



**T.C.**  
**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GRAFLAR ÜZERİNDE YENİ KIRCHHOFF**  
**YAPILARININ TANITILMASI**

**Betül ACAR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Şubat-2011**  
**KONYA**  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Betül ACAR tarafından hazırlanan “Graflar Üzerinde Yeni Kirchhoff Yapılarının Tanıtılması” adlı tez çalışması 11/02/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

#### Başkan

Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

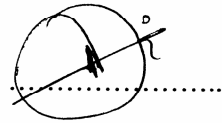
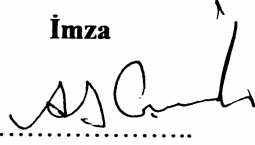
#### Danışman

Doç. Dr. Ayşe Dilek MADEN (GÜNGÖR)

#### Üye

Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL

### İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Bayram SADE  
FBE Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Betül ACAR

Tarih:11.02.2011

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

### GRAFLAR ÜZERİNDE YENİ KIRCHHOFF YAPILARININ TANITILMASI

**Betül ACAR**

**Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. A. Dilek MADEN (GÜNGÖR)**

**2011, 50 Sayfa**

**Jüri**

**Doç. Dr. A. Dilek MADEN (GÜNGÖR)  
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK  
Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL**

Bu çalışmada basit bağlantılı bir graf için literatüre ilk defa girecek olan Kirchhoff matris, yeni bir Kirchhoff indeksi, Kirchhoff enerji ve Kirchhoff Estrada indeksi kavramları tanımlanmış ve bunlara bağlı olarak çeşitli alt ve üst sınır değerleri elde edilmiştir. Bu sınırların örnekler üzerinde uygulaması Çizelge 3.1.1, Çizelge 3.1.2 ve Çizelge 3.1.3 de sunulmuş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Kirchhoff matrisi, Kirchhoff indeksi, yeni bir Kirchhoff indeksi, Kirchhoff enerji, Kirchhoff Estrada indeksi

**ABSTRACT**

**MSC THESIS**

**INTRODUCING THE NEW KIRCHHOFF STRUCTURES OVER GRAPHS**

**Betül ACAR**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
SELÇUK UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

**Advisor: Assoc. Prof. A. Dilek MADEN (GÜNGÖR)**

**2011, 50 Pages**

**Jury**

**Assoc. Prof. A. Dilek MADEN (GÜNGÖR)**

**Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK**

**Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL**

In this thesis it has been firstly defined and studied Kirchhoff matrix, a new Kirchhoff index, Kirchhoff energy and Kirchhoff Estrada index for a simple connected graph. Moreover it has been also investigated and so obtained some new bound values depend on these new parameters. The geometric configuration of these bounds are presented in the Figures 3.1.1, 3.1.2 and 3.1.3 as examples, and then some results did obtain related to them.

**Keywords:** Kirchhoff matrix, Kirchhoff index, a new Kirchhoff index, Kirchhoff energy, Kirchhoff Estrada index

## ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi, Doç. Dr. A. Dilek MADEN (GÜNGÖR) yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konuların öneminden bahsedilmiş, graf tanımları, özdeğerleri ve uygulamaları ile çalışmada gerekli olan bazı tanımlara yer verilmiştir. İkinci bölümde ana teoremler verilmiş olup basit bağlantılı bir grafin *Kirchhoff matrisi*, *yeni bir Kirchhoff indeksi*, *Kirchhoff enerjisi* ve *Kirchhoff Estrada indeksi* tanımlanmış ve bu parametreler için sınırlar elde edilmiştir. Üçüncü bölümde bu parametrelere bağlı örnekler gösterilmiş, son olarak dördüncü bölümde sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Çalışma boyunca her türlü desteği gösteren ve tüm kolaylığı sağlayan danışman hocam sayın Doç. Dr. A. Dilek MADEN (GÜNGÖR)'e ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. A. Sinan ÇEVİK'e, ayrıca desteklerinden dolayı canım annem Hatice ACAR'a teşekkürlerimi sunarım.

Betül ACAR

KONYA-2011

# İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b> .....	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>v</b>
<b>ÖNSÖZ</b> .....	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>vii</b>
<b>SİMGELER</b> .....	<b>viii</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
1.1. Graf Teori Ve Uygulama Alanları.....	1
1.2. Tanımlar Ve Parametreler .....	3
1.2.1. Graf tanımı.....	3
1.2.2. Bir grafta yürüme ve yol .....	5
1.2.3. Bir grafta bağlantılılık .....	5
1.2.4. Tam, iki parçalı, düzenli ve ağırlıklı graflar .....	6
1.2.5. Grafta kullanılan bazı matrisler ve Kirchhoff indeksi .....	8
1.2.6. Bir grafin enerjisi ve Estrada indeksi.....	11
1.2.7. Bazı lineer cebir tanımları .....	14
1.2.8. Artan ve azalan fonksiyon.....	15
1.2.9. Bazı reel sayı eşitsizlikleri.....	16
1.3. Kaynak Araştırması .....	16
<b>2. GRAFLAR ÜZERİNDE YENİ KIRCHHOFF YAPILARININ TANITILMASI</b> .....	<b>19</b>
2.1. Bir Grafin Kirchhoff Matrisi ve Yeni Bir Kirchhoff İndeksi.....	19
2.2. Bir Grafin Kirchhoff Enerjisi .....	23
2.3. Bir Grafin Kirchhoff Estrada İndeksi .....	30
<b>3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA</b> .....	<b>40</b>
<b>4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER</b> .....	<b>46</b>
4.1. Sonuçlar .....	46
4.2. Öneriler .....	47
<b>KAYNAKLAR</b> .....	<b>48</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	<b>49</b>

## SİMGELER

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$[a_{ij}]_{n \times n}$	$a_{ij}$ bileşenli bir $A$ matrisi
$ A $	$A$ matrisinin determinantı
$A^{-1}$	$A$ matrisinin tersi
$A^T$	$A$ matrisinin transpozu
$Ek(A)$	$A$ matrisinin adjointi
$M_n$	$n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi
$G$	Herhangi bir graf
$V(G)$	$G$ grafının nokta kümesi
$ V(G) $	$V(G)$ kümesinin eleman sayısı
$E(G)$	$G$ grafının kenar kümesi
$v_i v_j$	$v_i$ ve $v_j$ noktalarına ait kenar
$d(v_i)$	$v_i$ noktasının derecesi
$G[V_i]$	$G$ grafının $i$ -inci bileşeni
$K_n$	$n$ noktalı tam graf
$N_n$	Boş graf (Kenar içermeyen graf)
$w_{ij}$	$v_i v_j$ kenarının ağırlığı
$A(G)$	$G$ grafının komşuluk matrisi
$\dots \lambda_i$	$A(G)$ nin $i$ -inci özdeğeri
$\dots D(G)$	$G$ grafının nokta derecelerinin köşegen matrisi
$L(G)$	$G$ grafının Laplacian matrisi
$\dots \alpha_i$	$L(G)$ nin $i$ -inci özdeğeri
$R$	$G$ grafının direnç mesafesi matrisi
$r_{ij}$	$v_i v_j$ kenarına ait direnç mesafesi
$Kf(G)$	$G$ grafının bilinen Kirchhoff indeksi



$Kf^\dagger(G)$	$G$ grafi üzerinde <u>yeni</u> Kirchhoff indeksi
$Kf_A(G)$	$G$ grafi üzerinde <u>yeni</u> Kirchhoff matrisi
$\dots \delta_i$	$Kf_A(G)$ nin $i$ – inci özdeğeri
$\dots \nabla$	$Kf_A(G)$ nin determinantının mutlak değeri
$\dots K$	$Kf_A(G)$ nin elemanlarının kareleri toplamı
$\dots Kf_D(G)$	Esas köşegen üzerindeki elemanları $Kf_A(G)$ nin satır toplamlarından oluşan köşegen matris
$Kf_L(G)$	$G$ grafinin Kirchhoff Laplacian matrisi
$\dots \mu_i$	$Kf_L(G)$ nin $i$ – inci özdeğeri
$E(G)$	$G$ grafinin enerjisi
$LE(G)$	$G$ grafinin Laplacian enerjisi
$EKf(G)$	$G$ grafinin Kirchhoff enerjisi
$EE(G)$	$G$ grafinin Estrada indeksi
$LEE(G)$	$G$ grafinin Laplacian Estrada indeksi
$KEE(G)$	$G$ grafinin Kirchhoff Estrada indeksi

## 1. GİRİŞ

### 1.1. Graf Teori ve Uygulama Alanları

Graf teori konusunda bilinen ilk çalışma, 1736 yılında Euler tarafından yazılan ‘The Königsberg Bridge Problem’ (Königsberg köprü problemi) isimli makaledir. Bunu izleyen yıllarda graf teori konusundaki çalışmalar devam etmiş, 1847 yılında G. Kirchhoff elektrik devreleri üzerine çalışmalar yapmıştır.

Graf teori uygulamaları modern hayatın karmaşık ve geniş kapsamlı birçok problemin çözümü için kullanılmaktadır. Bu uygulamalar; ekonomi, yönetim bilimi, satış pazarlama, bilgi iletimi, taşıma planlaması gibi alanları kapsamaktadır. Ayrıca kimya, elektrik mühendisliği, mimarlık gibi sayısal alanlarda da uygulamaları vardır. Graf teorisi problemleri tanımlama ve yapısal olarak ilişkileri belirlemede de faydalıdır.

Basitçe bir graf; düğüm olarak adlandırılan noktalar ve her biri bu noktaları veya sadece noktanın kendisini birleştiren ve ayrıt olarak da adlandırılan kenarlar topluluğudur. Örnek olarak şehirleri nokta ve onları bağlayan yolları kenar olarak gösteren yol haritaları verilebilir. Bu kenarlar; kapasite, güç ve uzaklıkların gösteriminde kullanılabilirler ve yönlendirilebilirler.

Graf teorisi problemlerinin çok çeşitli türleri vardır. Mesela ünlü satış temsilcisi problemi; her bir noktadan geçerek grafın bir ucundan diğer ucuna en kısa yolu bulma problemidir. Küçük graflar için bu yöntem kolay gelebilir fakat nokta sayısı arttıkça bu problem çok zorlaşır. Problem, ismini problemin baş harflerinin birleşiminden alır. Fakat çok ilginçtir ki, bu problemin oldukça farklı alanlarda uygulandığı gözlenmiştir. Örneğin; Çok Büyük Ölçüde Çemberlerin Birleştirilmesi (ÇBÖÇB) gibi. Bir diğer problem ise bağlantılılık problemidir. Bu problem de; herhangi bir noktadan başka bir noktaya graf boyunca yürünmesi esnasında kaç tane kenar silinebileceğine dayanır.

Simetrik graf teoride lineer cebirin kullanım alanları oldukça yaygındır. Sadece simetrik graf teoride değil, graf teorisinin diğer kısımlarında da lineer cebirin bu kullanımı yaygındır.

Graf teorisinin en önemli alt dallarından biri spektral graf teoridir. Spektral graf teorisi, bilgisayar bilimleri, kimya ve kodlama teorisi gibi birçok alanda uygulanabilir olması açısından ayrık (diskrete) matematiğin önemli bir parçasıdır. Bu alanda grafın bazı matrislerinin özdeğerleri ve özvektörleri üzerine çalışılır. Bu çalışmada en önemli amaç,

grafin matrislerinden elde edilen spektral bilgiler sayesinde grafin belli başlı özellikleri hakkında bilgi edinmektir.

Bir grafin *enerjisi* ve *Estrada indeksi* parametreleri grafin özdeğerlerini ihtiva ettiğinden bu konular spektral graf teori alanına girmektedir. Bu parametreler kimyada çok önemli bir yere sahiptir.

Şimdi bir grafta enerji kavramının çıkış noktasını verip öneminden bahsedelim.

$G$  grafi,  $n$  noktalı ve özdeğerleri  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  olan bir graf olsun. Bu taktirde  $G$  nin *enerjisi*

$$E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

şeklinde 1978 yılında Ivan Gutman tarafından ortaya atılmış ve teorik kimyadaki sonuçlardan esinlenilerek graf teoriye kazandırılmıştır.

Ivan Gutman tarafından 1978 yılında bir grafin enerjisi ortaya atıldıktan sonra 1998 yılına kadar grafin enerjisi üzerine hiçbir çalışma yapılmamış daha sonra bu durum değişmiş ve 2001 yılı ve sonrasında grafin enerjisi üzerine 150 den fazla çalışma yapılmıştır. Daha sonra grafin enerjisi tanımına benzer tanımlar ortaya çıkmıştır. Bunlardan başlıcaları; grafin *Laplacian enerjisi*, *uzaklık enerjisi*, *Randic enerjisi* ve *Harary enerjisidir*.

Şimdi bir grafta *Estrada indeks* kavramını verip uygulama alanından bahsedelim.

$G$  grafi,  $n$  noktalı ve özdeğerleri  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  olan bir graf olmak üzere  $G$  nin *Estrada indeksi*

$$EE(G) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i}$$

şeklinde E. Estrada tarafından 2000 yılında organik moleküllerin 3D yapılarının belirli özelliklerini temsil edebilen yeni bir yapı tanımlayıcı olarak verilmiştir. Özellikle de proteinlerin ve diğer uzun zincirli biyopolimerlerin bağ derecelerinin karakterizasyonunda kullanılmıştır. Ayrıca Estrada indeksin biyokimya ve kompleks network teoride de uygulamalarının olduğu bilinmektedir. Bir grafin Estrada indeksi yanında *Laplacian Estrada indeksi* de tanımlanmış ve bunun üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Bir grafin direnç mesafesi matrisi ise ilk olarak Klein ve Randic tarafından 1993 yılında yeni bir uzaklık fonksiyonu olarak tanımlanmış ve direnç mesafesi olarak isimlendirilmiştir. Çünkü bu terim fizikte kullanılmaktadır.  $G$  grafi  $n$  noktalı bağlantılı

bir graf olsun. Bir elektrik şebekesi  $G$  grafi olarak düşünülüp birim dirençlerin her biri  $G$  grafının noktaları olarak ifade edilirse,  $v_i$  ve  $v_j$  noktaları arasındaki *direnç mesafesi*  $r_{ij}$  ile gösterilir. Direnç mesafesinin, ağırlarla eşleştirilmiş bir grafa ait *Laplacian matris* ve *normalize Laplacian matrisinin* özdeğer ve özvektörleri ile bağlantısı vardır.

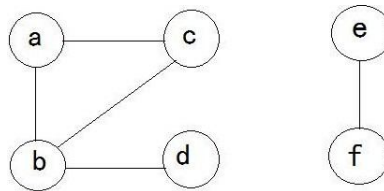
Aşağıda verilen kavram ve tanımlar için aksi belirtilmedikçe kaynağımız, Aldous ve ark., (2000) dır. Şimdi bu çalışmada yararlanılacak bazı temel kavramları örnekleri ile birlikte vererek, bunları teoremler eşliğinde kuvvetlendirelim.

## 1.2. Tanımlar ve Parametreler

### 1.2.1. Graf tanımı

Bir *graf* ;  $V$  boştan farklı bir küme ve  $E$ , her elemanı  $V$  nin elemanlarının oluşturduğu sıralı olmayan ikililerden oluşan bir küme olmak üzere  $V$  ve  $E$  kümelerinden meydana gelir ve  $G = (V, E)$  biçiminde gösterilir.  $V$  nin elemanlarına *noktalar*,  $E$  nin elemanlarına *kenarlar* denir.

Aşağıda Şekil 1.2.1 ile verilen 6 noktalı 5 kenarlı grafi göz önüne alırsak,



Şekil 1.2.1

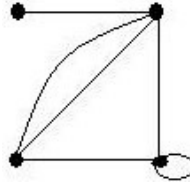
bu grafın nokta kümesi ve kenar kümesi sırasıyla

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f\} \quad \text{ve} \quad E(G) = \{ab, ac, bc, bd, ef\}$$

biçiminde ifade edilir.

Bir grafda aynı nokta çiftini birleştiren iki ya da daha fazla kenara *çoklu kenar*, bir noktayı kendisiyle birleştiren kenara *ilmek*, çoklu kenar ve ilmeği olmayan grafa ise *basit graf* denir. Ayrıca çoklu kenar ve ilmeklere sahip basit grafa *çoklu graf* (*multigraph*) denir.

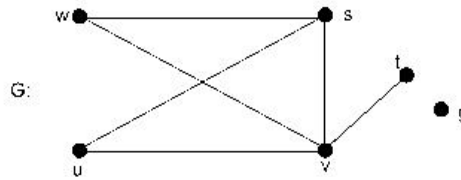
Aşağıda Şekil 1.2.2 ile gösterilen graf, çoklu kenar ve ilmek içeren bir graftır.



Şekil 1.2.2

Bir grafa herhangi bir  $v_i$  noktasının *derecesi* o noktaya komşu olan noktaların sayısıdır ve  $d(v_i)$  ile gösterilir. Derecesi sıfır olan noktaya *izole nokta*, derecesi 1 (bir) olan noktaya ise *asılı (pendant) nokta* denir. Bununla beraber bir grafa herhangi iki noktanın oluşturduğu bir kenar varsa bu noktalara *komşu noktalar* denir ve  $v_i \sim v_j$  şeklinde gösterilir, aksi halde *komşu değildir* denir ve  $v_i \not\sim v_j$  ile gösterilir.

Aşağıda herhangi bir  $G$  grafına ait noktaların dereceleri ve komşuluklarının bulunması ele alınmıştır:



$w$  noktası;  $v$  ve  $s$  noktalarına komşu,

$s$  noktası;  $v, u$  ve  $w$  noktalarına komşu,

$u$  noktası;  $s$  ve  $v$  noktalarına komşu,

$v$  noktası;  $w, s, u$  ve  $t$  noktalarına komşu,

$t$  noktası  $v$  noktasına komşu olup, pendant noktadır.

$g$  noktasının hiçbir kenar bağlantısı olmadığı için nokta derecesi sıfırdır ve izole noktadır.

Burada  $w$  ve  $u$  noktaları aynı anda *iki noktaya* komşu oldukları için, dereceleri 2 dir. Aynı zamanda  $v$  noktası *dört noktaya* komşu olduğu için derecesi 4 ve  $s$  noktası *üç noktaya* komşu olduğu için derecesi 3 tür. Son olarak  $t$  noktası *bir noktaya* komşu

olduğu için derecesi 1 ve  $g$  nin *kenar bağlantısı* olmadığı için nokta derecesi 0 dır.

Yani

$$d(w) = 2, d(s) = 3, d(u) = 2, d(v) = 4, d(t) = 1, d(g) = 0$$

dir.

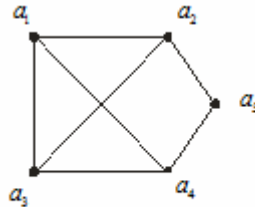
### 1.2.2. Bir grafta yürüme ve yol

Bir grafın nokta kümeleri  $V(G) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\}$  olsun. Grafın herhangi  $a_i$  noktasından başlayıp ardı ardına  $k$  kenarın dizilmesiyle oluşan

$$\underbrace{a_1 a_3, a_3 a_2, a_2 a_1, \dots, a_{n-1} a_n}_k$$

formuna,  $G$  de  $k$  uzunluğundaki bir *yürüme* denir. Aynı noktada başlayan ve biten bir yürümeye  $G$  de *kapalı yürüme*, eğer bu yürümede  $i \neq j$  için  $a_i \neq a_j$  şartı sağlanıyorsa bu özel yürümeye de *yol* denir. Başlangıç ve bitiş noktaları hariç bütün noktaları farklı olan kapalı bir yürümeye ise  $G$  grafında bir *devir* denir.

Aşağıdaki gibi bir graf verilsin.



Bu grafta  $a_2 a_3 a_2 a_5 a_4$  yazımı *beş* uzunluğunda bir yürüme,  $a_5 a_4 a_1 a_2 a_5$  *kapalı bir yürüme*, son olarak  $a_1 a_2 a_5 a_4 a_3$  yazımı bir *yol* ve  $a_1 a_4 a_5 a_3 a_1$  ise bir *devirdir*.

### 1.2.3. Bir grafta bağlantılılık

$G = (V, E)$  grafının herhangi iki noktası arasında bir yol varsa, bu noktalara *bağlantılı noktalar*, bir grafın her nokta çifti arasında bir yol varsa bu grafa *bağlantılı graf* denir.

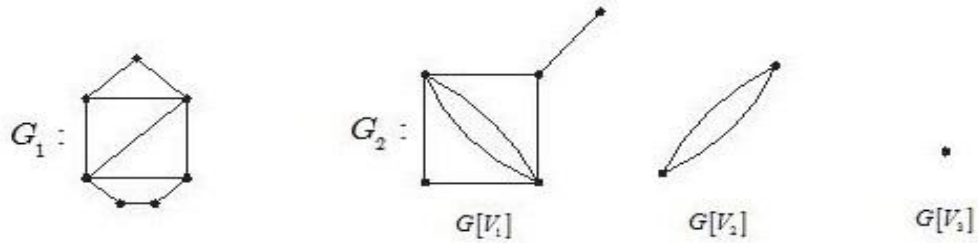
Bir kartezyen çarpım kümesi olan

$$\beta = \{u, v \in V; u \sim v, u \text{ ile } v \text{ bağlantılı noktalar.}\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu küme  $V$  üzerinde bir bağlantı tanımlar. Ayrıca, kolayca gösterilebilir ki,  $\beta$  kümesi yine  $V$  üzerinde bir *denklik bağlantısıdır*.

$V$  nin *denklik sınıfları*,  $V_1, V_2, \dots, V_r$  olmak üzere,  $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_r]$  alt graflarına  $G$  nin bileşenleri denir. Yukarıdaki zincirde  $r = 1$  olması özel olarak grafin *bağlantılı* olduğunu söyler. Aksi takdirde  $G$  grafi,  $r$  bileşene sahip *bağlantısız* bir graftır.

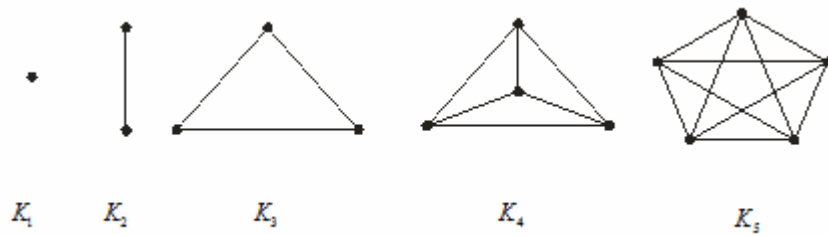
Aşağıdaki  $G_1$  grafi *bağlantılı*,  $G_2$  grafi,  $G[V_1], G[V_2], G[V_3]$  bileşenleri ile *bağlantısız* bir graftır.



#### 1.2.4. Tam, iki parçalı, düzenli ve ağırlıklı graflar

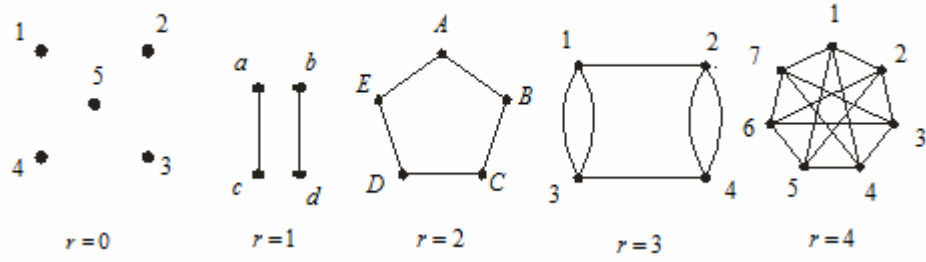
Farklı her bir nokta çifti komşu olan  $G$  grafinin *tam graf* denir.  $n$  noktalı bir tam graf  $K_n$  ile gösterilir.

Aşağıda tam graf örnekleri verilmiştir.



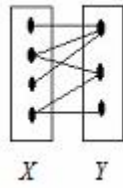
Bir  $G$  grafinin her bir noktası aynı dereceye sahipse bu grafa *düzenli (regüler) graf* denir. Eğer düzenlilik derecesi  $r$  ise  *$r$ -düzenli graf ( $r$ -regüler graf)* olarak adlandırılır.

Aşağıda bazı düzenli graf örnekleri verilmiştir.

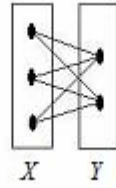


Nokta kümesi  $X$  ve  $Y$  gibi iki alt kümeye ayrılmış olan ve kenarları da  $X$  deki bir noktayla  $Y$  deki bir noktanın birleştirilmesiyle elde edilen  $G$  grafına *iki parçalı graf* ve  $(X, Y)$  ikilisine de  $G$  nin parçaları denir. İki parçalı bir  $G$  grafı için,  $E$  kenar kümesi olmak üzere,  $G = (X, Y : E)$  gösterimi kullanılır. Ayrıca  $|X| = p$  ve  $|Y| = q$  olacak şekildeki *iki parçalı tam graf*, kısaca  $K_{p,q}$  ile gösterilir. Özel olarak  $K_{1,q}$  grafına ise *star grafi* adı verilir.

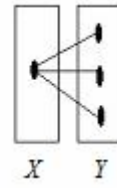
Aşağıda *iki parçalı graf*, *iki parçalı tam graf* ve *star grafi* örnekleri verilmiştir.



*İki parçalı graf*



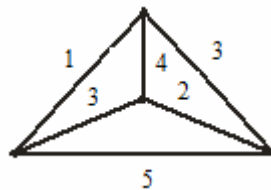
$K_{3,2}$  grafi



$K_{1,3}$  star grafi

Bir grafın her bir  $v_i v_j$  kenarı, negatif olmayan reel sayı ile işaretli ise, bu grafa *ağırlıklı graf* denir. Verilen bu  $v_i v_j$  kenarına ait ağırlık özel olarak  $w_{ij}$  ile gösterilir.

Aşağıdaki graf kenarları sayılarla ifade edilen ağırlıklı bir graftır.





### 1.2.5. Grafta kullanılan bazı matrisler ve Kirchhoff indeksi

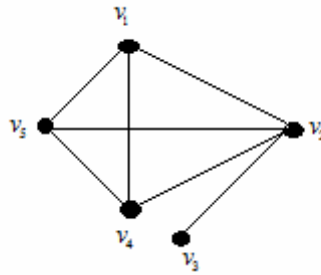
Şimdi graf teoride sıklıkla kullanılan basit bir grafın *komşuluk*, *Laplacian*, *direnç mesafesi* matrislerinin tanımlarını verelim.

$G$  grafı, nokta kümesi  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  olan bir graf olsun.  $G$  nin *komşuluk matrisi*

$$A(G) = [a_{ij}] = \begin{cases} 1, & v_i \sim v_j, \\ 0, & \text{aksi takdirde.} \end{cases} \quad (1.2.1)$$

şeklinde tanımlanan  $n \times n$  simetrik matristir.

**Örnek 1.2.1.** Aşağıdaki Şekil 1.2.5 deki graf verilsin.



Şekil 1.2.5

$A(G)$  *komşuluk matrisi* olmak üzere Şekil 1.2.5 ile verilen grafın *komşuluk matrisi*;

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

$G$  grafı,  $n$  noktalı bir graf olmak üzere, bu grafın *nokta derecelerinin* (yani (1.2.1) ile verilen  $A(G)$  komşuluk matrisinin her bir satır değerinin toplamının) *köşegen matrisi*

$$D(G) = \text{diag}(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$$

ile gösterilir. Şekil 1.2.5 grafinin nokta dereceleri

$$d(v_1)=3, d(v_2)=4, d(v_3)=1, d(v_4)=3, d(v_5)=3$$

olup, nokta derecelerinin köşegen matrisi

$$D(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

dir.

Tüm bunlardan sonra,  $A(G)$  ve  $D(G)$  matrisleri yardımıyla, verilen bir  $G$  grafinin *Laplacian matrisi*

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

olacak şekilde yine  $n \times n$  simetrik bir matris olarak tanımlanır. Aynı zamanda bu  $L(G)$  matrisinin

$$L(G)_{ij} = \begin{cases} d(v_i), & v_i = v_j \text{ ise,} \\ -1, & v_i \sim v_j \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \quad (1.2.2)$$

şeklinde de ifade edilebileceği açıktır.

(1.2.2) deki tanımı dikkate alarak, kenar ağırlığı  $w_{ij} \in \mathbb{R}^+$  pozitif sayısı olan *basit bağlantılı ve ağırlıklı* bir  $G$  grafi için *Laplacian matrisi*

$$L(G)_{ij} = \begin{cases} d_i - w_{ij}, & v_i = v_j \text{ ise,} \\ -w_{ij}, & v_i \sim v_j \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

biçiminde yazılır.

Şekil 1.2.5 ile verilen grafi tekrar göz önüne alırsak, bu grafin *Laplacian matrisi*

$$L(G) = D(G) - A(G) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

olarak elde edilir.

Aşağıda vereceğimiz direnç mesafesi matrisi ve Kirchhoff indeksi, Klein ve Randić tarafından 1993 yılında tanımlanmıştır.

$G$  grafi, nokta kümesi  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  olan bağlantılı bir graf olsun. Verilen bir  $X$  matrisi;  $J$  tüm elemanları 1 e eşit olan  $n \times n$  tipinde bir matris ve  $n \geq 2$  olmak üzere

$$X = [x_{ij}]_{n \times n} = \left( L + \frac{1}{n} J \right)^{-1}$$

şeklinde hesaplanan ters çevrilebilir bir kare matris ise bu şekilde hesap edilen  $X$  matrisinin elemanlarından oluşan matrise *direnç mesafesi matrisi* denir ve  $G$  nin herhangi  $v_i$  ve  $v_j$  elemanları arasındaki *direnç mesafesi*  $r_{ij}$  ile gösterilir.

*Direnç mesafesi* elemanları olan  $r_{ij}$  ler

$$r_{ij} = x_{ii} + x_{jj} - 2x_{ij} \quad (1.2.4)$$

şeklinde hesaplanır.  $G$  nin *direnç mesafesi* matrisi,  $R = [r_{ij}]_{n \times n}$  olacak şekilde simetrik bir matristir.

$G$  grafının, direnç mesafesi elemanlarından oluşan ve uzaklık fonksiyonuna alternatif olarak tanıtılan indekse *Kirchhoff indeksi* denir ve  $G$  grafının *Kirchhoff indeksi* ( $r_{ij}$  ler direnç mesafesi olmak üzere)

$$Kf(G) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} = \sum_{i < j} r_{ij}$$

biçiminde tanımlanır.

*Direnç mesafesi matrisini* ve Kirchhoff indeksini Şekil 1.2.5 ile verilen graf üzerinde hesaplırsak; (1.2.3) de verilen  $L(G)$  matrisi yardımıyla  $X$  matrisi

$$X = [x_{ij}]_{n \times n} = \left( L + \frac{1}{n} J \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{23}{50} & \frac{4}{25} & \frac{-1}{25} & \frac{21}{100} & \frac{21}{100} \\ \frac{4}{25} & \frac{9}{25} & \frac{4}{25} & \frac{4}{25} & \frac{4}{25} \\ \frac{-1}{25} & \frac{4}{25} & \frac{24}{25} & \frac{-1}{25} & \frac{-1}{25} \\ \frac{21}{100} & \frac{4}{25} & \frac{-1}{25} & \frac{23}{50} & \frac{21}{100} \\ \frac{21}{100} & \frac{4}{25} & \frac{-1}{25} & \frac{21}{100} & \frac{23}{50} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur ve  $X = [x_{ij}]_{n \times n}$  matrisinin elemanları ile elde edilen  $r_{ij}$  ler, (1.2.4) ile verilen eşitlik yardımıyla hesap edilirse, *direnç mesafesi matrisi*

$$R = [r_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir ve Şekil 1.2.5 ile verilen grafın *Kirchhoff indeksi* de

$$Kf(G) = \sum_{i < j} r_{ij} = 8.5$$

olur. ■

Şimdi çalışmamızda kullanacağımız bazı graf parametrelerini tanıtalım.

### 1.2.6. Bir grafın enerjisi ve Estrada indeksi

$G$  grafı, *komşuluk matrisi*  $A(G)$  olan bir graf olsun. Bu taktirde  $A(G)$  nin özdeğerlerine  $G$  grafının *özdeğerleri* denir.

$G$  grafı,  $n$  noktalı ve özdeğerleri  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  olan bir graf ise

$$E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

ifadesine  $G$  grafinin enerjisi denir (Gutman, 1978).

$G$  grafi,  $n$  noktalı ve özdeğerleri  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  olan bir graf olmak üzere

$$EE(G) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i}$$

ifadesine  $G$  grafinin Estrada indeksi denir. Ayrıca

$$M_k = M_k(G) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i)^k$$

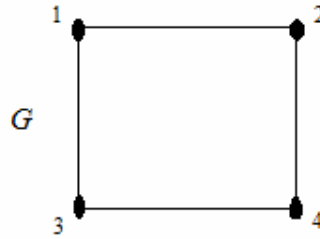
olmak üzere,  $e^x$  in seriye açılımından

$$EE(G) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{k!}$$

eşitliği yazılabilir (E. Estrada, 2000).

### Örnek. 1.2.2.

Aşağıdaki Şekil 1.2.6 daki 2-düzenli  $G$  grafini göz önüne alalım.



Şekil 1.2.6

Bu grafin komşuluk matrisi

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup, özdeğerleri

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_4 = 2$$

dir. Ayrıca bu grafin enerjisi

$$E(G) = \sum_{i=1}^4 |\lambda_i| = 4$$

ve Estrada indeksi

$$EE(G) = \sum_{i=1}^4 e^{\lambda_i} \cong 9.52439$$

olarak elde edilir. ■

$G$  grafi, Laplacian matrisi  $L(G)$  olan bir graf olsun. Bu taktirde  $L(G)$  nin özdeğerlerine  $G$  grafinin Laplacian özdeğerleri denir.

$G$  grafi,  $n$  noktalı ve  $m$  kenarlı bir graf ve  $G$  nin Laplacian özdeğerleri  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  olmak üzere

$$LE(G) = \sum_{i=1}^n \left| \alpha_i - \frac{2m}{n} \right|$$

ifadesine  $G$  grafinin Laplacian enerjisi denir.

$G$  grafi,  $n$  noktalı bir graf ve  $G$  nin Laplacian özdeğerleri  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  olmak üzere

$$LEE(G) = \sum_{i=1}^n e^{\alpha_i}$$

ifadesine  $G$  grafinin Laplacian Estrada indeksi denir.

Şekil 1.2.6 daki 2-düzenli  $G$  grafini göz önüne alırsak, bu grafin Laplacian matrisi

$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ve Laplacian özdeğerleri

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 2 \quad \text{ve} \quad \alpha_4 = 4$$

dir. Ayrıca bu grafin nokta sayısı ve kenar sayısı  $n = 4$  ve  $m = 4$  olmak üzere, Laplacian enerjisi ve Laplacian Estrada indeksi sırasıyla

$$LE(G) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i - 2| = 4$$

ve

$$LEE(G) = \sum_{i=1}^n e^{\alpha_i} \cong 70.37626$$

olarak hesaplanır.

### 1.2.7. Bazı lineer cebir tanımları

**Tanım 1.2.7.1. (Bozkurt ve ark., 2003)**  $A : T \rightarrow T$  lineer dönüşümü ve  $x \in T$  sıfırdan farklı bir vektör olmak üzere

$$Ax = \lambda x$$

eşitliğini sağlayan bir  $\lambda$  sayısına  $A$  dönüşümünün *özdeğeri*,  $x$  vektörüne de  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen *özvektörü* denir.

Özdeğer ve özvektörler için aşağıdaki özellikler vardır.

- (a)  $A$  matrisi tekil ise, en az bir özdeğeri sıfırdır.  $A$  tekil değil ise tüm özdeğerleri sıfırdan farklıdır.
- (b) Birim matrisin bütün özdeğerleri 1 dir.
- (c)  $A$  köşegen bir matris ise, özdeğerler bu matrisin köşegen elemanlarıdır.
- (d)  $A$  simetrik bir matris ise, tüm özdeğerleri reeldir.
- (e)  $A$  Hermityen bir matris ise, tüm özdeğerleri reeldir.
- (f)  $A^{-1}$  matrisinin özdeğerleri,  $A$  nın özdeğerlerinin tersine eşittir.
- (g) Reel simetrik bir matrisin tüm özvektörleri karşılıklı ortogondur.
- (h)  $A$  ve  $A^T$  matrislerinin özdeğerleri aynıdır.
- (i) Bir matrisin özdeğerlerinin toplamı o matrisin köşegen elemanları toplamına (izine) eşittir.
- (j) Eğer bir  $A$  matrisinin  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen özvektör  $v$  ise,  $c$  bir sabit olmak üzere  $cv$  de  $A$  matrisinin özvektörüdür.

$A = [a_{jk}]_{n \times n}$  biçimindeki kare matrislerin, çarpmaya göre *tersi*  $A^{-1}$  şeklinde gösterilir. Determinantı sıfırdan farklı matrislerin tersi vardır.  $A$  kare matrisinin tersi

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Ek(A) \quad (|A| \neq 0)$$

ile hesaplanır. ( $Ek(A)$  ifadesi,  $A$  matrisinin adjointini (ek matrisini) göstermektedir).

**Teorem 1.2.7.1. (Zhang F., 1999) (Schur Teoremi)**

$A = [a_{jk}]_{n \times n}$  tipinde bir matris ve  $A$  matrisinin özdeğerleri de  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  olsun.

Bu durumda

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2$$

olur.

**1.2.8. Artan ve azalan fonksiyon**

$A$  sonlu veya sonsuz bir aralık olmak üzere

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu verilsin. Her  $x_1, x_2 \in A$  ve  $x_1 < x_2$  için

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

ise  $f(x)$  fonksiyonuna  $A$  üzerinde *monoton artan fonksiyon*

$$f(x_1) < f(x_2)$$

ise *kesin artan fonksiyon* denir. Benzer şekilde, eğer her  $x_1, x_2 \in A$  ve  $x_1 < x_2$  için

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

ise  $f(x)$  fonksiyonuna  $A$  üzerinde *monoton azalan fonksiyon*

$$f(x_1) > f(x_2)$$

ise *kesin azalan fonksiyon* denir.



Bir aralığın tüm  $x$  noktalarında  $f'(x) \geq 0$  ise fonksiyon bu aralıkta *monoton artan*,  $f'(x) > 0$  ise *kesin artan* fonksiyondur. Eğer bir aralığın tüm  $x$  noktalarında  $f'(x) \leq 0$  ise fonksiyon bu aralıkta *monoton azalan*,  $f'(x) < 0$  ise *kesin azalan* fonksiyondur (Horn ve ark., 1985).

### 1.2.9. Bazı reel sayı eşitsizlikleri

Aşağıda çalışmada kullanacağımız reel sayı eşitsizlikleri verilmiştir.

**Teorem 1.2.9.1. (Marshall ve ark., 1979) (Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği)** Negatif olmayan  $n$  tane  $a_1, a_2, \dots, a_n$  reel sayıları için

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

eşitsizliği sağlanır. Ancak tanımlanan bu eşitsizliğin eşitlik olabilmesi için gerek ve yeter şart  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  olmasıdır.

**Teorem 1.2.9.2. (Cauchy-Schwartz Eşitsizliği)**  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ve  $b_1, b_2, \dots, b_n$  lerin her biri reel sayı olmak üzere

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitsizliğin eşitlik olması için gerek ve yeter şart her bir  $1 \leq i \leq n$  için  $a_i = r b_i$  olacak şekilde bir  $r \in \mathbb{R}$  olmasıdır.

### 1.3. Kaynak Araştırması

I. Gutman ve B. Zhou (2006) çalışmalarında,  $n$  noktalı,  $m$  kenarlı bir  $G$  grafının Laplacian enerjisini tanımlamışlar daha sonra bu grafın enerjisi ve Laplacian enerjisi arasındaki bazı önemli farklar üzerinde durmuşlardır.

H. Chen ve F. Zhang (2007) çalışmalarında, bir  $G$  grafının normalize Laplacian matrisinin özdeğerleri ve özvektörleri ile ifade edilebileceğini göstermiş, normalize

Laplacian matrisinin özdeğerleri ile yakından ilgili olan yeni bir indeks tanımlamışlardır. Son olarak bilinen Kirchhoff indeks ile yeni indeks arasında bir ilişki bulmuşlardır.

J. A. De La Pena ve arkadaşları (2007) çalışmalarında,  $n$  noktalı,  $m$  kenarlı bir  $G$  grafının Estrada indeksi için nokta sayısını ve kenar sayısını içeren bir alt ve bir üst sınır elde etmişlerdir. Ayrıca Estrada indeks için grafın enerjisini de içeren bazı üst sınırlar vermişlerdir.

H. S. Ramane ve arkadaşları (2008) çalışmalarında,  $n$  noktalı bir  $G$  grafının uzaklık enerjisi için bir alt ve bir üst sınır elde etmişlerdir.

I. Gutman (2008) çalışmasında,  $n$  noktalı,  $m$  kenarlı bir  $G$  grafının Estrada indeksi için nokta sayısını ve kenar sayısını ihtiva eden bazı alt sınırlar elde etmiştir.

A. Dilek Güngör ve Ş. Burcu Bozkurt (2009) çalışmalarında,  $n$  noktalı bir  $G$  grafının uzaklık Estrada indeksi için nokta sayısını ihtiva eden alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir. Ayrıca uzaklık Estrada indeksi için grafın enerjisini de içeren bir üst sınır vermişlerdir.

B. Zhou ve I. Gutman (2009) çalışmalarında,  $n$  noktalı,  $m$  kenarlı ve derece dizisi  $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  olan bir  $G$  grafının Laplacian-Estrada indeksi için nokta sayısını, kenar sayısını ve grafın ilk Zagreb indeksi olan  $Z(G) = \sum_{i=1}^n d_i^2$  yi ihtiva eden bazı alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir.

C. Adiga ve M. Smitha (2009) çalışmalarında, yönlendirilmiş bir  $G$  grafının ters Laplacian enerjisini tanımlamışlar ve nokta sayısı ikiden küçük olmayan bu  $G$  grafi için nokta sayısını içeren bir alt ve bir üst sınır elde etmişlerdir.

C. Adiga ve M. Smitha (2009) çalışmalarında, yönlendirilmiş bağlantılı bir  $G$  grafının ters Laplacian enerjisini tanımlamışlar ve nokta sayısı ikiden küçük olmayan bu  $G$  grafının enerjisi için nokta sayısını ihtiva eden bir alt ve bir üst sınır elde etmişlerdir.

J. Li ve arkadaşları (2009) çalışmalarında,  $n$  noktalı,  $m$  kenarlı, maksimum derecesi ve minimum derecesi olan bir  $G$  grafının Laplacian Estrada indeksi için nokta sayısı, kenar sayısı, maksimum ve minimum dereceye bağlı alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir. Ayrıca Laplacian Estrada indeksi için grafın Laplacian enerjisini içeren alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir.

A. Dilek Güngör ve A. Sinan Çevik (2010) çalışmalarında, bir  $G$  grafinin Harary enerjisini ve Harary Estrada indeksini tanıtmış ve incelemişlerdir. Ayrıca yeni enerji ve indeks için ayrı ayrı alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir.

A. Dilek Güngör, A. Sinan Çevik, Eylem G. Karpuz, Fırat Ateş ve İ. Naci Cangül (2010) çalışmalarında,  $n$  mertebeli  $A$  hermityen matrisinin Estrada indeksi için  $iz(A)$  ifadesini içeren bir alt ve bir üst sınır elde etmişlerdir. Ayrıca bu  $A$  hermityen matrisinin Estrada indeks ve enerjisi arasında bir bağıntı elde etmişlerdir.

Kinkar Ch. Das, A. Dilek Güngör ve A. Sinan Çevik (2010) çalışmalarında, direnç mesafesinin enerjisini, direnç mesafe matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerleri toplamı olarak tanıtmış ve bu enerji için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir.

Ş. Burcu Bozkurt, A. Dilek Güngör, I. Gutman ve A. Sinan Çevik (2010) çalışmalarında, Randic enerjiyi Randic matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerleri toplamı olarak tanıtmışlar ve bazı özelliklerini saptayarak bu enerji için alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir.

## 2. GRAFLAR ÜZERİNDE YENİ KIRCHHOFF YAPILARININ TANITILMASI

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. Özet kısmında da yazıldığı üzere, aksi belirtilmedikçe, bu bölümde verilen tüm tanım, teorem ve önerme gibi kavramlar, tarafımızdan ilk defa literatüre kazandırıldığı için, bunlar ile ilgili herhangi bir referans tez içinde kullanılmamıştır.

İlk olarak verilen bir  $G$  grafının *Kirchhoff matrisi* ve bu matrise bağlı olarak yeni bir *Kirchhoff indeksi* tanımlanacak (bkz. Alt Bölüm 2.1), daha sonra *Kirchhoff enerjisi* ve *Kirchhoff Estrada indeksi* tanımlanarak (bkz. Alt Bölüm 2.2, 2.3), bu parametreler için bazı *sınır değerleri* elde edilecektir.

### 2.1. Bir Grafın Kirchhoff Matrisi ve Yeni Bir Kirchhoff İndeksi

Bu bölümde basit bağlantılı bir graf ele alınarak, *Kirchhoff matrisi* tanımlanmış ve tanımlanan bu matris yardımıyla *yeni bir Kirchhoff indeksi çeşidi* tanımlanıp, bunun üzerinde bazı sınırlar bulunmuştur.

Bu bölümün ana temasını oluşturan temel kavramları, aşağıdaki tanımlar ile verebiliriz:

#### Tanım 2.1.1. Kirchhoff matrisi

$G$  basit bağlantılı,  $n$  elemanlı bir graf olsun.  $G$  nin *Kirchhoff matrisi*

$$Kf_A(G) = [k_{ij}]_{n \times n}$$

ile gösterilen  $n \times n$  formunda simetrik bir matris olup, bu matrisin elemanları

$$k_{ij} = \begin{cases} r_{ij}, & v_i \sim v_j, \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.1.1)$$

şeklindedir.

#### Tanım 2.1.2. Kirchhoff Laplacian matrisi

$G$  basit bağlantılı,  $n$  elemanlı bir graf olsun. Bu durumda esas köşegen üzerindeki elemanları  $Kf_A(G)$  matrisinin satır toplamlarından oluşan *yeni bir köşegen matris*

$$Kf_D(G) = \text{diag} \left( \sum_{j=1}^n k_{1j}, \sum_{j=1}^n k_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^n k_{nj} \right) \quad (2.1.2)$$

ile gösterilsin. Burada (2.1.2) ile verilen matris tanımından,  $k_i = \sum_{j=1}^n k_{ij}$  olmak üzere,

kısaca

$$Kf_D(G) = \text{diag} \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$$

olarak da yazılabileceği açıktır. Buna ek olarak,  $G$  nin *Kirchhoff Laplacian Matrisi*

$$Kf_L(G) = Kf_D(G) - Kf_A(G)$$

olacak şekilde  $n \times n$  tipinde bir simetrik matris tanımlandığında, verilen bu  $Kf_L(G)$

matrisini

$$Kf_L(G) = \begin{cases} k_i, & v_i = v_j \text{ ise,} \\ -r_{ij}, & v_i \sim v_j \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

şeklinde de ifade etmek mümkündür.

(2.1.3) ile verilen *Kirchhoff Laplacian matrisi* nin (diğer bir değişle  $Kf_L(G)$  matrisinin) özdeğerleri,  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$  olarak gösterilsin.  $Kf_L(G)$  *Kirchhoff Laplacian matrisi* nin en küçük özdeğeri olan  $\mu_0$  özdeğerine karşılık gelen özvektör,  $j = (1, 1, \dots, 1)$  dir. Bununla beraber, özel olarak,  $G$  grafi bağlantılı bir graf ise  $\mu_0$  özdeğerinin katlılığı 1 olacaktır. Ayrıca (2.1.3) ile verilen  $Kf_L(G)$  matrisi simetrik bir matris olduğundan, özdeğerleri reel değerli olup sıralıdır. Yani, kısaca

$$\mu_0 = 0 < \mu_1 < \dots < \mu_n \quad (2.1.4)$$

biçimindedir.

### Tanım 2.1.3. Yeni bir Kirchhoff indeksi

Basit bağlantılı bir  $G$  grafının *Kirchhoff matris* elemanları olan  $k_{ij}$  ler, *iki nokta arasındaki direnç mesafesi* olan  $r_{ij}$  ler ile hesaplanmak üzere, bu matrisin elemanlarıyla elde edilen *yeni Kirchhoff indeksi*  $Kf^\dagger(G)$  ile gösterilir ve

$$Kf^\dagger(G) = \sum_{v_i < v_j} k_{ij}$$

şeklinde hesaplanır.

Bu noktada, verilen herhangi bir  $G$  grafi için tanımlanacak olan keyfi bir  $B$  matrisi üzerinde spektrum tanımını hatırlatalım:

$T$  bir lineer dönüşüm olsun. Bu dönüşümün *minimal polinomunun* sıfırlarına, *karakteristik kökleri (özdeğerleri)* ve bu köklere karşılık gelen vektörlere de dönüşümün *karakteristik vektörleri (özvektör)* denir. Karakteristik köklerin oluşturduğu kümeye  $T$  dönüşümünün *spektrumu* denir ve  $spek(T)$  ile gösterilir (Jones, 1973).

Şimdi (2.1.4) deki sıralama ile verilen özdeğerlerin katlılığının, sırası ile  $s_0 = 1, s_1, s_2, \dots, s_b$  ve  $(1 \leq b \leq n)$  olduğunu kabul edelim. Ayrıca yukarıda hatırlatma olarak verdiğimiz “*spektrum*” ve Tanım 2.1.3 de verdiğimiz “*Yeni bir Kirchhoff indeksi*” tanımlarını göz önünde bulundurarak; aşağıda, bu bölümün ana sonuçlarından birini verebiliriz:

**Teorem 2.1.1.**  $G$  grafi basit bağlantılı bir graf ve  $G$  nin  $Kf_L(G)$  matrisinin *spektrumu*

$$Spek(Kf_L(G)) = \{\mu_0^1, \mu_1^{s_1}, \dots, \mu_b^{s_b}\}$$

olsun. O halde  $G$  grafının  $\mu_l$  özdeğerleri  $(1 \leq l \leq b)$  ile  $Kf^\dagger(G)$  indeksi için

$$(i) \quad Kf^\dagger(G) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^b s_l \mu_l \quad (2.1.5)$$

$$(ii) \quad \frac{(n-1)}{2} \mu_1 \leq Kf^\dagger(G) \leq \frac{(n-1)}{2} \mu_b \quad (2.1.6)$$

bağıntıları vardır.

**İspat.**

(i)  $G$  grafinin *Kirchhoff matrisi*

$$Kf_A(G) = \begin{bmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & 0 & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

olup, (2.1.3) gereği, *Kirchhoff Laplacian matrisi*

$$Kf_L(G) = Kf_D(G) - Kf_A(G) = \begin{bmatrix} k_{12} + k_{13} + \dots + k_{1n} & -k_{12} & \dots & -k_{1n} \\ -k_{21} & k_{21} + k_{23} + \dots + k_{2n} & \dots & -k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_{n1} & -k_{n2} & \dots & k_{n1} + k_{n2} + \dots + k_{n(n-1)} \end{bmatrix}$$

olur. (2.1.3) ile verilen  $Kf_L(G)$  matrisinin özdeğerlerinin toplamı, bu matrisin köşegen elemanlarının toplamına eşit olacağından (bkz Alt Bölüm 1.2.7)

$$\sum_{l=1}^b m_l \mu_l = iz(Kf_L(G))$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} iz(Kf_L(G)) &= k_{12} + k_{13} + \dots + k_{1n} + k_{21} + k_{23} + \dots + k_{2n} + \dots + k_{n1} + k_{n2} + \dots + k_{n(n-1)}, \\ &= 2 \left[ k_{12} + k_{13} + \dots + k_{n(n-1)} \right], \\ &= 2 \sum_{v_i < v_j} k_{ij} = 2Kf^\dagger(G) = \sum_{l=1}^b s_l \mu_l \end{aligned}$$

olup, buradan da (2.1.5) eşitliği elde edilir.

(ii) (2.1.4) de gösterildiği üzere,  $\mu_0 = 0$  dır. Şimdi kalan  $n-1$  tane özdeğerin her birisinin ayrı ayrı  $\mu_1$  e eşit olduğunu kabul edelim. O halde (2.1.4) eşitliğinden

$$\frac{(n-1)\mu_1}{2} \leq Kf^\dagger(G)$$

olur. Şimdi yine aynı  $n-1$  tane özdeğerin  $\mu_b$  ye eşit olduğunu kabul edelim. O halde (2.1.5) eşitliğinden

$$Kf^\dagger(G) \leq \frac{(n-1)\mu_b}{2}$$

elde edilip

$$\frac{(n-1)}{2}\mu_1 \leq Kf^\dagger(G) \leq \frac{(n-1)}{2}\mu_b$$

(2.1.6) eşitsizliğine ulaşılır.

Tüm bunlar ise aranan sonuçların doğruluğunu gösterir. ▀

## 2.2. Bir Grafın Kirchhoff Enerjisi

Bu bölümde basit bağlantılı bir grafın *Kirchhoff matrisinin* özdeğerlerine bağlı *Kirchhoff enerjisi* tarafımızdan ilk defa tanımlanmış olup, bu enerjiye bağlı sınırlar elde edilmiştir.

**Tanım 2.2.1.**  $G$  grafi,  $n$  noktalı ve  $m$  kenarlı bir graf olsun. Bu grafın *Kirchhoff matrisi* (2.1.1) de tanımlanan matris olsun ve  $Kf_A(G)$  ile gösterilsin.  $Kf_A(G)$  matrisinin özdeğerleri

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$$

olsun. Bu takdirde  $G$  grafının *Kirchhoff enerjisi*

$$EKf(G) = \sum_{i=1}^n |\delta_i| \quad (2.2.1)$$

biçiminde tanımlanır.

Aşağıda, Tanım 2.2.1 yardımı ile Kirchhoff enerjiye bağlı sınır değerleri elde edilecektir.

**Teorem 2.2.1.**  $G$  grafi,  $n \geq 2$  noktalı bir graf olsun.  $\kappa$  sembolü,  $Kf_A(G)$  matrisinin elemanlarının kareleri toplamını göstermek üzere

$$EKf(G) \leq \sqrt{n\kappa} \quad (2.2.2)$$

dir.



**İspat.** Yukarıda verilen (2.2.1) yardımıyla, *Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden*

$$\left( \sum_{i=2}^{n-1} |1 \cdot \delta_i| \right)^2 \leq \left( \sum_{i=2}^{n-1} 1^2 \right) \left( \sum_{i=2}^{n-1} \delta_i^2 \right),$$

$$\left( \sum_{i=2}^{n-1} |\delta_i| \right) \leq \sqrt{(n-2) \left( \sum_{i=2}^{n-1} \delta_i^2 \right)},$$

$$EKf(G) - |\delta_1| - |\delta_n| \leq \sqrt{(n-2)(\kappa - \delta_1^2 - \delta_n^2)},$$

$$EKf(G) \leq |\delta_1| + |\delta_n| + \sqrt{(n-2)(\kappa - \delta_1^2 - \delta_n^2)}$$

eşitsizliklerini yazmak mümkündür.

$|\delta_1| = x$  ve  $|\delta_n| = y$  seçimi ile

$$f(x, y) = x + y + \sqrt{(n-2)(\kappa - x^2 - y^2)} \quad x > 0, y > 0$$

fonksiyonu elde edilir. Burada amaç,  $f(x, y)$  fonksiyonunun *maximum değerini* bulmaktır.  $f(x, y)$  fonksiyonunun  $x$  ve  $y$  değerleri doğrultusunda birinci dereceden türevleri

$$f_x = 1 - \frac{x\sqrt{n-2}}{\sqrt{\kappa - x^2 - y^2}}, \quad f_y = 1 - \frac{y\sqrt{n-2}}{\sqrt{\kappa - x^2 - y^2}}, \quad f_{xx} = -\frac{(\kappa - y^2)\sqrt{n-2}}{(\kappa - x^2 - y^2)^{3/2}},$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -\frac{xy\sqrt{n-2}}{(\kappa - x^2 - y^2)^{3/2}} \quad \text{ve} \quad f_{yy} = -\frac{(\kappa - x^2)\sqrt{n-2}}{(\kappa - x^2 - y^2)^{3/2}}$$

olur. Buradan

$$f_x = f_y = 0 \Rightarrow x = y = \sqrt{\frac{\kappa}{n}}$$

ve  $x = y = \sqrt{\frac{\kappa}{n}}$  için

$$f_{xx} < 0, \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \frac{(n-2)(\kappa - x^2 - y^2)}{(\kappa - x^2 - y^2)^3} > 0$$

elde edilir. Yukarıda bulunan değerlere bakılarak  $x = y = \sqrt{\frac{\kappa}{n}}$  için  $f(x, y)$

fonksiyonunun *maximum değeri*

$$f(x, y) = 2\sqrt{\frac{\kappa}{n}} + \sqrt{(n-2)\left(\kappa - 2\frac{\kappa}{n}\right)},$$

$$f(x, y) = 2\sqrt{\frac{\kappa}{n}} + \sqrt{\frac{\kappa}{n}}\sqrt{(n-2)(n-2)},$$

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{\kappa}{n}}(n-2+2) = \sqrt{\kappa n}$$

olarak bulunur. O halde  $f(x, y)$  fonksiyonunun *maximum değeri* için *Kirchhoff enerjisinin* üst sınırı

$$EKf(G) \leq \sqrt{\kappa n}$$

olup (2.2.2) ifadesi elde edilir. ▣

Aşağıda ispatı ile birlikte verilen Lemma 2.2.1, bu bölümde verilecek sınır değerlerinin ispatında yardımcı rol oynamaktadır.

**Lemma 2.2.1.**  $G$  grafi,  $n$  noktalı  $m$  kenarlı bir graf olsun ve  $Kf_A(G)$  matrisinin özdeğerleri

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$$

olsun. O halde

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \delta_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 \end{array} \right\} \quad (2.2.3)$$

dir.

**İspat.** Bir matrisin özdeğerlerinin toplamı, o matrisin köşegen elemanlarının toplamına (yani izine) eşit olup,  $Kf_A(G)$  matrisinin köşegen elemanlarının toplamı 0 olduğundan

$$\sum_{i=1}^n \delta_i = iz(Kf_A(G)) = \sum_{i=1}^n k_{ii} = 0$$

yazılır. Ayrıca  $Kf_A(G)$  simetrik bir matris olduğundan  $i=1,2,\dots,n$  olmak üzere

$[Kf_A(G)]^2$  nin  $(i,i)$  elemanları için

$$\sum_{j=1}^n k_{ij}k_{ji} = \sum_{j=1}^n (k_{ij})^2$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^2 = iz[Kf_A(G)]^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (k_{ij})^2 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2$$

olup böylece (2.2.3) ifadelerinin doğruluğu gösterilmiş olur. ▣

Yukarıda verilen Lemma 2.2.1 yardımı ile, Tanım 2.2.1 de tanımlanan Kirchhoff enerjisi için çeşitli sınır değerleri aşağıda elde edilmiştir.

**Teorem 2.2.2.**  $G$  grafi,  $n$  noktalı  $m$  kenarlı bağlantılı bir graf olsun. O halde

$$\sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2} \leq EKf(G) \leq \sqrt{2n \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2} \quad (2.2.4)$$

dir.

**İspat.** *Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden*

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

yazılır. Burada  $a_i = 1$  ve  $b_i = \delta_i$  dersek,

$$\left( \sum_{i=1}^n |\delta_i \cdot 1| \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n 1^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n |\delta_i|^2 \right),$$

$$\left( \sum_{i=1}^n |\delta_i| \right)^2 \leq n \left( \sum_{i=1}^n (\delta_i)^2 \right),$$

$$EKf(G)^2 \leq 2n \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2,$$

$$EKf(G) \leq \sqrt{2n \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2} \quad (2.2.5)$$

olup buradan üst sınır elde edilmiş olur. Şimdi  $EKf(G)$  için alt sınırı bulalım.

$EKf(G)^2$  için, (2.2.1) ifadesi göz önünde bulundurulursa

$$EKf(G)^2 = \left( \sum_{i=1}^n |\delta_i| \right)^2 \geq \sum_{i=1}^n |\delta_i|^2 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2,$$

$$EKf(G) \geq \sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2} \quad (2.2.6)$$

olduğu görülür ve gerekli düzenlemelerle (2.2.6) ifadesi kolaylıkla elde edilir. (2.2.5) ve (2.2.6) ifadelerinden

$$\sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2} \leq EKf(G) \leq \sqrt{2n \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2}$$

sonucu elde edilir.

Ayrıca burada üst sınır için ikinci bir ispatı aşağıdaki gibi verebiliriz:

$Kf_A(G)$  matrisinin tüm özdeğerlerinin mutlak değerleri farkının kareleri toplamı  $M$  ile gösterilsin, yani

$$M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (|\delta_i| - |\delta_j|)^2$$

olsun. Basit bir hesapla

$$M = 2n \sum_{i=1}^n |\delta_i|^2 - 2 \left( \sum_{i=1}^n |\delta_i| \sum_{j=1}^n |\delta_j| \right) \quad (2.2.7)$$

yazılabilir.

(2.2.7) ile verilen ifadenin, (2.2.1) ve (2.2.3) de verilen ifadeler yardımıyla

$$M = 4n \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 - 2EKf(G)^2$$

olduğu açıktır.  $M$  toplamının tanımlanışından,  $M \geq 0$  olacağından

$$M + 2EKf(G)^2 = 4n \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2,$$

$$2EKf(G)^2 \leq 4n \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2,$$

$$EKf(G) \leq \sqrt{2n \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2}$$

işlemleri ile üst sınır elde edilmiş olur. ▣

**Teorem 2.2.3.**  $G$  grafi,  $n$  noktalı  $m$  kenarlı bağlantılı bir graf ve  $\nabla$  sembolü,  $Kf_A(G)$

matrisinin *determinantının mutlak değerini* göstermek üzere

$$\sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 + n(n-1)\nabla^{2/n}} \leq EKf(G) \quad (2.2.8)$$

dir.

**İspat.** (2.2.1) ve (2.2.3) ile verilen *Kirchhoff enerji* tanımından

$$\begin{aligned} EKf(G)^2 &= \left( \sum_{i=1}^n |\delta_i| \right)^2 = \sum_{i=1}^n |\delta_i|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\delta_i| |\delta_j|, \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\delta_i| |\delta_j|, \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 + \sum_{i \neq j} |\delta_i| |\delta_j| \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

eşitlikleri yazılabilir. *Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliği* yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} |\delta_i| |\delta_j| &\geq \left( \prod_{i \neq j} |\delta_i| |\delta_j| \right)^{1/n(n-1)}, \\ &= \left( \prod_{i=1}^n |\delta_i|^{2(n-1)} \right)^{1/n(n-1)}, \\ &= \prod_{i=1}^n |\delta_i|^{2/n}, \\ &= \nabla^{2/n} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Buradan

$$\sum_{i \neq j} |\delta_i| |\delta_j| \geq n(n-1)\nabla^{2/n} \quad (2.2.10)$$

sınırına ulaşılır. (2.2.9) ve (2.2.10) ile verilen ifadelerden

$$EKf(G)^2 \geq 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 + n(n-1)\nabla^{2/n},$$

$$\sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 + n(n-1)\nabla^{2/n}} \leq EKf(G)$$

bulunur. ▣

**Teorem 2.2.4.**  $G$  grafi,  $n$  noktalı  $m$  kenarlı bağlantılı bir graf olsun. O halde

$$EKf(G) \leq \frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 + \sqrt{(n-1) \left[ 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 - \left( \frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 \right)^2 \right]} \quad (2.2.11)$$

eşitsizliği vardır.

**İspat.**  $(1,1,\dots,1)$  ve  $(|\delta_2|, |\delta_3|, \dots, |\delta_n|)$  olacak şekilde tanımlı,  $(n-1)$  bileşenli 2 vektör

alır bu vektörlere *Cauchy-Schwartz eşitsizliğini* uygularsak,

$$\left( \sum_{i=2}^n |\delta_i \cdot 1| \right)^2 \leq \left( \sum_{i=2}^n 1^2 \right) \left( \sum_{i=2}^n \delta_i^2 \right),$$

$$\left( \sum_{i=2}^n |\delta_i \cdot 1| \right)^2 \leq (n-1) \left( \sum_{i=2}^n \delta_i^2 \right),$$

$$(EKf(G) - \delta_1)^2 \leq (n-1) \left( 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 - \delta_1^2 \right),$$

$$EKf(G) \leq \delta_1 + \sqrt{(n-1) \left( 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 - \delta_1^2 \right)} \quad (2.2.12)$$

eşitsizliği elde edilir.  $x = \delta_1$  denirse, aşağıdaki (2.2.13) fonksiyonu yazılır

$$f(x) = x + \sqrt{(n-1) \left( 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 - x^2 \right)} \quad (2.2.13)$$

(2.2.3) ile verilen eşitlik kullanılarak

$$x^2 = \delta_1^2 \leq 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2$$

yazılabilir. Ayrıca, kolaylıkla  $f(x)$  fonksiyonunun tanım aralığı

$$0 < x \leq \sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2}$$

olarak elde edilebilir. Diğer taraftan, (2.2.13) eşitliği ile verilen  $f$  fonksiyonunun 1. türevinin bir kökü

$$x = \sqrt{\frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2}$$

olup buradan  $f$  fonksiyonunun

$$\sqrt{\frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2} \leq x \leq \sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2}$$

aralığında *monoton azalan* bir fonksiyon olduğu görülür.

$$\sqrt{\frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2} \leq \frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 \leq \delta_1$$

eşitsizliğinin sağlandığını görmek kolaydır.

Sonuç olarak  $f$  fonksiyonu *monoton azalan* olduğundan

$$f(\delta_1) \leq f\left(\frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2\right) \quad (2.2.14)$$

yazılıp, (2.2.14) yardımıyla, (2.2.14) eşitsizliği üzerinde gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$EKf(G) \leq \frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 + \sqrt{(n-1) \left[ 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 - \left( \frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 \right)^2 \right]}$$

sınırı elde edilir. ■

### 2.3. Bir Grafın Kirchhoff Estrada İndeksi

Bu bölümde tarafımızdan ilk defa, basit bağlantılı bir grafın *Kirchhoff Estrada indeksi* tanımlanmış ve bu indeks için bazı sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca tanımlanan

*Kirchhoff enerji* ile *Kirchhoff Estrada indeks* arasındaki ilişki ortaya konarak bu iki parametre arasında bir üst sınır elde edilmiştir.

**Tanım 2.3.1.**  $G$  grafi,  $n$  noktalı bir graf olsun.  $G$  nin Kirchhoff özdeğerlerinin (*Kirchhoff* matrisinin özdeğerleri)

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$$

olduğunu daha önce (bknz. Alt Bölüm 2.2) ifade etmiştik. Buradan  $G$  grafının *Kirchhoff Estrada indeksi*

$$KEE(G) = \sum_{i=1}^n e^{\delta_i} \quad (2.3.1)$$

biçiminde tanımlanır ve  $KEE(G)$  ile gösterilir. Ayrıca

$$L_k(G) = \sum_{i=1}^n (\delta_i)^k \quad (2.3.2)$$

olmak üzere

$$KEE(G) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k}{k!} \quad (2.3.3)$$

eşitliğini yazmak da mümkündür.

(2.3.1) eşitliği ile verdiğimiz Kirchhoff Estrada indeks için, (2.3.2) ve (2.3.3) eşitlikleri yardımı ile aşağıdaki sınır değerleri elde edilmiştir.

**Teorem 2.3.1.**  $G$  grafi,  $n$  noktalı  $m$  kenarlı bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda

$$\sqrt{n^2 + 4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2} \leq KEE(G) \leq n - 1 + e^{\sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2}} \quad (2.3.4)$$

dir. (2.3.4) eşitsizliğinin her iki tarafında da eşitlik olması için gerek ve yeter şart  $G \simeq K_1$  olmasıdır.

**İspat.** (2.3.1), (2.3.2) ve (2.3.3) de verilen ifadelerden

$$KEE(G) = \sum_{i=1}^n e^{\delta_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 0} \frac{(\delta_i)^k}{k!}$$



yazılır. Reel sayılar için geçerli olan

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

eşitliğini kullanırsak

$$KEE^2(G) = \sum_{i=1}^n e^{2\delta_i} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} e^{\delta_i} e^{\delta_j} \quad (2.3.5)$$

ifadesi elde edilir. *Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden*

$$\begin{aligned} \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} e^{\delta_i} e^{\delta_j} &\geq \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} e^{\delta_i} e^{\delta_j} \right)^{\frac{2}{n(n-1)}}, \\ 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} e^{\delta_i} e^{\delta_j} &\geq n(n-1) \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} e^{\delta_i} e^{\delta_j} \right)^{\frac{2}{n(n-1)}}, \\ &= n(n-1) \left[ \left( \prod_{i=1}^n e^{\delta_i} \right)^{(n-1)} \right]^{\frac{2}{n(n-1)}}, \\ &= n(n-1) \left( e^{L_1} \right)^{\frac{2}{n}}, \\ &= n(n-1) \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} e^{\delta_i} e^{\delta_j} \geq n(n-1) \quad (2.3.6)$$

sonucuna ulaşılır. (2.3.2) ile verilen

$$L_k = \sum_{i=1}^n (\delta_i)^k$$

ifadesini kuvvet serisine açarsak

$$\left. \begin{aligned} L_0 &= n \\ L_1 &= 0 \\ L_2 &= 8 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.7)$$

ve bu şekilde elde edilen eşitlikleri (2.3.1) eşitsizliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n e^{2\delta_i} &= \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 0} \frac{(2\delta_i)^k}{k!}, \\ &= \frac{L_0}{0!} + \frac{L_1}{1!} + \frac{L_2}{2!} + \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 3} \frac{(2\delta_i)^k}{k!}, \\ &= n + 4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 3} \frac{(2\delta_i)^k}{k!} \end{aligned}$$

elde edilir. Mümkün olan en iyi alt sınırı elde edebilmek için  $\sum_{k \geq 3} \frac{(2\delta_i)^k}{k!}$  yerine bu

ifadeden daha küçük olan  $4 \sum_{k \geq 3} \frac{(\delta_i)^k}{k!}$  ifadesi ve 4 ün yerine  $t \in [0, 4]$  katsayısını alarak

işlemi sürdürürsek

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n e^{2\delta_i} &\geq n + 4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 + t \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 3} \frac{(\delta_i)^k}{k!}, \\ &= n + 4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 - nt - t \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 + t \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 0} \frac{(\delta_i)^k}{k!}, \\ &= n(1-t) + (4-t) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 + t.KEE(G) \end{aligned}$$

elde edilip

$$\sum_{i=1}^n e^{2\delta_i} \geq n(1-t) + (4-t) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 + t.KEE(G) \quad (2.3.8)$$

yazılır. (2.3.6) ve (2.3.8) eşitsizlikleri (2.3.5) ifadesinde yerine yazıldığında

$$KEE^2(G) \geq n(n-1) + n(1-t) + (4-t) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 + t.KEE(G)$$

sonuç olarak da

$$KEE(G) \geq \frac{t}{2} + \sqrt{\left(n - \frac{t}{2}\right)^2 + (4-t) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2}$$

elde edilir.

Şimdi,  $n \geq 2$  ve  $m \geq 1$  olacak şekilde  $t = x$  alarak

$$f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{\left(n - \frac{x}{2}\right)^2 + (4-x) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

Bu fonksiyonun  $[0,4]$  aralığında monoton artan olduğunu görmek kolaydır.

Sonuç olarak  $t = 0$  için  $KEE(G)$  nin en iyi alt sınırı

$$KEE(G) \geq \sqrt{n^2 + 4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2} \quad (2.3.9)$$

olarak bulunur.

Şimdi  $KEE(G)$  için üst sınır oluşturalım. Benzer şekilde (2.3.1) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} KEE(G) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 0} \frac{(\delta_i)^k}{k!}, \\ &= n + \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 1} \frac{(\delta_i)^k}{k!}, \\ &\leq n + \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 1} \frac{|\delta_i|^k}{k!}, \\ &= n + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^n (\delta_i^2)^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir, son ifade için aşağıdaki düzenlemeler yapılırsa


$$\begin{aligned} n + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^n (\delta_i^2)^{\frac{k}{2}} &\leq n + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \left[ \sum_{i=1}^n (\delta_i)^2 \right]^{\frac{k}{2}}, \\ &= n + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \left[ 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 \right]^{\frac{k}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n-1 + \sum_{k \geq 0} \frac{\left( \sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2} \right)^k}{k!}, \\
&= n-1 + e^{\sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2}}, \\
KEE(G) &\leq n-1 + e^{\sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2}} \tag{2.3.10}
\end{aligned}$$

üst sınırı elde edilir. (2.3.9) ve (2.3.10) ifadelerinden

$$\sqrt{n^2 + 4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2} \leq KEE(G) \leq n-1 + e^{\sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2}}$$

(2.3.4) eşitsizliği elde edilir.

Ayrıca (2.3.4) eşitsizliğinin her iki tarafında da eşitlik olması için gerek ve yeter şart  $G$  nin bütün *Kirchhoff özdeğerlerinin* sıfır olmasıdır.  $G$  bağlantılı bir graf olduğundan bu sadece  $G \simeq K_1$  olmasıyla mümkündür. 

Aşağıda Teorem 2.3.2 de verilecek olan (2.3.11) ifadesinin ispatı için gerekli olan bir lemma verilmiştir.

**Lemma 2.3.1. [B. Zhou ve ark, 2008]**  $G$  grafı,  $n \geq 2$  noktalı bağlantılı bir graf olsun.  $k_i$  ifadesi, (2.1.2) de verilen ifade ile tanımlan,  $Kf_A(G)$  matrisinin  $i$ . satır elemanlarının toplamı olmak üzere

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n k_i^2}{n}} \leq \delta_1(G) \tag{2.3.11}$$

(2.3.11) ifadesinin olması için gerek ve yeter şart  $k_1 = k_2 = \dots = k_n$  olmasıdır.

**Teorem 2.3.2.**  $G$  grafı,  $n \geq 2$  noktalı,  $m$  kenarlı bir graf olsun. Bu takdirde

$$KEE(G) \geq e^{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n k_i^2}{n}}} + \frac{n-1}{e^{\frac{1}{n-1} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n k_i^2}{n}}}} \quad (2.3.12)$$

eşitsizliği vardır.

**İspat.**  $G$  grafi,  $N_n$  grafına (boş graf) eşit olsun. Her bir  $1 \leq i \leq n$  için  $k_i = 0$  ve  $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = 0$  olur. Bu takdirde

$$KEE(G) = \sum_{i=1}^n e^{\delta_i} = n$$

ifadesi geçerli ve (2.3.12) eşitsizliği sağlanmış olur. Şimdi  $KEE(G)$  nin

$$KEE(G) = n$$

olduğunu kabul edelim. *Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizlik* koşulu gereği

$$\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = 0$$

olur. O halde  $G = N_n$  dir. (Yani  $G$  grafi boş bir graftır)

Diğer taraftan  $G \neq N_n$  ve  $\delta_1 > 0$  olduğu görülür. Buradan

$$KEE(G) = e^{\delta_1} + e^{\delta_2} + \dots + e^{\delta_n}$$

ve *Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden*

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n e^{\delta_i} &\geq \left( \prod_{i=2}^n e^{\delta_i} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \\ \sum_{i=2}^n e^{\delta_i} &\geq (n-1) \left( \prod_{i=2}^n e^{\delta_i} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \\ e^{\delta_1} + \sum_{i=2}^n e^{\delta_i} &\geq e^{\delta_1} + (n-1) \left( \prod_{i=2}^n e^{\delta_i} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \\ KEE(G) &\geq e^{\delta_1} + (n-1) \left( \prod_{i=2}^n e^{\delta_i} \right)^{\frac{1}{n-1}} \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

elde edilir.  $\sum_{i=1}^n \delta_i = 0$  olduğundan

$$\delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_n = -\delta_1$$

olduğu açıkça görülür. Buradan

$$KEE(G) \geq e^{\delta_1} + (n-1)(e^{-\delta_1})^{\frac{1}{n-1}} \quad (2.3.14)$$

elde edilir. O halde;

$\delta_1 = x$  olmak üzere aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$f(x) = e^x + \frac{n-1}{e^{\frac{x}{n-1}}}, \quad x > 0$$

Bu  $f(x)$  fonksiyonun birinci türevi

$$f'(x) = e^x - e^{-\frac{x}{n-1}}, \quad x > 0$$

olarak bulunur.  $f$  fonksiyonu  $x > 0$  için, artan bir fonksiyondur. O halde Lemma 2.3.1

ve (2.3.11) ifadesinden

$$KEE(G) \geq e^{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n k_i^2}{n}}} + \frac{n-1}{e^{\frac{1}{n-1} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n k_i^2}{n}}}}$$

(2.3.12) elde edilir. ▣

Aşağıda bağlantılı bir grafın *Kirchhoff enerjisi* ile *Kirchhoff Estrada indeksi* arasındaki ilişki ortaya konarak bu parametrelere bağlı iki sınır elde edilmiştir.

**Teorem 2.3.3.**  $G$  grafı,  $n$  noktalı  $m$  kenarlı bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde

$$KEE(G) - EKf(G) \leq n-1 - \sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2} + e^{\sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2}} \quad (2.3.15)$$

ve

$$KEE(G) \leq n-1 + e^{EKf(G)} \quad (2.3.16)$$

dir. (2.3.15) ve(2.3.16) eşitsizliklerinin eşit olması için gerek ve yeter şart  $G \simeq K_1$  olmasıdır.

**İspat.** Teorem 2.3.1 in ispatında yapılan işlemlere paralel olarak (2.3.15) ile verilen üst sınırın ispatına başlayalım.

$$\begin{aligned} KEE(G) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 0} \frac{(\delta_i)^k}{k!} = \frac{L_0}{0!} + \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 1} \frac{(\delta_i)^k}{k!}, \\ &\leq n + \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 1} \frac{|\delta_i|^k}{k!} = n + \sum_{i=1}^n \frac{|\delta_i|^1}{1!} + \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 2} \frac{|\delta_i|^k}{k!} \end{aligned}$$

*Kirchhoff enerji* tanımından

$$\sum_{i=1}^n \frac{|\delta_i|^1}{1!} = EKf(G)$$

yazılır ve (2.3.7) de bulunan değerler göz önünde bulundurularak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} KEE(G) &\leq n + EKf(G) + \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 2} \frac{|\delta_i|^k}{k!}, \\ KEE(G) - EKf(G) &\leq n + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^n (|\delta_i|^2)^{\frac{k}{2}} \leq n + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} \left[ \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \right]^{\frac{k}{2}}, \\ &= n + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} \left[ 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2 \right]^{\frac{k}{2}}, \\ &= n - 1 - \sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2} + \sum_{k \geq 0} \frac{\left( \sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2} \right)^k}{k!}, \\ &= n - 1 - \sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2} + e^{\sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2}} \end{aligned}$$

olduğu açıkça görülür. O halde (2.3.15) ile verilen


$$KEE(G) - EKf(G) \leq n - 1 - \sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2} + e^{\sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_{ij})^2}}$$

sınır elde edilir.

(2.3.16) ile verilen  $EKf(G)$  ye bağlı sınır için, benzer şekilde Teorem 2.3.1 in ışığında

$$\begin{aligned}
KEE(G) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 0} \frac{(\delta_i)^k}{k!} = n + \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 1} \frac{(\delta_i)^k}{k!}, \\
&\leq n + \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 1} \frac{|\delta_i|^k}{k!}, \\
&= n + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \left[ \sum_{i=1}^n |\delta_i|^k \right], \\
&\leq n + \sum_{k \geq 1} \frac{(EKf(G))^k}{k!}, \\
&= n - 1 + \sum_{k \geq 0} \frac{(EKf(G))^k}{k!}, \\
KEE(G) &\leq n - 1 + e^{EKf(G)}
\end{aligned}$$

olur.

Ayrıca (2.3.15) ve (2.3.16) eşitsizliklerinin her iki tarafında da eşitlik olması için gerek ve yeter şart  $G$  nin bütün *Kirchhoff özdeğerlerinin* sıfır olmasıdır.  $G$  bağlantılı bir graf olduğundan bu sadece  $G \simeq K_1$  olmasıyla mümkündür. 

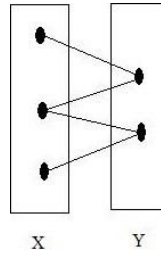


### 3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde, bu çalışmada elde edilen sınırlarla ilgili örnekler ve karşılaştırmalara yer verilmiştir. 2. Bölümde verdiğimiz tanımlar için oluşturulan sınırlara örnekler verip, bu sınırlar, örneklerle çizelgeler üzerinde karşılaştırılmıştır.

İlk olarak Teorem 2.1.1 deki *yeni bir Kirchhoff indeks* için bir örnek verelim.

**Örnek 3.1.1.** Aşağıdaki Şekil 3.1.1 ile gösterilen  $G = (X, Y : E)$  iki parçalı grafi verilsin.



Şekil 3.1.1

$G = (X, Y : E)$  grafinin *Kirchhoff matrisi*

$$Kf_A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup, *Kirchhoff Laplacian matrisi* ise

$$Kf_L(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan  $Kf^\dagger(G)$  indeksinin reel değeri

$$Kf^\dagger(G) = \sum_{v_i < v_j} k_{ij} = 4$$

dir. Ayrıca *Kirchhoff Laplacian matrisi* nin özdeğerleri

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = 0.3819, \quad \mu_2 = 1.3819, \quad \mu_3 = 2.6180 \quad \text{ve} \quad \mu_4 = 3.6180$$

şeklindedir. Buradan (2.1.5) için,

$$Kf^\dagger(G) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^b s_l \mu_l = 4$$

(2.1.6) için ise

$$2.7638 \leq Kf^\dagger(G) \leq 7.236$$

elde edilir.

Bu değerlere bağlı olarak aşağıdaki çizelgeden sonuçlar irdelenebilir.

Çizelge 3.1.1

	$Kf^\dagger(G)$	(2.1.6) (Alt sınır)	(2.1.6) (Üst sınır)
$G$	4	2.7638	7.236

Çizelge incelendiğinde (2.1.6) ile verilen *alt sınırın*, *üst sınırdan* daha iyi sonuç verdiği görülür. ■

Alt Bölüm 2.2. de bulunan Teorem 2.2.1, Teorem 2.2.2, Teorem 2.2.3 ve Teorem 2.2.4 de verilen *Kirchhoff enerji* için bir örnek verip bu teoremlerde elde edilen sınırları bir çizelge üzerinde karşılaştıralım.

**Örnek 3.1.2.** Aşağıdaki Şekil 3.1.2 deki  $G$  ve  $H$  grafları verilsin.



Şekil 3.1.2

$G$  grafinin *Kirchhoff matrisi*

$$Kf_A(G) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

ve bu  $Kf_A(G)$  matrisinin *Kirchhoff* özdeğerleri ve *determinantının mutlak değeri*

$$\delta_1(G) \cong 1.33333, \delta_2(G) \cong -0.666666 \text{ ve } \delta_3(G) \cong -0.666666 \quad (3.1.1)$$

$$\nabla(G) = 0.59259$$

olarak elde edilir.  $G$  nin *Kirchhoff* enerjisi ise

$$EKf(G) = \sum_{i=1}^3 |\delta_i| \cong 2.66666$$

olarak hesaplanır.

$H$  grafının *Kirchhoff* matrisi

$$Kf_A(H) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{8} & \frac{5}{8} & 0 \\ \frac{5}{8} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & \frac{5}{8} & \frac{5}{8} & 0 \end{bmatrix}$$

ve  $Kf_A(H)$  matrisinin *Kirchhoff* özdeğerleri ve *determinantının mutlak değeri*

$$\delta_1(H) \cong 1.5247, \delta_2(H) = 0, \delta_3(H) \cong -0.5 \text{ ve } \delta_4(H) = -1.0247 \quad (3.1.2)$$

$$\nabla(H) = 0$$

olur. Buradan  $H$  grafının *Kirchhoff* enerjisi

$$EKf(H) = \sum_{i=1}^4 |\delta_i| \cong 3.0494$$

dir.

Bu grafların *Kirchhoff enerjileri* için, yukarıda bahsedilen sınırlar ile gerçek değerleri, aşağıdaki sınırlara ve çizelgeye bakılarak kıyaslanabilir.

(2.2.2) için,

$$EKf(G) \leq 2.82842$$

$$EKf(H) \leq 3.8078$$

(2.2.4) için,

$$1.63298 \leq EKf(G) \leq 2.82842$$

$$1.9039 \leq EKf(H) \leq 3.8078$$

(2.2.8) için,

$$2.62673 \leq EKf(G)$$

$$1.9039 \leq EKf(H)$$

(2.2.11) için,

$$EKf(G) \leq 3.40303$$

$$EKf(H) \leq 5.6152$$

Örnek 3.1.2 için *alt sınır* ve *üst sınır* çizelge değerleri aşağıda *sırasıyla* verilmiştir.

**Çizelge 3.1.2**

	$EKf$	(2.2.4)	(2.2.8)
$G$	2.66666	1.63298	2.62673
$H$	3.0494	1.9039	1.9039

	$EKf$	(2.2.2)	(2.2.4)	(2.2.11)
$G$	2.66666	2.82842	2.82842	3.40303
$H$	3.0494	3.8078	3.8078	5.6152

Yukarıdaki çizelge incelendiğinde,  $G$  grafinin Kirchhoff enerjisi için, alt sınırlardan (2.2.8) *alt sınırı* ve üst sınırlardan (2.2.2) ve (2.2.4) *üst sınırları* eşit olup Kirchhoff enerjiye en yakın değerlerdir. Benzer şekilde  $H$  grafi için, alt sınırlardan (2.2.4) ve (2.2.8) *alt sınırları* eşit olup Kirchhoff enerjiye en yakın değerler ve üst

sınırlardan (2.2.2) ve (2.2.4) *üst sınırları* da aynı değere sahip olup Kirchhoff enerjiye en yakın değerlerdir. ■

Son olarak Alt Bölüm 2.3 de verilen Teorem 2.3.1, Teorem 2.3.2 ve Teorem 2.3.3 için bir örnek verip bu örnekler için bir çizelge oluşturalım.

**Örnek 3.1.3.** Örnek 3.1.2 ile verilen  $G$  ve  $H$  graflarını göz önüne alalım.

$G$  grafinin *Kirchhoff özdeğerleri* (3.1.1) de bulunduğu üzere

$$\delta_1(G) \cong 1.33333, \quad \delta_2(G) \cong -0.666666 \quad \text{ve} \quad \delta_3(G) \cong -0.666666$$

şeklindedir. Şimdi bu özdeğerlere bağlı  $G$  grafinin *Kirchhoff Estrada indeksi*

$$KEE(G) = \sum_{i=1}^n e^{\delta_i} \cong 4.82049$$

olur. Aynı şekilde  $H$  grafinin *Kirchhoff özdeğerleri* (3.1.2) deki şekliyle

$$\delta_1(H) \cong 1.5247, \quad \delta_2(H) = 0, \quad \delta_3(H) \cong -0.5 \quad \text{ve} \quad \delta_4(H) = -1.0247$$

olup bu özdeğerlere bağlı  $H$  grafinin *Kirchhoff Estrada indeksi*

$$KEE(H) = \sum_{i=1}^n e^{\delta_i} \cong 6.5592$$

olarak elde edilir.

$G$  ve  $H$  graflarının Kirchhoff Estrada indeksleri için sınır değerleri, aşağıdaki sınırlara ve çizelgeye bakılarak kıyaslanabilir.

(2.3.4) için,

$$3.78593 \leq KEE(G) \leq 7.11916$$

$$4.8218 \leq KEE(H) \leq 9.7123$$

(2.3.12) için,

$$4.82049 \leq KEE(G)$$

$$6.3823 \leq KEE(H)$$

(2.3.15) için,

$$KEE(G) \leq 5.48617$$

$$KEE(H) \leq 7.8083$$

(2.3.16) için,

$$KEE(G) \leq 16.39182$$

$$KEE(H) \leq 24.1026$$

olup *alt sınır* ve *üst sınır* çizelge değerleri *sırasıyla* aşağıdaki gibidir.

**Çizelge 3.1.3**

	<i>KEE</i>	(2.3.4)	(2.3.12)
<i>G</i>	4.82049	3.78593	4.82049
<i>H</i>	6.5592	4.8218	6.3823

	<i>KEE</i>	(2.3.4)	(2.3.15)	(2.3.16)
<i>G</i>	4.82049	7.11916	5.48617	16.39182
<i>H</i>	6.5592	9.7123	7.8083	24.1026

Yukarıdaki çizelge değerlerinden, *G* ve *H* graflarının *Kirchhoff Estrada* indekseri için, (2.3.12) ile verilen *alt sınırların* ve (2.3.15) ile verilen *üst sınırların* *KEE* değerlerine daha yakın sonuçlar verdiği görülür. ■

## 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

### 4.1. Sonuçlar

İkinci bölümde; Teorem 2.1.1 ile verilen yeni bir *Kirchhoff indeks* için bir eşitlik ve bir sınır elde edilmiş ve Çizelge 3.1.1 de sonuçlar karşılaştırılmıştır. Benzer şekilde Teorem 2.2.1, Teorem 2.2.2, Teorem 2.2.3 ve Teorem 2.2.4 de *Kirchhoff enerji* için sınırlar bulunmuş ve bu sınırlar Çizelge 3.1.2 de karşılaştırılmıştır. Teorem 2.3.1 ve Teorem 2.3.2 de *Kirchhoff Estrada indeks* için sınırlar elde edilmiş ve Teorem 2.3.3 de *Kirchhoff enerji* ile *Kirchhoff Estrada indeks* arasındaki ilişki ortaya konarak bu sınırlara bağlı karşılaştırmalar Çizelge 3.1.3 üzerinde yapılmıştır. Üçüncü bölümde verilen örneklere bakıldığında, Çizelge 3.1.1 de (2.1.6) ile verilen *alt sınırın*, *üst sınırdan* daha iyi sonuç verdiği görülür. Çizelge 3.1.2 ile verilen  $G$  grafinin Kirchhoff enerjisi için, alt sınırlardan (2.2.8) *alt sınırı* ve üst sınırlardan (2.2.2) ve (2.2.4) *üst sınırları* eşit olup Kirchhoff enerjiye en yakın değerlerdir. Benzer şekilde  $H$  grafi için, alt sınırlardan (2.2.4) ve (2.2.8) *alt sınırları* aynı değere sahip ve üst sınırlardan (2.2.2) ve (2.2.4) *üst sınırları* da aynı değere sahip olup Kirchhoff enerjiye en yakın değerlerdir. Benzer şekilde Çizelge 3.1.3 ile verilen  $G$  ve  $H$  graflarının *Kirchhoff Estrada indeksi* için, (2.3.12) ile verilen *alt sınırların* ve (2.3.15) ile verilen *üst sınırların* daha iyi sonuçlar verdiği kolaylıkla görülür. Bu saptamalar verilen örnekler üzerinde geçerli olup, alınabilecek başka örnekler için değişiklik gösterebilir.

Aşağıda verilen sonuçlar çalışma sırasında elde edilmiş olup ispat edilmemiştir. Bu sonuçlarla ilgili daha kapsamlı araştırmalar yapılabileceğini düşünüyoruz.

**Sonuç 4.1.1.** Bu çalışmada tanımlanan *Kirchhoff matrisinin* elemanları, direnç mesafesi matrisinin elemanları olarak seçilen özel bir komşuluk matrisidir. Bu şekilde ele alınan graf, tam graf ise bu grafin *Kirchhoff matrisi* literatürde bilinen direnç mesafesi matrisine, *yeni bir Kirchhoff indeksi* ise bilinen *Kirchhoff indekse* eşit olur. Aynı sınırlar bu tür graflar içinde geçerlidir.

**Sonuç 4.1.2.**  $G$  grafi  $n$  noktalı bir graf olmak üzere bu grafin  $Kf^+(G)$  indeksi

$$Kf^+(G) = n - 1$$

şeklinde elde edilebilir.

**Sonuç 4.1.3.**  $G$  grafi,  $n$  noktalı, tam iki parçalı olmayan ve hiçbir alt grafında tam iki parçalı graf içermeyen bir graf ise, bu grafın özel olarak tanımlanan  $Kf_A(G)$  matrisi literatürde bilinen komşuluk matrisine eşit olur.

## 4.2. Öneriler

Bir grafın komşuluk matrisi özel ağırlıklarla yeniden tanımlanarak, grafların yapısı farklı açılardan incelenebilir. Bunun dışında, bir grafın direnç mesafesine bağlı yeni farklı indeksler tanımlanabilir. Ayrıca bazı özel grafların enerji ve Estrada indeksleri ile ilgili yeni çalışmalar yapılabilir. Bu çalışmanın ötesinde, elde edilen bu sınırlar için eşitlik koşulları da oluşturulabilir.



**KAYNAKLAR**

- Aldous, J. M., Wilson R. J. 2000, Graphs and Applications, The Open University  
Printed in Great Britain.
- Bozkurt, Ş. B., Güngör, A. D., Gutman I., Çevik, A. S., 2010, Randic Matrix and  
Randic Energy, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 64, 239-250.
- Bozkurt, D., Türen, D., 2003, Lineer Cebir, *S.D.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi*, Konya.
- De La Pena, J., Gutnam, I., Rada, J., 2007, Estimating the Estrada index, *Linear  
Algebra and Its Applications*, 427, 70-76.
- E. Estrada, 2000, Characterization of 3D Molecular Structure, *Chem. Phys. Lett.*, 319,  
713-718.
- Gutman, I., 1978, The Energy of a Graph, *Ber. Math. Stst. Sect. Forschungsz. Graz*,  
103, 1-22.
- Gutman, I., 2008, Lower bounds for Estrada index, *Publications De L'institut  
Mathematique*, 83, 1-7.
- Güngör, A., D, Çevik, A. S., 2010, On the Harary energy and Harary Estrada index of a  
graph, *MATCH Comput. Chem.*, 64, 281-296.
- Horn, R. A., Johnson, C. R., 1985, Matrix Analysis, *Cambridge University Pres New  
York*.
- Jones, B. I., 1973, Lineer Algebra, The University of Colorado.
- Kinkar, Ch. Das, Güngör, A. D., Çevik, A. S., 2010, On the Kirchhoff index and the  
resistance-distance energy of a graph, yayın aşamasında.
- Klein, D. J., Randic M., 1993, Resistance distance, *Applied graph theory and discrete  
mathematics in chemistry, J. Math. Chem.*, 12, 81-95.
- Marshall, A. W., Olkin, I., 1979, Inequalities, *Theory of Majorization and Its  
Applications, Academic*, New York.
- Rodriguez, J. A., 2005, A spectral approach to the Randic index, *Linear Algebra and Its  
Applications* 400, 339-344.
- Xiao, W., Gutman, I., 2003, On resistance matrices, *MATCH Commun. Math. Comput.  
Chem.*, 49, 67-81.
- Zhou, B., Trinajstic, N., 2008, Maximum Eigenvalues of the Reciprocal Distance  
Matrix and the Reserve Wiener Matrix, *Int. J. Quant. Chem.*, 108, 858-864.
- Zhang, F., 1999, Matrix Theory, *Basic Results and Techniques*, North America.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Betül Acar  
**Uyruğu** : T.C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Uşak / Banaz 18.08.1986  
**Telefon** : 05058357481  
**Faks** :  
**e-mail** : [acarbetul86@hotmail.com](mailto:acarbetul86@hotmail.com)

### EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Güventaş Lisesi, Selçuklu, Konya	2003
Üniversite	: Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2008
Yüksek Lisans	: Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2011
Doktora	:	

**YABANCI DİLLER:** İngilizce

**YAYINLAR:** Acar, B., Maden (Güngör), A. D., Çevik, A. S., 2011, On the Kirchhoff matrix, new Kirchhoff indexes and the Kirchhoff energy, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, yayım aşamasında. (Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır.)