

$$x_i \neq 0 \ , x_i^* \neq 0 \qquad 1 \leq i \leq d \tag{77}$$

eşitlikleri elde edilir . θ_0 , θ_1 ,…, θ_d Φ nin öz değer dizisini ifade eder ve

$$\text{i} \neq \text{j ise } \ \theta_i \neq \theta_j \ , \ \theta_i^* \neq \theta_j^* \tag{78}$$

$$p_{d+1}(\theta_0) = 0 \ , \ p_{d+1}^*(\theta_i^*) = 0 \qquad 0 \leq i \leq d \tag{79}$$

olur. Üstelik

$$p_i(\theta_0) \neq 0 \ , \ p_i^*(\theta_0^*) \neq 0 \qquad 0 \leq i \leq d$$

olur. $0 \leq i, j \leq d$ için

$$\frac{p_i(\theta_j)}{p_i(\theta_0)} = \frac{p_j^*(\theta_0^*)}{p_j^*(\theta_0^*)} \tag{80}$$

eşitliği vardır**[28].** Aşağıda verilen teoremde de (73)-(80) eşitliklerinin Leonard sistemin karakteristiğini gösterdiği açıklanmıştır.

Teorem 4.2.1. d$\in \mathbb{Z}^{+}$ olsun ve K$[\lambda]$ da

$$p_0, p_1, \dots, p_{d+1} \tag{81}$$

$$p_0^*, p_1^*, \dots, p_d^* \tag{82}$$

polinomları verilsin. K cismi üzerinde (76)-(80) eşitliklerini sağlayan

$$\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_d \tag{83}$$

$$\theta_0^*, \theta_1^*, \dots, \theta_d^* \tag{84}$$

skalerleri verilsin. K cismi üzerinde (81) MPS' ye, (82) dual MPS' ye, (83) öz değer diziye ve (84) dual öz değer diziye sahip Φ Leonard sistemi vardır. Buradaki Φ ; Leonard sisteme izomorftur.

İspat : V' yi V $= K^{d+1}$ şeklinde alalım . A, A^* matrisleri de $mat_{d+1}(K)$ da

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & . & . & . & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & . & . & . \\ . & 1 & a_2 & . & . & . \\ . & \cdots & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & x_d \\ 0 & . & . & . & 1 & a_d \end{pmatrix}$$

$$A^* = k\ddot{o}ş(\theta_0^*, \theta_1^*, \dots, \theta_d^*)$$

şeklinde matrisler olsun. A , A^* çiftinin V' de Leonard çift olduğunu gösterelim. Bunun için Leonard çift tanımını uygulayalım. A indirgenemez üçlü bant matris ve A^* köşegen matristir. Bu yüzden Leonard çift tanımının (i). şartı sağlanmış olur. (ii). şart için X tersinir matrisini ispatlayalım ki $X^{-1}AX$ matrisi köşegen matris ve $X^{-1}A^*X$ indirgenemez üçlü bant matris olsun.

X , $mat_{d+1}(K)$ ‘ da

$$X_{ij} = \frac{p_i(\theta_j)\rho_j^*(\theta_0^*)}{x_1 x_2 \ldots x_d} \tag{85}$$

$$= \frac{\rho_j^*(\theta_i^*)\rho_i(\theta_0)}{x_1 x_2 \ldots x_i} \tag{86}$$

elemanlarına sahip matris olsun. X tersinirdir çünkü Vandermondedir. (74) ve (85) i kullanılarak H matrisi $H = köş(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_d)$ olmak üzere AX = XH eşitliği bulunur. H = $X^{-1}AX$ ve H matrisi köşegen olur. (74) ve (86) i kullanılarak H^* matrisi

$$H^* = \begin{pmatrix} a_0^* & \cdots & . & . & . & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & . & . & . \\ . & 1 & a_2^* & . & . & . \\ . & \cdots & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & x_d^* \\ 0 & . & . & . & 1 & a_d^* \end{pmatrix}$$

olmak üzere $A^*X = XH^*$ eşitliği bulunur. $H^* = X^{-1}A^*H$ ve H^* matrisi üçlü bant olur. Sonuç olarak A , A^* matrislerinin V de Leonard çift olduğu gösterilmiş olur.

Diğer taraftan $\boldsymbol{j}$ bir tamsayı olsun. H= $X^{-1}AX$ kullanılarak X nin j. satırında A nın θ_j öz değeri bulunur. A^* ın tanımından I ‘ nın j. satırında A^* ın θ_j^* öz değeri bulunur. Bir de $E_j(E_j^*)$; $\theta_j(\theta_j^*)$ için A(A^*) ın ilkel idempotenti olsun. Açıklanan bu ifadelerden Φ, Leonard sistem olur. Ve Φ, K cismi üzerinde olur. Bir de (81) in Φ nin MPS’ si olduğunu gösterelim. Bunun için $0 \leq i \leq d$ için $a_i = iz(E_i^*A)$ ve $1 \leq i \leq d$ için $x_i = iz(E_i^*AE_{i-1}^*A)$ eşitliklerinin sağlandığını gösterelim. Lemma 2.3.2. (i) ve (ii) ye Φ uygulanarak a_i ve x_i skalerleri bulunur. O halde; (81) de ki ifade Φ Leonard sisteminin MPS si olur.

4.3. Leonard Sistemi ve Polinomlar

Teorem 4.3.1. [32] K cisim ve K$[\lambda]$ cebir olsun. K üzerindeki Φ Leonard sistemden **K**$[\lambda]$' da

$\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_d; \rho_0^*, \rho_1^*, \dots, \rho_d^*$

monik polinom dizisi vardır. O halde

deg$\rho_i = i$, deg$\rho_i^* = i$, $0 \le i \le d+1$

$\rho_i(A)E_0^* = E_i^* A^* E_0^*$, $\rho_i^*(A^*)E_0 = E_i A^{*i} E_0$, $0 \le i \le d$

$\rho_{d+1}(A) = 0$, $\rho_{d+1}^*(A^*) = 0$

olur.

Bu polinomlar ;

x_0 , x_0^* , ρ_{-1} , ρ_{-1}^* lerin her biri sıfır ve

$a_i = iz(E_i^* A)$, $a_i^* = iz(E_i A^*)$

$x_i = iz(E_i^* A E_{i-1}^* A)$, $x_i^* = iz(E_i A^* E_{i-1} A^*)$

$x_i \neq 0$, $x_i^* \neq 0$, $1 \le i \le d$ (87)

olmak üzere

$\rho_0 = 1$, $\rho_0^* = 1$ (88)

$\lambda \rho_i = \rho_{i+1} + a_i \rho_i + x_i \rho_{i-1}$, $0 \le i \le d$ (89)

$\lambda \rho_i^* = \rho_{i+1}^* + a_i^* \rho_i^* + x_i^* \rho_{i-1}^*$, $0 \le i \le d$ (90)

eşitlikleri sağlanır. $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{d+1}$; Φ nin monik polinom dizisini (MPS) , $\rho_0^*, \rho_1^*, \dots, \rho_{d+1}^*$; Φ nin dual monik polinom dizisini oluşturur.

Aynı zaman da $\theta_0, \theta_1, \dots \theta_d$; Φ nin öz değer dizisi olsun $i \neq j$ olmak üzere

$$\theta_i \neq \theta_j,\ \theta_i^* \neq \theta_j^*\ ,\ 0 \leq i \leq j \tag{91}$$

ve

$$\rho_{d+1}(\theta_i) = 0\ ,\ \rho_{d+1}^*(\theta_i^*) = 0\ ,\quad 0 \leq i \leq d \tag{92}$$

eşitlikleri elde edilir .O halde

$$\rho_i(\theta_0) \neq 0\ \ ,\ \rho_i^*(\theta_0^*) \neq 0\ \ ,\ 0 \leq i \leq d \tag{93}$$

ve

$$\frac{\rho_i(\theta_j)}{\rho_i(\theta_0)} = \frac{\rho_j^*(\theta_i^*)}{\rho_j^*(\theta_0^*)} \quad ,\quad 0 \leq i,j \leq d \tag{94}$$

olur.

Diğer taraftan , $\mathbf{K}[\lambda]$' da verilen

$$\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{d+1} \tag{95}$$

$$\rho_0^*, \rho_1^*, \dots, \rho_{d+1}^* \tag{96}$$

polinomları (87)- (94) ifadelerini sağlar, aynı zamanda K dan alınan

$$\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_d \tag{97}$$

$$\theta_0^*, \theta_1^*, \dots, \theta_d^* \tag{98}$$

skalerleri de (88)- (94) ifadelerini sağlar. O halde; K cismi üzerinde MPS, dual MPS ve Φ Leonard sisteminin varlığı ispatlanmış olur. Ayrıca, Φ Leonard sistemi varolan tek izomorfizimdir. Bu tanımdan; Leonard sistem ve (87)- (94) ı sağlayan (95)- (98) sistemleri arasında 1-1 örtendir.

(87)- (94) ifadelerini sağlayan (95)- (98) sistemleri ilk olarak K= $\mathfrak{R}$ için; Leonard **[21]** , Bannai ve Ito [7] tarafından sınırlandırılmıştır. Yukarıdaki 1-1 örtenlik, Leonard teoreminin ‘’lineer cebirsel versiyonu’’ olarak ifade edilebilir ve ortogonal polinomlara alternatif olarak gösterilebilir.

4.4. Leonard Sistemi ve Ortogonal Polinomlar

Leonard çiftleri ile; q-Racah polinomlarının oluşturduğu ortogonal polinom ailesi ve Askey görüşündeki bağlantılı polinomlar arasında doğal bir ilişki vardır **[30]**. Bu ilişki, Leonard çiftlerine uygulanarak Krawtchouk polinomlarının bir sınıfı elde edilir. Basit olması için bu bölümde K nın karakteristiği sıfır olarak alınacaktır.

Teorem 4.4.1. [30] $d \in \mathbb{Z}^+$ ve $d, d-2, d-4, \ldots, 2-d, -d$; K nın alt kümeleri olsun. Bu alt küme Ω ve V; K cismi üzerinde Ω ‘ dan K ‘ ya tüm fonksiyonların oluşturduğu vektör uzay olsun. O halde V ; $d+1$ boyutludur.

$A : V \rightarrow V$ ve $B : V \rightarrow V$ olan iki lineer dönüşüm tanımlayalım;

A ile başlayalım. $\forall f \in V$ için

$$(Af)(\theta) = \theta f(\theta) \ , \quad \forall \theta \in \Omega$$

yı sağlayan Af ; V vektör uzayında bir eleman ve A da V ‘ de lineer dönüşüm olur.

Şimdi B ‘ yi düşünelim . $\forall f \in V$ için

$$(Bf)(\theta) = \frac{d+\theta}{2} f(\theta-2) + \frac{d-2}{2} f(\theta+2)$$

yı sağlayan Bf ; V vektör uzayında bir eleman ve B de V vektör uzayında lineer dönüşüm olur. Buradaki A, B çiftinin Leonard çift olduğunu gösterelim. A yı indirgenemez üçlü bant matris ve B yi köşegen matris gösteren V için bir taban bulalım.

İspat: $\theta_i = d - 2i \quad (0 \leq i \leq d)$ ve $0 \leq j \leq d$ için K_j;

$$K_j(\theta_i) = \binom{d}{j}\, {}_2F_1\left(\left.{}^{-i,-j}_{\ -d}\right/ 2\right)$$

i sağlayan eleman olsun. $K_j(\theta)$; θ da j nin polinom derecesidir. Örneğin;

$$K_0(\theta) = 1 \ , \ K_1(\theta) = \theta \ , \qquad K_2(\theta) = \frac{\theta^2 - 2}{2} \ , \qquad (\forall\theta \in \Omega)$$

dır. $K_0, K_1, \ldots, K_d$ polinomları Krawtchouk polinomudur, fakat bu polinomun genel hali değildir **[1].** Ayrıca bu polinom dizisi, V için bir taban olur. Bu tabanda ifade edilen A ve B matrisleri

$$A = \begin{pmatrix} 0 & d & & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & d-1 & . & . & . \\ . & 2 & & . & . & . & . \\ . & . & & . & . & . & . \\ . & . & & . & . & . & 1 \\ 0 & . & & . & . & d & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \ köş(d, d-2, d-4, \ldots, -d)$$

şeklinde olur. Buradan A ve B matrislerinin Leonard çift olduğu bulunur. Şimdi A matrisinin köşegen ve B matrisinin indirgenemez üçlü bant olduğunu gösterelim. $0 \leq j \leq d$ için K_j^*; $K_j^*(\theta_i) = \ \delta_{ij}$ yi sağlayan V vektör uzayında bir eleman ve δ_{ij} de kronicker delta olsun. O halde $K_0^*, K_1^*, \ldots, K_d^*$; dizisi V için bir taban oluşturur. Bu tabandaki A ve B matrisleri

$$A = \ köş\ (d, d-2, d-4, \ldots, -d) \ ,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & d & & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & d-1 & . & . & . \\ . & 2 & & . & . & . & . \\ . & . & & . & . & . & . \\ . & . & & . & . & . & 1 \\ 0 & . & & . & . & d & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olur.

Böylece yukarıda verilen Krawtchouk polinomlarının Leonard çiftlerle bağlantılı oldukları gösterilmiş olur. Benzer şekilde aşağıdaki tabloda verilen polinomlar da Leonard çiftlerle bağlantılı olur.

TİP	POLİNOM
${}_4F_3$	Racah
${}_3F_2$	Hahn, dual Hahn
${}_2F_1$	Krawtchouk
${}_4\emptyset_3$	q-Racah
${}_3\emptyset_2$	q- Hahn, dual q- Hahn
${}_2\emptyset_1$	q- Krawtchouk

4.5. Leonard Çifti ve Uq$(\mathbf{sl_2})$

Leonard çift de; standart tabandan ziyade split tabanla çalışılır. Bunu $Uq(sl_2)$ de gösterelim.

Tanım 4.5.1. [24] $Uq(sl_2)$

$$kk^{-1} = k^{-1}k = 1, ke = q^2ek, kf = q^{-2}fk, ef - fe = \frac{k - k^{-1}}{q - q^{-1}}$$

e, f, k, k^{-1} sembollerinden oluşan K- cebiri olsun. $Uq(sl_2)$ için indirgenemez sonlu boyutlu modülü hatırlayalım. Bunun için

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}\ ,\ n \in \mathbb{Z} \tag{99}$$

notasyonunu kullanalım.

4.6. Leonard Çifti ve Askey- Wilson Sistemi

Tanım 4.6.1 [20] Her bir A öz uzayı 1 boyutlu olduğundan A, A^* Leonard çifti; üçlü bant çifti ile uyuşur. Terwilliger ve Vidunos **[22]**; A, A^* Leonard çiftinin $\beta, \gamma, \gamma^*, \propto, \propto^*, \eta, \eta^*$ skalerleri için

$$A^2A^* - \beta AA^*A + A^*A^2 - \gamma(AA^* + A^*A) - \propto A^* = \gamma^*A^2 + WA + \eta I \qquad (100)$$

$$A^{*2}A - \beta A^*AA^* + AA^{*2} - \gamma^*(A^*A + AA^*) - \propto^* A = \gamma A^{*2} + WA^* + \eta^* I \qquad (101)$$

şeklinde verilen bağıntıların sağlandığını göstermişlerdir. Bu şekilde verilen bağıntılar Zhedanov **[27]** tarafından bulmuştur ve adına Askey-Wilson bağıntıları denilmiştir.

V. BÖLÜM

DETERMİNANT FONKSİYONU

Determinant konusu lineer cebirin en önemli konularından biridir. Bir çok problem determinant kullanılarak kolayca çözülebilmektedir. Determinant teorisi, 1696 yıllarında Leibnitz tarafından ortaya atıldı ve kullanılmaya başlandı. Daha sonra Bezout, Vandermonde, Crammer, Langrange ve Laplace tarafından daha da geliştirildi. 19. asrın ilk yarısında Cauchy, Jacobi ve Sylvester' de katıldı. Bugün determinant bir çok bilim dalında ortak olarak kullanılmaktır **[8].**

5.1. A , A^* Leonard çifti için $AA^* - A^*A$ nın determinantı

Teorem 5.1.1. (A , A^* Leonard çifti için $AA^* - A^*A$ nın determinantı):

$d = \dim V - 1$ ve d tek olsun. O halde $AA^* - A^*A$ tersinirdir ve determinant hesaplanabilir **[27]**.

Burada öncelikle bazı ifadeleri açıklayalım. A matrisini indirgenemez üçlü bant ve A^* matrisini köşegen olarak ifade eden V için bir $v_0^*, v_1^*, \ldots, v_d^*$ taban tespit edelim. Bu tabandaki A , A^* matrisleri ;

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & . & . & . & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & . & . & . \\ . & c_2 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & b_{d-1} \\ 0 & . & . & . & c_d & a_d \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} \theta_0^* & . & . & . & . & 0 \\ . & \theta_1^* & . & . & . & . \\ . & . & \theta_2^* & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & \theta_d^* \end{pmatrix} \qquad (102)$$

$1 \leq i \leq d$ için $b_{i-1}c_i \neq 0$ dır. Aynı zaman da A matrisini köşegen ve A^* matrisini indirgenemez üçlü bant olarak ifade eden V için bir $v_0, v_1, \ldots, v_d$ tabanı tespit edelim. Bu tabandaki A , A^* matrisleri ;

$$A = \begin{pmatrix} \theta_0 & . & . & . & . & 0 \\ . & \theta_1 & . & . & . & . \\ . & . & \theta_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & \theta_d \end{pmatrix}, \; A^* = \begin{pmatrix} a_0^* & b_0^* & . & . & . & 0 \\ c_1^* & a_1^* & b_1^* & . & . & . \\ . & c_2^* & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & b_{d-1}^* \\ 0 & . & . & . & c_d^* & a_d^* \end{pmatrix} \qquad (103)$$

$1 \leq i \leq d$ için $b_{i-1}^* c_i^* \neq 0$ dır. $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_d$; A nın öz değerleridir **[28]**. Ayrıca bu matris formları Leonard çift şartını da sağlar **[26]**.

Teorem 5.1.2. [27] d tek olsun. O halde ,

$$det(AA^* - A^*A) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq d \\ i \ tek}} b_{i-1}^* c_i^* (\theta_{i-1} - \theta_i)^2 \qquad (104)$$

$$det(AA^* - A^*A) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq d \\ i \ tek}} b_{i-1} c_i (\theta_{i-1}^* - \theta_i^*)^2 \qquad (105)$$

olur.

İspat: ilk olarak (105) eşitliğini ispatlayalım. B; köşegen elemanları 0 olan üçlü bant matris ve $0 \leq r \leq d$ için B_r ; B nin alt matrisi olsun. O halde $B_1, B_3, \ldots, B_d$ determinatları aşağıda verilen rekurrenti sağlarlar **[16,p. 28]** ;

$$det(B_1) = b_0 c_1 (\theta_0^* - \theta_1^*)^2,$$

$$det(B_r) = b_{r-1} c_r (\theta_{r-1}^* - \theta_r^*)^2 det(B_{r-2}) , \qquad (3 \leq r \leq d, r\ tek).$$

Bu rekurrent çözülerek ;

$$det(B_r) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \ tek}} b_{i-1} c_i (\theta_{i-1}^* - \theta_i^*)^2 , \qquad (1 \leq r \leq d, r\ tek) \qquad (106)$$

bulunur. (106) da $r = d$ alınarak (105) elde edilir. (104) eşitliği de benzer şekilde ispatlanır.

Şimdi biz; bu determinant hesabından yola çıkarak bazı ifadeleri hem örneklerle karşılaştıracağız, hem de bulacağımız ifadelerin öz değerleri hakkında yorumlar yapacağız.

Örnek 5.1.3. [25] A ve A^* matrisleri

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu iki matris görüldüğü gibi Leonard çift şartını sağlar.

$$\begin{aligned} det(B_1) &= b_0 c_1 (\theta_0^* - \theta_1^*)^2 \\ &= 3.1.(2-4)^2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$det(B_3) = b_2 c_3 (\theta_2^* - \theta_3^*)^2 det(B_1) = 3.3.(1-5)^2.12 = 1728$$

Yani;

$$det(AA^* - A^*A) = 9.16.12 = 1728$$

olur. Bu ifadenin determinantı

$$AA^* = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 0 \\ 0 & 20 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AA^* - A^*A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(AA^* - A^*A) = -6\begin{vmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & -12 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1728$$

şeklinde de hesaplanır. O halde ; **[27]** deki determinant kuralı sağlanır.

$$A^*A - AA^* = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(A^*A - AA^*) = 6\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 12 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1728$$

olur. Aynı zaman da

$$AA^* + A^*A = \begin{pmatrix} 8 & 18 & 0 & 0 \\ 6 & 32 & 10 & 0 \\ 0 & 25 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(AA^* + A^*A) = 8\begin{vmatrix} 32 & 10 & 0 \\ 25 & 6 & 18 \\ 0 & 18 & 0 \end{vmatrix} - 18\begin{vmatrix} 6 & 10 & 0 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & 18 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -47952$$

bulunur. Şimdi de $A^*A - AA^*$ ın öz değerlerini inceleyelim. $D = A^*A - AA^*$ olsun.

$$det\ (\ D - \lambda \mathrm{I}) = 0$$

$$det(\ D-\lambda\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -6 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 6 & 0 \\ 0 & -15 & -\lambda & -12 \\ 0 & 0 & 12 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 246\lambda^2 + 1728 = 0$$

$\lambda_1 = 2{,}6i$, $\lambda_2 = -2{,}6i$, $\lambda_3 = 15{,}4i$, $\lambda_4 = -15{,}4i$

dir. Reel sayılarda $Ç = \emptyset$ dır. Yani burada bulunan öz değerler kompleks olur.

Örnek 5.1.4. A ve A^* matrisleri

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu iki matris görüldüğü gibi Leonard çift şartını sağlar.

$$det(AA^* - A^*A) = b_0c_1(\theta_0^* - \theta_1^*)^2 b_2c_3(\theta_2^* - \theta_3^*)^2$$

$$= 3.1.(1-2)^2.3.3.(3-4)^2$$

$$= 27$$

dir. Bu ifadenin determinantını aşağıdaki şekilde hesaplarsak ;

$$AA^* - A^*A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(AA^* - A^*A) = -3\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 27$$

olduğundan dolayı **[27]** deki determinant kuralı sağlanır.

$$A^*A - AA^* = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(A^*A - AA^*) = 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 27$$

olur. Aynı zamanda;

$$AA^* + A^*A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 21 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(AA^* + A^*A) = -9 \begin{vmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \\ 0 & 21 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -11907$$

dir. Şimdi ise $A^*A - AA^*$ ın öz değerlerini inceleyelim. $D = A^*A - AA^*$ olsun.

$det(\, D - \lambda \mathrm{I}) = 0$

$$det(\, D - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 22\lambda^2 + 27 = 0$$

$\lambda_1 = 1{,}1i\,,\quad \lambda_2 = -1{,}1i\,,\quad \lambda_3 = 4{,}5i\,,\quad \lambda_4 = -4{,}5i$

dir. Reel sayılarda $Ç = \emptyset$ dır. Yani burada bulunan öz değerler kompleks olur.

Örnek 5.1.5. A ve A^* matrisleri

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

olsun.

$$det(AA^* - A^*A) = b_0c_1(\theta_0^* - \theta_1^*)^2 b_2c_3(\theta_2^* - \theta_3^*)^2$$

$$= 3.1.(3-1)^2.1.3.(-1+3)^2$$

$$= 144$$

dir. Bu ifadenin determinantını aşağıdaki şekilde hesaplarsak ;

$$AA^* - A^*A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(AA^* - A^*A) = 6 \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 144$$

olduğundan dolayı **[27]**’ deki determinant kuralı sağlanır.

$$det(A^*A - AA^*) = -6 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -144$$

dir. Aynı zamanda

$$AA^* + A^*A = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(AA^* + A^*A) = -12 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -12 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2304$$

dir. Şimdi ise $A^*A - AA^*$ ın öz değerlerini inceleyelim. $D = A^*A - AA^*$ olsun.

$det(\ D - \lambda \mathrm{I}) = 0$

$$det(\ D - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -6 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 40\lambda^2 + 144 = 0$$

$\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$, $\lambda_3 = 6i,$ $\lambda_4 = -6i$

dir. Reel sayılarda $\text{Ç} = \emptyset$ dır. Yani burada bulunan öz değerler kompleks olur.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Leonard çifti şartlarını ve daha genel bir ifade olan Leonard sistemini detaylı bir şekilde inceledik. Leonard çiftleri ve bu çiftlerin bağlantılı oldukları polinomlar arasında oluşan cebirsel özellikleri araştırdık.Ayrıca **[27]** de verilen determinant hesabının özelliklerini ayrıntılı olarak inceleyip, yorumladık.

Yapmış olduğumuz bu çalışma üzerinde araştırmalar yapılıp yeni kavramlar ve determinant hesaplamaları bulunabilir.

KAYNAKLAR

[1] Andrews G., Askey R., Roy R., 1999, Special functions, Cambridge University press, Cambridge.

[2] Askey R., Wilson J.A., 1979, A set of orthogonal polynomials that generalize the Racah coefficent or 6-j symbols.

[3] Atakishiyev N., Klimyk A., 2004, On q-orthogonal polynomials, due to little and big q-Jacobi polynomials.

[4] Atakishiyev M.N. and Groza V., 2004, The quantum algebra and q-Krawtchouk families of polynomials.

[5] Alnajjor H., Curtin B.,2004, A family of orthogonal pairs, Linear algebra.

[6] Bannai E. and Ito T., 1984, Algebraic combinatorics I: Association schemes , London.

[7] Brouwer A.E., Cohen A.M. and Neumaier A.,1989, Distance- Reguler Graphs, Berlin.

[8] Bozkurt Durmuş , Lineer cebir kitabı, Selçuk Üniversitesi, Konya.

[9] Gasper G. and Rahman M., 1990, Basic hypergeometrik series, Encylopedia of mathematics and its Application, Cambridge University Press.

[10] Go J.T., 2002, The Terwilliger algebra of hypercube , European J. Combin.

[11] Granovskii YA.I. and Zhedanov A.S., 1993, Spherical q-functions.

[12] Grünbaum F.A. and Haine L., 1997, Some functions that generalize the Askey-Wilson polynomials.

[13] Grünbaum F.A. and Haine L., 1999, On a q-analogue of the string equation and generalization of the classical orthogonal polynomial.

[14] Horn R.A., Johnson C.R, 1990, Matrix Analysis, Cambridge University Press.

[15] Ito T. and Terwilliger P., 2004, The shape of a tridiagonal pair, J.Pure Appl.Algebra .

[16] Koelink H.T., 1996, Askey-Wilson polynomials, Acta Appl.Math.

[17] Leonard D., 1982, Orthogonal polynomials, dulity and association schemes, SIAM J.Math. Anal.

[18] Nomura K., 2005, Tridiogonal pairs and Askey-Wilson relations, Linear Alg.Appl.

[19] Nomura K., Terwilliger P., 2006, Some formulae involving the split sequence of a Leonard pairs, Linear Alg.Appl.

[20] Rosengren H., 1999, Multivarible orthogonal polynomials as coupling coefficents for Lie and quantum algebra representations, Lund University, Sweden .

[21] Rotman J.J., 2002, Advanced modern Algebra , Prentice Hall, Saddle river NJ.

[22] Terwilliger P., 1987, A characterization of P- and Q- polynomial association schemes, J. Combin.

[23] Terwilliger P., 2000, Leonard pairs from 24 points of view.

[24] Terwilliger P., 2001, Two linear transformation each tridiagonal with respect to an eigen basis of the other, Linear Alg.Appl.

[25] Terwilliger P., 2004, Leonard pairs and q-Racah polynomials.

[26] Terwilliger P., 2002, Introduction to Leonard pairs.

[27] Terwilliger P., 2005, The determinant of $AA^* - A^*A$ for a Leonard pairs $A\ ,A^*$

[28] Terwilliger P., 2004, Two linear transformation each tridiagonal with respect to eigen basis of the other; an algebraic approach to the Askey scheme of orthogonal polynomial.

[29] Zhedanow A.S., 1991, Askey-Wilson polynomial

[30] Ww L Chen , 1982-2008, Eigen values and eigen vectors, determinant, University of London.