T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DIOPHANTINE DÖRTLÜLERİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ İKİ DEĞİŞKENLİ POLİNOM DİZİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI
Hazırlayan
Gül Nihal ÖZCAN

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DIOPHANTINE DÖRTLÜLERİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ İKİ DEĞİŞKENLİ POLİNOM DİZİLERİ

Danışman:
Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI

Hazırlayan:
Gül Nihal ÖZCAN
068214001004

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Konya, 2009

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DIOPHANTINE DÖRTLÜLERİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ İKİ DEĞİŞKENLİ POLİNOM DİZİLERİ

Gül Nihal ÖZCAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 30/12/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI
(Danışman)

Yrd. Doç. Dr. A. Dilek GÜNGÖR
(Üye)

Yrd. Doç. Dr. Aynur YALÇINER
(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DIOPHANTINE DÖRTLÜLERİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ İKİ DEĞİŞKENLİ POLİNOM DİZİLERİ

Gül Nihal Özcan

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI

2009, 74 sayfa

Jüri: Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI
Yrd. Doç. Dr. Ayşe Dilek GÜNGÖR
Yrd. Doç. Dr. Aynur YALÇINER

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; konuya ait literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde; literatür de yer almış bazı sayı ve polinom dizilerinin tanım ve temel özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde; Diophantine dörtlüleri ve literatür de yer alan çalışmalara yer verilmiştir. Dördüncü bölümde; elemanları Chebyshev polinomlar dizisinden oluşturulan dörtlüler tanımlanmış ve Fibonacci ve Lucas sayılarına uygulamaları verilmiştir. Beşinci bölümde; dördüncü bölümde tanımlanan dörtlülerin genelleştirilmesi yapılarak, elemanları Genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisinden seçilen dörtlülerin uygulamaları verilmiştir. Altıncı bölümde; beşinci bölümde oluşturulan dörtlülerden faydalanarak $D(Z \cdot K^2)$ özelliğine sahip Diophantine dörtlüleri elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri, Genelleştirilmiş sayı dizisi, Genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci polinomları, Polinom dizisi, Diophantine dörtlüleri.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

DIOPHANTINE QUADRUPLES AND GENERALIZED BIVARIATE POLYNOMIAL SEQUENCES

Gül Nihal Özcan

Selçuk University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asist. Prof. Dr. Ayşe NALLI

2009, 74 pages

Jüri: Asist. Prof. Dr. Ayşe NALLI
Asist. Prof. Dr. Ayşe Dilek GÜNGÖR
Asist. Prof. Dr. Aynur YALÇINER

This study consists of six sections. In the first section, there is a summary of literature related to this subject. In the second section, you can find the definition of some number sequences, polynomial sequences and their basic properties. In the third section, there are a definition of Diophantine Quadruples and its given to studies in literature. In the fourth section, it's defined Diophantine Quadruples which are made of polynomial sequences and it is given the application of the Fibonacci and Lucas Numbers. In the fifth section, it is made a generalization, which is defined as quadruples in the fourth section and it is given the application of quadruples which their elemants are choosed from 'Genaralized Bivariate Polynomial Sequences'. In the sixth section, it is obtained Diophantine Quadruples, which have the property $D\left(ZK^2\right)$ which is contained by taking into account generalization results.

KEY WORDS: Generalized Fibonacci number sequences, Generalized number sequence, Generalized bivariate Fibonacci polynomials, Polynomial sequence, Generalized bivariate polynomials, Diophantine Quadruples.

ÖN SÖZ

Hazırlamış olduğum tez çalışması, Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Anabilim Dalı Öğretim Üyelerinden Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI yönetiminde hazırlanarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Bu Yüksek Lisans Tezi içerik olarak altı bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde; konuya ait literatür özeti verilmiştir.

İkinci bölümde; literatür de yer almış bazı sayı ve polinom dizilerinin tanım ve temel özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Diophantine dörtlüleri ve uygulamaları verilmiştir.

Dördüncü bölümde; elemanları Chebyshev polinomlarından oluşturulan dörtlüler tanımlanmış ve Fibonacci ve Lucas sayılarına uygulamaları verilmiştir.

Beşinci bölümde; dördüncü bölümde tanımlanan dörtlüler elemanları Genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisinden seçilerek genelleştirilmiştir.

Altıncı bölümde; beşinci bölümde oluşturulan dörtlülerden faydalanarak $D(Z \cdot K^2)$ özelliğine sahip Diophantine dörtlüleri elde edilmiştir.

Yüksek Lisans tezimin hazırlanmasında bilgileri ışığında aydınlatan ve yol gösteren değerli danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI' ya ve bu tezin yazılması süresince gösterdikleri sabır ve anlayış ile şahsıma verdikleri maddi-manevi her türlü destek ve yardımlarından dolayı aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Gül Nihal Özcan

Konya, 2009

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

F_n , n. Fibonacci sayısı,

L_n , n. Lucas sayısı,

P_n , n. Pell sayısı,

Q_n , n. Pell-Lucas sayısı,

R_n , n. Genelleştirilmiş Fibonacci sayısı dizisi,

W_n , n. Genelleştirilmiş sayı dizisi,

$F_n(x)$, Fibonacci polinomlar dizisi,

$L_n(x)$, Lucas polinomlar dizisi,

$T_n(x)$, I. tip Chebyshev polinomları,

$U_n(x)$, II. tip Chebyshev polinomları,

$V_n(x)$, III. tip Chebyshev polinomları,

$\Psi_n(x)$, IV. tip Chebyshev polinomları,

$A_n(x)$, Polinom dizisi,

$H_n(x,y)$, Genelleştirilmiş İki Değişkenli Fibonacci Polinomları Dizisi (Mario Catalani,2004)

$S_n(x,y)$, Genelleştirilmiş İki Değişkenli Polinomlar Dizisi

1. BÖLÜM

LİTERATÜR ÖZETİ

Bu bölümde literatürde yer almış çalışmalar verilmiştir.

Diophantus of Alexandria (1974), Dört elemanlı bir kümenin herhangi iki elemanının çarpımına bir eklendiğinde mükemmel kare olan

$$\left\{\frac{1}{16},\frac{33}{16},\frac{68}{16},\frac{105}{16}\right\} \tag{1.1}$$

kümesini elde etmiştir.

Fermat (1967), Herhangi iki elemanının çarpımına bir eklendiğinde mükemmel kare olan dört elemanlı

$$\{1,3,8,n\} \tag{1.2}$$

kümesini tanımlamıştır. Tanımladığı (1.2) kümesinin dördüncü elemanının $n=120$ olduğunu bulmuştur.

J.H. van Lint (1968), $\{1,3,8,n\}$ kümesinin çözümü için oluşturulan $n=120$ pozitif tamsayısının tek olup olmadığını ileri sürmüştür.

Baker A. and Davenport (1969), $\{1,3,8,n\}$ kümesinin herhangi iki elemanının çarpımının

$$1\cdot n+1=x^2,\qquad 3\cdot n+1=y^2,\qquad 8\cdot n+1=z^2 \tag{1.3}$$

mükemmel kare olma koşulundan

$$3x^2-2=y^2 \qquad \text{ve} \qquad 8x^2-7=z^2 \tag{1.4}$$

Diophantine denklemlerini elde etmiştir. J.H. van Lint tarafından öne sürülen $n=120$ pozitif tamsayısının tek olduğu sonucuna varmıştır.

Euler (1972), a verilen bir sayı olmak üzere

$$\begin{array}{ll} x \cdot y + a, & y \cdot z + a \\ x \cdot z + a, & y \cdot v + a \\ x \cdot v + a, & z \cdot v + a \end{array} \tag{1.5}$$

mükemmel kare olacak şekilde $\{x, y, z, v\}$ kümesini bulma problemine genelleştirmiştir.

$a = 1$ için

$$\{1,\ 3,\ 8,\ 120\} \text{ ve } \{3,\ 8,\ 21,\ 2080\} \tag{1.6}$$

sonuçları elde edilmiştir.

Jones B. W. (1976), Her n pozitif tamsayısı için $\{1, 3, 8, n\}$ kümesinin genelleştirmesi olarak

$$\{n,\ n+2,\ 4n+4,\ 4(n+1)(2n+1)(2n+3)\} \tag{1.7}$$

kümesini tanımlamıştır. (1.7) kümesi her n pozitif tamsayısı için Diophantus'un tanımladığı özelliği sağlamaktadır.

Hoggatt V.E. ve Bergum G. E. (1977), $1, 3, 8$ sayılarının sırasıyla $(F_n)_{n\geq 0}$ Fibonacci dizisinin F_2 , F_4 , F_6 terimleri olduğu ileri sürülmüş,

$$(F_{2t})n + 1 \ , \quad (F_{2t+2})n + 1 \ , \quad (F_{2t+4})n + 1$$

mükemmel kare olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı bulma problemini formülleştirmiştir. Diophantus özelliğini sağlayan

$$\{F_{2t}\ ,\ F_{2t+2}\ ,\ F_{2t+4}\ ,\ n\} \tag{1.8}$$

dört pozitif tamsayıyı bulma problemi çözülebilecektir. Mükemmel kare olan (1.8) kümesindeki n pozitif tamsayısının değerini

$$n = 4F_{2t+1}\, F_{2t+2}\, F_{2t+3}$$

şeklinde elde etmiştir. $t = 1$ için özel olarak $n = 120$ değerini verir.

Böylece

$$\{F_{2t}\ ,\ F_{2t+2}\ ,\ F_{2t+4}\ ,\ 4F_{2t+1}\, F_{2t+2}\, F_{2t+3}\} \tag{1.9}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına bir eklendiğinde mükemmel karedir.

Morgado J. (1984), $F_a, F_b \in (F_n)_{n\geq 0}$ Fibonacci dizisinin uygun elemanları olmak üzere

$$\{F_n,\ F_{n+2r},\ F_{n+4r},\ 4F_{n+r}\,F_{n+2r}\,F_{n+3r}\} \qquad (1.10)$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$F_a^2\,F_b^2 \quad \text{veya} \quad -F_a^2\,F_b^2$$

eklendiğinde mükemmel kare olduğunu göstererek (1.9) un bir genelleştirmesini elde etmiştir.

Morgado J. (1983-1984), $(U_n)_{n\geq 0}$ II. tip Chebyshev polinomları olmak üzere

$$\{U_n,\ U_{n+2r},\ U_{n+4r},\ 4U_{n+r}\,U_{n+2r}\,U_{n+3r}\}, \quad n,\ r \in IN \qquad (1.11)$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına $a,\ b$ negatif olmayan uygun değerler olmak üzere

$$U_a^2\,U_b^2$$

eklendiğinde mükemmel kare olduğunu göstermiştir.

Horadam A. F. (1987), $R_h, R_k \in \{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi olmak üzere

$$\{W_n,\ W_{n+2r},\ W_{n+4r},\ 4W_{n+r}\,W_{n+2r}\,W_{n+3r}\}, \quad n, r \geq 0 \qquad (1.12)$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$\left(-eq^m\right)^t \left(R_h^2 R_k^2\right)^{t-1}$$

eklendiğinde mükemmel kare olduğunu ispat etmiştir. Burada $R_h,\ R_k \in \{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisinin uygun elemanları ve m, W nin en küçük alt indisi olmak üzere W nin çarpan sayısının 2 veya 4 olma durumuna bağlı olarak t, 1 veya 2 değerini alır.

Horadam A. F. (1965), a, b, p, q tamsayı ve $W_0 = a$, $W_1 = b$ olmak üzere

$$W_n = pW_{n-1} - qW_{n-2}, \quad n \geq 2 \qquad (1.13)$$

rekürans bağıntısı ile verilen, $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisini tanımlamış ve bu dizinin temel özelliklerini vermiştir.

Morgado J. (1995), $k > h \geq 0$, $T_h, T_k \in \{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ I. Tip Chebyshev polinomları olmak üzere

$$\{T_n, T_{n+2r}, T_{n+4r}, 4T_{n+r}T_{n+2r}T_{n+3r}\}, \quad n, r \geq 0 \tag{1.14}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$\left[\frac{1}{2}(T_h - T_k)\right]^t$$

eklendiğinde, çarpımda 2 veya 4 çarpan olma durumuna bağlı olarak t nin 1 veya 2 değeri için mükemmel kare olduğunu ispat etmiştir. Ayrıca Jose Morgado, Fibonacci ve Lucas sayı dizileri için (1.14) kümesinin uygulamasını vermiştir.

Dujella A. (1996), n, a, b tamsayı olmak üzere keyfi $\{a, b\}$ çiftinin

$$a \cdot b + n = x^2$$

$D(n)$ özelliğini sağladığı varsayımından yola çıkarak

$$\{a, b, a + b + 2x,\ a + 4b + 4x\} \tag{1.15}$$

kümesinin $D(n)$ özelliğini sağlayan bir Diophantine dörtlüsü olması için gerek ve yeter şartın 1. terim ile 4. terimin çarpımının eklenen n değerlerine göre mükemmel kare olması gerektiği sonucuna varmıştır. Bu sonuçtan faydalanarak $D(n)$ özelliğini sağlayan Diophantine dörtlüleri elde etmiştir.

2. BÖLÜM

BAZI SAYI VE POLİNOM DİZİLERİ

Bu kısımda tez içinde kullanılacak olan literatürde yer almış bazı sayı ve polinom dizilerinin tanımı ve temel özellikleri verilmiştir.

2.1. Bazı Sayı Dizileri

Tanım 2.1.1. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2 \tag{2.1}$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki tam sayı dizisine **Fibonacci Dizisi** denir. Fibonacci dizisinde her n tamsayısına karşılık gelen değere ***n*. Fibonacci sayısı** denir.

Fibonacci sayılarının üreten fonksiyonu

$$g(t) = \frac{t}{1-t-t^2} \tag{2.2}$$

dir.

Tanım 2.1.2. $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ olmak üzere

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n \geq 2 \tag{2.3}$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki tam sayı dizisine **Lucas Dizisi** denir. Lucas dizisinde her n tamsayısına karşılık gelen değere ***n*. Lucas sayısı** denir.

Lucas sayılarının üreten fonksiyonu

$$g(t) = \frac{2-t}{1-t-t^2} \tag{2.4}$$

dir.

Fibonacci ve Lucas sayılarının karakteristik polinomunun kökleri

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \tag{2.5}$$

denkleminden

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{2.6}$$

olmak üzere,

Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet formülleri sırasıyla

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \tag{2.7}$$

ve

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \tag{2.8}$$

dir.

Fibonacci ve Lucas Sayılarının Özellikleri

1. $n \geq 1$ için

$$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n \tag{2.9}$$

2. $n \geq 0$ için

$$L_n = 2F_{n+1} - F_n \tag{2.10}$$

3. $n \geq 1$ için

$$F_{2n} = F_n L_n \tag{2.11}$$

4. $n \geq 1$ için

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1} \tag{2.12}$$

5. $n \geq 1$ için

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1} \tag{2.13}$$

6. $n \geq 0$ için

$$L_{2n} + 2(-1)^n = L_n^2 \tag{2.14}$$

7. $n \geq 0$ için

$$5F_n^2 - L_n^2 = 4(-1)^{n+1} \tag{2.15}$$

8. $n \geq 1$ için

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \tag{2.16}$$

Tanım 2.1.3. $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ olmak üzere

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \quad n \geq 2 \tag{2.17}$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine **Pell Dizisi** denir. Pell dizisinde her n tamsayısına karşılık gelen değere ***n*. Pell sayısı** denir.

Pell sayılarının üreten fonksiyonu

$$g(t) = \frac{t}{1 - 2t - t^2} \tag{2.18}$$

dir.

Tanım 2.1.4. $Q_0 = 2$, $Q_1 = 2$ olmak üzere

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, \quad n \geq 2 \tag{2.19}$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine **Pell-Lucas Dizisi** denir. Pell-Lucas dizisinde her n tamsayısına karşılık gelen değere ***n*. Pell-Lucas sayısı** denir.

Pell-Lucas sayılarının üreten fonksiyonu

$$g(t) = \frac{2 - 2t}{1 - 2t - t^2} \tag{2.20}$$

dir.

Pell ve Pell-Lucas sayılarının karakteristik polinomunun kökleri

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \tag{2.21}$$

denkleminden

$$\alpha = 1 + \sqrt{2}, \quad \beta = 1 - \sqrt{2} \tag{2.22}$$

olmak üzere

Pell ve Pell-Lucas sayılarının Binet formülleri sırasıyla

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.23}$$

ve

$$Q_n = \alpha^n + \beta^n \tag{2.24}$$

dir.

Tanım 2.1.5. p, q tamsayı,

$$R_0 = 0,\ R_1 = 1$$

olmak üzere

$$R_n = pR_{n-1} - qR_{n-2}, \quad n \geq 2 \tag{2.25}$$

rekürans bağıntısı ile verilen, $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine **Genelleştirilmiş Fibonacci Sayı Dizisi** denir.

Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisinin üreten fonksiyonu

$$g(p,q,t) = \frac{t}{1 - pt + qt^2} \tag{2.26}$$

dir.

Tanım 2.1.6. a, b, p, q tamsayı,

$$W_0 = a,\ W_1 = b$$

olmak üzere

$$W_n = pW_{n-1} - qW_{n-2}, \quad n \geq 2 \tag{2.27}$$

rekürans bağıntısı ile verilen, $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine **Genelleştirilmiş Sayı Dizisi** denir. (A.F. Horadam, 1965)

Genelleştirilmiş sayı dizisinin üreten fonksiyonu

$$g(a,b,p,q,t) = \frac{a + (b - pa)t}{1 - pt + qt^2} \tag{2.28}$$

dir.

$\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ sayı dizilerinin karakteristik polinomunun kökleri

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0 \tag{2.29}$$

denkleminden

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \tag{2.30}$$

olmak üzere

$$\alpha \cdot \beta = q, \quad \alpha - \beta = \sqrt{p^2 - 4q}, \quad \alpha + \beta = p \tag{2.31}$$

dir.

$\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerinin Binet formülleri sırasıyla

$$R_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.32}$$

ve

$$W_n = \frac{A\alpha^n + B\beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.33}$$

olmak üzere

$$A = b - a\beta \quad \text{ve} \quad B = a\alpha - b \tag{2.34}$$

buradan

$$A \cdot B = e = pab - qa^2 - b^2 \tag{2.35}$$

elde edilir.

$\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin özel durumları;

$a = 0, b = 1, p = 1, q = -1, A = 1, B = -1, e = -1$ için $W_n(0,1;\, 1,-1) = F_n$ (2.36)

$a = 2, b = 1, p = 1, q = -1, A = \sqrt{5}, B = -\sqrt{5}, e = 5$ için $W_n(2,1;\, 1,-1) = L_n$ (2.37)

$a = 0, b = 1, p = 2, q = -1, A = 1, B = -1, e = -1$ için $W_n(0,1;\, 2,-1) = P_n$ (2.38)

$a = 2, b = 2, p = 2, q = -1, A = 2\sqrt{2}, B = 2\sqrt{2}, e = 8$ için $W_n(2,2;\, 2,-1) = Q_n$ (2.39)

$a = 0, b = 1, \quad A = 1, B = -1, e = -1$ için $W_n(0,1;\, p, q) = R_n$ (2.40)

olmak üzere

$\{F_n\}, \{L_n\}, \{P_n\}, \{Q_n\}, \{R_n\}$ dizileri sırasıyla Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas ve Genelleştirilmiş Fibonacci dizileridir.

2.2. Bazı Polinom Dizileri

Tanım 2.2.1. $F_0(x) = 0$, $F_1(x) = 1$ olmak üzere

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \tag{2.41}$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki polinom dizisine **Fibonacci Polinomları Dizisi** denir.

Fibonacci polinomlarının üreten fonksiyonu

$$g(x,t)=\frac{t}{1-xt-t^2} \tag{2.42}$$

dir.

Tanım 2.2.2. $L_0(x)=2$**,** $L_1(x)=x$ olmak üzere

$$L_n(x)=xL_{n-1}(x)+L_{n-2}(x), \quad n\geq 2 \tag{2.43}$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{L_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki polinom dizisine **Lucas Polinomları Dizisi** denir.

Lucas polinomlarının üreten fonksiyonu

$$g(x,t)=\frac{2-xt}{1-xt-t^2} \tag{2.44}$$

dir.

Fibonacci ve Lucas polinomlarının karakteristik polinomunun kökleri

$$\lambda^2-x\lambda-1=0 \tag{2.45}$$

denkleminden

$$\alpha(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}, \quad \beta(x)=\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2} \tag{2.46}$$

olmak üzere

Fibonacci ve Lucas polinomlarının Binet formülleri sırasıyla

$$F_n(x)=\frac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\sqrt{x^2+4}} \tag{2.47}$$

ve

$$L_n(x)=\alpha^n(x)+\beta^n(x) \tag{2.48}$$

dir.

Tanım 2.2.3. $x = \cos\theta$ olmak üzere

$$T_n(x) = \cos n\theta \tag{2.49}$$

bağıntısına ***n.* dereceden I. Tip Chebyshev Polinomu** denir.

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta$$

trigonometrik özdeşliğinden

$$T_0(x) = 1\,,\quad T_1(x) = x$$

olmak üzere

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x),\quad n \geq 2 \tag{2.50}$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki polinom dizisine **I. Tip Chebyshev Polinomları Dizisi** denir.

I.Tip Chebyshev polinomlarının üreten fonksiyonu

$$g_n(x,t) = \frac{1-xt}{1-2xt+t^2} \tag{2.51}$$

dir.

Tanım 2.2.4. $x = \cos\theta$ olmak üzere

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \tag{2.52}$$

bağıntısına ***n.* dereceden II. Tip Chebyshev Polinomu** denir.

$$\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2\cos\theta\sin n\theta$$

trigonometrik özdeşliğinden

$$U_0(x) = 1\,,\quad U_1(x) = 2x$$

olmak üzere

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x),\quad n \geq 2 \tag{2.53}$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{U_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki polinom dizisine **II. Tip Chebyshev Polinomları Dizisi** denir.

II. Tip Chebyshev polinomlarının üreten fonksiyonu

$$g(x,t) = \frac{1}{1-2xt+t^2} \tag{2.54}$$

dir.

Tanım 2.2.5. $x = \cos\theta$ olmak üzere

$$V_n(x) = \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} \tag{2.55}$$

bağıntısına ***n.* dereceden III. Tip Chebyshev Polinomu** denir.

$$\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \cos\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\theta = 2\cos\theta\cos\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\theta$$

trigonometrik özdeşliğinden

$$V_0(x) = 1 \ , \ \ V_1(x) = 2x-1$$

olmak üzere

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \tag{2.56}$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{V_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki polinom dizisine **III. Tip Chebyshev Polinomları Dizisi** denir.

III. Tip Chebyshev polinomlarının üreten fonksiyonu

$$g_n(x,t) = \frac{1-t}{1-2xt+t^2} \tag{2.57}$$

dir.

Tanım 2.2.6. $x = \cos\theta$ olmak üzere

$$\Psi_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \tag{2.58}$$

bağıntısına ***n.* dereceden IV. Tip Chebyshev Polinomu** denir.

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \sin\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\theta = 2\cos\theta\sin\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\theta$$

trigonometrik özdeşliğinden

$$\Psi_0(x) = 1 \ , \ \ \Psi_1(x) = 2x+1$$

olmak üzere

$$\Psi_n(x) = 2x\,\Psi_{n-1}(x) - \Psi_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \tag{2.59}$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen $\{\Psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki polinom dizisine **IV. Tip Chebyshev Polinomları Dizisi** denir.

IV. Tip Chebyshev polinomlarının üreten fonksiyonu

$$g_n(x,t) = \frac{1+t}{1-2xt+t^2} \tag{2.60}$$

dir.

I., II., III. ve IV. tip Chebyshev polinomlarının karakteristik polinomunun kökleri

$$\lambda^2 - 2x\lambda + 1 = 0 \tag{2.61}$$

denkleminden

$$\alpha(x) = x + \sqrt{x^2-1} \quad \text{ve} \quad \beta(x) = x - \sqrt{x^2-1} \tag{2.62}$$

olmak üzere

I. ve II. tip Chebyshev polinomlarının Binet formülleri sırasıyla

$$T_n(x) = \frac{\alpha^n(x) + \beta^n(x)}{2} \tag{2.63}$$

ve

$$U_n(x) = \frac{\alpha^{n+1}(x) - \beta^{n+1}(x)}{2\sqrt{x^2-1}} \tag{2.64}$$

dir.

III. ve IV. tip Chebyshev polinomlarının Binet formülleri sırasıyla

$$V_n(x) = \frac{\left(x-1+\sqrt{x^2-1}\right)\alpha^n - \left(x-1-\sqrt{x^2-1}\right)\beta^n}{2\sqrt{x^2-1}} \tag{2.65}$$

ve

$$\Psi_n(x) = \frac{\left(x+1+\sqrt{x^2-1}\right)\alpha^n - \left(x+1-\sqrt{x^2-1}\right)\beta^n}{2\sqrt{x^2-1}} \tag{2.66}$$

dir.

Chebyshev polinomları ile ilgili özellikler:

1. $n \geq 2$ için

$$2T_n(x) = U_n(x) - U_{n-2}(x) \tag{2.67}$$

dir.

2. $n \geq 1$ için

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x) \tag{2.68}$$

dir.

3. $n \geq 0$ için, (2.64) özdeşliğinde $x = \frac{i}{2}$ yazılırsa;

$$U_n\left(\frac{i}{2}\right) = i^n\left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\right) = i^n F_{n+1} \tag{2.69}$$

elde edilir.

4. $n \geq 1$ için, (2.68) özdeşliğinde $x = \frac{i}{2}$ yazılırsa;

$$T_n\left(\frac{i}{2}\right) = U_n\left(\frac{i}{2}\right) - \frac{i}{2}U_{n-1}\left(\frac{i}{2}\right) \tag{2.70}$$

elde edilir.

5. (2.69) ve (2.70) özdeşliklerinden $n \geq 0$ için

$$T_n\left(\frac{i}{2}\right) = i^n F_{n+1} - \frac{i}{2}i^{n-1}F_n = \frac{i^n}{2}\left(2F_{n+1} - F_n\right) \tag{2.71}$$

ede edilir.

6. (2.1) ve (2.71) özdeşliklerinden $n \geq 1$ için

$$T_n\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{i^n}{2}\left(F_n + 2F_{n-1}\right) \tag{2.72}$$

elde edilir.

7. (2.62) göz önünde bulundurularak (2.63) özdeşliğinde $x = \frac{i}{2}$ yazılırsa;

$$T_n\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{i}{2}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$= \frac{i}{2}\left\{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] / \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\right\}$$

böylece

$$T_n\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{i^n}{2} \cdot \frac{F_{2n}}{F_n}$$

(2.11) den

$$T_n\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{i^n}{2} L_n \tag{2.73}$$

elde edilir.

8. $n, r, s \geq 0$ için

$$T_n(x)T_{n+r+s}(x) + \frac{1}{2}\left[T_{r-s}(x) - T_{r+s}(x)\right] = T_{n+r}(x)T_{n+s}(x) \tag{2.74}$$

dir.

9. $n, r, s \geq 0$ için

$$4T_n(x)T_{n+r}(x)T_{n+r+s}(x) + \frac{1}{4}\left[T_{r-s}(x) - T_{r+s}(x)\right]^2 = \left[T_n(x)T_{n+r+s}(x) + T_{n+r}(x)T_{n+s}(x)\right]^2 \tag{2.75}$$

elde edilir.

10. $n, r \in IN$, $n > r$ için

$$U_{n-r-1}(x) \cdot U_{n+r-1}(x) + U_{r-1}^2(x) = U_{n-1}^2(x) \tag{2.76}$$

dir.

11. $$2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta=\sin(n+1)\theta-\sin n\theta$$

$$2\cos\frac{1}{2}\theta\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta=\sin(n+1)\theta+\sin n\theta$$

trigonometrik özdeşliklerinden sırasıyla $n\geq 1$ için

$$V_n(x)=U_n(x)-U_{n-1}(x) \tag{2.77}$$

ve

$$\Psi_n(x)=U_n(x)+U_{n-1}(x) \tag{2.78}$$

özdeşlikleri elde edilir.

12. (2.77) ve (2.78) özdeşliklerinde $x=\frac{i}{2}$ için, (2.69) dan sırasıyla

$$V_n\left(\frac{i}{2}\right)=i^n\left(F_{n+1}+iF_n\right) \tag{2.79}$$

ve

$$\Psi_n\left(\frac{i}{2}\right)=i^n\left(F_{n+1}-iF_n\right) \tag{2.80}$$

özdeşlikleri elde edilir.

Tanım 2.2.7. $y\neq 0$, $x^2+4y\neq 0$ ve

$$F_0(x,y)=0\ ,\ F_1(x,y)=1$$

olmak üzere

$$F_n(x,y)=xF_{n-1}(x,y)+yF_{n-2}(x,y),\quad n\geq 2 \tag{2.81}$$

rekürans bağıntısı ile verilen, $\{F_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki polinom dizisine **İki Değişkenli Fibonacci Polinomları Dizisi** denir. (Mario Catalani, arXiv: math/0406323v1 [math. CO] 16 Jun 2004)

İki Değişkenli Fibonacci Polinomlarının üreten fonksiyonu

$$g_n(x,t) = \frac{t}{1 - xt - yt^2} \tag{2.82}$$

dir.

Tanım 2.2.8. $y \neq 0$ **,** $x^2 + 4y \neq 0$ ve

$$H_0(x,y) = a_0 \ , \ H_1(x,y) = a_1$$

olmak üzere

$$H_n(x,y) = xH_{n-1}(x,y) + yH_{n-2}(x,y), \quad n \geq 2 \tag{2.83}$$

rekürans bağıntısı ile verilen, $\{H_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki polinom dizisine **Genelleştirilmiş İki Değişkenli Fibonacci Polinomları Dizisi** denir. (Mario Catalani, 2004)

Genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci polinomlarının üreten fonksiyonu

$$g(x,y,t) = \frac{a_0 + (a_1 - a_0 x)t}{1 - xt - yt^2} \tag{2.84}$$

dir.

$\{F_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{H_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerinin karakteristik polinomunun kökleri

$$\lambda^2 - \lambda x - y = 0 \tag{2.85}$$

denkleminden

$$\alpha(x,y) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4y}}{2} \ , \quad \beta(x,y) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4y}}{2} \tag{2.86}$$

olmak üzere,

$\{F_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{H_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerinin Binet formülleri sırasıyla

$$F_n(x,y) = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\sqrt{x^2 + 4y}} \tag{2.87}$$

ve

$$H_n(x,y) = (a_1 - \beta a_0)\frac{\alpha^n}{\alpha-\beta} - (a_1 - \alpha a_0)\frac{\beta^n}{\alpha-\beta} \tag{2.88}$$

dir.

Tanım 2.2.9. $a(x), b(x), p(x), q(x)$ reel katsayılı polinomlar,

$$A_0(x) = a(x)\,, \quad A_1(x) = b(x)$$

olmak üzere

$$A_n(x) = p(x)A_{n-1}(x) + q(x)A_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \tag{2.89}$$

rekürans bağıntısı ile verilen, $\{A_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki diziye **Polinom Dizisi** denir. (Kılıç Emrah, accepted in RMJM)

$\{A_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üreten fonksiyonu

$$g(x,t) = \frac{a(x) + (b(x) - p(x)a(x))t}{1 - p(x)t - q(x)t^2} \tag{2.90}$$

dir.

$\{A_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin karakteristik polinomunun kökleri

$$\lambda^2 - p(x)\lambda - q(x) = 0 \tag{2.91}$$

denkleminden

$$\alpha(x) = \frac{p(x) + \sqrt{p^2(x) + 4q(x)}}{2} \quad , \ \beta(x) = \frac{p(x) - \sqrt{p^2(x) + 4q(x)}}{2} \tag{2.92}$$

olmak üzere

$\{A_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin Binet formülü

$$A_n(x) = \frac{A\alpha^n + B\beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.93}$$

dir.

3. BÖLÜM

DIOPHANTINE DÖRTLÜLERİ VE UYGULAMALARI

Bu bölümde Diophantine dörtlüleri ve uygulamaları verilmiştir. Ayrıca mükemmel kare özelliğini sağlayan, elemanları genelleştirilmiş sayı dizileri, Chebyshev polinomları olan kümeler ve bu kümelerin özellikleri incelenmiştir.

Tanım 3.1.

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \tag{3.1}$$

dört pozitif tamsayıdan oluşan bir küme olsun. Bu kümenin herhangi iki elemanının çarpımına bir eklendiğinde $1 \le i, j \le 4$ olmak üzere

$$a_i \cdot a_j + 1 \tag{3.2}$$

mükemmel kare oluyorsa bu kümeye **Diophantine dörtlüsü** denir.

Tanım 3.2. (3.1) kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına n eklendiğinde $1 \le i, j \le 4$ olmak üzere

$$a_i \cdot a_j + n \tag{3.3}$$

mükemmel kare oluyorsa bu kümeye **D(n) özelliğine sahip** (n. dereceden Diophantus özelliğine sahip) **Diophantine dörtlüsü** denir.

Teorem 3.1.

$$\left\{\frac{1}{16}, \frac{33}{16}, \frac{68}{16}, \frac{105}{16}\right\} \tag{3.4}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına bir eklendiğinde Diophantine dörtlüsüdür. (Diophantus of Alexandria, 1974)

İspat:

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{33}{16}+1=\left(\frac{17}{16}\right)^2, \qquad \frac{33}{16}\cdot\frac{68}{16}+1=\left(\frac{50}{16}\right)^2,$$
$$\frac{1}{16}\cdot\frac{68}{16}+1=\left(\frac{18}{16}\right)^2, \qquad \frac{33}{16}\cdot\frac{105}{16}+1=\left(\frac{61}{16}\right)^2, \tag{3.5}$$
$$\frac{1}{16}\cdot\frac{105}{16}+1=\left(\frac{19}{16}\right)^2, \qquad \frac{68}{16}\cdot\frac{105}{16}+1=\left(\frac{86}{16}\right)^2$$

elde edilir.

Fermat 1967 yılında bu özelliği sağlayan dört pozitif tamsayıyı tahmin ederek bulmuştur. $1,3,8$ tamsayıları ile başlamıştır ve herhangi iki elemanının çarpımına bir eklendiğinde mükemmel kare olan dört elemanlı

$$\{1,3,8,n\} \tag{3.6}$$

kümesini tanımlamıştır.

(3.6) kümesinin ilk üç terimin ikişerli çarpımlarına bir eklendiğinde

$$1\cdot 3+1=2^2, \quad 1\cdot 8+1=3^2, \quad 3\cdot 8+1=5^2 \tag{3.7}$$

mükemmel kare olur. Dolayısıyla dördüncü terimle diğer terimlerin ikişerli çarpımlarına bir eklendiğinde

$$n+1, \qquad 3\cdot n+1, \qquad 8\cdot n+1 \tag{3.8}$$

mükemmel kare olmalıdır. Buradan Fermat $n=120$ olarak bulmuştur.

Teorem 3.2. (3.6) kümesini Diophantine dörtlüsü olacak şekilde herhangi iki elemanının çarpımına bir eklendiğinde mükemmel kare ve n sayısı 120 dir. (Fermat,1967)

İspat: İlk üç terimin çarpımına bir eklendiğinde mükemmel kare olduğu (3.7) de gösterildi. Dördüncü terim ile diğer terimlerin çarpımına bir eklendiğinde (3.8) mükemmel kare olacak şekilde $n=x^2+2x$ alınırsa

$$x^2+2x+1, \quad 3x^2+6x+1, \quad 8x^2+16x+1 \tag{3.9}$$

elde edilir.

u, v tamsayıları için

$$3x^2+6x+1=u^2 \quad \text{ve} \quad 8x^2+16x+1=v^2 \tag{3.10}$$

denklemlerinden

$$5x(x+2)=v^2-u^2 \tag{3.11}$$

elde edilir.

(3.11) çarpanlara ayrılırsa

$$v-u=5x, \qquad v+u=x+2$$

olmak üzere

$$v=3x+1 \tag{3.12}$$

elde edilir.

(3.10) ve (3.12) denklemlerinden

$$8x^2+16x+1=(3x+1)^2 \tag{3.13}$$

elde edilir.

(3.13) den $x=0$ veya $x=10$ olduğu açıktır. n pozitif tamsayısı $x=10$ için $n=120$ olur.

Teorem 3.3. Herhangi k pozitif tamsayısı için

$$\{F_{2k},\ F_{2k+2},\ F_{2k+4},\ 4F_{2k+1}F_{2k+2}F_{2k+3}\} \tag{3.14}$$

kümesi bir Diophantine dörtlüsüdür. (Hoggat-Bergum,1977)

İspat:

$$\begin{aligned}
F_{2k}\cdot F_{2k+2}+1 &= F_{2k+1}^2,\\
F_{2k}\cdot F_{2k+4}+1 &= F_{2k+2}^2,\\
F_{2k}\cdot 4F_{2k+1}F_{2k+2}F_{2k+3}+1 &= (2F_{2k+1}F_{2k+2}-1)^2,\\
F_{2k+2}\cdot F_{2k+4}+1 &= F_{2k+3}^2,\\
F_{2k+2}\cdot 4F_{2k+1}F_{2k+2}F_{2k+3}+1 &= (2F_{2k+2}^2+1)^2,\\
F_{2k+1}\cdot 4F_{2k+1}F_{2k+2}F_{2k+3}+1 &= (2F_{2k+2}F_{2k+3}+1)^2.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Teorem 3.4. $F_a\,,\ F_b \in \{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci dizisinin uygun elemanları olmak üzere

$$\{F_n\,,\ F_{n+2r}\,,\ F_{n+4r}\,,\, 4F_{n+r}\,F_{n+2r}\,F_{n+3r}\} \tag{3.16}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$F_a^2\,F_b^2 \quad \text{veya} \quad -F_a^2\,F_b^2$$

eklendiğinde mükemmel karedir. (Morgado Jose, 1983-1984)

İspat: (F_n) Fibonacci dizisi olmak üzere

$$F_n\,F_{n+r+s} + (-1)^n F_r\,F_s = F_{n+r}\,F_{n+s} \tag{3.17}$$

özdeşliği elde edilir. (Dustan Everman, 1970)

(3.17) özdeşliğinde $s = r$ için

$$F_n\,F_{n+2r} + (-1)^n F_r^2 = F_{n+r}^2 \tag{3.18}$$

$a = r$ ve $b = 1$ için teoremde birinci terim ile ikinci terimin çarpımına

$$(-1)^n F_r^2$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

(3.18) de $n = n + 2r$ için

$$F_{n+2r}\,F_{n+4r} + (-1)^{n+2r} F_r^2 = F_{n+3r}^2 \tag{3.19}$$

$a = r$ ve $b = 1$ için teoremden ikinci terim ile üçüncü terimin çarpımına

$$(-1)^{n+2r} F_r^2$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

(3.18) de $r = 2r$ için

$$F_n\,F_{n+4r} + (-1)^n F_{2r}^2 = F_{n+2r}^2 \tag{3.20}$$

$a = 2r$ ve $b = 1$ için teoremden birinci terim ile üçüncü terimin çarpımına

$$(-1)^n F_{2r}^2$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

(3.17) özdeşliğinden

$$\left(F_{n+r}\,F_{n+s}-F_n\,F_{n+r+s}\right)^2=F_r^2\,F_s^2 \qquad (3.21)$$

ve

$$4F_n\,F_{n+r}\,F_{n+s}\,F_{n+r+s}+F_r^2\,F_s^2=\left(F_{n+r}\,F_{n+s}+F_n\,F_{n+r+s}\right)^2 \qquad (3.22)$$

elde edilmiştir.

(3.22) de $s=2r$ için

$$4F_n\,F_{n+r}\,F_{n+2r}\,F_{n+3r}+F_r^2\,F_{2r}^2=\left(F_{n+r}^2\,F_{n+2r}^2+F_n\,F_{n+3r}\right)^2 \qquad (3.23)$$

$a=r$ ve $b=2r$ için teoremden birinci terim ile dördüncü terimin çarpımına

$$F_r^2\,F_{2r}^2$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

(3.23) de $n=n+r$ için

$$4F_{n+r}\,F_{n+2r}\,F_{n+3r}\,F_{n+4r}+F_r^2\,F_{2r}^2=\left(F_{n+2r}^2\,F_{n+3r}^2+F_{n+r}\,F_{n+4r}\right)^2 \qquad (3.24)$$

$a=r$ ve $b=2r$ için teoremden üçüncü terim ile dördüncü terimin çarpımına

$$F_r^2\,F_{2r}^2$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

Sonuç olarak (3.22) de $s=r$ için

$$4F_n\,F_{n+r}^2\,F_{n+2r}+F_r^4=\left(F_{n+r}^2+F_n\,F_{n+2r}\right)^2 \qquad (3.25)$$

$(a=b=r)$.

Teorem 3.5. R_h , $R_k \in \left(R_n\right)_{n\geq 0}$ dizisinin uygun elemanları, $n \geq 1$ olmak üzere

$$\left\{W_n\,,\,W_{n+2r}\,,\,W_{n+4r}\,,4W_{n+r}\,W_{n+2r}\,W_{n+3r}\right\} \qquad (3.26)$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$\left(eq^m\right)^t R_h^2\left(R_k^2\right)^{t-1}$$

eklendiğinde mükemmel karedir. Burada R_h, $R_k \in \left\{R_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisinin uygun elemanları ve m , W nin en küçük alt indisi olmak üzere W nin çarpan sayısının 2 veya 4 olma durumuna bağlı olarak t , 1 veya 2 değerini alır.
(A.F. Horadam, 1987)

İspat: (2.32) ve (2.33) binet formülleri, (2.31) ve (2.35) özdeşlikleriyle birlikte kullanılırsa

$$W_n W_{n+r+s} - W_{n+r} W_{n+s} = e q^n R_r R_s \tag{3.27}$$

özdeşliği elde edilir.

(3.27) de $s = r$ için

$$W_n W_{n+2r} - e q^n R_r^2 = W_{n+r}^2 \tag{3.28}$$

dir.

(3.28) de $n = n + 2r$ için

$$W_{n+2r} W_{n+4r} - e q^{n+2r} R_r^2 = W_{n+3r}^2 \tag{3.29}$$

dir.

(3.28) de $r = 2r$ için

$$W_n W_{n+4r} - e q^n R_{2r}^2 = W_{n+2r}^2 \tag{3.30}$$

dir.

(3.27) özdeşliğinin karesi alınırsa

$$4W_n W_{n+r} W_{n+s} W_{n+r+s} + \left(e q^n\right)^2 R_r^2 R_s^2 = \left(W_n W_{n+r+s} + W_{n+r} W_{n+s}\right)^2 \tag{3.31}$$

elde edilir.

(3.31) de $s = 2r$ için

$$4W_n W_{n+r} W_{n+2r} W_{n+3r} + \left(e q^n\right)^2 R_r^2 R_{2r}^2 = \left(W_n W_{n+3r} + W_{n+r} W_{n+2r}\right)^2 \tag{3.32}$$

dir.

(3.32) de $n = n + r$ için

$$4W_{n+r} W_{n+2r} W_{n+3r} W_{n+4r} + \left(e q^{n+r}\right)^2 R_r^2 R_{2r}^2 = \left(W_{n+r} W_{n+4r} + W_{n+2r} W_{n+3r}\right)^2 \tag{3.33}$$

dir.

(3.31) de $s = r$ için

$$4W_n W_{n+r}^2 W_{n+2r} + \left(e q^n\right)^2 R_r^4 = \left(W_n W_{n+2r} + W_{n+r}^2\right)^2 \tag{3.34}$$

dir.

(3.34) de $n = n + r$ için

$$4W_{n+r}\,W_{n+2r}^{2}\,W_{n+3r} + \left(e\,q^{n+r}\right)^{2} R_{r}^{4} = \left(W_{n+r}\,W_{n+3r} + W_{n+2r}^{2}\right)^{2} \tag{3.35}$$

elde edilir. (3.28), (3.29), (3.30) özdeşlikleri (3.32), (3.33), (3.35) özdeşlikleriyle birleştirilerek istenen sonuç elde edilmiştir.

Pell ve Lucas dizileri ile ilgili örnekler:

Örnek 3.1. (2.36) dan $e = -1$ ve $q = -1$ için $W_n(0,1;2,-1) = P_n$

$$\{P_n\,,\, P_{n+2r}\,,\, P_{n+4r}\,, 4\,P_{n+r}\,P_{n+2r}\,P_{n+3r}\} \tag{3.36}$$

mükemmel karedir.

$n = 1,\ r = 1$ için

$$\{P_1\,,\, P_3\,,\, P_5\,,\, 4P_2\,P_3\,P_4\} = \{1,\ 5,\ 29,\ 480\}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına ± 1 veya ± 4 eklendiğinde

$$\begin{aligned} 1\cdot 5 - P_1^2 &= 2^2, & 5\cdot 29 - P_1^2 &= 12^2, \\ 1\cdot 29 - P_2^2 &= 5^2, & 5\cdot 480 + P_1^4 &= 49^2, \\ 1\cdot 480 + P_1^2 P_2^2 &= 22^2, & 29\cdot 480 + P_1^2 P_2^2 &= 118^2 \end{aligned}$$

mükemmel kare elde edilmiştir.

Örnek 3.2. (2.35) den $e = 5$ ve $q = -1$ için $W_n(2,1;\,1,-1) = L_n$

$$\{L_n\,,\, L_{n+2r}\,,\, L_{n+4r}\,, 4\,L_{n+r}\,L_{n+2r}\,L_{n+3r}\} \tag{3.37}$$

mükemmel karedir.

$n = 1,\ r = 1$ için

$$\{L_1\,,\, L_3\,,\ L_5\,,\ 4L_2\,L_3\,L_4\} = \{1,\ 4,\ 11,\ 336\}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına 5 veya $5^2 = 25$ eklendiğinde

$$\begin{aligned} 1\cdot 4 + 5 &= 3^2, & 4\cdot 11 + 5 &= 7^2, \\ 1\cdot 11 + 5 &= 4^2, & 4\cdot 336 + 25 &= 37^2, \\ 1\cdot 336 + 25 &= 19^2, & 11\cdot 336 + 25 &= 61^2 \end{aligned}$$

mükemmel kare elde edilmiştir.

Fermat özelliğinin benzer sonuçları dört elemanlı Pell ve Lucas sayılarından oluşan sonsuz birçok kümeye genelleştirilebileceği açıktır.

1995 yılında Jose Morgado; Gheorge Udrea nın (Srıvastava, H. M. And Manocha, H. L, 1984) ve Udrea G. den elde ettiği sonuçları genelleştirmiş ve I. Tip Chebyshev polinomları için benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Lemma 3.1. $(T_n)_{n\geq 0}$ I. tip Chebyshev polinomları için

$$T_n(x)T_{n+r+s}(x)+\frac{1}{2}\left(T_{r-s}(x)-T_{r+s}(x)\right)=T_{n+r}(x)T_{n+s}(x) \tag{3.38}$$

ve

$$4T_n(x)T_{n+r}(x)T_{n+s}(x)T_{n+r+s}(x)+\frac{1}{4}\left(T_{r-s}(x)-T_{r+s}(x)\right)^2=$$

$$=\left(T_n(x)T_{n+r+s}(x)+T_{n+r}(x)T_{n+s}(x)\right)^2 \tag{3.39}$$

özdeşlikleri vardır. (Morgado Jose, 1995)

İspat: Notasyon kolaylığı açısından $T_n(x)$ polinomu T şeklinde ifade edilmiştir.

(2.49) I. tip Chebyshev polinomu tanımından

$$T_nT_{n+r+s}=\cos n\theta\cos(n+r+s)\theta=\frac{1}{2}\left(\cos(2n+r+s)\theta+\cos(r+s)\theta\right)$$

ve

$$T_{n+r}T_{n+s}=\cos(n+r)\theta\ \cos(n+s)\theta=\frac{1}{2}\left(\cos(2n+r+s)\theta+\cos(r-s)\theta\right)$$

buradan

$$T_nT_{n+r+s}-T_{n+r}T_{n+s}=\frac{1}{2}\left(\cos(r+s)\theta-\cos(r-s)\theta\right)$$

ve

$$T_nT_{n+r+s}-T_{n+r}T_{n+s}=\frac{1}{2}\left(T_{r+s}-T_{r-s}\right) \tag{3.40}$$

dir. Böylece (3.38) özdeşliğinin ispatı elde edilmiştir.

(3.40) özdeşliğinin karesi alınırsa

$$\frac{1}{4}\left(T_{r-s}-T_{r+s}\right)^2=\left(T_{n+r}T_{n+s}-T_nT_{n+r+s}\right)^2$$

$$=T_{n+r}^2T_{n+s}^2+T_n^2T_{n+r+s}^2-2T_nT_{n+r}T_{n+s}T_{n+r+s}$$

buradan

$$4T_nT_{n+r}T_{n+s}T_{n+r+s}+\frac{1}{4}\left(T_{r-s}-T_{r+s}\right)^2=T_{n+r}^2T_{n+s}^2+T_n^2T_{n+r+s}^2+2T_nT_{n+r}T_{n+s}T_{n+r+s}$$

dir. Böylece (3.39) özdeşliğinin ispatı elde edilmiştir.

Teorem 3.6. $k>h\geq 0$ T_h $,T_k\in\left(T_n\right)_{n\geq 0}$ I. tip Chebyshev polinomlar dizisinin uygun elemanları olmak üzere

$$\left\{T_n\ ,T_{n+2r}\ ,T_{n+4r}\ ,4T_{n+r}\ T_{n+2r}\ T_{n+3r}\right\} \tag{3.41}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$\left[\frac{1}{2}\left(T_h-T_k\right)\right]^t$$

eklendiğinde mükemmel kare olur. Burada (3.41) deki terimlerin çarpımının ikili veya dörtlü çarpan olma durumuna göre *t* değeri 1 veya 2 dir. (Morgado Jose, 1995)

İspat:

(3.38) de $s=r$ için

$$T_nT_{n+2r}+\frac{1}{2}\left(T_0-T_{2r}\right)=T_{n+r}^2 \tag{3.42}$$

elde edilir.

(3.42) de $r=2r$ için

$$T_nT_{n+4r}+\frac{1}{2}\left(T_0-T_{4r}\right)=T_{n+2r}^2 \tag{3.43}$$

elde edilir.

(3.43) de $n=n+2r$ için

$$T_{n+2r}T_{n+4r}+\frac{1}{2}\left(T_0-T_{2r}\right)=T_{n+3r}^2 \tag{3.44}$$

elde edilir.

(3.39) da $s = 2r$ için

$$4T_nT_{n+r}T_{n+2r}T_{n+3r} + \left(\frac{1}{2}(T_r - T_{3r})\right)^2 = (T_nT_{n+3r} + T_{n+r}T_{n+2r})^2 \qquad (3.45)$$

elde edilir.

(3.45) de $n = n + r$ için

$$4T_{n+r}T_{n+2r}T_{n+3r}T_{n+4r} + \left(\frac{1}{2}(T_r - T_{3r})\right)^2 = (T_{n+r}T_{n+4r} + T_{n+2r}T_{n+3r})^2 \qquad (3.46)$$

elde edilir.

(3.39) da $n = n + r$ ve $s = r$ için

$$4T_{n+r}T_{n+2r}^2T_{n+3r} + \left(\frac{1}{2}(T_0 - T_{2r})\right)^2 = (T_{n+r}T_{n+3r} + T_{n+2r}^2)^2 \qquad (3.47)$$

teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.7. $F_{2h}, F_h \in \{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci sayı dizisinin uygun elemanları olmak üzere

$$\left\{\frac{F_{2n}}{F_n}, \frac{F_{2n+4r}}{F_{n+2r}}, \frac{F_{2n+8r}}{F_{n+4r}}, 4 \cdot \frac{F_{2n+2r}}{F_{n+r}} \cdot \frac{F_{2n+4r}}{F_{n+2r}} \cdot \frac{F_{2n+6r}}{F_{n+3r}}\right\}, \quad n, r \geq 0 \qquad (3.48)$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$\pm\left(\pm 2 - \frac{F_{2h}}{F_h}\right)^t$$

eklendiğinde mükemmel kare elde edilir. Burada (3.48) deki terimlerin çarpımının ikili veya dörtlü çarpan olma durumuna göre *t* değeri 1 veya 2 dir.

(Morgado Jose, 1995)

İspat:

(2.73) özdeşliğinin uygun değerleri, (3.42) de yerine yazılırsa

$$\frac{i^{2n+2r}}{4} \cdot \frac{F_{2n}}{F_n} \cdot \frac{F_{2n+4r}}{F_{n+2r}} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{i^{2r}}{2} \cdot \frac{F_{4r}}{F_{2r}}\right) = \frac{i^{2n+2r}}{4} \cdot \left(\frac{F_{2n+2r}}{F_{n+r}}\right)^2$$

buradan

$$\frac{F_{2n}}{F_n}\cdot\frac{F_{2n+4r}}{F_{n+2r}}+(-1)^n\left(2(-1)^r-\frac{F_{4r}}{F_{2r}}\right)=\left(\frac{F_{2n+2r}}{F_{n+r}}\right)^2 \tag{3.49}$$

elde edilir.

(3.49) da $r=2r$ için

$$\frac{F_{2n}}{F_n}\cdot\frac{F_{2n+8r}}{F_{n+4r}}+(-1)^n\left(2-\frac{F_{8r}}{F_{4r}}\right)=\left(\frac{F_{2n+4r}}{F_{n+2r}}\right)^2 \tag{3.50}$$

elde edilir.

(3.50) de $n=n+2r$ için

$$\frac{F_{2n+4r}}{F_{n+2r}}\cdot\frac{F_{2n+8r}}{F_{n+4r}}+(-1)^n\left(2(-1)^r-\frac{F_{4r}}{F_{2r}}\right)=\left(\frac{F_{2n+6r}}{F_{n+3r}}\right)^2 \tag{3.51}$$

elde edilir.

(2.73) özdeşliğinin uygun değerleri, (3.46) da yerine yazılırsa

$$4\frac{F_{2n}}{F_n}\cdot\frac{F_{2n+2r}}{F_{n+r}}\cdot\frac{F_{2n+4r}}{F_{n+2r}}\cdot\frac{F_{2n+6r}}{F_{n+3r}}+\left(\frac{F_{2r}}{F_r}-(-1)^r\frac{F_{6r}}{F_{3r}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{F_{2n}}{F_n}\cdot\frac{F_{2n+6r}}{F_{n+3r}}+\frac{F_{2n+2r}}{F_{n+r}}\cdot\frac{F_{2n+4r}}{F_{n+2r}}\right)^2 \tag{3.52}$$

böylece

$$4\frac{F_{2n+2r}}{F_{n+r}}\frac{F_{2n+4r}}{F_{n+2r}}\frac{F_{2n+6r}}{F_{n+3r}}\frac{F_{2n+8r}}{F_{n+4r}}+\left(\frac{F_{2r}}{F_r}-(-1)^r\frac{F_{6r}}{F_{3r}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{F_{2n+2r}}{F_{n+r}}\frac{F_{2n+8r}}{F_{n+4r}}+\frac{F_{2n+4r}}{F_{n+2r}}\frac{F_{2n+6r}}{F_{n+3r}}\right)^2 \tag{3.53}$$

elde edilir.

Sonuç olarak (2.73) özdeşliğinin uygun değerleri, (3.47) de yerine yazılırsa

$$4\frac{F_{2n+2r}}{F_{n+r}}\left(\frac{F_{2n+4r}}{F_{n+2r}}\right)^2\frac{F_{2n+6r}}{F_{n+3r}}+\left(2-(-1)^r\frac{F_{6r}}{F_{2r}}\right)^2=\left(\frac{F_{2n+2r}}{F_{n+r}}\frac{F_{2n+6r}}{F_{n+3r}}+\left(\frac{F_{2n+4r}}{F_{n+2r}}\right)^2\right)^2$$

(3.54)

sonucu elde edilir.

Teorem 3.8. $(L_n)_{n\geq 0}$ Lucas sayı dizisi ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$\{L_n,\ L_{n+2r},\ L_{n+4r},\ 4\cdot L_{n+r}\cdot L_{n+2r}\cdot L_{n+3r}\} \tag{3.55}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$\pm(\pm 2 - L_h)^t$$

eklendiğinde mükemmel kare elde edilir. Burada h çarpımda çarpanların alt indisi ile üst indisi arasında, ikili veya dörtlü çarpan olma durumuna göre t değeri 1 veya 2 dir. (Morgado Jose, 1995)

İspat: Teorem 3.7 nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

4.BÖLÜM

CHEBYSHEV POLİNOM DÖRTLÜLERİ

Bu bölümde elemanları I. tip Chebyshev polinomlar dizisinden seçilen

$$\{T_{n+r-1}, T_{n+r+1}, T_{n+r-1} + 2T_{n+r} + T_{n+r+1}, T_{n+r-1} + 4T_{n+r} + 4T_{n+r+1}\}$$

I. tip Chebyshev polinomlar dörtlüsü elde edilmiştir. Benzer şekilde elemanları II., III. ve IV. tip Chebyshev polinomları dizisinden seçilen dörtlüler verilmiştir.

Lemma 4.1. $T_n \in \{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ I. tip Chebyshev polinomları, $r+s$ çift tamsayı, $n, r, s \geq 0$ olmak üzere

$$\left(T_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right) \cdot \left(T_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right) + \frac{1}{2}(T_0 - T_2) = \left(T_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2 \tag{4.1}$$

özdeşliği vardır. Notasyon kolaylığı açısından $T_n(x)$ I. tip Chebyshev polinomları T_n şeklinde ifade edilmiştir.

İspat: (2.49) I. tip Chebyshev polinomlarının tanımından

$$\left(T_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right) \cdot \left(T_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right) = \cos\left(n + \frac{r+s}{2} - 1\right)\theta \cdot \cos\left(n + \frac{r+s}{2} + 1\right)\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(2n+r+s)\theta + \cos(2\theta)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(2n+r+s)\theta + T_2\right)$$

ve

$$\left(T_{n+\frac{r+s}{2}}\right)\cdot\left(T_{n+\frac{r+s}{2}}\right)=\cos\left(n+\frac{r+s}{2}\right)\theta\cdot\cos\left(n+\frac{r+s}{2}\right)\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos(2n+r+s)\theta+\cos(0)\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos(2n+r+s)\theta+T_0\right)$$

buradan

$$\left(T_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot\left(T_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)-\left(T_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(T_2-T_0\right) \tag{4.2}$$

elde edilir.

Teorem 4.1. $T_n \in \{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ I. tip Chebyshev polinomları, $n, r \geq 0$ olmak üzere

$$\left\{T_{n+r-1},\ T_{n+r+1},\ T_{n+r-1}+2T_{n+r}+T_{n+r+1},\ T_{n+r-1}+4T_{n+r}+4T_{n+r+1}\right\} \tag{4.3}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N=\begin{cases}2\left(T_0-T_2\right), & 1.ile\,4.\\ \frac{1}{2}\left(T_0-T_2\right), & geriye\ kalan\ terimler\ için\end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

İspat: (4.1) de $s=r$ için,

1. terim ile 2. terimin çarpımı

$$\left(T_{n+r-1}\right)\cdot\left(T_{n+r+1}\right)+\frac{1}{2}\left(T_0-T_2\right)=\left(T_{n+r}\right)^2 \tag{4.4}$$

dir.

(4.4) özdeşliği kullanılarak diğer terimlerin ispatı yapılabilir.

1. terim ile 3. terimin çarpımı

$$T_{n+r-1}\left(T_{n+r-1}+2T_{n+r}+T_{n+r+1}\right)=\left(T_{n+r-1}\right)^2+2\left(T_{n+r-1}\right)\left(T_{n+r}\right)+\left(T_{n+r-1}\right)\left(T_{n+r+1}\right)$$
$$=\left(T_{n+r-1}\right)^2+2\left(T_{n+r-1}\right)T_{n+r}+\left(T_{n+r}\right)^2-\frac{1}{2}\left(T_0-T_2\right)$$
$$=\left(T_{n+r-1}+T_{n+r}\right)^2-\frac{1}{2}\left(T_0-T_2\right)$$

böylece

$$T_{n+r-1}\left(T_{n+r-1}+2T_{n+r}+T_{n+r+1}\right)+\frac{1}{2}\left(T_0-T_2\right)=\left(T_{n+r-1}+T_{n+r}\right)^2 \tag{4.5}$$

elde edilir.

1. terim ile 4. terimin çarpımı

$$T_{n+r-1}\left(T_{n+r-1}+4T_{n+r}+4T_{n+r+1}\right)=\left(T_{n+r-1}\right)^2+4\left(T_{n+r-1}\right)\left(T_{n+r}\right)+4\left(T_{n+r-1}\right)\left(T_{n+r+1}\right)$$
$$=\left(T_{n+r-1}\right)^2+4\left(T_{n+r-1}\right)\left(T_{n+r}\right)+4\left[\left(T_{n+r}\right)^2-\frac{1}{2}\left(T_0-T_2\right)\right]$$
$$=\left(T_{n+r-1}+2T_{n+r}\right)^2-2\left(T_0-T_2\right)$$

böylece

$$T_{n+r-1}\left(T_{n+r-1}+4T_{n+r}+4T_{n+r+1}\right)+2\left(T_0-T_2\right)=\left(T_{n+r-1}+2T_{n+r}\right)^2 \tag{4.6}$$

elde edilir.

Benzere şekilde diğer terimlerin çarpımı elde edilebilir.

Sonuç 4.1. (2.73) özdeşliği ve (4.4) den

$$\frac{i^{n+r-1}}{2}\left(L_{n+r-1}\right)\frac{i^{n+r+1}}{2}\left(L_{n+r+1}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{i^2}{2}L_2\right)=\left(\frac{i^{n+r}}{2}L_{n+r}\right)^2$$

ve

$$\frac{i^{2n+2r}}{4}\left(\left(L_{n+r-1}\right)\left(L_{n+r+1}\right)+i^{-2n-2r}\left(2+L_2\right)\right)=\frac{i^{2n+2r}}{4}\left(L_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2$$

böylece

$$\left(L_{n+r-1}\right)\left(L_{n+r+1}\right)+5(-1)^{n+r}=\left(L_{n+r}\right)^2 \tag{4.7}$$

elde edilir.

Teorem 4.2. $L_n \in \{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ Lucas sayı dizisi ve $n,r \geq 0$ olmak üzere

$$\{L_{n+r-1},\ L_{n+r+1},\ L_{n+r-1}+2L_{n+r}+L_{n+r+1},\ L_{n+r-1}+4L_{n+r}+4L_{n+r+1}\} \tag{4.8}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N = \begin{cases} 20(-1)^{n+r}, & 1.\,ile\,4. \\ 5(-1)^{n+r}, & geriye\ kalan\ terimler\,için \end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

İspat: (4.7) özdeşliği kullanılarak, Teorem 4.1. in ispatına benzer şekilde ispat edilebilir.

Lemma 4.2. $T_n \in \{T_n\}_{n=0}^{\infty}, U_n \in \{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ sırasıyla I. ve II. tip Chebyshev polinomları $r+s$ çift tamsayı, $n,r,s \geq 0$ olmak üzere

$$\left(U_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot\left(U_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+\frac{1}{2\sin^2\theta}\left(T_0-T_2\right)=\left(U_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2 \tag{4.9}$$

özdeşliği vardır. Notasyon kolaylığı açısından $T_n(x)$ ve $U_n(x)$ polinomları T_n, U_n şeklinde ifade edilmiştir.

İspat:

(2.52) II. tip Chebyshev polinomlarının tanımından

$$\left(U_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot\left(U_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)=\left(\frac{\sin\left(n+\frac{r+s}{2}-1\right)\theta}{\sin\theta}\right)\cdot\left(\frac{\sin\left(n+\frac{r+s}{2}+1\right)\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin^2\theta}\left(\cos(2)\theta-\cos(2n+r+s)\theta\right) \tag{4.10}$$

ve

$$\left(U_{n+\frac{r+s}{2}}\right)\cdot\left(U_{n+\frac{r+s}{2}}\right)=\left(\frac{\sin\left(n+\frac{r+s}{2}\right)\theta}{\sin\theta}\right)\cdot\left(\frac{\sin\left(n+\frac{r+s}{2}\right)\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin^2\theta}\left(\cos(0)\theta-\cos(2n+r+s)\theta\right) \tag{4.11}$$

elde edilir.

(4.10) ve (4.11) özdeşliklerinden

$$\left(U_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot\left(U_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)-\left(U_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2=\frac{1}{2\sin^2\theta}\left(T_2-T_0\right) \tag{4.12}$$

elde edilir.

Teorem 4.3. $T_n\in\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$, $U_n\in\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ sırasıyla I. ve II. tip Chebyshev polinomları ve $n,r\geq 0$ olmak üzere

$$\{U_{n+r-1},\ U_{n+r+1},\ U_{n+r-1}+2U_{n+r}+U_{n+r+1},\ U_{n+r-1}+4U_{n+r}+4U_{n+r+1}\} \tag{4.13}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N=\begin{cases}\dfrac{2}{\sin^2\theta}\left(T_0-T_2\right), & 1.ile\,4.\\[2ex] \dfrac{1}{2\sin^2\theta}\left(T_0-T_2\right), & \textit{geriye kalan terimler için}\end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

İspat: (4.9) özdeşliği kullanılarak, Teorem 4.1. in ispatına benzer şekilde ispat edilebilir.

Sonuç 4.2. (4.9) özdeşliğinde $x=\frac{i}{2}$ alınırsa, (2.69), (2.73) özdeşlikleriden

$$i^{n+\frac{r+s}{2}-1}\left(F_{n+\frac{r+s}{2}}\right)\cdot i^{n+\frac{r+s}{2}+1}\left(F_{n+\frac{r+s}{2}+2}\right)+\frac{1}{2\sin^2\theta}\left(1-\frac{i^2}{2}L_2\right)=\left(i^{n+\frac{r+s}{2}}F_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)^2$$

Chebyshev polinomlar dizisinin trigonometrik özdeşliğinden $\cos\theta=x$ olmak üzere $\sin^2\theta=\frac{5}{4}$ dir.

Böylece

$$i^{2n+r+s}\left(\left(F_{n+\frac{r+s}{2}}\right)\left(F_{n+\frac{r+s}{2}+2}\right)+\frac{1}{\frac{5}{2}}(-1)^{n+\frac{r+s}{2}}\left(\frac{5}{2}\right)\right)=i^{2n+r+s}\left(F_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)^2$$

ve

$$\left(F_{n+\frac{r+s}{2}}\right)\cdot\left(F_{n+\frac{r+s}{2}+2}\right)+(-1)^{n+\frac{r+s}{2}}=\left(F_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)^2 \tag{4.14}$$

elde edilir.

Teorem 4.4. $F_n \in \{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci sayı dizisi ve $n, r \geq 0$ olmak üzere

$$\{F_{n+r},\, F_{n+r+2},\, F_{n+r}+2F_{n+r+1}+F_{n+r+2},\, F_{n+r}+4F_{n+r+1}+4F_{n+r+2}\} \tag{4.15}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N=\begin{cases} 4(-1)^{n+r}, & 1.ile\,4. \\ (-1)^{n+r}, & geriye\ kalan\ terimler\ için \end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

İspat: (4.14) özdeşliği kullanılarak, Teorem 4.1. in ispatına benzer şekilde ispatı elde edilebilir.

Lemma 4.3. $T_n \in \{T_n\}_{n=0}^{\infty}, V_n \in \{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ sırasıyla I. ve III. tip Chebyshev polinomları $r+s$ çift tamsayı, $n, r, s \geq 0$ olmak üzere

$$\left(V_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot\left(V_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta}\left(T_0-T_2\right)=\left(V_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2 \tag{4.16}$$

özdeşliği vardır. $T_n(x)$ ve $V_n(x)$ polinomları notasyon kolaylığı açısından T_n, V_n şeklinde ifade edilmiştir.

İspat: (2.55) III. tip Chebyshev polinomlarının tanımından

$$\left(V_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot\left(V_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)=\left(\frac{\cos\left(n+\frac{r+s}{2}-\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}\right)\cdot\left(\frac{\cos\left(n+\frac{r+s}{2}+\frac{3}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta}\left(\cos(2n+r+s+1)\theta+\cos(2)\theta\right) \qquad (4.17)$$

ve

$$\left(V_{n+\frac{r+s}{2}}\right)\cdot\left(V_{n+\frac{r+s}{2}}\right)=\left(\frac{\cos\left(n+\frac{r+s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\cos\frac{1}{2}\theta}\right)\cdot\left(\frac{\cos\left(n+\frac{r+s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\cos\frac{1}{2}\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta}\left(\cos(2n+r+s+1)\theta+\cos(0)\theta\right) \qquad (4.18)$$

elde edilir.

(4.17) ve (4.18) özdeşliklerinden

$$\left(V_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot\left(V_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)-\left(V_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2=\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta}\left(T_2-T_0\right)$$

elde edilir.

Teorem 4.5. $T_n\in\{T_n\}_{n=0}^{\infty}, V_n\in\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ sırasıyla I. ve III. tip Chebyshev polinomları ve $n,r\geq 0$ olmak üzere

$$\left\{V_{n+r-1},\, V_{n+r+1},\, V_{n+r-1}+2V_{n+r}+V_{n+r+1},\, V_{n+r-1}+4V_{n+r}+4V_{n+r+1}\right\} \qquad (4.19)$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N=\begin{cases}\dfrac{2}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}\left(T_0-T_2\right), & 1.\,ile\,4.\\[2ex] \dfrac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta}\left(T_0-T_2\right), & geriye\ kalan\ terimler\ için\end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

İspat: (4.16) özdeşliği kullanılarak, Teorem 4.1. in ispatına benzer şekilde ispatı elde edilebilir.

Sonuç 4.3. (4.16) özdeşliğinde $x=\frac{i}{2}$ alınırsa, (2.73) ve (2.79) özdeşlikleriden

$$i^{n+\frac{r+s}{2}-1}\left(F_{n+\frac{r+s}{2}}+iF_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot i^{n+\frac{r+s}{2}+1}\left(F_{n+\frac{r+s}{2}+2}+iF_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta}\left(1-\frac{i^2}{2}L_2\right)=$$

$$=\left(i^{n+\frac{r+s}{2}}\left(F_{n+\frac{r+s}{2}+1}+iF_{n+\frac{r+s}{2}}\right)\right)^2$$

Chebyshev polinomlar dizisinin trigonometrik özdeşliğinden $\cos\theta=x$ olmak üzere $2\cos^2\frac{1}{2}\theta=\frac{i+2}{2}$ dir.

Böylece

$$i^{2n+r+s}\left[\left(F_{n+\frac{r+s}{2}}+iF_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(F_{n+\frac{r+s}{2}+2}+iF_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+\frac{5i^{-2n-r-s}}{i+2}\right]=$$

$$=i^{2n+r+s}\left(F_{n+\frac{r+s}{2}+1}+iF_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2$$

ve

$$\left(F_{n+\frac{r+s}{2}}+iF_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(F_{n+\frac{r+s}{2}+2}+iF_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+\left(2-i\right)\left(-1\right)^{n+\frac{r+s}{2}}=\left(F_{n+\frac{r+s}{2}+1}+iF_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2 \tag{4.20}$$

elde edilir.

Teorem 4.6. $F_n \in \{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, $L_n \in \{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ sırasıyla Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ve $n, r \geq 0$ olmak üzere

$$\{(F_{n+r} + iF_{n+r-1}), (F_{n+r+2} + iF_{n+r+1}), (F_{n+r} + iF_{n+r-1}) + 2(F_{n+r+1} + iF_{n+r}) + (F_{n+r+2} + iF_{n+r+1}),$$

$$(F_{n+r} + iF_{n+r-1}) + 4(F_{n+r+1} + iF_{n+r}) + 4(F_{n+r+1} + iF_{n+r})\} \tag{4.21}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N = \begin{cases} 4(2-i)(-1)^{n+r}, & 1.ile\,4. \\ (2-i)(-1)^{n+r}, & geriye\ kalan\ terimler\ için \end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

İspat: (4.20) özdeşliği kullanılarak, Teorem 4.1. in ispatına benzer şekilde ispat edilebilir.

Lemma 4.4. $T_n \in \{T_n\}_{n=0}^{\infty}, \Psi_n \in \{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ sırasıyla I. ve IV. tip Chebyshev polinomları, $r+s$ çift tamsayı, $n, r, s \geq 0$ olmak üzere

$$\left(\Psi_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right) \cdot \left(\Psi_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right) + \frac{1}{2\sin^2 \frac{1}{2}\theta}(T_0 - T_2) = \left(\Psi_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2 \tag{4.22}$$

özdeşliği vardır. $T_n(x)$ ve $\Psi_n(x)$ polinomları notasyon kolaylığı açısından T_n, Ψ_n şeklinde ifade edilmiştir.

İspat:

(2.58) IV. tip Chebyshev polinomlarının tanımından

$$\left(\Psi_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot\left(\Psi_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)=\left(\frac{\sin\left(n+\frac{r+s}{2}-1+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right)\cdot\left(\frac{\sin\left(n+\frac{r+s}{2}+1+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right)$$

$$=-\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}\big(\cos(2n+r+s+1)\theta-\cos(2)\theta\big) \tag{4.23}$$

ve

$$\left(\Psi_{n+\frac{r+s}{2}}\right)\cdot\left(\Psi_{n+\frac{r+s}{2}}\right)=\left(\frac{\sin\left(n+\frac{r+s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right)\cdot\left(\frac{\sin\left(n+\frac{r+s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right)$$

$$=-\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}\big(\cos(2n+r+s+1)\theta-\cos(0)\theta\big) \tag{4.24}$$

elde edilir.

(4.23) ve (4.24) özdeşliklerinden

$$\left(\Psi_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot\left(\Psi_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)-\left(\Psi_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2=\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}\big(T_2-T_0\big)$$

elde edilir.

Teorem 4.7. $T_n\in\{T_n\}_{n=0}^{\infty}, \Psi_n\in\{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ sırasıyla I. ve IV. tip Chebyshev polinomları dizisi ve $n,r\geq 0$ olmak üzere

$$\{\Psi_{n+r-1},\Psi_{n+r+1},\Psi_{n+r-1}+2\Psi_{n+r}+\Psi_{n+r+1},\Psi_{n+r-1}+4\Psi_{n+r}+4\Psi_{n+r+1}\} \tag{4.25}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N=\begin{cases}\dfrac{2}{\sin^2\frac{1}{2}\theta}\left(T_0-T_2\right), & 1.\,ile\,4.\\ \dfrac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}\left(T_0-T_2\right), & geriye\ kalan\ terimler\ için\end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

İspat: (4.22) özdeşliği kullanılarak, Teorem 4.1. in ispatına benzer şekilde ispat edilebilir.

Sonuç 4.4. (4.22) özdeşliğinde $x=\frac{i}{2}$ alınırsa, (2.73) ve (2.80) özdeşlikleriden

$$i^{n+\frac{r+s}{2}-1}\left(F_{n+\frac{r+s}{2}}-iF_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot i^{n+\frac{r+s}{2}+1}\left(F_{n+\frac{r+s}{2}+2}-iF_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}\left(1-\frac{i^2}{2}L_2\right)=$$

$$=\left(i^{n+\frac{r+s}{2}}\left(F_{n+\frac{r+s}{2}+1}-iF_{n+\frac{r+s}{2}}\right)\right)^2$$

Chebyshev polinomlar dizisinin trigonometrik özdeşliğinden $\cos\theta=x$ olmak üzere

$2\sin^2\frac{1}{2}\theta=\frac{2-i}{2}$ dir.

Böylece

$$i^{2n+r+s}\left[\left(F_{n+\frac{r+s}{2}}-iF_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(F_{n+\frac{r+s}{2}+2}-iF_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+\frac{5i^{-2n-r-s}}{2-i}\right]=$$

$$=i^{2n+r+s}\left(F_{n+\frac{r+s}{2}+1}-iF_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2$$

ve

$$\left(F_{n+\frac{r+s}{2}}-iF_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(F_{n+\frac{r+s}{2}+2}-iF_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+\left(2+i\right)\left(-1\right)^{n+\frac{r+s}{2}}=\left(F_{n+\frac{r+s}{2}+1}-iF_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2 \tag{4.26}$$

elde edilir.

Teorem 4.8. $F_n \in \{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, $L_n \in \{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ sırasıyla Fibonacci ve Lucas sayıları dizisi ve $n, r \geq 0$ olmak üzere

$$\{(F_{n+r} - iF_{n+r-1}), (F_{n+r+2} - iF_{n+r+1}), (F_{n+r} - iF_{n+r-1}) + 2(F_{n+r+1} - iF_{n+r}) + (F_{n+r+2} - iF_{n+r+1}),$$

$$(F_{n+r} - iF_{n+r-1}) + 4(F_{n+r+1} - iF_{n+r}) + 4(F_{n+r+2} - iF_{n+r+1})\} \tag{4.27}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N = \begin{cases} 4(2+i)(-1)^{n+r}, & 1. ile 4. \\ (2+i)(-1)^{n+r}, & \textit{geriye kalan terimler için} \end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

İspat: (4.26) özdeşliği kullanılarak, Teorem 4.1. in ispatına benzer şekilde ispat edilebilir.

5. BÖLÜM

GENELLEŞTİRİLMİŞ İKİ DEĞİŞKENLİ POLİNOM DÖRTLÜLERİ

Bu bölümde I. tip Chebyshev polinomlar dizisinden oluşturulan dörtlülerin genelleştirilmesi yapılarak, elemanları genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisinden seçilen

$$\Big\{ S_{n+\frac{r+s}{2}-1},\ K^2 S_{n+\frac{r+s}{2}+1},\ S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 2K\, S_{n+\frac{r+s}{2}} + K^2\, S_{n+\frac{r+s}{2}+1},$$

$$S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 4K\, S_{n+\frac{r+s}{2}} + 4K^2\, S_{n+\frac{r+s}{2}+1} \Big\}$$

genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dörtlüsü elde edilmiştir.

5.1. Genelleştirilmiş İki Değişkenli Polinomlar Dizisi

Tanım 5.1.1. $\{S_n(a(x), b(x); P(x), Q(y))(x, y)\}$ dizisi notasyon kolaylığı açısından $(a(x), b(x); P(x), Q(y))$ bağımsız değişken çıkarıldı ve sadece $\{S_n(x, y)\}_{n\geq 0}$ şeklinde ifade edildi. Başlangıç koşulları

$$S_0(x, y) = a(x) \quad \text{ve} \quad S_1(x, y) = b(x)$$

olmak üzere

$$S_n(x, y) = P(x)\, S_{n-1}(x, y) - Q(y)\, S_{n-2}(x, y), \quad n \geq 2 \tag{5.1}$$

rekürans bağıntısı ile verilen, $\{S_n(x, y)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine **Genelleştirilmiş İki Değişkenli Polinomlar Dizisi** denir. Bu tanım (2.27) nin genel halidir.
(x, y reel katsayılı iki değişken olmak üzere $S_n(x, y), P(x),\ \ Q(y), a(x), b(x)$ polinomları, notasyon kolaylığı açısından sırasıyla S_n, P, Q, a ve b şeklinde ifade edildi.)

Genelleştirilmiş İki Değişkenli Polinomlar Dizisinin, karakteristik polinomunun kökleri $P^2 - 4Q \neq 0$ olmak üzere

$$t^2 - Pt + Q = 0 \tag{5.2}$$

denkleminden

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}, \quad \beta = \frac{P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{2} \tag{5.3}$$

(5.3) kölerinin; çarpımı, farkı ve toplamı

$$\alpha \cdot \beta = Q, \;\; \alpha - \beta = \sqrt{P^2 - 4Q}, \;\; \alpha + \beta = P \tag{5.4}$$

dir.

$\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin Binet formülü

$$S_n = \frac{A \cdot \alpha^n - B \cdot \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{5.5}$$

(5.7) den

$$A = b - a \cdot \beta \quad \text{ve} \quad B = b - a \cdot \alpha \tag{5.6}$$

elde edilir. (x, y reel katsayılı iki değişken olmak üzere $S_n(x,y), P(x), Q(y)$, $a(x), b(x), A(x,y)$ ve $B(x,y)$ polinomları, notasyon kolaylığı açısından sırasıyla S_n, P, Q, a, b, A ve B şeklinde ifade edilmiştir.)

5.2. Genelleştirilmiş İki Değişkenli Polinomların Üreten Fonksiyonu

Tanım 5.2.1. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reel sayılar dizisi olsun.

$$g_n(x) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \tag{5.7}$$

fonksiyonuna $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ **dizisinin üreten fonksiyonu** denir.

Tanım 5.2.2. $S_0, S_1, \ldots, S_n$ iki değişkenli polinomlar dizisi olmak üzere

$$g_n(x,y,t) = S_0 + S_1 t + S_2 t^2 + \cdots + S_n t^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} S_n t^n \tag{5.8}$$

fonksiyonuna **Genelleştirilmiş İki Değişkenli Polinomlar Dizisinin Üreten Fonksiyonu** denir.

(5.1) rekürans bağıntısından elde edilen indirgenmiş polinomu

$$k(x,y,t) = 1 - Pt + Qt^2$$

$n \geq 2$ için

$$S_n - P \cdot S_{n-1} + Q \cdot S_{n-2} = 0$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} g_n k &= \left(S_0 + S_1 t + S_2 t^2 + \cdots + S_n t^n + \cdots\right)\left(1 - Pt + Qt^2\right) \\ &= S_0 + \left(S_1 - PS_0\right)t + \left(S_2 - PS_1 + QS_0\right)t^2 + \cdots \\ &\quad + \cdots + \left(S_n - PS_{n-1} + QS_{n-2}\right)t^n + \cdots \\ &= S_0 + \left(S_1 - PS_0\right)t \\ &= a + \left(b - aP\right)t \end{aligned}$$

buradan

$\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üreten fonksiyonu

$$g_n = \frac{a + (b - Pa)t}{1 - Pt + Qt^2} \tag{5.9}$$

dir.

Lemma 5.2.1. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi, $r + s$ çift tamsayı ve $n, r, s \geq 0$ olmak üzere

$$\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(K^2 S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+K^2 AB(\alpha\beta)^{n+\frac{r+s}{2}-1}=\left(KS_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2 \tag{5.10}$$

özdeşliği vardır. Burada $K(x,y), S_n(x,y)$ iki değişkenli reel katsayılı polinomları notasyon kolaylığı açısından K, S_n şeklinde ifade edilmiştir.

İspat: (5.5) Binet formülünden

$$\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(K^2 S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)=K^2\left(\frac{A\alpha^{n+\frac{r+s}{2}-1}-B\beta^{n+\frac{r+s}{2}-1}}{\alpha-\beta}\right)\cdot\left(\frac{A\alpha^{n+\frac{r+s}{2}+1}-B\beta^{n+\frac{r+s}{2}+1}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$=K^2\left(\frac{1}{\alpha-\beta}\right)^2\left(A^2\alpha^{2n+r+s}+B^2\beta^{2n+r+s}-AB\alpha^{n+\frac{r+s}{2}-1}\beta^{n+\frac{r+s}{2}+1}+\right.$$

$$\left.-AB\alpha^{n+\frac{r+s}{2}+1}\beta^{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)+K^2\left(\frac{2AB\alpha^{n+\frac{r+s}{2}}\beta^{n+\frac{r+s}{2}}}{(\alpha-\beta)^2}-\frac{2AB\alpha^{n+\frac{r+s}{2}}\beta^{n+\frac{r+s}{2}}}{(\alpha-\beta)^2}\right)$$

$$=K^2\left(\frac{A\alpha^{n+\frac{r+s}{2}}-B\beta^{n+\frac{r+s}{2}}}{\alpha-\beta}\right)^2-K^2\left(\frac{AB\alpha^{n+\frac{r+s}{2}}\beta^{n+\frac{r+s}{2}}\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)}{(\alpha-\beta)^2}\right)+$$

$$-K^2\left(\frac{AB\alpha^{n+\frac{r+s}{2}}\beta^{n+\frac{r+s}{2}}\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)}{(\alpha-\beta)^2}\right)$$

$$=\left(KS_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2-K^2AB(\alpha\beta)^{n+\frac{r+s}{2}}\left(\frac{(\alpha-\beta)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)}{(\alpha-\beta)^2}\right)$$

buradan

$$\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)K^2\left(S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)=\left(KS_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2-K^2AB(\alpha\beta)^{n+\frac{r+s}{2}-1} \tag{5.11}$$

elde edilir.

Teorem 5.2.1. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi, $r+s$ çift tamsayı ve $n,r,s \geq 0$ olmak üzere

$$\left\{ S_{n+\frac{r+s}{2}-1},\ K^2 S_{n+\frac{r+s}{2}+1},\ S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 2K\,S_{n+\frac{r+s}{2}} + K^2\,S_{n+\frac{r+s}{2}+1}, \right.$$

$$\left. S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 4K\,S_{n+\frac{r+s}{2}} + 4K^2\,S_{n+\frac{r+s}{2}+1} \right\} \tag{5.12}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N = \begin{cases} 4K^2 AB(\alpha\beta)^{n+\frac{r+s}{2}-1}, & 1.\ \text{ile}\ 4. \\ K^2 AB(\alpha\beta)^{n+\frac{r+s}{2}-1}, & \text{geriye kalan terimler için} \end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

İspat: 1. terim ile 2. terimin çarpımı, Lemma 5.1.1. de ispat edildi. Diğer terimlerin çarpımında (5.11) göz önünde bulundurulursa,

1. terim ile 3. terimin çarpımı,

$$\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 2KS_{n+\frac{r+s}{2}} + K^2 S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right) =$$

$$= \left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)^2 + 2K\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}}\right) + K^2\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)$$

$$= \left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)^2 + 2K\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}}\right) + \left(\left(KS_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2 - AB(\alpha\beta)^{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)$$

böylece

$$\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 2KS_{n+\frac{r+s}{2}} + K^2 S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right) + AB(\alpha\beta)^{n+\frac{r+s}{2}-1} =$$

$$= \left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + S_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2 \tag{5.13}$$

elde edilir.

1. terim ile 4. terimin çarpımı,

$$\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+4KS_{n+\frac{r+s}{2}}+4K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)=$$

$$=\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)^2+4K\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}}\right)+4K^2\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)$$

$$=\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)^2+4K\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}}\right)+4\left[\left(KS_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2-K^2AB(\alpha\beta)^{n+\frac{r+s}{2}-1}\right]$$

böylece

$$\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+4KS_{n+\frac{r+s}{2}}+4K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+4K^2AB(\alpha\beta)^{n+\frac{r+s}{2}-1}=$$

$$=\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2KS_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2 \tag{5.14}$$

ede edilir.

Diğer terimlerin çarpımı benzer şekilde elde edilebilir.

(5.12) de $s=r$ için

Sonuç 5.2.1. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi olmak üzere

$$\{(S_{n+r-1}),\ K^2(S_{n+r+1}),\ (S_{n+r-1})+2K(S_{n+r})+K^2(S_{n+r+1}),$$

$$(S_{n+r-1})+4K(S_{n+r})+4K^2(S_{n+r+1})\} \tag{5.15}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N=\begin{cases}4K^2AB(\alpha\beta)^{n+r-1}, & \text{1. ile 4.}\\ K^2AB(\alpha\beta)^{n+r-1}, & \text{geriye kalan terimler için}\end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

(5.15) de $r = n$ için

Sonuç 5.2.2. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi olmak üzere

$$\{S_{2n-1},\ K^2 S_{2n+1},\ S_{2n-1} + 2K\, S_{2n} + K^2\, S_{2n+1},\ S_{2n-1} + 4K\, S_{2n} + 4K^2\, S_{2n+1}\} \quad (5.16)$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N = \begin{cases} 4K^2 AB(\alpha\beta)^{2n-1}, & 1.\ \text{ile}\ 4. \\ K^2 AB(\alpha\beta)^{2n-1}, & \text{geriye kalan terimler için} \end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

(5.12) de $r + s = 2$ için

Sonuç 5.2.4. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi olmak üzere

$$\{S_n,\ K^2 S_{n+2},\ S_n + 2K\, S_{n+1} + K^2\, S_{n+2},\ S_n + 4K\, S_{n+1} + 4K^2\, S_{n+2}\} \quad (5.17)$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N = \begin{cases} 4K^2 AB(\alpha\beta)^{n}, & 1.\ \text{ile}\ 4. \\ K^2 AB(\alpha\beta)^{n}, & \text{geriye kalan terimler için} \end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

Sonuç 5.2.5. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi olmak üzere (5.15) de $K = 1,\ K = -1$ için sırasıyla

$$\{S_{n+r-1},\ S_{n+r+1},\ S_{n+r-1} + 2\,S_{n+r} + S_{n+r+1},\ S_{n+r-1} + 4\,S_{n+r} + 4\,S_{n+r+1}\} \quad (5.18)$$

$$\{S_{n+r-1},\ S_{n+r+1},\ S_{n+r-1} - 2\,S_{n+r} + S_{n+r+1},\ S_{n+r-1} - 4\,S_{n+r} + 4\,S_{n+r+1}\} \quad (5.19)$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N = \begin{cases} 4AB(\alpha\beta)^{n+r-1}, & 1.\ \text{ile}\ 4. \\ AB(\alpha\beta)^{n+r-1}, & \text{geriye kalan terimler için} \end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

Teorem 5.2.2. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi, $r+s$ çift tamsayı ve $n,r,s \geq 0$ olmak üzere

$$\left\{ S_{n+\frac{r+s}{2}-1},\ K^2 S_{n+\frac{r+s}{2}+1},\ S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 2K\,S_{n+\frac{r+s}{2}} + K^2\,S_{n+\frac{r+s}{2}+1},\right.$$
$$\left. S_{n+\frac{r+s}{2}-1} - 2K\,S_{n+\frac{r+s}{2}} + K^2\,S_{n+\frac{r+s}{2}+1} \right\} \tag{5.20}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N = \begin{cases} \left(2KS_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2, & \text{3. ile 4.} \\ K^2 AB(\alpha\beta)^{n+\frac{r+s}{2}-1}, & \text{geriye kalan terimler için} \end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir. $K(x,y), S_n(x,y)$ iki değişkenli reel katsayılı polinomları notasyon kolaylığı açısından K, S_n şeklinde ifade edilmiştir.

İspat:

1. terim ile 4. terimin çarpımı,

$$\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1} - 2K\,S_{n+\frac{r+s}{2}} + K^2\,S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right) =$$

$$= \left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)^2 - 2K\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot\left(S_{n+\frac{r+s}{2}}\right) + K^2\left(S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)\cdot\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)$$

$$= \left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)^2 - 2K\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot\left(S_{n+\frac{r+s}{2}}\right) + \left(KS_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2 - K^2 AB(\alpha\beta)^{n+\frac{r+s}{2}-1}$$

$$= \left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1} - KS_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2 - K^2 AB(\alpha\beta)^{n+\frac{r+s}{2}-1}$$

buradan

$$\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\cdot\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-2K\,S_{n+\frac{r+s}{2}}+K^2\,S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+K^2AB(\alpha\beta)^{n+\frac{r+s}{2}-1}=$$

$$=\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-KS_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2 \tag{5.21}$$

dir.

2. terim ile 4. terimin çarpımı,

$$K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-2K\,S_{n+\frac{r+s}{2}}+K^2\,S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)=$$

$$=K^2\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)-2K^3\left(S_{n+\frac{r+s}{2}}\right)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+\left(K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)^2$$

$$=\left(KS_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2-K^2AB(\alpha\beta)^{n+\frac{r+s}{2}-1}-2K^3\left(S_{n+\frac{r+s}{2}}\right)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+\left(K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)^2$$

böylece

$$K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-2K\,S_{n+\frac{r+s}{2}}+K^2\,S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+K^2AB(\alpha\beta)^{n+\frac{r+s}{2}-1}=$$

$$=\left(KS_{n+\frac{r+s}{2}}-K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)^2 \tag{5.22}$$

elde edilir.

3. terim ile 4. terimin çarpımı,

$$\left(\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+K^2\,S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+2K\,S_{n+\frac{r+s}{2}}\right)\cdot\left(\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+K^2\,S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)-2K\,S_{n+\frac{r+s}{2}}\right)=$$

$$=\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+K^2\,S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)^2-\left(2K\,S_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2$$

böylece

$$\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2K\,S_{n+\frac{r+s}{2}}+K^2\,S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)\cdot\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-2K\,S_{n+\frac{r+s}{2}}+K^2\,S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+$$

$$+\left(2K\,S_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2=\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+K^2\,S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)^2 \qquad (5.23)$$

elde edilir.

(5.20) de $s=r$ için

Sonuç 5.2.6. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi olmak üzere

$$\left\{S_{n+r-1}\,,\;K^2S_{n+r+1}\,,\;S_{n+r-1}+2K\,S_{n+r}+K^2\,S_{n+r+1}\,,\;S_{n+r-1}-2K\,S_{n+r}+K^2\,S_{n+r+1}\right\} \qquad (5.24)$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N=\begin{cases}\left(2KS_{n+r}\right)^2, & 3.\ \text{ile}\ 4.\\ K^2AB(\alpha\beta)^{n+r-1}, & \text{geriye kalan terimler için}\end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

(5.20) de $r+s=2$ için

Sonuç 5.2.7. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi olmak üzere

$$\left\{S_n\,,\;K^2S_{n+2}\,,\;S_n+2K\,S_{n+1}+K^2\,S_{n+2}\,,\;S_n-2K\,S_{n+1}+K^2\,S_{n+2}\right\} \qquad (5.25)$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N=\begin{cases}\left(2KS_{n+1}\right)^2, & 3.\ \text{ile}\ 4.\\ K^2AB(\alpha\beta)^{n}, & \text{geriye kalan terimler için}\end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

(5.20) de $K=1$ için

Sonuç 5.2.8. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi olmak üzere

$$\left\{ S_{n+\frac{r+s}{2}-1},\ S_{n+\frac{r+s}{2}+1},\ S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2S_{n+\frac{r+s}{2}}+S_{n+\frac{r+s}{2}+1},\ S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-2S_{n+\frac{r+s}{2}}+S_{n+\frac{r+s}{2}+1} \right\} \tag{5.26}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N=\begin{cases} \left(2S_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2, & \text{3. ile 4.} \\ AB(\alpha\beta)^{n+\frac{r+s}{2}-1}, & \text{geriye kalan terimler için} \end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

Sonuç 5.2.7. nin uygulaması,

(5.25) de $K=x,\ AB=1,\ \alpha\beta=-y$ için

Örnek 5.2.1. $\{F_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci polinomlar dizisi olmak üzere

$$\{F_n(x,y),\ x^2F_{n+2}(x,y),\ F_n(x,y)+2xF_{n+1}(x,y)+x^2F_{n+2}(x,y),$$
$$F_n(x,y)-2xF_{n+1}(x,y)+x^2F_{n+2}(x,y)\} \tag{5.27}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N=\begin{cases} 4x^2(F_{n+1})^2, & \text{3. ile 4.} \\ x^2(-y)^n, & \text{geriye kalan terimler için} \end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

Çözüm:

$n=1$ için

$$\{F_1(x,y),\ x^2F_3(x,y),\ F_1(x,y)+2xF_2(x,y)+x^2F_3(x,y),$$
$$F_1(x,y)-2xF_2(x,y)+x^2F_3(x,y)\}$$

$$\left\{1,\ x^4+x^2y,\ x^4+x^2y+2x^2+1,\ x^4+x^2y-2x^2+1\right\}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N=\begin{cases} 4x^4, & 3.\ \text{ile}\ 4.\\ -x^2y, & \text{geriye kalan terimler için}\end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

$$x^4+x^2y-x^2y=x^4,$$

$$x^4+x^2y+2x^2+1-x^2y=\left(x^2+1\right)^2,$$

$$x^4+x^2y-2x^2+1-x^2y=\left(x^2-1\right)^2,$$

$$\left(x^4+x^2y\right)\left(x^4+x^2y+2x^2+1\right)-x^2y=\left(x^2\left(x^2+y\right)+x^2\right)^2,$$

$$\left(x^4+x^2y\right)\left(x^4+x^2y-2x^2+1\right)-x^2y=\left(x^2\left(x^2+y\right)-x^2\right)^2,$$

$$\left(x^4+x^2y+2x^2+1\right)\left(x^4+x^2y-2x^2+1\right)+4x^4=\left(x^4+x^2y+1\right)^2.$$

Sonuç 5.2.5. in ugulaması,

(5.18) de $r=1,\ \ AB=-5,\ \ \alpha\beta=-1$ için

Örnek 5.2.2. $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ Lucas dizisi olmak üzere

$$\left\{L_n,\ L_{n+2},\ L_n+2L_{n+1}+L_{n+2},\ L_n+4L_{n+1}+4L_{n+2}\right\} \tag{5.28}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N=\begin{cases} -20(-1)^n, & 1.\ \text{ile}\ 4.\\ -5(-1)^n, & \text{geriye kalan terimler için}\end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

Çözüm:

$n=2$ için

$$\{L_2,\, L_4\,,\, L_2+2L_3+L_4,\, L_2+4L_3+4L_4\}=\{3,\,7,\,18,\,47\}$$

kümesinin herhangi iki elemanının çarpımına

$$N=\begin{cases}-20, & 1.\,\text{ile}\,4.\\ -5, & \text{geriye kalan terimler için}\end{cases}$$

eklendiğinde mükemmel karedir.

$$3\cdot 7-5=4^2,\qquad 7\cdot 18-5=11^2,$$

$$3\cdot 18-5=7^2,\qquad 7\cdot 47-5=18^2,$$

$$3\cdot 47-20=11^2,\quad 18\cdot 47-5=29^2.$$

6.BÖLÜM

$D(Z \cdot K^2)$ ÖZELLİĞİNE SAHİP DIOPHANTINE DÖRTLÜLERİ

Bu bölümde 5. bölümde elemanları genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisinden oluşturulan dörtlüler, $D(Z \cdot K^2)$ özelliğini sağlayan Diophantine dörtlüleri şeklinde elde edilmiştir.

6.1. $D(Z \cdot K^2)$ Özelliğini Sağlayan Kümeler

$\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ (5.1) de tanımlanan genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi, (5.10) özdeşliğinde $AB(\alpha\beta)^{n+\frac{r+s}{2}-1}$ iki değişkenli polinomu Z ile ifade edilirse

$$S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\left(K^2 S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+\left(Z \cdot K^2\right)=\left(KS_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2 \qquad (6.1)$$

olmak üzere

$$\left\{S_{n+\frac{r+s}{2}-1},\ K^2 S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right\} \qquad (6.2)$$

$D(Z \cdot K^2)$ özelliğini sağlayan bir küme olsun.

(5.12) kümesinde 1. terim ile 4. terimin çarpımına, diğer terimlerin ikişerli çarpımlarına eklenen ifadenin dört katı eklendiği (5.14) de ispat edilmiştir. Dolayısıyla (5.12) kümesinin $D(Z \cdot K^2)$ özelliğini sağlayan Diophantine dörtlüsü olması için gerek ve yeter şart 1. terim ile 4. terimin çarpımına eklenen ifadenin $Z \cdot K^2$ olmasıdır. Bu nedenle,

1. terim ile 4. terimin çarpımının

$$S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+4KS_{n+\frac{r+s}{2}}+4K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+\left(Z\cdot K^2\right)=Y^2 \tag{6.3}$$

olduğunu kabul edelim. Notasyon kolaylığı açısından $Y(x,y), Z(x,y)$ iki değişkenli polinomları Y, Z şeklinde ifade edilmiştir.

(6.1) özdeşliğinden

$$S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\left(K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)=\left(KS_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2-\left(Z\cdot K^2\right) \tag{6.4}$$

olmak üzere

(6.4) özdeşliği (6.3) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
Y^2 &= \left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)^2+4K\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}}\right)+4\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right)+\left(Z\cdot K^2\right)\\
&= \left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)^2+4K\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}}\right)+4\left[\left(KS_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2-\left(Z\cdot K^2\right)\right]+\left(Z\cdot K^2\right)\\
&= \left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2KS_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2-3\left(Z\cdot K^2\right)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$3\left(Z\cdot K^2\right)=\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2KS_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2-Y^2 \tag{6.5}$$

elde edilir.

(6.5) den

$$3\left(Z\cdot K^2\right)=\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2KS_{n+\frac{r+s}{2}}-Y\right)\cdot\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2KS_{n+\frac{r+s}{2}}+Y\right) \tag{6.6}$$

elde edilir.

Sonuç 6.1. (6.6) özdeşliğinin çarpanları

$$3ZK = S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 2KS_{n+\frac{r+s}{2}} - Y \tag{6.7}$$

$$K = S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 2KS_{n+\frac{r+s}{2}} + Y \tag{6.8}$$

şeklinde ifade edilirse;

(6.7) ve (6.8) özdeşliklerinden

$$ZK^2 + 3Z^2K^2 = 2ZKS_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 4ZK^2S_{n+\frac{r+s}{2}}$$

böylece

$$ZK^2 = 2ZKS_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 4ZK^2S_{n+\frac{r+s}{2}} - 3Z^2K^2 \tag{6.9}$$

elde edilir.

(6.9) özdeşliği, (6.1) özdeşliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left(KS_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2 &= S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\left(K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}\right) + 2ZKS_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 4ZK^2S_{n+\frac{r+s}{2}} - 3Z^2K^2 \\ &= S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\left(K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1} + 2ZK\right) + 4ZK^2S_{n+\frac{r+s}{2}} - 3Z^2K^2\end{aligned}$$

burdan

$$S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\left(K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1} + 2ZK\right) = \left(KS_{n+\frac{r+s}{2}}\right)^2 - 4ZK^2S_{n+\frac{r+s}{2}} + 3Z^2K^2$$

elde edilir.

Böylece

$$S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\left(K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1} + 2ZK\right) = K^2\left(S_{n+\frac{r+s}{2}} - Z\right)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}} - 3Z\right) \tag{6.10}$$

şeklinde elde edilir.

(6.10) özdeşliği için iki durum söz konusudur.

Sonuç 6.1.1. (4.2) rekürans bağıntısında $-QS_{n+\frac{r+s}{2}-2}=Z$ olmak üzere

$$S_{n+\frac{r+s}{2}}=PS_{n+\frac{r+s}{2}-1}+Z \tag{6.11}$$

dir. Notasyon kolaylığı açısından $Q(y),P(x)$ polinomları $Q,\ P$ şeklinde ifade edilmiştir.

(6.11) özdeşliği (6.10) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\left(K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}+2ZK\right) &= K^2\left(PS_{n+\frac{r+s}{2}-1}+Z-Z\right)\left(PS_{n+\frac{r+s}{2}-1}+Z-3Z\right)\\ &= K^2PS_{n+\frac{r+s}{2}-1}\left(PS_{n+\frac{r+s}{2}-1}-2Z\right)\end{aligned}$$

böylece

$$K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}=K^2P^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-2ZK\left(KP+1\right) \tag{6.12}$$

elde edilir.

(6.11) özdeşliği (6.9) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} ZK^2 &= 2ZKS_{n+\frac{r+s}{2}-1}+4ZK^2\left(PS_{n+\frac{r+s}{2}-1}+Z\right)-3Z^2K^2\\ &= 2ZKS_{n+\frac{r+s}{2}-1}+4ZK^2PS_{n+\frac{r+s}{2}-1}+4Z^2K^2-3Z^2K^2\end{aligned}$$

buradan

$$ZK^2=2ZK\left(2KP+1\right)S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+Z^2K^2 \tag{6.13}$$

dir.

(6.11) ve (6.12) özdeşlikleri (6.3) kümesinde yerine yazılırsa;

üçüncü terimi

$$S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2KS_{n+\frac{r+s}{2}}+K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}=$$

$$=S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2K\left(PS_{n+\frac{r+s}{2}-1}+Z\right)+K^2P^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-2ZK^2P-2ZK$$

$$= S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\left(1+2KP+K^2P^2\right)+2ZK-2ZK^2P-2ZK$$

buradan

$$S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2KS_{n+\frac{r+s}{2}}+K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}=\left(KP+1\right)^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-2ZK^2P \qquad (6.14)$$

elde edilir.

Dördüncü terimi

$$S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+4KS_{n+\frac{r+s}{2}}+4K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}=$$

$$= S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+4K\left(PS_{n+\frac{r+s}{2}-1}+Z\right)+4\left(K^2P^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-2ZK^2P-2ZK\right)$$

$$= S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\left(1+4KP+4K^2P^2\right)+4ZK-8ZK^2P-8ZK$$

buradan

$$S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+4KS_{n+\frac{r+s}{2}}+4K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}=\left(2KP+1\right)^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-4ZK\left(2KP+1\right) \qquad (6.15)$$

elde edilir.

(6.11) özdeşliği ve elde edilen (6.12), (6.14) ve (6.15) özdeşlikleri (6.3) kümesinde yerine yazılırsa $Z=-QS_{n+\frac{r+s}{2}-2}$ olmak üzere

$$D\left(2ZK\left(2KP+1\right)S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+Z^2K^2\right)$$

özelliğine sahip Diophantine dörtlüsü

$$\left\{S_{n+\frac{r+s}{2}-1},\ K^2P^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-2ZK\left(KP+1\right),\ \left(KP+1\right)^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-2ZK^2P,\right.$$

$$\left.\left(2KP+1\right)^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-4ZK\left(2KP+1\right)\right\} \qquad (6.16)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 6.1.2. (4.2) reküarans bağıntısında $-QS_{n+\frac{r+s}{2}-2} = 3Z$ olmak üzere

$$S_{n+\frac{r+s}{2}} = PS_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 3Z \tag{6.17}$$

dir. Notasyon kolaylığı açısından $Q(y), P(x)$ polinomları Q, P şeklinde ifade edilmiştir.

(6.17) özdeşliği (6.10) da yerine yazılırsa

$$S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\left(K^2 S_{n+\frac{r+s}{2}+1} + 2ZK\right) = K^2\left(PS_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 3Z - Z\right)\left(PS_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 3Z - 3Z\right)$$

$$= K^2 PS_{n+\frac{r+s}{2}-1}\left(PS_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 2Z\right)$$

ve

$$K^2 S_{n+\frac{r+s}{2}+1} = K^2 P^2 S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 2ZK(KP-1) \tag{6.18}$$

elde edilir.

(6.17) özdeşliği (6.9) da yerine yazılırsa

$$ZK^2 = 2ZKS_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 4ZK^2\left(PS_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 3Z\right) - 3Z^2K^2$$

$$= 2ZKS_{n+\frac{r+s}{2}-1}(1 + 2KP) + 12Z^2K^2 - 3Z^2K^2$$

buradan

$$ZK^2 = 2ZK(2KP+1)S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 9Z^2K^2. \tag{6.19}$$

(6.17) ve (6.18) özdeşlikleri (6.3) kümesinde yerine yazılırsa;
üçüncü terimi

$$S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 2KS_{n+\frac{r+s}{2}} + K^2 S_{n+\frac{r+s}{2}+1} =$$

$$= S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 2K\left(PS_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 3Z\right) + K^2P^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 2ZK^2P - 2ZK$$

$$= S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\left(1+2KP+K^2P^2\right)+6ZK+2ZK^2P-2ZK$$

buradan

$$S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2KS_{n+\frac{r+s}{2}}+K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}=\left(KP+1\right)^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2ZK\left(KP+2\right) \quad (6.20)$$

elde edilir.

Dördüncü terimi

$$S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+4KS_{n+\frac{r+s}{2}}+4K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}=$$

$$= S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+4K\left(PS_{n+\frac{r+s}{2}-1}+3Z\right)+4\left(K^2P^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2ZK^2P-2ZK\right)$$

$$= S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\left(1+4KP+4K^2P^2\right)+12ZK+8ZK^2P-8ZK$$

buradan

$$S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+4KS_{n+\frac{r+s}{2}}+4K^2S_{n+\frac{r+s}{2}+1}=\left(2KP+1\right)^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+4ZK\left(2KP+1\right) \quad (6.21)$$

elde edilir.

(6.18), (6.20) ve (6.21) özdeşlikleri (6.3) kümesinde yerine yazılırsa

$Z=-\frac{1}{3}QS_{n+\frac{r+s}{2}-2}$ olmak üzere,

$$D\left(2ZK\left(2KP+1\right)S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+9Z^2K^2\right)$$

özelliğine sahip Diophantine dörtlüsü

$$\left\{S_{n+\frac{r+s}{2}-1},\ K^2P^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2ZK\left(KP-1\right),\ \left(KP+1\right)^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2ZK\left(KP+2\right),\right.$$

$$\left.\left(2KP+1\right)^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+4ZK\left(2KP+1\right)\right\} \quad (6.22)$$

şeklinde elde edilir.

6.2. $D(Z \cdot K^2)$ Özelliğine Sahip Kümeler İçin Teoremler

(6.16) da $Z = -QS_{n+\frac{r+s}{2}-2}$ için

Teorem 6.2.1. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ Genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi ve $r+s$ çift tamsayı ve $n, r, s \geq 0$ olmak üzere

$$D\left(-2KQ(2KP+1)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-2}\right)+\left(KQS_{n+\frac{r+s}{2}-2}\right)^2\right)$$

özelliğini sağlayan Diophantine dörtlüsü

$$\left\{S_{n+\frac{r+s}{2}-1},\ K^2P^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2K(KP+1)QS_{n+\frac{r+s}{2}-2},\ (KP+1)^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2K^2PQS_{n+\frac{r+s}{2}-2},\right.$$

$$\left.(2KP+1)^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+4K(2KP+1)QS_{n+\frac{r+s}{2}-2}\right\} \qquad (6.23)$$

şeklindedir. Notasyon kolaylığı açısından $S_n(x,y),\ K(x,y),\ P(x),\ Q(y)$ polinomları sırasıyla $S_n,\ K,\ P$ ve Q şeklinde ifade edilmiştir.

(6.23) de $s=r$ için

Sonuç 6.2.1. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ Genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi, $n, r \geq 0$ olmak üzere

$$D\left(-2KQ(2KP+1)(S_{n+r-1})S_{n+r-2}+(KQS_{n+r-2})^2\right)$$

özelliğini sağlayan Diophantine dörtlüsü

$$\{S_{n+r-1},\ K^2P^2S_{n+r-1}+2K(KP+1)QS_{n+r-2},\ (KP+1)^2S_{n+r-1}+2K^2PQS_{n+r-2},$$

$$(2KP+1)^2S_{n+r-1}+4K(2KP+1)QS_{n+r-2}\} \qquad (6.24)$$

şeklindedir.

(6.23) de $r+s=2$ için

Sonuç 6.2.2. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ Genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi olmak üzere,

$$D\left(-2KQ(2KP+1)S_nS_{n-1}+(KQS_{n-1})^2\right)$$

özelliğini sağlayan Diophantine dörtlüsü

$$\{S_n,\ K^2P^2S_n+2K(KP+1)QS_{n-1},\ (KP+1)^2S_n+2K^2PQS_{n-1},$$

$$(2KP+1)^2S_n+4K(2KP+1)QS_{n-1}\} \tag{6.25}$$

şeklindedir.

(6.23) de $K=1$ için

Sonuç 6.2.3. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ Genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi ve $r+s$ çift tamsayı ve $n,r,s\geq 0$ olmak üzere

$$D\left(-2Q(2P+1)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-2}\right)+\left(QS_{n+\frac{r+s}{2}-2}\right)^2\right)$$

özelliğini sağlayan Diophantine dörtlüsü

$$\left\{S_{n+\frac{r+s}{2}-1},\ P^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2(P+1)QS_{n+\frac{r+s}{2}-2},\ (P+1)^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+2PQS_{n+\frac{r+s}{2}-2},\right.$$

$$\left.(2P+1)^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}+4(2P+1)QS_{n+\frac{r+s}{2}-2}\right\} \tag{6.26}$$

şeklindedir.

(6.23) de $K=-1$ için

Sonuç 6.2.4. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ Genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi ve $r+s$ çift tamsayı ve $n,r,s\geq 0$ olmak üzere

$$D\left(2Q(2P-1)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-2}\right)+\left(QS_{n+\frac{r+s}{2}-2}\right)^2\right)$$

özelliğini sağlayan Diophantine dörtlüsü

$$\left\{ S_{n+\frac{r+s}{2}-1}, P^2 S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 2(P-1)QS_{n+\frac{r+s}{2}-2}, (P-1)^2 S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 2PQS_{n+\frac{r+s}{2}-2}, \right.$$

$$\left. (2P-1)^2 S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + 4(2P-1)QS_{n+\frac{r+s}{2}-2} \right\} \tag{6.27}$$

şeklindedir.

(6.22) de $Z = -\frac{1}{3}QS_{n+\frac{r+s}{2}-2}$ için

Teorem 6.2.2. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ Genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi ve $r+s$ çift tamsayı ve $n,r,s \geq 0$ olmak üzere

$$D\left(-\frac{2}{3}K(2KP+1)Q\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1} \right)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-2} \right) + \left(KQS_{n+\frac{r+s}{2}-2} \right)^2 \right)$$

özelliğine sahip Diophantine dörtlüsü

$$\left\{ S_{n+\frac{r+s}{2}-1},\ K^2P^2 S_{n+\frac{r+s}{2}-1} - \frac{2}{3}K(KP-1)QS_{n+\frac{r+s}{2}-2},\ (KP+1)^2 S_{n+\frac{r+s}{2}-1} + \right.$$

$$\left. -\frac{2}{3}K(KP+2)QS_{n+\frac{r+s}{2}-2},\ (2KP+1)^2 S_{n+\frac{r+s}{2}-1} - \frac{4}{3}K(2KP+1)QS_{n+\frac{r+s}{2}-2} \right\}$$

(6.28)

şeklindedir.

(6.28) de $s=r$ için

Sonuç 6.2.5. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ Genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi ve $n,r \geq 0$ olmak üzere

$$D\left(-\frac{2}{3}K(2KP+1)QS_{n+r-1}S_{n+r-2} + (KQS_{n+r-2})^2 \right)$$

özelliğine sahip Diophantine dörtlüsü

$$\Big\{S_{n+r-1},\ K^2P^2S_{n+r-1}-\frac{2}{3}K(KP-1)QS_{n+r-2},\ (KP+1)^2S_{n+r-1}-\frac{2}{3}K(KP+2)QS_{n+r-2},$$

$$(2KP+1)^2S_{n+r-1}-\frac{4}{3}K(2KP+1)QS_{n+r-2}\Big\} \tag{6.29}$$

şeklindedir.

(6.28) de $r+s=2$ için

Sonuç 6.2.6. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ Genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi olmak üzere,

$$D\left(-\frac{2}{3}K(2KP+1)QS_{n-1}S_n+(KQS_{n-1})^2\right)$$

özelliğine sahip Diophantine dörtlüsü

$$\Big\{S_n, K^2P^2S_n-\frac{2}{3}K(KP-1)QS_{n-1}, (KP+1)^2S_n-\frac{2}{3}K(KP+2)QS_{n-1},$$

$$(2KP+1)^2S_n-\frac{4}{3}K(2KP+1)QS_n\Big\} \tag{6.30}$$

şeklindedir.

(6.28) de $K=1$ için

Sonuç 6.2.7. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ Genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi ve $r+s$ çift tamsayı ve $n,r,s\geq 0$ olmak üzere

$$D\left(-\frac{2}{3}(2P+1)Q\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-2}\right)+\left(QS_{n+\frac{r+s}{2}-2}\right)^2\right)$$

özelliğine sahip Diophantine dörtlüsü

$$\Big\{S_{n+\frac{r+s}{2}-1},\ P^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-\frac{2}{3}(P-1)QS_{n+\frac{r+s}{2}-2},\ (P+1)^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-\frac{2}{3}(P+2)QS_{n+\frac{r+s}{2}-2},$$

$$(2P+1)^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-\frac{4}{3}(2P+1)QS_{n+\frac{r+s}{2}-2}\Big\} \tag{6.31}$$

şeklindedir.

(6.28) de $K=-1$ için

Sonuç 6.2.8. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ Genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisi ve $r+s$ çift tamsayı ve $n,r,s\geq 0$ olmak üzere

$$D\left(-\frac{2}{3}(2P-1)Q\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-1}\right)\left(S_{n+\frac{r+s}{2}-2}\right)+\left(QS_{n+\frac{r+s}{2}-2}\right)^2\right)$$

özelliğine sahip Diophantine dörtlüsü

$$\left\{S_{n+\frac{r+s}{2}-1},\ P^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-\frac{2}{3}(P+1)QS_{n+\frac{r+s}{2}-2},\ (P-1)^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-\frac{2}{3}(P-2)QS_{n+\frac{r+s}{2}-2},\right.$$

$$\left.(2P-1)^2S_{n+\frac{r+s}{2}-1}-\frac{4}{3}(2P-1)QS_{n+\frac{r+s}{2}-2}\right\} \tag{6.32}$$

şeklindedir.

Sonuç 6.2.8. in uygulaması

(6.32) de $r+s=2,\ P=x,\ Q=-y$ için

Örnek 6.2.1. $\{F_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ iki değişkenli Fibonacci polinomlar dizisi olmak üzere,

$$D\left(\frac{2}{3}y(2x-1)F_n(x,y)\cdot F_{n-1}(x,y)+(yF_{n-1}(x,y))^2\right)$$

özelliğine sahip Diophantine dörtlüsü

$$\left\{F_n(x,y),\ x^2F_n(x,y)+\frac{2}{3}y(x+1)F_{n-1}(x,y),\ (x-1)^2F_n(x,y)+\frac{2}{3}y(x-2)F_{n-1}(x,y),\right.$$

$$\left.(2x-1)^2F_n(x,y)+\frac{4}{3}y(2x-1)F_{n-1}(x,y)\right\} \tag{6.33}$$

şeklindedir.

Çözüm:

$n=1$ için

$$D\left(\frac{2}{3}y(2x-1)F_1(x,y)F_0(x,y)+\left(yF_0(x,y)\right)^2\right)=D(0)$$

özelliğine sahip Diophantine dörtlüsü

$$\left\{F_1,\ x^2F_1,\ (x-1)^2F_1+\frac{2}{3}y(x-2)F_0,\ (2x-1)^2F_1+\frac{4}{3}y(2x-1)F_0\right\}=$$

$$=\left\{x,\ x^3,\ x(x-1)^2,\ x(2x-1)^2\right\}$$

olmak üzere

$$x\left(x^3\right)=x^4, \qquad x^3\left(x(x-1)^2\right)=\left(x^3-x^2\right)^2,$$

$$x\left(x(x-1)^2\right)=\left(x^2-x\right)^2, \qquad x^3\left(x(2x-1)^2\right)=\left(2x^3-x\right)^2,$$

$$x\left(x(2x-1)^2\right)=\left(2x^2-x\right)^2, \qquad \left(x(x-1)^2\right)\left(x(2x-1)^2\right)=\left(x(x-1)(2x-1)\right)^2$$

elde edilir.

$n=2$ için

$$D\left(\frac{2}{3}y(2x-1)F_2(x,y)\cdot F_1(x,y)+\left(yF_1(x,y)\right)^2\right)=D\left(\frac{2}{3}xy(2x-1)+y^2\right)$$

özelliğine sahip Diophantine dörtlüsü

$$\left\{F_2,\ x^2F_2+\frac{2}{3}y(x+1)F_1,\ (x-1)^2F_2+\frac{2}{3}y(x-2)F_1,\ (2x-1)^2F_2+\frac{4}{3}y(2x-1)F_1\right\}=$$

$$=\left\{x,\ x^3+\frac{2}{3}y(x+1),\ x(x-1)^2+\frac{2}{3}y(x-2),\ x(2x-1)^2+\frac{4}{3}y(2x-1)\right\}$$

olmak üzere

$$x\left(x(x-1)^2+\frac{2}{3}y(x-2)\right)+\frac{2}{3}xy(2x-1)+y^2=\left(x(x-1)+y\right)^2,$$

$$x\left(x^3+\frac{2}{3}y(x+1)\right)+\frac{2}{3}xy(2x-1)+y^2=\left(x^2+y\right)^2,$$

$$x\left(x(2x-1)^2+\frac{4}{3}y(2x-1)\right)+\frac{2}{3}xy(2x-1)+y^2=(x(2x-1)+y)^2,$$

$$\left(x^3+\frac{2}{3}y(x+1)\right)\left(x(x-1)^2+\frac{2}{3}y(x-2)\right)+\frac{2}{3}xy(2x-1)+y^2=$$

$$=\left(x^2(x-1)+\frac{1}{3}y(2x-1)\right)^2,$$

$$\left(x^3+\frac{2}{3}y(x+1)\right)\left(x(2x-1)^2+\frac{4}{3}y(2x-1)\right)+\frac{2}{3}xy(2x-1)+y^2=$$

$$=\left(x^2(2x-1)+\frac{1}{3}y(4x+1)\right)^2,$$

$$\left(x(x-1)^2+\frac{2}{3}y(x-2)\right)\left(x(2x-1)^2+\frac{4}{3}y(2x-1)\right)+\frac{2}{3}xy(2x-1)+y^2=$$

$$=\left(x(x-1)(2x-1)+\frac{1}{3}y(4x-5)\right)^2$$

elde edilir.

Sonuç 6.2.7. nin uygulaması

(6.31) de $r+s=2,\ P=1,\ Q=-1$ için

Örnek 6.2.2. $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ Lucas sayı dizisi olmak üzere

$$D\left(2L_nL_{n-1}+(L_{n-1})^2\right)$$

özelliğine sahip Diophantine dörtlüsü

$$\{L_n,\ L_n,\ 4L_n+2L_{n-1},\ 9L_n+4L_{n-1}\}$$

şeklindedir.

Çözüm:

$n=4$ için

$$D\left(2L_4L_3+(L_3)^2\right)=D(72)$$

özelliğine sahip Diophantine dörtlüsü

$$\{L_4,\, L_4,\, 4L_4 + 2L_3, 9L_4 + 4L_3\} = \{7,7,36,79\}$$

olmak üzere

$$7 \cdot 7 + 72 = 11^2,$$

$$7 \cdot 36 + 72 = 18^2,$$

$$7 \cdot 79 + 72 = 25^2,$$

$$36 \cdot 79 + 72 = 54^2$$

elde edilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Genelleştirilmiş iki değişkenli polinomlar dizisinden seçilen dörtlülerden $D(Z \cdot K^2)$ özelliğine sahip Diophantine dörtlüleri elde edilmiştir. Yeni Diophantine dörtlüleri, Diophantine beşlileri, Diophantine altılıları tanımlanabilir.

KAYNAKLAR

Baker, A. and Davenport H. (1969), The Equations $3x^2 - 2 = y^2$ and $8x^2 - 7 = z^2$, Quarterly J. Math. (Oxford II ser.), vol. 20, 129–137.

Diophantus (1959), Diophantine d' Alexandrie, (ed. P. ver Eecke), 136–137.

Diophantus of Alexandria (1974), Aritmetics and the Book of Polygonal Numbers, (I. G. Bashmakova. E.) Nauka, Moscow (in Russian) pp. 103–104, 232.

Dujella A. (1990), A problem of Diophantus and Fibonacci numbers, Matematika (Zagreb) 19(3), 45–52 (in Croatian).

Dujella A. (1993), Generalization of a problem of Diophantus, Acta Arithmetica 65, 15–27.

Dujella A. (1995), Diophantine quadruples for squares of Fibonacci and Lucas numbers, Portugaliae Mathematica 52 (3) , 305–318.

Dujella A. (1996), Generalized Fibonacci numbers and the problem of Diophantus, vol. 34.2, 164–174.

Dujella A. (1996), Some polynomial formulas for Diophantine quadruples, Grazer Math. Ber. 25–30, 328.

Dujella A. , Diophantine (1997), The Problem of the extension of a parametric family of Diophantine triples, Portugaliae Math. 52, 311–322.

Dujella A. (1998), A problem of Diophantus and Pell numbers, Application of Fibonacci numbers, Vol. 7 (G. E. Bergum, A. N. Philippou, A. F. Horadam, eds.), Kluwer, Dordrecht, pp. 61–68.

Dujella A. (2004), Diophantine quadruples and Fibonacci numbers, Department of Mathematics, University of Zagreb, Croatia.

Dustan Everman, A. E. Danese and K. Venkannayah (1970), Problem 1396, Amer. Math. Monthly, 67, pp. 81–82; Solution by E. M. Sheuer, ibid., p.694.

Euler (1972), Leonard – Elements of Algebra, translated by Rev. John Hewlett, with an introduction by C. Truesdell, Springer-Verlag, New York.

Fermat, Pierre **-** Obsevationes Domini Petri de Fermat, contained in "Oeuvres de Fermat", publiees par les soins de M. M. Paul T annery et Charles Henry, tome premier, pp. 291–342, Paris. MDCCCXCI

Heath, Thomas L. (1964), Diophantus of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra, 2^{nd} ed., with a supplement containing an account of Fermat's theorems and problems connected with Diophanttine analysis and some solutions of Diophantine problems by Euler; Dover Publ., Inc., New York.

Hoggatt V.E. ve Bergum G. E. (1977), A Problem of Fermat and the Fibonacci Sequences, The Fibonacci Quarterly, vol.15, 323–330.

Horadam A. F. (1965), Basic Properties of a Certain Generalized Sequence of Numbers, Fibonacci Quart., 3, 161–176.

Horadam A. F. (1987), Generalization of a result of Morgado, Portugaliae Math., 44, 313–336.

Horadam A. F. (1987), Generalization of a result of Morgado portugaliae mathematica Vol. 44 Fasc. 2.

Jones B. W. (1976), A variation on a problem of Davenport and Diophantus, Quart. J. Math. Oxford ser. (2) 27, 349–353.

Kılıç Emrah, Factorizations and representations of binary polynomial recurrences by matrix methods. (with P. Stanica) accepted in RMJM.

Mario Catalani (2004), Generalized Bivariate Fibonacci Poynomials, arXiv: math/0211366v2 [math. CO] 4 Jun.

Mario Catalani (2004), Some Formula efor Bivariate Fibonacci and Lucas Polynomials, arXiv: math/0406323v1 [math. CO] 16 Jun.

Morgado J. (1983-1984), Generalization of a Result of Hoggatt and Bergum on Fibonacci numbers, Portugaliae Math., 42, 441–445.

Morgado Jose (1991), Note on a Shannon's theorem concerning the Fibonacci numbers and Diophantine quadruples, Portugaliae Math., 48, 165–169.

Morgado Jose (1995), Note on the Chebyshev polynomials and applications to the Fibonacci numbers Vol. 52, Fasc. 3.

Shannon, A. G. (1988), Fibonacci numbers and Diophantine quadruples: generalization of results of Morgado and Horadam, Portugaliae Math., 45, 165–169.

Udrea, Gh. (1996), A note on the sequence (W_n) of A. F. Horadam, Portugaliae Math. 53, 143–155.

Udrea, Gh. (2000), A problem of Diophantus–Fermat and Chebyshev polynomials, to appear in Potugaliae Math. Pures Appl. 45, 531–535.